



**HAL**  
open science

# Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

| Xavier Caruso. Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié. 2004. hal-00002219v2

**HAL Id: hal-00002219**

**<https://hal.science/hal-00002219v2>**

Preprint submitted on 16 Sep 2004 (v2), last revised 24 Oct 2004 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié

Xavier Caruso

Mai 2004

## Abstract

Let  $K$  be a local field of mixed characteristic not absolutely ramified. Fontaine-Laffaille theory (see [Fon82]) gives a description of the torsion crystalline  $\mathbb{Z}_p$  representations of the absolute Galois group of  $K$  ( $p$  denotes the characteristic of the residual field). Improving the former works, Breuil introduced new modules and obtained an integer and torsion theory for the semi-stable representations (see [Bre97a]).

In this paper, we follow Breuil's works and adapt them to the case where the local field  $K$  can be absolutely ramified. However, we would have a limitation on the index of absolute ramification.

## Résumé

Soit  $K$  un corps local de caractéristique mixte non absolument ramifié. La théorie de Fontaine-Laffaille (voir [Fon82]) permet de décrire les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations galoisiennes cristallines entières de torsion ( $p$  désigne la caractéristique du corps résiduel). Poursuivant les précédents travaux, Breuil a introduit de nouveaux modules et a obtenu une théorie entière et de torsion pour les représentations semi-stables (voir [Bre97a]).

Dans cet article, nous reprenons les travaux de Breuil et les adaptons dans le cas où le corps local  $K$  peut être absolument ramifié. Nous aurons toutefois une contrainte sur l'indice de ramification absolu.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Présentation des objets</b>	<b>4</b>
2.1	La catégorie $\mathcal{M}^r$ et ses variantes . . . . .	5
2.2	Le foncteur vers les représentations galoisiennes . . . . .	6
2.3	Les objets tus par $p$ . . . . .	8

ccsd-00002219, version 2 - 16 Sep 2004

<b>3</b>	<b>Gnralits sur les catgories <math>\mathcal{M}^r</math> et <math>\widetilde{\mathcal{M}}^r</math></b>	<b>13</b>
3.1	Indpendance du choix de l'uniformisante . . . . .	13
3.2	Description des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . . . . .	20
3.3	La catgorie $\widetilde{\text{MF}}^r$ . . . . .	24
3.4	Un mot sur le cas $r = 1$ . . . . .	27
3.5	Des catgories abliennes et artiniennes . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Classification des objets simples</b>	<b>30</b>
4.1	La monodromie . . . . .	30
4.2	Une base adapte simple . . . . .	31
4.3	Classification proprement dite . . . . .	32
<b>5</b>	<b>tude du foncteur <math>T_{\text{st}}</math></b>	<b>34</b>
5.1	Un systme prliminaire . . . . .	34
5.2	Calcul sur les objets simples . . . . .	38
5.3	Exactitude et fidlit . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Pleine fidlit du foncteur <math>T_{\text{st}}</math></b>	<b>40</b>
6.1	Le module $A_{\text{ss}}$ . . . . .	40
6.2	Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$ . . . . .	44
6.3	Fin de la preuve . . . . .	45
6.4	Rcapitulatif et conclusion . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Consquences</b>	<b>52</b>
7.1	Modules filtrs et modules fortement divisibles . . . . .	52
7.2	Modules fortement divisibles et foncteur $T_{\text{st}}$ . . . . .	53
7.3	Variante d'une conjecture de Serre . . . . .	54

# 1 Introduction

Dans toute la suite de ce papier,  $p$  dsigne un nombre premier et  $k$  un corps parfait de caractristique  $p$ . On note  $\bar{k}$  une clture algbrique de  $k$ ,  $\mathbb{F}_p$  le sous-corps premier de  $k$  et si  $q = p^h$  est une puissance de  $p$ ,  $\mathbb{F}_q$  l'ensemble des solutions dans  $\bar{k}$  de l'quation  $x^q = x$ .

On dsigne par  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans  $k$ . On rappelle que comme  $k$  est parfait, cet anneau est un anneau de valuation discrte complet de caractristique nulle dont  $p$  est une uniformisante et dont le corps rsiduel s'identifie canoniquement  $k$ . On dispose en outre d'une application  $\sigma : W \rightarrow W$  appele Frobenius qui induit par passage au quotient le Frobenius classique sur  $k$ , c'est--dire l'lvation la puissance  $p$ .

On appelle  $K_0$  le corps des fractions de  $W$ , c'est un corps local de caractristique mixte. On prend  $K$  une extension finie totalement ramifie de  $K_0$ . On note  $e$  le degr de l'extension  $K/K_0$ , c'est l'indice de ramification absolue de  $K$ . On appelle  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$  et on choisit  $\pi$  une uniformisante de cet anneau. On fixe  $\bar{K}$  une clture algbrique de  $K$ , on note  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  l'anneau des entiers de  $\bar{K}$  et  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  le groupe de Galois absolu du corps  $K$ . On note  $I$  le groupe d'inertie (c'est un sous-groupe de  $G_K$ ),  $I_s$  le groupe d'inertie sauvage

et  $I_t = I/I_s$  le groupe d'inertie modre. Enfin, on appelle  $v$  la valuation sur  $\bar{K}$  normalisee par  $v(\pi) = 1$  (et donc  $v(p) = e$ ).

Une  $\mathbb{Z}_p$ -representation (resp.  $\mathbb{F}_p$ -representation, resp.  $\mathbb{F}_q$ -representation, resp.  $\mathbb{Q}_p$ -representation) de  $G_K$  est une action lineaire et continue de  $G_K$  sur un  $\mathbb{Z}_p$ -module (resp. un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel, resp. un  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel, resp. un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel). Afin d'etudier ces representations, diverses categories ont ete introduites. Nous allons nous occuper dans ce papier des categories  $\underline{\mathcal{M}}^r$  introduites par Breuil dans [Bre99a], et nous montrerons comment il resulte de notre etude le theoreme 1.0.1 ci-dessous.

Avant de l'annoncer, faisons quelques rappels (pour plus de precisions, voir le paragraphe 1 de [Ser72]). Soient  $h$  un entier et  $q = p^h$ . Notons  $\hat{V} = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} / x^{p^h} = \pi x\}$  et  $V \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  la reduction modulo  $p$  de  $\hat{V}$ . L'espace  $V$  est une  $\mathbb{F}_p$ -representation de  $G_K$ . De plus  $V$  herite naturellement d'une structure de  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension 1 et fournit un caractere  $I \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$  qui se factorise par  $\theta : I_t \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ . On pose  $\theta_i = \theta^{p^i}$ , ce sont les *caracteres fondamentaux de niveau  $h$* . Toute  $\mathbb{F}_p$ -representation irreductible de dimension  $d$  du groupe d'inertie modre s'ecrit comme un produit de caracteres fondamentaux de niveau  $h$  (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [Ser72]).

**Theoreme 1.0.1.** *Soit  $X$  un schma propre et lisse sur  $K$  reduction semi-stable sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ . On fixe  $r$  un entier. Les exposants qui decrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo  $p$  de  $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^\star$  (o  $X_{\bar{K}}$  est l'extension des scalaires de  $X$  sur  $\bar{K}$  et o «  $\star$  » signifie que l'on prend le dual) sont compris entre 0 et  $er$ .*

Ce theoreme est rapproche d'une conjecture formulee par Serre dans le paragraphe 1.13 de [Ser72] qui prdit le mme resultat pour la representation  $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$ . A l'heure actuelle, cette conjecture est connue dans le cas  $r = 1$  bonne reduction ([Ray74]), le cas non ramifiee bonne reduction ([Fon82], [Kat87]), le cas non ramifiee reduction semi-stable ([Bre98]) et le cas  $r = 1$  ([Bre00]). Le resultat donn ici ne fait aucune hypothese ni sur  $e$ , ni sur  $r$ . Remarquons toutefois qu'il est vide pour  $er \geq p - 1$ .

Soit  $r$  un entier verifiant  $er < p - 1$ . Nous presentons dans le chapitre 2, la categorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  et le foncteur  $T_{\text{st}}$  qui associe tout objet de cette categorie une  $\mathbb{Z}_p$ -representation de torsion de  $G_K$ . Le chapitre 3 est consacree a l'etude de la categorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . En particulier, toujours dans le cas  $er < p - 1$ , on demontre qu'elle est abelienne et artinienne.

Nous donnons ensuite dans le chapitre 4 une description complete des objets simples de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ , lorsque le corps residuel  $k$  est supposee algebriquement clos. Plus precisement nous prouvons le theoreme suivant :

**Theoreme 1.0.2.** *Supposons  $k$  algebriquement clos et  $er < p - 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Alors, il existe une base  $(e_1, \dots, e_h)$  de  $S$  et une suite d'entiers  $(n_i)$  compris entre 0 et  $er$ , periodique de periode exactement  $h$ , le tout tel que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h + \text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M},$$

$\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$  et  $N(e_i) = 0$  pour tout  $i$  (considere modulo  $d$ ).

En outre, ces objets sont tous simples et deux a deux non isomorphes.

Par la suite, nous nous intéressons véritablement au foncteur  $T_{st}$ . On commence par déterminer son image sur les objets simples précédemment calculés. On obtient le thorme :

**Thorme 1.0.3.** *Supposons  $k$  algébriquement clos et  $er < p - 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  comme dans le thorme 1.0.2. Alors la représentation galoisienne  $T_{st}(\mathcal{M})$  est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

où  $m_i$  est défini par  $n_i + m_i = er$  et où les  $\theta_i$  sont les caractères fondamentaux de niveau  $h$ .

En particulier, pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tu par  $p$ , les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modère sur la semi-simplifiée modulo  $p$  de  $T_{st}(\mathcal{M})$  sont compris entre 0 et  $er$ .

La conclusion des chapitres 5 et 6 est une réponse affirmative à une conjecture formulée à la fin de [Bre99a], nonc que nous rappelons ici :

**Thorme 1.0.4.** *Supposons  $er < p - 1$ , alors le foncteur  $T_{st}$  de la catégorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dans la catégorie des représentations linaires de  $G_K$  est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objets et quotients et indépendante du choix de l'uniformisante  $\pi$ .*

Le chapitre 7 étudie les conséquences de tout ce travail préliminaire. On commence par répondre à un cas particulier d'une conjecture formulée dans [Bre02] (conjecture 2.2.6) :

**Thorme 1.0.5.** *Supposons  $er < p - 1$ . Alors le foncteur  $T_{st}$  réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles<sup>1</sup> et la catégorie des réseaux stables par Galois dans les  $\mathbb{Q}_p$ -représentations semi-stables de  $G_K$  poids de Hodge Tate compris entre 0 et  $r$ .*

On donne ensuite une preuve du thorme 1.0.1.

Ce travail a été accompli dans le cadre de ma thèse de doctorat en mathématique que je prépare sous la direction de Christophe Breuil. Je tiens à le remercier vivement ici pour les conseils, les explications et les réponses qu'il a toujours su me fournir, ainsi que pour la relecture patiente des versions préliminaires de ce texte.

## 2 Présentation des objets

Tous les objets introduits dans cette partie ne sont pas nouveaux et présents plus en détail dans les articles [Bre97a] et [Bre99a]. La première de ces références n'étudie que le cas  $e = 1$ , et donc ne présente les objets que dans ce cas particulier.

On fixe maintenant et jusqu'à la fin de cet article un entier  $r$  positif ou nul vérifiant l'inégalité  $er < p - 1$ . Les définitions que nous allons donner ont un sens pour tout entier  $r < p - 1$  mais certains thormes ne sont plus vérifiés lorsque  $er \geq p - 1$ .

<sup>1</sup>Voir le paragraphe 7.1 pour une définition.

## 2.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et ses variantes

### L'anneau $S$

On commence par définir un anneau que l'on va munir de structures supplémentaires. Bien que ces structures dépendent du corps  $K$  et de l'uniformisante  $\pi$  choisie, nous le notons simplement  $S$  par la suite.

Soit  $W[u]$  l'anneau des polynômes en une indéterminée  $u$  coefficients dans  $W$ . Soit  $E(u)$  le polynôme minimal de l'élément  $\pi$  sur  $K_0$ , c'est un polynôme d'Eisenstein. On considère l'enveloppe puissances divisées de  $W[u]$  par rapport à l'idéal principal engendré par  $E(u)$  compatibles aux puissances divisées canoniques sur  $pW[u]$ . On rappelle que cela signifie que l'on ajoute formellement à l'anneau  $W[u]$  les éléments  $\frac{(E(u))^i}{i!}$ . En tant qu'anneau,  $S$  est le complété  $p$ -adique de cette enveloppe puissances divisées. De façon plus terre-à-terre,  $S$  est la sous- $W$ -algèbre de  $K_0[[u]]$  suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

où  $q(i)$  désigne le reste de la division euclidienne de  $i$  par  $e$ ,  $e$  étant l'indice de ramification absolue de corps  $K$ , également le degré du polynôme  $E(u)$ .

On prolonge le Frobenius à l'anneau  $S$  en définissant l'application  $\phi$  par :

$$\phi \left( \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(w_i) \frac{u^{pi}}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une application  $\sigma$ -semi-linéaire.

On munit en outre  $S$  de l'application  $W$ -linéaire  $N$  définie par :

$$N \left( \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = - \sum_{i=1}^{\infty} i w_i \frac{u^i}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une dérivation au sens classique mais pas de la dérivation classique par rapport à  $u$ , le degré du polynôme n'étant pas abaissé.

On munit finalement  $S$  d'une filtration : pour tout entier positif ou nul  $n$ , on définit  $\text{Fil}^n S$  comme le complété  $p$ -adique de l'idéal engendré par les éléments  $\frac{(E(u))^i}{i!}$  pour  $i \geq n$ . On a donc :

$$\text{Fil}^n S = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

Il est évident que  $\text{Fil}^0 S = S$ , que  $\text{Fil}^n S \subset \text{Fil}^{n-1} S$  et que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}^n S = 0$ . On vérifie de plus certaines compatibilités avec les opérateurs définis précédemment :  $N(\text{Fil}^n S) \subset \text{Fil}^{n-1} S$  et, pour  $0 \leq n \leq p-1$ ,  $\phi(\text{Fil}^n S) \subset p^n S$ . Ainsi, si  $0 \leq n \leq p-1$ , on pose  $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \text{Fil}^n S \rightarrow S$ . L'élément  $\phi_1(E(u))$  est une unité de  $S$ , on le notera  $c$  par la suite.

## Dfinition des catgories

On rappelle que  $r$  est un entier fix vrifiant  $er < p - 1$ . Un objet de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  est la donne :

1. d'un  $S$ -module  $\mathcal{M}$  isomorphe une somme directe (finie) de  $S/p^n S$  pour des entiers  $n$  convenables ;
2. d'un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$  ;
3. d'une flche  $\phi$ -semi-linaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vrifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

pour tout lment  $s \in \text{Fil}^r S$  et tout lment  $x \in \mathcal{M}$  et telle que  $\text{im } \phi_r$  engendre  $\mathcal{M}$  en tant que  $S$ -module ;

4. d'une application  $W$ -linaire  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que :
  - pour tout  $s \in S$  et tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
  - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
  - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Une flche entre deux objets  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  de cette catgorie est un morphisme  $S$ -linaire de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}'$  respectant la filtration et commutant aux applications  $\phi_r$  et  $N$ .

On peut dfinir galement la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ . Il s'agit de la mme chose sauf que l'on ne fait pas cas de l'application  $N$ , les objets sont donc la donne des trois premiers points expos prcdemment.

## 2.2 Le foncteur vers les reprsentations galoisiennes

### L'anneau $A_{\text{cris}}$

Soit  $R$  l'anneau limite projective du diagramme :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow$$

les applications de transition tant chaque fois l'lvation la puissance  $p$ . Un lment de  $R$  est une suite  $(u^{(k)})_{k \geq 1}$  d'lments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  telle que pour tout entier  $k$ ,  $(u^{(k+1)})^p = u^{(k)}$ .

On considre  $W(R)$  l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans  $R$  et l'application suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : W(R) &\rightarrow \mathbb{C}_p \\ (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) &\mapsto \sum_{n \geq 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{aligned}$$

o  $\mathbb{C}_p$  dsigne le complt  $p$ -adique de  $\bar{K}$  et o  $\hat{x}_n^{(n)}$  est la limite quand  $m$  tend vers l'infini d'une suite  $(\hat{a}_n^{(n+m)})^{p^m}$ ,  $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  dsignant un relev quelconque de  $a_i^{(j)}$ .

