



HAL
open science

Introduction aux formes modulaires de Hilbert et à leur propriétés différentielles.

Federico Pellarin

► **To cite this version:**

Federico Pellarin. Introduction aux formes modulaires de Hilbert et à leur propriétés différentielles.. Séminaires et congrès, 2005, 12, pp.215-269. hal-00002264

HAL Id: hal-00002264

<https://hal.science/hal-00002264v1>

Submitted on 22 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction aux formes modulaires de Hilbert et à leur propriétés différentielles.

Federico Pellarin

Table des matières

1	Introduction.	2
1.1	Motivation et structure de ce texte.	3
1.2	Prélude : le cas elliptique.	4
2	Groupes modulaires de Hilbert.	8
2.1	Propriétés de base.	9
2.2	Une description de X_Γ	11
3	Formes et fonctions modulaires de Hilbert.	12
3.1	Fonctions régulières aux pointes.	13
3.2	Propriétés de base des formes modulaires de Hilbert.	15
4	Exemples de formes modulaires de Hilbert.	18
4.1	Séries d'Eisenstein.	19
4.2	Fonctions thêtas.	23
4.3	Le cas $n = 2$ détaillé.	26
5	La forme parabolique Θ.	27
5.1	Un domaine fondamental éloigné du bord de \mathcal{H}^2	28
5.2	Le diviseur de Θ	31
5.3	Structure d'un certain anneau de formes modulaires.	34
6	Propriétés différentielles de formes modulaires de Hilbert.	36
6.1	Opérateurs multilinéaires.	39
6.2	Théorème de structure pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$	46
6.3	Polynômes différentiels.	49

6.4	Équations différentielles ayant des solutions modulaires.	53
6.5	L'anneau des formes modulaires de tout poids pour Γ , et sa clôture algébrique.	59

1 Introduction.

Pour expliquer les motivations de cette série de six exposés, nous décrivons brièvement un théorème de Nesterenko dans [19] (voir le texte [5] de Bosser dans ce volume).

Posons $q = e^{2\pi i\tau}$ avec τ un nombre complexe de partie imaginaire positive (où i désigne le nombre complexe $\sqrt{-1}$), soient $E_2(q), E_4(q), E_6(q)$ les séries d'Eisenstein usuelles, de poids 2, 4, 6 respectivement.

Théorème 1 *Si $q \neq 0$ alors le sous-corps de \mathbb{C} engendré par $q, E_2(q), E_4(q), E_6(q)$ a un degré de transcendance sur \mathbb{Q} au moins 3.*

La preuve de Nesterenko s'appuie sur la propriété suivante des séries E_2, E_4, E_6 . L'opérateur de dérivation $D = q \frac{d}{dq}$ fait de l'anneau $\mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6]$ un anneau *différentiel*. Plus en particulier, nous avons :

$$\begin{aligned}
 DE_2 &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \\
 DE_4 &= \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6) \\
 DE_6 &= \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

On remarque que :

$$\mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6] = \mathbb{Q}[E_2, DE_2, D^2E_2].
 \tag{2}$$

La forme $E_2(e^{2\pi i\tau})$, quasi-modulaire de poids 2, contient donc toutes les informations qui permettent d'accéder à une preuve du théorème.

Dans ces exposés, nous voulons faire une introduction à des problèmes analogues, mais en deux ou plusieurs variables complexes.

1.1 Motivation et structure de ce texte.

Nous commençons par décrire les groupes modulaires de Hilbert et leur action sur les produits de copies de demi-plans supérieurs complexes. Nous faisons ensuite une courte introduction aux formes modulaires de Hilbert, qui sont des formes modulaires de plusieurs variables complexes, associées à des corps de nombres totalement réels : le nombre de variables est égal au degré du corps. Nous construisons des formes modulaires de Hilbert : des séries d'Eisenstein, et des séries thêta.

Nous regardons ensuite les zéros de certaines formes modulaires de Hilbert, par analogie avec le discriminant elliptique $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728$ (de Jacobi), qui est sans zéros pour $|q| < 1$. La fonction E_2 est égale à la dérivée logarithmique $D\Delta/\Delta$. Grâce à (2), ceci permet de retrouver le système (1).

En deux ou plusieurs variables, nous observons qu'il n'existe pas de forme modulaire de Hilbert sans zéros dans son domaine de définition, ce qui constitue une difficulté dans la construction d'une généralisation du système (1).

De plus, en deux ou plusieurs variables, il existe une division importante entre formes modulaires dites de poids *parallèle* et celles dites de poids *non parallèle*, qui n'existe pas en une variable complexe.

Il s'avère que des généralisations partielles de la forme modulaire Δ de Jacobi en plusieurs variables existent. Nous donnons un exemple explicite en deux variables complexes : la forme modulaire ainsi construite permettra de calculer explicitement un certain anneau de formes modulaires de Hilbert de deux variables complexes.

En général, les structures d'anneaux (gradués) des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle peuvent être déterminées de plusieurs façons. La méthode la plus ancienne consiste à étudier des séries d'Eisenstein de petit poids (le plus souvent de poids $(1, \dots, 1)$), pour des sous-groupes de congruence, tordues par des caractères de Dirichlet, ou des séries thêtas : c'est la méthode introduite par Hecke, avec des contributions de Kloosterman, Götzky, Gundlach, Maass, Resnikoff. Les théorèmes de structure les plus précis concernent uniquement le cas des formes modulaires de Hilbert de deux variables complexes.

Cette méthode a été remplacée ou complétée dans plusieurs cas par l'utilisation de la géométrie des surfaces lorsque Hirzebruch a découvert comment construire explicitement un modèle désingularisé de compactifications de surfaces modulaires de Hilbert. On a alors pu utiliser la théorie de l'intersection dans les surfaces, et déterminer explicitement des bases d'espaces vectoriels

de formes modulaires (i.e. sections de faisceaux inversibles). Le livre [8] contient les fondations de cette technique.

Dans ces exposés nous proposons une méthode encore différente, qui consiste à exploiter les propriétés différentielles des formes modulaires (Jacobi, Rankin, Resnikoff). En étudiant ces propriétés, nous décrivons complètement la structure de l'anneau des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle, associées au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Après avoir construit deux formes modulaires φ_2, χ_5 (de poids $(2, 2)$ et $(5, 5)$), nous montrons que l'anneau des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} M_{r\mathbf{1}}(\Gamma)$$

pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ est un anneau de type fini, dont on peut déterminer explicitement la structure, et est engendré par les images de φ_2, χ_5 par certains opérateurs différentiels que nous décrivons.

Par contre, nous montrons que l'anneau des formes modulaires de Hilbert (de poids quelconque) associé à un corps quadratique réel K quelconque

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \bigoplus_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^2} M_{\mathbf{r}}(\Gamma)$$

n'est pas un anneau de type fini, et ne peut même pas être engendré par les images d'un ensemble fini de formes modulaires, par des opérateurs différentiels.

Suivant Resnikoff, nous étudions le corps différentiel engendré par les dérivées partielles d'une seule forme modulaire de Hilbert. Dans le cas de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, on verra que l'anneau engendré par toutes les dérivées partielles de la forme modulaire φ_2 est contenu dans un anneau de type fini, que l'on décrira explicitement.

1.2 Prélude : le cas elliptique.

Une forme modulaire *elliptique* est par définition une forme modulaire pour le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ (cf. [23] p. 135 ou [18]).

Proposition 1 *Soit F une forme modulaire elliptique non constante de poids f . Alors :*

1. *La fonction $fF(d^2F/dz^2) - (f + 1)(dF/dz)^2$ est une forme modulaire de poids $2f + 4$.*

2. Les fonctions $F, (dF/dz), (d^2F/dz^2), (d^3F/dz^3)$ sont algébriquement dépendantes sur \mathbb{C} .
3. Les fonctions $F, (dF/dz), (d^2F/dz^2)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(e^{2\pi iz})$.

Ceci est la proposition 1.1 p. 2 de [19] : ce résultat est dû à Mahler, mais s'appuie fortement sur des contributions de Hurwitz et Rankin. L'opérateur

$$F \mapsto (2\pi i)^{-2} \left(fF \frac{d^2F}{dz^2} - (f+1) \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right)$$

est une spécialisation des crochets de Rankin-Cohen ainsi définis. Pour deux formes modulaires F, G de poids respectifs f, g :

$$[F, G]_n := \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{f+n-1}{n-r} \binom{g+n-1}{r} F^{(r)} G^{(n-r)},$$

où $F^{(r)}$ désigne la dérivée r -ième de F par rapport à la variable complexe z . La forme modulaire $[F, G]_{2n}$ est de poids $f+g+2n$ si elle est non nulle. Par exemple, on a :

$$[F, F]_2 = (f+1)(2\pi i)^{-2} \left(fF \frac{d^2F}{dz^2} - (f+1) \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right).$$

Les crochets de Rankin-Cohen sont étudiés en détail dans [18] et [26].

Il existe des relations liant ces crochets, lorsqu'ils sont appliqués à une même forme modulaire. En voici un exemple :

$$[F, [F, F]_2]_2 = \frac{6f(f+1)}{(f+2)(f+3)} F[F, F]_4.$$

D'autres exemples peuvent être construits avec la remarque du paragraphe 6.3.

Le plus simple des crochets est le crochet de Rankin

$$[F, G]_1 = fF \frac{dG}{dz} - gG \frac{dF}{dz}.$$

Ce crochet est antisymétrique ⁽¹⁾, et il peut être utilisé pour déterminer la structure d'anneau gradué de toutes les formes modulaires elliptiques : cet anneau est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, en deux indéterminées X_0, X_1 .

On commence par une série d'Eisenstein

$$E_4^*(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^4},$$

qui est une forme modulaire elliptique non nulle de poids 4. La proposition 1 points 1, 2, et le fait que l'opérateur différentiel $F \mapsto [F, F]_2$ est d'ordre 2, implique que $\Delta^* = [E_4^*, E_4^*]_2$ est une forme modulaire non nulle de poids 12. De plus, E_4^*, Δ^* sont algébriquement indépendantes.

En utilisant le système (1), on trouve $D\Delta^* = E_2\Delta^*$. Ainsi, $\Delta^*(e^{2\pi iz})$ ne s'annule pas dans $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Im(z) > 0\}$ (on peut également appliquer la formule p. 143 de [23] (voir aussi [18]).

On calcule ensuite $[E_4^*, \Delta^*]_1$. On voit facilement que cette forme modulaire est non nulle : en effet, si cette forme était nulle on aurait l'existence d'une constante $c \in \mathbb{C}^\times$ et d'entiers x, y non nuls, avec $E_4^{*x} = c\Delta^{*y}$. Or, E_4^* est non parabolique, et Δ^* est parabolique : donc $[E_4^*, \Delta^*]_1 \neq 0$.

La forme modulaire $[E_4^*, \Delta^*]_1$ est parabolique de poids 18. Ceci veut dire que la fonction $E_6^* := [E_4^*, \Delta^*]_1 / \Delta^*$ est une forme modulaire non nulle de poids 6, car $\Delta^*(e^{2\pi iz})$ ne s'annule pas dans \mathcal{H} . Nous devons maintenant prouver que E_4^*, E_6^* sont algébriquement indépendantes, mais ceci ne découle pas de la proposition 1.

Pour ceci, on note qu'il existe une combinaison linéaire $\lambda E_4^{*3} + \mu E_6^{*2}$ qui est une forme parabolique. C'est donc un multiple $c\Delta^*$. Si cette combinaison linéaire n'est pas triviale, la constante de proportionnalité c est non nulle et E_4^*, E_6^* sont algébriquement indépendantes car E_4^* et Δ^* le sont, par la proposition 1. On doit calculer quelques coefficients de Fourier. On note c_4, c_6, c_{12} des nombres complexes non nuls tels que les séries de Fourier de $E_4(q) = c_4 E_4^*(z), E_6(q) = c_6 E_6^*(z), \Delta(q) = c_{12} \Delta^*(z)$ (avec $q = e^{2\pi iz}$) soient telles que le coefficient du terme de plus petit degré en q soit égal à 1. On a

¹Plus généralement, les crochets $[\cdot, \cdot]_{2n+1}$ sont antisymétriques, et les crochets $[\cdot, \cdot]_{2n}$ sont symétriques.

donc :

$$\begin{aligned}
E_4 &= 1 + 240q + \dots \\
\Delta &= q + \dots \\
\Delta^{-1}[E_4, \Delta]_1 &= (4(1 + \dots)(q + \dots) - 12(q + \dots)(240q + \dots))/(q + \dots) \\
&= 4(1 - 504q + \dots),
\end{aligned}$$

d'où $E_6 = 1 - 504q + \dots$. On calcule :

$$\begin{aligned}
[E_4, E_6]_1 &= 4(1 + \dots)(-504q + \dots) - 6(1 + \dots)(240q + \dots) \\
&= -2 \cdot 1728\Delta.
\end{aligned}$$

Ceci implique qu'il n'existe pas de relation $E_4^n = \lambda E_6^m$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, et la constante de proportionnalité c est non nulle : donc les formes modulaires E_4, E_6 sont algébriquement indépendantes (naturellement, on peut aussi voir ceci en calculant quelques autres coefficients de Fourier, mais notre souci sera par la suite de généraliser *cette* démonstration).

On montre maintenant que toute forme modulaire F s'écrit de manière unique comme *polynôme isobare* ⁽²⁾ de $\mathbb{C}[E_4, E_6]$: on fait une récurrence sur le poids k de F . Si F est parabolique, F/Δ est une forme modulaire de poids $k - 12$. Si F n'est pas parabolique et est de poids $k \geq 4$ alors il existe un polynôme isobare $P \in \mathbb{C}[E_4, E_6]$ de même poids que F , tel que $F - P$ soit une forme parabolique, et on se ramène au cas précédent.

Il reste à traiter le cas où F est de poids 0 ou 2. Si F est de poids 0, alors F est une constante (cf. [23] p. 143). Si F a poids 2 et est non nulle, alors elle ne peut pas être une forme parabolique (il n'existe pas de formes modulaires de poids négatif : cf. [23] p. 143). Il faut de plus que $F^2 = \lambda_1 E_4$ et $F^3 = \lambda_2 E_6$, avec $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ (car sinon, on trouve des formes modulaires de poids négatif qui doivent être nulles), mais ceci entraîne une relation de dépendance algébrique entre E_4 et E_6 , qui ne peut pas exister : il n'existe pas de forme modulaire non nulle de poids 2.

Les autres détails que nous avons omis dans cette démonstration, peuvent être facilement trouvés par le lecteur. Nous avons commencé ce raisonnement avec la série d'Eisenstein E_4^* : on peut voir qu'on peut commencer également avec E_6^* ou Δ^* .

Dans la suite, nous voulons généraliser ces arguments aux formes modulaires de Hilbert.

²Un polynôme isobare est un polynôme en des formes modulaires qui est une forme modulaire.

2 Groupes modulaires de Hilbert.

Nous faisons ici une courte introduction aux groupes modulaires de Hilbert. Le groupe $\text{Bih}(\mathcal{H}^n)$ des automorphismes biholomorphes de \mathcal{H}^n est l'extension de sa composante neutre $\text{Bih}_0(\mathcal{H}^n)$ par le groupe fini des permutations des coordonnées z_i . D'autre part, $\text{Bih}_0(\mathcal{H}^n)$ est le produit direct de n copies de $\text{Bih}(\mathcal{H}^1) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$1 \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})^n \rightarrow \text{Bih}(\mathcal{H}^n) \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1,$$

où \mathfrak{S}_n désigne le groupe symétrique agissant sur un ensemble fini à n éléments. Le groupe $\text{Bih}_0(\mathcal{H}^n)$ agit sur \mathcal{H}^n de la manière suivante. Posons $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$, soit $\gamma \in \text{Bih}_0(\mathcal{H}^n)$:

$$\gamma = \left(\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{array} \right) \right).$$

Alors :

$$(\gamma, \underline{z}) \in \text{Bih}_0(\mathcal{H}^n) \times \mathcal{H}^n \mapsto \gamma(\underline{z}) := \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \dots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n} \right) \in \mathcal{H}^n.$$

Soit K un corps totalement réel de degré n , d'anneau d'entiers \mathcal{O}_K . Nous avons n plongements :

$$\sigma_i : K \rightarrow \mathbb{R}.$$

Posons $\Sigma = (\sigma_i)_{i=1, \dots, n}$. Le *groupe modulaire de Hilbert* (associé à \mathcal{O}_K) est le sous-groupe $\Gamma_K = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ de $\mathbf{SL}_2(K)$:

$$\Gamma_K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathcal{O}_K \text{ et } ad - bc = 1 \right\}.$$

Le groupe Γ_K se plonge dans $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})^n$ par le biais du plongement Σ . Si $n = 1$, on retrouve le groupe modulaire $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ usuel. Si $n = 2$, nous noterons $\sigma_1(\mu) = \mu$ et $\sigma_2(\mu) = \mu'$.

Si \mathfrak{A} est un idéal non nul de \mathcal{O}_K , le noyau $\Gamma_K(\mathfrak{A})$ de l'homomorphisme $\Gamma_K \rightarrow \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K/\mathfrak{A})$ est un sous-groupe normal d'indice fini de Γ_K . On l'appelle parfois *sous-groupe de congruence principal* associé à \mathfrak{A} .

Dans toute la suite, lorsque le corps de nombres K sera clairement déterminé, nous écrirons $\Gamma = \Gamma_K$ et $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma_K(\mathfrak{A})$.

2.1 Propriétés de base.

Comme dans le cas $n = 1$, l'action de Γ (ou de $\Gamma(\mathfrak{A})$) possède des bonnes propriétés topologiques, que nous ne vérifions pas ici (voir [7], chapitre 1).

On montre ainsi que Γ agit *proprement* sur \mathcal{H}^n (c'est-à-dire que si A est un compact de \mathcal{H}^n , alors $\gamma(A) \cap A \neq \emptyset$ pour au plus une finitude de $\gamma \in \Gamma$).

Pour montrer cette propriété, on utilise le fait que Γ est *discret* dans $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})^n$ ⁽³⁾, ce qui est garanti par le fait que \mathcal{O}_K est à son tour discret dans \mathbb{R}^n via le plongement Σ (voir [7] proposition 1.2 p. 7 et proposition 2.1 p. 21).

Exemple pour $n = 2$. Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, le groupe Γ_K est engendré par les trois matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon' \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, qui satisfont

$$U^{-1} = TUT, S^{-1} = TSTST. \quad (3)$$

Pour vérifier ceci, on remarque tout d'abord que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\epsilon]$, et donc que le sous-groupe $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset \Gamma$ est engendré par S, U .

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $\gamma \neq 0$. Pour tout $\nu \in \mathcal{O}_K$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\nu - \beta & \alpha \\ \gamma\nu - \delta & \gamma \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons choisir ν avec $|\mathbf{n}(\gamma\nu - \delta)| < |\mathbf{n}(\gamma)|$, où $\mathbf{n}(\gamma)$ désigne la norme absolue de γ , et appliquer une hypothèse de récurrence sur l'entier $|\mathbf{n}(\gamma)|$ (voir [9] pp. 414-416).

Notation. Dans ces exposés, nous faisons jouer à $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ un rôle particulier. Dans ce cas, et uniquement dans ce cas, nous écrirons $\Upsilon = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$.

Soit Ω un sous-groupe discret de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})^n$. L'action de Ω s'étend de manière naturelle en une action sur $\overline{\mathcal{H}}^n$, où

$$\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

³Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est discret si pour tout compact U de \mathbb{R}^N , $U \cap E$ est fini.

Définition. On dit que Ω a une *pointe* en $\infty := (i\infty, \dots, i\infty) \in \overline{\mathcal{H}}^n$ si Ω contient un sous-groupe Ω_∞ :

$$\Omega_\infty = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 \\ 0 & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_n & \nu_n \\ 0 & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix} \right) \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ et } \nu_i \in \mathbb{R} \right\},$$

ayant la propriété que l'ensemble $\{(\nu_1, \dots, \nu_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ est un réseau, et l'ensemble $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\} \subset \mathbb{R}_{>0}^n$ est un sous-groupe multiplicatif libre de rang $n - 1$ sur \mathbb{Z} . Par exemple, $\infty \in \overline{\mathcal{H}}$ est une pointe de $\Omega = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, et Ω_∞ est le groupe cyclique engendré par toutes les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \overline{\mathcal{H}}^n$. On dit que Ω a une *pointe* en a s'il existe un élément $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})^n$ tel que $A(a) = \infty$ et tel que le groupe $A \cdot \Omega \cdot A^{-1}$ a une pointe en ∞ .

