



HAL
open science

Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

| Xavier Caruso. Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié. 2004. hal-00002219v3

HAL Id: hal-00002219

<https://hal.science/hal-00002219v3>

Preprint submitted on 24 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p - 1$

Xavier Caruso

Mai 2004

Abstract

Let K be a local field of mixed characteristic not absolutely ramified. Fontaine-Laffaille theory (see [13]) gives a description of the torsion crystalline \mathbb{Z}_p representations of the absolute Galois group of K (p denotes the characteristic of the residual field). Improving the former works, Breuil introduced new modules and obtained an integer and torsion theory for the semi-stable representations (see [3]).

In this paper, we follow Breuil's works and adapt them to the case where the local field K can be absolutely ramified. However, we would have a limitation on the index of absolute ramification.

Rsum

Soit K un corps local de caractéristique mixte non absolument ramifié. La théorie de Fontaine-Laffaille (voir [13]) permet de décrire les \mathbb{Z}_p -représentations galoisiennes cristallines entières de torsion (p désigne la caractéristique du corps résiduel). Poursuivant les précédents travaux, Breuil a introduit de nouveaux modules et a obtenu une théorie entière et de torsion pour les représentations semi-stables (voir [3]).

Dans cet article, nous reprenons les travaux de Breuil et les adaptons dans le cas où le corps local K peut être absolument ramifié. Nous aurons toutefois une contrainte sur l'indice de ramification absolu.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation des objets	4
2.1	La catégorie \mathcal{M}^r et ses variantes	5
2.2	Le foncteur vers les représentations galoisiennes	6
2.3	Les objets tus par p	8

3	Gnralits sur les catgories \mathcal{M}^r et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$	13
3.1	Indpendance du choix de l'uniformisante	14
3.2	Description des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$	20
3.3	La catgorie $\widetilde{\text{MF}}^r$	24
3.4	Un mot sur le cas $r = 1$	27
3.5	Des catgories abliennes et artiniennes	27
4	Classification des objets simples	30
4.1	La monodromie	30
4.2	Une base adapte simple	31
4.3	Classification proprement dite	32
5	tude du foncteur T_{st}	34
5.1	Un systme prliminaire	34
5.2	Calcul sur les objets simples	38
5.3	Exactitude et fidlit	39
6	Pleine fidlit du foncteur T_{st}	40
6.1	Le module A_{ss}	40
6.2	Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$	44
6.3	Fin de la preuve	45
6.4	Rcapitulatif et conclusion	48
7	Consquences	52
7.1	Modules filtrs et modules fortement divisibles	52
7.2	Modules fortement divisibles et foncteur T_{st}	53
7.3	Variante d'une conjecture de Serre	54

1 Introduction

Dans toute la suite de ce papier, p dsigne un nombre premier et k un corps parfait de caractristique p . On note \bar{k} une clture algbrique de k , \mathbb{F}_p le sous-corps premier de k et si $q = p^h$ est une puissance de p , \mathbb{F}_q l'ensemble des solutions dans \bar{k} de l'quation $x^q = x$.

On dsigne par W l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans k . On rappelle que comme k est parfait, cet anneau est un anneau de valuation discrte complet de caractristique nulle dont p est une uniformisante et dont le corps rsiduel s'identifie canoniquement k . On dispose en outre d'une application $\sigma : W \rightarrow W$ appele Frobenius qui induit par passage au quotient le Frobenius classique sur k , c'est--dire l'lvation la puissance p .

On appelle K_0 le corps des fractions de W , c'est un corps local de caractristique mixte. On prend K une extension finie totalement ramifie de K_0 . On note e le degr de l'extension K/K_0 , c'est l'indice de ramification absolue de K . On appelle \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K et on choisit π une uniformisante de cet anneau. On fixe \bar{K} une clture algbrique de K , on note $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de \bar{K} et $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois absolu du corps K . On note I le groupe d'inertie (c'est un sous-groupe de G_K), I_s le groupe d'inertie sauvage

et $I_t = I/I_s$ le groupe d'inertie modre. Enfin, on appelle v la valuation sur \bar{K} normalisee par $v(\pi) = 1$ (et donc $v(p) = e$).

Une \mathbb{Z}_p -representation (resp. \mathbb{F}_p -representation, resp. \mathbb{F}_q -representation, resp. \mathbb{Q}_p -representation) de G_K est une action lineaire et continue de G_K sur un \mathbb{Z}_p -module (resp. un \mathbb{F}_p -espace vectoriel, resp. un \mathbb{F}_q -espace vectoriel, resp. un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel). Afin d'etudier ces representations, diverses categories ont ete introduites. Nous allons nous occuper dans ce papier des categories $\underline{\mathcal{M}}^r$ introduites par Breuil dans [6], et nous montrerons comment il resulte de notre etude le thorme 1.0.1 ci-dessous.

Avant de l'annoncer, faisons quelques rappels (pour plus de precisions, voir le paragraphe 1 de [20]). Soient h un entier et $q = p^h$. Notons $\hat{V} = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} / x^{p^h} = \pi x\}$ et $V \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la reduction modulo p de \hat{V} . L'espace V est une \mathbb{F}_p -representation de G_K . De plus V herite naturellement d'une structure de \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension 1 et fournit un caractere $I \rightarrow \mathbb{F}_q^*$ qui se factorise par $\theta : I_t \rightarrow \mathbb{F}_q^*$. On pose $\theta_i = \theta^{p^i}$, ce sont les *caracteres fondamentaux de niveau h* . Toute \mathbb{F}_p -representation irreductible de dimension d du groupe d'inertie modre s'ecrit comme un produit de caracteres fondamentaux de niveau h (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [20]).

Thorme 1.0.1. *Soit X un schma propre et lisse sur K reduction semi-stable sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K . On fixe r un entier. Les exposants qui decrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo p de $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$ (o $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X sur \bar{K} et o « \star » signifie que l'on prend le dual) sont compris entre 0 et er .*

Ce thorme est rapproche d'une conjecture formulee par Serre dans le paragraphe 1.13 de [20] qui prdit le mme resultat pour la representation $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. A l'heure actuelle, cette conjecture est connue dans le cas $r = 1$ bonne reduction ([19]), le cas non ramifiee bonne reduction ([13], [18]), le cas non ramifiee reduction semi-stable ([5]) et le cas $r = 1$ ([8]). Le resultat donn ici ne fait aucune hypothese ni sur e , ni sur r . Remarquons toutefois qu'il est vide pour $er \geq p - 1$.

Soit r un entier verifiant $er < p - 1$. Nous presentons dans le chapitre 2, la categorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et le foncteur T_{st} qui associe tout objet de cette categorie une \mathbb{Z}_p -representation de torsion de G_K . Le chapitre 3 est consacree a l'etude de la categorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. En particulier, toujours dans le cas $er < p - 1$, on demontre qu'elle est abelienne et artinienne.

Nous donnons ensuite dans le chapitre 4 une description complete des objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$, lorsque le corps residuel k est supposee algebriquement clos. Plus precisement nous prouvons le thorme suivant :

Thorme 1.0.2. *Supposons k algebriquement clos et $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors, il existe une base (e_1, \dots, e_h) de S et une suite d'entiers (n_i) compris entre 0 et er , periodique de periode exactement h , le tout tel que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h + \text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M},$$

$\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$ pour tout i (considere modulo h).

En outre, ces objets sont tous simples et deux a deux non isomorphes.

Par la suite, nous nous intéressons véritablement au foncteur T_{st} . On commence par déterminer son image sur les objets simples précédemment calculés. On obtient le thorme :

Thorme 1.0.3. *Supposons k algébriquement clos et $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme dans le thorme 1.0.2. Alors la représentation galoisienne $T_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

où m_i est défini par $n_i + m_i = er$ et où les θ_i sont les caractères fondamentaux de niveau h .

En particulier, pour tout objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modère sur la semi-simplifiée modulo p de $T_{st}(\mathcal{M})$ sont compris entre 0 et er .

La conclusion des chapitres 5 et 6 est une réponse affirmative à une conjecture formulée à la fin de [6], nonc que nous rappelons ici :

Thorme 1.0.4. *Supposons $er < p - 1$, alors le foncteur T_{st} de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations linaires de G_K est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objets et quotients et indépendante du choix de l'uniformisante π .*

Le chapitre 7 étudie les conséquences de tout ce travail préliminaire. On commence par reprendre un cas particulier d'une conjecture formulée dans [9] (conjecture 2.2.6) :

Thorme 1.0.5. *Supposons $er < p - 1$. Alors le foncteur T_{st} réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles¹ et la catégorie des réseaux stables par Galois dans les \mathbb{Q}_p -représentations semi-stables de G_K poids de Hodge Tate compris entre 0 et r .*

On donne ensuite une preuve du thorme 1.0.1.

Ce travail a été accompli dans le cadre de ma thèse de doctorat en mathématique que je prépare sous la direction de Christophe Breuil. Je tiens à le remercier vivement ici pour les conseils, les explications et les réponses qu'il a toujours su me fournir, ainsi que pour la relecture patiente des versions préliminaires de ce texte. Je tiens également à remercier Florian Herzig pour avoir relu en profondeur cet article, et pour ses commentaires toujours très appropriés.

2 Présentation des objets

Les objets introduits dans cette partie ne sont pas nouveaux et décrits plus en détail dans les articles [3] et [6]. La première de ces références n'étudie que le cas $e = 1$, et donc ne présente les objets que dans ce cas particulier.

On fixe maintenant et jusqu'à la fin de cet article un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p - 1$. Les définitions que nous allons donner ont un sens pour tout entier $r < p - 1$ mais certains thormes ne sont plus vérifiés lorsque $er \geq p - 1$.

¹Voir le paragraphe 7.1 pour une définition.

2.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et ses variantes

L'anneau S

On commence par définir un anneau que l'on va munir de structures supplémentaires. Bien que ces structures dépendent du corps K et de l'uniformisante π choisie, nous le notons simplement S par la suite.

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u coefficients dans W . Soit $E(u)$ le polynôme minimal de l'élément π sur K_0 , c'est un polynôme d'Eisenstein. On considère l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. On rappelle que cela signifie que l'on ajoute formellement à l'anneau $W[u]$ les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$. En tant qu'anneau, S est le complété p -adique de cette enveloppe aux puissances divisées. De façon plus terre-à-terre, S est la sous- W -algèbre de $K_0[[u]]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

où $q(i)$ désigne le reste de la division euclidienne de i par e , e étant l'indice de ramification absolue de corps K , également le degré du polynôme $E(u)$.

On prolonge le Frobenius à l'anneau S en définissant l'application ϕ par :

$$\phi \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(w_i) \frac{u^{pi}}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une application σ -semi-linéaire.

On munit en outre S de l'application W -linéaire N définie par :

$$N \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = - \sum_{i=1}^{\infty} i w_i \frac{u^i}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une dérivation au sens classique mais pas de la dérivation classique par rapport à u , le degré du polynôme n'étant pas abaissé.

On munit finalement S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n , on définit $\text{Fil}^n S$ comme le complété p -adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geq n$. On a donc :

$$\text{Fil}^n S = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

Il est évident que $\text{Fil}^0 S = S$, que $\text{Fil}^n S \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}^n S = 0$. On vérifie de plus certaines compatibilités avec les opérateurs définis précédemment : $N(\text{Fil}^n S) \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leq n \leq p-1$, $\phi(\text{Fil}^n S) \subset p^n S$. Ainsi, si $0 \leq n \leq p-1$, on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \text{Fil}^n S \rightarrow S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S , on le notera c par la suite.

Dfinition des catgories

On rappelle que r est un entier fix vrifiant $er < p - 1$. Un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est la donne :

1. d'un S -module \mathcal{M} isomorphe une somme directe (finie) de $S/p^n S$ pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

pour tout lment $s \in \text{Fil}^r S$ et tout lment $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module ;

4. d'une application W -linaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Une flche entre deux objets \mathcal{M} et \mathcal{M}' de cette catgorie est un morphisme S -linaire de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N .

On peut dfinir galement la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Il s'agit de la mme chose sauf que l'on ne fait pas cas de l'application N , les objets sont donc la donne des trois premiers points expos prcdemment.

2.2 Le foncteur vers les reprsentations galoisiennes

L'anneau A_{cris}

Soit R l'anneau limite projective du diagramme :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow$$

les applications de transition tant chaque fois l'lvation la puissance p . Un lment de R est une suite $(u^{(k)})_{k \geq 1}$ d'lments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ telle que pour tout entier k , $(u^{(k+1)})^p = u^{(k)}$.

On considre $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans R et l'application suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : W(R) &\rightarrow \mathbb{C}_p \\ (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) &\mapsto \sum_{n \geq 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{aligned}$$

o \mathbb{C}_p dsigne le complt p -adique de \bar{K} et o $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})_{p^m}$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ dsignant un relev quelconque de $a_i^{(j)}$.

On montre² que le noyau de $\hat{\theta}$ est l'idal principal de $W(R)$ engendr par l'ement $\xi = [p] - p$, o $[p]$ est le representant de Teichmller de $\underline{p} \in R$ dfini par $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n, \dots)$, les p_n formant un systme compatible de racines p^n -imes de p . L'anneau A_{cris} s'obtient en introduisant des puissances divises en ξ , et en comptant p -adiquement :

$$A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

L'anneau A_{cris} hrite d'un Frobenius ϕ et d'une action du groupe de Galois G_K dfinis *via* leur action sur $W(R)$. On munit galement A_{cris} d'une filtration dcroissante dfinie de la faon suivante :

$$\text{Fil}^n A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq n} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset A_{\text{cris}}.$$

L'anneau \hat{A}_{st}

L'anneau \hat{A}_{st} s'obtient en comptant p -adiquement la PD-algbre polynomiale $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$:

$$\hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

On tend le Frobenius et l'action de Galois \hat{A}_{st} de la faon suivante. On pose $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$. Soit $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$ un systme compatible de racines p^n -imes de l'uniformisante³ π et soit $g \in G_K$. Pour tout entier n , il existe $\varepsilon_n(g)$ une racine p^n -ime de l'unit telle que $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g) \pi_n$. La suite $[\varepsilon_n(g)]$ dfinit un lment $[\underline{\varepsilon}(g)] \in A_{\text{cris}}$. L'ement g agit sur X par $g(X) = [\underline{\varepsilon}(g)]X + [\underline{\varepsilon}(g)] - 1$. La filtration sur \hat{A}_{st} est obtenue en faisant le produit de convolution de la filtration de A_{cris} par la filtration naturelle donne par les puissances divises en X :

$$\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in \text{Fil}^{n-i} A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset \hat{A}_{\text{st}}$$

avec la convention $\text{Fil}^k A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$ si $k < 0$. Pour $n \leq p - 1$, on a $\phi(\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}) \subset p^n \hat{A}_{\text{st}}$ et on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n |_{\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}}}$.

On munit finalement \hat{A}_{st} d'un oprateur de monodromie N dfini comme l'unique drivation continue A_{cris} -liniare telle que $N(X) = 1 + X$.

L'anneau \hat{A}_{st} n'est pas sans lien avec S : dans [4], Breuil prouve que le morphisme de W -algbres $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$, $u \mapsto \frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$ ($[\underline{\pi}]$ dsigne le representant de Teichmller de $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n, \dots) \in R$, $\bar{\pi}_i$ tant la rduction modulo p de π_i) identifie S avec l'ensemble $\hat{A}_{\text{st}}^{G_K}$ des invariants de \hat{A}_{st} sous l'action du groupe de Galois. En outre, ce morphisme fait de \hat{A}_{st} un S -module. Toutefois, \hat{A}_{st} ne vrifie pas les proprits ncessaires pour tre un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

²Pour une preuve simple, voir le paragraphe II.2.2 de [2]

³Ainsi l'anneau \hat{A}_{st} dpend *a priori* du choix de ce systme compatible de racines. Cependant, on prouve que ce n'est pas le cas.

Le foncteur T_{st}

On pose $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$. L'action du groupe de Galois, le Frobenius, la filtration et la monodromie s'étendent à $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ car $\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} \cap p^r \hat{A}_{\text{st}} = p^r \text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}$. En outre, pour la même raison, si $r < p - 1$, l'objet $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ hérite de ϕ_r . Ce n'est toutefois pas un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$: il n'est pas de longueur finie en tant que S -module, et l'image de ϕ_r n'engendre pas tout l'espace. Il est quand même légitime de considérer l'ensemble des morphismes d'un objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ et on définit :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st},\infty})$$

le Hom précédent signifiant que l'on prend les morphismes compatibles au Fil^r , au Frobenius et l'opération de monodromie. Cet ensemble est naturellement une \mathbb{Z}_p -représentation galoisienne de torsion, tuée par la puissance de p qui annule \mathcal{M} .

Notre but est principalement d'étudier le foncteur T_{st} , et pour ce faire, nous allons quasiment toujours procéder par dévissage en regardant dans un premier temps les objets tués par p , que nous étudions dans le paragraphe suivant.

2.3 Les objets tués par p

Les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

L'anneau important ici est $k[u]/u^{ep}$ qui est relié à S/pS grâce à l'application de projection $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$ définie par $\sigma(u) = u$ et $\sigma(\frac{u^{ei}}{i!}) = 0$ pour $i \geq p$. Sur cet anneau, on définit une filtration par $\text{Fil}^n k[u]/u^{ep} = u^{en} k[u]/u^{ep}$, un Frobenius ϕ par $\phi(\sum w_i u^i) = \sum w_i^p u^{ip}$ (pour $w_i \in k$) et un opérateur de monodromie N comme l'unique dérivation k -linéaire vérifiant $N(u) = -u$

On définit ensuite la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$: les objets sont les données des quatre points qui suivent :

1. un $k[u]/u^{ep}$ -module \mathcal{M} libre de rang fini ;
2. un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r k[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{M} = u^{er} \mathcal{M}$;
3. une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que l'image de ϕ_r engendre \mathcal{M} en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module ;
4. une application k -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in k[u]/u^{ep}$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_\pi N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

où c_π est la réduction de c dans $k[u]/u^{ep}$.

On introduit galemment la catgorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_0^r$ dfinie comme $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ sauf que l'on oublie la donne de l'oprateur N .

On peut comparer les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p et ceux de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$. Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , c'est naturellement un S/pS -module (mme libre de rang fini), et on peut donc considrer le produit tensoriel $T(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{(\sigma)} k[u]/u^{ep}$ qui hrite d'une filtration, d'un Frobenius et d'une monodromie et dont on vrifie qu'il est dans $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$. Cette construction dfini un foncteur T allant de la sous-catgorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ forme des objets tus par p dans la catgorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$.

Proposition 2.3.1. *Le foncteur T dfini prcdemment est une quivalence de catgories.*

Dmonstration. Elle est en tout point similaire celle donne pour la proposition 2.2.2.1 de [3]. \square

On obtient ainsi une description plus simple des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p , les objets de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ pouvant tre vus comme des k -espaces vectoriels de dimension finie.

Description du quotient $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $p\mathcal{M} = 0$. Alors $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}}/p)$. Nous allons dans un premier temps dcrire explicitement le quotient \hat{A}_{st}/p .