On montre (pour une preuve simple, voir le paragraphe II.2.2 de [Ber]) que le noyau de  $\hat{\theta}$  est l'idal principal de  $W(R)$  engendr par l'element  $\xi = [\underline{p}] - p$ , o  $[\underline{p}]$  est le representant de Teichmller de  $\underline{p} \in R$  dfini par  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n, \dots)$ , les  $p_n$  formant un systme compatible de racines  $p^n$ -imes de  $p$ . L'anneau  $A_{\text{cris}}$  s'obtient en introduisant des puissances divises en  $\xi$ , et en comptant  $p$ -adiquement :

$$A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

L'anneau  $A_{\text{cris}}$  hrite d'un Frobenius  $\phi$  et d'une action du groupe de Galois  $G_K$  dfinis *via* leur action sur  $W(R)$ . On munit galement  $A_{\text{cris}}$  d'une filtration dcroissante dfinie de la faon suivante :

$$\text{Fil}^n A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq n} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset A_{\text{cris}}.$$

### L'anneau $\hat{A}_{\text{st}}$

L'anneau  $\hat{A}_{\text{st}}$  s'obtient en comptant  $p$ -adiquement la PD-algre polynomiale  $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$  :

$$\hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

On tend le Frobenius et l'action de Galois  $\hat{A}_{\text{st}}$  de la faon suivante. On pose  $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$ . Soit  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$  un systme compatible de racines  $p^n$ -ime de l'unit formisante<sup>2</sup>  $\pi$  et soit  $g \in G_K$ . Pour tout entier  $n$ , il existe  $\varepsilon_n(g)$  une racine  $p^n$ -ime de l'unit telle que  $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g) \pi_n$ . La suite  $[\varepsilon_n(g)]$  dfnit un lment  $[\underline{\varepsilon}(g)] \in A_{\text{cris}}$ . L'lment  $g$  agit sur  $X$  par  $g(X) = [\underline{\varepsilon}(g)]X + [\underline{\varepsilon}(g)] - 1$ . La filtration sur  $\hat{A}_{\text{st}}$  est obtenue en faisant le produit de convolution de la filtration de  $A_{\text{cris}}$  par la filtration naturelle donne par les puissances divises en  $X$  :

$$\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in \text{Fil}^{n-i} A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset \hat{A}_{\text{st}}$$

avec la convention  $\text{Fil}^k A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$  si  $k < 0$ . Pour  $n \leq p - 1$ ,  $\phi(\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}) \subset p^n \hat{A}_{\text{st}}$  et on pose  $\phi_n = \frac{\phi}{p^n}|_{\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}}$ .

On munit finalement  $\hat{A}_{\text{st}}$  d'un opérateur de monodromie  $N$  dfini comme l'unique drivation continue  $A_{\text{cris}}$ -linaire telle que  $N(X) = 1 + X$ .

L'anneau  $\hat{A}_{\text{st}}$  n'est pas sans lien avec  $S$  : dans [Bre97b], Breuil prouve que le morphisme de  $W$ -algbres  $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$ ,  $u \mapsto \frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$  ( $[\underline{\pi}]$  dsigne le representation de Teichmller de  $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n, \dots) \in R$ ,  $\bar{\pi}_i$  tant la rduction modulo  $p$  de  $\pi_i$ ) identifie  $S$  avec l'ensemble  $\hat{A}_{\text{st}}^{G_K}$  des invariants de  $\hat{A}_{\text{st}}$  sous l'action du groupe de Galois. En outre, ce morphisme fait de  $\hat{A}_{\text{st}}$  un  $S$ -module. Toutefois,  $\hat{A}_{\text{st}}$  ne vrifie pas les proprits necessaires pour tre un objet de la catgorie  $\mathcal{M}^r$ .

---

<sup>2</sup>Ainsi l'anneau  $\hat{A}_{\text{st}}$  dpend *a priori* du choix de ce systme compatible de racines. Cependant, on prouve que ce n'est pas le cas.



## Le foncteur $T_{\text{st}}$

On pose  $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$ . L'action du groupe de Galois, le Frobenius, la filtration et la monodromie s'étendent à  $\hat{A}_{\text{st},\infty}$  car  $\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} \cap p^r \hat{A}_{\text{st}} = p^r \text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}$ . En outre, pour la même raison, si  $r < p - 1$ , l'objet  $\hat{A}_{\text{st},\infty}$  hérite de  $\phi_r$ . Ce n'est toutefois pas un objet de la catégorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  : il n'est pas de longueur finie en tant que  $S$ -module, et l'image de  $\phi_r$  n'engendre pas tout l'espace. Il est quand même légitime de considérer l'ensemble des morphismes d'un objet  $\mathcal{M}$  de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dans  $\hat{A}_{\text{st},\infty}$  et on définit :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st},\infty})$$

le Hom précédent signifiant que l'on prend les morphismes compatibles au  $\text{Fil}^r$ , au Frobenius et l'opération de monodromie. Cet ensemble est naturellement une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation galoisienne de torsion, tuée par la puissance de  $p$  qui annule  $\mathcal{M}$ .

Notre but est principalement d'étudier le foncteur  $T_{\text{st}}$ , et pour ce faire, nous allons quasiment toujours procéder par dévissage en regardant dans un premier temps les objets tués par  $p$ , que nous étudions dans le paragraphe suivant.

## 2.3 Les objets tués par $p$

### Les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

L'anneau qui va être important ici est  $k[u]/u^{ep}$  qui est relié de près à  $S/pS$ . Sur cet anneau, on définit une filtration par  $\text{Fil}^n k[u]/u^{ep} = u^{en} k[u]/u^{ep}$ , un Frobenius  $\phi$  par  $\phi(\sum w_i u^i) = \sum w_i^p u^{ip}$  (pour  $\lambda_i \in k$ ) et un opérateur de monodromie  $N$  comme l'unique dérivation  $k$ -linéaire vérifiant  $N(u) = -u$

On définit ensuite la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  : les objets sont les données des quatre points qui suivent :

1. un  $k(u)/u^{ep}$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini ;
2. un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r k[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{M} = u^{er} \mathcal{M}$  ;
3. une flèche  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que l'image de  $\phi_r$  engendre  $\mathcal{M}$  en tant que  $k[u]/u^{ep}$ -module ;
4. une application  $k$ -linéaire  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que :
  - pour tout  $\lambda \in k[u]/u^{ep}$  et tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
  - $u^e N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
  - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

On introduit également la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$  définie comme  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  sauf que l'on oublie la donnée de l'opérateur  $N$ .

On peut comparer les objets de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tués par  $p$  et ceux de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . On commence pour cela par comparer les anneaux  $S/pS$  et  $k[u]/u^{ep}$ , simplement grâce à l'application  $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$

qui envoie  $u$  sur  $u$  et toutes les puissances divisées de la forme  $\frac{u^{ei}}{i!}$  pour  $i \geq p$  sur 0. Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tu par  $p$ , c'est naturellement un  $S/pS$ -module (mme libre de rang fini), et on peut donc considérer le produit tensoriel  $T(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{(\sigma)} k[u]/u^{ep}$  qui hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'une monodromie et dont on vérifie qu'il est dans  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Si  $E(u) = u^e - p$  (ce que l'on peut supposer sans perte de généralité en vertu du corollaire 3.1.9), cette construction définit un foncteur  $T$  allant de la sous-catégorie pleine de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  formée des objets tus par  $p$  dans la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ .

**Proposition 2.3.1.** *Le foncteur  $T$  défini précédemment est une équivalence de catégories.*

**Démonstration.** Elle est en tout point similaire à celle donnée pour la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a].  $\square$

On obtient ainsi une description plus simple des objets de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tus par  $p$ , les objets de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  pouvant être vus comme des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie.

### Description du quotient $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$

Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tel que  $p\mathcal{M} = 0$ . Alors  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}}/p)$ . Nous allons dans un premier temps décrire explicitement le quotient  $\hat{A}_{\text{st}}/p$ .

On rappelle que l'on a défini un élément  $\underline{p} \in R$ . De même, on définit l'élément  $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_n) \in R$ , en rappelant que les  $\pi_i$  forment un système compatible de racines  $p^i$ -èmes de l'uniformisante  $\pi$  et que les  $\bar{\pi}_i$  correspondent à leur réduction modulo  $p$ .

On a le résultat suivant (voir paragraphe 3.7 de [Fon83]) :

**Lemme 2.3.2.** *Avec les notations précédentes,  $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$  s'identifie à l'enveloppe aux puissances divisées  $R^{PD}$  de  $R$  par rapport à l'idéal principal engendré par  $\underline{p}$ . En outre, on peut également identifier cet anneau  $R[X_i]/(\underline{p}^p, X_i^p)_{i \geq 1}$ , l'isomorphisme envoyant  $X_i$  sur la  $p^i$ -ième*

*puissance divisée  $\frac{[p]^{p^i}}{(p^i)!} \in A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ .*

La première projection  $R \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  induit un isomorphisme  $R/\underline{p}^p R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On déduit du lemme précédent que  $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i]/X_i^p$ ,  $i$  décrivant l'ensemble des entiers strictement positifs. Finalement on voit que  $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$  s'identifie à l'anneau suivant :

$$(\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i] \langle X \rangle) / (p, X_i^p)_{i \geq 1}.$$

On rappelle que  $p_1$  est une racine  $p$ -ième de  $p$ . Via les identifications précédentes, et pour  $n < p$ ,  $\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$  est le  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ -module engendré par les  $p_1^{n-i} \frac{X^i}{i!}$  (pour  $i \leq n$ ), les  $\frac{X^i}{i!}$  (pour  $i > n$ ) et les  $X_i$  (pour  $i \geq 1$ ). On a  $\phi_r(X_i) = 0$  et  $\phi_1(X) = \frac{(1+X)^{p-1}}{p} = Y$ . La monodromie est l'unique dérivation  $(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$ -linéaire et continue  $N$  qui envoie  $\frac{X^i}{i!}$  sur  $(1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ .

### Description du foncteur $T_{\text{st}}$

Nous supposons nouveau dans ce sous-paragraphe que le polynme  $E(u)$  est donn par  $E(u) = u^e - p$ , ce qui nous permet de considrer le foncteur  $T$ . Nous cherchons faire le transport *via* le foncteur  $T$  pour voir comment le foncteur  $T_{\text{st}}$  se ralise travers la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . L'objet calculer est le produit tensoriel  $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ . Pour cela, on dfinit  $\hat{A} = (O_{\bar{K}}/p) \langle X \rangle$ . On a un morphisme de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  :

$$\text{pr} : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}$$

donn, *via* la description prcdente, par  $\text{pr}(X) = X$  et  $\text{pr}(X_i) = 0$  pour tout  $i$ . On vrifie que  $\text{pr}$  est  $S/pS$ -linaire. D'autre part, on a une inclusion  $S/pS$ -linaire :

$$i : k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}$$

dfinie par  $i(1) = 1$ . On peut former le produit :

$$\text{pr} \cdot i : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}.$$

**Lemme 2.3.3.** *L'application prcdente est un isomorphisme.*

**Dmonstration.** La surjectivit est immdiate. Comme  $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$  est surjectif, tout lment de  $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$  s'crit  $x \otimes 1$  avec  $x \in \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ . Pour vrifier l'injectivit, il suffit donc de voir que  $(\ker \text{pr}) \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} = 0$  mais ceci rsulte directement de :

$$X_i \otimes 1 = \frac{\pi_1^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = \frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = 1 \otimes \sigma \left( \frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \right) = 0.$$

□

On construit une application :

$$\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$$

dduite de la tensorisation par  $k[u]/u^{ep}$  au-dessus de  $S/pS$ .

**Lemme 2.3.4.** *L'application prcdente est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -modules galoisiens.*

**Dmonstration.** Commenons par l'injectivit. Soit  $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty})$  induisant par tensorisation l'application nulle  $T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}, \infty} \\ x \mapsto 1 \otimes x \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{0} & \hat{A} \end{array}$$

d'o  $\text{im } \psi \subset \ker \text{pr}$ . On vrifie facilement que  $\phi_r(\ker \text{pr}) = 0$ . Comme  $\psi$  commute  $\phi_r$  et  $\phi(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$ , on en dduit  $\psi = 0$ . L'application  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$  est injective.

Pour la surjectivité, notons  $T(\mathcal{M})_0$  l'image de  $\phi_r$  sur  $T(\mathcal{M})$ . La preuve de la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a] fournit l'isomorphisme :

$$\mathcal{M} \simeq T(\mathcal{M})_0 \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS.$$

Soit  $\bar{\psi} : T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$ . D'après l'isomorphisme précédent, elle induit une application  $S/pS$ -linéaire  $\mathcal{M} \rightarrow \hat{A} \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS$ , et ce dernier module s'envoie de façon naturelle dans  $\hat{A}_{\text{st}, \infty}$ . On vérifie finalement que l'application composée commute  $\text{Fil}^r$ ,  $\phi_r$  et  $N$  et relève  $\bar{\psi}$ .  $\square$

### Description de l'anneau $\hat{A}$

**Lemme 2.3.5.** *Soit  $R$  un anneau dans lequel tous les entiers premiers  $p$  sont inversibles. Alors on a un isomorphisme :*

$$(R[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p) \longrightarrow (R \langle X \rangle) / p$$

envoyant  $X'$  sur  $X + 1$  et  $\frac{Y^i}{i!}$  sur  $\frac{1}{i!} \left( \frac{(X+1)^p - 1}{p} \right)^i$ .

**Démonstration.** D'abord, l'application précédente, disons  $\psi$ , est bien définie : on a  $(1 + X)^p \equiv 1 + X^p \equiv 1 \pmod{p}$ .

Pour prouver que  $\psi$  est un isomorphisme, on remarque que chacun des objets intervenant est un  $R/p$ -module libre et que  $\psi$  est  $R/p$ -linéaire. Une base du module source est donnée par la famille  $\left( X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right)_{0 \leq i \leq p-1, j \geq 0}$ . Le module but admet pour base la famille  $\left( \frac{X^n}{n!} \right)_{n \geq 0}$ . L'image par  $\psi$  de l'élément  $X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!}$  est :

$$\psi \left( X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right) = (1 + X)^i \cdot \frac{\left( \frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^j}{j!}.$$

Le terme dominant de cette dernière expression est  $\frac{X^{pj+i}}{p^j j!}$  et si on note  $v_p$  la valuation  $p$ -adique normalisée par  $v_p(p) = 1$ , on a :

$$v_p((pj + i)!) = j + v_p(j!) = v_p(p^j j!)$$

puisque  $i < p$ . Comme les entiers premiers  $p$  sont par hypothèse inversibles dans  $R$ , l'égalité précédente assure qu'il existe un élément inversible  $\alpha \in R/p$  tel que  $p^j j! = \alpha (pj + i)!$ . Ainsi la « matrice » représentant l'application  $\psi$  dans les bases données ci-dessus est triangulaire et les termes diagonaux sont tous inversibles. Cela prouve que  $\psi$  est bijective.  $\square$

L'anneau  $\mathcal{O}_{\bar{k}}$  vérifie les hypothèses du lemme que l'on vient de prouver ; on obtient donc le corollaire suivant qui donne une nouvelle description relativement explicite de l'anneau  $\hat{A}$  :

**Corollaire 2.3.6.** *On a un isomorphisme :*

$$\hat{A} \rightarrow (\mathcal{O}_{\bar{k}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

En outre l'opérateur de monodromie s'exprime simplement sur cette description : on a  $N(X') = X'$  et  $N\left(\frac{Y^i}{i!}\right) = \frac{Y^{i-1}}{(i-1)!}$ .

## Action de Galois sur l'anneau $\hat{A}$ .

On va dterminer l'action de Galois sur les lments  $X'$  et  $Y$ . Pour  $X'$  c'est facile puisque par dfnition on a  $g(X') = \varepsilon(g) X'$  pour tout  $g \in G_K$ .

Pour  $Y$ , on pourrait tre tent d'crire :

$$g(Y) = \frac{\varepsilon(g)^p (1 + X)^p - 1}{p} = Y$$

mais on n'a pas le droit de faire ce calcul cause de la division par  $p$ . Ce qu'il faut, c'est choisir un relev de  $Y$  dans  $\hat{A}_{\text{st}}$ , calculer l'action de Galois sur ce relev et voir quel lment correspond dans  $\hat{A}$ .

Comme relev, on pourrait choisir  $\frac{(1+X)^p-1}{p}$  mais on choisit ici :

$$\log(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{X^i}{i} + \dots \in \hat{A}_{\text{st}}$$

Soit  $g \in G_K$ . On a  $g \log(1 + X) = \log(g(1 + X)) = \log([\underline{\varepsilon}(g)](1 + X)) = g(Y) = Y + \hat{t}(g)$   
o :

$$\hat{t}(g) = \log([\underline{\varepsilon}(g)]) = [\underline{\varepsilon}(g)] - \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^2}{2} + \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^i}{i} + \dots \in A_{\text{cris}}$$

Nous allons dterminer l'image  $t(g)$  de  $\hat{t}(g)$  dans  $\hat{A}$ . Remarquons que comme  $\hat{t}(g) \in A_{\text{cris}}$ , on a simplement  $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . Nous allons prouver qu'il s'agit d'une racine  $(p-1)$ -ime de  $(-p)$ .

**Lemme 2.3.7.** *Avec les notations prcdentes,  $t(g)$  est l'image dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  de :*

$$-\frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p}$$

o  $\varepsilon(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  est la racine  $p$ -ime de l'unit telle que  $g(\pi_1) = \varepsilon(g) \pi_1$ .