Le sous-groupe Ω_∞ s'appelle le *stabilisateur* de ∞ . Pour K corps de nombres totalement réel de degré n , Γ_∞ est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathcal{O}_K \cong \mathbb{Z}^n$ par $(\mathcal{O}_K^\times)^2 \cong \mathbb{Z}^{n-1}$: ∞ est toujours une pointe des groupes modulaires de Hilbert Γ . Par exemple, Le groupe Υ_∞ est engendré par S, U .

On peut étendre ces définitions à un quelconque sous-groupe de Γ d'indice fini, par exemple $\Gamma(\mathfrak{A})$, pour un idéal non nul \mathfrak{A} de \mathcal{O}_K . Plus l'indice est grand, plus on trouve dans $\overline{\mathcal{H}}^n$ un grand nombre de pointes non équivalentes modulo l'action de $\Gamma(\mathfrak{A})$. Par un calcul élémentaire, on voit que les pointes de Γ se situent dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Le groupe Γ peut posséder plusieurs pointes non équivalentes.

Lemme 1 *L'ensemble des classes d'équivalence des pointes de $\overline{\mathcal{H}}^n$ sous l'action de Γ est en bijection avec les classes d'idéaux modulo les idéaux principaux de K .*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que les éléments de $\mathbb{P}_1(K)$ sont des pointes.

Nous avons déjà vu que ∞ est une pointe. Soit $a \in K = \mathbb{P}_1(K) - \{\infty\}$ et considérons

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(K).$$

On a $A(a) = \infty$, donc le groupe :

$$A \cdot \Gamma \cdot A^{-1}$$

possède une pointe en ∞ , et Γ a une pointe en a . Nous venons de montrer que $\mathbb{P}_1(K) \subset \{\text{pointes}\}$.

Réciproquement, soit $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ une pointe. Par définition il existe une matrice P de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P(p) = \infty$ et telle que le groupe $P \cdot \Gamma \cdot P^{-1}$ contient un groupe de translations isomorphe à \mathcal{O}_K . Toutes ces translations sont des éléments *paraboliques*, i.e. de trace réduite ± 2 . Soit $t \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une de ces translations. En vertu de la condition sur la trace, les équations :

$$\sigma_i(t)(p_i) = p_i \text{ pour } i = 1 \dots, n$$

ont une unique solution p , et de plus, $p \in \Sigma(K)$, donc $\mathbb{P}_1(K) \supset \{\text{pointes}\}$.

Le fait que $\mathbb{P}_1(K)/\Gamma$ soit en bijection avec le groupe des classes d'idéaux de K est bien connu et se voit en sachant que tout idéal fractionnaire non principal \mathcal{I} de K est engendré par deux éléments $a, b \in K$ distincts.

2.2 Une description de X_Γ .

Un *ensemble fondamental* $E \subset \mathcal{H}^2$ pour Γ est un sous-ensemble tel que pour tout $\underline{z} \in \mathcal{H}^2$ il existe $\gamma \in \Gamma$ avec $\gamma(\underline{z}) \in E$.

Un *domaine fondamental* $D \subset \mathcal{H}^2$ pour Γ est un ensemble fondamental mesurable pour la mesure de Lebesgue, tel que le sous-ensemble dont les éléments sont les $\underline{z} \in D$ tels que $\gamma(\underline{z}) \in D$ pour quelques $\gamma \in \Gamma - \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, ait une mesure nulle.

Le groupe Γ étant discret, tout ensemble fondamental qui est mesurable contient un domaine fondamental (voir [7]).

1. L'espace $X_\Gamma := (\mathcal{H}^n \cup \mathbb{P}_1(K))/\Gamma$, muni d'une certaine topologie naturelle engendrée par des systèmes de voisinages de points de \mathcal{H}^n et de pointes, est compact. Nous ne donnerons pas de démonstration générale de ce fait, pour laquelle nous renvoyons à [7], chapitre 1, ou à [8], chapitre 1. Dans le paragraphe 5.1 nous construirons explicitement un domaine fondamental dans le cas $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, et cette propriété de compacité peut être vue facilement à partir de cette construction.

2. En général, l'espace X_Γ possède des singularités. Ces singularités ont leur support dans l'ensemble des pointes et des points *elliptiques* (points fixes de transformations d'ordre fini). Voici un exemple explicite de point elliptique dans le cas $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$: le point $\underline{\zeta} := (\zeta_5, \zeta_5^2) \in \mathcal{H}^2$, avec $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$.

Ce point est un point elliptique d'ordre 5 pour Υ , car la matrice $\phi = \begin{pmatrix} -\epsilon' - 1 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est d'ordre 5, satisfait $\phi(\underline{\zeta}) = \underline{\zeta}$.

3. Si $n > 1$, toutes les pointes déterminent des singularités. Une démonstration homologique de ce fait se trouve dans [7] p. 30. Les points elliptiques déterminent parfois des singularités : on peut démontrer que l'orbite du point $\underline{\zeta}$ défini ci-dessus est un point régulier dans X_Υ .

Pour simplifier l'exposition, nous supposons dorénavant que l'anneau des entiers de K est principal. C'est le cas si $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

3 Formes et fonctions modulaires de Hilbert.

Il existe des formes modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ sans zéros dans \mathcal{H} : la forme Δ en est un exemple. Nous introduisons ici les formes modulaires de Hilbert associées à un corps de nombres totalement réel de degré n , et nous faisons une étude analytique : il en résultera qu'il n'existe pas de forme modulaire de Hilbert sans zéros dans \mathcal{H}^n .

Fixons un corps totalement réel K . Soit Ω un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma := \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ (dans la plupart des exemples, Ω est un sous-groupe de congruence principal), soit $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère. Nous définissons les formes modulaires de Hilbert pour Ω avec caractère, de deux manières différentes, suivant que $K = \mathbb{Q}$ ou $K \neq \mathbb{Q}$.

Si $K = \mathbb{Q}$, une forme modulaire de Hilbert f de poids $n \in \mathbb{Z}$ pour Ω avec caractère ξ est par définition une forme modulaire pour le groupe $\Omega \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids n , avec caractère ξ . En particulier, toute forme modulaire de Hilbert pour $K = \mathbb{Q}$ est holomorphe aux pointes de Ω .

Définition. Si $K \neq \mathbb{Q}$, une forme modulaire de Hilbert de poids $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec caractère ξ pour Ω est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant :

$$f(\gamma(\underline{z})) = \xi(\gamma) \prod_{i=1}^n (\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d))^{r_i} f(\underline{z}), \quad (4)$$

pour tous $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$.

Si $\xi = 1$, on parle plus simplement de formes modulaires de Hilbert (sans mentionner « avec caractère trivial »).

Définition. Une *fonction modulaire de Hilbert* de poids $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ pour Ω est une fonction *méromorphe* $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant (4) pour tous $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$, avec $\xi = 1$.

3.1 Fonctions régulières aux pointes.

Notons $\mathbf{t} : K \rightarrow \mathbb{Q}$ la trace de K sur \mathbb{Q} . Pour simplifier les notations, nous étendons cette fonction de la manière suivante. Si $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, nous écrivons $\mathbf{t}(\underline{z}) = z_1 + \dots + z_n$; ainsi par exemple, si $\nu \in K$, nous écrivons $\mathbf{t}(\nu \underline{z})$ plutôt que $\sigma_1(\nu)z_1 + \dots + \sigma_n(\nu)z_n$.

Les conditions analytiques imposées dans la définition d'une forme modulaire de Hilbert pour $K \neq \mathbb{Q}$ sont plus faibles que pour $K = \mathbb{Q}$. On ne demande pas que les formes modulaires de Hilbert soient holomorphes à l'infini. Nous expliquons ici ce phénomène.

Soit K un corps de nombres totalement réel, de degré $n > 1$. Le théorème des unités de Dirichlet implique :

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Soit $\underline{c} = (c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Définition. Soit M un \mathbb{Z} -module complet de K , soit V un sous-groupe d'indice fini de \mathcal{O}_K^\times tel que $\eta M = M$ pour tout $\eta \in V$. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_{\underline{c}}(V, M)$ des fonctions régulières de poids \underline{c} au voisinage de ∞ est constitué des séries de Fourier à coefficients complexes, absolument convergentes dans un sous-ensemble non vide de \mathcal{H}^n :

$$f(\underline{z}) := \sum_{\nu \in M^*} d_\nu \exp\{2\pi i \mathbf{t}(\underline{z}\nu)\}, \quad (5)$$

où M^* désigne le dual de M pour la trace \mathbf{t} , avec la condition que

$$d_{\nu\epsilon} = d_\nu \prod_{i=2}^n \sigma_i(\epsilon)^{c_i},$$

pour tout $\epsilon \in V^2$ et $\nu \in M^*$.

Si $f \in \mathcal{A}_{\underline{c}}(V, M)$ a la série de Fourier (5), alors $d_\nu \neq 0$ implique $\sigma_i(\nu) \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où le fait que f converge au voisinage de la pointe

∞ . La vérification est laissée en exercice : il faut utiliser l'existence d'unités $\epsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ avec

$$\sigma_1(\epsilon) > 1, 0 < \sigma_2(\epsilon) < 1, \dots, 0 < \sigma_n(\epsilon) < 1,$$

et l'hypothèse de convergence. On en déduit le principe de Koecher-Götzky :

Lemme 2 *Les séries (5) qui sont dans $\mathcal{A}_{\underline{c}}(V, M)$ ont leur ensemble d'indices dans $M_{K,+}^* \cup \{0\}$, avec :*

$$M_{K,+}^* = \{\nu \in M_K^* \text{ avec } \sigma_i(\nu) \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

De plus, si $d_0 \neq 0$ dans (5), alors $\underline{c} = \underline{0}$.

Exemple. Pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $M = \mathcal{O}_K$, $V = \mathcal{O}_K^\times$, l'ensemble $\mathcal{A}_{\underline{0}}(V, M)$ est l'anneau des fonctions f analytiques sur \mathcal{H}^n , bornées au voisinage de ∞ , satisfaisant :

$$f(S(\underline{z})) = f(\underline{z}) \text{ et } f(U(\underline{z})) = f(\underline{z}).$$

Pour $K \neq \mathbb{Q}$, toute forme modulaire de Hilbert f de poids (r_1, \dots, r_n) pour Ω appartient à $\mathcal{A}_{\underline{c}}(V, M)$ pour certains V, M , avec $\underline{c} = (r_2 - r_1, \dots, r_n - r_1)$. On voit que

$$f(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_K^*} d_\nu \exp\{2\pi i \mathbf{t}(\nu \underline{z})\},$$

car f est invariante par les translations de \mathcal{O}_K . Puis on applique le principe de Koecher pour vérifier que l'ensemble des indices a son support dans $\mathcal{O}_{K,+}^* \cup \{0\}$.

Soit $a \in K$; on considère une matrice $A \in \mathbf{SL}_2(K)$ telle que $A(a) = \infty$, on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$. Par exemple ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \alpha \in K^*, \beta \in K$$

convient. La fonction :

$$f|_A(\underline{z}) := \prod_{i=1}^n (\sigma_i(w)z_i + \sigma_i(x))^{-r_i} f(A^{-1}(\underline{z}))$$

est une forme modulaire de poids \underline{r} pour le groupe $A \cdot \Omega \cdot A^{-1}$. Ce groupe a une pointe en ∞ , et $f|_A \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(\tilde{V}, \tilde{M})$ pour $\tilde{V} \subset \mathcal{O}_K^\times$ et \tilde{M} un \mathbb{Z} -module complet de K , que l'on peut expliciter en calculant le stabilisateur de ∞ dans $A \cdot \Omega \cdot A^{-1}$: donc f est *régulière en toute pointe*. En particulier :

$$f|_A(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \tilde{M}_+^* \cup \{0\}} d_\nu(A) \exp\{2\pi i \mathbf{t}(\nu z)\}.$$

Exemples d'autres fonctions régulières. Nous ajoutons un appendice à ce paragraphe, bien qu'il n'y ait pas un lien direct avec les formes modulaires de Hilbert. On appelle *série géométrique* de Hecke, la série :

$$g_K(\underline{z}) := \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^* \cup \{0\}} \exp\{\mathbf{t}(\nu \underline{z})\} \in \mathcal{A}_0(V, M),$$

avec $V = \mathcal{O}_K^\times$ et $M = \mathcal{O}_K$.

Les propriétés asymptotiques de cette série ont été étudiées par Hecke dans [12]. Hecke a aussi étudié la série :

$$b_K(\underline{z}) := \sum_{\epsilon \in (\mathcal{O}_K^\times)^2} \exp\{\mathbf{t}(\epsilon \underline{z})\} \in \mathcal{A}_0(V, M).$$

Si $K \neq \mathbb{Q}$, ces séries sont transcendantales sur $\mathbb{Q}(\exp_K(z_1, \dots, z_n))$, pour toute fonction exponentielle $\exp_K : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{G}_m^n(\mathbb{C})$ ayant ses périodes dans $\Sigma(\mathcal{O}_K) \subset \mathbb{C}^n$. Si $K = \mathbb{Q}$ alors g_K, b_K sont algébriques sur $\mathbb{Q}(e^{2\pi iz})$. On peut montrer que g_K, b_K ne sont pas des formes modulaires de Hilbert. Ces séries ont des propriétés arithmétiques très intéressantes, liées à la théorie de Mahler d'équations fonctionnelles associées à certaines transformations monomiales.

3.2 Propriétés de base des formes modulaires de Hilbert.

Définition (poids parallèle). Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n . Nous dirons qu'une forme modulaire de Hilbert associée à K est *de poids parallèle* $r \in \mathbb{Z}$, si son poids est $(r, \dots, r) \in \mathbb{Z}^n$.

Définition (formes paraboliques). Une *forme parabolique* pour Ω est une forme modulaire de Hilbert $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ pour le groupe Ω telle que, pour tout $a \in \mathbb{P}_1(K)$ et tout $A \in \mathbf{SL}_2(K)$ avec $A(a) = \infty$, on ait

$$f|_A(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \tilde{M}_+^* \cup \{0\}} d_\nu(A) \exp\{2\pi i \mathbf{t}(\nu z)\},$$

avec $d_0(A) = 0$.

Pour $\underline{r} \in \mathbb{Z}^n$, nous notons $M_{\underline{r}}(\Omega)$ et $S_{\underline{r}}(\Omega)$ respectivement les espaces vectoriels de formes modulaires de poids \underline{r} pour Ω , et des formes paraboliques pour Ω de poids \underline{r} .

Lemme 3 *Soit $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$. Si $r_1 + \dots + r_n < 0$, alors $M_{\underline{r}}(\Omega) = \{0\}$. Si $r_1 + \dots + r_n = 0$, alors $M_{\underline{r}}(\Omega) \subset \mathbb{C}$. En particulier, $M_{\underline{0}}(\Omega) = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous donnons à la fin une deuxième preuve de l'égalité $M_{\underline{0}}(\Omega) = \mathbb{C}$, mais commençons avec une remarque importante.

Le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ se plonge dans tout groupe modulaire de Hilbert Γ : par exemple, son image dans Υ est engendrée par S, T . Il existe donc un lien entre les formes modulaires de Hilbert et les formes modulaires elliptiques (formes modulaires de Hilbert pour $K = \mathbb{Q}$) : soit

$$\Xi_n = \{(z, \dots, z) \in \mathcal{H}^n\} \cong \mathcal{H},$$

soit f une forme modulaire de poids $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ pour Γ . Alors la restriction $g = f|_{\Xi_n}$ est une forme modulaire elliptique de poids $r_1 + \dots + r_n$.

Soient $f \in M_{\underline{r}}(\Omega)$ et $B \in \mathbf{SL}_2(K)$. La restriction $f|_B(z, \dots, z)$ est une forme modulaire de poids $r_1 + \dots + r_n$, pour un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme la réunion des images de Ξ_n par les éléments $B \in \mathbf{SL}_2(K)$ est dense dans \mathcal{H}^n , si f est non nulle, on peut choisir B telle que $f|_B(z, \dots, z)$ soit non nulle. Pour cela, il faut que $r_1 + \dots + r_n \geq 0$.

Supposons maintenant que $r_1 + \dots + r_n = 0$. Pour tout $B \in \mathbf{SL}_2(K)$ la forme modulaire $f|_B(z, \dots, z)$ est constante, et ceci implique f constante, car dans ce cas, f est une fonction analytique dans \mathcal{H}^n telle que sur un sous-ensemble dense de \mathcal{H}^n , il existe n dérivées directionnelles linéairement indépendantes annulant f . En particulier, $M_{\underline{0}}(\Omega) = \mathbb{C}$.

Voici maintenant une deuxième démonstration de ce dernier fait : pour simplifier, nous supposons que Ω a la seule classe d'équivalence de pointe ∞ . Soit $f \in M_{\underline{0}}(\Omega)$: Si f n'est pas une forme parabolique, alors

$$f - f(\infty)$$

est une forme parabolique.

D'après le lemme 2, f peut être prolongée analytiquement en ∞ , et en appliquant des transformations de $\mathbf{SL}_2(K)$, par continuité en tout élément de $\mathbb{P}_1(K)$: $f(\mathbb{P}_1(K)) = 0$.

La compacité de X_Ω implique que la fonction continue $|f|$ est bornée sur X_Ω , et le maximum de $|f|$ est atteint dans \mathcal{H}^n . Le principe du maximum pour les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes implique que $f = 0$. Dans tous les cas f est constante.

Lemme 4 *Supposons que $n \geq 2$. Si $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ est tel que $r_1 = 0$ et il existe un indice i avec $r_i \neq 0$, alors $M_{\underline{r}}(\Omega) = \{0\}$.*

Démonstration. Soit f une forme modulaire de Hilbert de poids \underline{r} , comme dans l'énoncé. D'après le lemme 2, f est une forme parabolique.

Comme dans la preuve du lemme 3, f se prolonge par continuité sur $\mathbb{P}_1(K) : f(\mathbb{P}_1(K)) = 0$. La fonction

$$g(\underline{z}) = |f(\underline{z})|y_1^{r_1}y_2^{r_2} \cdots y_n^{r_n} = |f(\underline{z})|y_2^{r_2} \cdots y_n^{r_n}$$

est continue, Ω -invariante, et se prolonge en fonction continue sur X_Ω , nulle aux pointes.

Soit $\underline{\zeta} \in \mathcal{H}^n$ un élément tel que $\max g = g(\underline{\zeta})$. La fonction

$$z_1 \mapsto f(\underline{z})y_2^{r_2} \cdots y_n^{r_n}$$

est analytique sur \mathcal{H} , et d'après le principe du maximum, la fonction :

$$z_1 \mapsto f(z_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$$

est constante.

On vérifie que les seules fonctions $g \in \mathcal{A}_{\underline{c}}(V, M)$ telles que $\partial g / \partial z_1 = 0$ sont les fonctions constantes si $\underline{c} = \underline{0}$, et les fonctions nulles si $\underline{c} \neq \underline{0}$ (utiliser le fait que la projection de $\Sigma(\mathcal{O}_K) \subset \mathbb{R}^n$ sur un facteur quelconque \mathbb{R}^{n-1} est dense). Ici, $\underline{c} = (r_2, \dots, r_n)$ est non nul, donc f est nulle.

Lemme 5 *Si $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ est tel que $r_1 < 0$, alors $M_{\underline{r}}(\Omega) = \{0\}$.*

Démonstration. Dans le paragraphe 4, nous construirons pour tout $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ une forme modulaire de Hilbert non nulle de poids $r\underline{2}$ (une série d'Eisenstein). Soit $f \in M_{\underline{r}}(\Omega)$ de poids non parallèle $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$, et supposons que $r_1 < 0$. Soit E une forme modulaire de Hilbert de poids $\underline{2}$ non nulle. Un certain produit $f^a E^b$, pour a, b entiers positifs non nuls, est une forme modulaire de poids $(0, *)$. Le lemme 4 implique que $f^a E^b = 0$, et $f = 0$. Si f est de poids parallèle, ce raisonnement implique seulement que f est une constante. Mais $\sum_i r_i = nr_1 < 0$, et le lemme 3 implique que $f = 0$.

Nous notons $F_{\underline{r}}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions modulaires $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de poids \underline{r} , et $F(\Omega) = F_{\underline{0}}(\Omega)$ le corps des fonctions modulaires de poids $\underline{r} = \underline{0}$. Voici une autre conséquence du principe de Koecher.