On rappelle que l'on a dfini deux lments de R qui sont \underline{p} et $\underline{\pi}$. On a le rsultat suivant (voir paragraphe 3.7 de [15]) :

Lemme 2.3.2. *Avec les notations prcdentes, $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ s'identifie l'enveloppe aux puissances divises R^{PD} de R par rapport l'idal principal engendr par \underline{p} . En outre, on peut galemment identifier cet anneau $R[X_i]/(\underline{p}^p, X_i^p)_{i \geq 1}$, l'isomorphisme envoyant X_i sur la p^i -ime puissance divise $\frac{[\underline{p}]^{p^i}}{(p^i)!} \in A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$.*

La premire projection $R \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ induit un isomorphisme $R/\underline{p}^p R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On dduit du lemme prcdent que $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ s'identifie canoniquement $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p[X_i]/X_i^p$, i dcrivant l'ensemble des entiers strictement positifs. Finalement on voit que \hat{A}_{st}/p s'identifie l'anneau suivant :

$$(\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i] \langle X \rangle) / (p, X_i^p)_{i \geq 1}.$$

On rappelle que p_1 est une racine p -ime de p . Via les identifications prcdentes, et pour $n < p$, $\text{Fil}^n(\hat{A}_{\text{st}}/p)$ est le sous- $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ -module de \hat{A}_{st}/p engendr par les $p_1^{n-i} \frac{X^i}{i!}$ (pour $i \leq n$), les $\frac{X^i}{i!}$ (pour $i > n$) et les X_i (pour $i \geq 1$). On a $\phi_r(X_i) = 0$ et $\phi_1(X) = \frac{(1+X)^p - 1}{p} = Y$. La monodromie est l'unique drivation $(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$ -linaire et continue N qui envoie $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$.

Description du foncteur T_{st}

Nous cherchons faire le transport *via* le foncteur T pour voir comment le foncteur T_{st} se réalise travers la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. L'objet calculer est le produit tensoriel $\hat{A}_{\text{st}}/p \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$. Pour cela, on définit $\hat{A} = (\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \langle X \rangle$. On a un morphisme de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ -modules :

$$\text{pr} : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}$$

donn, *via* la description précédente, par $\text{pr}(X) = X$ et $\text{pr}(X_i) = 0$ pour tout i . On vérifie que pr est S/pS -linéaire. On définit également $\text{Fil}^r \hat{A} = \text{pr}(\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}})$ et on vérifie que l'on peut définir une unique application $\phi_r : \text{Fil}^r \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ (resp. $N : \hat{A} \rightarrow \hat{A}$) vérifiant $\phi_r \circ \text{pr} = \text{pr} \circ \phi_r$ (resp. $N \circ \text{pr} = \text{pr} \circ N$). Notons qu'il faut faire attention lorsque l'on veut effectuer des calculs avec ϕ_r : avant d'élever la puissance p , il faut toujours relever l'élément dans $\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}$. Par exemple, dans $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$, on a $\phi_1(p_1) = X_1 - 1$ et donc si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ est un multiple de π_1^{er} , on obtient $\phi_r(x) = (-1)^r \frac{x^p}{p^r}$, avec un signe *a priori* inattendu.

De plus, on a une inclusion S/pS -linéaire :

$$i : k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}$$

définie par $i(1) = 1$. On peut former le produit :

$$\text{pr} \cdot i : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}.$$

Lemme 2.3.3. *L'application précédente est un isomorphisme qui respecte les structures.*

Démonstration. La surjectivité et le respect des structures sont immédiats. Comme $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$ est surjectif, tout élément de $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ s'écrit $x \otimes 1$ avec $x \in \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. Pour vérifier l'injectivité, il suffit donc de voir que $(\ker \text{pr}) \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} = 0$ mais ceci résulte directement de :

$$X_i \otimes 1 = \frac{\pi_1^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = \frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = 1 \otimes \sigma \left(\frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \right) = 0.$$

□

On construit une application :

$$\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$$

obtenue de la tensorisation par $k[u]/u^{ep}$ au-dessus de S/pS (et où tous les morphismes doivent commuter aux structures supplémentaires).

Lemme 2.3.4. *L'application précédente est un isomorphisme de \mathbb{Z}_p -modules galoisiens.*

Démonstration. Commençons par l'injectivité. Soit $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty})$ induisant par tensorisation l'application nulle $T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}, \infty} \\ \downarrow x \mapsto 1 \otimes x & & \downarrow \text{pr} \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{0} & \hat{A} \end{array}$$

d'o $\text{im } \psi \subset \ker \text{pr}$. On vrifie facilement que $\phi_r(\ker \text{pr}) = 0$. Comme ψ commute ϕ_r et $\phi(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} , on en dduit $\psi = 0$. L'application $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$ est injective.

Pour la surjectivit, notons $T(\mathcal{M})_0$ l'image de ϕ_r sur $T(\mathcal{M})$. La preuve de la proposition 2.2.2.1 de [3] fournit l'isomorphisme :

$$\mathcal{M} \simeq T(\mathcal{M})_0 \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS.$$

Soit $\bar{\psi} : T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$. D'aprs l'isomorphisme prcdent, elle induit une application S/pS -linaire $\mathcal{M} \rightarrow \hat{A} \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS$, et ce dernier module s'envoie de faon naturelle dans $\hat{A}_{\text{st}, \infty}$. On vrifie finalement que l'application compose commute Fil^r , ϕ_r et N et relve $\bar{\psi}$. \square

Description de l'anneau \hat{A}

Lemme 2.3.5. *Soit R un anneau dans lequel tous les entiers premiers p sont inversibles. Alors on a un isomorphisme :*

$$(R[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p) \longrightarrow (R \langle X \rangle) / p$$

envoyant X' sur $X + 1$ et $\frac{Y^i}{i!}$ sur $\frac{1}{i!} \left(\frac{(X+1)^p - 1}{p} \right)^i$.

Dmonstration. D'abord, l'application prcdente, disons ψ , est bien dfinie : on a $(1 + X)^p \equiv 1 + X^p \equiv 1 \pmod{p}$.

Pour prouver que ψ est un isomorphisme, on remarque que chacun des objets intervenant est un R/p -module libre et que ψ est R/p -linaire. Une base du module source est donne par la famille $\left(X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right)_{0 \leq i \leq p-1, j \geq 0}$. Le module but admet pour base la famille $\left(\frac{X^n}{n!} \right)_{n \geq 0}$. L'image par ψ de l'lment $X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!}$ est :

$$\psi \left(X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right) = (1 + X)^i \cdot \frac{\left(\frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^j}{j!}.$$

Le terme dominant de cette dernire expression est $\frac{X^{pj+i}}{p^j j!}$ et si on note v_p la valuation p -adique normalise par $v_p(p) = 1$, on a :

$$v_p((pj + i)!) = j + v_p(j!) = v_p(p^j j!)$$

puisque $i < p$. Comme les entiers premiers p sont par hypothse inversibles dans R , l'galit prcdente assure qu'il existe un lment inversible $\alpha \in R/p$ tel que $p^j j! = \alpha (pj + i)!$. Ainsi la « matrice » representant l'application ψ dans les bases donnees ci-dessus est triangulaire et les termes diagonaux sont tous inversibles. Cela prouve que ψ est bijective. \square

L'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vrifie les hypothses du lemme que l'on vient de prouver ; on obtient donc le corollaire suivant qui donne une nouvelle description relativement explicite de l'anneau \hat{A} :

Corollaire 2.3.6. *On a un isomorphisme :*

$$\hat{A} \rightarrow (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

En outre l'opérateur de monodromie s'exprime simplement sur cette description : on a $N(X') = X'$ et $N\left(\frac{Y^i}{i!}\right) = \frac{Y^{i-1}}{(i-1)!}$.

Action de Galois sur l'anneau \hat{A} .

On va déterminer l'action de Galois sur les éléments X' et Y . Pour X' c'est facile puisque par définition on a $g(X') = \varepsilon(g) X'$ pour tout $g \in G_K$.

Pour Y , on pourrait tentent d'écrire :

$$g(Y) = \frac{\varepsilon(g)^p (1 + X)^p - 1}{p} = Y$$

mais on n'a pas le droit de faire ce calcul cause de la division par p . Ce qu'il faut, c'est choisir un relev de Y dans \hat{A}_{st} , calculer l'action de Galois sur ce relev et voir quel élément correspond dans \hat{A} .

Comme relev, on pourrait choisir $\frac{(1+X)^p - 1}{p}$ mais on choisit d'abord :

$$\log(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{X^i}{i} + \dots \in \hat{A}_{\text{st}}$$

Soit $g \in G_K$. On a $g \log(1 + X) = \log(g(1 + X)) = \log([\underline{\varepsilon}(g)](1 + X)) = g(Y) = Y + \hat{t}(g)$
o :

$$\hat{t}(g) = \log([\underline{\varepsilon}(g)]) = [\underline{\varepsilon}(g)] - \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^2}{2} + \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^i}{i} + \dots \in A_{\text{cris}}$$

Nous allons déterminer l'image $t(g)$ de $\hat{t}(g)$ dans \hat{A} . Remarquons que comme $\hat{t}(g) \in A_{\text{cris}}$, on a simplement $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Nous allons prouver qu'il s'agit d'une racine $(p-1)$ -ième de $(-p)$.

Lemme 2.3.7. *Avec les notations précédentes, $t(g)$ est l'image dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ de :*

$$-\frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p}$$

o $\varepsilon(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est la racine p -ième de l'unité telle que $g(\pi_1) = \varepsilon(g) \pi_1$.

Démonstration. Il est plus pratique ici d'écrire les choses sous la forme suivante :

$$Y - \frac{X^p}{p} = \frac{X'^p - 1 - (X' - 1)^p}{p}$$

et de développer :

$$Y - \frac{X^p}{p} = a_1 X' + a_2 X'^2 + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$$

avec $a_i = \frac{(-1)^i C_p^i}{p}$. En appliquant g , on obtient :

$$gY - g\left(\frac{X^p}{p}\right) = a_1 [\varepsilon(g)] X' + a_2 [\varepsilon(g)]^2 X'^2 + \dots + a_{p-1} [\varepsilon(g)]^{p-1} X'^{p-1}$$

d'o dans \hat{A} :

$$t(g) \equiv g\left(\frac{X^p}{p}\right) - \frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

Comme on sait que $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, il suffit pour conclure de prouver que $g\left(\frac{X^p}{p}\right)$ est nul modulo X . Mais dans \hat{A}_{st} , on a $g\left(\frac{X^p}{p}\right) = \frac{([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)-1)^p}{p}$ et donc modulo X , on obtient :

$$g\left(\frac{X^p}{p}\right) \equiv \frac{([\underline{\varepsilon}(g)] - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

On conclut en remarquant que $[\underline{\varepsilon}(g)] - 1 \in \ker \hat{\theta}$. □

Lemme 2.3.8. *L'element $t(g)$ est soit nul soit gal dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la rduction modulo p d'une racine $(p-1)$ -ime de $(-p)$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.*

Dmonstration. Supposons $t(g) \neq 0$. Prouvons d'abord que $t(g)^{p-1} \equiv -p \pmod{p^2}$. D'aprs le lemme 2.3.7, cela revient montrer que :

$$(\varepsilon(g) - 1)^{p(p-1)} \equiv -p^p \pmod{p^{p+1}}.$$

Modulo $1 + X + \dots + X^{p-1}$, le polynme $(X - 1)^{p-1}$ s'crit $a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-2} X^{p-2}$ avec $a_i = (-1)^i C_{p-1}^i - 1$. On vrifie que a_i est un multiple de p et on pose $b_i = \frac{a_i}{p}$. En levant la puissance p , on obtient :

$$(X - 1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1 X + \dots + b_{p-2} X^{p-2})^p \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}}$$

d'o

$$(X - 1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2}) \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}, p^{p+1}}.$$

Il ne reste plus qu' vrifier que $b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2} = -1$ pour conclure.

Notons $\eta_1, \dots, \eta_{p-1} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ les racines $(p-1)$ -imes de $(-p)$. On a :

$$(t(g) - \eta_1) \dots (t(g) - \eta_{p-1}) = 0 \pmod{p^2}$$

ou encore $v(t(g) - \eta_1) + \dots + v(t(g) - \eta_{p-1}) \geq 2e$. Il existe donc i tel que $v(t(g) - \eta_i) \geq \frac{2e}{p-1}$. De plus pour tout i , $v(\eta_i) = \frac{e}{p-1}$ et pour $i \neq j$, $v(\eta_i - \eta_j) = \frac{e}{p-1}$ car deux racines $(p-1)$ -imes de l'unit sont encore distinctes dans le corps rsiduel. Il vient, si $j \neq i$, $v(t(g) - \eta_j) = v((t(g) - \eta_i) + (\eta_i - \eta_j)) = \frac{e}{p-1}$, puis $v(t(g) - \eta_i) \geq \left(2 - \frac{p-2}{p-1}\right) e \geq e$. Cela conclut. □

3 Gnralits sur les catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Outre de nombreuses explicitations, cette partie a pour but de dmontrer les deux rsultats suivants. D'une part les catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$ dfinies prcdemment ne dpendent pas du choix d'une uniformisante π . D'autre part, ces catgories sont abliennes et mme artiniennes.

3.1 Indépendance du choix de l'uniformisante

Considérons π et π' deux uniformisantes de K . Notons respectivement $E(u)$ et $E'(u)$ les polynômes minimaux de π et π' .

Soit $P(u)$ un polynôme à coefficients dans W tel que $P(\pi) = \pi'$ et $P(0) = 0$. On définit une application $\nu : S \rightarrow S$ en posant $\nu(s) = s \circ P$. C'est un morphisme d'anneaux, bijectif. Il n'est par contre compatible ni au Frobenius, ni l'opérateur de monodromie, et nous allons dans un premier temps voir comment ν se comporte vis-à-vis de ces opérateurs.

Plongeons S dans $T = K_0[[u]]$ et prolongeons les opérateurs ϕ et N sur T . Ils vérifient la relation $N\phi = p\phi N$. De même la bijection ν s'étend en une bijection de T . Notons finalement \mathfrak{m} l'idéal maximal de S , c'est l'idéal engendré par p , u et $\frac{u^{e_i}}{i!}$ pour $i \geq 1$.

Lemme 3.1.1. *Soit $t \in \mathfrak{m}$. L'application de T dans T définie par :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(x)$$

est l'unique morphisme d'anneaux qui envoie u sur $u \exp(-t)$.

Démonstration. Puisque $t \in \mathfrak{m}$, on n'a aucun souci de convergence dans T . En outre, comme $N(u) = -u$, il vient $N^i(u) = (-1)^i u$ et donc u est bien envoyé sur $u \exp(-t)$.

Il reste à vérifier que l'on a bien affaire à un morphisme d'anneaux. La stabilité par addition est immédiate. Soient x et y dans T , calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(xy) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{k+l=i} C_i^k N^k(x) N^l(y) \\ &= \sum_{k,l \geq 0} \frac{t^i}{k!l!} N^k(x) N^l(y) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k(x) \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} N^l(y) \right) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 3.1.2. *Il existe un (unique) élément $t \in \mathfrak{m}$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu : S \rightarrow S$ soit donnée par la formule :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi(x).$$

Démonstration. Faisons les calculs dans T après avoir vérifié que si une suite d'éléments de S admet une limite dans S , alors elle converge aussi dans T , et vers la même limite.

Regardons d'abord le cas où P s'écrit $uH(u)$ avec $H \in 1 + \mathfrak{m}$. Dans ces conditions on est capable de définir $\log H \in T$. D'autre part, notons $uS(u)$ l'image réciproque de u par ν . Notons $H^{(\phi)}$ le polynôme déduit de H en appliquant ϕ à chacun de ses coefficients : on a $\phi(H)(u) = H^{(\phi)}(u^p)$.

Dans l'anneau T , on a alors les galits suivantes :

$$\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \quad \text{et} \quad \nu^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^i}{i!} N^i(x).$$

Un calcul donne :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]^i}{p^i i!} \nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)).$$

On a d'autre part :

$$\nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

et donc en regroupant :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]^i}{p^i i!} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

ce que l'on rduit, grce la formule du binme, en :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\frac{-\log H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)}{p} - \log S(u) \right]^i N^i(\phi(x)).$$

On voit sur cette dernire criture que l'on a trouv un candidat pour t . Il se rcrit sous la forme plus sympatique suivante :

$$t = -\frac{1}{p} \log [S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)]$$

Mais par dfnition de S et de H , on a $S(u) H(uS(u)) = 1$ et donc en appliquant ϕ et en regardant modulo p , on trouve $S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p) \equiv 1 \pmod{p}$. On en dduit que $t \in S$ et vrifie les conditions du lemme.

Si P n'est pas de la forme prcdente, on peut toujours dcomposer $\nu : S \rightarrow S \rightarrow S$ o la premire flche ν_0 est de la forme prcdente et la seconde un morphisme d'anneaux envoyant u sur $[\lambda]u$, o $[\lambda]$ est le representant de Teichmller d'un $\lambda \in k$. On vrifie que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \nu & & \\ & & \curvearrowright & & \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\nu} & S \\ \nu^{-1}\phi\nu = \nu_0^{-1}\phi\nu_0 \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\nu} & S \end{array}$$

On est donc ramen au mme problme avec ν_0 , dj trait. □

Lemme 3.1.3. *Il existe un (unique) lment $n \in S$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ N \circ \nu : S \rightarrow S$ soit donne par la formule :*

$$x \mapsto nN(x)$$

Dmonstration. Rappelons que l'application ν tait donne par $x \mapsto x \circ P$, et que l'on peut dcrire N *via* la formule $N(s) = -us' \circ s'$ dsigne la drive usuelle de s (par rapport u).

On peut alors calculer :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} [N(x \circ P)] = \nu^{-1} [-uP' \cdot (x' \circ P)]$$

D'autre part, on a :

$$\nu(N(x)) = \nu(-ux') = -P \cdot (x' \circ P)$$

d'o :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) N(x)$$

et on a ainsi un candidat pour n . Or $\nu^{-1}(P(u)) = u$ par dfnition et par ν^{-1} , u s'envoie sur un multiple de u : $n = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) \in S$ et convient. \square

Construction du foncteur

Notons $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$) la catgorie obtenue en choisissant π (resp. π') comme uniformisante de K . On souhaite construire un foncteur (qui va s'avrer tre une quivalence de catgories) entre les catgories $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$. Notons que si $r = 0$, les catgories $\underline{\mathcal{M}}_\pi^0$ et $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^0$ sont identiques. On peut supposer $r > 0$ et donc $p > 2$ (puisque $er < p - 1$).

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. L'application ν dfinie predemment fait de S une S -algre et on remarque que si l'on munit les anneaux des filtrations correspondant respectivement au choix des uniformisantes π et π' , l'application ν est compatible aux filtrations.

Considrons les constantes t et n fournies par les lemmes 3.1.2 et 3.1.3 et dfinissons :

$$\begin{aligned} M' &= S_{(\nu)} \otimes M \\ \text{Fil}^r M' &= S_{(\nu)} \otimes \text{Fil}^r M \\ \phi'_r(s \otimes x) &= \phi(s) \otimes \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi_r(x) \right) \\ N'(s \otimes x) &= N(s) \otimes x + s \otimes nN(x) \end{aligned}$$

les deux dernires galits tant dfinies pour tout $s \in S$ et respectivement tout $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et tout $x \in \mathcal{M}$.