**Dmonstration.** Il est plus pratique ici d'crire les choses sous la forme suivante :

$$Y - \frac{X^p}{p} = \frac{X'^p - 1 - (X' - 1)^p}{p}$$

et de dvelopper :

$$Y - \frac{X^p}{p} = a_1 X' + a_2 X'^2 + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$$

avec  $a_i = \frac{(-1)^i C_p^i}{p}$ . En appliquant  $g$ , on obtient :

$$gY - g\left(\frac{X^p}{p}\right) = a_1 [\varepsilon(g)] X' + a_2 [\varepsilon(g)]^2 X'^2 + \dots + a_{p-1} [\varepsilon(g)]^{p-1} X'^{p-1}$$

d'o dans  $\hat{A}$  :

$$t(g) \equiv g\left(\frac{X^p}{p}\right) - \frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

Comme on sait que  $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ , il suffit pour conclure de prouver que  $g\left(\frac{X^p}{p}\right)$  est nul modulo  $X$ . Mais dans  $\hat{A}_{\text{st}}$ , on a  $g\left(\frac{X^p}{p}\right) = \frac{([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)-1)^p}{p}$  et donc modulo  $X$ , on obtient :

$$g\left(\frac{X^p}{p}\right) \equiv \frac{([\underline{\varepsilon}(g)] - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

On conclut en remarquant que  $[\underline{\varepsilon}(g)] - 1 \in \ker \hat{\theta}$ . □

**Lemme 2.3.8.** *L'element  $t(g)$  est soit nul soit gal dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  la rduction modulo  $p$  d'une racine  $(p-1)$ -ime de  $(-p)$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ .*

**Dmonstration.** Supposons  $t(g) \neq 0$ . Prouvons d'abord que  $t(g)^{p-1} \equiv -p \pmod{p^2}$ . D'aprs le lemme 2.3.7, cela revient montrer que :

$$(\varepsilon(g) - 1)^{p(p-1)} \equiv -p^p \pmod{p^{p+1}}.$$

Modulo  $1 + X + \dots + X^{p-1}$ , le polynme  $(X-1)^{p-1}$  s'crit  $a_0 + a_1X + \dots + a_{p-2}X^{p-2}$  avec  $a_i = (-1)^i C_{p-1}^i - 1$ . On vrifie que  $a_i$  est un multiple de  $p$  et on pose  $b_i = \frac{a_i}{p}$ . En levant la puissance  $p$ , on obtient :

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1X + \dots + b_{p-2}X^{p-2})^p \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}}$$

d'o

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2}) \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}, p^{p+1}}.$$

Il ne reste plus qu' vrifier que  $b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2} = -1$  pour conclure.

Notons  $\eta_1, \dots, \eta_{p-1} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  les racines  $(p-1)$ -imes de  $(-p)$ . On a :

$$(t(g) - \eta_1) \dots (t(g) - \eta_{p-1}) = 0 \pmod{p^2}$$

ou encore  $v(t(g) - \eta_1) + \dots + v(t(g) - \eta_{p-1}) \geq 2e$ . Il existe donc  $i$  tel que  $v(t(g) - \eta_i) \geq \frac{2e}{p-1}$ . De plus pour tout  $i$ ,  $v(\eta_i) = \frac{e}{p-1}$  et pour  $i \neq j$ ,  $v(\eta_i - \eta_j) = \frac{e}{p-1}$  car deux racines  $(p-1)$ -imes de l'unit sont encore distinctes dans le corps rsiduel. Il vient, si  $j \neq i$ ,  $v(t(g) - \eta_j) = v((t(g) - \eta_i) + (\eta_i - \eta_j)) = \frac{e}{p-1}$ , puis  $v(t(g) - \eta_i) \geq \left(2 - \frac{p-2}{p-1}\right)e \geq e$ . Cela conclut. □

### 3 Gnralits sur les catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Outre de nombreuses explicitations, cette partie a pour but de dmontrer les deux rsultats suivants. D'une part les catgories  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dfinies prcdemment ne dpendent pas du choix d'une uniformisante  $\pi$ . D'autre part, ces catgories sont abliennes et mme artiniennes.

#### 3.1 Indpendance du choix de l'uniformisante

Considrons  $\pi$  et  $\pi'$  deux uniformisantes de  $K$ . Notons respectivement  $E(u)$  et  $E'(u)$  les polynmes minimaux de  $\pi$  et  $\pi'$ .

Soit  $P(u)$  un polynôme à coefficients dans  $W$  tel que  $P(\pi) = \pi'$  et  $P(0) = 0$ . On définit une application  $\nu : S \rightarrow S$  en posant  $\nu(s) = s \circ P$ . C'est un morphisme d'anneaux, bijectif. Il n'est par contre compatible ni au Frobenius, ni l'opérateur de monodromie, et nous allons dans un premier temps voir comment  $\nu$  se comporte vis-à-vis de ces opérateurs.

Plongeons  $S$  dans  $T = K_0[[u]]$  et prolongeons les opérateurs  $\phi$  et  $N$  sur  $T$ . Ils vérifient la relation  $N\phi = p\phi N$ . De même la bijection  $\nu$  s'étend en une bijection de  $T$ . Notons finalement  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $S$ , c'est l'idéal engendré par  $p$ ,  $u$  et  $\frac{u^e}{i!}$  pour  $i \geq 1$ .

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $t \in \mathfrak{m}$ . L'application de  $T$  dans  $T$  définie par :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(x)$$

*est l'unique morphisme d'anneaux qui envoie  $u$  sur  $u \exp(-t)$ .*

**Démonstration.** Puisque  $t \in \mathfrak{m}$ , on n'a aucun souci de convergence dans  $T$ . En outre, comme  $N(u) = -u$ , il vient  $N^i(u) = (-1)^i u$  et donc  $u$  est bien envoyé sur  $u \exp(-t)$ .

Il reste à vérifier que l'on a bien affaire à un morphisme d'anneaux. La stabilité par addition est immédiate. Soient  $x$  et  $y$  dans  $T$ , calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(xy) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{k+l=i} C_i^k N^k(x) N^l(y) \\ &= \sum_{k,l \geq 0} \frac{t^{k+l}}{k!l!} N^k(x) N^l(y) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k(x) \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} N^l(y) \right) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

**Lemme 3.1.2.** *Il existe un (unique) élément  $t \in \mathfrak{m}$  tel que l'application  $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu : S \rightarrow S$  soit donnée par la formule :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi(x).$$

**Démonstration.** Faisons les calculs dans  $T$  après avoir vérifié que si une suite d'éléments de  $S$  admet une limite dans  $S$ , alors elle converge aussi dans  $T$ , et vers la même limite.

Regardons d'abord le cas où  $P$  s'écrit  $uH(u)$  avec  $H \in 1 + \mathfrak{m}$ . Dans ces conditions on est capable de définir  $\log H \in T$ . D'autre part, notons  $uS(u)$  l'image réciproque de  $u$  par  $\nu$ . Notons  $H^{(\phi)}$  le polynôme déduit de  $H$  en appliquant  $\phi$  à chacun de ses coefficients : on a  $\phi(H)(u) = H^{(\phi)}(u^p)$ .

Dans l'anneau  $T$ , on a alors les égalités suivantes :

$$\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \quad \text{et} \quad \nu^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^i}{i!} N^i(x).$$

Un calcul donne :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]^i}{p^i i!} \nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)).$$

On a d'autre part :

$$\nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

et donc en regroupant :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]^i}{p^i i!} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

ce que l'on réduit, grâce la formule du binôme, en :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[ \frac{-\log H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)}{p} - \log S(u) \right]^i N^i(\phi(x)).$$

On voit sur cette dernière écriture que l'on a trouvé un candidat pour  $t$ . Il se réécrit sous la forme plus sympathique suivante :

$$t = -\frac{1}{p} \log [S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)]$$

Mais par définition de  $S$  et de  $H$ , on a  $S(u) H(uS(u)) = 1$  et donc en appliquant  $\phi$  et en regardant modulo  $p$ , on trouve  $S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p) \equiv 1 \pmod{p}$ . On en déduit que  $t \in S$  et vérifie les conditions du lemme.

Si  $P$  n'est pas de la forme précédente, on peut toujours décomposer  $\nu : S \rightarrow S \rightarrow S$  où la première flèche  $\nu_0$  est de la forme précédente et la seconde un morphisme d'anneaux envoyant  $u$  sur  $[\lambda]u$ , où  $[\lambda]$  est le représentant de Teichmüller d'un  $\lambda \in k$ . On vérifie que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \nu & & \\ & & \curvearrowright & & \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\quad} & S \\ \downarrow \nu^{-1}\phi\nu = \nu_0^{-1}\phi\nu_0 & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

On est donc ramené au même problème avec  $\nu_0$ , déjà traité. □

**Lemme 3.1.3.** *Il existe un (unique) élément  $n \in S$  tel que l'application  $\nu^{-1} \circ N \circ \nu : S \rightarrow S$  soit donnée par la formule :*

$$x \mapsto nN(x)$$

**Démonstration.** Rappelons que l'application  $\nu$  est donnée par  $x \mapsto x \circ P$ , et que l'on peut écrire  $N$  via la formule  $N(s) = -us' \circ s'$  où  $s'$  désigne la dérivée usuelle de  $s$  (par rapport  $u$ ).



On peut alors calculer :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} [N(x \circ P)] = \nu^{-1} [-uP' \cdot (x' \circ P)]$$

D'autre part, on a :

$$\nu(N(x)) = \nu(-ux') = -P(u) \cdot (x' \circ P)$$

d'o :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} \left( \frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) N(x)$$

et on a ainsi un candidat pour  $n$ . Or  $\nu^{-1}(P(u)) = u$  par d'finition et par  $\nu^{-1}$ ,  $u$  s'envoie sur un multiple de  $u$  :  $n = \nu^{-1} \left( \frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) \in S$  et convient.  $\square$

### Construction du foncteur

Notons  $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$  (resp.  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ ) la catgorie obtenue en choisissant  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ) comme uniformisante de  $K$ . On souhaite construire un foncteur (qui va s'avrer tre une quivalence de catgories) entre les catgories  $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$  et  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ . Notons que si  $r = 0$ , les catgories  $\underline{\mathcal{M}}_\pi^0$  et  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^0$  sont identiques. On peut supposer  $r > 0$  et donc  $p > 2$  (puisque  $er < p - 1$ ).

Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . L'application  $\nu$  d'finie prcdemment fait de  $S$  une  $S$ -algre et on remarque que si l'on munit les anneaux des filtrations correspondant respectivement au choix des uniformisantes  $\pi$  et  $\pi'$ , l'application  $\nu$  est compatible aux filtrations.

Considrons les constantes  $t$  et  $n$  fournies par les lemmes 3.1.2 et 3.1.3 et d'finissons :

$$\begin{aligned} M' &= S_{(\nu)} \otimes M \\ \text{Fil}^r M' &= S_{(\nu)} \otimes \text{Fil}^r M \\ \phi'_r(s \otimes x) &= \phi(s) \otimes \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi_r(x) \right) \\ N'(s \otimes x) &= N(s) \otimes x + s \otimes nN(x) \end{aligned}$$

les deux dernires galits tant d'finies pour tout  $s \in S$  et respectivement tout  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  et tout  $x \in \mathcal{M}$ .

**Lemme 3.1.4.** *Pour tout entier  $i \geq 1$ , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

**Dmonstration.** On prouve la propri't par rcurrence. Pour  $i = 1$ , elle est vraie par hypothse. Pour l'hrdit, juxtaposons les deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Le grand rectangle est commutatif puisque les deux carrés le sont. Soient  $x \in \mathcal{M}$  et  $s \in S$ . On a :

$$\begin{aligned} (sN) \circ (s^i N^i) (\phi_r(x)) &= s [N(s^i) N^i(\phi_r(x)) + s^i N^{i+1}(\phi_r(x))] \\ &= s^i N(s) N^i(x) + s^{i+1} N^{i+1}(x). \end{aligned}$$

En appliquant le calcul précédent deux fois et en utilisant la commutativité du diagramme, on obtient, pour tout  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned} c^i N(c) N^i(\phi_r(x)) + c^{i+1} N^{i+1}(\phi_r(x)) \\ = \phi_r \left[ E(u)^i N(E(u)) N^i(x) + E(u)^{i+1} N^{i+1}(x) \right] \\ = \phi(N(E(u))) \phi_r \left( E(u)^i N^i(x) \right) + \phi_r \left( E(u)^{i+1} N^{i+1}(x) \right). \end{aligned}$$

On sait que  $\phi(N(E(u))) = N(c)$ , ce qui permet de conclure en utilisant une dernière fois l'hypothèse de récurrence.  $\square$

**Lemme 3.1.5.** *L'application  $\phi'_r$  est bien définie et est  $\phi$ -semi-linéaire.*

**Démonstration.** Dans un premier temps, si  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , d'après le lemme 3.1.4 l'élément  $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$  est bien définie puisqu'il est égal à  $\phi_r \left( \frac{E(u)^i}{i!} \circ N^i(x) \right)$ . Remarquons que  $\frac{E(u)^i}{i!} \circ N^i(x)$  est toujours élément de  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  : si  $i < r < p$ , c'est vrai car  $i!$  est inversible et si  $i \geq r$ , c'est vrai par hypothèse.

D'autre part, pour  $i \gg 0$ , on a :

$$\phi_r \left( \frac{E(u)^i}{i!} N^i(x) \right) = \frac{1}{c^r} \phi_r \left( \frac{E(u)^i}{i!} \right) \phi_r(E(u)^r N^i(x))$$

et le facteur  $\phi_r \left( \frac{E(u)^i}{i!} \right)$  est multiple de  $\frac{c^{i-r}}{i!}$ . Comme on a supposé  $p > 2$ , la valuation  $p$ -adique de ce dernier tend vers l'infini. Cela prouve que la suite des  $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$  converge vers 0 et donc que la somme de la série est bien définie.

Reste à voir que si  $s \in S$  et  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , on a  $\phi'_r(1 \otimes sx) = \phi'_r(\nu(s) \otimes x)$ . Comme dans le lemme 3.1.1, on prouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(sx)) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi(s)) \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(x)) \right).$$

Le premier facteur vaut  $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(s)$  d'après le lemme 3.1.2. Cela conclut, le fait que  $\phi'_r$  est  $\phi$ -semi-linéaire tant est évident.  $\square$

**Lemme 3.1.6.** *L'application  $N'$  est bien définie et vérifie la condition de Leibniz.*

**Démonstration.** Comme précédemment, il s'agit de vérifier que pour  $s \in S$  et  $x \in \mathcal{M}$ , on a  $N'(1 \otimes sx) = N'(\nu(s) \otimes x)$ . Calculons :

$$N'(1 \otimes sx) = 1 \otimes nN(sx) = 1 \otimes nN(s)x + 1 \otimes nsN(x).$$

Or d'après le lemme 3.1.3, on a  $nN(s) = \nu^{-1} \circ N \circ \nu(s)$  et donc  $1 \otimes nN(s)x = N \circ \nu(s) \otimes x$ . D'autre part, on a  $1 \otimes nsN(x) = \nu(s) \otimes nN(x)$ . On en dduit que :

$$N'(1 \otimes sx) = N \circ \nu(s) \otimes x + \nu(s) \otimes nN(x)$$

comme on voulait.  $\square$

**Proposition 3.1.7.** *L'objet  $\mathcal{M}'$  muni de  $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$ , de  $\phi'_r$  et de  $N'$  est un objet de la catégorie  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ .*

**Dmonstration.** La seule vrification qui pose problme est la commutativit du diagramme reliant  $\phi'_r$   $N'$ . Par un simple calcul, on prouve dans un premier temps qu'il existe une constante  $c'$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \\ \nu(E(u))N' \downarrow & & \downarrow c'N' \\ \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Comme  $\nu(E(u))$  s'obtient partir de  $E'(u)$  simplement par la multiplication par une unit de  $S$ , un diagramme quivalent, dans lequel on a remplac  $\nu(E(u))$  par  $E'(u)$  et dans lequel la constante  $c'$  a t modifi, commute. D'autre part le calcul prouve que la constante  $c'$  obtenue ne dpend pas de  $\mathcal{M}$ .

Soient  $n$  un entier et  $\mathcal{M} = S/p^n S \cdot e_1$  muni de  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M}$ ,  $\phi_r(e_1) = e_1$  et  $N(e_1) = 0$ . On a  $(c'N') \circ \phi'_r(u \otimes e_1) = \phi'_r \circ (E'(u)N')(u \otimes e_1)$ , ce qui donne aprs calcul :

$$[c'pu^p - u^p \phi(E'(u))] \otimes e_1 = 0.$$

Ainsi  $p^n$  divise  $c'pu^p - u^p \phi(E'(u))$  pour tout  $n$  et finalement  $c' = \phi_1(E'(u))$ .  $\square$

On a ainsi dfini un foncteur (la dfnition sur les flches est vidente)  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ .

### Canonicit et compatibilit

**Proposition 3.1.8.** *Le foncteur dfini prcdemment ne dpend pas du choix de l'lement  $P \in S$ .*

**Dmonstration.** Avec les notations prcdentes, il suffit de prouver que si  $P = uH$  est tel que  $P(\pi) = \pi$ , alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont canoniquement isomorphes. Notons  $\nu : S \rightarrow S$  le morphisme d'anneau tel que  $\nu(u) = P(u)$ . La condition implique  $H(u) - 1 \in \text{Fil}^1 S$  et donc l'lement  $\log(H(u))$  est bien dfini dans  $S$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r$ , on peut dfinir l'application :

$$\begin{aligned} S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M} &\rightarrow S \\ s \otimes x &\mapsto s \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \end{aligned}$$

Comme  $\log(H(u)) \in \text{Fil}^1 S$ , l'lement  $\frac{(-\log H(u))^i}{i!}$  est bien dfini. En outre le fait que dans  $T$ ,  $\exp(\log H(u)) = H(u) \in S$  prouve que la suite  $\frac{(\log H(u))^i}{i!}$  converge vers 0 et finalement que l'application est bien dfinie.