Lemme 6 *Si $K \neq \mathbb{Q}$, il n'existe pas de fonction modulaire non constante dans $F(\Omega)$, sans pôles ou sans zéros dans \mathcal{H}^n .*

Démonstration. Supposons que $f \in F_{\underline{0}}(\Omega)$ soit sans pôles. Alors f est holomorphe dans \mathcal{H}^n , d'après le lemme 2, donc f est une forme modulaire de poids $\underline{0}$, qui est constante. Si f est sans zéros, alors f^{-1} est sans pôles, donc holomorphe.

Pour $K = \mathbb{Q}$, cette propriété est fautive car la fonction modulaire j est holomorphe dans \mathcal{H} . Nous pouvons étendre ceci aux formes modulaires.

Lemme 7 *Si $K \neq \mathbb{Q}$, il n'existe pas de formes modulaires non constantes dans $M_{\underline{r}}(\Omega)$, sans zéros dans \mathcal{H}^n .*

Démonstration. Soit f une forme modulaire de poids \underline{r} , non constante et sans zéros dans \mathcal{H}^n . Quitte à se ramener à une puissance entière convenable de f , on peut supposer que $\underline{r} \in (2\mathbb{N}_{>0})^n$.

Nous verrons plus loin que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dim_{\mathbb{C}} M_{m\underline{r}}(\Omega) = \infty.$$

Si m est assez grand, il existe une forme modulaire de Hilbert G , de poids $m\underline{r}$, telle que F^m, G soient \mathbb{C} -linéairement indépendantes.

Donc G/F^m est une fonction modulaire de poids $\underline{0}$, non constante, et sans pôles : une contradiction.

Une autre manière de procéder est d'appliquer les opérateurs « slash » (composition de formes modulaires avec des transformations de \mathcal{H}^2 associées à des matrices de $\mathbf{GL}_2(K)$: voir p. 251 de Zagier [25]). La propriété du lemme 7 est fautive pour $K = \mathbb{Q}$, car la forme parabolique Δ de Jacobi ne s'annule pas dans \mathcal{H} .

4 Exemples de formes modulaires de Hilbert.

Les techniques qui permettent de construire des formes modulaires de Hilbert, et les opérations qui permettent de construire des nouvelles formes modulaires à partir de certaines formes modulaires données, sont peu nombreuses mais puissantes.

4.1 Séries d'Eisenstein.

Soit \mathfrak{A} un idéal non nul de \mathcal{O}_K , soit r un entier rationnel ≥ 1 , soit s un nombre complexe de partie réelle $> 2-r$. Notons \mathcal{S} un sous-ensemble maximal de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ ne contenant pas $(0, 0)$, avec la propriété que si $(m_1, l_1), (m_2, l_2) \in \mathcal{S}$ sont deux éléments distincts, alors pour toute unité η de K totalement positive, on a $\eta m_1 \neq m_2$ et $\eta l_1 \neq l_2$. La série :

$$E_{r,\mathfrak{A}}(\underline{z}, s) := \sum_{(m,l) \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-r} |(\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))|^{-s}$$

converge uniformément dans tout compact de \mathcal{H}^n et définit une fonction holomorphe de la variable complexe s , pour $\underline{z} \in \mathcal{H}^n$ fixé. En effet, pour $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^n$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|xz_i + y|^2 \geq c(x^2 + y^2),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc, pour $(m, l) \in K^2$:

$$\left| \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-r-s} \right| \leq c^{-1} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)^2 + \sigma_i(l)^2)^{-r/2 - \Re(s)/2}.$$

Soit K_1 le corps de nombres $K(i)$. Le nombre rationnel $\prod_i (\sigma_i(m)^2 + \sigma_i(l)^2)$ est la valeur absolue de la norme de K_1 sur \mathbb{Q} du nombre $mi + l \in K_1$. On a donc majoré la valeur absolue du terme général de notre série $E_{r,\mathfrak{A}}(\underline{z}, s)$ par le terme général d'une série extraite de la série définissant la fonction zêta du corps K_1 , multipliée par une constante positive, d'où la convergence.

Soit \mathcal{S}' un autre sous-ensemble maximal de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ ayant la même propriété que \mathcal{S} . Il est clair que :

$$\begin{aligned} & \sum_{(m,l) \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-r} |(\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))|^{-s} = \\ & = \pm \sum_{(m',l') \in \mathcal{S}'} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m')z_i + \sigma_i(l'))^{-r} |(\sigma_i(m')z_i + \sigma_i(l'))|^{-s}. \end{aligned}$$

Le signe \pm provient de la possible existence d'unités de norme négative.

Pour s fixé dans le domaine de convergence, la fonction $E_{r,\mathfrak{A}}(\cdot, s) : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est « automorphe de poids $(r + s, \dots, r + s)$ » pour Γ . Par

exemple, si $r \geq 3$ et $s = 0$, on construit de cette façon des formes modulaires de Hilbert de poids (r, \dots, r) . Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ on a de façon plus détaillée :

$$E_{r, \mathfrak{A}}(\gamma(\underline{z}), s) = \prod_{i=1}^n (\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d))^r |\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d)|^s \\ \times \sum_{(m,n) \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m')z_i + \sigma_i(l'))^{-r} |(\sigma_i(m')z_i + \sigma_i(l'))|^{-s},$$

où $m' = am + cl, l' = bm + dl$. Mais la transformation définie par ces relations envoie \mathcal{S} en un autre sous-ensemble \mathcal{S}' de \mathfrak{A}^2 ayant les mêmes propriétés que \mathcal{S} .

Si r est impair, $E_{r, \mathfrak{A}}$ est identiquement nulle quand K a une unité de norme -1 . Toutefois, $E_{r, \mathfrak{A}}$ n'est pas en général identiquement nulle.

Pour $r \geq 4$ pair, $E_{r, \mathfrak{A}}(\underline{z}, 0)$ n'est jamais nulle. Pour le voir, il suffit de choisir un ordre particulier de sommation dans la série $\sum_{(m,n) \in \mathcal{S}}$. Nous pouvons en effet écrire, grâce à la convergence absolue :

$$\sum_{(m,l) \in \mathcal{S}} = \sum_{m=0, l \in \mathcal{T}} + \sum_{m \in \mathcal{T}, l \in \mathfrak{A}}$$

où \mathcal{T} est un sous-ensemble maximal de \mathfrak{A} ayant la propriété que $0 \notin \mathcal{T}$ et si $n_1, n_2 \in \mathcal{T}$ avec $n_1 \neq n_2$, alors n_1/n_2 n'est pas une unité totalement positive de K . La série :

$$\sum_{m \in \mathcal{T}, l \in \mathfrak{A}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-r}$$

est nulle en $\underline{z} = \infty$. D'autre part,

$$\sum_{m=0, l \in \mathcal{T}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-r} = \sum_{l \in \mathcal{T}} \mathbf{n}(l)^{-r},$$

est non nul. Donc la série d'Eisenstein $E_{r, \mathfrak{A}}(\underline{z}) = E_{r, \mathfrak{A}}(\underline{z}, 0)$ est une forme modulaire de Hilbert de poids (r, \dots, r) , qui n'est pas une forme parabolique (et n'est pas non plus constante).

Plus $r \geq 3$ est petit, plus la série d'Eisenstein $E_{r, \mathfrak{A}}(\underline{z}) = E_{r, \mathfrak{A}}(\underline{z}, 0)$ converge lentement, plus elle est « intéressante », comme nous le verrons plus

loin. Hecke ([12] pp. 391-395) a introduit la technique du prolongement analytique des fonctions analytiques d'une variable complexe, pour construire des fonctions satisfaisant des relations d'automorphie de poids $\underline{2}$ et $\underline{1}$. Il construit ces fonctions en explicitant d'abord le développement en série de Fourier de $E_{r,\mathfrak{A}}(\underline{z}, s)$, pour s fixé. En appliquant la formule de Poisson, il remarque que les coefficients de Fourier sont des fonctions analytiques de la variable complexe s , et qu'on peut faire un prolongement analytique. Puis il calcule une limite pour $s \rightarrow 0$, et remarque que très souvent, les zéros des facteurs gamma éliminent les termes non holomorphes en \underline{z} . Ce procédé est devenu classique, c'est pourquoi nous n'en avons donné qu'une esquisse.

Pour $r = 2$, on trouve, lorsque $\Re(s) > 0$, que la limite :

$$E_{2,\mathfrak{A}}(\underline{z}) := \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{(m,l) \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n (\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))^{-2} |(\sigma_i(m)z_i + \sigma_i(l))|^{-s}$$

existe. Si $K \neq \mathbb{Q}$, alors $E_{2,\mathfrak{A}}(\underline{z})$ est holomorphe, et c'est donc une forme modulaire pour Γ , de poids $\underline{2}$, qui est non nulle.

Si $K = \mathbb{Q}$, $E_{2,\mathbb{Z}}(z)$ n'est pas holomorphe (mais possède des propriétés d'automorphie), et

$$E_2(z) = \zeta_{\mathbb{Q}}(2)^{-1} E_{2,\mathbb{Z}}(z) + \frac{3}{\pi \Im(z)}$$

est holomorphe, mais non modulaire (cf. l'article de Bertrand dans [19], chapitre 1). Le terme $\frac{3}{\pi \Im(z)}$ apparaît après avoir fait un prolongement analytique.

Les séries $E_{r,\mathfrak{A}}(\underline{z})$ possèdent des développements en série de Fourier qui peuvent être calculés explicitement : ce calcul est très utile si $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_K$. Soit $\zeta_K(s)$ la fonction zêta associée à K , écrivons :

$$\zeta_K(r)^{-1} E_{r,\mathcal{O}_K}(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathfrak{A}_+^* \cup \{0\}} d_\nu \exp\{2\pi i t(z\nu)\}.$$

Pour r pair, les coefficients d_ν sont des nombres rationnels que l'on peut calculer explicitement. En particulier, $d_0 = 1$. Les détails de ces calculs sont décrits dans [8] pp. 19-21 : ils sont classiques, c'est pourquoi nous ne les reportons pas ici en toute généralité.

Une recette. Voici une façon de calculer les coefficients de Fourier des séries $E_{r,\mathfrak{A}}(\underline{z})$ dans le cas où $[K : \mathbb{Q}] = 2$, r pair, nombre de classes d'idéaux 1, et $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_K$ (nous rendons plus explicites les formules de la proposition 6.4 pp. 19-20 de [8], pour les applications que nous avons en vue). On trouve :

$$E_{r,\mathcal{O}_K}(\underline{z}) = \zeta_K(r) \left(1 + \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*} b_r(\nu) \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\} \right),$$

où

$$b_r(\nu) = \kappa_r \sum_{(\mu) | \nu \sqrt{d}} |\mathfrak{n}(\mu)|^{r-1},$$

la somme étant étendue aux idéaux entiers (μ) de K (donc principaux) qui divisent $\nu \sqrt{d}$. Nous avons posé :

$$\kappa_r = \frac{(2\pi)^{2r} \sqrt{d}}{((r-1)!)^2 d^r \zeta_K(r)},$$

et d désigne le discriminant de K .

En particulier, les séries d'Eisenstein $E = E_{r,\mathcal{O}_K}$ pour K quadratique réel et r pair satisfont :

$$E(z, z') = E(z', z).$$

On dit que ce sont des formes modulaires *symétriques*.

Un calcul explicite. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. En utilisant les formules décrites ci-dessus on voit que :

$$\zeta_K(2)^{-1} E_{2,\mathcal{O}_K}(\underline{z}) = (1 + 120(\exp\{2\pi i t(\mu \underline{z})\} + \exp\{2\pi i t(\mu' \underline{z})\}) + \dots)$$

où $\mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Comme :

$$E_4(t) = 1 + 240 \exp\{2\pi i t\} + \dots$$

on voit que

$$\zeta_K(2)^{-1} E_{2,\mathcal{O}_K}|_{\Xi_2} = E_4.$$

4.2 Fonctions thêtas.

La nature des séries d'Eisenstein ne permet pas toujours d'obtenir la non nullité des formes modulaires ainsi construites (exemples : séries de poids impairs et K a une unité de norme négative, ou séries d'Eisenstein de poids $\underline{1}$ tordues par des caractères). Les fonctions thêtas en revanche, sont toujours non nulles.

Il convient de faire un détour passant par les groupes symplectiques et les fonctions thêta classiques.

Nous notons $\mathcal{H}_n \subset \mathbb{C}^n$ le *demi-espace supérieur de Siegel* constitué des matrices complexes symétriques \underline{Z} à n lignes et n colonnes, ayant une partie imaginaire définie positive. Pour $(\underline{u}, \underline{Z}, \underline{r}, \underline{s}) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, posons :

$$\vartheta(\underline{u}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n + \underline{r}} \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{1}{2} {}^t x \cdot \underline{Z} \cdot x + {}^t x \cdot (\underline{u} + \underline{s}) \right) \right\}.$$

Cette série converge uniformément dans les compacts de $\mathbb{C}^n \times \mathcal{H}_n$ et définit la fonction *thêta de caractéristique* $(\underline{r}, \underline{s})$. Posons :

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R}),$$

où 1_n est la matrice identité d'ordre n . Le groupe *symplectique* $\mathbf{SP}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\mathbf{SP}_n(\mathbb{R}) = \{ T \text{ tels que } T \cdot E_n \cdot {}^t T = E_n \}.$$

Il agit sur \mathcal{H}_n de la manière suivante. Si $\underline{Z} \in \mathcal{H}_n$ et $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{SP}_n(\mathbb{R})$ avec A, B, C, D matrices carrées d'ordre n , alors on pose :

$$U(\underline{Z}) = (A \cdot \underline{Z} + B) \cdot (C \cdot \underline{Z} + D)^{-1}.$$

Noter que $\mathbf{SP}_1(\mathbb{R}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, et $\mathbf{SP}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit S une matrice à n lignes et n colonnes, notons $\{S\} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur colonne dont les coefficients sont les éléments de la diagonale de S .

Nous recopions ici un cas particulier d'une proposition très classique que l'on peut trouver, par exemple, dans [24], proposition 1.3, pp. 676-677, dont nous omettons la démonstration.

Proposition 2 Soient $\underline{r}, \underline{s}$ des éléments de $(\mathbb{Z}/2)^n$. Pour tout $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{SP}_n(\mathbb{Z})$, on a :

$$\vartheta(\underline{0}, U(\underline{Z}); \underline{r}, \underline{s}) = \zeta_U \det(C \cdot \underline{Z} + D)^{1/2} \vartheta(\underline{0}, \underline{Z}; \underline{r}', \underline{s}'),$$

où ζ_U est une racine huitième de l'unité qui dépend de $\underline{r}, \underline{s}$ et U ,

$$\begin{pmatrix} \underline{r}' \\ \underline{s}' \end{pmatrix} = {}^t U \cdot \begin{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \{ {}^t A \cdot C \} \\ \{ {}^t B \cdot D \} \end{pmatrix}.$$

En particulier pour tout $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{SP}_n(\mathbb{Z})(8)$ ⁽⁴⁾ :

$$\vartheta(\underline{0}, U(\underline{Z}); \underline{r}, \underline{s}) = \zeta_U \det(C \cdot \underline{Z} + D)^{1/2} \vartheta(\underline{0}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s}). \quad (6)$$

On dit que $\vartheta(0, U(\underline{Z}); \underline{r}, \underline{s})$ est une *forme modulaire de Siegel* de poids $1/2$, niveau 8, et système multiplicateur cyclotomique d'ordre divisant 8.

Nous revenons à notre corps totalement réel K , et au groupe modulaire de Hilbert Γ . Soit \mathcal{I} un \mathcal{O}_K -module inversible de rang 1 de K , posons :

$$\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I}) := \mathbf{SL}_2(K) \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{I}^{-1} \\ \mathcal{I} & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}.$$

Soit $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de \mathcal{I} sur \mathbb{Z} . Considérons la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1(\beta_1) & \cdots & \sigma_1(\beta_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(\beta_1) & \cdots & \sigma_n(\beta_n) \end{pmatrix}.$$

L'application :

$$W_B(\underline{z}) = {}^t B \cdot \text{Diag}(z_1, \dots, z_n) \cdot B,$$

définit une application $W_B : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}_n$. Soit a un élément de K et posons $\Phi(a) = \text{Diag}(\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a))$. Nous avons un homomorphisme de groupes

⁴Sous-groupe de congruence principal de niveau 8, engendré par toutes les matrices U de $\mathbf{SP}_n(\mathbb{Z})$ congrues à la matrice unité modulo $8M_{2n, 2n}(\mathbb{Z})$.

$I : \mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \mathbf{SP}_n(\mathbb{Q})$ défini par :

$$\begin{aligned} I\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} {}^t B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi(a) & \Phi(b) \\ \Phi(c) & \Phi(d) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^t B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t B \cdot \Phi(a) \cdot {}^t B^{-1} & {}^t B \cdot \Phi(b) \cdot B \\ B^{-1} \cdot \Phi(c) \cdot {}^t B^{-1} & B^{-1} \cdot \Phi(d) \cdot B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On voit facilement que $I(\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I})) \subset \mathbf{SP}_n(\mathbb{Z})$.

Soit $\gamma \in \mathbf{SL}_2(K)$, écrivons $I(\gamma) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$. Nous avons les propriétés de compatibilité suivantes, qui peuvent être vérifiées sans difficulté (voir [24] p. 683, voir aussi [11] pp. 499-506) :

$$I(\gamma)(W_B(\underline{z})) = W_B(\gamma(\underline{z})) \quad (7)$$

$$R \cdot W_B(\underline{z}) + S = B^{-1} \cdot \quad (8)$$

$$\cdot \text{Diag}(\sigma_1(c)z_1 + \sigma_1(d), \dots, \sigma_n(c)z_n + \sigma_n(d)) \cdot B.$$

Nous définissons maintenant les fonctions thêta sur \mathcal{H}^n associées à K . Soient ρ, δ des éléments de K , considérons des variables complexes $(\underline{z}, \underline{t}) \in \mathcal{H}^n \times \mathbb{C}^n$, posons :

$$\theta(\underline{t}, \underline{z}; \rho, \delta) = \sum_{\nu \in \mathcal{I} + \rho} \exp \left\{ 2\pi i \mathbf{t} \left(\frac{1}{2} \underline{z} \nu^2 + \nu(\underline{t} + \delta) \right) \right\}. \quad (9)$$

Cette série converge uniformément dans les compacts de $\mathbb{C}^n \times \mathcal{H}^n$. Une vérification directe nous donne

$$\theta(\underline{t}, \underline{z}; \rho, \delta) = \vartheta({}^t B \cdot \underline{t}, W_B(\underline{z}); B^{-1} \cdot \rho, {}^t B \cdot \delta).$$

Toutes les propriétés d'automorphie décrites ci-dessus pour les fonctions ϑ se transmettent sur les fonctions θ via les conditions de compatibilité (7) et (8). Si par exemple $\mathcal{I} = \mathcal{O}_K^*$, $\rho \in \mathcal{O}_K^*/2$ et $\delta \in \mathcal{O}_K/2$, la fonction :

$$\underline{z} \mapsto \theta(\underline{0}, \underline{z}; \rho, \delta)$$

est une forme modulaire de Hilbert de poids $(1/2, \dots, 1/2)$ pour $\Gamma^\sharp(8)$, où $\Gamma^\sharp = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I})$ et

$$\Gamma^\sharp(8) = \left\{ \gamma \in \Gamma^\sharp \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{8\mathcal{O}_K} \right\},$$

avec caractère cyclotomique d'ordre divisant 8, d'après la proposition 2, et les conditions de compatibilité (7) et (8).

4.3 Le cas $n = 2$ détaillé.

Ici on pose $n = 2$, et on s'occupe des caractéristiques $(\underline{r}, \underline{s}) \in (\mathbb{Z}/2)^4$. L'ensemble $\{\vartheta(\underline{t}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s})\}_{(\underline{r}, \underline{s}) \in (\mathbb{Z}/2)^4}$ est de cardinal 16. En fixant $\underline{Z} \in \mathcal{H}_n$, la fonction $\underline{t} \mapsto \vartheta(\underline{t}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s})$ peut être une fonction paire ou impaire, comme le suggère une vérification directe. Plus précisément :

$$\vartheta(-\underline{t}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s}) = (-1)^{|\underline{r}, \underline{s}|} \vartheta(\underline{t}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s}),$$

où $|\underline{r}, \underline{s}| = 4(r_1 s_1 + r_2 s_2) \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'il existe exactement 10 fonctions thêta paires, ou de manière équivalente, 10 *caractéristiques paires*. Notons $\mathfrak{K} \subset (\mathbb{Z}/2)^4$ un ensemble complet de classes de congruence distinctes de $(\mathbb{Z}/2)^4$ modulo \mathbb{Z}^4 , et $\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{K}$ un sous-ensemble complet de représentants de classes de caractéristiques paires.