Lemme 3.1.4. *Pour tout entier $i \geq 1$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Dmonstration. On prouve la propriété par récurrence. Pour $i = 1$, elle est vraie par hypothèse. Pour l'hérédité, juxtaposons les deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}
\end{array}$$

Le grand rectangle est commutatif puisque les deux carrés le sont. Soient $x \in \mathcal{M}$ et $s \in S$. On a :

$$\begin{aligned}
(sN) \circ (s^i N^i) (\phi_r(x)) &= s [N(s^i) N^i (\phi_r(x)) + s^i N^{i+1} (\phi_r(x))] \\
&= s^i N(s) N^i(x) + s^{i+1} N^{i+1}(x).
\end{aligned}$$

En appliquant le calcul précedent deux fois et en utilisant la commutativité du diagramme, on obtient, pour tout $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
&c^i N(c) N^i(\phi_r(x)) + c^{i+1} N^{i+1}(\phi_r(x)) \\
&= \phi_r \left[E(u)^i N(E(u)) N^i(x) + E(u)^{i+1} N^{i+1}(x) \right] \\
&= \phi(N(E(u))) \phi_r(E(u)^i N^i(x)) + \phi_r(E(u)^{i+1} N^{i+1}(x)).
\end{aligned}$$

On sait que $\phi(N(E(u))) = N(c)$, ce qui permet de conclure en utilisant une dernire fois l'hypothèse de récurrence. \square

Lemme 3.1.5. *L'application ϕ'_r est bien définie et est ϕ -semi linéaire.*

Dmonstration. Dans un premier temps, si $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, d'après le lemme 3.1.4 l'élément $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$ est bien défini puisqu'il est l'image par ϕ_r de $\frac{E(u)^i}{i!} N^i(x)$. Remarquons que $\frac{E(u)^i}{i!} N^i(x)$ est toujours l'élément de $\text{Fil}^r \mathcal{M}$: si $i < r < p$, c'est vrai car $i!$ est inversible et si $i \geq r$, c'est vrai par hypothèse.

D'autre part, pour $i \gg 0$, on a :

$$\phi_r \left(\frac{E(u)^i}{i!} N^i(x) \right) = \frac{1}{c^r} \phi_r \left(\frac{E(u)^i}{i!} \right) \phi_r(E(u)^r N^i(x))$$

et le facteur $\phi_r \left(\frac{E(u)^i}{i!} \right)$ est multiple de $\frac{p^{i-r}}{i!}$. Comme on a supposé $p > 2$, la valuation p -adique de ce dernier tend vers l'infini. Cela prouve que la suite des $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$ converge vers 0 et donc que la somme de la série est bien définie.

Reste à voir que si $s \in S$ et $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, on a $\phi'_r(1 \otimes sx) = \phi'_r(\nu(s) \otimes x)$. Comme dans le lemme 3.1.1, on prouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(sx)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi(s)) \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(x)) \right).$$

Le premier facteur vaut $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(s)$ d'après le lemme 3.1.2. Cela conclut, le fait que ϕ'_r est ϕ -semi-linéaire tant vident. \square

Lemme 3.1.6. *L'application N' est bien définie et vérifie la condition de Leibniz.*

Démonstration. Comme précédemment, il s'agit de vérifier que pour $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $N'(1 \otimes sx) = N'(\nu(s) \otimes x)$. Calculons :

$$N'(1 \otimes sx) = 1 \otimes nN(sx) = 1 \otimes nN(s)x + 1 \otimes nsN(x).$$

Or d'après le lemme 3.1.3, on a $nN(s) = \nu^{-1} \circ N \circ \nu(s)$ et donc $1 \otimes nN(s)x = N \circ \nu(s) \otimes x$. D'autre part, on a $1 \otimes nsN(x) = \nu(s) \otimes nN(x)$. On en déduit que :

$$N'(1 \otimes sx) = N \circ \nu(s) \otimes x + \nu(s) \otimes nN(x)$$

comme on voulait. □

Proposition 3.1.7. *L'objet \mathcal{M}' muni de $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$, de ϕ'_r et de N' est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$.*

Démonstration. La seule vérification qui pose problème est la commutativité du diagramme reliant ϕ'_r et N' . Par un simple calcul, on prouve dans un premier temps qu'il existe une constante c' faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \\ \nu(E(u))N' \downarrow & & \downarrow c'N' \\ \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Comme $\nu(E(u))$ s'obtient à partir de $E'(u)$ simplement par la multiplication par une unité de S , un diagramme équivalent, dans lequel on a remplacé $\nu(E(u))$ par $E'(u)$ et dans lequel la constante c' a été modifiée, commute. D'autre part le calcul prouve que la constante c' obtenue ne dépend pas de \mathcal{M} .

Soient n un entier et $\mathcal{M} = S/p^n S \cdot e_1$ muni de $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M}$, $\phi_r(e_1) = e_1$ et $N(e_1) = 0$. On a $(c'N') \circ \phi'_r(u \otimes e_1) = \phi'_r \circ (E'(u)N')(u \otimes e_1)$, ce qui donne après calcul :

$$[c'pu^p - u^p \phi(E'(u))] \otimes e_1 = 0.$$

Ainsi p^n divise $c'pu^p - u^p \phi(E'(u))$ pour tout n et finalement $c' = \phi_1(E'(u))$. □

On a ainsi défini un foncteur (la définition sur les flèches est évidente) $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$.

Canonicité et compatibilité

Proposition 3.1.8. *Le foncteur défini précédemment ne dépend pas du choix de l'élément $P \in S$.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, il suffit de prouver que si $P = uH$ est tel que $P(\pi) = \pi$, alors \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont canoniquement isomorphes. Notons $\nu : S \rightarrow S$ le morphisme d'anneau tel que $\nu(u) = P(u)$. La condition implique $H(u) - 1 \in \text{Fil}^1 S$ et donc l'élément $\log(H(u))$ est bien défini dans S .

Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$, on peut dfinir l'application :

$$\begin{aligned} S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M} &\rightarrow S \\ s \otimes x &\mapsto s \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \end{aligned}$$

Comme $\log(H(u)) \in \text{Fil}^1 S$, l'ement $\frac{(-\log H(u))^i}{i!}$ est bien dfini. En outre le fait que dans T , $\exp(\log H(u)) = H(u) \in S$ prouve que la suite $\frac{(\log H(u))^i}{i!}$ converge vers 0 et finalement que l'application est bien dfinie.

Il ne reste plus qu' voir que c'est un isomorphisme S -linaire et compatible toutes les structures; c'est donc une flche dans $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$. \square

Corollaire 3.1.9. *Le foncteur dfini prcdemment est une quivalence de catgorie.*

Si, comme prcdemment, π et π' sont deux uniformisantes de K , on peut dfinir $\hat{A}_{\text{st}\pi}$ et $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$. Pour cela, rappelons que l'on avait besoin de choisir $(\pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$ (resp. $(\pi'_1, \dots, \pi'_n, \dots)$) un systme compatible de racines p^n -imes de π (resp. de π'). On dfinit ω_n en imposant $\pi_n = \omega_n \pi'_n$, obtenant ainsi $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n, \dots) \in R$ puis $[\underline{\omega}] \in A_{\text{cris}}$ (notez que A_{cris} ne dpend pas du choix d'une uniformisante).

L'unique morphisme de A_{cris} -algbre $\hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ envoyant $(1+X)$ sur $[\underline{\omega}](1+X)$ est un isomorphisme compatible ϕ_r , N et l'action du groupe de Galois G_K .

Proposition 3.1.10. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{M}}_\pi^r & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r \\ & \searrow T_{\text{st}\pi} & \swarrow T_{\text{st}\pi'} \\ & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) & \end{array}$$

o la flche horizontale est le foncteur dfini prcdemment.

Dmonstration. L'anneau S s'identifie la fois aux points fixes sous l'action de Galois de $\hat{A}_{\text{st}\pi}$ et de $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$. Notons $\rho : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi}$ et $\rho' : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ les inclusions correspondantes. Il existe un unique morphisme de A_{cris} -algbre, $\nu : \hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\nu} & S \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \hat{A}_{\text{st}\pi} & \xrightarrow{\nu} & \hat{A}_{\text{st}\pi'} \end{array}$$

En effet, le diagramme impose la valeur de $\nu\left(\frac{X^i}{i!}\right)$ et on vrifie que l'application ainsi dfinie convient. En outre, elle est G_K -quivariante et induit une flche $\nu : \hat{A}_{\text{st},\infty\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'}$ encore G_K -quivariante.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ et \mathcal{M}' l'objet de $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$, qui lui est associ par le foncteur prcdent. On rappelle qu'en tant que module, on a $\mathcal{M}' = S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M}$. Soit $f \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On lui associe l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &\rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'} \\ s \otimes x &\mapsto \rho'(s) \cdot \nu \circ f(x) \end{aligned}$$

On vrifie qu'elle est S -linaire et compatible aux structures dfinissant ainsi un lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$.

On dfnit ainsi une application $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$. Elle est \mathbb{Z}_p -linaire et bijective puisque l'on peut construire l'application rciproque de faon analogue. On vrifie qu'elle est compatible l'action de Galois et donc qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes. \square

3.2 Description des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

On considre dans ce paragraphe un objet \mathcal{M} de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Il s'agit d'un $k[u]/u^{ep}$ -module libre de rang fini d muni d'une filtration, d'une application ϕ_r et d'une application N , le tout vrifiant les propriets donnees prcdemment.

Bases adaptes

On a dans un premier temps un rsultat bien utile (et classique) qui est le suivant :

Proposition 3.2.1. *Il existe une base (e_1, \dots, e_d) de \mathcal{M} et des entiers n_1, \dots, n_d tels que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^d u^{n_i} k[u]/u^{ep} \cdot e_i.$$

Une telle base est par dfnition une base adapte de \mathcal{M} .

Dmonstration. Comme \mathcal{M} est suppos libre, il existe un $k[u]$ -module libre \mathcal{M}' tel que $\mathcal{M}'/u^{ep}\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Autrement dit, il existe une flche $f : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ dont le noyau est exactement $u^{ep}\mathcal{M}'$. Dfnissons $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = f^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M})$. C'est un sous- $k[u]$ -module de \mathcal{M}' .

Puisque $k[u]$ est un anneau principal, d'aprs le thorme de structure, il existe une suite de polynmes P_1, \dots, P_d tels que P_i divise P_{i+1} pour tout i et une base $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d)$ de \mathcal{M}' telle que $(P_1\hat{e}_1, \dots, P_d\hat{e}_d)$ soit une base de $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$. D'autre part, $u^{er}\mathcal{M}' \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}'$ et donc tous les polynmes P_i sont des diviseurs de u^{er} ; ils sont donc de la forme $P_i = u^{n_i}$ pour certains entiers n_i .

En posant $e_i = f(\hat{e}_i)$, on a bien le rsultat annonc. \square

Remarque. Les entiers n_i ne dpendent pas permutation prs de la base considre. En effet, la dimension en tant que k -espace vectoriel du quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M} / (u^k \mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M})$ est donne par la somme des $k - n_i$, somme tendue tous les i pour lesquels $n_i \leq k$. On voit facilement que la connaissance de toutes ces sommes permet de dterminer les n_i permutation prs.

Fixons prsent (e_1, \dots, e_d) une base adapte de \mathcal{M} . Nous allons essayer de dcire un peu mieux la fonction ϕ_r et pour cela nous introduisons la dfnition suivante.

Dfnition 3.2.2. *Soit $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$, et soit n le plus petit entier tel que $u^n x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On pose $\varphi_r(x) = \phi_r(u^n x)$.*

Soit $x_i = \varphi_r(e_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. On rappelle que la famille des e_i est la base adapte que l'on s'est fixe prcdemment.

Proposition 3.2.3. *Avec les notations précédentes, (x_1, \dots, x_d) est une base de \mathcal{M} .*

D'autre part, si $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$, alors $\varphi_r(x) \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$.

Démonstration. Pour le premier nonc, il suffit de voir que si $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, alors $\phi_r(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$) des x_i . Comme $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} comme $k[u]/u^{ep}$ -module, il en est de même de la famille (x_1, \dots, x_d) . Comme elle est de bon cardinal, elle en est une base.

Soit $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$. On voit en décomposant x sur la base des e_i , que $\varphi_r(x)$ s'écrit forcément sous la forme :

$$\varphi_r(x) = Q_1(u^p)x_1 + \dots + Q_d(u^p)x_d$$

o au moins l'un des polynômes Q_i est de valuation nulle. Dans ce cas, on a directement $\varphi_r(x) \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$. \square

Remarque. La deuxième partie de la proposition précédente permet de définir correctement les itérés de φ_r .

L'opérateur de monodromie

Nous allons maintenant étudier l'opérateur de monodromie. Pour cela, nous notons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$. Par ce qui précède, \mathcal{M}_0 s'identifie au $k[u^p]/u^{ep}$ -module engendré par les x_i . Nous avons alors :

Proposition 3.2.4. *Pour tout i , l'opérateur $c_\pi^i N^i$ induit une application $k[u^p]/u^{ep}$ -linéaire de \mathcal{M}_0 sur lui-même. Cette application est nulle si $i \geq p$.*

Démonstration. Le lemme 3.1.4 assure que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^{ei} N^i \downarrow & & \downarrow c_\pi^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

commute. Ainsi si x est dans l'image de ϕ_r , alors il en est de même de $c_\pi^i N^i(x)$, et donc que $c_\pi^i N^i$ induit une application de \mathcal{M}_0 dans lui-même. D'autre part, $N(u^p x) = N(u^p)x + u^p N(x) = -pu^p x + u^p N(x) = u^p N(x)$, ce qui prouve bien la linéarité annoncée.

Pour $i \geq p$, l'application $u^{ei} N^i$ est nulle et donc il en est de même de $c_\pi^i N^i$. \square

Corollaire 3.2.5. *Il existe un élément $x \in \mathcal{M}_0$ non divisible par u tel que $N(x) = 0$.*

Démonstration. Du fait que $c_\pi^p N^p = 0$, il existe $x' \in \mathcal{M}_0$, $x' \neq 0$, tel que $N(x') = 0$. Écrivons $x' = u^{pk} x''$ où x'' est un élément de \mathcal{M}_0 non divisible par u et où $k < e$. On a alors $N(u^{pk} x'') = u^{pk} N(x'') = 0$ et donc $N(x'')$ est un multiple de u^p . Notons n le plus petit entier tel que $u^n x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ de telle sorte que l'on ait $\varphi_r(x'') = \phi_r(u^n x'') = x$. On a :

$$\phi_r(u^e N(u^n x'')) = c_\pi N(\phi_r(u^n x'')) = c_\pi N(x).$$

Mais $N(u^n x'') = -nu^n x'' + u^n N(x'')$. Le premier terme de cette somme est dans $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ puisque $u^n x''$ y est. Le second y est également puisque $N(x'')$ est un multiple de u^p . On en déduit que $N(u^n x'') \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc que $\phi_r(u^e N(u^n x'')) = 0$. Ainsi $N(x) = 0$. D'autre part, on a $x = \varphi_r(x'')$ et donc d'après la proposition 3.2.3, x n'est pas divisible par u . Ceci conclut la preuve du corollaire. \square

Description matricielle

Le but de ce paragraphe est d'écrire sous forme matricielle les applications ϕ_r et N , explicitations que nous utiliserons dans la suite. On fixe \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et (e_1, \dots, e_d) une base adaptée de \mathcal{M} , les entiers correspondants tant n_1, \dots, n_d .

On note Δ la matrice diagonale suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} u^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & u^{n_d} \end{pmatrix}$$

Définition 3.2.6. La matrice de ϕ_r dans la base adaptée (e_1, \dots, e_d) est la matrice G définie par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1}e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d}e_d) \end{pmatrix} = \phi_r \left(\Delta \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix} \right) = {}^tG \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

Remarque. Cette définition n'a un sens que si la base (e_1, \dots, e_d) est adaptée. De plus, la présence de la transpose sert à rester fidèle à la définition classique de la matrice d'une application linéaire.

En gardant les notations du paragraphe précédent, on voit que G est simplement la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_d) à la base (x_1, \dots, x_d) . En tant que telle, il s'agit d'une matrice inversible.

Définition 3.2.7. Soit (a_1, \dots, a_d) une base de \mathcal{M} . La matrice de N dans la base (a_1, \dots, a_d) est la matrice H définie par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} N(a_1) \\ \vdots \\ N(a_d) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = {}^tH \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

On a une formule de changement de base :

Proposition 3.2.8. Soient $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_d)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ deux bases de \mathcal{M} , et soit P la matrice de passage de \mathcal{A} à \mathcal{B} . On note $H_{\mathcal{A}}$ (resp. $H_{\mathcal{B}}$) la matrice de N dans la base \mathcal{A} (resp. dans la base \mathcal{B}). On a alors la relation :

$$H_{\mathcal{B}} = P^{-1}H_{\mathcal{A}}P + P^{-1}N(P)$$

Dmonstration. Il s'agit d'un simple calcul. On crit :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N(b_1) \\ \vdots \\ N(b_d) \end{pmatrix} &= N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = N \left({}^tP \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right) \\
&= N({}^tP) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + {}^tP \cdot N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \\
&= N({}^tP) {}^tP^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + {}^tPH_{\mathcal{A}} {}^tP^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui donne ${}^tH_{\mathcal{B}} = N({}^tP) {}^tP^{-1} + {}^tPH_{\mathcal{A}} {}^tP^{-1}$ puis le rsultat annonc en prenant la transpose. \square

Remarque. Un simple calcul prouve que si A et B sont des matrices coefficients dans $k[u]/u^{ep}$, alors $N(AB) = N(A)B + AN(B)$. Ceci a pour consquence l'galit $P^{-1}N(P) = -N(P^{-1})P$ et prouve la cohrence de la formule lorsque l'on passe d'une base \mathcal{A} une base \mathcal{B} puis que l'on revient \mathcal{A} .

Proposition 3.2.9. *Si les n_i sont rangs par ordre croissant, la matrice de $c_{\pi}N$ dans la base (x_1, \dots, x_d) (o on rappelle que $x_i = \phi_r(u^{n_i}e_i)$) est coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$ et triangulaire infrieure avec des 0 sur la diagonale.*

Dmonstration. La preuve rsulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
u^e N \downarrow & & \downarrow c_{\pi} N \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}
\end{array}$$

En effet, fixons un entier i et partons de l'lement $u^{n_i}e_i$. Par ϕ_r , il s'envoie sur x_i par d'finition. Puis par $c_{\pi}N$, il s'envoie sur $c_{\pi}N(x_i)$. Par l'autre chemin, on a d'abord :

$$u^e N(u^{n_i}e_i) = -n_i u^{e+n_i}e_i + u^{e+n_i}N(e_i)$$

Comme $u^{n_i}e_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, le premier terme de la somme prcdente s'envoie sur 0 par ϕ_r et $u^{e+n_i}N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Pour le second terme, dcomposons $N(e_i) = \sum_{j=1}^d a_j e_j$ o $a_j \in k[u]/u^{ep}$ est tel que $u^{e+n_i}N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ (i.e. $u^{e+n_i}a_j \in u^{n_j}k[u]/u^{ep}$). On a alors :

$$\phi_r(u^e N(u^{n_i}e_i)) = \sum_{j=1}^d \phi(u^{e+n_i-n_j}a_j) x_j$$

et les $\phi(u^{e+n_i-n_j}a_j)$ sont les coefficients de la j -ime colonne de la matrice de $c_{\pi}N$. Ils sont donc dj tous bien dans $k[u^p]/u^{ep}$.