Il ne reste plus qu' voir que c'est un isomorphisme  $S$ -linaire et compatible toutes les structures ; c'est donc une flche dans  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.9.** *Le foncteur dfini prcdemment est une quivalence de catgorie.*

Si, comme prcdemment,  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux uniformisantes de  $K$ , on peut dfinir  $\hat{A}_{\text{st}\pi}$  et  $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$ . Pour cela, rappelons que l'on avait besoin de choisir  $(\pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$  (resp.  $(\pi'_1, \dots, \pi'_n, \dots)$ ) un systme compatible de racines  $p^n$ -imes de  $\pi$  (resp. de  $\pi'$ ). On dfinit  $\omega_n$  en imposant  $\pi_n = \omega_n \pi'_n$ , obtenant ainsi  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n, \dots) \in R$  puis  $[\underline{\omega}] \in A_{\text{cris}}$  (notez que  $A_{\text{cris}}$  ne dpend pas du choix d'une uniformisante).

L'unique morphisme de  $A_{\text{cris}}$ -algbre  $\hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$  envoyant  $(1+X)$  sur  $[\underline{\omega}](1+X)$  est un isomorphisme compatible  $\phi_r$ ,  $N$  et l'action du groupe de Galois  $G_K$ .

**Proposition 3.1.10.** *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r \\ & \searrow T_{\text{st}\pi} & \swarrow T_{\text{st}\pi'} \\ & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) & \end{array}$$

o la flche horizontale est le foncteur dfini prcdemment.

**Dmonstration.** L'anneau  $S$  s'identifie la fois aux points fixes sous l'action de Galois de  $\hat{A}_{\text{st}\pi}$  et de  $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$ . Notons  $\rho : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi}$  et  $\rho' : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$  les inclusions correspondantes. Il existe un unique morphisme de  $A_{\text{cris}}$ -algbre,  $\nu : \hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\nu} & S \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \hat{A}_{\text{st}\pi} & \xrightarrow{\nu} & \hat{A}_{\text{st}\pi'} \end{array}$$

En effet, le diagramme impose la valeur de  $\nu\left(\frac{X^i}{i!}\right)$  et on vrifie que l'application ainsi dfinie convient. En outre, elle est  $G_K$ -quivariante et induit une flche  $\nu : \hat{A}_{\text{st},\infty\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'}$  encore  $G_K$ -quivariante.

Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r$  et  $\mathcal{M}'$  l'objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ , qui lui est associ par le foncteur prcdent. On rappelle qu'en tant que module, on a  $\mathcal{M}' = S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M}$ . Soit  $f \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . On lui associe l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}' & \rightarrow & \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'} \\ s \otimes x & \mapsto & \rho'(s) \cdot \nu \circ f(x) \end{array}$$

On vrifie qu'elle est  $S$ -linaire et compatible aux structures dfinissant ainsi un lment de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ .

On dfinit ainsi une application  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Elle est  $\mathbb{Z}_p$ -linaire et bijective puisque l'on peut construire l'application rciproque de faon analogue. On vrifie qu'elle est compatible l'action de Galois et donc qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catgorie des  $\mathbb{Z}_p$ -reprsentations galoisiennes.  $\square$

*Dsormais, on suppose que l'uniformisante  $\pi$  vrifie  $\pi^e = p$ . Cela est toujours possible lorsque  $e < p - 1$  et donc n'exclut que le cas  $r = 0$  pour lequel la thorie est triviale et tous les thormes qui vont suivre peuvent se dmontrer simplement part. En particulier, on pourra faire usage de la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et du foncteur  $T$  dfinis dans le paragraphe 2.3.*

### 3.2 Description des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

On considère dans ce paragraphe un objet  $\mathcal{M}$  de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Il s'agit d'un  $k[u]/u^{ep}$ -module libre de rang fini  $d$  muni d'une filtration, d'une application  $\phi_r$  et d'une application  $N$ , le tout vérifiant les propriétés données précédemment.

#### Bases adaptées

On a dans un premier temps un résultat bien utile (et classique) qui est le suivant :

**Proposition 3.2.1.** *Il existe une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\mathcal{M}$  et des entiers  $n_1, \dots, n_d$  tels que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^d u^{n_i} k[u]/u^{ep} \cdot e_i.$$

Une telle base est par définition une base adaptée de  $\mathcal{M}$ .

**Démonstration.** Comme  $\mathcal{M}$  est supposé libre, il existe un  $k[u]$ -module libre  $\mathcal{M}'$  tel que  $\mathcal{M}'/u^{ep}\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ . Autrement dit, il existe une flèche  $f : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$  dont le noyau est exactement  $u^{ep}\mathcal{M}'$ . Définissons  $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = f^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ . C'est un sous- $k[u]$ -module de  $\mathcal{M}'$ .

Puisque  $k[u]$  est un anneau principal, d'après le théorème de structure, il existe une suite de polynômes  $P_1, \dots, P_d$  tels que  $P_i$  divise  $P_{i+1}$  pour tout  $i$  et une base  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d)$  de  $\mathcal{M}'$  telle que  $(P_1 \hat{e}_1, \dots, P_d \hat{e}_d)$  soit une base de  $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$ . D'autre part,  $u^{er} \mathcal{M}' \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}'$  et donc tous les polynômes  $P_i$  sont des diviseurs de  $u^{er}$  ; ils sont donc de la forme  $P_i = u^{n_i}$  pour certains entiers  $n_i$ .

En posant  $e_i = f(\hat{e}_i)$ , on a bien le résultat annoncé.  $\square$

*Remarque.* Les entiers  $n_i$  ne dépendent pas de la permutation prise de la base considérée. En effet, la dimension en tant que  $k$ -espace vectoriel du quotient  $\text{Fil}^r \mathcal{M} / (u^k \mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M})$  est donnée par la somme des  $k - n_i$ , somme tendue sur tous les  $i$  pour lesquels  $n_i \leq k$ . On voit facilement que la connaissance de toutes ces sommes permet de déterminer les  $n_i$  par permutation prise.

Fixons présentement  $(e_1, \dots, e_d)$  une base adaptée de  $\mathcal{M}$ . Nous allons essayer de décrire un peu mieux la fonction  $\phi_r$  et pour cela nous introduisons la définition suivante.

**Définition 3.2.2.** *Soit  $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$ , et soit  $n$  le plus petit entier tel que  $u^n x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . On pose  $\varphi_r(x) = \phi_r(u^n x)$ .*

Soit  $x_i = \varphi_r(e_i)$  pour  $1 \leq i \leq d$ . On rappelle que la famille des  $e_i$  est la base adaptée que l'on s'est fixée précédemment.

**Proposition 3.2.3.** *Avec les notations précédentes,  $(x_1, \dots, x_d)$  est une base de  $\mathcal{M}$ .*

*D'autre part, si  $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$ , alors  $\varphi_r(x) \in x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$ .*

**Démonstration.** Pour le premier nonc, il suffit de voir que si  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , alors  $\phi_r(x)$  s'écrit comme une combinaison linéaire (coefficients dans  $k[u^p]/u^{ep}$ ) des  $x_i$ . Comme  $\text{im } \phi_r$  engendre  $\mathcal{M}$  comme  $k[u]/u^{ep}$ -module, il en est de même de la famille  $(x_1, \dots, x_d)$ . Comme elle est de bon cardinal, elle en est une base.



$N(u^{pk}x'') = u^{pk}N(x'') = 0$  et donc  $N(x'')$  est un multiple de  $u^p$ . Notons  $n$  le plus petit entier tel que  $u^n x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  de telle sorte que l'on ait  $\varphi_r(x'') = \phi_r(u^n x'') = x$ . On a :

$$\phi_r(u^e N(u^n x'')) = -N(\phi_r(u^n x'')) = -N(x).$$

Mais  $N(u^n x'') = -nu^n x'' + u^n N(x'')$ . Le premier terme de cette somme est dans  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  puisque  $u^n x''$  y est. Le second y est également puisque  $N(x'')$  est un multiple de  $u^p$ . On en déduit que  $N(u^n x'') \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  et donc que  $\phi_r(u^e N(u^n x'')) = 0$ . Ainsi  $N(x) = 0$ . D'autre part, on a  $x = \varphi_r(x'')$  et donc d'après la proposition 3.2.3,  $x$  n'est pas divisible par  $u$ . Ceci conclut la preuve du corollaire.  $\square$

### Description matricielle

Le but de ce paragraphe est d'écrire sous forme matricielle les applications  $\phi_r$  et  $N$ , explicitations que nous utiliserons dans la suite. On fixe  $\mathcal{M}$  un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  une base adaptée de  $\mathcal{M}$ , les entiers correspondants tant  $n_1, \dots, n_d$ .

On note  $\Delta$  la matrice diagonale suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} u^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & u^{n_d} \end{pmatrix}$$

**Définition 3.2.6.** La matrice de  $\phi_r$  dans la base adaptée  $(e_1, \dots, e_d)$  est la matrice  $G$  définie par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1} e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} e_d) \end{pmatrix} = \phi_r \left( \Delta \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix} \right) = {}^t G \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

*Remarque.* Cette définition n'a un sens que si la base  $(e_1, \dots, e_d)$  est adaptée. De plus, la présence de la transpose sert à rester fidèle à la définition classique de la matrice d'une application linéaire.

En gardant les notations du paragraphe précédent, on voit que  $G$  est simplement la matrice de passage de la base  $(e_1, \dots, e_d)$  à la base  $(x_1, \dots, x_d)$ . En tant que telle, il s'agit d'une matrice inversible.

**Définition 3.2.7.** Soit  $(a_1, \dots, a_d)$  une base de  $\mathcal{M}$ . La matrice de  $N$  dans la base  $(a_1, \dots, a_d)$  est la matrice  $H$  définie par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} N(a_1) \\ \vdots \\ N(a_d) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = {}^t H \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

On a une formule de changement de base :

**Proposition 3.2.8.** Soient  $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_d)$  et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$  deux bases de  $\mathcal{M}$ , et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ . On note  $H_{\mathcal{A}}$  (resp.  $H_{\mathcal{B}}$ ) la matrice de  $N$  dans la base  $\mathcal{A}$  (resp. dans la base  $\mathcal{B}$ ). On a alors la relation :

$$H_{\mathcal{B}} = P^{-1} H_{\mathcal{A}} P + P^{-1} N(P)$$

**Dmonstration.** Il s'agit d'un simple calcul. On crit :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N(b_1) \\ \vdots \\ N(b_d) \end{pmatrix} &= N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = N \left( {}^tP \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right) \\
&= N({}^tP) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + {}^tP \cdot N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \\
&= N({}^tP) {}^tP^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + {}^tPH_{\mathcal{A}} {}^tP^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui donne  ${}^tH_{\mathcal{B}} = N({}^tP) {}^tP^{-1} + {}^tPH_{\mathcal{A}} {}^tP^{-1}$  puis le rsultat annonc en prenant la transpose.  $\square$

*Remarque.* Un simple calcul prouve que si  $A$  et  $B$  sont des matrices coefficients dans  $k[u]/u^{ep}$ , alors  $N(AB) = N(A)B + AN(B)$ . Ceci a pour consquence l'galit  $P^{-1}N(P) = -N(P^{-1})P$  et prouve la cohrence de la formule lorsque l'on passe d'une base  $\mathcal{A}$  une base  $\mathcal{B}$  puis que l'on revient  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 3.2.9.** *Si les  $n_i$  sont rangs par ordre croissant, la matrice de  $N$  dans la base  $(x_1, \dots, x_d)$  (o on rappelle que  $x_i = \phi_r(u^{n_i}e_i)$ ) est coefficients dans  $k[u^p]/u^{ep}$  et triangulaire infrieure avec des 0 sur la diagonale.*

**Dmonstration.** La preuve rsulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}
\end{array}$$

En effet, fixons un entier  $i$  et partons de l'lement  $u^{n_i}e_i$ . Par  $\phi_r$ , il s'envoie sur  $x_i$  par dfinition. Puis par  $-N$ , il s'envoie sur  $-N(x_i)$ . Par l'autre chemin, on a d'abord :

$$u^e N(u^{n_i}e_i) = -n_i u^{e+n_i}e_i + u^{e+n_i}N(e_i)$$

Comme  $u^{n_i}e_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , le premier terme de la somme prcdente s'envoie sur 0 par  $\phi_r$  et  $u^{e+n_i}N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Pour le second terme, dcomposons  $N(e_i) = \sum_{j=1}^d a_j e_j$  o  $a_j \in k[u]/u^{ep}$  est tel que  $u^{e+n_i}N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  (i.e.  $u^{e+n_i}a_j \in u^{n_j}k[u]/u^{ep}$ ). On a alors :

$$\phi_r(u^e N(u^{n_i}e_i)) = \sum_{j=1}^d \phi(u^{e+n_i-n_j}a_j) x_j$$

et les  $\phi(u^{e+n_i-n_j}a_j)$  sont les coefficients de la  $j$ -ime colonne de la matrice. Ils sont donc dj tous bien dans  $k[u^p]/u^{ep}$ .

De plus, si  $j \leq i$ , on a par hypothse  $n_j \leq n_i$  et donc  $e+n_i-n_j \geq e$ . Ainsi  $\phi(u^{e+n_i-n_j}a_j) = 0$  et on a bien dmontr le rsultat annonc.  $\square$

*Remarque.* Cette dernire proposition redmontre en particulier, en donnant un rsultat plus prcis, la proposition 3.2.4 et le corollaire qui s'ensuit.



### 3.3 La catégorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$

Dans cette partie, nous introduisons des sous-catégories pleines  $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$  de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  qui correspondent aux catégories de Fontaine-Laffaille (voir [Fon82]) tues par  $p$  pour  $e = 1$ .

Commençons par donner une proposition qui caractérise les objets de cette sous-catégorie. Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ . Notons  $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$  et plus généralement  $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$  pour un entier  $i$  compris entre 0 et  $p - 1$ . Les  $\mathcal{M}_i$  sont des  $k[u^p]/u^{ep}$ -modules libres et :

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}_i.$$

**Proposition 3.3.1.** *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i)  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$ ;

ii) *il existe une base adaptée de  $\mathcal{M}$  formée d'éléments de  $\mathcal{M}_0$ ;*

iii) *On peut munir  $\mathcal{M}$  d'un opérateur de monodromie nul sur  $\mathcal{M}_0$  et faisant de  $\mathcal{M}$  un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ .*

**Démonstration.** La propriété ii) implique de façon presque immédiate les deux autres. Nous allons montrer que iii) implique i) puis que i) implique ii).

Supposons iii). Prouvons dans un premier temps que cela implique que  $N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Soit  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . D'après le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

on a  $\phi_r(u^e N(x)) = 0$ . La proposition 3.2.3 implique facilement que  $\ker \phi_r = u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$  et donc il existe  $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  tel que  $u^e N(x) = u^e y$ . La différence  $N(x) - y$  est tue par  $u^e$ . Elle s'écrit  $u^{e(p-1)}z$  pour un certain  $z \in \mathcal{M}$ . Comme  $e(p-1) \geq er$ ,  $u^{e(p-1)}z \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  d'où  $N(x) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Ceci prouve la propriété annoncée.

Soit  $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . On cherche à construire des  $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$  tels que  $y = y_0 + \dots + y_{p-1}$ . On peut dire une galit de ce type avec  $y_i \in \mathcal{M}_i$ . Appliquons l'opérateur  $N$  cette galit en remarquant que puisque  $N$  est suppos nul sur  $\mathcal{M}_0$ , on a  $N(y_i) = -iy_i$ . On obtient successivement :

$$\begin{aligned} y &= x_0 + y_1 + \dots + y_{p-1} \\ N(y) &= -y_1 + \dots - (p-1)y_{p-1} \\ N^2(y) &= y_1 + \dots + (p-1)^2 y_{p-1} \\ &\vdots \\ N^{p-1}(y) &= y_1 + \dots + (-1)^{p-1} (p-1)^{p-1} y_{p-1}. \end{aligned}$$

Les coefficients qui apparaissent forment une matrice de Vandermonde inversible. Ainsi on peut exprimer les  $y_i$  comme combinaisons linéaires de coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  des  $N^j(y)$ . Par ce qui précède, cela entraîne  $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  et donc bien la propriété voulue.

Supposons i). Fixons  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $\mathcal{M}_0$  comme  $k[u^p]/u^{ep}$ -module, et notons  $\mathcal{M}'_0$  le sous- $k$ -espace vectoriel de  $\mathcal{M}_0$  engendr par les  $e_i$ . Notons galement  $\mathcal{M}'_i = u^i \mathcal{M}'_0$ . Pour tout entier  $i$ , on a un isomorphisme  $f_i : \mathcal{M}'_0 \rightarrow \mathcal{M}'_i$  qui est la multiplication par  $u^i$ . Notons  $F'_i = f_i^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'_i)$ . On obtient une filtration croissante par des sous- $k$ -espaces vectoriels. Il suffit alors pour rpondre la question de considrer une base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathcal{M}'_0$  compatible cette filtration.  $\square$

**Dfinition 3.3.2.** On note  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}_0^r$  la sous-catgorie pleine de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$  forme des objets satisfaisant les proprits de la proposition prcdente. On note  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$  la sous-catgorie pleine de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  forme des objets dont l'image dans  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$  par le foncteur d'oubli satisfait les proprits de la proposition prcdente.