Nous considérons une action α de $\mathbf{SP}_2(\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/2)^4$ définie de la manière suivante (suggérée par la proposition 2). Pour $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{SP}_2(\mathbb{Z})$ et $(\underline{r}, \underline{s}) \in (\mathbb{Z}/2)^4$,

$$\alpha_U \begin{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{pmatrix} = {}^t U \cdot \begin{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \{ {}^t A \cdot C \} \\ \{ {}^t B \cdot D \} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que c'est une action de groupe.

Lemme 8 *Pour tout $U \in \mathbf{SP}_2(\mathbb{Z})$, l'application $\alpha_U : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ est une bijection. L'action α agit aussi sur \mathfrak{K}^* .*

Démonstration. On peut utiliser le fait que $\mathbf{SP}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1_2 & T \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix},$$

avec $T = {}^t T$. De plus, l'action se factorise par une action de $\mathbf{SP}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_6$.

En particulier, la fonction :

$$\vartheta(\underline{Z}) = \prod_{(\underline{r}, \underline{s}) \in \mathfrak{K}^*} \vartheta(\underline{0}, \underline{Z}; \underline{r}, \underline{s})$$

est une forme modulaire de Siegel de poids 5, avec caractère cyclotomique d'ordre divisant 8 (lire [14]). On en déduit que :

$$\Theta^\sharp(\underline{z}) = \prod_{(\rho, \delta) \in \mathfrak{K}^*} \vartheta(\underline{0}, W_B(\underline{z}); \rho, \delta) = \vartheta(W_B(\underline{z})) \quad (10)$$

est une forme modulaire de Hilbert de poids $(5, 5)$, avec caractère pour le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I})$. Cette forme modulaire n'est pas nulle en général, comme expliqué dans [11], p. 507.

5 La forme parabolique Θ .

La forme parabolique de Jacobi $\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, de poids 12 pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, peut être définie par :

$$\Delta(z^2) = 2^{-8} (\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z))^8,$$

où les θ_i sont les fonctions

$$\theta(0, z; 0, 0), \quad \theta\left(0, z; \frac{1}{2}, 0\right), \quad \theta\left(0, z; 0, \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Nous cherchons des analogues de Δ en dimension supérieure.

Dans ce paragraphe, nous construisons explicitement une forme modulaire Θ de poids $(5, 5)$ pour $\Upsilon = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ (avec $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$), dont le lieu des zéros est l'image de Ξ_2 modulo l'action de Υ , avec multiplicité 1.

Soit μ un élément de K^\times , soit \mathcal{I} un \mathcal{O}_K -module inversible de rang 1. On a un isomorphisme

$$s_\mu : \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I}) \rightarrow \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K \oplus (\mu)\mathcal{I}),$$

défini par :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \mu^{-1}b \\ \mu c & d \end{pmatrix}.$$

On a que $\gamma(\sigma(\mu)\underline{z}) = \sigma(\mu)s_\mu(\gamma)(\underline{z})$.

Si $F(z_1, z_2)$ est une forme modulaire de Hilbert de poids \underline{r} pour $\Gamma(\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{I})$, et si $\mu \in K$ est tel que $\mu > 0$ et $\mu' > 0$, alors $F(\mu^{-1}z_1, \mu'^{-1}z_2)$ est une forme modulaire de Hilbert de poids \underline{r} pour $\Gamma(\mathcal{O}_K \oplus (\mu)\mathcal{I})$.

Posons $\epsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On prend $\mathcal{I} = \mathcal{O}_K^*$ dans (10), puis on compose Θ^\sharp . Ensuite, on utilise les propriétés de l'application s_μ ci-dessus, et on vérifie que :

$$\Theta(z_1, z_2) = \Theta^\sharp\left(\epsilon \frac{z_1}{\sqrt{5}}, -\epsilon' \frac{z_2}{\sqrt{5}}\right)$$

est une forme modulaire de Hilbert de poids $(5, 5)$ avec caractère, pour le groupe modulaire Υ .

Mais Υ n'a pas de caractère non trivial (cf. [17] p. 72). Donc la fonction Θ est une *forme modulaire de Hilbert* de poids $(5, 5)$ pour Υ : c'est de plus une forme parabolique, car certains facteurs du produit (10) le sont ⁽⁵⁾.

On considère :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, 10\} = \\ &= \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, \epsilon'), (0, \epsilon), (\epsilon', 0), (\epsilon, 0), (\epsilon', \epsilon), (\epsilon, \epsilon')\} \\ &\subset \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Theta(\underline{z}) &= \prod_{i=1}^{10} \theta \left(0, \left(\frac{z_1 \epsilon}{\sqrt{5}}, -\frac{z_2 \epsilon'}{\sqrt{5}} \right); \alpha_i, \frac{\beta_i}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{10} \sum_{\nu \in \mathcal{O}_K} (-1)^{\mathfrak{t}(\nu \beta_i / \sqrt{5})} \exp \left\{ \pi \text{it} \left(\left(\nu + \frac{\alpha_i}{2} \right)^2 \frac{\epsilon \underline{z}}{\sqrt{5}} \right) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Une vérification directe que nous laissons au lecteur entraîne ⁽⁶⁾ :

$$\Theta(z, z') = -\Theta(z', z).$$

On dit que Θ est une forme modulaire de Hilbert *antisymétrique*. Elle s'annule dans $\Xi_2 = \{(z, z') \text{ avec } z = z'\}$. Nous montrons maintenant que ceci détermine bien le lieu d'annulation de Θ , et que la multiplicité est 1.

5.1 Un domaine fondamental éloigné du bord de \mathcal{H}^2 .

Nous commençons par montrer qu'il existe un domaine fondamental pour l'action de Υ sur \mathcal{H}^2 plus convenable que celui que nous avons introduit dans le paragraphe 2.2. Nous voulons travailler avec un domaine fondamental qui soit le plus éloigné que possible du bord de \mathcal{H}^2 , et celui que nous avons construit au paragraphe 2.1, ne l'est pas assez. La construction que nous donnons est celle de [9], pp. 416-422. On considère les parties $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ de \mathcal{H}^2 suivantes.

⁵On peut trouver une démonstration plus directe de ces propriétés dans [10] pp. 231-237. Notre construction est plus susceptible de généralisation.

⁶Utiliser le fait que $\mathcal{O}'_K = \mathcal{O}_K$.

On pose $\mathfrak{A} = \{(z, z') \in \mathcal{H}^2 \text{ tel que } |zz'| \geq 1\}$. C'est un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe $\{1, T\} \subset \Upsilon$.

On pose \mathfrak{B} le sous-ensemble de tous les couples $(z, z') \in \mathcal{H}^2$ ayant la propriété que $\epsilon'^2 \leq \Im(z)\Im(z') \leq \epsilon^2$. C'est un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe $U^{\mathbb{Z}} = \{U^n \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\} \subset \Upsilon$, où U est défini dans (3).

Pour définir \mathfrak{C} , nous allons d'abord décrire l'ensemble $\mathfrak{C}_{s,s'}$ dont les éléments sont les $(z, z') \in \mathfrak{C}$ tels que $\Im(z) = s$ et $\Im(z') = s'$, de telle sorte que (union disjointe) :

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{s,s' \in \mathbb{R}_{>0}} \mathfrak{C}_{s,s'}.$$

Soit $\mathcal{Q}_{s,s'}$ un domaine fondamental de \mathbb{R}^2 pour l'action des translations de $\Sigma(\mathcal{O}_K)$ ayant la propriété que pour tout $(r, r') \in \mathcal{Q}_{s,s'}$ la quantité :

$$(r^2 + s^2)(r'^2 + s'^2) = |(r + is)(r' + is')|^2$$

est la plus petite possible. Alors $\mathfrak{C}_{s,s'}$ est le translaté de $\mathcal{Q}_{s,s'}$ par (is, is') dans \mathbb{C}^2 . Avec cette construction, \mathfrak{C} est un domaine fondamental pour l'action des translations de \mathcal{O}_K .

Lemme 9 *L'ensemble $\mathcal{G} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \subset \mathcal{H}^2$ contient un domaine fondamental pour l'action de Υ sur \mathcal{H}^2 . De plus, si $(z, z') \in \mathcal{G}$, alors $\Im(z)\Im(z') > 0.54146$.*

Démonstration. Ici on écrira $\underline{t}_i = (t_i, t'_i)$ et $\underline{z}_i = (z_i, z'_i)$. Il est clair que $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de Υ_∞ sur \mathcal{H}^2 . Montrons maintenant que pour tout $\underline{z} \in \mathcal{H}^2$, il existe $\gamma \in \Upsilon$ tel que $\gamma(\underline{z}) \in \mathcal{G}$.

Soit donc $\underline{z}_1 \in \mathcal{H}^2$. Il existe $\gamma_1 \in \Upsilon_\infty$ tel que $\underline{t}_1 = \gamma_1(\underline{z}_1) \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Si $\Im(t_1)\Im(t'_1) \geq 1$ alors $|t_1 t'_1| \geq 1$ et $\underline{t}_1 \in \mathcal{G}$. Sinon $|t_1 t'_1| < 1$ et $\underline{z}_2 = (z_2, z'_2) = T(\underline{t}_1) \in \mathfrak{A}$. Observons que :

$$\begin{aligned} \Im(z_2)\Im(z'_2) &= \Im(z_1)\Im(z'_1)|t_1 t'_1|^{-2} \\ &> \Im(z_1)\Im(z'_1). \end{aligned}$$

Il existe un élément $\gamma_2 \in \Upsilon_\infty$ tel que $\underline{t}_2 = \gamma_2(\underline{z}_2) \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Si $\Im(t_2)\Im(t'_2) \geq 1$ alors $\underline{t}_2 \in \mathcal{G}$, et nous avons démontré un cas particulier du lemme pour \underline{z}_1 . Sinon, $|t_2 t'_2| < 1$, et nous pouvons continuer en construisant successivement $\underline{z}_3, \underline{t}_3, \underline{z}_4, \dots$

Nous avons une suite $(z_i)_{i=1,2,\dots}$ d'éléments de \mathcal{H}^2 équivalents modulo l'action de Υ , telle que :

$$\mathfrak{S}(z_1)\mathfrak{S}(z'_1) < \mathfrak{S}(z_2)\mathfrak{S}(z'_2) < \mathfrak{S}(z_3)\mathfrak{S}(z'_3) < \dots .$$

Si aucun de ces points n'est dans \mathcal{G} , alors ils sont tous dans le domaine :

$$\{(z, z') \in \mathcal{H} \text{ tel que } |zz'| \leq 1, \epsilon'^2 \leq \frac{\mathfrak{S}(z)}{\mathfrak{S}(z')} \leq \epsilon^2, \mathfrak{S}(z)\mathfrak{S}(z') \geq \mathfrak{S}(z_1)\mathfrak{S}(z'_1)\}.$$

Ce domaine est compact, et l'action de Υ est propre : nous avons une contradiction, car un sous-ensemble compact de \mathcal{H}^2 ne contient qu'une finitude d'éléments équivalents modulo Υ . Donc, pour tout $z \in \mathcal{H}^2$, il existe $\gamma \in \Upsilon$ tel que $\gamma(z) \in \mathcal{G}$, et \mathcal{G} est un ensemble fondamental.

Ensuite, nous allons prouver que si $z \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, alors $\mathfrak{S}(z)\mathfrak{S}(z') > 0.54$. Soit a un nombre réel tel que $|a| \leq 1/\sqrt{5}$, soit $P(a)$ le parallélogramme de \mathbb{R}^2 ayant pour sommets :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}(2 + (1 - a)\sqrt{5}), \frac{1}{4}(2 - (1 + a)\sqrt{5})\right) \\ & \left(\frac{1}{4}(2 - (1 - a)\sqrt{5}), \frac{1}{4}(2 + (1 + a)\sqrt{5})\right) \\ & \left(-\frac{1}{4}(2 + (1 - a)\sqrt{5}), -\frac{1}{4}(2 - (1 + a)\sqrt{5})\right) \\ & \left(-\frac{1}{4}(2 - (1 - a)\sqrt{5}), -\frac{1}{4}(2 + (1 + a)\sqrt{5})\right). \end{aligned}$$

On voit que $P(a)$ est un domaine fondamental pour l'action des translations de $\Sigma(\mathcal{O}_K)$ sur \mathbb{R}^2 . Posons $f_{s,s'}(r, r') = (r^2 + s^2)(r'^2 + s'^2)$.

Supposons pour commencer que

$$\left(\frac{s'}{s}\right)^2 = \frac{1+a}{1-a} \text{ avec } |a| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Pour $(r, r') \in P(a)$, l'inégalité suivante est un exercice élémentaire que nous laissons au lecteur :

$$f_{s,s'}(r, r') \leq \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{9}{8}ss' + s^2s'^2. \quad (14)$$

Les inégalités concernant a sont restrictives. Mais pour tout $(s, s') \in \mathbb{R}_{>0}^2$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique, tel que :

$$\frac{\epsilon^n s'}{\epsilon^{-n} s} = \epsilon^{2n} \frac{s'}{s} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right),$$

avec $|a| \leq 1/\sqrt{5}$: il suffit de remarquer que la fonction $g(a) = \frac{1+a}{1-a}$ est strictement croissante dans $] -\infty, 1[$, et que $g(-1/\sqrt{5}) = \epsilon'^2$, $g(1/\sqrt{5}) = \epsilon^2$.

Soit $(z, z') \in \mathfrak{C}$, $z = x + is$, $z' = x' + is'$. Soient n, a comme ci-dessus. Soit $(r, r') \in P(a)$ tel que $(x - r, x' - r') \in \Sigma(\mathcal{O}_K)$. On a :

$$\begin{aligned} |zz'| &= f_{s,s'}(x, x') \\ &\leq f_{s,s'}(\epsilon^n r, \epsilon'^n r') \\ &\leq f_{\epsilon^{-n}, \epsilon^n}(r, r') \\ &\leq \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{9}{8}(\epsilon^{-n} s)(\epsilon^n s') + (\epsilon^{-2n} s^2)(\epsilon^{2n} s'^2) \\ &\leq \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{9}{8}ss' + (ss')^2. \end{aligned}$$

Or, si $(z, z') \in \mathfrak{A}$, alors $|zz'| \geq 1$. Donc

$$\left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{9}{8}ss' + s^2s'^2 \geq 1,$$

ce qui implique :

$$ss' \geq \frac{-9 + \sqrt{312}}{16} \geq 0.54146,$$

d'où l'inégalité annoncée, et le lemme est démontré. On peut démontrer que \mathcal{G} est un domaine fondamental pour l'action de Υ sur \mathcal{H}^2 , mais nous ne le ferons pas ici car nous n'aurons pas besoin de ceci : voir les détails dans [9].

5.2 Le diviseur de Θ .

Lemme 10 *Le lieu d'annulation de Θ est l'image de Ξ_2 dans X_Υ , avec multiplicité 1.*

Démonstration. Notre technique d'étude (due à Götzky : [9]) est complètement élémentaire. Plus bas, nous mentionnerons des techniques plus élaborées, menant à des résultats plus généraux.

Nous considérons les facteurs du produit (12), et leur comportement dans le domaine \mathcal{G} du lemme 9. Plus précisément, nous établissons des minoration de valeurs absolues, qui garantissent la non nullité de ces facteurs sur $\mathcal{G} - \Xi_2$. La modularité de Θ complétera le lemme.

Soit \mathcal{F} un domaine fondamental pour l'action de Υ sur \mathcal{H}^2 contenu dans l'ensemble \mathcal{G} du lemme 9.

On étudie les 10 fonctions thêtas sur \mathcal{F} ci-dessus. Posons :

$$\vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_K} (-1)^{\mathbf{t}(\nu\beta/\sqrt{5})} \exp \left\{ \pi \mathbf{it} \left(\left(\nu + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \frac{\underline{z}}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$, de telle sorte que

$$\Theta(z, z') = \prod_{i=1}^{10} \vartheta_{\alpha_i, \beta_i}(\epsilon z, \epsilon' z').$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^-$, où $\mathcal{H}^- = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Im(z) < 0\}$. Le groupe Υ agit sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^-$ de manière évidente. L'ensemble :

$$\mathcal{F}^b = \{(z, z') \text{ avec } (z, z') \in \mathcal{F}\}$$

est un domaine fondamental pour cette action, et pour tout $(z, z') \in \mathcal{F}^b$ on a $-\Im(z)\Im(z') > 0.54146$. Comme $\epsilon'^2 \leq -\Im(z)/\Im(z') \leq \epsilon^2$, on a $\Im(z), -\Im(z') > 0.454777$ dans \mathcal{F}^b . On en déduit des majorations pour $|e_\mu|$, où $\mu \in K_+$, et :

$$e_\mu = \exp \left\{ \pi \mathbf{it} \left(\mu \frac{\underline{z}}{\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

Soit $\underline{z} \in \mathcal{F}^b$. Si $\mu = 1$, comme

$$\Im(z) - \Im(z') \geq 2(\Im(z)|\Im(z')|)^{1/2} \geq 2 \cdot (0.54146)^{1/2} \approx 1.47167,$$

on trouve :

$$|e_1| = \exp\{-\pi/\sqrt{5}(\Im(z) - \Im(z'))\} < 0.126482 \text{ dans } \mathcal{F}^b. \quad (15)$$

Naturellement, pour tout $\underline{z} \in \mathfrak{B}^b \supset \mathcal{F}^b$:

$$|e_\epsilon|, |e_{\epsilon'}| \leq 1, \quad (16)$$

où \mathfrak{B}^b est défini de manière évidente. Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$ on a :

$$(|e_\epsilon|^p - |e_\epsilon|^q)(|e_{\epsilon'}|^p - |e_{\epsilon'}|^q) \geq 0.$$

Comme $e_\epsilon e_{\epsilon'} = e_1$, on en déduit, pour $\underline{z} \in \mathcal{F}^b$:

$$\begin{aligned} & |e_\epsilon|^p |e_{\epsilon'}|^q + |e_\epsilon|^q |e_{\epsilon'}|^p = \\ & = |e_1|^p + |e_1|^q - (|e_\epsilon|^p - |e_\epsilon|^q)(|e_{\epsilon'}|^p - |e_{\epsilon'}|^q) \\ & \leq |e_1|^p + |e_1|^q. \end{aligned} \tag{17}$$

Nous étudions les fonctions $\vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z})$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$. Observons que :

$$\exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \mathbf{it} \left(\alpha^2 \frac{\underline{z}}{\sqrt{5}} \right) \right\} \vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_K} (-1)^{\mathbf{t}(\beta\nu/\sqrt{5})} \exp \left\{ \pi \mathbf{it} \left(\nu(\nu + \alpha) \frac{\underline{z}}{\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

Nous détaillons nos estimations dans le cas $\alpha = 0, 1$. Si $\alpha = 0$ alors $\beta \in \{0, 1, \epsilon, \epsilon'\}$. Si $\alpha = 1$ alors $\beta \in \{0, 1\}$. On trouve :

$$\begin{aligned} e_{\alpha^2}^{-1/4} \vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z}) &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ \pi \mathbf{it} \left(\frac{\beta(n_1\epsilon + n_2\epsilon')}{\sqrt{5}} \right) \right\} \times \\ &\quad \times e_1^{(n_1 - n_2)^2} e_\epsilon^{n_1(n_1 + \alpha)} e_{\epsilon'}^{n_2(n_2 + \alpha)}, \end{aligned}$$

car (ϵ, ϵ') est une base de \mathcal{O}_K . Donc

$$\begin{aligned} & |e_{\alpha^2}^{-1/4} \vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z}) - (1 + \alpha)| \leq \\ & \leq -(1 + \alpha) + \frac{1}{2} \sum |e_1|^{(n_1 - n_2)^2} \times (|e_\epsilon|^{n_1(n_1 + \alpha)} |e_{\epsilon'}|^{n_2(n_2 + \alpha)} + \\ & \quad |e_\epsilon|^{n_2(n_2 + \alpha)} |e_{\epsilon'}|^{n_1(n_1 + \alpha)}) \\ & \leq -(1 + \alpha) + \frac{1}{2} \sum |e_1|^{(n_1 - n_2)^2} (|e_1|^{n_1(n_1 + \alpha)} + |e_1|^{n_2(n_2 + \alpha)}) \\ & \leq -(1 + \alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |e_1|^{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_1|^{n(n + \alpha)}, \end{aligned}$$

en utilisant les inégalités (17). L'inégalité (15) implique :

$$\begin{aligned} |e_{\alpha^2}^{-1/4} \vartheta_{\alpha,\beta}(\underline{z})| &\geq 2(1 + \alpha) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} |e_1|^{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_1|^{n(n + \alpha)} \\ &> 0.4288. \end{aligned}$$

Donc, si $\alpha \in \{0, 1\}$, $\vartheta_{\alpha,\beta}$ ne s'annule pas dans \mathcal{F}^b , ce qui donne la non nullité dans \mathcal{F}^b de six facteurs du produit définissant Θ .