De plus, si $j \leq i$, on a par hypothse $n_j \leq n_i$ et donc $e+n_i-n_j \geq e$. Ainsi $\phi(u^{e+n_i-n_j}a_j) = 0$ et on a bien dmontr le rsultat annonc. \square

Remarque. Cette dernire proposition redmontre en particulier, en donnant un rsultat plus prcis, la proposition 3.2.4 et le corollaire qui s'ensuit.

3.3 La catégorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$

Dans cette partie, nous introduisons des sous-catégories pleines $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ qui correspondent aux catégories de Fontaine-Laffaille (voir [13]) tuées par p pour $e = 1$.

Commençons par donner une proposition qui caractérise les objets de cette sous-catégorie. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$. Notons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$ et plus généralement $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$ pour un entier i compris entre 0 et $p-1$. Les \mathcal{M}_i sont des $k[u^p]/u^{ep}$ -modules libres et :

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}_i.$$

Proposition 3.3.1. *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$;
- ii) il existe une base adaptée de \mathcal{M} formée d'éléments de \mathcal{M}_0 ;
- iii) On peut munir \mathcal{M} d'un opérateur de monodromie nul sur \mathcal{M}_0 et faisant de \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Démonstration. La propriété ii) implique de façon presque immédiate les deux autres. Nous allons montrer que iii) implique i) puis que i) implique ii).

Supposons iii). Prouvons dans un premier temps que cela implique que $N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Soit $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. D'après le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_{\pi} N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

on a $\phi_r(u^e N(x)) = 0$. La proposition 3.2.3 implique facilement que $\ker \phi_r = u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc il existe $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ tel que $u^e N(x) = u^e y$. La différence $N(x) - y$ est tuée par u^e . Elle s'écrit $u^{e(p-1)}z$ pour un certain $z \in \mathcal{M}$. Comme $e(p-1) \geq er$, $u^{e(p-1)}z \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ d'où $N(x) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Ceci prouve la propriété annoncée.

Soit $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On cherche à construire des $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$ tels que $y = y_0 + \dots + y_{p-1}$. On peut dire une égalité de ce type avec $y_i \in \mathcal{M}_i$. Appliquons l'opérateur N à cette égalité en remarquant que puisque N est nul sur \mathcal{M}_0 , on a $N(y_i) = -iy_i$. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} y &= x_0 + y_1 + \dots + y_{p-1} \\ N(y) &= -y_1 + \dots - (p-1)y_{p-1} \\ N^2(y) &= y_1 + \dots + (p-1)^2 y_{p-1} \\ &\vdots \\ N^{p-1}(y) &= y_1 + \dots + (p-1)^{p-1} y_{p-1}. \end{aligned}$$

Les coefficients qui apparaissent forment une matrice de Vandermonde inversible. Ainsi on peut exprimer les y_i comme combinaisons linéaires des coefficients dans \mathbb{F}_p des $N^j(y)$. Par ce qui précède, cela entraîne $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc bien la propriété voulue.

Supposons i). Fixons (e_1, \dots, e_d) une base de \mathcal{M}_0 comme $k[u^p]/u^{ep}$ -module, et notons \mathcal{M}'_0 le sous- k -espace vectoriel de \mathcal{M}_0 engendr par les e_i . Notons galement $\mathcal{M}'_i = u^i \mathcal{M}'_0$. Pour tout entier i , on a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}'_0 \rightarrow \mathcal{M}'_i$ qui est la multiplication par u^i . Notons $F'_i = f_i^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'_i)$. On obtient une filtration croissante par des sous- k -espaces vectoriels. Il suffit alors pour rpondre la question de considrer une base (x_1, \dots, x_d) de \mathcal{M}'_0 compatible cette filtration. \square

Dfinition 3.3.2. On note $\widetilde{\underline{\text{MF}}}_0^r$ la sous-catgorie pleine de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ forme des objets satisfaisant les proprits de la proposition prcdente. On note $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ la sous-catgorie pleine de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ forme des objets dont l'image dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ par le foncteur d'oubli satisfait les proprits de la proposition prcdente.

Les lettres MF font rfrence « modules filtrs » car l'on peut donner une nouvelle interprétation de ces objets *via* des modules filtrs. Avant cela, faisons quelques remarques gnrales :

Proposition 3.3.3. La catgorie $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ est une sous-catgorie ablienne de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ stable par sous-objets et par quotients. De plus, elle est gale $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ si et seulement si $e = r = 1$.

Dmonstration. Nous ne savons pas encore ce stade que $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ est une catgorie ablienne. Nous allons l'admettre momentanément pour prouver la premire partie de la proposition. Il suffit de prouver la stabilit par sommes directes, sous-objets et quotients, un noyau tant un sous-objet et un conoyau un quotient. Tout cela est immdiat avec la caractrisation iii).

Traitons le cas $e = r = 1$. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ et soit $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On peut crire $x = x_0 + \dots + x_{p-1}$ avec $x_i \in \mathcal{M}_i$. Par hypothse $u\mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$, et donc $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ pour $i \geq 1$, puis $x_0 \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On a ainsi vrifi la propriit i). Rciproquement, considrons $\mathcal{M} = k[u]/u^{ep}e_1 \oplus k[u]/u^{ep}e_2$, $\text{Fil}^r \mathcal{M} = (e_1, u^2e_2)$, $\phi_r(e_1) = e_2$, $\phi_r(u^2e_2) = e_1 + ue_2$. D'aprs la proposition 3.2.9, un oprateur de monodromie sur \mathcal{M} doit vrifier $N(e_1 + ue_2) = 0$ et $N(e_2) = a(e_1 + ue_2)$ pour un certain $a \in k[u^p]/u^{ep}$. On doit avoir $cN \circ \phi_r(e_1) = \phi_r(u^e N(e_1))$, ce qui donne aprs calcul $a = -u^{p(e-1)}$. Il existe donc un unique N valable, et il n'est pas nul sur $\text{im } \phi_r$. Cela conclut. \square

Proposition 3.3.4. Tout objet non nul de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ (resp. de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$) admet un sous-objet non nul dans $\widetilde{\underline{\text{MF}}}_0^r$ (resp. dans $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ pour lequel N est nul sur $\text{im } \phi_r$).

Dmonstration. La preuve de cette propriit est donne dans le paragraphe 4.1 lors de l'tude des objets simples. \square

Les objets de $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ comme modules filtrs

Il est possible de dcire la catgorie $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ avec des objets plus proches des objets de Fontaine-Laffaille du cas $e = 1$. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$. Posons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$ et $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$, pour $0 \leq i \leq p-1$. On a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_i$ qui est la multiplication par u^i . Dfinitions $F_{i/e} = f_{er-i}^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i)$. On obtient une suite dcroissante de sous- $k[u^p]/u^{ep}$ -modules de \mathcal{M}_0 contenant $u^p \mathcal{M}_0$ telle que $F_0 = \mathcal{M}_0$ par hypothse.

L'application ϕ_r induit des applications $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}_0$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} F_{i+\frac{1}{e}} & \longrightarrow & F_i \\ \phi_{i+\frac{1}{e}} \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ \mathcal{M}_0 & \xrightarrow{u^p} & \mathcal{M}_0 \end{array}$$

La monodromie, quant elle, d'finit une application $c_\pi N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ qui vrifie $\phi(c_\pi) [(c_\pi N) \circ \phi_i] = \phi_{i-1} \circ (c_\pi N)$.

Si on remarque pour finir que $k[u^p]/u^{ep}$ est isomorphe en tant qu'anneau \mathcal{O}_K/p (en envoyant u^p sur π), on obtient la proposition suivante qui nonce prcisment le pont entre les catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et celles de Fontaine-Laffaille, du moins dans le cas modulo p :

Proposition 3.3.5. *La catgorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}F}^r$ est quivalente la catgorie dont les objets sont les donnees suivantes :*

1. un \mathcal{O}_K/p -module libre de rang fini \mathcal{M} ;
2. une filtration dcroissante (F_i) de sous-modules de \mathcal{M}_0 contenant $\pi\mathcal{M}$ indexe par les rationnels de denominateur e compris entre 0 et r telle que $F_0 = \mathcal{M}$;
3. des applications ϕ -semi-linaires $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}$ vrifiant $\phi_i|_{F_{i+\frac{1}{e}}} = \pi\phi_{i+\frac{1}{e}}$;
4. d'une application lineaire $c_\pi N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $\phi(c_\pi) [(c_\pi N) \circ \phi_i] = \phi_{i-1} \circ (c_\pi N)$ pour tout i

et o les flches sont les morphismes \mathcal{O}_K/p -linaires compatibles toutes les structures.

Remarque. Dans le cas non ramifi (*i.e.* $e = 1$ et $c_\pi = 1$), on retrouve exactement la description des catgories de Fontaine-Laffaille modulo p (voir [13]). On peut tendre cette remarque toute une sous-catgorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme expliqu dans le paragraphe 2.4.1 de [3].

On peut rsumer tout ce qui prcde par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{\mathcal{M}}F}_0^r & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r \\ \updownarrow & & \uparrow \\ \underline{\mathcal{M}}F^r & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathcal{M}}^r \end{array}$$

Les flches qui montent correspondent aux foncteurs d'oubli vidents. La flche courbe est un foncteur « N canonique » qui munit un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}F}_0^r$ du N (ncessairement unique) donn par le iii) de la proposition 3.3.1. On pourrait se demander s'il est possible de prolonger ce foncteur tout $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$. La rponse est oui dans le cas $r = 1$ (voir le lemme 5.1.2. de [1]), et non dans le cas gnral puisqu'il n'est dj pas vrai que le foncteur d'oubli $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r \rightarrow \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ est toujours essentiellement surjectif (reprendre l'exemple donn dans la dmonstration de la proposition 3.3.3)

3.4 Un mot sur le cas $r = 1$

Ce cas est amplement discuté dans [8]. Plus exactement, Breuil construit un foncteur contravariant entre la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_0^1$ et la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur \mathcal{O}_K tus par p . Il prouve ensuite, en exhibant un quasi-inverse, que ce foncteur est une anti-équivalence de catégories.

Il tend par la suite ce foncteur toute la catégorie \mathcal{M}_0^1 et atteint tous les schémas en groupes sur \mathcal{O}_K tus par une puissance de p . De cette façon, Breuil retrouve la classification des schémas en groupes sur \mathcal{O}_K débute par Raynaud ([19]) et poursuivie par Fontaine ([14]) et Conrad ([10]), et tend même cette classification sans restriction sur la ramification.

3.5 Des catégories abéliennes et artiniennes

Nous montrons dans ce paragraphe que les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et \mathcal{M}^r sont abéliennes. Nous rappelons dans un premier temps que ce résultat est prouvé dans [3] lorsque $e = 1$.

La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Notons $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ la catégorie \mathcal{M}^r obtenue en considérant des $k[u]/u^p$ -modules libres à la place de $k[u]/u^{ep}$ -modules libres. Un raisonnement rigoureusement identique⁴ celui établi pour prouver le corollaire 2.2.3.2 de [3] donne :

Théorème 3.5.1. *La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$, alors :*

- i) $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$;
- ii) Soit \mathcal{K} le noyau de l'application $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Avec ces structures, \mathcal{K} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$;
- iii) Soit \mathcal{C} le conoyau de l'application $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$ dans \mathcal{C} , $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Avec ces structures, \mathcal{C} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$.

Nous allons présent montrer les propriétés analogues pour la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Notons $\bar{\mathcal{X}}$ (resp. $\bar{\mathcal{Y}}$) la réduction de \mathcal{X} (resp. de \mathcal{Y}) modulo u^p , et $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ (resp. $p_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$) la projection correspondante. On munit $\bar{\mathcal{X}}$ et $\bar{\mathcal{Y}}$ de Fil^r , Frobenius et opérateurs de monodromie en regardant les structures quotients. On obtient des objets de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et la flèche f induit un morphisme $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$ dans cette catégorie. Finalement, puisque $er < p - 1$, on a :

$$\text{Fil}^r \mathcal{X} = p_{\bar{\mathcal{X}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}^r \mathcal{Y} = p_{\bar{\mathcal{Y}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}})$$

⁴Seule la relation de commutation des opérations N et ϕ_r diffère entre la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et celle introduite dans [3], mais l'opérateur N n'intervient pas dans la preuve dont il est question.

Lemme 3.5.2. *L'image (au sens classique) de f est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre.*

Dmonstration. Comme f commute ϕ_r , elle induit une application $f : \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \rightarrow \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{Y})$ qui est $k[u^p]/u^{ep}$ -linéaire. En recopiant l'argument de la preuve de la proposition 3.2.1, on prouve qu'il existe des éléments $e_1, \dots, e_d, e'_1, \dots, e'_{d'}$ et des entiers $n_1, \dots, n_d, n'_1, \dots, n'_{d'}$ tels que $n'_i > 0$ et :

$$\begin{aligned} \text{im } f &= k[u]/u^{ep}e_1 \oplus \dots \oplus k[u]/u^{ep}e_d \oplus u^{pn_1}k[u]/u^{ep}e'_1 \oplus \dots \oplus u^{pn'_{d'}}k[u]/u^{ep}e'_{d'} \\ \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap \text{im } f &= u^{n_1}k[u]/u^{ep}e_1 \oplus \dots \oplus u^{n_d}k[u]/u^{ep}e_d \oplus u^{pn'_1}k[u]/u^{ep}e'_1 \oplus \dots \oplus u^{pn'_{d'}}k[u]/u^{ep}e'_{d'} \end{aligned}$$

De plus, comme $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ doit engendrer \mathcal{X} et que $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{Y}$, on en déduit que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap \text{im } f)$ doit au moins engendrer $\text{im } f$. Mais, puisque $er < p - 1$, on a forcément $\phi_r(u^p \mathcal{Y}) \subset u^{2p} \mathcal{Y}$ et par un argument de dimension, le seul moyen de tout concilier est d'avoir $d' = 0$, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 3.5.3. *Le noyau et le conoyau de f sont des $k[u]/u^{ep}$ -modules libres.*

Dmonstration. En tant que $k[u]/u^{ep}$ -module, l'image de f s'identifie au quotient $\mathcal{X}/\ker f$ et le conoyau au quotient $\mathcal{Y}/\text{im } f$. Le lemme résulte du fait que si $N \subset M$ est des $k[u]/u^{ep}$ -modules de type fini et si deux modules parmi M , N et M/N sont libres sur $k[u]/u^{ep}$, alors il en est de même du troisième. \square

Notons \mathcal{K} le noyau de f , \mathcal{C} le conoyau de f , $\bar{\mathcal{K}}$ le noyau de \bar{f} et $\bar{\mathcal{C}}$ le conoyau de \bar{f} et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & p_{\mathcal{K}} \downarrow & & p_{\mathcal{X}} \downarrow & & p_{\mathcal{Y}} \downarrow & & p_{\mathcal{C}} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{\mathcal{Y}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lemme 3.5.4. *La flèche $p_{\mathcal{K}}$ (resp. $p_{\mathcal{C}}$) définie par le diagramme précédent est surjective et de noyau $u^p \mathcal{K}$ (resp. $u^p \mathcal{C}$). Autrement dit $\bar{\mathcal{K}}$ s'identifie $\mathcal{K}/u^p \mathcal{K}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}/u^p \mathcal{C}$.*

Dmonstration. Commençons par le noyau et la surjectivité. Soit $\bar{x} \in \bar{\mathcal{K}}$. Il se relève en $x \in \mathcal{X}$ tel que $f(x) = 0 \pmod{u^p}$. Il existe donc $y \in \mathcal{Y}$ tel que $f(x) = u^p y$. On a $u^p y \in \text{im } f$ et, puisque $\text{im } f$ est libre sur $k[u]/u^{ep}$, il existe $y' \in \text{im } f$ tel que $u^p y = u^p y'$ et donc $u^p y = f(u^p x')$ pour un certain $x' \in \mathcal{X}$. Mais alors $x - u^p x' \in \mathcal{K}$ s'envoie sur \bar{x} par $p_{\mathcal{K}}$. Ceci prouve la surjectivité.

Soit maintenant $x \in \mathcal{K}$ tel que $p_{\mathcal{K}}(x) = 0$. On a $p_{\mathcal{X}}(x) = 0$ et donc x est un multiple de u^p dans \mathcal{X} . Il l'est aussi dans \mathcal{K} puisque \mathcal{K} est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre. Finalement $\ker p_{\mathcal{K}} = u^p \mathcal{K}$.

On utilise des arguments analogues pour le conoyau. \square

On définit $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^r \mathcal{X}$, un Frobenius $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ et un opérateur de monodromie $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ induits des opérateurs sur \mathcal{X} . De même, on définit $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ comme l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$ par la projection $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{C}$, un Frobenius et un opérateur de monodromie sur \mathcal{C} , les opérateurs sur \mathcal{Y} passant au quotient.

Lemme 3.5.5. *Munis des structures précédentes, les objets \mathcal{K} et \mathcal{C} sont des objets de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et respectivement un noyau et un conoyau de l'application f .*

Démonstration. Les conditions de compatibilité et le fait que si les objets sont dans la catégorie, ils sont noyau ou conoyau est évident. Le seul point délicat est la « surjectivité » des ϕ_r .

Modulo u^p , les objets \mathcal{K} et \mathcal{C} avec toutes leurs structures se réduisent d'après le lemme 3.5.4 sur $\bar{\mathcal{K}}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ et on sait alors que les ϕ_r définis sur ces objets sont « surjectifs ». Notons (e_1, \dots, e_d) une base adaptée de \mathcal{K} (qui existe bien) et G la matrice de ϕ_r dans cette base. Cette matrice est inversible modulo u^p et donc son déterminant est inversible modulo u^p puis modulo u^{ep} . La matrice G est donc inversible et $\text{im } \phi_r$ engendre bien tout \mathcal{K} . On raisonne de même pour \mathcal{C} . \square

Corollaire 3.5.6. *La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, alors :*

i) $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$;

ii) Soit \mathcal{K} le noyau de l'application $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Avec ces structures, \mathcal{K} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$;

iii) Soit \mathcal{C} le conoyau de l'application $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$ dans \mathcal{C} , $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Avec ces structures, \mathcal{C} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Démonstration. On a déjà prouvé ii) et iii). Il ne reste en fait plus qu'à démontrer i) car il implique l'isomorphisme entre image et coimage. On a évidemment toujours l'inclusion $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$.