Les lettres MF font rfrence « modules filtrs » car l'on peut donner une nouvelle interprétation de ces objets *via* des modules filtrs. Avant cela, faisons quelques remarques gnrales :

**Proposition 3.3.3.** La catgorie  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$  est une sous-catgorie ablienne de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  stable par sous-objets et par quotients. De plus, elle est gale  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  si et seulement si  $e = r = 1$ .

**Dmonstration.** Nous ne savons pas encore ce stade que  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  est une catgorie ablienne. Nous allons l'admettre momentanément pour prouver la premire partie de la proposition. Il suffit de prouver la stabilit par sous-objets et par quotients, un noyau tant un sous-objet et un conoyau un quotient. Elle est immdiate avec la caractrisation iii).

Traitons le cas  $e = r = 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$  et soit  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . On peut crire  $x = x_0 + \dots + x_{p-1}$  avec  $x_i \in \mathcal{M}_i$ . Par hypothse  $u\mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , et donc  $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  pour  $i \geq 1$ , puis  $x_0 \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . On a ainsi vrifi la propriit i). Rciproquement, considrons  $\mathcal{M} = k[u]/u^{ep}e_1 \oplus k[u]/u^{ep}e_2$ ,  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = (e_1, u^2e_2)$ ,  $\phi_r(e_1) = \frac{1}{u+1}e_1 + e_2$ ,  $\phi_r(u^2e_2) = (u+1)e_2$ . On vrifie facilement que l'on ne peut pas munir cet objet d'un  $N$  qui vaudrait 0 sur  $\text{im } \phi_r$ . Si  $r = 1$ , le lemme 5.1.2. de [Bre01] prouve que l'on peut munir l'objet prcdent d'un opérateur de monodromie. Cela en fait un objet de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  qui rpond la question. Pour  $r > 1$ , on remarque que les catgories  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  sont naturellement des sous-catgories pleines les unes des autres lorsque  $r$  augmente (voir [Bre97a]). L'image par les foncteurs d'inclusion de l'objet prcdemment dfini contient alors encore.  $\square$

**Proposition 3.3.4.** Tout objet non nul de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$  (resp. de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ ) admet un sous-objet non nul dans  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}_0^r$  (resp. dans  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$  pour lequel  $N$  est nul sur  $\text{im } \phi_r$ ).

**Dmonstration.** La preuve de cette propriit est donne dans le paragraphe 4.1 lors de l'tude des objets simples.  $\square$

### Les objets de $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ comme modules filtrs

Il est possible de dcire la catgorie  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$  avec des objets plus proches des objets de Fontaine-Laffaille du cas  $e = 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ . Posons  $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$  et  $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$ , pour  $0 \leq i \leq p-1$ . On a un isomorphisme  $f_i : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_i$  qui est la multiplication par  $u^i$ . Dfnissons  $F_{i/e} = f_{e^{-1}i}^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i)$ . On obtient une suite dcroissante de sous- $k[u^p]/u^{ep}$ -modules de  $\mathcal{M}_0$  contenant  $u^p \mathcal{M}_0$  telle que  $F_0 = \mathcal{M}_0$  par hypothse.

L'application  $\phi_r$  induit des applications  $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}_0$  faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} F_{i+\frac{1}{e}} & \longrightarrow & F_i \\ \phi_{i+\frac{1}{e}} \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ \mathcal{M}_0 & \xrightarrow{u^p} & \mathcal{M}_0 \end{array}$$

La monodromie, quant elle, d'finit une application  $N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$  qui vrifie  $N \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ N$ .

Si on remarque pour finir que  $k[u^p]/u^{ep}$  est isomorphe en tant qu'anneau  $\mathcal{O}_K/p$  (en envoyant  $u^p$  sur  $\pi$ ), on obtient la proposition suivante qui nonce prcisment le pont entre les catgories  $\underline{\mathcal{M}}^r$  et celles de Fontaine-Laffaille, du moins dans le cas modulo  $p$  :

**Proposition 3.3.5.** *La catgorie  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}}^r$  est quivalente la catgorie dont les objets sont les donnees suivantes :*

1. un  $\mathcal{O}_K/p$ -module libre de rang fini  $\mathcal{M}$  ;
2. une filtration dcroissante  $(F_i)$  de sous-modules de  $\mathcal{M}_0$  contenant  $\pi\mathcal{M}$  indexe par les rationnels de denominateur  $e$  compris entre 0 et  $r$  telle que  $F_0 = \mathcal{M}$  ;
3. des applications  $\phi$ -semi-linaires  $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}$  vrifiant  $\phi_i|_{F_{i+\frac{1}{e}}} = \pi\phi_{i+\frac{1}{e}}$  ;
4. d'une application liniaire  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que  $N \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ N$  pour tout  $i$  et o les flches sont les morphismes  $\mathcal{O}_K/p$ -liniaires compatibles toutes les structures.

*Remarque.* Dans le cas non ramifi (*i.e.*  $e = 1$ ), on retrouve exactement la description des catgories de Fontaine-Laffaille modulo  $p$  (voir [Fon82]). On peut tendre cette remarque toute une sous-catgorie de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  comme expliqu dans le paragraphe 2.4.1 de [Bre97a].

On peut rsumer tout ce qui prcde par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}}_0^r & \hookrightarrow & \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r \\ \uparrow \curvearrowright & & \uparrow \\ \underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}^r & \hookrightarrow & \underline{\mathcal{M}}^r \end{array}$$

Les flches qui montent correspondent aux foncteurs d'oubli vidents. La flche courbe est un foncteur «  $N$  canonique » qui munit un objet de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}}_0^r$  du  $N$  (ncessairement unique) donn par le iii) de la proposition 3.3.1. On pourrait se demander s'il est possible de prolonger ce foncteur tout  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_0^r$ . La rponse est oui dans le cas  $r = 1$  (voir le lemme 5.1.2. de [Bre01]), et non dans le cas gnral puisqu'il n'est dj pas vrai que le foncteur d'oubli  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_0^r$  est toujours essentiellement surjectif (reprendre l'exemple donn dans la dmonstration de la proposition 3.3.3)

### 3.4 Un mot sur le cas $r = 1$

Ce cas est amplement discuté dans [Bre00]. Plus exactement, Breuil construit un foncteur contravariant entre la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}_0^1$  et la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur  $\mathcal{O}_K$  tus par  $p$ . Il prouve ensuite, en exhibant un quasi-inverse, que ce foncteur est une anti-équivalence de catégories.

Il tend par la suite ce foncteur toute la catégorie  $\mathcal{M}_0^1$  et atteint tous les schémas en groupes sur  $\mathcal{O}_K$  tus par une puissance de  $p$ . De cette façon, Breuil retrouve la classification des schémas en groupes sur  $\mathcal{O}_K$  débute par Raynaud ([Ray74]) et poursuivie par Fontaine ([Fon75]) et Conrad ([Con99]), et tend même cette classification sans restriction sur la ramification.

### 3.5 Des catégories abéliennes et artiniennes

Nous montrons dans ce paragraphe que les catégories  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et  $\mathcal{M}^r$  sont abéliennes. Nous rappelons dans un premier temps que ce résultat est prouvé dans [Bre97a] lorsque  $e = 1$ .

#### La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Notons  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  la catégorie  $\mathcal{M}^r$  obtenue lorsque  $e = 1$  et rappelons le théorème précis (corollaire 2.2.3.2 de [Bre97a]) dans le cas de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  :

**Théorème 3.5.1.** *La catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  est abélienne et artinienne. Plus précisément soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme dans  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ , alors :*

i)  $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$  ;

ii) Soit  $\mathcal{K}$  le noyau de l'application  $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente,  $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$ ,  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  la restriction de  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  la restriction de  $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Avec ces structures,  $\mathcal{K}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  et donne le noyau de  $f$  dans  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  ;

iii) Soit  $\mathcal{C}$  le conoyau de l'application  $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente,  $\text{Fil}^r \mathcal{C}$  l'image de  $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  l'application qu'induit  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  le quotient de  $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Avec ces structures,  $\mathcal{C}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  et donne le conoyau de  $f$  dans  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ .

Nous allons maintenant montrer les propriétés analogues pour la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ , et nous utiliserons pour cela le théorème 3.5.1.

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Notons  $\bar{\mathcal{X}}$  (resp.  $\bar{\mathcal{Y}}$ ) la réduction de  $\mathcal{X}$  (resp. de  $\mathcal{Y}$ ) modulo  $u^p$ , et  $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  (resp.  $p_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$ ) la projection correspondante. On munit  $\bar{\mathcal{X}}$  et  $\bar{\mathcal{Y}}$  de  $\text{Fil}^r$ , Frobenius et opérateurs de monodromie en regardant les structures quotients. On obtient des objets de la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$  et la flèche  $f$  induit un morphisme  $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$  dans cette catégorie. Finalement, puisque  $er < p - 1$ , on a :

$$\text{Fil}^r \mathcal{X} = p_{\bar{\mathcal{X}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}^r \mathcal{Y} = p_{\bar{\mathcal{Y}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}})$$

**Lemme 3.5.2.** *Soit  $\mathcal{K}$  le noyau (au sens classique) de  $f$ . Alors  $\mathcal{K}$  est un  $k[u]/u^{ep}$ -module libre.*

**Dmonstration.** Comme  $f$  commute  $\phi_r$ , elle induit une application  $f : \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \rightarrow \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{Y})$  qui est  $k[u^p]/u^{ep}$ -linéaire. Il suffit de prouver que  $(\mathcal{K} \cap \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X}))$  est un  $k[u^p]/u^{ep}$ -module libre.

Soit  $z \in \mathcal{K} \cap \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  tel que  $u^p z = 0$ . Comme  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  est libre, on peut trouver  $x \in \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  tel que  $z = u^{p(e-1)}x$ . Alors,  $f(z) = u^{p(e-1)}f(x) = 0$  et, puisque  $\mathcal{Y}$  est un  $k[u]/u^{ep}$ -module libre, il existe  $y \in \mathcal{Y}$  tel que  $f(x) = u^p y$ . De plus  $x \in \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  par hypothèse et donc il existe  $t \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$  tel que  $\phi_r(t) = x$ . Ainsi  $f \circ \phi_r(t) = u^p y$  et  $\phi_r \circ f(t) = u^p y$ . Cela prouve  $f(t) \in u \text{Fil}^r \mathcal{Y}$  d'après la deuxième partie de la proposition 3.2.3.

Rduisons modulo  $u^p$  et notons avec des barres les éléments réduits. On a  $\bar{f}(\bar{t}) \in u \text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}}$  et donc il existe  $\bar{s}' \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}}$  tel que  $\bar{f}(\bar{t}) = u \bar{s}'$ . De plus on peut supposer  $\bar{s}' \in \text{im } \bar{f}$  puisque  $\text{im } \bar{f}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ , donc libre en tant que  $k[u]/u^p$ -module. Cet élément  $\bar{s}'$  admet un antécédent (par  $\bar{f}$ ) dans  $\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$  d'après le i) du thorme 3.5.1. Finalement, il existe  $\bar{t}' \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$  tel que  $\bar{f}(\bar{t}') = u \bar{s}'$ . La différence  $\bar{t} - u \bar{t}'$  est donc un élément de  $\ker \bar{f}$ .

Vu dans  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , il existe  $t' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$  et  $z' \in \ker f$  tels que  $t = z' + ut'$  (puisque  $u^{p-1} \mathcal{X} \subset \text{Fil}^r \mathcal{X}$ ). En appliquant  $\phi_r$  cette dernière égalité, il vient  $x = \phi_r(z') + u^p \phi_r(t')$  et on a bien  $\phi_r(z') \in \ker f$  et  $z = u^{p(e-1)}x = u^{p(e-1)}\phi_r(z')$ .

Ceci démontre bien la liberté du noyau.  $\square$

**Lemme 3.5.3.** *L'image et le conoyau de  $f$  sont des  $k[u]/u^{ep}$ -modules libres.*

**Dmonstration.** En tant que  $k[u]/u^{ep}$ -module, l'image de  $f$  s'identifie au quotient  $\mathcal{X}/\ker f$  et le conoyau au quotient  $\mathcal{Y}/\text{im } f$ . Le lemme résulte du fait que si  $M$  est un  $k[u]/u^{ep}$ -module libre de type fini et  $N$  est un sous  $k[u]/u^{ep}$ -module libre de  $M$ , alors le quotient  $M/N$  est libre.  $\square$

Notons  $\mathcal{C}$  le conoyau de  $f$ ,  $\bar{\mathcal{K}}$  le noyau de  $\bar{f}$  et  $\bar{\mathcal{C}}$  le conoyau de  $\bar{f}$  et considrons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & p_{\mathcal{K}} \downarrow & & p_{\mathcal{X}} \downarrow & & p_{\mathcal{Y}} \downarrow & & p_{\mathcal{C}} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{\mathcal{Y}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Lemme 3.5.4.** *La flèche  $p_{\mathcal{K}}$  (resp.  $p_{\mathcal{C}}$ ) définie par le diagramme précédent est surjective et de noyau  $u^p \mathcal{K}$  (resp.  $u^p \mathcal{C}$ ). Autrement dit  $\bar{\mathcal{K}}$  s'identifie  $\mathcal{K}/u^p \mathcal{K}$  et  $\bar{\mathcal{C}}$   $\mathcal{C}/u^p \mathcal{C}$ .*

**Dmonstration.** Commençons par le noyau et la surjectivité. Soit  $\bar{x} \in \bar{\mathcal{K}}$ . Il se relève en  $x \in \mathcal{X}$  tel que  $f(x) = 0 \pmod{u^p}$ . Il existe donc  $y \in \mathcal{Y}$  tel que  $f(x) = u^p y$ . On a  $u^p y \in \text{im } f$  et, puisque  $\text{im } f$  est libre sur  $k[u]/u^{ep}$ , il existe  $y' \in \text{im } f$  tel que  $u^p y = u^p y'$  et donc  $u^p y = f(u^p x')$  pour un certain  $x' \in \mathcal{X}$ . Mais alors  $x - u^p x' \in \mathcal{K}$  s'envoie sur  $\bar{x}$  par  $p_{\mathcal{K}}$ . Ceci prouve la surjectivité.

Soit maintenant  $x \in \mathcal{K}$  tel que  $p_{\mathcal{K}}(x) = 0$ . On a  $p_{\mathcal{X}}(x) = 0$  et donc  $x$  est un multiple de  $u^p$  dans  $\mathcal{X}$ . Il l'est aussi dans  $\mathcal{K}$  puisque  $\mathcal{K}$  est un  $k[u]/u^{ep}$ -module libre. Finalement  $\ker p_{\mathcal{K}} = u^p \mathcal{K}$ .

On utilise des arguments analogues pour le conoyau.  $\square$

On définit  $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^r \mathcal{X}$ , un Frobenius  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  et un opérateur de monodromie  $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  induits des opérateurs sur  $\mathcal{X}$ . De même, on définit  $\text{Fil}^r \mathcal{C}$  comme l'image

de  $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$  par la projection  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{C}$ , un Frobenius et un opérateur de monodromie sur  $\mathcal{C}$ , les opérateurs sur  $\mathcal{Y}$  passant au quotient.

**Lemme 3.5.5.** *Munis des structures précédentes, les objets  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{C}$  sont des objets de la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et respectivement un noyau et un conoyau de l'application  $f$ .*

**Démonstration.** Les conditions de compatibilité et le fait que si les objets sont dans la catégorie, ils sont noyau ou conoyau est évident. Le seul point délicat est la « surjectivité » des  $\phi_r$ .

Modulo  $u^p$ , les objets  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{C}$  avec toutes leurs structures se réduisent d'après le lemme 3.5.4 sur  $\bar{\mathcal{K}}$  et  $\bar{\mathcal{C}}$  et on sait alors que les  $\phi_r$  définis sur ces objets sont « surjectifs ». Notons  $(e_1, \dots, e_d)$  une base adaptée de  $\mathcal{K}$  (qui existe bien) et  $G$  la matrice de  $\phi_r$  dans cette base. Cette matrice est inversible modulo  $u^p$  et donc son déterminant est inversible modulo  $u^p$  puis modulo  $u^{ep}$ . La matrice  $G$  est donc inversible et  $\text{im } \phi_r$  engendre bien tout  $\mathcal{K}$ . On raisonne de même pour  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Corollaire 3.5.6.** *La catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  est abélienne et artinienne. Plus précisément soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme dans  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ , alors :*

i)  $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$  ;

ii) Soit  $\mathcal{K}$  le noyau de l'application  $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente,  $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$ ,  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  la restriction de  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  la restriction de  $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Avec ces structures,  $\mathcal{K}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et donne le noyau de  $f$  dans  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  ;

iii) Soit  $\mathcal{C}$  le conoyau de l'application  $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente,  $\text{Fil}^r \mathcal{C}$  l'image de  $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  l'application qu'induit  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  le quotient de  $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Avec ces structures,  $\mathcal{C}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et donne le conoyau de  $f$  dans  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ .

**Démonstration.** On a déjà prouvé ii) et iii). Il ne reste en fait plus qu'à démontrer i) car il implique l'isomorphisme entre image et coimage. On a évidemment toujours l'inclusion  $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$ .