Si $\alpha \in \{\epsilon, \epsilon'\}$ (quatre cas), on voit que ϑ s'annule dans $\{(z, z)\} \subset \mathcal{H}^2$. La technique expliquée ci-dessus, opportunément modifiée, implique que pour $\underline{z} \in \mathcal{F}^b$:

$$\left| \frac{\vartheta_{\alpha, \beta}(\underline{z})}{2e_{\alpha^2}^{1/4} (1 + (-1)^{\mathfrak{t}(\alpha'\beta/\sqrt{5})} e_{\alpha'})} \right| > \frac{1}{100},$$

donc ne s'annule pas. Nous préférons ne pas détailler ce deuxième cas, car les techniques sont les mêmes : pour des détails, voir [9]. Ceci implique que la restriction de Θ à \mathcal{F} s'annule seulement dans Ξ_2 avec multiplicité 1 : le lemme est démontré.

La théorie des produits de Borcherds ([3], [4]) permet de retrouver ces résultats, et bien d'autres propriétés que nous ne pouvons pas décrire ici. Dans [6] on montre que :

$$\Theta(\underline{z}) = 64 \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{\epsilon z}{\sqrt{5}} - \frac{\epsilon' z'}{\sqrt{5}} \right) \right\} \prod_{\substack{\nu \in \mathcal{O}_K^* \\ \epsilon\nu' - \epsilon'\nu > 0}} (1 - e^{2\pi i \mathfrak{t}(\nu \underline{z})} s(5\nu\nu') a(5\nu\nu')),$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ est la série de Fourier d'une certaine forme modulaire d'une variable complexe, et $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une certaine fonction. Tout ceci est complètement explicite : voir les détails dans [6].

5.3 Structure d'un certain anneau de formes modulaires.

Définition. Soit f une forme modulaire de Hilbert de poids parallèle r pour un certain groupe modulaire de Hilbert Γ . On dit que f est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $f(z, z') = f(z', z)$ (resp. $f(z, z') = -f(z', z)$).

L'existence de la fonction Θ permet de faire une description explicite de l'anneau de certaines formes modulaires pour Υ .

Avant de continuer, nous faisons une remarque. Nous voulons décrire encore plus en détail la structure des espaces vectoriels de formes modulaires de Hilbert dans le cas particulier de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Nous allons utiliser des notations particulières à ce cas. Ainsi, lorsqu'il s'agit de formes modulaires pour le groupe modulaire de Hilbert associé à ce corps de nombres, et *seulement*

dans ce cas, nous posons ⁽⁷⁾ :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \zeta_K(2)^{-1}E_{2,\mathcal{O}_K}, \\ \chi_5 &= 2^{-5}\Theta, \\ \chi_6 &= \frac{67}{21600}(\varphi_2^3 - \zeta_K(6)^{-1}E_{6,\mathcal{O}_K}).\end{aligned}$$

Théorème 2 *Toute forme modulaire symétrique de poids parallèle $2r$ avec $r \in \mathbb{N}$ pour Υ est un polynôme isobare en les trois formes modulaires $\varphi_2, \chi_5^2, \chi_6$.*

Nous verrons que les formes modulaires $\varphi_2, \chi_5, \chi_6$ sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} (corollaire 2).

Démonstration. On commence par observer que χ_6 est une forme parabolique de poids $(6, 6)$, et donc $\chi_6(z, z)$ est une forme modulaire pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids 12, égale à $c\Delta(z)$, pour $c \in \mathbb{C}$. Comme $E_{2,\mathcal{O}_K}, E_{6,\mathcal{O}_K}$ sont symétriques, χ_6 est symétrique.

On détermine c en calculant les premiers coefficients de Fourier de χ_6 . Ceci est possible car les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein sont explicites (cf. sous-paragraphe 4.1). On trouve :

$$\chi_6(z, z) = \Delta(z).$$

On dit que χ_6 est un *relevé* de Δ .

Nous avons déjà vu que $\varphi_2(z, z) = E_4(z)$. Comme l'anneau des formes modulaires de poids divisible par 4 pour le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ est égal à :

$$\mathbb{C}[E_4(z), \Delta(z)],$$

on voit que toute forme modulaire de poids divisible par 4 peut être relevée en une forme modulaire symétrique de poids $(2r, 2r)$ pour Υ . Nous avons donc un isomorphisme d'anneaux :

$$\mu : \mathbb{C}[E_4(z), \Delta(z)] \rightarrow \mathbb{C}[\varphi_2(\underline{z}), \chi_6(\underline{z})],$$

inverse du morphisme de restriction à $\Xi_2 = \{(z, z)\}$, ce qui prouve entre autres que les formes modulaires φ_2 et χ_6 sont algébriquement indépendantes.

⁷Ces notations sont pratiquement celles utilisées par Gundlach et Resnikoff, dans leurs travaux sur ces formes modulaires, à part le fait qu'ils écrivent χ_5^- , et nous χ_5 . On remarque que $\varphi_2, \chi_5, \chi_6$ ont leur séries de Fourier à coefficients entiers rationnels.

Soit maintenant F une forme modulaire symétrique de poids $(2r, 2r)$ pour Υ . Si $F \in \mathbb{C}[\varphi_2, \chi_6]$ nous n'avons rien à démontrer. Supposons que

$$H := F - \mu(F(z, z)) \neq 0.$$

La forme modulaire H s'annule dans Ξ_2 par construction. L'étude de la fonction $\chi_5 = 2^{-5}\Theta$ que nous avons faite implique que

$$H_1 := \frac{H}{\chi_5^2}$$

est une forme modulaire symétrique de poids $(2r - 10, 2r - 10)$. La démonstration se complète par récurrence sur r .

6 Propriétés différentielles de formes modulaires de Hilbert.

Dans le paragraphe 1.2, nous avons vu comment on détermine, en utilisant certains crochets de Rankin-Cohen, la structure de l'anneau engendré par toutes les formes modulaires elliptiques.

On peut étendre la définition de crochet de Rankin-Cohen aux formes modulaires de Hilbert. Par exemple, ceci est écrit dans [16]. Ainsi on associe, à deux formes modulaires de Hilbert F, G de poids $\underline{f}, \underline{g} \in \mathbb{N}^n$ (pour un corps de nombres totalement réel de degré n sur \mathbb{Q}), et à un n -uplet de nombres entiers positifs \underline{s} , une forme parabolique $[F, G]_{\underline{s}}$ de poids $\underline{f} + \underline{g} + 2\underline{s}$:

$$[F, G]_{\underline{s}} = \frac{1}{(2\pi i)^{|\underline{s}|}} \sum_{r_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{r_n=0}^{s_n} (-1)^{|\underline{r}|} \frac{\partial^{|\underline{r}|} F}{\partial z_1^{r_1} \cdots \partial z_n^{r_n}} \frac{\partial^{|\underline{s}-\underline{r}|} G}{\partial z_1^{s_1-r_1} \cdots \partial z_n^{s_n-r_n}} \times \prod_{i=1}^n \binom{f_i + s_i - 1}{s_i - r_i} \binom{g_i + s_i - 1}{r_i},$$

où $|(a_1, \dots, a_n)| = a_1 + \cdots + a_n$.

Pour $x \in \mathbb{Z}$, nous écrivons $x_i = {}^t(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ avec le coefficient x à la i -ème place. Voici l'exemple le plus simple de crochet de Rankin-Cohen. La fonction :

$$[F, G]_{1_i} = \frac{1}{(2\pi i)} \left(g_i G \frac{\partial F}{\partial z_i} - f_i F \frac{\partial G}{\partial z_i} \right)$$

est une forme parabolique de poids $\underline{f} + \underline{g} + 2_i$ (crochet de Rankin).

Posons :

$$\Lambda_{i,k}F = \frac{1}{2f_i f_k} [F, F]_{1_i+1_k}, \quad \Pi_i F = \frac{1}{(f_i + 1)} [F, F]_{2_i}.$$

Ces opérateurs différentiels s'écrivent explicitement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (2\pi i)^2 \Pi_i F &:= f_i F \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} - (f_i + 1) \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)^2, \\ (2\pi i)^2 \Lambda_{i,k} F &:= F \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_k} - \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_k}. \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} \Pi_i : M_{\underline{f}}(\Gamma) &\rightarrow S_{2\underline{f}+4_i}(\Gamma), \\ \Lambda_{i,k} : M_{\underline{f}}(\Gamma) &\rightarrow S_{2\underline{f}+2_i+2_k}(\Gamma). \end{aligned}$$

Voici maintenant un lemme élémentaire qui décrit les propriétés d'annulation des images des opérateurs différentiels $[\cdot, \cdot]_{1_i}, \Pi_i, \Lambda_{i,k}$.

Lemme 11 *Soient F, G deux formes modulaires de Hilbert de n variables complexes, non constantes, de poids \underline{f} et \underline{g} . Alors :*

1. $\Lambda_{i,k}F \neq 0$.
2. $\Pi_i F \neq 0$.
3. $[F, G]_{1_i} = 0$ si et seulement si la fonction F^{g_i}/G^{f_i} est constante.

Démonstration. (1). On a

$$\Lambda_{i,k}F = \frac{1}{(2\pi i)^2} F^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} \log F.$$

Nous pouvons supposer que $i = 1, k = 2$. Si $\Lambda_{i,k}F = 0$, alors la fonction méromorphe $H = F^{-1} \partial F / \partial z_2$ ne dépend pas de la variable z_1 . On a de plus

$$H(z_2 + \sigma_2(\nu), \dots, z_n + \sigma_n(\nu)) = H(z_2, \dots, z_n) \quad \text{pour } \nu \in \mathcal{O}_K.$$

Soit π_1 la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ obtenue en effaçant le premier coefficient. L'ensemble $\pi_1(\Sigma(\mathcal{O}_K))$ est dense dans \mathbb{R}^{n-1} . En particulier H est constante

dans $E = \pi_1 \mathcal{Z} + \mathbb{R}^{n-1}$. Le plus petit sous-ensemble analytique de \mathcal{H}^{n-1} contenant E est \mathcal{H}^{n-1} : donc H est constante dans \mathcal{H}^{n-1} , non nulle car F est non constante. Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} = \lambda F,$$

avec $\lambda \neq 0$. Mais on voit clairement que ceci est incompatible avec la modularité de F .

(2). Si $\Pi_i F = 0$ et F est non constante, alors on peut écrire $F(\underline{z}) = (gz_i + h)^{-f_i}$, où g, h sont deux fonctions ne dépendant pas de z_i . On vérifie directement qu'une telle fonction ne peut pas être une forme modulaire. On peut aussi utiliser les séries de Fourier du lemme 16.

(3). On a :

$$[F, G]_{1_i} = -\frac{1}{2\pi i} FG \frac{\partial}{\partial z_i} \log \left(\frac{G^{f_i}}{F^{g_i}} \right).$$

Si $G^{f_i}/F^{g_i} \in \mathbb{C}^\times$, alors $[F, G]_{1_i} = 0$. Supposons maintenant que $[F, G]_{1_i} = 0$: on a alors que $H := G^{f_i}/F^{g_i}$ ne dépend pas de la variable z_i . D'autre part, c'est un quotient de formes modulaires, donc il satisfait :

$$H(z_2, \dots, z_n) = H(z_2 + \sigma_2(\nu), \dots, z_n + \sigma_n(\nu)),$$

pour tout $\nu \in \mathcal{H}^n$ et $z_2, \dots, z_n \in \mathcal{H}$, lorsque ces valeurs sont définies. Comme au point (1), H est constante dans \mathcal{H}^{n-1} : la démonstration du lemme 11 est complète. On remarque en particulier que H est une fonction modulaire, et que les poids de F et G satisfont $\underline{f} \in \mathbb{Q}^\times \underline{g}$.

Exemple 1. Comme il existe toujours une forme modulaire non nulle de poids $(2, \dots, 2)$ pour Γ si $n > 1$, on peut construire dans certains cas des formes modulaires non nulles de poids non parallèle

$$(t_1, \dots, t_n) \in (2\mathbb{Z})^n,$$

avec $t_i \geq 2$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Par exemple, si K est quadratique, $\Pi_1 E_{2, \mathcal{O}_K}$ est une forme parabolique de poids $(8, 4)$ qui est non nulle (d'après le lemme 11), et constitue un premier specimen de forme parabolique de poids non parallèle.

Exemple 2. Si $[K : \mathbb{Q}] = 2$, alors les opérateurs différentiels $\Lambda = \Lambda_{1,1}$ et :

$$\Pi : F \mapsto (\Pi_1 F)(\Pi_2 F)$$

agissent sur l'anneau gradué engendré par les formes modulaires de Hilbert de poids parallèle. Par de simples arguments d'algèbre linéaire (basés sur des calculs des premiers coefficients de Fourier de formes modulaires), on peut déterminer des relations différentielles entre générateurs, induites par Λ et Π . Par exemple, si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, on trouve :

$$\begin{aligned}\Lambda\varphi_2 &= 24\chi_6, \\ \Lambda\chi_6 &= \frac{1}{20}\varphi_2(\varphi_2\chi_5^2 - \chi_6^2), \\ \Lambda\chi_5^2 &= \frac{1}{10}\chi_5^2(\chi_6^2 - \varphi_2\chi_5^2).\end{aligned}\tag{18}$$

Équations différentielles. On remarque que les formes modulaires χ_6 et χ_5^2 peuvent être construites par application d'opérateurs différentiels, à partir de φ_2 . Grâce à ces identités, on peut aussi expliciter des équations aux dérivées partielles ayant des formes modulaires de Hilbert comme solutions : en voici un exemple.

On a le système différentiel (18), et on sait que $\Pi\varphi_2 \in M_{12}(\Gamma)$. D'après le théorème 4, $\Pi\varphi_2$ est un polynôme isobare en φ_2, χ_6 et χ_5^2 . La résolution d'un système linéaire explicite (dans ce cas, sept équations et sept inconnues) engageant les coefficients de Fourier de ces formes modulaires implique :

$$\Pi\varphi_2 = 576(9\chi_6^2 - 5\varphi_2\chi_5^2).\tag{19}$$

En éliminant χ_5^2 dans (19) et la troisième équation de (18), on trouve :

$$100(\Lambda \circ \Lambda)\varphi_2 + \varphi_2\Pi\varphi_2 - 4\varphi_2(\Lambda\varphi_2)^2 = 0.\tag{20}$$

Cette équation différentielle a la propriété intéressante suivante (cf. [21]) : φ_2 est la seule solution de cette équation qui soit une forme modulaire de Hilbert pour $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ dont la série de Fourier a les termes indexés par les plus petites traces :

$$1 + 120 \exp \left\{ 2\pi i t \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{5}} z \right) \right\} + \dots$$

6.1 Opérateurs multilinéaires.

On peut définir des opérateurs multilinéaires agissant sur certains espaces de formes modulaires de Hilbert (et même sur des espaces de polynômes non

isobares en des formes modulaires), de la manière suivante. Soit \mathcal{I} un sous-ensemble non vide de $\{1, \dots, n\}$: pour simplifier, choisissons $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n , soit Γ le groupe modulaire de Hilbert associé.

Définition. On dit qu'une forme modulaire de Hilbert F pour Γ est de poids \mathcal{I} -parallèle, si son poids $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ est tel que $f_i = f$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. On dit dans ce cas que \overline{f} est le \mathcal{I} -poids de F .

Ainsi, une forme modulaire de Hilbert de poids parallèle f pour Γ est une forme modulaire de Hilbert de poids \mathcal{I} -parallèle, avec $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$.

Lemme 12 Soient F_1, \dots, F_{m+1} des formes modulaires de poids \mathcal{I} -parallèles r_1, \dots, r_{m+1} . La fonction :

$$\langle F_1, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1}} := \det \begin{pmatrix} r_1 F_1 & r_2 F_2 & \cdots & r_{m+1} F_{m+1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_m} & \frac{\partial F_2}{\partial z_m} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

est une forme modulaire de Hilbert de poids \mathcal{I} -parallèle $r_1 + \cdots + r_{m+1} + 2$.

Démonstration. On note \mathfrak{S}_m le groupe des permutations de \mathcal{I} , $\epsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on pose :

$$[F_1, \dots, F_{m+1}]_{\underline{1}} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \epsilon(\sigma) [F_1, [F_2, \dots, [F_m, F_{m+1}]_{1_{\sigma(m)}} \cdots]_{1_{\sigma(2)}}]_{1_{\sigma(1)}}.$$

La preuve est une conséquence immédiate de la formule suivante :

$$[F_1, \dots, F_{m+1}]_{\underline{1}} = (2\pi i)^{-m} \Phi_m \langle F_1, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1}}, \quad (21)$$

avec

$$\Phi_m = (r_2 + \cdots + r_{m+1})(r_3 + \cdots + r_{m+1}) \cdots (r_m + r_{m+1}),$$

(produit ayant $m-1$ facteurs) car le terme de gauche dans (21) est clairement une forme modulaire de Hilbert de poids \mathcal{I} -parallèle $r_1 + \dots + r_{m+1} + 2$, d'après les propriétés de base du crochet de Rankin.

Par exemple, si F_1, F_2 sont des formes modulaires elliptiques de poids r_1, r_2 , la formule (21) nous donne tout simplement un crochet de Rankin :

$$[F_1, F_2]_{\underline{1}} = (2\pi i)^{-1} \det \begin{pmatrix} r_1 F_1 & r_2 F_2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \end{pmatrix}$$

Si G_1, G_2, G_3 sont des formes modulaires de Hilbert de deux variables complexes, de poids parallèles s_1, s_2, s_3 , alors la formule (21) implique :

$$\begin{aligned} [G_1, G_2, G_3]_{\underline{1}} &:= [G_1, [G_2, G_3]_{1_2}]_{1_1} - [G_1, [G_2, G_3]_{1_1}]_{1_2} \\ &= (2\pi i)^{-2} (s_2 + s_3) \det \begin{pmatrix} s_1 G_1 & s_2 G_2 & s_3 G_3 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z_1} & \frac{\partial G_2}{\partial z_1} & \frac{\partial G_3}{\partial z_1} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z_2} & \frac{\partial G_2}{\partial z_2} & \frac{\partial G_3}{\partial z_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

La démonstration de la formule (21) repose sur l'égalité suivante, dont la démonstration est élémentaire et laissée au lecteur :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m (-1)^s \frac{\partial}{\partial z_s} \langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1}-1_s} &= \\ &= (r_2 + \dots + r_{m+1}) \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right)_{\substack{i=2, \dots, m+1 \\ j=1, \dots, m}}, \end{aligned} \quad (23)$$

où $\underline{1} - 1_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1 \text{ termes}}, 0, 1, \dots, 1)$ et où

$$\langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1} - 1_s} := \det \begin{pmatrix} r_2 F_2 & r_3 F_3 & \cdots & r_{m+1} F_{m+1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \frac{\partial F_3}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_{s-1}} & \frac{\partial F_3}{\partial z_{s-1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_{s-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_{s+1}} & \frac{\partial F_3}{\partial z_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_{s+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_m} & \frac{\partial F_3}{\partial z_m} & \cdots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

On démontre (21) par récurrence sur m . Pour $m = 1$, l'identité est triviale, comme nous l'avons déjà remarqué. Supposons que m soit plus grand ; comme il existe une bijection entre \mathfrak{S}_m et $\cup_{s=1}^m \mathfrak{S}'_s$ où \mathfrak{S}'_s est l'ensemble des fonctions bijectives $\{2, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, s-1, s+1, \dots, m\}$, on a :

$$[F_1, \dots, F_m]_{\underline{1}} = \sum_{s=1}^m (-1)^{s+1} [F_1, \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}'_s} \epsilon(\tilde{\sigma}) [F_2, [\cdots [F_m, F_{m+1}]_{1_{\tilde{\sigma}(m)}} \cdots]_{1_{\tilde{\sigma}(2)}}]_{1_s},$$

(ϵ désigne le prolongement de l'application signature à \mathfrak{S}'_s). Donc :

$$\begin{aligned}
[F_1, \dots, F_m]_{\underline{1}} &= [F_1, \sum_{s=1}^m (-1)^s [F_2, \dots, F_{m+1}]_{\underline{1-1_s}}]_{1_s} \\
&= (2\pi i)^{m-1} \Phi' \sum_{s=1}^m (-1)^s [F_1, \langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1-1_s}}]_{1_s} \quad (24) \\
&= (2\pi i)^m \Phi' \sum_{s=1}^m (-1)^s \left(r_1 F_1 \frac{\partial}{\partial z_s} \langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1-1_s}} \right. \\
&\quad \left. - (r_2 + \dots + r_{m+1}) \langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1-1_s}} \frac{\partial F_1}{\partial z_s} \right) \\
&= (2\pi i)^m \Phi_m \left(r_1 F_1 \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right)_{i,j} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial F_1}{\partial z_s} \langle F_2, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1-1_s}} \right) \\
&= (2\pi i)^m \Phi_m \langle F_1, \dots, F_{m+1} \rangle_{\underline{1}},
\end{aligned}$$

où le symbole $[F_2, \dots, F_{m+1}]_{\underline{1-1_s}}$ a une signification évidente, et $\Phi' = (r_3 + \dots + r_{m+1}) \cdots (r_m + r_{m+1})$ (en (24) nous avons appliqué l'hypothèse de récurrence, et en (25) nous avons appliqué l'égalité (23)). La preuve du lemme est terminée.