Soit $y \in \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$. La réduction \bar{y} de y modulo u^p est un élément de $\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}} \cap \bar{f}(\bar{\mathcal{X}})$ (en gardant les notations précédentes) et d'après le lemme 3.5.1, $\bar{y} \in \bar{f}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}})$. Il existe $\bar{x} \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$ tel que $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$. Notons x un relevé de \bar{x} dans $\text{Fil}^r \mathcal{X}$. Il existe un élément $t \in \mathcal{Y}$ tel que $y = f(x) + u^p t$. Les éléments y et $f(x)$ sont dans $\text{im } f$, il en est donc de même de $u^p t$ et puisque $\text{im } f$ est libre sur $k[u]/u^{ep}$, il existe $y'' \in \text{im } f$ tel que $u^p t = u^p y''$. On écrit $y'' = f(x'')$ pour un certain $x'' \in \mathcal{X}$, et il vient $y = f(x + u^p x'')$. Comme $u^{er} \mathcal{X} \subset \text{Fil}^r \mathcal{X}$ et $er < p - 1$, on a $u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$ et donc $x + u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$. Finalement $y \in f(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ et on peut conclure. \square

La catégorie \mathcal{M}^r

Si $r = 0$, on vérifie facilement (la propriété i) du corollaire précédent est alors évidente) que la sous-catégorie pleine de \mathcal{M}^r formée des objets tus par p est abélienne et artinienne. On procède ensuite par divissage. La preuve est en tout point analogue à celle déjà connue dans le cas $e = 1$ et présente dans le paragraphe 2.3 de [3]. Les lemmes et les propositions successives gardent un sens dans ce contexte plus général, et sont également vrais, les preuves tant encore textuellement les mêmes. Nous n'insisterons donc pas davantage et laissons le lecteur se reporter à cette référence.

Remarque. De mme, on prouve que les catgories $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ sont abliennes et artiniennes.

4 Classification des objets simples

Nous allons donner une classification complte des objets simples de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ lorsque le corps rsiduel k est algbriquement clos. Nous essaierons galement d'expliquer ce qui se passe lorsque ce n'est pas le cas. Pour l'instant, on ne fait aucune hypothse supplmentaire sur k .

On considre \mathcal{M} un objet simple (donc non nul) de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il est obligatoirement tu par p . En effet, si ce n'tait pas le cas, le noyau de la multiplication par p dans \mathcal{M} fournirait un sous-objet strict de \mathcal{M} (noter que la multiplication par p ne peut pas tre injective car elle est nilpotente : \mathcal{M} est suppos tre tu par une puissance de p). L'objet simple \mathcal{M} peut tre vu dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ (du moins si $r > 0$, mais dans le cas contraire, le rsultat est immdiat et laiss au lecteur) : c'est un $k[u]/u^{ep}$ -module muni d'un Fil^r , d'un ϕ_r et d'un opérateur de monodromie vrifiant les bonnes proprits.

4.1 La monodromie

Si l'on note $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$, l'application de monodromie N induit une application linéaire $c_\pi N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ (voir proposition 3.2.4) et il existe $x_1 \in \mathcal{M}_0 \setminus u\mathcal{M}_0$ tel que $N(x_1) = 0$ (voir corollaire 3.2.5). Notons $x_2 = \varphi_r(x_1)$ (voir dfinition 3.2.2) puis par rcurrence $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$, ce qui est possible d'aprs la deuxime partie de la proposition 3.2.3. On a $N(x_i) = 0$ pour tout entier i .

Notons \bar{x}_i la rduction modulo u^p de x_i . Les \bar{x}_i sont des lments non nuls de $\mathcal{M}_0/u^p\mathcal{M}_0$ qui est un k -espace vectoriel de dimension finie. Notons $n \geq 1$ le plus petit indice tel que \bar{x}_{n+1} puisse s'crire comme combinaison linéaire des \bar{x}_i pour i variant de 1 à n . Il existe donc $\lambda_i \in k$ tels que :

$$\bar{x}_{n+1} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$$

et on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$ quitte remplacer x_1 par le plus petit indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. Comme $\bar{x}_{n+1} \neq 0$, les λ_i ne peuvent tre tous simultanément nuls.

Nous allons prsent corriger les x_i pour que cette relation ne soit plus vraie seulement modulo u^p . On procde par approximations successives et on construit une suite indexe par j d'lments $x_i^{(j)}$ qui sont tels que $x_i^{(j)} \equiv x_i \pmod{u^p}$, $x_{i+1}^{(j)} = \varphi_r(x_i^{(j)})$, $N(x_{i+1}^{(j)}) = 0$ et finalement :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$$

les λ_i restant inchangs. On a une solution pour $j = 1$. Supposons qu'on l'ait pour j et construisons-en une pour $j + 1$. On cherche un lment $r \in \mathcal{M}_0$ tel que l'on puisse poser $x_1^{(j+1)} = x_1^{(j)} + u^{jp}r$. On dfinirait alors les $x_i^{(j+1)}$ via la formule de rcurrence $x_{i+1}^{(j+1)} = \varphi_r(x_i^{(j+1)})$ et il est facile de vrifier que pour tout $i \geq 2$, on aurait $x_i^{(j+1)} \equiv x_i^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$. Au final, il suffit de trouver r tel que :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 \left(x_1^{(j)} + u^{jp}r \right) + \lambda_2 x_2^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$$

mais comme par hypothèse, on a $x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$, on a bien l'existence d'un tel r : il suffit de le prendre tel que $u^{jp} \lambda_1 r = x_{n+1}^{(j)} - \lambda_1 x_1^{(j)} - \dots - \lambda_n x_n^{(j)}$. De plus, en appliquant N cette dernière égalité, on voit que $N(u^{jp} \lambda_1 r) = \lambda_1 u^{jp} N(r) = 0$ et donc que $N(x_1^{(j+1)}) = 0$ puisque λ_1 est supposé non nul. Ceci implique la nullité de tous les $N(x_i^{(j+1)})$.

Pour $j = e$, l'égalité a lieu modulo u^{ep} et donc dans \mathcal{M} . Soit \mathcal{K} le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendré par les $x_i^{(e)}$, pour $1 \leq i \leq n$. La liberté sur k des \bar{x}_i assure que \mathcal{K} est un module libre de rang n . Notons $\mathcal{M}_i = u^i \text{im } \phi_r$ et $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}_i \cap \mathcal{K}$. Par construction, N stabilise \mathcal{K} et ϕ_r envoie $\text{Fil}^r \mathcal{K}$ sur \mathcal{K} . En outre, encore par construction l'image de la restriction de ϕ_r à $\text{Fil}^r \mathcal{K}$ engendre \mathcal{K} : on voit que l'objet \mathcal{K} est dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}}$. Comme \mathcal{M} est simple, ce sous-objet est tout \mathcal{M} . Ainsi on a prouvé la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}}$ et l'opérateur de monodromie N est nul sur $\text{im } \phi_r$. De plus \mathcal{M} admet une base adaptée de la forme (x_1, \dots, x_d) telle que $N(x_i) = 0$, $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$ (voir définition 3.2.2) et :*

$$\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$$

où les λ_i sont des éléments de k tels que $\lambda_1 \neq 0$.

qui admet pour corollaire immédiat la proposition 3.3.4 que l'on vient donc de démontrer.

4.2 Une base adaptée simple

Nous allons dans ce paragraphe préciser un peu plus l'énoncé de la proposition 4.1.1 dans le cas où le corps résiduel k est algébriquement clos.

Lemme 4.2.1. *Supposons k algébriquement clos. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}$ et il existe (e_1, \dots, e_d) une base adaptée de \mathcal{M} telle que $N(e_i) = 0$, $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$, les indices i tant considérés dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On sait d'après la proposition précédente qu'il existe une base adaptée (x_1, \dots, x_d) telle que $\varphi_r(x_i) = x_{i+1}$ pour i compris entre 1 et $d-1$ et $\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$ où $\lambda_i \in k$ et $\lambda_1 \neq 0$.

Parmi toutes les bases adaptées qui vérifient ces conditions, choisissons-en une pour laquelle le nombre de λ_i non nuls est minimal. On écrit alors plutôt :

$$x_{d+1} = \varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_k x_{i_k}$$

où tous les λ_i sont non nuls et les indices i_k sont compris entre 0 et d . De plus, on a $i_1 = 1$. Notons pour tout i , n_i le plus petit entier tel que $u^{n_i} x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Si tous les n_i n'étaient pas égaux, $\varphi_r(x_{d+1})$ s'écrirait comme une combinaison linéaire de x_2, \dots, x_{d+1} faisant intervenir strictement moins de k termes et la famille (x_2, \dots, x_{d+1}) fournirait une base adaptée de \mathcal{M} (en reprenant l'étude faite de ce paragraphe précédent). Mais ceci est en contradiction avec la minimalité considérée.

Ainsi tous les n_i sont égaux et donc égaux à n_{d+1} . Par récurrence, on prouve que pour tout entier fixé a , tous les n_{i_j+a} sont égaux, les indices $i_j + a$ tant considérés modulo d .

Notons t le plus grand commun diviseur de d et de toutes les différences $i_j - i_{j'}$. D'après ce qui précède la suite des n_i est périodique de période (divisant) t . On considère alors le sous- k -espace vectoriel de \mathcal{M} engendré par les x_{tn} où n parcourt $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. L'application φ_r^t stabilise ce sous-espace et y est ϕ^t -semi-linéaire. En particulier, puisque k est algébriquement clos, il existe un élément e_1 de ce sous-espace tel que $\varphi_r^t(e_1) = \lambda e_1$ pour un certain $\lambda \in k^*$. Quitte multiplier e_1 par un élément de k , on peut supposer $\lambda = 1$.

On définit $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$. La famille (e_1, \dots, e_t) engendre un espace stable par N et par ϕ_r qui est par construction un sous-objet non nul de \mathcal{M} . C'est donc tout \mathcal{M} . De plus, d'après la proposition 4.1.1, $N(e_i) = 0$ pour tout i . Finalement (e_1, \dots, e_t) est une base adaptée vérifiant les conditions du lemme. Cela conclut. \square

4.3 Classification proprement dite

Définition 4.3.1. Soit (n_i) une suite périodique⁵ d'entiers compris entre 0 et er . On note h la période de cette suite. On définit l'objet $\mathcal{M}(n_i) \in \widetilde{\mathcal{M}}^r$ de la façon suivante :

1. $\mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} k[u]/u^{ep} e_i$;
2. $\text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} u^{n_i} k[u]/u^{ep} e_i$;
3. $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ pour tout indice i ;
4. $N(e_i) = 0$ pour tout indice i .

Il est facile de vérifier que tous ces objets sont bien dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.2. Supposons k algébriquement clos. Les objets $\mathcal{M}(n_i)$ sont des objets simples de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. De plus, si \mathcal{M} est un objet simple de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, alors il est isomorphe à un certain $\mathcal{M}(n_i)$.

Démonstration. Voyons d'abord la simplicité de $\mathcal{M}(n_i)$. Soit \mathcal{M} un sous-objet non nul de $\mathcal{M}(n_i)$. L'image de la restriction de ϕ_r à $\mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i)$ est supposée engendrer tout \mathcal{M} ; en particulier elle n'est pas réduite à 0 et comprend un élément non divisible par u^p , disons x . On écrit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_h e_h$ où les λ_i sont des polynômes à coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$. On peut supposer $\lambda_i \in k$ quitte remplacer x par $\varphi_r \circ \varphi_r(x)$.

Considérons un x pour lequel le nombre de λ_i non nuls est minimal et écrivons :

$$x = \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_k e_{i_k}$$

avec ici tous les λ_i non nuls. En appliquant φ_r éventuellement plusieurs fois, on voit que tous les n_{i_j} doivent être égaux car sinon, on obtient un nouvel x qui serait combinaison d'un nombre plus petit de e_i . On applique alors φ_r l'égalité précédente et comme précédemment, on prouve que tous les n_{i_j+1} sont égaux. Par récurrence, on voit que pour a fixé tous les n_{i_j+a} sont égaux. Ainsi, pour que la suite (n_i) soit périodique de période exactement h , il faut que $k = 1$,

⁵Par « périodique », on entend dans ce papier « périodique dès le début » et pas « périodique à partir d'un certain rang ».

c'est--dire que x soit multiple de l'un des e_i . Mais alors le sous-objet engendr par x est tout $\mathcal{M}(n_i)$ et finalement $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n_i)$. Ce qui assure la simplicité.

Voyons la réciproque. On applique le lemme 4.2.1 qui donne une description explicite de l'objet \mathcal{M} . Il reste juste à démontrer que la suite (n_i) ne peut être périodique de période divisant strictement h . Mais supposons que ce soit le cas et notons t cette période. On considère le sous-objet engendr par l'élément $x = e_t + e_{2t} + \dots + e_h$ et on vérifie immédiatement qu'il est non nul et strictement inclus dans \mathcal{M} . C'est une contradiction. \square

Remarque. En utilisant la correspondance de [8], on retrouve exactement la classification donnée par Raynaud dans [19].

Caractérisation des endomorphismes

On suppose toujours le corps k algébriquement clos. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Soit (e_1, \dots, e_h) une base adaptée de \mathcal{M} vérifiant les conditions du théorème 4.3.2. Nous allons en fait voir que les e_i sont presque uniquement déterminés. Plus précisément, on a :

Théorème 4.3.3. *Supposons k algébriquement clos. Si $\lambda \in k$ vérifie $\lambda^{p^h} = \lambda$, alors l'application $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par $\psi(e_i) = \lambda^{p^i} e_i$ est un endomorphisme de \mathcal{M} . Ce sont les seuls.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que les applications définies dans l'énoncé du théorème sont bien compatibles au Fil^r, au Frobenius et à l'opérateur de monodromie.

Pour la réciproque, nous allons anticiper sur des résultats ultérieurs donnant une application non nulle $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ (la non-nullité se déduit de la fidélité du foncteur T_{st} , voir corollaire 5.3.4). D'autre part $\text{End}(\mathcal{M})$ est un corps *a priori* non commutatif et $\text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est un corps fini p^h -éléments (cela se déduit du théorème 5.2.2). On en déduit facilement que la flèche $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est bijective, ce qui prouve le théorème. \square

Corollaire 4.3.4. *Les objets simples $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes si et seulement si la suite (m_i) se déduit de la suite (n_i) par translation.*

Démonstration. Si deux objets $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes, on peut transporter une base adaptée de $\mathcal{M}(n_i)$ sur $\mathcal{M}(m_i)$ et le théorème précédent entraîne la conclusion voulue. \square

Un autre point de vue

Donnons finalement un point de vue différent sur cette classification, peut-être plus agréable à retenir.

Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'entiers compris entre 0 et $p-1$ et soit t le rationnel dont le développement « décimal » en base p est :

$$t = 0, n_1 n_2 n_3 n_4 \dots$$

On a une propriété classique :

Propriété 4.3.5. *Avec les notations précédentes, les suites périodiques sont exactement celles qui correspondent aux rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1]$ où $\mathbb{Z}_{(p)}$ désigne le localisé de \mathbb{Z} en p .*

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 4.3.6. Soit \mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}$ pour la relation d'équivalence suivante : $a \sim b$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $a \equiv p^n b \pmod{\mathbb{Z}}$.

La dernière relation d'équivalence n'est pas mystérieuse : elle correspond simplement à un décalage des décimales du nombre. En particulier, à cause de la périodicité, les classes d'équivalence sont toutes finies.

Dans ces conditions, \mathcal{R} classe exactement les objets simples de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (via la correspondance que l'on a décrite précédemment).

Nous verrons par la suite que le « rationnel classifiant » va apparaître de façon naturelle.

5 Étude du foncteur T_{st}

5.1 Un système préliminaire

Ce paragraphe présente une version légèrement différente de résultats classiques et par exemple déjà discutés dans [22] ou dans le paragraphe 3.3.2 de [3]. On suppose dans ce paragraphe que le corps résiduel k est algébriquement clos.

On considère un entier h strictement positif. On fixe $\eta^{(h)}$ une racine $(p^h - 1)$ -ième de l'uniformisante π de K et on appelle $K^{(h)}$ l'extension de K engendrée par cette racine. On rappelle que $K^{(h)}/K$ est totalement et modérément ramifiée de degré $p^h - 1$. On rappelle également que la limite inductive de toutes ces extensions est l'extension maximale modérément ramifiée de K . Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguïté, on notera η la place de $\eta^{(h)}$. On rappelle enfin que π_1 désigne une racine p -ième de π .

On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{(\pi_1^{n_1} \hat{x}_1 + \hat{c}_1)^p}{\pi^{er}} = \varpi \hat{x}_2 + \hat{r}_1 \\ \frac{(\pi_1^{n_2} \hat{x}_2 + \hat{c}_2)^p}{\pi^{er}} = \varpi \hat{x}_3 + \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \frac{(\pi_1^{n_h} \hat{x}_h + \hat{c}_h)^p}{\pi^{er}} = \varpi \hat{x}_1 + \hat{r}_h \end{cases}$$

où $\varpi \in \{-1, 1\}$ est un signe, les n_i sont des entiers fixes tous compris entre 0 et er , et où les \hat{r}_i et les \hat{c}_i sont des éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Les inconnues sont les \hat{x}_i que l'on cherche également dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On pose dans la suite $m_i = er - n_i$.

Sans coefficient constant

On s'intéresse tout d'abord au cas où toutes les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i sont nulles. Il est alors possible de résoudre directement le système dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, le système se réécrit simplement :

$$\hat{x}_i^p = \varpi \pi^{m_i} \hat{x}_{i+1}.$$

Par des manipulations simples, on voit que \hat{x}_1 doit tre solution de l'equation :

$$\hat{x}_1^{p^h} = \varpi^h \pi^{s_1} \hat{x}_1$$

o s_1 est dfini par la formule :

$$s_1 = m_1 p^{h-1} + m_2 p^{h-2} + \dots + m_{h-1} p + m_h.$$

Cette quation admet p^h solutions qui sont 0 et toutes les racines $(p^h - 1)$ -imes de $\varpi^h \pi^{s_1}$. partir de \hat{x}_1 , on reconstruit les autres \hat{x}_i et on vrifie qu'ils forment bien une solution du systme.

On peut presenter les choses de faon plus homogene en procdant comme suit. On pose pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$:

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

Si ε est une racine $(p^h - 1)$ -ime de ϖ (qui est dj dans K), la famille des $\hat{x}_i = \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ est une solution de (S) . Toutes les solutions s'obtiennent ainsi l'exception de la solution nulle $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_h = 0$.

Un lemme la Hensel

On ne suppose plus que les constantes sont nulles et on cherche un lien entre les solutions de (S) modulo p et les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$:

Lemme 5.1.1. *Avec les notations prcdentes, si le systme (S) admet une solution (x_1, \dots, x_h) modulo p , alors cette solution se relève dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ en une solution $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$.*

Dmonstration. On construit cette solution par approximations successives. Fixons tout d'abord une extension finie L de $K^{(h)}$ suffisamment grande pour contenir tous les \hat{r}_i , les \hat{c}_i et pour que tous les x_i puissent s'y relever. L'extension $L/K^{(h)}$ est totalement ramifie (puisque k est suppos algbriquement clos), disons de degr d . Notons \mathcal{O}_L l'anneau des entiers de L .