Soit  $y \in \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$ . La réduction  $\bar{y}$  de  $y$  modulo  $u^p$  est un élément de  $\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}} \cap \bar{f}(\bar{\mathcal{X}})$  (en gardant les notations précédentes) et d'après le théorème 3.5.1,  $\bar{y} \in \bar{f}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}})$ . Il existe  $\bar{x} \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$  tel que  $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ . Notons  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $\text{Fil}^r \mathcal{X}$ . Il existe un élément  $t \in \mathcal{Y}$  tel que  $y = f(x) + u^p t$ . Les éléments  $y$  et  $f(x)$  sont dans  $\text{im } f$ , il en est donc de même de  $u^p t$  et puisque  $\text{im } f$  est libre sur  $k[u]/u^{ep}$ , il existe  $y'' \in \text{im } f$  tel que  $u^p t = u^p y''$ . On écrit  $y'' = f(x'')$  pour un certain  $x'' \in \mathcal{X}$ , et il vient  $y = f(x + u^p x'')$ . Comme  $u^{er} \mathcal{X} \subset \text{Fil}^r \mathcal{X}$  et  $er < p - 1$ , on a  $u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$  et donc  $x + u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$ . Finalement  $y \in f(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  et on peut conclure.  $\square$

### La catégorie $\mathcal{M}^r$

Si  $r = 0$ , on vérifie facilement (la propriété i) du corollaire précédent est alors évidente) que la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}^r$  formée des objets tus par  $p$  est abélienne et artinienne. Sinon, on peut supposer  $\pi^e = p$  et utiliser les résultats précédents. On procède ensuite par diviseur. La preuve est en tout point analogue à celle déjà connue dans le cas  $e = 1$  et présente dans le paragraphe 2.3 de [Bre97a]. Les lemmes et les propositions successives gardent un sens

dans ce contexte plus gnral, et sont galement vrais, les preuves tant encore textuellement les mmes. Nous n'insisterons donc pas davantage et laissons le lecteur se reporter cette rfrence.

*Remarque.* De mme, on prouve que les catgories  $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et  $\underline{\mathcal{M}}_0^r$  sont abliennes et artiniennes.

## 4 Classification des objets simples

Nous allons donner une classification complte des objets simples de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  lorsque le corps rsiduel  $k$  est algbriquement clos. Nous essaierons galement d'expliquer ce qui se passe lorsque ce n'est pas le cas. Pour l'instant, on ne fait aucune hypothse supplémentaire sur  $k$ .

On considre  $\mathcal{M}$  un objet simple (donc non nul) de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Il est obligatoirement tu par  $p$ . En effet, si ce n'tait pas le cas, le noyau de la multiplication par  $p$  dans  $\mathcal{M}$  fournirait un sous-objet strict de  $\mathcal{M}$  (noter que la multiplication par  $p$  ne peut pas tre injective car elle est nilpotente :  $\mathcal{M}$  est suppos tre tu par une puissance de  $p$ ). L'objet simple  $\mathcal{M}$  peut tre vu dans la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  (du moins si  $r > 0$ , mais dans le cas contraire, le rsultat est immdiat et laiss au lecteur) : c'est un  $k[u]/u^{ep}$ -module muni d'un  $\text{Fil}^r$ , d'un  $\phi_r$  et d'un opérateur de monodromie vrifiant les bonnes propriets.

### 4.1 La monodromie

Si l'on note  $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$ , l'application de monodromie  $N$  induit une application linéaire nilpotente  $N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$  (voir proposition 3.2.4) et il existe  $x_1 \in \mathcal{M}_0 \setminus u\mathcal{M}_0$  tel que  $N(x_1) = 0$  (voir corollaire 3.2.5). Notons  $x_2 = \varphi_r(x_1)$  (voir dfinition 3.2.2) puis par rcurrence  $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$ , ce qui est possible d'après la deuxime partie de la proposition 3.2.3. On a  $N(x_i) = 0$  pour tout entier  $i$ .

Notons  $\bar{x}_i$  la rduction modulo  $u^p$  de  $x_i$ . Les  $\bar{x}_i$  sont des lments non nuls de  $\mathcal{M}_0/u^p\mathcal{M}_0$  qui est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Notons  $n \geq 1$  le plus petit indice tel que  $\bar{x}_{n+1}$  puisse s'crire comme combinaison linéaire des  $\bar{x}_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n$ . Il existe donc  $\lambda_i \in k$  tels que :

$$\bar{x}_{n+1} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$$

et on peut supposer  $\lambda_1 \neq 0$  quitte remplacer  $x_1$  par le plus petit indice  $i$  tel que  $\lambda_i \neq 0$ . Comme  $\bar{x}_{n+1} \neq 0$ , les  $\lambda_i$  ne peuvent tre tous simultanment nuls.

Nous allons prsent corriger les  $x_i$  pour que cette relation ne soit plus vraie seulement modulo  $u^p$ . On procde par approximations successives et on construit une suite indexe par  $j$  d'lments  $x_i^{(j)}$  qui sont tels que  $x_i^{(j)} \equiv x_i \pmod{u^p}$ ,  $x_{i+1}^{(j)} = \varphi_r(x_i^{(j)})$ ,  $N(x_{i+1}^{(j)}) = 0$  et finalement :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$$

les  $\lambda_i$  restant inchangs. On a une solution pour  $j = 1$ . Supposons qu'on l'ait pour  $j$  et construisons-en une pour  $j + 1$ . On cherche un lment  $r \in \mathcal{M}_0$  tel que l'on puisse poser  $x_1^{(j+1)} = x_1^{(j)} + u^{jp}r$ . On dfinirait alors les  $x_i^{(j+1)}$  via la formule de rcurrence  $x_{i+1}^{(j+1)} = \varphi_r(x_i^{(j+1)})$

et il est facile de vrifier que pour tout  $i \geq 2$ , on aurait  $x_i^{(j+1)} \equiv x_i^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$ . Au final, il suffit de trouver  $r$  tel que :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 \left( x_1^{(j)} + u^{jp} r \right) + \lambda_2 x_2^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$$

mais comme par hypothse, on a  $x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$ , on a bien l'existence d'un tel  $r$  : il suffit de le prendre tel que  $u^{jp} \lambda_1 r = x_{n+1}^{(j)} - \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)}$ . De plus, en appliquant  $N$  cette dernire galit, on voit que  $N(u^{jp} \lambda_1 r) = \lambda_1 u^{jp} N(r) = 0$  et donc que  $N(x_1^{(j+1)}) = 0$  puisque  $\lambda_1$  est suppos non nul. Ceci implique la nullit de tous les  $N(x_i^{(j+1)})$ .

Pour  $j = e$ , l'galit a lieu modulo  $u^{ep}$  et donc dans  $\mathcal{M}$ . Soit  $K$  le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendr par les  $x_i^{(e)}$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . La libert sur  $k$  des  $\bar{x}_i$  assure que  $K$  est un module libre de rang  $n$ . Notons  $\mathcal{M}_i = u^i \text{im } \phi_r$  et  $\text{Fil}^r K = \sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}_i \cap K$ . Par construction,  $N$  stabilise  $K$  et  $\phi_r$  envoie  $\text{Fil}^r K$  sur  $K$ . En outre, encore par construction l'image de la restriction de  $\phi_r$   $\text{Fil}^r K$  engendre  $K$  : on voit que l'objet  $K$  est dans la catgorie  $\widetilde{\underline{MF}}^r$ . Comme  $\mathcal{M}$  est simple, ce sous-objet est tout  $\mathcal{M}$ . Ainsi on a prouv la proposition suivante :

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Alors  $\mathcal{M}$  est dans la catgorie  $\widetilde{\underline{MF}}^r$  et l'oprateur de monodromie  $N$  est nul sur  $\text{im } \phi_r$ . De plus  $\mathcal{M}$  admet une base adapte de la forme  $(x_1, \dots, x_d)$  telle que  $N(x_i) = 0$ ,  $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$  (voir dfinition 3.2.2) et :*

$$\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$$

o les  $\lambda_i$  sont des lments de  $k$  tels que  $\lambda_1 \neq 0$ .

qui admet pour corollaire immdiat la proposition 3.3.4 que l'on vient donc de dmontrer.

## 4.2 Une base adapte simple

Nous allons dans ce paragraphe prciser un peu plus l'nonc de la proposition 4.1.1 dans le cas o le corps rsiduel  $k$  est algbriquement clos.

**Lemme 4.2.1.** *Supposons  $k$  algbriquement clos. Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Alors  $\mathcal{M}$  est dans  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}$  et il existe  $(e_1, \dots, e_d)$  une base adapte de  $\mathcal{M}$  telle que  $N(e_i) = 0$ ,  $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$ , les indices  $i$  tant considrs dans  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .*

**Dmonstration.** On sait d'aprs la proposition prcdente qu'il existe une base adapte  $(x_1, \dots, x_d)$  telle que  $\varphi_r(x_i) = x_{i+1}$  pour  $i$  compris entre 1 et  $d-1$  et  $\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$  o  $\lambda_i \in k$  et  $\lambda_1 \neq 0$ .

Parmi toutes les bases adaptes qui vrifient ces conditions, choisissons-en une pour laquelle le nombre de  $\lambda_i$  non nuls est minimal. On crit alors plutt :

$$x_{d+1} = \varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_k x_{i_k}$$

o tous les  $\lambda_i$  sont non nuls et les indices  $i_k$  sont compris entre 0 et  $d$ . De plus, on peut supposer  $i_1 = 1$ . Notons pour tout  $i$ ,  $n_i$  le plus petit entier tel que  $u^{n_i} x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Si tous les  $n_{i_j}$  n'taient pas gaux,  $\varphi_r(x_{d+1})$  s'crivrait comme une combinaison liniaire de  $x_2, \dots, x_{d+1}$  faisant intervenir strictement moins de  $k$  termes et la famille  $(x_2, \dots, x_{d+1})$  fournirait une



base adapte de  $\mathcal{M}$  (en reprenant l'tude faite de le paragraphe prcdent). Mais ceci est en contradiction avec la minimalit considre.

Ainsi tous les  $n_{i_j}$  sont gaux et donc gaux  $n_{d+1}$ . Par rcurrence, on prouve que pour tout entier fix  $a$ , tous les  $n_{i_j+a}$  sont gaux, les indices  $i_j + a$  tant considrs modulo  $d$ .

Notons  $t$  le plus grand commun diviseur de  $d$  et de toutes les diffrences  $i_j - i_{j'}$ . D'aprs ce qui prede la suite des  $n_i$  est priodique de priode (divisant)  $t$ . On considre alors le sous- $k$ -espace vectoriel de  $\mathcal{M}$  engendr par les  $x_{tn}$  o  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . L'application  $\varphi_r^t$  stabilise ce sous-espace et y est  $\phi^t$ -semi-linaire. En particulier, puisque  $k$  est algbriquement clos, il existe un lment  $e_1$  de ce sous-espace tel que  $\varphi_r^t(e_1) = \lambda e_1$  pour un certain  $\lambda \in k^*$ . Quitte multiplier  $e_1$  par un lment de  $k$ , on peut supposer  $\lambda = 1$ .

On dfinit  $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$ . La famille  $(e_1, \dots, e_t)$  engendre un espace stable par  $N$  et par  $\phi_r$  qui est par construction un sous-objet non nul de  $\mathcal{M}$ . C'est donc tout  $\mathcal{M}$ . De plus, d'aprs la proposition 4.1.1,  $N(e_i) = 0$  pour tout  $i$ . Finalement  $(e_1, \dots, e_t)$  est une base adapte vrifiant les conditions du lemme. Cela conclut.  $\square$

### 4.3 Classification proprement dite

**Dfinition 4.3.1.** Soit  $(n_i)$  une suite priodique<sup>3</sup> d'entiers compris entre 0 et  $er$ . On note  $h$  la priode de cette suite. On dfinit l'objet  $\mathcal{M}(n_i) \in \widetilde{\mathcal{M}}^r$  de la faon suivante :

1.  $\mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} k[u]/u^{ep}e_i$ ;
2.  $\text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} u^{ni}k[u]/u^{ep}e_i$ ;
3.  $\phi_r(u^{ni}e_i) = e_{i+1}$  pour tout indice  $i$ ;
4.  $N(e_i) = 0$  pour tout indice  $i$ .

Il est facile de vrifier que tous ces objets sont bien dans la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et on a le thorme suivant :

**Thorme 4.3.2.** Supposons  $k$  algbriquement clos. Les objets  $\mathcal{M}(n_i)$  sont des objets simples de la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . De plus, si  $\mathcal{M}$  est un objet simple de la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ , alors il est isomorphe un certain  $\mathcal{M}(n_i)$ .

**Dmonstration.** Voyons d'abord la simplicit de  $\mathcal{M}(n_i)$ . Soit  $\mathcal{M}$  un sous-objet non nul de  $\mathcal{M}(n_i)$ . L'image de la restriction de  $\phi_r$   $\mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i)$  est suppose engendrer tout  $\mathcal{M}$ ; en particulier elle n'est pas rduite 0 et comprend un lment non divisible par  $u^p$ , disons  $x$ . On crit  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_h e_h$  o les  $\lambda_i$  sont des polynmes coefficients dans  $k[u^p]/u^{ep}$ . On peut supposer  $\lambda_i \in k$  quitte remplacer  $x$  par  $\varphi_r \circ \varphi_r(x)$ .

Considrons un  $x$  pour lequel le nombre de  $\lambda_i$  non nuls est minimal et crivons :

$$x = \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_k e_{i_k}$$

avec ici tous les  $\lambda_i$  non nuls. En appliquant  $\varphi_r$  ventuellement plusieurs fois, on voit que tous les  $n_{i_j}$  doivent tre gaux car sinon, on obtient un nouvel  $x$  qui serait combinaison d'un

<sup>3</sup>Par « priodique », on entend dans ce papier « priodique ds le dbut » et pas « priodique partir d'un certain rang ».

nombre plus petit de  $e_i$ . On applique alors  $\varphi_r$  l'egalit precedente et comme precedemment, on prouve que tous les  $n_{i_j+1}$  sont gaux. Par recurrence, on voit que pour  $a$  fix tous les  $n_{i_j+a}$  sont gaux. Ainsi, pour que la suite  $(n_i)$  soit priodique de priode exactement  $h$ , il faut que  $k = 1$ , c'est--dire que  $x$  soit multiple de l'un des  $e_i$ . Mais alors le sous-objet engendr par  $x$  est tout  $\mathcal{M}(n_i)$  et finalement  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n_i)$ . Ce qui assure la simplicite.

Voyons la rciproque. On applique le lemme 4.2.1 qui donne une description explicite de l'objet  $\mathcal{M}$ . Il reste juste dmontrer que la suite  $(n_i)$  ne peut-tre priodique de priode divisant strictement  $h$ . Mais supposons que ce soit le cas et notons  $t$  cette priode. On considere le sous-objet engendr par l'element  $x = e_t + e_{2t} + \dots + e_h$  et on vrifie immdiatement qu'il est non nul et strictement inclus dans  $\mathcal{M}$ . C'est une contradiction.  $\square$

*Remarque.* En utilisant la correspondance de [Bre00], on retrouve exactement la classification donne par Raynaud dans [Ray74].

### tude des endomorphismes

On suppose toujours le corps  $k$  algbriquement clos. Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Soit  $(e_1, \dots, e_h)$  une base adapte de  $\mathcal{M}$  vrifiant les conditions du thorme 4.3.2. Nous allons en fait voir que les  $e_i$  sont presque uniquement dtermins. Plus prcisment, on a :

**Thorme 4.3.3.** *Supposons  $k$  algbriquement clos. Si  $\lambda \in k$  vrifie  $\lambda^{p^h} = \lambda$ , alors l'application  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  dfinie par  $\psi(e_i) = \lambda^{p^i} e_i$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}$ . Ce sont les seuls.*

**Dmonstration.** Dj il est facile de vrifier que les applications dfinies dans l'nonc du thorme sont bien compatibles au Fil<sup>r</sup>, au Frobenius et l'oprateur de monodromie.

Pour la rciproque, nous allons anticiper sur des rsultats ultrieurs donnant une application non nulle  $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  (la non-nullit se dduit de la fidlit du foncteur  $T_{\text{st}}$ , voir corollaire 5.3.4). D'autre part  $\text{End}(\mathcal{M})$  est un corps *a priori* non commutatif et  $\text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  est un corps fini  $p^h$  lments (cela se dduit de thorme 5.2.2). On en dduit facilement que la flche  $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  est bijective, ce qui prouve le thorme.  $\square$

**Corollaire 4.3.4.** *Les objets simples  $\mathcal{M}(n_i)$  et  $\mathcal{M}(m_i)$  sont isomorphes si et seulement si la suite  $(m_i)$  se dduit de la suite  $(n_i)$  par translation.*

**Dmonstration.** Si deux objets  $\mathcal{M}(n_i)$  et  $\mathcal{M}(m_i)$  sont isomorphes, on peut transporter une base adapte de  $\mathcal{M}(n_i)$   $\mathcal{M}(m_i)$  et le thorme precedent entrane la conclusion voulue.  $\square$

### Un autre point de vue

Donnons finalement un point de vue diffrent sur cette classification, peut-tre plus agrable retenir.

Soit  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque d'entiers compris entre 0 et  $p - 1$  et soit  $t$  le rationnel dont le dveloppement « dcimal » en base  $p$  est :

$$t = 0, n_1 n_2 n_3 n_4 \dots$$

On a une propriit classique :

**Proprieté 4.3.5.** Avec les notations précédentes, les suites périodiques sont exactement celles qui correspondent aux rationnels de  $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1]$  où  $\mathbb{Z}_{(p)}$  désigne le localisé de  $\mathbb{Z}$  en  $p$ .