Remarque. Les opérateurs $[\dots]_{\underline{1}}$ sont définis en combinant entre eux des crochets de Rankin, et à première vue, on est tentés de dire que ce sont des polynômes différentiels (voir le paragraphe 6.3) d'ordre m dont toutes leurs propriétés algébriques sont conséquence de la théorie des crochets de Rankin-Cohen. Cependant, le lemme 12 implique qu'il s'agit en réalité d'opérateurs différentiels d'ordre 1, en particulier multilinéaires. Nous verrons que cette particularité fait des ces opérateurs des objets intéressants, dont l'étude sera poursuivie dans des autres travaux.

Dans la suite de ce texte, nous étudions ces opérateurs uniquement dans le cas où $\mathcal{I} = \{1\}$ et dans le cas où $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ et le nombre de variables complexes est deux, (dans ce dernier cas, les opérateurs sont bien définis uniquement sur des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle). Voici maintenant une proposition qui décrit les propriétés de base dans le cas $\mathcal{I} = \{1, 2\}$.

Proposition 3 Soit K un corps de nombres quadratique réel, et Γ le groupe modulaire de Hilbert associé. Soient F, G, H des formes modulaires de Hilbert pour Γ de poids parallèle f, g, h . La forme modulaire $[F, G, H] := [F, G, H]_{\perp}$ est de poids parallèle $f + g + h + 2$. Si F est antisymétrique et G, H sont symétriques, ou si F, G, H sont antisymétriques, alors $[F, G, H]$ est symétrique. Si F est symétrique et G, H sont antisymétriques, ou si F, G, H sont symétriques, alors $[F, G, H]$ est antisymétrique.

De plus, les deux conditions suivantes sont équivalentes.

1. La forme modulaire $[F, G, H]$ est non nulle.
2. Les fonctions F, G, H sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} .

Démonstration. D'après le lemme 12, $[F, G, H]$ est une forme modulaire de Hilbert de poids $f + g + h + 2$, et on a

$$[F, G, H] = \frac{1}{(2\pi i)^2} (g + h) \det \begin{pmatrix} fF & gG & hH \\ \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial z'} & \frac{\partial G}{\partial z'} & \frac{\partial H}{\partial z'} \end{pmatrix},$$

ou de manière équivalente :

$$[F, G, H] = \frac{1}{(2\pi i)^2} (g + h) (fF(G \wedge H) + hH(F \wedge G) - gG(F \wedge H)),$$

avec

$$\alpha \wedge \beta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \alpha}{\partial z'} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z'} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{C} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la symétrie $\mathcal{C}(z, z') = (z', z)$. Pour toute fonction analytique A , on a :

$$\frac{\partial}{\partial z}(A \circ \mathcal{C}) = \left(\frac{\partial A}{\partial z'} \right) \circ \mathcal{C} \text{ et } \frac{\partial}{\partial z'}(A \circ \mathcal{C}) = \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) \circ \mathcal{C}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \circ \mathcal{C} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z'} - \frac{\partial \alpha}{\partial z'} \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \circ \mathcal{C} \\
&= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \circ \mathcal{C} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial z'} \circ \mathcal{C} \right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z'} \circ \mathcal{C} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \circ \mathcal{C} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z'} (\alpha \circ \mathcal{C}) \frac{\partial}{\partial z} (\beta \circ \mathcal{C}) - \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \circ \mathcal{C}) \frac{\partial}{\partial z'} (\beta \circ \mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est égale à $-(\alpha \wedge \beta)$ si α, β symétriques ou antisymétriques, et égale à $\alpha \wedge \beta$ si α symétrique (resp. antisymétrique) et β antisymétrique (resp. symétrique).

Décrivons maintenant les conditions d'annulation de $[F, G, H]$. On vérifie directement que si F, G, H sont multiplicativement dépendantes modulo \mathbb{C}^\times , alors $[F, G, H] = 0$. Montrons que la condition (1) implique la condition (2). Si M est non nulle, alors F, G, H sont multiplicativement indépendantes modulo \mathbb{C}^\times , donc H^f/F^h et H^g/G^h sont aussi multiplicativement indépendantes modulo \mathbb{C}^\times . On peut appliquer le théorème 3 p. 253 de [1], et on trouve que le corps de fonctions

$$\mathfrak{K} := \mathbb{C} \left(\log \left(\frac{H^f}{F^h} \right), \log \left(\frac{H^g}{G^h} \right), \frac{H^f}{F^h}, \frac{H^g}{G^h} \right)$$

a degré de transcendance minoré par $2 + \mu$, où μ est le rang de la matrice jacobienne logarithmique

$$J = \frac{1}{(2\pi i)^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \log \left(\frac{H^f}{F^h} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \log \left(\frac{H^g}{G^h} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z'} \log \left(\frac{H^f}{F^h} \right) & \frac{\partial}{\partial z'} \log \left(\frac{H^g}{G^h} \right) \end{pmatrix}.$$

Le crochet $[F, G, H]$ est lié au déterminant de J :

$$[F, G, H] = \frac{g+h}{h} \det(J) F^{1+h} G^{1+h} H^{1-f-g}. \quad (26)$$

Donc $\mu = 2$, et le corps \mathfrak{K} est de degré de transcendance 4. Ainsi, le corps

$$\mathfrak{T} := \mathbb{C} \left(\frac{H^f}{F^h}, \frac{H^g}{G^h} \right)$$

est de degré de transcendance 2 sur \mathbb{C} . Comme une relation de dépendance algébrique pour F, G, H est toujours déterminée par un polynôme isobare, ceci implique que F, G, H sont algébriquement indépendantes.

Montrons ensuite que la condition (2) implique la condition (1). Si F, G, H sont algébriquement indépendantes, alors le degré de transcendance de \mathfrak{F} est 2. On peut choisir deux paramètres complexes analytiquement indépendants t_1, t_2 tels que :

$$\mathfrak{K} \cong \mathbb{C}(t_1, t_2, e^{t_1}, e^{t_2}),$$

donc \mathfrak{K} a degré de transcendance 4 sur \mathbb{C} .

Supposons par l'absurde que $M = 0$. La formule (26) implique que les fonctions $\log(H^f/F^h)$ et $\log(H^g/G^h)$ sont analytiquement dépendantes. Donc les fonctions $H^f/F^h, H^g/G^h$ sont aussi analytiquement dépendantes. Mais deux fonctions modulaires sur \mathcal{H}^2 analytiquement dépendantes sont aussi algébriquement dépendantes, ce qui donne au degré de transcendance δ de \mathfrak{K} la majoration $\delta \leq 3$, d'où une contradiction. La proposition 3 est maintenant entièrement démontrée.

Remarque. Grâce au lemme 12, la proposition 3 se généralise au cas de n variables complexes avec $n \geq 3$, mais nous n'en donnons pas les détails ici.

6.2 Théorème de structure pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

On peut utiliser les opérateurs différentiels $\Lambda, \Pi, [\cdot, \cdot, \cdot]$ pour déterminer explicitement la structure de certains anneaux de formes modulaires. Nous décrivons explicitement toutes les formes modulaires de Hilbert dans le cas $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Lemme 13 *À multiplication par un nombre complexe non nul près, il existe une unique forme modulaire de Hilbert pour $\Upsilon = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, symétrique de poids (15, 15).*

Démonstration. Nous construisons la forme modulaire, puis nous démontrons son unicité. En appliquant la proposition 3 à $F = \chi_6, G = \varphi_2, H = \chi_5$, on voit que

$$\tilde{\chi} = [\chi_6, \varphi_2, \chi_5]$$

est symétrique de poids (15, 15) et non nulle. La non nullité de $\tilde{\chi}$ peut aussi être vérifiée directement à partir de la définition de M : le coefficient de

$\exp\{2\pi i t(\underline{z})\}$ dans la série de Fourier de $\tilde{\chi}$ est non nul, ce qui implique $\tilde{\chi} \neq 0$. Ceci termine la preuve de l'existence.

Montrons maintenant l'unicité d'une telle forme modulaire, à une constante multiplicative près. Soit χ une forme modulaire de Hilbert, symétrique de poids $(15, 15)$.

Calculons $\chi|_{\Xi_2}$. Nous regardons les premiers coefficients de Fourier de χ (ordonnés par trace croissante) :

$$\chi(\underline{z}) = c_0 + c_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\} + c_{\nu'} \exp\{2\pi i t(\nu' \underline{z})\} + c_1 \exp\{2\pi i t(\underline{z})\} + \dots$$

avec $\nu = \epsilon/\sqrt{5}$. La forme χ étant modulaire de poids impair (ici $(15, 15)$), on a $\chi(U(\underline{z})) = \mathbf{n}(\epsilon')^{15} \chi(\underline{z}) = -\chi(\underline{z})$. Ainsi $c_0 = -c_0$ et χ est parabolique ⁽⁸⁾.

Donc $\chi|_{\Xi_2}$ est une forme parabolique elliptique de poids 30, donc une combinaison linéaire $x\Delta^2 E_6 + y\Delta E_6^3$ (noter que $p = 15$ est le plus petit entier impair tel que l'espace des formes paraboliques elliptiques de dimension $2p$ est de dimension ≥ 2).

De même, $c_\nu = -c_{\epsilon^2\nu}$, ce qui donne $c_\nu = -c_{\nu'}$. D'autre part, χ est symétrique, et donc $c_\nu = c_{\nu'}$. Ainsi $c_\nu = c_{\nu'} = 0$. Ceci implique $\chi|_{\Xi_2} = xq^2 + \dots = x\Delta^2 E_6$: naturellement, un argument similaire s'applique aux formes modulaires symétriques de poids parallèle impair (cf. plus bas) : on en déduit que si h est une forme modulaire symétrique de poids impairs, alors $(h|_{\Xi_2})\Delta^{-2}E_6^{-1}$ est une forme modulaire elliptique.

Il existe une combinaison linéaire $\phi = a\chi + b\tilde{\chi}$ ayant sa restriction à Ξ_2 nulle. ϕ/χ_5^2 est une forme modulaire symétrique de poids $(5, 5)$, nulle d'après le théorème 2 : le lemme est démontré. En particulier, $\tilde{\chi}$ ne s'annule pas dans Ξ_2 . Nous démontrons maintenant :

Théorème 3 *L'anneau des formes modulaires de Hilbert pour le groupe $\Upsilon = \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, avec $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ est égal à l'anneau (gradué par les poids) des polynômes en $\varphi_2, \chi_5, \chi_6, \tilde{\chi}$, quotienté par la relation :*

$$\begin{aligned} \frac{5}{49}\tilde{\chi}^2 &= 50000\chi_5^6 - 1000\varphi_2^2\chi_6\chi_5^4 + \varphi_2^5\chi_5^4 - 2\varphi_2^4\chi_6^2\chi_5^2 + \\ &+ 1800\varphi_2\chi_6^3\chi_5^2 + \varphi_2^3\chi_6^4 - 864\chi_6^5. \end{aligned} \quad (27)$$

⁸Une autre manière de remarquer ceci est d'écrire $M_{15}(\Upsilon) = \langle E_{15} \rangle \oplus S_{15}(\Upsilon)$, car Υ n'a qu'une seule classe d'équivalence de pointe. De plus, puisque K a une unité de norme négative, $E_{15} = 0$.

Démonstration. Comme $\tilde{\chi}^2$ est une forme modulaire symétrique de poids parallèle pair 30, c'est un polynôme en $\varphi_2, \chi_5^2, \chi_6$ d'après le théorème 2. La relation (27) est uniquement déterminée.

Nous remarquons qu'il suffit de décrire le sous-anneau des formes modulaires symétriques. En effet, soit ϕ une forme modulaire de Hilbert de poids parallèle. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\phi(z, z') &= \frac{1}{2}(f(z, z') + f(z', z)) + \frac{1}{2}(f(z, z') - f(z', z)) \\ &= f_1 + \chi_5 f_2,\end{aligned}$$

avec f_1, f_2 deux formes modulaires symétriques.

Soit maintenant f une forme modulaire symétrique de poids (r, r) , avec r impair. On voit que $r \geq 15$. La forme modulaire elliptique $g = f|_{\Xi_2}$ est de poids $2r$, et s'annule à l'infini avec une multiplicité ≥ 2 (reprendre l'idée de la démonstration du lemme 13). Ainsi :

$$g = E_6 \Delta^2 P(E_4, \Delta),$$

pour un certain polynôme isobare P . Il existe un polynôme isobare Q tel que la forme modulaire de Hilbert symétrique :

$$h = f - \tilde{\chi} Q(\varphi_2, \chi_6)$$

s'annule sur Ξ_2 . Or, h/χ_5^2 est une forme modulaire de poids $(r-10, r-10)$: on applique une hypothèse de récurrence. On trouve que $f = \tilde{\chi} k$, avec k forme modulaire symétrique de poids pair $(r-15, r-15)$. Le théorème est démontré, mais reste la question du calcul de la relation (27).

Sans passer par la géométrie des surfaces (ce qui oblige à calculer explicitement une désingularisation de la surface X_Γ , comme le fait Hirzebruch dans [13]), la technique la plus avantageuse est encore une fois de passer par des relations différentielles, et de résoudre explicitement des systèmes linéaires avec peu d'équations et d'inconnues.

En calculant explicitement les coefficients de Fourier de

$$[\tilde{\chi}^2, \varphi_2, \chi_5], [\tilde{\chi}^2, \varphi_2, \chi_6], [\tilde{\chi}^2, \chi_5, \chi_6],$$

on explicite la relation (27).

Remarque. On montre que

$$\tilde{\chi} = \frac{28}{\sqrt{5}} \chi_{15},$$

suivant les notations de Resnikoff. On peut comparer notre construction à celle de Gundlach dans [10] pp. 241-247. Gundlach doit d'abord construire des séries d'Eisenstein tordues par des caractères, de poids $(1, 1)$ pour des sous-groupes de congruence, ce qui est difficile en général. Notre construction est considérablement plus simple, et plus explicite.

6.3 Polynômes différentiels.

Soit $\underline{p} \in \mathbb{N}^n$. Nous posons :

$$D_{\underline{p}} := \frac{\partial^{|\underline{p}|}}{(\partial z_1)^{p_1} \cdots (\partial z_n)^{p_n}},$$

où $|\underline{p}| := p_1 + \cdots + p_n$.

Définition. Un *polynôme différentiel* D d'ordre $\leq \sigma$, agissant sur l'espace des fonctions holomorphes sur \mathcal{H}^n , est par définition un opérateur de la forme :

$$DX = \sum_{(\mathcal{I}, h)} a_{\mathcal{I}, h} \prod_{\underline{p} \in \mathcal{I}} (D_{\underline{p}}(X))^{h(\underline{p})}, \quad (28)$$

où toutes les sommes et produits sont finis, \mathcal{I} est un sous-ensemble fini de \mathbb{N}^n , h une fonction $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$, la somme sur les (\mathcal{I}, h) porte sur des ensembles \mathcal{I} tels que pour tout $\underline{p} \in \mathcal{I}$ on a $|\underline{p}| \leq \sigma$, les $a_{\mathcal{I}, h}$ sont des nombres complexes.

Soit Γ un groupe modulaire de Hilbert. Nous nous intéressons ici aux polynômes différentiels D ayant la propriété que $D(M_{\underline{r}}(\Gamma)) \subset M_{\underline{s}}(\Gamma)$, pour $\underline{r}, \underline{s} \in \mathbb{N}^n$. Nous commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 14 *Soit $F \in M_{\underline{r}}(\Gamma)$, soit \underline{p} un élément de \mathbb{N}^n tel que $|\underline{p}| > 1$. Alors il existe un entier $s \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$D_{\underline{p}}F = F^s(\mathcal{D}F + \Phi F),$$

où \mathcal{D} est un polynôme différentiel qui est une composition de multiples d'opérateurs différentiels $\Pi_i, \Lambda_{i,k}, (X, Y) \mapsto [X, Y]_{1_i}$ avec $i, k \in \{1, \dots, n\}$ agissant sur F , et ΦF est l'image de F par un polynôme différentiel d'ordre $< |\underline{p}|$.

Démonstration. Nous commençons par écrire :

$$\begin{aligned}\Pi_i F &= \frac{1}{(2\pi i)^2} f_i F \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} + \dots \\ \Lambda_{i,k} F &= \frac{1}{(2\pi i)^2} F \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} + \dots \\ [F, [F, \dots [F, \Lambda_{i,k} F]_{1_{k_s}} \dots]_{1_{k_2}}]_{1_{k_1}} &= \frac{1}{(2\pi i)^{s+2}} F^s \frac{\partial^{s+2} F}{\partial z_{k_1} \dots \partial z_{k_s} \partial z_i \partial z_j} + \dots \\ [F, [F, \dots [F, \Pi_i F]_{1_i} \dots]_{1_i}]_{1_i} &= \frac{1}{(2\pi i)^{s+2}} f_i F^s \frac{\partial^{s+2} F}{\partial z_i^{s+2}} + \dots\end{aligned}$$

où les symboles $+\dots$ désignent la présence de termes qui sont des polynômes différentiels d'ordre inférieur, évalués en F . Le lemme 14 est démontré en explicitant l'expression de $D_{\underline{p}}F$ dans les formules ci-dessus.

Remarque. Si $n = 1$ et $F \in M_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$, alors en posant :

$$G_1 F := [F, [F, F]_2]_1 \text{ et } G_s(F) := [F, G_{s-1} F]_1,$$

on a que $G_s(F)$ est une forme modulaire telle que

$$G_s F = c F^{s+2} \frac{d^{s+2} F}{dz^{s+2}} + \dots,$$

où c est une constante dépendant de k et s .

Rankin a montré que tout polynôme différentiel D tel que

$$D(M_r(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))) \subset M_s(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})),$$

a la propriété que DF appartient à $\mathbb{C}(F)[[F, F]_4, G_1 f, G_2 f, \dots]$. Nous généralisons son résultat, suivant Resnikoff [21].