On va construire une suite de $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_h^{(n)})$ de solutions compatibles du systme (S) modulo η^n dans \mathcal{O}_L . Il suffira par la suite de prendre la limite de cette suite pour avoir une solution du systme dans \mathcal{O}_L et donc dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

On a dj, par hypothse, un h -uplet pour $n = e$ ($p^h - 1$). Les suivants se construisent par recurrence. On part d'un entier $n \geq e$ ($p^h - 1$) et d'lments $x_1^{(n)}, \dots, x_h^{(n)}$ vrifiant :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv \varpi x_{i+1}^{(n)} + \hat{r}_i \pmod{\eta^n}$$

pour tout indice i pris dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ et on cherche construite y_1, \dots, y_h , tels que :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{m_i}} \equiv \varpi x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_{i+1} + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

Un calcul donne :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{er}} = \frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} + \sum_{k=1}^p C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} y_i^k \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}$$

Soit un entier $k \geq 1$. On a $v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}}\right) = \frac{kn_i}{p} + \frac{kn}{p^h-1} - er$. D'autre part, $\frac{(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}}$ est un entier, donc de valuation positive et on en dduit que $v(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i) \geq \frac{er}{p}$. On obtient :

$$\begin{aligned} v_i &= v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geq \frac{kn}{p^h-1} + \frac{kn_i}{p} - er + (p-k) \frac{er}{p} \\ &= \frac{n}{p^h-1} + (k-1) \frac{n}{p^h-1} - \frac{km_i}{p} \end{aligned}$$

Comme par hypothse $n \geq e(p^h - 1)$ et $m_i \leq er$, il vient :

$$v_i \geq \frac{n}{p^h-1} + e(k-1) - \frac{ker}{p} = \frac{n}{p^h-1} - e + ek \left(1 - \frac{r}{p}\right)$$

Maintenant si $k < p$, le coefficient binomial C_p^k est multiple de p et donc :

$$v\left(C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geq e + v_i \geq \frac{n}{p^h-1} + ek \left(1 - \frac{r}{p}\right) \geq \frac{n+1}{p^h-1}$$

la dernire inegalit rsultant du fait que $r \leq er \leq p - 2$.

On en dduit que tous les termes de la somme pour k compris strictement entre 0 et p sont nuls modulo η^{n+1} . En fait, c'est aussi le cas pour $k = p$. En reprenant les galits prcdentes, on voit que :

$$v_p \geq \frac{n}{p^h-1} + e(p-1-r)$$

mais $p-1-r \geq 1$ et donc on a galement $v_p \geq \frac{n+1}{p^h-1}$. Finalement le systme que l'on a rsoudre se rduit :

$$\frac{\left(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv \varpi x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_i + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

mais on sait que la diffrence $\frac{(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}} - \varpi x_{i+1}^{(n)} - \hat{r}_i$ est un multiple de η^n , et donc s'crit $\eta^n q_i$. Il suffit ensuite de choisir $y_i = q_i$ pour avoir la solution que l'on cherchait. \square

Rsolution du systme

Une premire consquence du lemme que l'on vient de prouver est la rsolution du systme (S) modulo p lorsque les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i sont toutes nulles :

Lemme 5.1.2. *Supposons que les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i soient nulles. Mise part la solution nulle, les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ s'crivent $x_i = \varpi^i \varepsilon^{p^i} \bar{\eta}^{s_i}$ o $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ est une racine $(p^h - 1)$ -ime de ϖ , $\bar{\eta}$ est la rduction de η dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et :*

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

Dmonstration. Si ε est une racine $(p^h - 1)$ -ime de ϖ^h et si x_i dsigne la rduction modulo p de $\varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$, le uplet (x_1, \dots, x_h) est solution du systme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus, si ε et ε' sont deux racines $(p^h - 1)$ -imes de ϖ^h distinctes, on a pour tout entier i , $\varepsilon^{p^i} \neq \varepsilon'^{p^i}$ dans le corps rsiduel et donc $\varepsilon^{p^i} - \varepsilon'^{p^i}$ est de valuation nulle. On en dduit, puisque $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} < 1$, que $x_i = \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ et $x'_i = \varpi^i \varepsilon'^{p^i} \eta^{s_i}$ sont distincts dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.

On a ainsi trouv p^h solutions (S) modulo p . Le lemme 5.1.1 assure qu'il y en a au moins autant dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Mais on a vu qu'il y en a exactement p^h dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, on les a donc toutes. \square

Passons au cas gnral. On reprend le systme (S) mais on ne suppose plus la nullit de \hat{r}_i et de \hat{c}_i .

Thorme 5.1.3. *Supposons que le systme (S) admette une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, alors il admet toujours p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus l'application de rduction modulo p dfnit une bijection entre ces ensembles de solutions.*

En outre si (x_1, \dots, x_h) et (y_1, \dots, y_h) sont deux solutions distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, alors il existe ε une racine $(p^h - 1)$ -ime de ϖ^h telle que $y_i = x_i + \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ o s_i est dfini par la formule :

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}$$

Dmonstration. Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Si l'on note $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la rduction modulo p de \hat{x}_i , le uplet (x_1, \dots, x_h) est solution de (S) modulo p . Prenons ε une racine $(p^h - 1)$ -ime de ϖ^h et posons $y_i = x_i + \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$. Un calcul donne :

$$\left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p = \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p + \pi^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i} + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \pi_1^{kn_i} \varpi^{ki} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k}$$

Or les \hat{x}_i forment une solution de (S) et donc on a $v(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i) \geq \frac{er}{p}$. galement, on a $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} \geq \frac{m_i}{p}$. Finalement, on obtient :

$$v \left(\pi_1^{kn_i} \varpi^{ki} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k} \right) \geq k \frac{n_i}{p} + k \frac{m_i}{p} + (p-k) \frac{er}{p} = er$$

Ainsi tous les termes de la somme sont des multiples de $p\pi^{er}$. Modulo p , il reste :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p &\equiv \frac{\left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p}{\pi^{er}} + \frac{\pi^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{er}} \pmod{p} \\ &\equiv \varpi \hat{x}_{i+1} + \hat{r}_i + \varpi \frac{\varpi^{i+1} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{m_i}} \pmod{p} \end{aligned}$$

On remarque que $ps_i = s_{i+1} + m_i (p^h - 1)$, puis que (y_1, \dots, y_h) est solution de (S) . On conclut en reprenant la dmonstration du lemme 5.1.2. \square

Voici un dernier corollaire qui nous sera utile par la suite :

Corollaire 5.1.4. *Soit g un lment du groupe de Galois G_K qui fixe tous les \hat{r}_i et tous les \hat{c}_i . Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On note x_i la rduction modulo p de \hat{x}_i . Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, g fixe \hat{x}_i si et seulement si g fixe x_i .*

Dmonstration. Il suffit de montrer que si g fixe les x_i alors $(g\hat{x}_1, \dots, g\hat{x}_h)$ est aussi solution de (S) . En effet, d'après le thorme prcdent, si ces deux solutions sont distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, elles le sont aussi modulo p . Le thorme 5.1.3 donne ceci : dans le cas o les deux solutions sont distinctes, dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ comme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, toutes les « coordonnées » des h -uplets sont distinctes. Le corollaire en dcoule directement. \square

Remarque. Dans le cas o tous les \hat{c}_i sont nuls, il existe toujours une solution au systme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, en combinant les quations, on aboutit une unique quation polynomiale coefficients entiers que doit vrifier \hat{x}_1 . Comme \bar{K} est algbriquement clos, cette quation admet une solution.

5.2 Calcul sur les objets simples

Dans ce paragraphe uniquement, on suppose le corps rsiduel k algbriquement clos. On suppose galement que π est choisi tel que $\pi^e = p$, ce qui est toujours possible si $r > 0$ (si $r = 0$, les rsultats se dmontrent indpendamment et facilement). Ainsi $E(u) = u^e - p$ et $c_\pi = -1$. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Le thorme 4.3.2 affirme que \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{M}(n_i)$ pour une certaine suite priodique (n_i) . Notons h sa priode.

L'image de \mathcal{M} par le foncteur T_{st} s'identifie, comme le prouve le lemme 2.3.4, l'ensemble $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$. Se donner un tel morphisme revient se donner pour tout i , un lment $x_i \in \hat{A}$, image de e_i , ces lments x_i tant soumis certaines relations que nous allons expliciter. On rappelle que d'après le lemme 2.3.3, l'anneau \hat{A} s'identifie $(\mathcal{O}_{\bar{K}} \langle X \rangle) / p$.

Lemme 5.2.1. *L'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) = 0$ est $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.*

Dmonstration. Le lemme rsulte directement du fait que $N(X)$ est une unit de \hat{A} . \square

De $N(e_i) = 0$, on dduit $N(x_i) = 0$ et donc d'après le lemme prcdent $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Intrissons-nous maintenant la condition impose par le Frobenius. Sur l'objet \mathcal{M} , ϕ_r est dfini par $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$. Cela impose donc deux choses : l'lment $u^{n_i} x_i$ appartient $\text{Fil}^r(\mathcal{O}_{\bar{K}} \langle X \rangle) / p$ et on a l'galit $\phi_r(u^{n_i} x_i) = x_{i+1}$.

On rappelle que l'on avait appel p_1 (resp. π_1) une racine p -ime de p (resp. de π) et comme $\pi^e = p$, on peut supposer en outre que $\pi_1^e = p_1$. D'autre part, si $x = \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!} \in \hat{A}$ ($a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$), alors $x \in \text{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si a_i est un multiple de \bar{p}_1^{r-i} pour tout entier i compris entre 0 et r . Comme, dans \hat{A} , $u = \frac{\pi_1}{1+X}$, on a $u^{n_i} x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si $\pi_1^{n_i} x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$, c'est--dire $\pi_1^{er-n_i}$ divise x_i pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$.

Soit \hat{x}_i un relev de x_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ qui est un multiple de $\pi_1^{er-n_i}$. Par dfnition $\phi_r(u^{n_i} x_i)$ est la rduction modulo p de :

$$\frac{1}{p^r} \cdot \phi \left(\frac{\pi_1^{n_i}}{(1+X)^{n_i}} \hat{x}_i \right) = \frac{(-1)^r}{p^r} \cdot \frac{\pi_1^{pn_i}}{(1+X)^{pn_i}} \hat{x}_i^p = (-1)^r \frac{1}{(1+X)^{pn_i}} \cdot \frac{1}{\pi^{er-n_i}} \hat{x}_i^p.$$

Or modulo p , $(1+X)^p = 1$ et finalement $\phi_r(u^{n_i} x_i) = (-1)^r \frac{x_i^p}{\pi^{er-n_i}}$.

Ces quations fournissent un systme qui est exactement celui tudi dans le paragraphe 5.1 avec $\varpi = (-1)^r$ et $\hat{c}_i = \hat{r}_i = 0$. En particulier, le lemme 5.1.2 nous fournit directement les solutions.

On vient de prouver le thorme 1.0.3 dont nous rappelons l'nonc :

Thorme 5.2.2. *Supposons k algbriquement clos et $er < p-1$. Si l'objet simple \mathcal{M} s'identifie $\mathcal{M}(n_i)$ pour une suite (n_i) priodique de priode h (voir thorme 4.3.2), alors la representation galoisienne $T_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

o m_i est dfini par $n_i + m_i = er$ et o les θ_i sont les caractres fondamentaux de niveau h .

En particulier, pour tout objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo p de $T_{st}(\mathcal{M})$ sont tous compris entre 0 et er .

5.3 Exactitude et fidlit

Exactitude

Thorme 5.3.1. *Le foncteur T_{st} de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes de torsion est exact.*

Dmonstration. La preuve est en tout point semblable celle donne dans le paragraphe 3.2.1. de [3], et dans le paragraphe 2.3.1. de [6]. \square

Fidlit

Commenons par le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. *Supposons k algbriquement clos. L'image par le foncteur T_{st} d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une representation irrductible.*

Dmonstration. Par le thorme 5.2.2, on connat l'image d'un objet simple par le foncteur T_{st} . On vrifie directement que cette image est une representation galoisienne irrductible. \square

Corollaire 5.3.3. *Supposons k algbriquement clos. Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{st}(\mathcal{M}))$$

Dmonstration. Cela dcoule directement du lemme prcdent et de l'exactitude. \square

Remarque. Ces deux derniers rsultats restent vrais si k n'est pas algbriquement clos (voir thorme 6.4.4).

Corollaire 5.3.4. *Le foncteur T_{st} de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes de torsion est fidle.*

Dmonstration. Supposons dans un premier temps k algbriquement clos. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T_{st}(f) = 0$. On a la suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \text{im } f \longrightarrow 0$$

En outre l'application $\text{im } f \rightarrow \mathcal{Y}$ est injective et donc la flche dduite $T_{st}(\mathcal{Y}) \rightarrow T_{st}(\text{im } f)$ est surjective. On en dduit que $T_{st}(\tilde{f}) = 0$. En appliquant le foncteur exact T_{st} la suite

exacte crite prcdemment, on voit que $T_{\text{st}}(\text{im } f) = 0$. D'aprs le corollaire prcdent, $\text{im } f = 0$, puis $f = 0$.

Pour le cas gnral, notons K^{nr} le complt p -adique de l'extension maximale non ramifie de K . Son corps rsiduel s'identifie une clture algbrique \bar{k} de k . Dsignons par S_{nr} l'anneau S construit partir de K^{nr} et par $\underline{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$ la catgorie de modules sur S_{nr} .

Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors $\mathcal{M}_{\text{nr}} = S_{\text{nr}} \otimes_S \mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$ et l'application :

$$\begin{aligned} T_{\text{st}}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}}) \\ f &\mapsto [s \otimes x \mapsto sf(x)] \end{aligned}$$

est un isomorphisme commutant l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{nr}})$. De plus, le morphisme $\iota_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{nr}}$, $x \mapsto 1 \otimes x$ est injectif.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T_{\text{st}}(f) = 0$. Il induit un morphisme $f_{\text{nr}} : \mathcal{X}_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{nr}}$ de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$ et on a $T_{\text{st}}(f_{\text{nr}}) = 0$. Par la fidlit dans le cas algbriquement clos, il vient $f_{\text{nr}} = 0$. La compose $\iota_{\mathcal{Y}} \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{nr}}$ est nulle et comme $\iota_{\mathcal{Y}}$ est injectif, f est nulle. Ceci dmontre la fidlit. \square

6 Pleine fidlit du foncteur T_{st}

Dans cette partie, on suppose nouveau dans un premier temps que le corps rsiduel k est algbriquement clos. La propriat de pleine fidlit reste valable sans cette hypothse et nous verrons dans le dernier paragraphe comment le cas gnral se dduit simplement du cas « algbriquement clos ».

Par un argument classique (voir [13]), on se ramne prouver le lemme suivant :

Lemme 6.0.5. *Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors la flche canonique $\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ext}^1(T_{\text{st}}(\mathcal{N}), T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est injective.*

6.1 Le module A_{ss}

Pour prouver le lemme 6.0.5, on considre \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets simples, \mathcal{X} une extension dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ de ces deux objets telle que $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ soit isomorphe au produit direct $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$. Il nous faut montrer que \mathcal{X} est isomorphe $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Les hypothses impliquent que \mathcal{X} est tu par p . En effet, $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est tu par p , ce qui signifie que la multiplication par p sur $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est l'application nulle. Par fidlit, on en dduit que la multiplication par p sur \mathcal{X} est galement l'application nulle. Ainsi on peut travailler dans les catgories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. D'autre part, si $r = 0$, il y a un unique objet simple isomorphe prs, ce qui rgle rapidement ce cas. Ainsi on peut supposer $r > 0$ et supposer nouveau $\pi^e = p$.

Commenons par donner une caractrisation, faisant intervenir explicitement le foncteur T_{st} , des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ qui sont semi-simples.

On construit un sous-module A_{ss} de \hat{A} (ss pour *semi-simple*). Pour cela, comme dans le paragraphe 5.1, on fixe, pour tout entier h , $\eta^{(h)}$ une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'uniformisante

π . On impose en outre une condition de compatibilité : on demande que lorsque h' divise h , on ait :

$$\left(\eta^{(h')}\right)^{\frac{p^h-1}{p^{h'}-1}} = \eta^{(h)}$$

De cette faon, si $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (le localis de \mathbb{Z} en p) on pourra sans ambiguit parler de π^s . En effet, comme tout nombre premier p admet un multiple de la forme $p^h - 1$, on peut toujours crire $s = \frac{a}{p^h-1}$, et poser :

$$\pi^s = \left(\eta^{(h)}\right)^a.$$

La condition de compatibilité dit prcisment que le rsultat ne dpend pas de la fraction choisie pour reprsenter s . En outre, on a les formules videntes $\pi^s \times \pi^{s'} = \pi^{s+s'}$ et $\pi^{ns} = (\pi^s)^n$ si s et s' sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et si n est un entier.

Reprenons la description donne tout la fin du paragraphe 4.3. Choisissons un lment $t \in \mathcal{R}$ classifiant un certain objet simple \mathcal{M} de la catgorie $\widehat{\mathcal{M}}^r$. Appelons t_1, \dots, t_h les rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$ correspondant t . Prcisment si c'est la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ qui classifie \mathcal{M} , on aura :

$$t_i = 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots$$

Si l'on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$, on voit d'après le calcul fait dans le paragraphe 5.2 que tout lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ tombe dans le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module de \hat{A} engendr par les π^{v_i} . On pose, pour tout $t \in \mathcal{R}$:

$$A_{\text{sst}} = k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_1} + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_2} + \dots + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_h}$$

o l'entier h dpend de t . La somme prcdente est directe (voir lemme 6.1.2). Il faut faire attention au fait que les modules $k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_i}$ ne sont pas libres, car par exemple on a toujours $u^{ep-1} \pi^{v_i} = 0$, sauf dans le cas trs particulier o $h = 1$ et $n_1 = er$. En particulier A_{sst} n'est pas isomorphe \mathcal{M} .

Dfinition 6.1.1. On pose :

$$A_{\text{ss}} = \sum_{t \in \mathcal{R}} A_{\text{sst}} \subset \hat{A}.$$

Autrement dit, A_{ss} est le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendr par les $\pi^{t'}$ o t' parcourt l'ensemble des rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et er .

Lemme 6.1.2. Le morphisme vident :

$$\bigoplus_{t'} k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{t'} \rightarrow A_{\text{ss}}$$

est un isomorphisme (o la somme est nouveau tendue aux t' rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et er).

Avant de faire la démonstration, insistons sur le fait que la notation est trompeuse : le module $k(u)/u^{ep} \cdot \pi^{t'}$ n'est pas libre, il doit être vu comme un sous-module de \hat{A} . Le lemme dit donc que la somme dans \hat{A} de tous ces sous-modules est directe.

Démonstration. La surjectivité est une conséquence immédiate de la définition de A_{ss} . Passons à l'injectivité. Considérons une relation de la forme :

$$P_1(u) \pi^{v_1} + \dots + P_n(u) \pi^{v_n} = 0$$

où les v_i sont deux à deux distincts et où on peut supposer que tous les polynômes $P_i \in k[u]/u^{ep}$ sont non nuls. Il faut alors montrer que tous les termes de la somme $P_i(u) \pi^{v_i}$ sont nuls, et ceci va résulter d'un simple calcul de valuation.