On peut alors poser la définition suivante :

**Définition 4.3.6.** Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de  $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$  pour la relation d'équivalence suivante :  $a \sim b$  si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que  $a \equiv p^n b \pmod{\mathbb{Z}}$ .

La dernière relation d'équivalence n'est pas mystérieuse : elle correspond simplement à un décalage des décimales du nombre. En particulier, à cause de la périodicité, les classes d'équivalence sont toutes finies.

Dans ces conditions,  $\mathcal{R}$  classe exactement les objets simples de la catégorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  (via la correspondance que l'on a décrite précédemment).

Nous verrons par la suite que le « rationnel classifiant » va apparaître de façon naturelle.

## 5 Étude du foncteur $T_{\text{st}}$

### 5.1 Un système préliminaire

Ce paragraphe présente une version légèrement différente de résultats classiques et par exemple déjà discutés dans [Wac97] ou dans le paragraphe 3.3.2 de [Bre97a]. On suppose dans ce paragraphe que le corps résiduel  $k$  est algébriquement clos.

On considère un entier  $h$  strictement positif. On fixe  $\eta^{(h)}$  une racine  $(p^h - 1)$ -ième de l'uniformisante  $\pi$  de  $K$  et on appelle  $K^{(h)}$  l'extension de  $K$  engendrée par cette racine. On rappelle que  $K^{(h)}/K$  est totalement et modérément ramifiée de degré  $p^h - 1$ . On rappelle également que la limite inductive de toutes ces extensions est l'extension maximale modérément ramifiée de  $K$ . Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguïté, on notera  $\eta$  la place de  $\eta^{(h)}$ . On rappelle enfin que  $\pi_1$  désigne une racine  $p$ -ième de  $\pi$ .

On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{(\pi_1^{n_1} \hat{x}_1 + \hat{c}_1)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_2 + \hat{r}_1 \\ \frac{(\pi_1^{n_2} \hat{x}_2 + \hat{c}_2)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_3 + \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \frac{(\pi_1^{n_h} \hat{x}_h + \hat{c}_h)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_1 + \hat{r}_h \end{cases}$$

où les  $n_i$  sont des entiers fixes tous compris entre 0 et  $er$ , et où les  $\hat{r}_i$  et les  $\hat{c}_i$  sont des éléments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Les inconnues sont les  $\hat{x}_i$  que l'on cherche également dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On pose dans la suite  $m_i = er - n_i$ .

## Sans coefficient constant

On s'intresse tout d'abord au cas o toutes les constantes  $\hat{r}_i$  et  $\hat{c}_i$  sont nulles. Il est alors possible de rsoudre directement le systme dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . En effet, le systme se rcrit simplement :

$$\hat{x}_i^p = \pi^{m_i} \hat{x}_{i+1}.$$

Par des manipulations simples, on voit que  $\hat{x}_1$  doit tre solution de l'quation :

$$\hat{x}_1^{p^h} = \pi^{s_1} \hat{x}_1$$

o  $s_1$  est dfini par la formule :

$$s_1 = m_1 p^{h-1} + m_2 p^{h-2} + \dots + m_{h-1} p + m_h.$$

Cette quation admet  $p^h$  solutions qui sont 0 et toutes les racines  $(p^h - 1)$ -imes de  $\pi^{s_1}$ . partir de  $\hat{x}_1$ , on reconstruit les autres  $\hat{x}_i$  et on vrifie qu'ils forment bien une solution du systme.

On peut presenter les choses de faon plus homogne en procdant comme suit. On pose pour tout  $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$  :

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

Si  $\varepsilon$  est une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'unit (qui est dj dans  $K$ ), la famille des  $\hat{x}_i = \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$  est une solution de  $(S)$ . Toutes les solutions s'obtiennent ainsi l'exception de la solution nulle  $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_h = 0$ .

## Un lemme la Hensel

On ne suppose plus que les constantes sont nulles et on cherche un lien entre les solutions de  $(S)$  modulo  $p$  et les solutions de  $(S)$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  :

**Lemme 5.1.1.** *Avec les notations prcdentes, si le systme  $(S)$  admet une solution  $(x_1, \dots, x_h)$  modulo  $p$ , alors cette solution se relve dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  en une solution  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ .*

**Dmonstration.** On construit cette solution par approximations successives. Fixons tout d'abord une extension finie  $L$  de  $K^{(h)}$  suffisamment grande pour contenir tous les  $\hat{r}_i$ , les  $\hat{c}_i$  et pour que tous les  $x_i$  puissent s'y relever. L'extension  $L/K^{(h)}$  est totalement ramifie (puisque  $k$  est suppos algbriquement clos), disons de degr  $d$ . Notons  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers de  $L$ .

On va construire une suite de  $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_h^{(n)})$  de solutions compatibles du systme  $(S)$  modulo  $\eta^n$  dans  $\mathcal{O}_L$ . Il suffira par la suite de prendre la limite de cette suite pour avoir une solution du systme dans  $\mathcal{O}_L$  et donc dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ .

On a dj, par hypothse, un  $h$ -uplet pour  $n = e(p^h - 1)$ . Les suivants se construisent par rcurrence. On part d'un entier  $n \geq e(p^h - 1)$  et d'lments  $x_1^{(n)}, \dots, x_h^{(n)}$  vrifiant :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \hat{r}_i \pmod{\eta^n}$$

pour tout indice  $i$  pris dans  $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$  et on cherche construite  $y_1, \dots, y_h$ , tels que :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{m_i}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_{i+1} + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

Un calcul donne :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{er}} = \frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} + \sum_{k=1}^p C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} y_i^k \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}$$

Soit un entier  $k \geq 1$ . On a  $v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}}\right) = \frac{kn_i}{p} + \frac{kn}{p^h-1} - er$ . D'autre part,  $\frac{(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}}$  est un entier, donc de valuation positive et on en dduit que  $v(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i) \geq \frac{er}{p}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} v_i = v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) &\geq \frac{kn}{p^h-1} + \frac{kn_i}{p} - er + (p-k) \frac{er}{p} \\ &= \frac{n}{p^h-1} + (k-1) \frac{n}{p^h-1} - \frac{km_i}{p} \end{aligned}$$

Comme par hypothse  $n \geq e(p^h-1)$  et  $m_i \leq er$ , il vient :

$$v_i \geq \frac{n}{p^h-1} + e(k-1) - \frac{ker}{p} = \frac{n}{p^h-1} - e + ek \left(1 - \frac{r}{p}\right)$$

Maintenant si  $k < p$ , le coefficient binomial  $C_p^k$  est multiple de  $p$  et donc :

$$v\left(C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geq e + v_i \geq \frac{n}{p^h-1} + ek \left(1 - \frac{r}{p}\right) \geq \frac{n+1}{p^h-1}$$

la dernire ingalit rsultant du fait que  $r \leq er \leq p-2$ .

On en dduit que tous les termes de la somme pour  $k$  compris strictement entre 0 et  $p$  sont nuls modulo  $\eta^{n+1}$ . En fait, c'est aussi le cas pour  $k = p$ . En reprenant les galits prcdentes, on voit que :

$$v_p \geq \frac{n}{p^h-1} + e(p-1-r)$$

mais  $p-1-r \geq 1$  et donc on a galement  $v_p \geq \frac{n+1}{p^h-1}$ . Finalement le systme que l'on a rsoudre se rduit :

$$\frac{\left(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_i + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

mais on sait que la diffrence  $\frac{(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}} - x_{i+1}^{(n)} - \hat{r}_i$  est un multiple de  $\eta^n$ , et donc s'crit  $\eta^n q_i$ . Il suffit ensuite de choisir  $y_i = q_i$  pour avoir la solution que l'on cherchait.  $\square$

## Rsolution du systme

Une premire consquence du lemme que l'on vient de prouver est la rsolution du systme (S) modulo  $p$  lorsque les constantes  $\hat{r}_i$  et  $\hat{c}_i$  sont toutes nulles :

**Lemme 5.1.2.** *Supposons que les constantes  $\hat{r}_i$  et  $\hat{c}_i$  soient nulles. Mise part la solution nulle, les solutions de (S) dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  s'crivent  $x_i = \varepsilon^{p^i} \bar{\eta}^{s_i}$  o  $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$  est une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'unit,  $\bar{\eta}$  est la rduction de  $\eta$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  et :*

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

**Dmonstration.** Si  $\varepsilon$  est une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'unit et si  $x_i$  dsigne la rduction modulo  $p$  de  $\varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ , le uplet  $(x_1, \dots, x_h)$  est solution du systme dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . De plus, si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont deux racines  $(p^h - 1)$ -imes de l'unit distinctes, on a pour tout entier  $i$ ,  $\varepsilon^{p^i} \neq \varepsilon'^{p^i}$  dans le corps rsiduel et donc  $\varepsilon^{p^i} - \varepsilon'^{p^i}$  est de valuation nulle. On en dduit, puisque  $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} < 1$ , que  $x_i = \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$  et  $x'_i = \varepsilon'^{p^i} \eta^{s_i}$  sont distincts dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ .

On a ainsi trouv  $p^h$  solutions (S) modulo  $p$ . Le lemme 5.1.1 assure qu'il y en a au moins autant dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Mais on a vu qu'il y en a exactement  $p^h$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ , on les a donc toutes.  $\square$

Passons au cas gnral. On reprend le systme (S) mais on ne suppose plus la nullit de  $\hat{r}_i$  et de  $\hat{c}_i$ .

**Thorme 5.1.3.** *Supposons que le systme (S) admette une solution dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ , alors il admet toujours  $p^h$  solutions dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  et  $p^h$  solutions dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . De plus l'application de rduction modulo  $p$  dfinit une bijection entre ces ensembles de solutions.*

*En outre si  $(x_1, \dots, x_h)$  et  $(y_1, \dots, y_h)$  sont deux solutions distinctes dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ , alors il existe une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'unit  $\varepsilon$  telle que  $y_i = x_i + \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$  pour tout indice  $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$  o  $s_i$  est dfini par la formule :*

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}$$

**Dmonstration.** Soit  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$  une solution de (S) dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Si l'on note  $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  la rduction modulo  $p$  de  $\hat{x}_i$ , le uplet  $(x_1, \dots, x_h)$  est solution de (S) modulo  $p$ . Prenons  $\varepsilon$  une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'unit et posons  $y_i = x_i + \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ . Un calcul donne :

$$\left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p = \left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p + \pi^{n_i} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i} + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \pi_1^{kn_i} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k}$$

Or les  $\hat{x}_i$  forment une solution de (S) et donc on a  $v(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i) \geq \frac{er}{p}$ . galement, on a  $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} \geq \frac{m_i}{p}$ . Finalement, on obtient :

$$v \left( \pi_1^{kn_i} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k} \right) \geq k \frac{n_i}{p} + k \frac{m_i}{p} + (p - k) \frac{er}{p} = er$$

Ainsi tous les termes de la somme sont des multiples de  $p\pi^{er}$ . Modulo  $p$ , il reste :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{er}} \left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p &\equiv \frac{\left( \pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p}{\pi^{er}} + \frac{\pi^{n_i} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{er}} \pmod{p} \\ &\equiv \hat{x}_{i+1} + \hat{r}_i + \frac{\varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{m_i}} \pmod{p} \end{aligned}$$

On remarque que  $ps_i = s_{i+1} + m_i(p^h - 1)$ , puis que  $(y_1, \dots, y_h)$  est solution de  $(S)$ . On conclut en reprenant la démonstration du lemme 5.1.2.  $\square$

Voici un dernier corollaire qui nous sera utile par la suite :

**Corollaire 5.1.4.** *Soit  $g$  un élément du groupe de Galois  $G_K$  qui fixe tous les  $\hat{r}_i$  et tous les  $\hat{c}_i$ . Soit  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$  une solution de  $(S)$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On note  $x_i$  la réduction modulo  $p$  de  $\hat{x}_i$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ ,  $g$  fixe  $\hat{x}_i$  si et seulement si  $g$  fixe  $x_i$ .*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que si  $g$  fixe les  $x_i$  alors  $(g\hat{x}_1, \dots, g\hat{x}_h)$  est aussi solution de  $(S)$ . En effet, d'après le théorème précédent, si ces deux solutions sont distinctes dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ , elles le sont aussi modulo  $p$ . Le théorème 5.1.3 donne ceci : dans le cas où les deux solutions sont distinctes, dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  comme dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ , toutes les « coordonnées » des  $h$ -uplets sont distinctes. Le corollaire en découle directement.  $\square$

*Remarque.* Dans le cas où tous les  $\hat{c}_i$  sont nuls, il existe toujours une solution au système dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . En effet, en combinant les équations, on aboutit à une unique équation polynomiale à coefficients entiers que doit vérifier  $\hat{x}_1$ . Comme  $\bar{K}$  est algébriquement clos, cette équation admet une solution.

## 5.2 Calcul sur les objets simples

Dans ce paragraphe uniquement, on suppose le corps résiduel  $k$  algébriquement clos. Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Le théorème 4.3.2 affirme que  $\mathcal{M}$  est de la forme  $\mathcal{M}(n_i)$  pour une certaine suite périodique  $(n_i)$ . Notons  $h$  sa période.

L'image de  $\mathcal{M}$  par le foncteur  $T_{\text{st}}$  s'identifie, comme le prouve le lemme 2.3.4, l'ensemble  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$ . Se donner un tel morphisme revient à se donner pour tout  $i$ , un élément  $x_i \in \hat{A}$ , image de  $e_i$ , ces éléments  $x_i$  tant soumis à certaines relations que nous allons expliciter. On rappelle que d'après le lemme 2.3.3, l'anneau  $\hat{A}$  s'identifie à  $(\mathcal{O}_{\bar{K}}\langle X \rangle)/p$ .

**Lemme 5.2.1.** *L'ensemble des  $x \in \hat{A}$  tels que  $N(x) = 0$  est  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ .*

**Démonstration.** Le lemme résulte directement du fait que  $N(X)$  est une unité de  $\hat{A}$ .  $\square$

De  $N(e_i) = 0$ , on déduit  $N(x_i) = 0$  et donc d'après le lemme précédent  $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . Intéressons-nous maintenant à la condition imposée par le Frobenius. Sur l'objet  $\mathcal{M}$ ,  $\phi_r$  est défini par  $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$ . Cela impose donc deux choses : l'élément  $u^{n_i}x_i$  appartient à  $\text{Fil}^r(\mathcal{O}_{\bar{K}}\langle X \rangle)/p$  et on a l'égalité  $\phi_r(u^{n_i}x_i) = x_{i+1}$ .

On rappelle que l'on avait appelé  $p_1$  (resp.  $\pi_1$ ) une racine  $p$ -ième de  $p$  (resp. de  $\pi$ ) et comme  $\pi^e = p$ , on peut supposer en outre que  $\pi_1^e = p_1$ . D'autre part, si  $x = \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!} \in \hat{A}$  ( $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ ), alors  $x \in \text{Fil}^r \hat{A}$  si et seulement si  $a_i$  est un multiple de  $\bar{p}_1^{r-i}$  pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $r$ . Comme, dans  $\hat{A}$ ,  $u = \frac{\pi_1}{1+X}$ , on a  $u^{n_i}x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$  si et seulement si  $\pi_1^{n_i}x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$ , c'est-à-dire  $\pi_1^{er-n_i}$  divise  $x_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ .

Soit  $\hat{x}_i$  un relevé de  $x_i$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  qui est un multiple de  $\pi_1^{er-n_i}$ . Par définition  $\phi_r(u^{n_i}x_i)$  est la réduction modulo  $p$  de :

$$\frac{1}{p^r} \cdot \phi \left( \frac{\pi_1^{n_i}}{(1+X)^{n_i}} \hat{x}_i \right) = \frac{1}{p^r} \cdot \frac{\pi_1^{p n_i}}{(1+X)^{p n_i}} \hat{x}_i^p = \frac{1}{(1+X)^{p n_i}} \cdot \frac{1}{\pi^{er-n_i}} \hat{x}_i^p.$$

Or modulo  $p$ ,  $(1 + X)^p = 1$  et finalement  $\phi_r(u^{n_i} x_i) = \frac{x_i^p}{\pi^{er - n_i}}$ .

Ces equations fournissent un systme qui est exactement celui tudi dans le paragraphe 5.1 avec  $\hat{c}_i = \hat{r}_i = 0$ . En particulier, le lemme 5.1.2 nous fournit directement les solutions.

On vient de prouver le thorme 1.0.3 dont nous rappelons l'nonc :

**Thorme 5.2.2.** *Supposons  $k$  algbriquement clos et  $er < p-1$ . Si l'objet simple  $\mathcal{M}$  s'identifie  $\mathcal{M}(n_i)$  pour une suite  $(n_i)$  priodique de priode  $h$  (voir thorme 4.3.2), alors la representation galoisienne  $T_{st}(\mathcal{M})$  est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

o  $m_i$  est dfini par  $n_i + m_i = er$  et o les  $\theta_i$  sont les caractres fondamentaux de niveau  $h$ .

En particulier, pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tu par  $p$ , les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo  $p$  de  $T_{st}(\mathcal{M})$  sont tous compris entre 0 et  $er$ .

*Remarque.* La preuve prcdente ne rcouvre par directement le cas  $r = 0$ , mais il est facile de le traiter part.