Lemme 15 *Soit $F \in M_{\underline{f}}(\Gamma)$ une forme modulaire non nulle. Soit D un polynôme différentiel non nul, ayant la propriété que $DF \in M_{\underline{t}}(\Gamma)$, pour $\underline{t} \in \mathbb{N}^n$. Alors DF est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}(F)$, en des compositions de multiples d'opérateurs différentiels $X \mapsto [X, X]_{4_i}$, $X \mapsto \langle X \rangle_{2_i+2_j}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]_{2_i}$ agissant sur F .*

Démonstration. On a l'écriture (28) : on peut appliquer le lemme 14. Notons $\mathcal{D}_{\underline{\sigma}}$ un opérateur différentiel \mathcal{D} obtenu par application de ce lemme, associé au monôme différentiel $D_{\underline{\sigma}}$. On a :

$$\begin{aligned} DF &= \sum_{(\mathcal{I}, h)} a_{\mathcal{I}, h} \prod_{\underline{p} \in \mathcal{I}} (D_{\underline{p}} F)^{h(\underline{p})} \\ &= \sum_{(\mathcal{I}, h)} a_{\mathcal{I}, h} \prod_{\underline{p} \in \mathcal{I}} F^{s(\underline{p})} (\mathcal{D}_{\underline{p}} F + \Phi_{\underline{p}} F)^{h(\underline{p})} \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{(\mathcal{J}, k)} b_{\mathcal{J}, k, s} F^s \prod_{\underline{p} \in \mathcal{J}}^{\sharp} (\mathcal{D}_{\underline{p}} F)^{k(\underline{p})} \prod_{\underline{p} \in \mathcal{J}}^{\flat} (D_{\underline{p}} F)^{k(\underline{p})}, \end{aligned}$$

où toutes les sommes et produits sont finies, une somme est indexée sur des couples $(\mathcal{J}, k : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{N})$, les symboles s désignent des fonctions $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Z}$, et le produit \prod^{\sharp} est indexé par les $\underline{p} \in \mathcal{J}$ tels que $|\underline{p}| > 1$, le produit \prod^{\flat} est indexé par les $\underline{p} \in \mathcal{J}$ tels que $|\underline{p}| = 1$. Noter que si $|\underline{p}| = 1$, alors il existe j tel que :

$$D_{\underline{p}} F = \frac{\partial F}{\partial z_j}.$$

Les termes monômiaux donnés par les produits $F^s \prod_{\mathcal{J}}^{\sharp}$ sont tous des formes modulaires, disons de poids $\underline{d}(\mathcal{J}, s)$. On a, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \right) (\gamma(\underline{z})) = \left(\prod_{i=1}^n (c_i z_i + d_i)^{f_i} \right) (c_j z_j + d_j)^2 \left(\frac{f_j c_j}{c_j z_j + d_j} F(\underline{z}) + \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \right) (\underline{z}) \right).$$

Nous pouvons supposer qu'au moins un parmi les coefficients $b_{\mathcal{J}, k, s}$ soit non nul. D'après cette identité, on voit que pour \mathcal{J}, k, s tels que le coefficient $b_{\mathcal{J}, k, s}$ est non nul :

$$\underline{t} = \underline{d}(\mathcal{J}, k, s) + \sum_{\underline{p} \in \mathcal{I}}^{\flat} (k(\underline{p}) \underline{f} + 2_j).$$

On en déduit que pour $\underline{z} \in \mathcal{H}^n$ fixé, les fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\prod_{\underline{p} \in \mathcal{J}}^{\flat} \left(\frac{f_j c_j}{c_j z_j + d_j} F(\underline{z}) + D_{\underline{p}} F(\underline{z}) \right)^{k(\underline{p})}$$

et 1 sont \mathbb{C} -linéairement dépendantes. En d'autres termes, l'image de la fonction $R : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie par :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{f_1 c_1}{c_1 z_1 + d_1}, \dots, \frac{f_n c_n}{c_n z_n + d_n} \right)$$

est contenue dans une sous-variété algébrique propre de \mathbb{C}^n .

Nous montrons maintenant que cela n'est pas possible : ceci nous donnera que $k(\underline{p}) = 0$ pour tout \underline{p} , et la fin de la démonstration du lemme.

L'image de R est fermée (au sens de Zariski) dans \mathbb{C}^n si et seulement si

$$\left\{ \left(\frac{1}{z_1 + \frac{c_1}{d_1}}, \dots, \frac{1}{z_n + \frac{c_n}{d_n}} \right) \right\}_{\gamma \in \Gamma}$$

l'est (nous avons vu que $\prod_i f_i \neq 0$: lemme 4), c'est-à-dire si et seulement si

$$\left\{ \left(\frac{c_1}{d_1}, \dots, \frac{c_n}{d_n} \right) \right\}_{\gamma \in \Gamma}$$

est fermée. Or, on voit sans difficulté que cet ensemble est dense dans \mathbb{R}^n pour la topologie euclidienne.

Corollaire 1 *Supposons que $n = 2$. Soit D un polynôme différentiel non nul d'ordre ≤ 2 , et de degré minimal avec la propriété que pour une forme modulaire de Hilbert non constante de poids parallèle F on ait $DF = 0$. alors il existe un opérateur différentiel non nul $EX \in \mathbb{C}[X, \Lambda X, \Pi X]$, tel que $EF = 0$.*

Démonstration. D'après le lemme 15, $DF \in \mathbb{C}(F)[\Lambda F, \Pi_1 F, \Pi_2 F]$, car l'ordre de D étant ≤ 2 , il ne peut pas y avoir de terme faisant intervenir les crochets $(X, Y) \mapsto [X, Y]_{1_i}$ dans toute expression de D . Écrivons donc :

$$DF = \sum_{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^3} c_{x,y,z,t} F^x (\Lambda F)^y (\Pi_1 F)^z (\Pi_2 F)^t,$$

et supposons F de poids parallèle f . Le poids de $F^x (\Lambda F)^y (\Pi_1 F)^z (\Pi_2 F)^t$ est $(fx + (2f + 2)y + 2f(z + t))\underline{1} + 4_1 z + 4_2 t$. D'après le lemme 11, tous les monômes $F^x (\Lambda F)^y (\Pi_1 F)^z (\Pi_2 F)^t$ sont non nuls. Il est alors clair que s'il existe $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^3$ avec $c_{x,y,z,t} \neq 0$ et $z \neq t$, alors une puissance non

nulle et positive de $\Pi_1 F$ (ou de $\Pi_2 F$) divise DF de telle sorte qu'on puisse écrire :

$$DF = (\Pi_i F)^s \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2} c'_{x,y,z} F^x (\Lambda F)^y (\Pi F)^t = (\Pi_i F)^s F^w EF,$$

avec $EF \in \mathbb{C}[F, \Lambda F, \Pi F]$ non nul. Le corollaire est démontré.

6.4 Équations différentielles ayant des solutions modulaires.

Dans ce sous-paragraphe, nous supposons $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Nous commençons par un lemme technique élémentaire, qui sera utilisé dans la suite.

Lemme 16 *Les opérateurs différentiels*

$$X \mapsto c\Pi X - (\Lambda X)^2, \quad X \mapsto [X, \Pi X]_{1_i}, \quad X \mapsto [X, \Lambda X]_{1_i}, \quad X \mapsto [X, \Pi_i X]_{1_i}$$

avec $c \in \mathbb{C}$, n'annulent aucune forme modulaire non constante.

Esquisse de démonstration. Nous faisons seulement une partie des démonstrations. Nous commençons par donner les formules explicites décrivant l'action de ces opérateurs sur les séries de Fourier. Soient F, G deux formes modulaires de poids f et g , de séries de Fourier :

$$F(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^* \cup \{0\}} a_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\}, \quad G(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^* \cup \{0\}} b_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Pi_i F &= \sum_{\tau \in \mathcal{O}_{K,+}^*} \exp\{2\pi i t(\tau \underline{z})\} \sum_{\nu+\mu=\tau}^\# a_\nu a_\mu (f_i \sigma_i(\mu)^2 - (f_i + 1) \sigma_i(\nu \mu)), \\ \Lambda F &= \sum_{\tau \in \mathcal{O}_{K,+}^*} \exp\{2\pi i t(\tau \underline{z})\} \sum_{\nu+\mu=\tau}^\# a_\nu a_\mu (\mathbf{n}(\mu) - \nu \mu'), \\ \Pi f &= \sum_{\tau \in \mathcal{O}_{K,+}^*} \exp\{2\pi i t(\tau \underline{z})\} \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=\tau}^\# a_\alpha a_\beta a_\gamma a_\delta (f_1 \alpha^2 - (f_1 + 1) \beta \alpha) (f_2 \gamma^2 - (f_2 + 1) \delta \gamma), \\ [F, G]_{1_i} &= \sum_{\tau \in \mathcal{O}_{K,+}^*} \exp\{2\pi i t(\tau \underline{z})\} \sum_{\nu+\mu=\tau}^\# (g_i \sigma_i(\nu) - f_i \sigma_i(\mu)) a_\nu b_\mu, \end{aligned} \quad (29)$$

où les sommes \sum^\sharp sont indexées par des éléments de $\mathcal{O}_{K,+}^* \cup \{0\}$. Certaines parties du lemme se démontrent bien en utilisant ces formules. Pour d'autres parties, c'est mieux d'appliquer l'hypothèse de modularité.

(1). Pour simplifier, nous supposons que F est une forme parabolique. Si F est non nulle, alors il existe un plus petit entier $m > 0$ tel que pour quelques $\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*$ avec $\mathbf{t}(\nu) = m$ on ait $a_\nu \neq 0$. On peut supposer que le nombre réel positif $\sigma_1(\nu)$ soit le plus grand possible avec cette propriété. On trouve alors que le coefficient de $\exp\{2\pi i \mathbf{t}(4\nu \underline{z})\}$ dans la série de Fourier de ΠF est égal à $\mathbf{n}(\nu)^2 a_\nu^4 \neq 0$, et pour tout $\mu \in \mathcal{O}_{K,+}^*$ de trace $< \mathbf{t}(4\nu)$, le coefficient de $\exp\{2\pi i \mathbf{t}(\mu \underline{z})\}$ dans la série de Fourier de ΠF est nul.

Mais le choix de ν implique que le coefficient de $\exp\{2\pi i \mathbf{t}(2\nu \underline{z})\}$ dans la série de Fourier de ΛF , est nul (car égal à $a_\nu^2(\mathbf{n}(\nu) - \nu \nu')$), et pour tout $\mu \in \mathcal{O}_{K,+}^*$ de trace $< \mathbf{t}(2\nu)$, le coefficient de $\exp\{2\pi i \mathbf{t}(\mu \underline{z})\}$ dans la série de Fourier de ΛF est nul. Si $c \neq 0$ on en déduit que $a_\nu = 0$, une contradiction. Donc $c = 0$, et nous sommes ramenés au cas (1) du lemme 11.

(2). Commençons par considérer F, G non nulles, telles que $[F, G]_{1_i} = 0$. Supposons pour simplifier qu'elles soient toutes deux paraboliques. Il existe $\nu, \mu \in \mathcal{O}_{K,+}^*$, de trace minimale, $\sigma_1(\nu), \sigma_1(\mu)$ plus grands possibles, avec la propriété que a_ν et b_μ soient non nuls. Pour $\tau = \nu + \mu$, on trouve que le coefficient de Fourier de $[F, G]_{1_i}$ associé à τ est égal à $(g_i \sigma_i(\nu) - f_i \sigma_i(\mu)) a_\nu b_\mu$. Il faut donc que $g_i \sigma_i(\nu) - f_i \sigma_i(\mu) = 0$.

Posons $G = \Pi F$: nous savons que $G \neq 0$. Alors $b_{4\nu} = a_\nu^4 \nu^4$ est non nul, et $\mu = 4\nu$ est de trace minimale avec cette propriété. Donc $g_i = 4f_i$, ce qui est impossible, car G est une forme modulaire de poids $\underline{g} = 4\underline{f} + \underline{4}$.

(3). Pour montrer que $[F, \Lambda F]_{1_i}$ ne peut pas s'annuler sur $M_{\underline{f}}(\Gamma)$, il suffit de montrer que $\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{(\Lambda F)^{f_i}}{F^{2f_i+2}} \neq 0$: on utilise la modularité de F pour montrer que c'est le cas.

(4). Les formes modulaires F et $G = \Pi_i F$ sont non nulles et leur poids \underline{f} et \underline{g} satisfont $\underline{f} \notin \mathbb{Q}^\times \underline{g}$. D'après le lemme 11, (3), la forme modulaire $[F, G]_{1_i}$ ne peut pas être nulle. Nous laissons au lecteur le soin de compléter les autres parties de la démonstration du lemme 16.

Proposition 4 *Soit F une forme modulaire de Hilbert symétrique de poids r , annulant un polynôme différentiel non nul d'ordre ≤ 2 . Alors la forme modulaire TF :*

$$TF = [F, \Lambda F]_{1_1} [F, \Pi F]_{1_2} - [F, \Lambda F]_{1_2} [F, \Pi F]_{1_1} \quad (30)$$

est nulle.

Démonstration. Soit F une forme modulaire symétrique : son poids \underline{r} est parallèle. Soit D un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 s'annulant en F . Le corollaire 1 implique qu'il existe un opérateur différentiel E tel que $EX \in \mathbb{C}[X, \Lambda X, \Pi X]$, et

$$EF = \sum_{\underline{i}} c_{\underline{i}} F^{i_1} (\Lambda F)^{i_2} (\Pi F)^{i_3} = 0, \quad (31)$$

où la somme est finie, et porte sur des triplets \underline{i} d'entiers positifs ou nuls.

Naturellement, le polynôme EF est isobare, et on a $i_1 r + (2i_2 + 4i_3)(r+1) = s$ pour tout \underline{i} . On voit aussi que EX doit avoir tous ses degrés partiels non nuls. En effet, si EX n'a qu'un seul degré partiel non nul, on rencontre une contradiction avec le lemme 16.

Si EX a seulement deux degrés partiels non nuls, on procède de la même façon. Si par exemple EX ne dépend pas de X , alors :

$$\sum_{\underline{i}} c_{\underline{i}} \left(\frac{\Pi F}{(\Lambda F)^2} \right)^i = 0$$

et on est ramené à résoudre l'équation différentielle $\Pi F = c(\Lambda F)^2$, qui n'a pas de solutions modulaires autres que la solution nulle, d'après le lemme 16.

Donc EX a tous ses degrés partiels non nuls. On peut reformuler (31) ainsi : les fonctions

$$\alpha = \frac{\Lambda F}{F^{(2r+2)/r}}, \beta = \frac{\Pi F}{F^{(4r+4)/r}}$$

sont algébriquement dépendantes sur \mathbb{C} .

Ceci implique que α, β sont analytiquement dépendantes : $\alpha \wedge \beta = 0$. Mais cette condition n'est qu'une réécriture de (30) : on voit que $\alpha \wedge \beta = (rF^{(6r+6)/r})^{-1}H$ et $TF = rF^2H$, pour une forme modulaire H , d'où $TF = 0$ si et seulement si $H = 0$ si et seulement si $\alpha \wedge \beta = 0$. La proposition 4 est démontrée.

On remarque que TF est antisymétrique et divisible par F^2 . Pour voir ceci on utilise les techniques de preuve de la première partie de la proposition 3. Pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, le théorème 3 implique que $(T\varphi_2)\varphi_2^{-2}$ est un multiple non nul de $\chi_5\tilde{\chi}$: on trouve $(T\varphi_2)\varphi_2^{-2} = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^{-1} \chi_5\tilde{\chi}$.

Corollaire 2 *Si f est une forme modulaire symétrique qui n'annule pas l'opérateur différentiel T défini par (30), alors $F, \Lambda F, \Pi_i F$ et $\Pi_2 F$ sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} , et donc $F, \Lambda F$ et ΠF sont aussi algébriquement indépendantes.*

Dans le cas où $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, un calcul numérique explicite sur la série de Fourier de φ_2 permet de vérifier que φ_2 ne satisfait pas (30). Donc φ_2 ne satisfait aucune équation différentielle d'ordre ≤ 2 , et $\varphi_2, \chi_6, \chi_5$ sont algébriquement indépendantes. Dans le cas général, nous pouvons utiliser la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit F une forme modulaire symétrique, soit*

$$F(\underline{z}) = a_0 + \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*} a_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\}$$

son développement en série de Fourier à l'infini. Supposons qu'il existe au moins deux éléments distincts $\nu, \mu \in \mathcal{O}_{K,+}^$, de trace minimale avec la propriété que $a_\nu, a_\mu \neq 0$. Alors TF , définie par (30), est non nulle.*

Démonstration. Supposons pour simplifier que F n'est pas une forme parabolique, et n'est pas constante. On calcule explicitement le développement en série de Fourier de TF . Posons $G = \Lambda F, H = \Pi F$: ce sont des formes modulaires de poids parallèle g et h . Écrivons les séries de Fourier de G, H comme suit :

$$G(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*} b_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\}, \quad H(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*} c_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\}.$$

Si on écrit :

$$(TF)(\underline{z}) = \sum_{\nu \in \mathcal{O}_{K,+}^*} s_\nu \exp\{2\pi i t(\nu \underline{z})\},$$

en utilisant (29) on trouve que

$$s_\nu = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=\nu} t_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_\alpha a_\gamma b_\beta c_\delta,$$

où

$$\begin{aligned} t_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= g \det \begin{pmatrix} \sigma_1(\delta) & \sigma_2(\delta) \\ \sigma_1(\alpha) & \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} + h \det \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) & \sigma_2(\gamma) \\ \sigma_1(\beta) & \sigma_2(\beta) \end{pmatrix} + \\ &+ f \det \begin{pmatrix} \sigma_1(\beta) & \sigma_2(\beta) \\ \sigma_1(\delta) & \sigma_2(\delta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soient μ, ν comme dans les hypothèses. Soit $l = \mathbf{t}(\mu) = \mathbf{t}(\nu) > 0$. Les hypothèses de la proposition impliquent qu'on peut choisir l minimal, μ, ν de telle sorte que $\Sigma(\mu), \Sigma(\nu)$ soient dans le segment

$$\{\Sigma(\tau) \text{ avec } \mathbf{t}(\tau) = l\},$$

la distance entre $\Sigma(\mu)$ et $\Sigma(\nu)$ soit la plus petite possible, et $\sigma_1(\mu)$ soit le plus grand possible : on voit alors que μ, ν sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants.

Cette condition de minimalité impose une écriture plus simple pour certains coefficients s_ν . En effet, si $\beta, \delta \neq 0$, on vérifie que $b_\beta \neq 0$ implique $\mathbf{t}(\beta) \geq l$ et $c_\delta \neq 0$ implique $\mathbf{t}(\delta) \geq 2l$ (se souvenir que $a_0 \neq 0$).

Si $\tau = 2\mu + \nu$ on a $\tau = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ et $a_\alpha a_\gamma b_\beta c_\delta \neq 0$ si et seulement si $\alpha = \gamma = 0, \beta = \nu, \delta = 2\mu$, ou $\alpha = \gamma = 0, \beta = \mu, \delta = \nu + \mu$, et :

$$s_\tau = r_f^2 a_0^2 (\sigma_1(\nu)\sigma_2(\mu) - \sigma_1(\mu)\sigma_2(\nu))(2b_\nu c_{2\mu} - b_\mu c_{\mu+\nu}).$$

Les coefficients $b_\nu, c_{2\mu}, b_\mu, c_{\mu+\nu}$ peuvent se calculer explicitement en fonction de a_μ, a_ν grâce à la condition de minimalité de l . On trouve

$$s_\nu = r_f^4 \mathbf{n}(\mu) a_0^5 (\sigma_1(\nu)\sigma_2(\mu) - \sigma_1(\mu)\sigma_2(\nu))^3 a_\mu^2 a_\nu.$$

Cette quantité ne peut pas s'annuler si $r_f \neq 0$, car ν, μ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants. En particulier si non nulles, les séries $E_{r, \mathfrak{A}}$ satisfont les conditions de la proposition.

La démonstration dans le cas où f est une forme parabolique est similaire, nous la laissons au lecteur.

Question. *Y a-t-il une forme modulaire non nulle annulant (30) ?*

On voit que toute série d'Eisenstein non nulle satisfait les hypothèses de la proposition 5. On en déduit :

Théorème 4 *L'anneau $\mathbb{C}[E_2, \Lambda E_2, \Pi E_2]$ a un degré de transcendance 3 sur \mathbb{C} .*

Comme le degré de transcendance du corps $F_{\underline{0}}(\Gamma)$ des fonctions modulaires de poids $\underline{0}$ est 2, on trouve que la clôture algébrique du corps de fractions de l'anneau

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \bigoplus_r M_r(\Gamma)$$

des formes modulaires de poids parallèle est de degré de transcendance 3. Ainsi, quatre formes modulaires de Hilbert de poids parallèles sont toujours algébriquement dépendantes.

Corollaire 3 *Pour tout corps quadratique réel K , il existe trois formes modulaires de Hilbert pour Γ_K , symétriques et algébriquement indépendantes, de poids parallèle 2, 6, 10, et une forme modulaire antisymétrique de poids 20.*

Démonstration. Si F est une forme modulaire de Hilbert de poids $\underline{r} = (r_1, r_2)$,

$$\Phi F := (\Pi F - (r_1 + 1)(r_2 + 1)(\Lambda F)^2)F^{-1}$$

est une forme modulaire de Hilbert de poids $3\underline{r} + \underline{4}$ qui est non nulle d'après le lemme 16 (dans l'expression explicite de $\Pi F - (r_1 + 1)(r_2 + 1)(\Lambda F)^2$, tous les termes sont des produits de F et de fonctions holomorphes sur \mathcal{H}^2). En particulier, ΦE_2 est une forme modulaire non nulle de poids 10.

D'après le corollaire 2, les formes modulaires $F = E_2, G = \Lambda E_2$ et ΠE_2 sont algébriquement indépendantes, de poids parallèles 2, 6, 12, et sont aussi clairement symétriques. Donc la forme modulaire $H = \Phi E_2$ est symétrique de poids 10 et F, G, H sont algébriquement indépendantes.