On écrit $u = \pi_1 X'^{p-1}$ où l'on rappelle que $X' = 1 + X$ vérifie la relation $X'^p = 1$. En identifiant les coefficients en X^j , on obtient pour tout j compris entre 0 et $p-1$ des égalités de la forme :

$$P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} = 0$$

où les $P_i^{(j)}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On rappelle que l'on dispose d'une valuation sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et que le fait d'être nul signifie simplement d'être de valuation supérieure à e . La valuation de $P_i^{(j)}(\pi)$ est un entier. Comme $v_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$, et que tous les v_i sont deux à deux distincts, les valuations de $P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i}$ sont aussi deux à deux distinctes, et on a :

$$v \left(P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} \right) = \min_i v \left(P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i} \right)$$

En particulier, la somme est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait prouver. \square

Soit \mathcal{X} un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$. L'injection $A_{\text{ss}} \rightarrow \hat{A}$ fournit une flèche injective $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$.

Lemme 6.1.3. *L'objet \mathcal{X} est semi-simple si et seulement si la flèche précédente est surjective (et donc un isomorphisme).*

Démonstration. Le sens direct est facile : si \mathcal{X} est semi-simple et s'écrit donc comme la somme $\mathcal{X} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n$ pour certains objets simples \mathcal{M}_i , alors $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ se décompose lui aussi comme la somme directe :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{X}) = T_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \oplus \dots \oplus T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$$

et on a déjà vu que $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_i) = \text{Hom}(\mathcal{M}_i, A_{\text{ss}})$.

Faisons la réciproque. Le lemme 2.3.1.2 de [6] affirme que le cardinal de $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est $p^{\text{rg } \mathcal{X}}$ où $\text{rg } \mathcal{X}$ désigne le rang de \mathcal{X} en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module. On prouve par récurrence sur la longueur de l'objet \mathcal{X} que $\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg } \mathcal{X}}$ et qu'il y a égalité si et seulement si \mathcal{X} est semi-simple. Cela entraînera bien le résultat annoncé dans le lemme.

Le résultat est évident si \mathcal{X} est simple (de longueur 1). Prenons un objet \mathcal{X} de longueur $n+1$. Il existe une suite exacte courte de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

o \mathcal{M} est un objet simple et \mathcal{N} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ de longueur n . Par application du foncteur contravariant $\text{Hom}(\cdot, A_{\text{ss}})$, on en dduit une suite exacte gauche :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$$

d'o :

$$\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq \text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \cdot \text{Card Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg}\mathcal{N}} \cdot p^{\text{rg}\mathcal{M}} = p^{\text{rg}\mathcal{X}}$$

Pour que les deux inalits prcdentes soient des galits, il faut que la flche $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$ soit surjective et que $\text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) = p^{\text{rg}\mathcal{N}}$. D'aprs l'hypothse de rcurrence, cette dernire condition implique que \mathcal{N} est semi-simple.

Exploitons la premiere condition. Soit $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$, $\psi \neq 0$. Si t dsigne le « rationnel classifiant » de \mathcal{M} , ψ tombe dans un $A_{\text{ss}t}$ qui est un facteur direct de A_{ss} . Par hypothse, ψ se prolonge tout \mathcal{X} . On s'intresse la compose $s : \mathcal{X} \rightarrow A_{\text{ss}} \rightarrow A_{\text{ss}t}$ o la premiere flche est ψ ainsi prolonge et la seconde flche est la projection canonique.

Notons (e_1, \dots, e_d) une base adapte de \mathcal{X} pour les entiers n_1, \dots, n_d et notons pour tout i , f_i un relev de $s(e_i)$ dans \mathcal{M} , qui existe puisque tous les morphismes non nuls $\mathcal{M} \rightarrow A_{\text{ss}t}$ sont surjectifs. Nous allons corriger les f_i pour que la flche $s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}, e_i \mapsto f_i$ dfinisse un scindage de :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

Les f_i sont uniques modulo $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$ (on peut faire beaucoup mieux en fait, mais ce ne sera pas utile). En particulier, quelle que soit la faon de les choisir, la flche s obtenue respecte Fil^r . D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_i} f_i) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} f_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

o G dsigne la matrice de ϕ_r dans la base adapte (e_1, \dots, e_d) et o les r_i sont des lments de $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$. On voit donc que si l'on remplace le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} +$

${}^t G^{-1} \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$, on obtient une flche compatible Fil^r et ϕ_r .

Pour prouver que cette rtraction est galement compatible N , on considere le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \searrow s & \downarrow u^e N & & \downarrow cN \\ & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Les faces du cube situes devant, derriere, au-dessus et au-dessous commutent. La face de gauche commute modulo $u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc $\phi_r \circ (u^e N) \circ s = \phi_r \circ s \circ (u^e N)$. Une chasse au diagramme permet d'obtenir $(cN) \circ s \circ \phi_r = s \circ (cN) \circ \phi_r$, ce qui permet de conclure puisque $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ engendre tout \mathcal{X} . \square

6.2 Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$

Rappelons que notre objectif est de prouver le lemme 6.0.5. On considere donc \mathcal{X} , objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et extension de deux objets simples \mathcal{M} et \mathcal{N} . On suppose que $T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$ et on veut montrer que \mathcal{X} est semi-simple. Pour cela d'aprs le lemme 6.1.3, il suffit de prouver que tout lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ dfinit un morphisme qui tombe dans A_{ss} . Soit $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$. On peut dessiner le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \psi & & \\
 & & & & \hat{A} & & \\
 & & & & \downarrow \text{pr} & \nearrow \tilde{\psi} & \\
 & & & & \hat{A}/A_{\text{ss}} & &
 \end{array}$$

La compose $\psi \circ f$ est un morphisme de \mathcal{M} dans \hat{A} , qui tombe dans A_{ss} par simplicit de \mathcal{M} et devient nulle lorsqu'elle est compose avec la projection canonique. Il existe donc une flche $\tilde{\psi} : \mathcal{N} \rightarrow \hat{A}/A_{\text{ss}}$ faisant commuter le diagramme. L'objectif de ce paragraphe est d'tudier plus en dtail cette flche.

Notons d'abord que le quotient \hat{A}/A_{ss} hrite d'une filtration, d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie : on dfinit $\text{Fil}^i(\hat{A}/A_{\text{ss}}) = \text{pr}(\text{Fil}^i \hat{A})$ et on vrifie que $N(A_{\text{ss}}) \subset A_{\text{ss}}$ et que $\phi_i(A_{\text{ss}} \cap \text{Fil}^i \hat{A}) \subset A_{\text{ss}}$. Cela suffit pour transporter les structures.

Comme \mathcal{M} est un objet simple, on sait le dcire prcisment : par le thorme 4.3.2, il existe un entier h , des lments e_1, \dots, e_h qui forment une base de \mathcal{M} et des entiers n_1, \dots, n_h le tout tel que $\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h$, $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$, les indices tant considrs dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. De mme, on a une description de \mathcal{N} : il existe un entier h' , des lments $e'_1, \dots, e'_{h'}$ et des entiers $n'_1, \dots, n'_{h'}$ le tout vrifiant des conditions analogues.

Dans un premier temps, comme ψ commute N , on a $N(\tilde{\psi}(e'_i)) = 0$ pour tout indice i' . On cherche donc les lments de \hat{A} dont l'image par N tombe dans A_{ss} . C'est l'objet du lemme suivant. On rappelle que, par le lemme 2.3.5 :

$$\hat{A} \simeq (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

l'isomorphisme consistant faire correspondre $X' \mapsto 1 + X$ et $\frac{Y^i}{i!} \mapsto \frac{1}{i!} \left(\frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^i$.

Lemme 6.2.1. *Avec les notations prcdentes, l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) \in A_{\text{ss}}$ est $A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p + (A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p) Y$.*

Dmonstration. Soit $x \in \hat{A}$ tel que $N(x) \in A_{\text{ss}}$. Il s'crit :

$$x = \sum_{j \geq 0} P_j(X') \frac{Y^j}{j!}$$

les P_j tant des polynomes de degr infrier $p - 1$ coefficients dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ nuls pour $j \gg 0$.
On a :

$$N(x) = \sum_{j \geq 0} (X' P'_j(X') + P_{j+1}(X')) \frac{Y^j}{j!}.$$

On remarque que *via* les identifications faites, A_{ss} est entirement inclus dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p[X']/(X'^p - 1)$ et donc il suffit de vrifier les conditions :

1. $X' P'_0(X') + P_1(X') \in A_{\text{ss}}$
2. $X' P'_j(X') + P_{j+1}(X') = 0$ pour tout $j \geq 1$

La deuxime condition entrane $P_1(X') = b$ pour un certain $b \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et $P_j(X') = 0$ pour tout $j \geq 2$.

Exploitons maintenant la premiere condition. crivons $P_0(X') = a_0 + a_1 X' + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$ o $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On obtient :

$$b + a_1 X' + 2a_2 X'^2 + \dots + (p-1) a_{p-1} X'^{p-1} \in A_{\text{ss}}.$$

Par dffinition de A_{ss} et en remarquant que $u \in \hat{A}_{\text{st}}$ correspond $\pi_1 X'^{p-1} \in \hat{A}$, on voit que tous les termes de la somme prcdente sont lments de A_{ss} . En particulier on a $b \in A_{\text{ss}}$. D'autre part, les entiers $2, \dots, p-1$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et donc tous les $a_i X'^i$, pour $i \geq 1$, sont aussi lments de A_{ss} . Cela prouve finalement que $P_0(X') \in A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ puis la conclusion annoncee.

Il reste faire la rciproque, mais elle est immdiate au vu du calcul prcdent. \square

6.3 Fin de la preuve

Choisissons des relevs de $e'_{i'}$ dans \mathcal{X} , relevs que l'on appelle encore $e'_{i'}$. D'apr s le lemme 6.2.1, l'application ψ a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(e_i) &= x_i \\ \psi(e'_{i'}) &= a_{i'} + a'_{i'} + b_{i'} Y \end{aligned}$$

o $a_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, $a'_{i'} \in A_{\text{ss}}$, $b_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, et o on connat prcisment la forme des x_i d'apr s le calcul fait dans le paragraphe 5.2 : si $x_i \neq 0$, si l'on note comme dans le paragraphe 6.1 :

$$\begin{aligned} t_i &= 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots \\ t'_{i'} &= 0, n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1} \overline{n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1}} \dots \end{aligned}$$

et si on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$ et $v'_{i'} = \frac{e(r-1)}{p-1} - t'_{i'}$, il existe deux racines $(p^h - 1)$ -imes de l'unit, ε et ε' , telles que $\hat{x}_i = (-1)^{r_i} \varepsilon^{p^i} \pi^{v_i}$ et o x_i est la rduction modulo p de \hat{x}_i (resp $\hat{b}_{i'}$).

De plus, en remarquant qu'il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que $u^{n'_{i'}} e'_{i'} + z \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$, on obtient des relations de la forme :

$$\phi_r \left(u^{n'_{i'}} (a_{i'} + b_{i'} Y) + c_{i'} \right) = a_{i'+1} + b_{i'+1} Y + r_{i'+1} \tag{1}$$

o $c_{i'}$ et $r_{i'}$ sont des lments de A_{ss} . crivons :

$$c_{i'} = c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)} u + \dots + c_{i'}^{(p-1)} u^{p-1}$$

avec $c_{i'}^{(j)} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On peut bien arrêter la somme $p-1$ car $u^p = \pi$ et si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, on a bien $\pi x \in A_{\text{ss}}$ si et seulement si $x \in A_{\text{ss}}$. On peut également supposer $c_{n_{i'}} = 0$ quitte modifier $a_{i'}$. Décomposons $u_{n_{i'}}(a_{i'} + b_{i'}Y) + c_{i'}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{n_{i'}}(a_{i'} + b_{i'}Y) + c_{i'} &\equiv \pi_1^{n_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)} \pi_1 + \dots + c_{i'}^{(p-1)} \pi_1^{p-1} \\ &\quad - \left[n_{i'} \pi_1^{n_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(1)} \pi_1 + \dots + (p-1) c_{i'}^{(p-1)} \pi_1^{p-1} + \pi_1^{n_{i'}} b_{i'} \right] X \\ &\equiv U - VX \pmod{\frac{X^i}{i!}, i \geq 2} \end{aligned}$$

Cette quantité doit appartenir à $\text{Fil}^r \hat{A}$. On en déduit que π_1^{er} divise U et π_1^{er-e} divise V . De plus, en identifiant les termes constants en Y dans 1, on obtient les relations :

$$\phi_r(U) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$$

qui impliquent $r_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Notons $\hat{a}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ un relev de $a_{i'}$ et $\hat{c}_{i'}^{(j)} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}$ (K^{mr} désigne l'extension maximale modérément ramifiée de K) des relevs de $c_{i'}^{(j)}$ et posons :

$$\hat{c}_{i'} = \hat{c}_{i'}^{(0)} + \hat{c}_{i'}^{(1)} \pi_1 + \dots + \hat{c}_{i'}^{(p-1)} \pi_1^{p-1} \in K^{\text{mr}}[\pi_1].$$

Notons finalement $\hat{r}_{i'} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}$ un relev de $r_{i'}$. Intéressons-nous au système (dont les inconnus sont les $\hat{x}_{i'}$) donné par les équations :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_{i'}} \hat{x}_{i'} + \hat{c}_{i'} \right)^p}{\pi^{er}} = (-1)^r (\hat{x}_{i'+1} + \hat{r}_{i'}).$$

On vient de voir que les $a_{i'}$ forment une solution modulo p , qui se remonte d'après le lemme 5.1.1 en une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ que l'on note $\hat{a}_{i'}$. Le corollaire 5.1.4 s'applique : un élément du groupe de Galois G_K qui fixe les $\hat{c}_{i'}$ et les $\hat{r}_{i'}$, fixe $\hat{a}_{i'}$ si et seulement s'il fixe $a_{i'}$.

D'autre part, on rappelle que par hypothèse la suite :

$$0 \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{N}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

est exacte et que l'on dispose d'une section $s : T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ qui commute l'action de Galois.

Soit $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ décrit comme on vient de le voir. Le morphisme $s(\psi) \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ prolonge ψ , on l'appellera simplement ψ par la suite. Comme s est compatible Galois, pour tout élément σ stabilisant les x_i , on a :

$$\sigma(a_{i'} + c_{i'} + b_{i'}Y) = \sigma a_{i'} + \sigma c_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) + \sigma b_{i'} Y = a_{i'} + c_{i'} + b_{i'} Y$$

où on rappelle que $\sigma(Y) = Y + t(\sigma)$. On a vu que $t(\sigma) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ (voir lemme 2.3.7) et donc de l'égalité précédente, on déduit en particulier :

$$\sigma a_{i'} + \sigma c_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + c_{i'}.$$

Si $t(\sigma) = 0$ et si σ fixe $c_{i'}$, on obtient $\sigma a_{i'} = a_{i'}$. En particulier, tout $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}}[\pi_1])$ vérifie $\sigma a_{i'} = a_{i'}$. Comme de plus tout tel σ fixe $\hat{c}_{i'}$ et $\hat{r}_{i'}$, il vient $\sigma \hat{a}_{i'} = \hat{a}_{i'}$ puis $\hat{a}_{i'} \in K^{\text{mr}}[\pi_1]$.

Ds lors, la relation $\phi_r(\pi_1^{n_{i'}} a_{i'} + c_{i'}) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$ entrane que $a_{i'+1} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}$, et ce bien sr pout tout i . Ainsi, il existe un entier d tel que l'on puisse crire :

$$a_{i'} = \sum_{v \in I} \lambda_v \pi^v$$

o I dsigne l'ensemble des rationnels dans $[0, 1[$ et ayant pour dmoninateur $(p^d - 1)$ et o les λ_v sont des lments de \mathcal{O}_K/p . Soit I_{ss} l'ensemble des rationnels appartenant I dont le dveloppement « dcimal » en base p ne fait intervenir que des chiffres compris entre 0 et er . Soit $I_{\overline{\text{ss}}} = I \setminus I_{\text{ss}}$. On pose :

$$a_{\text{ss},i'} = \sum_{v \in I_{\text{ss}}} \lambda_v \pi^v \quad \text{et} \quad a_{\overline{\text{ss}},i'} = \sum_{v \in I_{\overline{\text{ss}}}} \lambda_v \pi^v.$$

Alors $a_{i'} = a_{\text{ss},i'} + a_{\overline{\text{ss}},i'}$, $a_{\text{ss},i'} \in A_{\text{ss}}$ et on vrifie que :

$$\phi_r \left(\pi_1^{n_{i'}} a_{\overline{\text{ss}},i'} \right) = a_{\overline{\text{ss}},i'+1}.$$

On sait rsoudre cette quation et ses solutions sont dans $A_{\overline{\text{ss}}}$. Cela entrane $a_{\overline{\text{ss}},i'} = 0$ pour tout indice i' . Ainsi $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$.

Reprenons prsent l'lment $U = \pi_1^{n_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)} \pi_1 + \dots + c_{i'}^{(p-1)} \pi_1^{p-1}$. Comme on a vu que $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$, sa valuation est un lment de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Ainsi les valuations de termes non nuls intervenant dans U sont deux deux distinctes. Puisque π^{er} divise U , on en dduit qu'il divise chacun de ces termes. En particulier, cela implique :

$$\phi_{r-1}(V) = \phi_{r-1} \left(\pi^{n_{i'}} b_{i'} \right)$$

et en regardant la composante sur Y , la relation (1) implique :

$$\phi_{r-1} \left(\pi^{n_{i'}} b_{i'} \right) = b_{i'+1}$$

On a dj rsolu plusieurs fois ce systme. En particulier (c'est tout ce dont on aura besoin), $b_{i'} \in A_{\text{ss}}$ et si $b_{i'} \neq 0$, on a :

$$v(b_{i'}) \leq \frac{e(r-1)}{p}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un indice i' tel que $b_{i'} \neq 0$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$ ne fixant pas π_1 . On a $\sigma b_{i'} = b_{i'}$ et $t(\sigma) \neq 0$. On a dmontr dans le lemme 2.3.8 que $t(\sigma)$ tait congru une racine $(p-1)$ -ime de $(-p)$. En particulier, il est de valuation $\frac{e}{p-1}$. On en dduit :

$$v(b_{i'} t(\sigma)) \leq \frac{e(r-1)}{p-1} + \frac{e}{p-1} = \frac{er}{p-1} < e$$

et donc $b_{i'} t(\sigma)$ est non nul dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Mais on a l'galit :

$$\sigma a_{i'} + \sigma c_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + c_{i'}$$

qui se simplifie ici en $b_{i'}t(\sigma) = 0$. C'est une contradiction. Ainsi $b_{i'} = 0$ pour tout i .

En conclusion, l'application ψ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\psi(e_i) &= x_i \\ \psi(e'_{i'}) &= a_{i'} + a'_{i'}\end{aligned}$$

avec x_i , $a_{i'}$ et $a'_{i'}$ éléments de A_{ss} . On en déduit que ψ tombe dans A_{ss} .

Maintenant, tout élément de $\text{Hom}(\mathcal{X}, \hat{A})$ s'écrit comme une somme d'un élément de $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$ et de l'image par s d'un élément de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A})$. Ainsi on a bien prouvé que $\text{Hom}(\mathcal{X}, \hat{A}) = \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}})$ et par suite que le foncteur T_{st} est pleinement fidèle, du moins dans le cas où k est algébriquement clos.

6.4 Récapitulatif et conclusion

Récapitulons tout ce que l'on vient de voir. On a prouvé sans hypothèse sur le corps résiduel k que le foncteur T_{st} est toujours exact et fidèle. On a également prouvé, pour l'instant, que si ce corps résiduel est algébriquement clos, alors le foncteur T_{st} est également plein. En procédant comme dans le paragraphe 6.2 de [13], on peut déduire le résultat pour k quelconque du résultat pour k algébriquement clos :

Théorème 6.4.1. *Le foncteur T_{st} de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations \mathbb{Z}_p -linéaires de torsion du groupe de Galois G_K est exact et pleinement fidèle.*

Remarque. L'image essentielle du foncteur T_{st} est incluse dans la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de longueur finie de G_K comme le montre le théorème 6.4.4 que nous prouvons par la suite.

Nous pouvons finalement répondre complètement à la conjecture A.2 formulée dans [6]. Mais avant cela, nous allons noncer et prouver une propriété formelle :

Propriété 6.4.2. *Soient A et B deux catégories abéliennes et artiniennes. Soit $F : A \rightarrow B$ un foncteur additif, exact et pleinement fidèle qui est tel que l'image de tout objet simple de A est encore simple dans B . Alors l'image essentielle de F est stable par sous-objets et par quotients.*

Démonstration. On se ramène directement au cas où A est une sous-catégorie pleine de B . L'hypothèse dit que les objets simples de A restent simples dans B . En particulier si M est un objet de A et si :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = M$$

est une suite de Jordan-Hölder dans A , elle restera une suite de Jordan-Hölder dans B . Il s'agit de prouver que la catégorie A est stable par sous-objets et par quotients.

Introduisons pour cela A' la sous-catégorie pleine de A formée des objets dont tous les quotients de Jordan-Hölder sont dans B . C'est une sous-catégorie abélienne de A qui est stable par sous-objets et par quotients. Évidemment A est une sous-catégorie de A' , on peut donc supposer que $A' = B$ ou si l'on préfère que les objets simples de A' et ceux de B sont les mêmes.

Soit M un objet de A et N un sous-objet de M . En considrant des suites de Jordan-Hlder de N et de M/N , on voit que l'on peut crire une suite de Jordan-Hlder de la forme suivante :

$$0 = M_0 \subset M_1 \dots \subset M_n = N \subset M_{n+1} \subset \dots \subset M_m = M$$

Le quotient M_m/M_{m-1} est un objet simple et donc un objet de A . Par suite le noyau de la projection $M_m \rightarrow M_m/M_{m-1}$ qui s'identifie M_{m-1} est galement objet de A . Par rcurrence, on montre que tous les M_i sont objets de A et donc qu'il en est de mme de N . Ceci prouve la stabilit par sous-objets, la stabilit par quotients se traite de faon totalement identique. \square

Remarque. Cette propriit redmontre en particulier le fait que la sous-catgorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est stable par sous-objets et par quotients, puisque l'on a vu dans la proposition 3.3.4 que tous les objets simples de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ taient dans $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$.

On peut dsormais noncer le thorme qui rsout la conjecture mentionne prcdemment :

Thorme 6.4.3. *L'image essentielle du foncteur T_{st} est stable par sous-objets et par quotients et indpendante du choix de l'uniformisante π .*

Dmonstration. L'indpendance du choix de l'uniformisante est une consquence directe de la propriit 3.1.10.

Supposons k algriquement clos. On sait, par le lemme 5.3.2, que l'image par le foncteur T_{st} d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une representation irrductible. Le foncteur T_{st} vrifie les conditions de la propriit prcdente, ce qui conclut.

Pour le cas gnral, notons K^{nr} le complt p -adique de l'extension maximale non ramifie de K et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$ la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ construite partir de K^{nr} . Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il est tu par p et donc peut tre vu comme un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Il suffit de prouver que $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est une representation irrductible. Notons $\mathcal{M}_{\text{nr}} = \bar{k} \otimes_k \mathcal{M}$. L'application :

$$\begin{aligned} T_{\text{st}}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}}) \\ f &\mapsto [\lambda \otimes x \mapsto [\lambda] f(x)] \end{aligned}$$

(o $[\lambda] \in W(\bar{k}) \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est le representant de Teichmller de $\lambda \in \bar{k}$) est un isomorphisme commutant l'action de $G_{K^{\text{nr}}} = \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{nr}})$.

Supposons par l'absurde qu'il existe V un sous- \mathbb{Z}_p -module de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$, strict, non nul et G_K -quivariant. C'est aussi un sous- \mathbb{Z}_p -module de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}})$ $G_{K^{\text{nr}}}$ -quivariant et donc d'aprs le cas prcdent, on peut crire $V = T_{\text{st}}(\mathcal{C}_{\text{nr}})$ (galit de representations de $G_{K^{\text{nr}}}$) o \mathcal{C}_{nr} est un quotient de \mathcal{M}_{nr} dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$. Soit \mathcal{M}'_{nr} le noyau de la projection $\mathcal{M}_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{nr}}$, c'est un sous-objet strict et non nul de \mathcal{M}_{nr} dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{nr}}^r$.

Soient $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$ et $\hat{\sigma} \in G_K$ un prolongement de σ . Soient $\psi \in V \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ et ψ_{nr} son image dans $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}})$. L'ment $\hat{\sigma}$ agit sur ψ_{nr} de la faon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}\psi_{\text{nr}} : \mathcal{M}_{\text{nr}} &\rightarrow \hat{A} \\ s \otimes x &\mapsto s \hat{\sigma}\psi(x) \end{aligned}$$

De plus, σ d'finit un morphisme $\sigma : \mathcal{M}_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{nr}}$ dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{K^{\text{nr}}}^r$. On vrifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{nr}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{M}_{\text{nr}} \\ \sigma^{-1}\psi_{\text{nr}} \downarrow & & \downarrow \psi_{\text{nr}} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \hat{A} \end{array}$$

Comme $\psi \in V$, on a $\psi|_{\mathcal{M}'_{\text{nr}}} = 0$ et par le diagramme prcdent, $\psi|_{\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}}} = 0$.

On obtient un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{nr}}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{nr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui fournit un isomorphisme $T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{nr}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}})$, se relevant par pleine fidlit en un isomorphisme $\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{nr}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_{\text{nr}} & \longrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

On en dduit $\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}} = \mathcal{M}'_{\text{nr}}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$.

On pose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{\text{nr}} \cap \mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}'_{\text{nr}}{}^{\text{Gal}(\bar{K}^{\text{nr}}/K)}$. On va montrer que \mathcal{M}' est un sous-objet strict et non nul de \mathcal{M} dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, ce qui est une contradiction. Soit (e_1, \dots, e_d) une $k[u]/u^{ep}$ -base de \mathcal{M} . Soit $y \in \bar{\mathcal{M}}'_{\text{nr}}$, $y \neq 0$. On peut crire :

$$y = P_1(u) e_1 + \dots + P_d(u) e_d$$

o les P_i sont des polynmes coefficients dans $\ell[u]/u^{ep}$ pour ℓ une extension finie de k . D'autre part, si $P \in \ell[u]/u^{ep}$, on peut dfinir $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$ en calculant la trace de chacun des coefficients. En outre, comme ℓ/k est sparable, on peut supposer $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1) \neq 0$, quitte multiplier \bar{x} par un lment non nul de ℓ . Posons :

$$x = \text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u)) e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(P_d(u)) e_d.$$

C'est un lment de \mathcal{M} et, puisque $\sigma\mathcal{M}'_{\text{nr}} = \mathcal{M}'_{\text{nr}}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$, c'est aussi un lment de \mathcal{M}'_{nr} . Comme on a suppos $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u)) \neq 0$, on a $x \neq 0$, puis $\mathcal{M}' \neq 0$ comme on voulait.

On pose $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{nr}}$. L'oprateur $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{nr}}$ (resp. $N : \mathcal{M}'_{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{nr}}$) induit une application $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$ (resp. $N : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$). Ces applications vrifient les bonnes conditions pour dfinir un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Le seul point dlicat est le fait que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$ engendre \mathcal{M}' en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module. Soit $x \in \mathcal{M}'$. On sait qu'il existe $\lambda_i \in \bar{k}[u]/u^{ep}$ et $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{nr}}$ tels que :

$$x = \lambda_1 \phi_r(y_1) + \dots + \lambda_n \phi_r(y_n).$$

De plus, quitte rentrer les constantes l'intérieur des ϕ_r , on peut supposer que $\lambda_i = u^{s_i}$ pour certains entiers s_i . Soit (e_1, \dots, e_d) une $k[u]/u^{ep}$ -base de \mathcal{M} .crivons :

$$y_j = P_{1,j}(u)e_1 + \dots + P_{d,j}(u)e_d$$

o $P_{i,j} \in \bar{k}[u]/u^{ep}$. Soit ℓ une extension finie de k contenant tous les coefficients des polynmes $P_{i,j}$ dfinis ci-dessus. Comme prdemment, on peut dfinir $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$ pour $P \in \ell[u]/u^{ep}$. Soit $\alpha \in \ell$ un lment tel que $\text{Tr}_{\ell/k}(\alpha) = 1$. On pose :

$$x_j = \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{1,j}(u))e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{d,j}(u))e_d.$$

On a alors $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'$ et :

$$x = u^{s_1} \phi_r(x_1) + \dots + u^{s_n} \phi_r(x_n)$$

ce qui prouve bien que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$ engendre \mathcal{M}' en tant que S -module. \square

Remarque. Comme consequence du thorme prdent et de la pleine fidlitt de T_{st} , un objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ est semi-simple si et seulement si $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est une representation semi-simple.

Il rsulte de la dmonstration prdente et de l'exactitude du foncteur T_{st} le thorme suivant :

Thorme 6.4.4. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

Proposition 6.4.5. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$ pour certains entiers n_i . Alors en tant que \mathbb{Z}_p -module, $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est isomorphe $\mathbb{Z}_p/p^{n_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n_d}\mathbb{Z}_p$.*

Dmonstration. Le lemme 2.3.1.2 de [6] dit que si \mathcal{M} est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$, alors $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension $\text{rg } X$. On en dduit par exactitude du foncteur T_{st} que :

$$\text{long}_S(\mathcal{M}) = \text{long}_{\mathbb{Z}_p}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

o les longueurs sont calcules respectivement dans la catgorie des S -modules et dans celle des \mathbb{Z}_p -modules.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$. La representation galoisienne $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un \mathbb{Z}_p -module de longueur finie et donc est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -modules $\mathbb{Z}_p/p^{n'_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n'_d}\mathbb{Z}_p$ pour certains entiers n'_i . Soit n un entier. Le noyau de la multiplication par p^n sur \mathcal{M} s'envoie par le foncteur exact T_{st} sur le conoyau de la multiplication par p^n sur $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On en dduit en regardant les longueurs que :

$$\sum_{i=1}^d \min(n_i, n) = \sum_{i=1}^{d'} \min(n'_i, n).$$

Cela permet de conclure. \square

7 Consquences

7.1 Modules filtrs et modules fortement divisibles

Dfnitions

On reprend dans ce paragraphe les dfinitions et propriets du paragraphe 4.1.1 de [3].

On rappelle que K_0 dsigne le corps des fractions de W , anneau des vecteurs de Witt coefficients dans k . On dfinit $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$. C'est l'ensemble suivant :

$$S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On munit S_{K_0} d'une filtration en posant $\text{Fil}^n S_{K_0} = \text{Fil}^n S \otimes_W K_0$, ou encore :

$$\text{Fil}^n S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On prolonge de manire vidente le Frobenius et l'oprateur de monodromie dfinis sur S tout S_{K_0} .

On dfinit un *module fortement divisible* (resp. un *module filtr sur S_{K_0}*) comme la donne suivante :

1. un S -module (resp. un S_{K_0} -module) \mathcal{M} libre de rang fini ;
2. un sous- S -module (resp. un sous- S_{K_0} -module) de \mathcal{M} , not $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$ (resp. contenant $\text{Fil}^r S_{K_0} \cdot \mathcal{M}$) et tel que $\mathcal{M}/\text{Fil}^r \mathcal{M}$ soit sans p -torsion (cette dernire condition est automatique pour les modules filtrs sur S_{K_0}) ;
3. d'une fiche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrfiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

et ce pour tout lment $s \in \text{Fil}^r S$ (resp. tout lment $s \in \text{Fil}^r S_{K_0}$) et tout lment $x \in \mathcal{M}$ telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module (resp. en tant que S_{K_0} -module) ;

4. une application W -linaire (resp. une application K_0 -linaire) $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrfiant les trois conditions :
 - pour tout $s \in S$ (resp. pour tout $s \in S_{K_0}$) et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Suivant toujours [3], on d'finit de manire vidente la catgorie des modules filtrs sur S_{K_0} et celle des modules fortement divisibles. Elles sont quipes d'un foncteur vers les representations galoisiennes. Prcisment, si \mathcal{M} est un module filtr sur S_{K_0} , on pose $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{B}_{\text{st}}^+)$ o par d'finition $\hat{B}_{\text{st}}^+ = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0$ muni des structures induites et o Hom est compatible toutes les structures ; on obtient une \mathbb{Q}_p -representation de G_K . De mme si \mathcal{M} est un module fortement divisible, on d'finit $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}})$, le Hom tant encore compatible toutes les structures. On obtient une \mathbb{Z}_p -representation libre de G_K . Les rangs des representations obtenues concident avec les rangs des objets \mathcal{M} .

Si \mathcal{M} est un module fortement divisible, on vrifie immdiatement que $\mathcal{M} \otimes_W K_0$ est un module filtr sur S_{K_0} et que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$ est un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. De plus, on montre que \mathcal{M} s'identifie la limite projective de $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$, puis que $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ s'identifie la limite projective de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^n \mathcal{M})$. On dduit de la pleine fidlit prouve prcdemment le corollaire suivant :

Thorme 7.1.1. *Le foncteur T_{st} de la catgorie des modules fortement divisibles dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations (libres) de G_K est pleinement fidle.*

7.2 Modules fortement divisibles et foncteur T_{st}

Nous dmontrons dans ce paragraphe le thorme 1.0.5. En fait, nous dmontrons la formulation quivalente mais lgrement diffrente suivante :

Thorme 7.2.1. *On suppose $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un module fortement divisible sur S , et soit V la representation galoisienne associe via le foncteur T_{st} $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$ qui est un module filtr sur S_{K_0} . Le foncteur T_{st} ralise une anti-quivalence de catgories entre la catgorie des sous-modules fortement divisibles de \mathcal{M}_{K_0} et celle des sous- \mathbb{Z}_p -rseaux de V stables par G_K .*

Dmonstration. Nous suivons pas pas la preuve de la proposition 3 de [7], qui n'utilise essentiellement que la pleine fidlit du foncteur T_{st} et un quivalent du thorme 6.4.3.

Dans un premier temps, la pleine fidlit du foncteur T_{st} considre dans l'nonc du thorme se dduit directement du thorme 7.1.1.

Reste l'essentielle surjectivit. Soit T un \mathbb{Z}_p -rseau de V stable par G_K . Il existe un entier n_0 tel que :

$$p^{n_0}T \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset (1/p^{n_0})T$$

On en dduit que pour $n \geq n_0$, $p^{n_0}T/p^n T$ est un sous-objet de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})/p^n T$, ce dernier tant un quotient de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^{n+n_0} \mathcal{M})$. Le thorme 6.4.3 assure alors que $p^{n_0}T/p^n T$ s'crit $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$ pour \mathcal{M}_n un certain objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

La pleine fidlit de T_{st} assure l'existence d'une unique flche $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$ relevant la projection $p^{n_0}T/p^{n+1}T \rightarrow p^{n_0}T/p^n T$, et la limite inductive de ce systme s'identifie $\mathcal{M}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ pour un certain module fortement divisible \mathcal{M}_∞ qui rpond la question. \square

Remarque. Noter que si \mathcal{M} est un S_{K_0} -module filtr « faiblement admissible », alors il contient toujours un module fortement divisible par [6].

7.3 Variante d'une conjecture de Serre

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliquer comment le thorme donn dans l'introduction et que nous rappelons ci-dessous est consequence de la thorie presente prcdemment. Noter qu'ici, on ne suppose *a priori* plus rien ni sur e , ni sur r .

Thorme 7.3.1. *Soit X un schma propre et lisse sur K et rduction semi-stable sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K . On fixe r un entier. Les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo p de $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$ (o $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X \bar{K} et o « \star » signifie que l'on prend le dual) sont tous compris entre 0 et er .*

Dmonstration. Dans un premier temps, il est clair que l'on peut supposer $er < p - 1$, le thorme tant trivialement vrifi dans le cas contraire. On peut donc utiliser les rsultats prcdents.

D'aprs les rsultats de [21] et du paragraphe 2.2 de [9], la \mathbb{Q}_p -representation $V = H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$ (le dual tant cette fois-ci le \mathbb{Q}_p -dual) provient *via* le foncteur T_{st} d'un module filtr \mathcal{M}_{K_0} sur S_{K_0} , et d'aprs les rsultats de [6], ce module admet un sous-module fortement divisible \mathcal{M} .

D'autre part, la \mathbb{Z}_p -representation T est un rseau de V stable par Galois, et donc d'aprs le thorme 7.2.1, il existe un module fortement divisible inclus dans \mathcal{M}_{K_0} dont l'image par T_{st} est isomorphe T . Appelons \mathcal{M} un tel module.

La representation quotient T/p correspond *via* le foncteur T_{st} \mathcal{M}/p qui est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. La semi-simplifie de T/p est la somme directe de ses quotients de Jordan-Hlder, et chacun de ces quotients correspond un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Le thorme 5.2.2 permet de conclure. \square

Remarque. Si l'on prfre, on peut ne pas utiliser le thorme 7.2.1, mais dire la place que si T et T' sont deux \mathbb{Z}_p -rseaux de V stables par Galois, alors les semi-simplifies des rductions modulo p de ces deux representations sont isomorphes. On aurait donc pu garder le premier module fortement divisible \mathcal{M} .

Bibliographie

- [1] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercices*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939
- [2] L. Berger, *An introduction to the theory of p -adic representations*, paraitre dans Geometric Aspects of Dwork's Theory
- [3] C. Breuil, *Construction de representations p -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [4] ———, *Representations p -adiques semi-stables et transversalit de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [5] ———, *Cohomologie tale de p -torsion et cohomologie cristalline en rduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [6] ———, *Representation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

- [7] ———, *Une remarque sur les représentations locales p -adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. soc. math. France **127** (1999), 459–472
- [8] ———, *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549
- [9] ———, *Integral p -adic Hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80
- [10] B. Conrad, *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math. **119** (1999), 239–320
- [11] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82
- [12] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144
- [13] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608
- [14] J.M. Fontaine, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1423–1425
- [15] ———, *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adique*, Lecture notes in math. **1016** (1983), 86–108, 113–184
- [16] ———, *Le corps des priodes p -adiques*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [17] ———, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184
- [18] K. Kato, *On p -adic vanishing cycles*, Advanced Study in Pure Math. **10** (1987), 207–251
- [19] M. Raynaud, *Schmas en groupes de type (p, \dots, p)* , Bull. Soc. math. France **102** (1974), 241–280
- [20] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inventiones math. **15** (1972), 259–331
- [21] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inventiones math. **137** (1999), 233–411
- [22] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240