La proposition 3 implique l'existence d'une forme modulaire non nulle M , de poids 20. Cette forme modulaire est antisymétrique, car F, G, H sont symétriques.

Remarque. Soit $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0(\Gamma)$ l'anneau engendré par les formes modulaires de Hilbert symétriques de poids pair associées à Γ , soit \mathfrak{P} l'idéal de \mathcal{T}_0 engendré par toutes les formes modulaires de Hilbert F telles que $F|_{\Xi_2} = 0$. Si le discriminant de K est une somme de deux carrés, et si \mathcal{P} est principal, alors \mathcal{T}_0 est engendré par F, G et un générateur de \mathcal{P} (cf. [10]). Ici, nous ne pouvons pas démontrer que $\mathcal{T}_0 = \mathbb{C}[F, G, H]$, mais seulement que $H \in \mathcal{P}$. En effet, $(\Lambda E_2)|_{\Xi_2}$ est parabolique de poids 12, donc proportionnelle à Δ . De même, $\Pi_1 E_2|_{\Xi_2}, \Pi_2 E_2|_{\Xi_2}$ sont proportionnelles à Δ , ce qui implique que $\Phi^\sharp E_2 := \Pi E_2 - 9(\Lambda E_2)^2$ satisfait $(\Phi^\sharp E_2)|_{\Xi_2} = \lambda \Delta^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. La constante de proportionnalité λ est nulle, car $\Phi^\sharp E_2 = E_2 \Phi E_2$, donc $E_{4, \mathbb{Z}}(\Phi E_2)|_{\Xi_2} = \lambda \Delta^2$, mais il n'existe pas de forme parabolique non nulle de poids 10 pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Donc $H = \Phi E_2 \in \mathfrak{P}$.

Le corollaire 3 généralise le théorème 4.1 p. 507 de [11] : de plus, la méthode utilisée dans [11] (étude de *plongements modulaires* d'Igusa) ne détecte pas de forme modulaire antisymétrique non nulle de poids 20. Noter de plus qu'en général, $M^2 \notin \mathbb{C}[F, G, H]$.

6.5 L'anneau des formes modulaires de tout poids pour Γ , et sa clôture algébrique.

Nous avons explicité un lien entre les propriétés différentielles de formes modulaires et la structure des anneaux des formes modulaires de poids parallèle. Nous avons un anneau :

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\tau} M_{\tau}(\Gamma),$$

et nous nous demandons si les propriétés différentielles des formes modulaires de poids parallèle permettent de décrire sa structure.

Lemme 17 *L'anneau \mathcal{L} n'est pas de type fini.*

Esquisse de démonstration. On représente les espaces vectoriels non-nuls de formes modulaires de poids $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ comme des points de \mathbb{R}^2 : nous construisons ainsi un ensemble discret \mathcal{E} contenu dans le premier quadrant.

Si l'anneau \mathcal{L} est de type fini, alors \mathcal{E} est contenu dans un cône d'angle au sommet $< \pi/2$, car il n'y a pas de formes modulaires non nulles, de poids $(0, a)$ ou $(b, 0)$. L'action des opérateurs Π_i induit des applications $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}^2$. Aucune de ces applications n'a son image contenue dans un cône d'angle au sommet $< \pi/2$: \mathcal{L} n'est donc pas un anneau de type fini.

On revient aux processus de construction de formes modulaires. Nous en avons pour construire des formes modulaires de poids parallèle *ex-novo* : séries d'Eisenstein, fonctions thêta.

Pour construire des formes modulaires de poids non parallèle, nous ne connaissons jusqu'à ici que des méthodes différentielles : application des opérateurs $\Pi_i, \Lambda_{i,k}, (X, Y) \mapsto [X, Y]_{1_i}, \dots$ à des formes modulaires de poids parallèle. Les formules de traces de [22] peuvent être aussi utilisées.

Voici une question liée à ce problème : posons $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. On voit qu'il n'y a pas de formes modulaires de Hilbert de poids non parallèle (a, b) avec $a + b < 12$. Nous avons $M_{\underline{6}} = \langle \varphi_2^3, \chi_6 \rangle$. Nous voulons construire explicitement des bases de $M_{(a,b)}$ avec $a + b = 12$ et $a \neq b$.

Par exemple, $M_{(8,4)}$ contient $\Pi_1 E_2$ qui est non nul, et la dimension de cet espace est 1 : nous en avons une base.

Les opérateurs différentiels que nous avons introduit ne permettent pas de calculer des formes modulaires non nulles dans $M_{(a,b)}$ avec

$$(a, b) \notin \{(8, 4), (6, 6), (4, 8)\},$$

à partir de formes modulaires de poids parallèle : *a priori* la seule chose que l'on puisse dire est que ces espaces sont de dimension au plus 1.

Nous savons que si f est une forme modulaire non nulle dans un de ces espaces, elle doit satisfaire une certaine équation différentielle. Dans chaque cas, on peut construire son développement en série de Fourier, montrer que sa restriction à Ξ_2 n'est pas un multiple de Δ , et finalement démontrer que pour $a + b = 12$ et $(a, b) \notin \{(8, 4), (6, 6), (4, 8)\}$, alors $M_{(a,b)} = \{0\}$.

L'anneau \mathcal{L} est-il engendré par l'image de \mathcal{T} par application itérée de tous les opérateurs différentiels $\Pi_i, \Lambda_{i,k}, (X, Y) \mapsto [X, Y]_{1_i}, \dots$?

La réponse à cette question est *non*. Les formules des traces d'opérateurs de Hecke permettent de construire des algorithmes de calcul de la dimension d'espaces de formes modulaires de poids non parallèle (cf. [22], et les algorithmes de calcul développés dans [20]). Par exemple, en utilisant la proposition 2.7 de [20], on peut montrer que $S_{(14,2)}(\Upsilon)$ est de dimension ≥ 1 . Il est facile de montrer que $S_{(14,2)}$ ne peut pas contenir l'image d'un opérateur différentiel défini sur un espace vectoriel de formes modulaires.

Des bases d'espaces de formes modulaires $S_{(a,b)}$ peuvent être calculées explicitement par les formules de traces (cf. [20]), mais pas par application d'opérateurs différentiels sur des formes modulaires de poids parallèle.

Posons :

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{C} \left[E_2, \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial E_2}{\partial z_1}, \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial E_2}{\partial z_2}, \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_1 \partial z_2}, \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_1^2}, \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_2^2} \right].$$

Cet anneau n'est pas stable pour les opérateurs de dérivation $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z)$ et $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z')$, mais les propriétés différentielles des formes modulaires permettent d'obtenir :

Théorème 5 *La clôture algébrique \mathcal{B} du corps des fractions de \mathcal{M}_0 , munie des opérateurs de dérivation $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z)$ et $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z')$, est un corps différentiel qui est de degré de transcendance 6 sur \mathbb{C} . Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, alors l'anneau*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0[\varphi_2^{-1}, \chi_5^{-1}, [\varphi_2, \chi_5]_{2_1}^{-1}, [\varphi_2, \chi_5]_{2_2}^{-1}],$$

munie des opérateurs de dérivation $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z)$ et $(2\pi i)^{-1}(\partial/\partial z')$, est un anneau différentiel qui est isomorphe à un quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{10}]$ par un idéal premier de hauteur algébrique 4.

Démonstration. Les propositions 4 et 5 impliquent que les fonctions :

$$\begin{aligned} X &= E_2, Y_1 = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial E_2}{\partial z_1}, Y_2 = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial E_2}{\partial z_2}, \\ Z &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_1 \partial z_2}, T_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_1^2}, T_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial z_2^2}, \end{aligned}$$

sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} . Donc le degré de transcendance de \mathcal{B} est au moins 6.

Posons :

$$A_1 = \frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z_1^3}, A_2 = \frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z_2^3}, B_1 = \frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z_1^2 \partial z_2}, B_2 = \frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z_1 \partial z_2^2}.$$

On calcule les formes modulaires $[E_2, \Pi_i E_2]_{1_j}$ pour $i, j = 1, 2$, qui sont non nulles d'après le lemme 16. On trouve :

$$\begin{aligned} [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_1} &= 4(B_2 X^2 - T_2 Y_1 X + 3Y_2(Y_1 Y_2 - XZ)) \\ &= 4B_2 X^2 + \mathcal{B}_2 \\ [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_2} &= 4(B_1 X^2 - T_1 Y_2 X + 3Y_1(Y_2 Y_1 - XZ)) \\ &= 4B_1 X^2 + \mathcal{B}_1 \\ [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_1} &= 4(6Y_1^3 - 6T_1 X Y_1 + A_1 X^2) \\ &= 4A_1 X^2 + \mathcal{A}_1 \\ [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_2} &= 4(6Y_2^3 - 6T_2 X Y_2 + A_2 X^2) \\ &= 4A_2 X^2 + \mathcal{A}_2, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i \in \mathbb{C}[X, Y_1, \dots, T_2]$. Ces formes modulaires sont de poids $(8, 10)$, $(10, 8)$, $(12, 6)$ et $(6, 12)$ respectivement. De ces formes modulaires on construit des formes modulaires de poids parallèle non nulles :

$$\begin{aligned} [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_2}^2 \Pi_2 E_2, [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_2} [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_2} \Pi_1 E_2 &\in S_{24} \\ [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_1}^2 (\Pi_2 E_2)^3, [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_2}^2 (\Pi_1 E_2)^3 &\in S_{36} \end{aligned}$$

On déduit que les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2 se trouvent chacune dans une extension quadratique de

$$\mathcal{T}(\Gamma)[X, X^{-1}, Y_1, \dots, T_2, (\Pi_1 E_2)^{-1}, (\Pi_2 E_2)^{-1}].$$

Mais la clôture algébrique du corps de fractions de cet anneau est égale à la clôture algébrique de $\mathbb{C}(X, Y_1, \dots, T_2)$ ⁽⁹⁾. Ceci prouve que A_1, A_2, B_1, B_2 sont algébriques sur $\mathbb{C}(X, Y_1, \dots, T_2)$.

Supposons maintenant que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, et démontrons les propriétés de l'anneau \mathcal{M} . L'anneau \mathcal{M}_1 engendré par toutes les dérivées partielles de la fonction φ_2 est différentiellement stable. Cet anneau contient χ_6 et χ_5^2 , car il contient \mathcal{M}_0 qui contient à son tour χ_6 et χ_5^2 d'après le théorème 2 (ce sont des images de φ_2 par des opérateurs différentiels d'ordre 2). Donc toutes les dérivées partielles de toutes les formes modulaires symétriques de poids pairs appartiennent à \mathcal{M}_1 .

Comme χ_{15} est proportionnelle à $\chi_5^{-1}[\varphi_2, \chi_5^2, \chi_6]$, on trouve aussi que toutes les dérivées partielles de toutes les formes modulaires de poids parallèle appartiennent à $\mathcal{M}_1[\chi_5^{-1}]$ (il suffit d'appliquer le théorème 3). Donc toutes les dérivées partielles de χ_5^{-1} appartiennent à $\mathcal{M}_1[\chi_5^{-1}]$ et il en résulte que cet anneau est différentiellement stable.

Passons à l'étude de l'anneau \mathcal{M} . On a que $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0[\chi_5^{-1}]$, et ce dernier anneau contient toutes les formes modulaires de poids parallèle, comme l'on a déjà remarqué.

Montrons maintenant que $\mathcal{M}_1[\chi_5^{-1}] \subset \mathcal{M}$. Il suffit de démontrer que $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{M}$: nous montrons ici seulement que $A_1, B_1 \in \mathcal{M}$. On a que $[\varphi_2, \Pi_1 \varphi_2]_{1_1} [\varphi_2, \chi_5]_{1_2}^3$ est une forme parabolique non nulle de poids parallèle 33, et que $[\varphi_2, \Pi_1 \varphi_2]_{1_1} [\varphi_2, \chi_5]_{1_2}$ est une forme parabolique non nulle de poids parallèle 17. Comme

$$[\varphi_2, \Pi_1 \varphi_2]_{1_1} = 4\varphi_2^2 A_1 + P, \quad [\varphi_2, \Pi_1 \varphi_2]_{2_1} = 4\varphi_2^2 B_1 + Q$$

avec $P, Q \in \mathcal{M}_0$, et comme \mathcal{M} contient toutes les formes modulaires de poids parallèle, nous obtenons $\mathcal{M}_1[\chi_5^{-1}] \subset \mathcal{M}$. Comme \mathcal{M} contient aussi toutes les

⁹Noter qu'il y a bien plus de relations. Par exemple :

$$\begin{aligned} [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_1} [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_2} &\in S_{18} \\ [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_1} [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_2} &\in S_{18} \\ [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_1}^2 \Pi_1 E_2, [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_1} [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_1} [E_2, E_2]_{4_2} &\in S_{24} \\ [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_1} [E_2, \Pi_1 E_2]_{1_2} (\Pi_2 E_2)^2 &\in S_{30} \\ [E_2, \Pi_2 E_2]_{1_2} [E_2, \Pi_2 E_2]_{2_1} (\Pi_1 E_2)^2 &\in S_{30} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Toutes ces relations ci-dessus sont redondantes : il y a donc des relations qui sont satisfaites par les formes modulaires de poids parallèle dans $S_{6r}(\Gamma)$, indépendantes de K .

derivées partielles de $\varphi_2^{-1}, \chi_5^{-1}, [\varphi_2, \chi_5]_{1_1}^{-1}$ et $[\varphi_2, \chi_5]_{1_2}^{-1}$, \mathcal{M} est différentiellement stable.

L'anneau \mathcal{M} est clairement un quotient de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{10}]$ par un idéal de relations \mathcal{I} . De plus, comme \mathcal{M} est un anneau de fonctions méromorphes, il n'a pas de diviseurs de zéro, et donc \mathcal{I} est un idéal premier. Comme le degré de transcendance de \mathcal{B} est 6, l'idéal \mathcal{I} a hauteur 4 ⁽¹⁰⁾.

La preuve du théorème 5 est terminée. On montre aussi que la clôture algébrique du corps engendré par toutes les dérivées partielles de fonctions modulaires de poids $\underline{0}$ est de degré de transcendance 6.

Remarque. Connaissant la structure de l'anneau de formes modulaires de poids parallèle pour un certain groupe modulaire de Hilbert Γ , on peut décrire les relations algébriques liant les fonctions A_i, B_j . Naturellement, ces relations sont en général très compliquées. Attention : le corps \mathcal{B} n'est pas la clôture algébrique du corps des fractions de l'anneau \mathcal{L} des formes modulaires de tout poids. On a la proposition qui suit.

Proposition 6 *Cinq formes modulaires de Hilbert sont toujours algébriquement dépendantes. Il existe quatre formes modulaires de Hilbert algébriquement indépendantes.*

Démonstration. Le théorème 4 implique qu'il existe trois formes modulaires de poids parallèles et algébriquement indépendantes. De plus, on peut facilement vérifier que si X est une forme modulaire de Hilbert de poids non parallèle non nulle, et si F est une forme modulaire de Hilbert de poids parallèle non constante, alors F, X sont algébriquement indépendantes. Dans ce texte nous avons construit plusieurs formes modulaires de Hilbert non constantes, de poids non parallèle. Ainsi, on peut toujours construire quatre formes modulaires de Hilbert algébriquement indépendantes.

Soient maintenant F, G, H, X, Y cinq formes modulaires non constantes, avec F, G, H de poids parallèle f, g, h et X, Y de poids non parallèles $\underline{x}, \underline{y}$. Supposons que F, G, H soient algébriquement indépendantes, et que X, Y soient aussi algébriquement indépendantes : on a aussi que F, G, H, X sont algébriquement indépendantes, et que F, G, H, Y sont algébriquement indépendantes. Si $\underline{x} \in \mathbb{Q}^\times \underline{y}$, alors il existe deux entiers a, b tels que X^a/Y^b soit

¹⁰Pour des applications envisageables de ce théorème, il convient de remarquer que \mathcal{M} est un anneau de Cohen-Macaulay, puisque \mathcal{I} est clairement un idéal d'intersection complète. Les relations définissant \mathcal{I} peuvent être explicitées, mais elles sont assez compliquées.

une fonction modulaire Q de poids parallèle 0, non constante. Mais Q est un quotient de deux formes modulaires de poids parallèles, donc $Q \in \mathbb{C}(F, G, H)$, et F, G, H, X, Y sont algébriquement dépendantes. Supposons maintenant que $\underline{x} \notin \mathbb{Q}^\times \underline{y}$: donc les vecteurs \underline{x} et \underline{y} sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Il existe une combinaison linéaire $a\underline{x} + b\underline{y} \in (\mathbb{Z} - \{0\})\underline{1}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, et la forme modulaire $X^a Y^b$ est une forme modulaire non constante P de poids parallèle. Nous avons déjà remarqué que quatre formes modulaires de Hilbert sont toujours algébriquement dépendantes, donc F, G, H, P sont algébriquement dépendantes et on a aussi dans ce cas que F, G, H, X, Y sont algébriquement dépendantes.

Nous laissons au lecteur le soin de compléter la démonstration de cette proposition dans le cas général où F, G, H n'ont pas nécessairement de poids parallèles, en utilisant ce qui précède.

Références

- [1] J. Ax. *On Schanuel's conjectures*. Math. Ann. 93, pp. 252-268, (1971).
- [2] D. Bertrand, W. Zudilin. *On the transcendence degree of the differential field generated by Siegel modular forms*. J. Reine Angew. Math, 554 (2003).
- [3] R. E. Borcherds. *Automorphic forms on $\mathcal{O}_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products*. Invent. Math. 120, 161-213 (1995).
- [4] R. E. Borcherds. *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*. Invent. Math. 132, 491-562 (1998).
- [5] V. Bosser. *Indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein*. Manuscrit.
- [6] J. H. Bruinier, M. Bundschuh. *On Borcherds products associated with lattices of prime discriminant*. à paraître dans Ramanujan J. (2003)
- [7] E. Freitag. *Hilbert modular forms*. Berlin etc. : Springer-Verlag. (1990).
- [8] G. van der Geer. *Hilbert modular surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 16. Berlin etc. : Springer-Verlag. (1988)
- [9] F. Götzky. *Über eine Zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher*. Math. Ann. 100, pp. 411-437 (1928).

- [10] K.-B. Gundlach. *Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* . Math. Ann. 152, 226-256 (1963).
- [11] W. F. Hammond. *The modular groups of Hilbert and Siegel*. Amer. J. Math. 88, 497-516 (1966).
- [12] E. Hecke. *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. Zweiter Teil*. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 3, 213-236 (1924). Mathematische Werke. 381-404. Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht (1970).
- [13] F. Hirzebruch. *Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein*. Uspekhi Mat. Nauk 31 (1976) 153-166, traduit dans Russian Math. Surveys 31 :5 (1976) 96-110.
- [14] Igusa. *On Siegel modular forms of genus 2 (II)*. Amer. Jour. of Math. 86, pp. 392-412, (1964).
- [15] Igusa. *Theta functions*. Grundlehren der math. Wissenschaften 194, (1970).
- [16] M. Ho Lee. *Hilbert modular pseudodifferential operators*. Proc. of the Amer. Math. Soc. 129, 11, 3151-3160 (2001).
- [17] H. Maass. *Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $\mathbb{R}(\sqrt{5})$* . Math. Ann. 118, 65-84 (1941).
- [18] F. Martin & E. Royer. *Formes modulaires pour la transcendance*. Manuscrit.
- [19] Yu. V. Nesterenko, P. Philippon (éditeurs). *Introduction to algebraic independence theory*. Lecture Notes in Mathematics. 1752. Berlin : Springer. (2001)
- [20] K. Okada. *Hecke Eigenvalues for Real Quadratic Fields*. Experimental Math. 11 407-426 (2002).
- [21] H. L. Resnikoff. *Automorphic forms and automorphy preserving differential operators on products of halfplanes*. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 38, 168-198 (1972).
- [22] H. Saito. *On an operator U_χ acting on the space of Hilbert cusp forms*. J. Math. Kyoto Univ. 24, 285-303 (1984).
- [23] J.-P. Serre. *cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris (1977).
- [24] G. Shimura. *Theta functions with complex multiplication*. Duke Math. Jour. 43, 673-696 (1976).

- [25] D. Zagier. *Introduction to modular forms*. Waldschmidt, Michel (ed.) et al., From number theory to physics. Berlin : Springer-Verlag. 238-291 (1992).
- [26] D. Zagier. *Modular forms and differential operators*. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 104, No. 1, pp. 57-75 (1994).