### 5.3 Exactitude et fidlit

#### Exactitude

**Thorme 5.3.1.** *Le foncteur  $T_{st}$  de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dans la catgorie des  $\mathbb{Z}_p$ -representations galoisiennes de torsion est exact.*

**Dmonstration.** La preuve est en tout point semblable celle donne dans le paragraphe 3.2.1. de [Bre97a], et dans le paragraphe 2.3.1. de [Bre99a].  $\square$

#### Fidlit

Commenons par le lemme suivant :

**Lemme 5.3.2.** *Supposons  $k$  algbriquement clos. L'image par le foncteur  $T_{st}$  d'un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  est une representation irrductible.*

**Dmonstration.** Par le thorme 5.2.2, on connat l'image d'un objet simple par le foncteur  $T_{st}$ . On vrifie directement que cette image est une representation galoisienne irrductible.  $\square$

**Corollaire 5.3.3.** *Supposons  $k$  algbriquement clos. Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ , on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{st}(\mathcal{M}))$$

**Dmonstration.** Cela dcoule directement du lemme prcdent et de l'exactitude.  $\square$

*Remarque.* Ces deux derniers rsultats restent vrais si  $k$  n'est pas algbriquement clos (voir thorme 6.4.4).

**Corollaire 5.3.4.** *Le foncteur  $T_{st}$  de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dans la catgorie des  $\mathbb{Z}_p$ -representations galoisiennes de torsion est fidle.*



**Dmonstration.** Supposons dans un premier temps  $k$  algbriquement clos. Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme dans la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tel que  $T_{\text{st}}(f) = 0$ . On a la suite exacte dans  $\underline{\mathcal{M}}^r$  :

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \text{im } f \longrightarrow 0$$

En outre l'application  $\text{im } f \rightarrow \mathcal{Y}$  est injective et donc la flche dduite  $T_{\text{st}}(\mathcal{Y}) \rightarrow T_{\text{st}}(\text{im } f)$  est surjective. On en dduit que  $T_{\text{st}}(\tilde{f}) = 0$ . En appliquant le foncteur exact  $T_{\text{st}}$  la suite exacte crite prcdemment, on voit que  $T_{\text{st}}(\text{im } f) = 0$ . D'apr's le corollaire prcdent,  $\text{im } f = 0$ , puis  $f = 0$ .

Pour le cas gnral, notons  $K^{\text{mr}}$  l'extension maximale modrment ramifie de  $K$ . Son corps rsiduel s'identifie une clture algbrique  $\bar{k}$  de  $k$ . Dsignons par  $S_{\text{mr}}$  l'anneau  $S$  construit partir de  $K^{\text{mr}}$  et par  $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$  la catgorie de modules sur  $S_{\text{mr}}$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ , alors  $\mathcal{M}_{\text{mr}} = S_{\text{mr}} \otimes_S \mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$  et l'application :

$$\begin{aligned} T_{\text{st}}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) \\ f &\mapsto [s \otimes x \mapsto sf(x)] \end{aligned}$$

est un isomorphisme commutant l'action de  $\text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$ . De plus, le morphisme  $\iota_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{mr}}, x \mapsto 1 \otimes x$  est injectif.

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme dans la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  tel que  $T_{\text{st}}(f) = 0$ . Il induit un morphisme  $f_{\text{mr}} : \mathcal{X}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{mr}}$  de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$  et on a  $T_{\text{st}}(f_{\text{mr}}) = 0$ . Par la fidlit dans le cas algbriquement clos, il vient  $\tilde{f} = 0$ . La compose  $\iota_{\mathcal{Y}} \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{mr}}$  est nulle et comme  $\iota_{\mathcal{Y}}$  est injectif,  $f$  est nulle. Ceci dmontre la fidlit.  $\square$

## 6 Pleine fidlit du foncteur $T_{\text{st}}$

Dans cette partie, on suppose toujours dans un premier temps que le corps rsiduel  $k$  est algbriquement clos. La propri'te de pleine fidlit reste valable sans cette hypothse et nous verrons dans le dernier paragraphe comment le cas gnral se dduit simplement du cas « algbriquement clos ».

Par un argument classique (voir [Fon82]), on se ramne prouver le lemme suivant :

**Lemme 6.0.5.** *Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux objets simples de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Alors la flche canonique  $\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ext}^1(T_{\text{st}}(\mathcal{N}), T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  est injective.*

### 6.1 Le module $A_{\text{ss}}$

Pour prouver le lemme 6.0.5, on considre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux objets simples,  $\mathcal{X}$  une extension dans la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  de ces deux objets telle que  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  soit isomorphe au produit direct  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$ . Il nous faut montrer que  $\mathcal{X}$  est isomorphe  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ .

Les hypothses impliquent que  $\mathcal{X}$  est tu par  $p$ . En effet,  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  est tu par  $p$ , ce qui signifie que la multiplication par  $p$  sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  est l'application nulle. Par fidlit, on en dduit que la multiplication par  $p$  sur  $\mathcal{X}$  est galement l'application nulle. D'autre part, si  $r = 0$ , il y a un unique objet simple isomorphisme prs, ce qui rgle rapidement ce cas. Ainsi on peut supposer  $r > 0$  et travailler dans les catgories  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ .

Commenons par donner une caractrisation, faisant intervenir explicitement le foncteur  $T_{\text{st}}$ , des objets de  $\widetilde{\mathcal{M}}$  qui sont semi-simples.

On construit un sous-module  $A_{\text{ss}}$  de  $\hat{A}$  (ss pour *semi-simple*). Pour cela, comme dans le paragraphe 5.1, on fixe, pour tout entier  $h$ ,  $\eta^{(h)}$  une racine  $(p^h - 1)$ -ime de l'uniformisante  $\pi$ . On impose en outre une condition de compatibilit : on demande que lorsque  $h'$  divise  $h$ , on ait :

$$\left(\eta^{(h')}\right)^{\frac{p^h-1}{p^{h'}-1}} = \eta^{(h)}$$

De cette faon, si  $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$  (le localis de  $\mathbb{Z}$  en  $p$ ) on pourra sans ambiguit parler de  $\pi^s$ . En effet, comme tout nombre premier  $p$  admet un multiple de la forme  $p^h - 1$ , on peut toujours crire  $s = \frac{a}{p^h-1}$ , et poser :

$$\pi^s = \left(\eta^{(h)}\right)^a.$$

La condition de compatibilit dit prcisment que le rsultat ne dpend pas de la fraction choisie pour reprsenter  $s$ . En outre, on a les formules videntes  $\pi^s \times \pi^{s'} = \pi^{s+s'}$  et  $\pi^{ns} = (\pi^s)^n$  si  $s$  et  $s'$  sont dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$  et si  $n$  est un entier.

Reprenons la description donne tout la fin du paragraphe 4.3. Choisissons un lment  $t \in \mathcal{R}$  classifiant un certain objet simple  $\mathcal{M}$  de la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Appelons  $t_1, \dots, t_h$  les rationnels de  $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$  correspondant  $t$ . Prcisment si c'est la suite  $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$  qui classifie  $\mathcal{M}$ , on aura :

$$t_i = 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots$$

Si l'on pose  $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$ , on voit d'apr s le calcul fait dans le paragraphe 5.2 que tout lment de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  tombe dans le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module de  $\hat{A}$  engendr par les  $\pi^{v_i}$ . On pose, pour tout  $t \in \mathcal{R}$  :

$$A_{\text{sst}} = k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_1} + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_2} + \dots + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_h}$$

o l'entier  $h$  dpend de  $t$ . La somme prcdente est directe (voir lemme 6.1.2). Il faut faire attention au fait que les modules  $k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_i}$  ne sont pas libres, car par exemple on a toujours  $u^{ep-1} \pi^{v_i} = 0$ . En particulier  $A_{\text{sst}}$  n'est *pas* isomorphe  $\mathcal{M}$ .

**Dfinition 6.1.1.** *On pose :*

$$A_{\text{ss}} = \sum_{t \in \mathcal{R}} A_{\text{sst}} \subset \hat{A}.$$

*Autrement dit,  $A_{\text{ss}}$  est le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendr par les  $\pi^{t'}$  o  $t'$  parcourt l'ensemble des rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base  $p$  ne comporte que des chiffres compris entre 0 et  $er$ .*

**Lemme 6.1.2.** *Le morphisme vident :*

$$\bigoplus_{t'} k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{t'} \rightarrow A_{\text{ss}}$$

*est un isomorphisme (o la somme est nouveau tendue aux  $t'$  rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base  $p$  ne comporte que des chiffres compris entre 0 et  $er$ ).*

Avant de faire la démonstration, insistons sur le fait que la notation est trompeuse : le module  $k(u)/u^{ep} \cdot \pi^{t'}$  n'est pas libre, il doit être vu comme un sous-module de  $\hat{A}$ . Le lemme dit donc que la somme dans  $\hat{A}$  de tous ces sous-modules est directe.

**Démonstration.** La surjectivité est une conséquence immédiate de la définition de  $A_{\text{ss}}$ . Passons à l'injectivité. Considérons une relation de la forme :

$$P_1(u) \pi^{v_1} + \dots + P_n(u) \pi^{v_n} = 0$$

où les  $v_i$  sont deux à deux distincts et où on peut supposer que tous les polynômes  $P_i \in k[u]/u^{ep}$  sont non nuls. Il faut alors montrer que tous les termes de la somme  $P_i(u) \pi^{v_i}$  sont nuls, et ceci va résulter d'un simple calcul de valuation.

On écrit  $u = \pi_1 X'^{p-1}$  où l'on rappelle que  $X' = 1 + X$  vérifie la relation  $X'^p = 1$ . En identifiant les coefficients en  $X^j$ , on obtient pour tout  $j$  compris entre 0 et  $p-1$  des égalités de la forme :

$$P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} = 0$$

où les  $P_i^{(j)}$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . On rappelle que l'on dispose d'une valuation sur  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  et que le fait d'être nul signifie simplement d'être de valuation supérieure à  $e$ . La valuation de  $P_i^{(j)}(\pi)$  est un entier. Comme  $v_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$ , et que tous les  $v_i$  sont deux à deux distincts, les valuations de  $P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i}$  sont aussi deux à deux distinctes, et on a :

$$v \left( P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} \right) = \min_i v \left( P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i} \right)$$

En particulier, la somme est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait prouver.  $\square$

Soit  $\mathcal{X}$  un objet de la catégorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . L'injection  $A_{\text{ss}} \rightarrow \hat{A}$  fournit une flèche injective  $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ .

**Lemme 6.1.3.** *L'objet  $\mathcal{X}$  est semi-simple si et seulement si la flèche précédente est surjective (et donc un isomorphisme).*

**Démonstration.** Le sens direct est facile : si  $\mathcal{X}$  est semi-simple et s'écrit donc comme la somme  $\mathcal{X} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n$  pour certains objets simples  $\mathcal{M}_i$ , alors  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  se décompose lui aussi comme la somme directe :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{X}) = T_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \oplus \dots \oplus T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$$

et on a déjà vu que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_i) = \text{Hom}(\mathcal{M}_i, A_{\text{ss}})$ .

Faisons la réciproque. Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] affirme que le cardinal de  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  est  $p^{\text{rg } \mathcal{X}}$  où  $\text{rg } \mathcal{X}$  désigne le rang de  $\mathcal{X}$  en tant que  $k[u]/u^{ep}$ -module. On prouve par récurrence sur la longueur de l'objet  $\mathcal{X}$  que  $\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg } \mathcal{X}}$  et qu'il y a égalité si et seulement si  $\mathcal{X}$  est semi-simple. Cela entraînera bien le résultat annoncé dans le lemme.

Le résultat est évident si  $\mathcal{X}$  est simple (de longueur 1). Prenons un objet  $\mathcal{X}$  de longueur  $n+1$ . Il existe une suite exacte courte de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

o  $\mathcal{M}$  est un objet simple et  $\mathcal{N}$  est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  de longueur  $n$ . Par application du foncteur contravariant  $\text{Hom}(\cdot, A_{\text{ss}})$ , on en dduit une suite exacte gauche :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$$

d'o :

$$\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq \text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \cdot \text{Card Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg}\mathcal{N}} \cdot p^{\text{rg}\mathcal{M}} = p^{\text{rg}\mathcal{X}}$$

Pour que les deux inalits prcdentes soient des galits, il faut que la flche  $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$  soit surjective et que  $\text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) = p^{\text{rg}\mathcal{N}}$ . D'aprs l'hypothse de rcurrence, cette dernire condition implique que  $\mathcal{N}$  est semi-simple.

Exploitons la premiere condition. Soit  $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$ ,  $\psi \neq 0$ . Si  $t$  dsigne le « rationnel classifiant » de  $\mathcal{M}$ ,  $\psi$  tombe dans un  $A_{\text{ss}t}$  qui est un facteur direct de  $A_{\text{ss}}$ . Par hypothse,  $\psi$  se prolonge tout  $\mathcal{X}$ . On s'intresse la compose  $s : \mathcal{X} \rightarrow A_{\text{ss}} \rightarrow A_{\text{ss}t}$  o la premiere flche est  $\psi$  ainsi prolonge et la seconde flche est la projection canonique.

Notons  $(e_1, \dots, e_d)$  une base adapte de  $\mathcal{X}$  pour les entiers  $n_1, \dots, n_d$  et notons pour tout  $i$ ,  $f_i$  un relev de  $s(e_i)$  dans  $\mathcal{M}$ , qui existe puisque tous les morphismes non nuls  $\mathcal{M} \rightarrow A_{\text{ss}t}$  sont surjectifs. Nous allons corriger les  $f_i$  pour que la flche  $s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}, e_i \mapsto f_i$  dfinisse un scindage de :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

Les  $f_i$  sont uniques modulo  $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$  (on peut faire beaucoup mieux en fait, mais ce ne sera pas utile). En particulier, quelle que soit la faon de les choisir, la flche  $s$  obtenue respecte  $\text{Fil}^r$ . D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_i} f_i) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} f_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

o  $G$  dsigne la matrice de  $\phi_r$  dans la base adapte  $(e_1, \dots, e_d)$  et o les  $r_i$  sont des lments de  $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$ . On voit donc que si l'on remplace le vecteur  $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$  par le vecteur  $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} +$

${}^t G^{-1} \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$ , on obtient une flche compatible  $\text{Fil}^r$  et  $\phi_r$ .

Pour prouver que cette rtraction est galement compatible  $N$ , on considere le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow & \nearrow s & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & & \\ & \searrow u^e N & \downarrow \phi_r & & \\ & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow cN & \nearrow s & \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{X} & & \end{array}$$

Les faces du cube situées devant, derrière, au-dessus et au-dessous commutent. La face de gauche commute modulo  $u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$  et donc  $\phi_r \circ (u^e N) \circ s = \phi_r \circ s \circ (u^e N)$ . Une chasse au diagramme permet d'obtenir  $(cN) \circ s \circ \phi_r = s \circ (cN) \circ \phi_r$ , ce qui permet de conclure puisque  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$  engendre tout  $\mathcal{X}$ .  $\square$

## 6.2 Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$

Rappelons que notre objectif est de prouver le lemme 6.0.5. On considère donc  $\mathcal{X}$ , objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$  et extension de deux objets simples  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ . On suppose que  $T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$  et on veut montrer que  $\mathcal{X}$  est semi-simple. Pour cela d'après le lemme 6.1.3, il suffit de prouver que tout élément de  $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  définit un morphisme qui tombe dans  $A_{\text{ss}}$ . Soit  $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ . On peut dessiner le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \psi & & \\
 & & & & \hat{A} & & \\
 & & \searrow 0 & & \downarrow \text{pr} & \swarrow \tilde{\psi} & \\
 & & & & \hat{A}/A_{\text{ss}} & & 
 \end{array}$$

La composée  $\psi \circ f$  est un morphisme de  $\mathcal{M}$  dans  $\hat{A}$ , qui tombe dans  $A_{\text{ss}}$  par simplicité de  $\mathcal{M}$  et devient nulle lorsqu'elle est composée avec la projection canonique. Il existe donc une flèche  $\tilde{\psi} : \mathcal{N} \rightarrow \hat{A}/A_{\text{ss}}$  faisant commuter le diagramme. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier plus en détail cette flèche.

Notons d'abord que le quotient  $\hat{A}/A_{\text{ss}}$  hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie : on définit  $\text{Fil}^i(\hat{A}/A_{\text{ss}}) = \text{pr}(\text{Fil}^i \hat{A})$  et on vérifie que  $N(A_{\text{ss}}) \subset A_{\text{ss}}$  et que  $\phi_i(A_{\text{ss}} \cap \text{Fil}^i \hat{A}) \subset A_{\text{ss}}$ . Cela suffit pour transporter les structures.

Comme  $\mathcal{M}$  est un objet simple, on sait le décrire précisément : par le théorème 4.3.2, il existe un entier  $h$ , des éléments  $e_1, \dots, e_h$  qui forment une base de  $\mathcal{M}$  et des entiers  $n_1, \dots, n_h$  le tout tel que  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h$ ,  $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$  et  $N(e_i) = 0$ , les indices étant considérés dans  $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ . De même, on a une description de  $\mathcal{N}$  : il existe un entier  $h'$ , des éléments  $e'_1, \dots, e'_{h'}$  et des entiers  $n'_1, \dots, n'_{h'}$  le tout vérifiant des conditions analogues.

Dans un premier temps, comme  $\psi$  commute avec  $N$ , on a  $N(\tilde{\psi}(e'_i)) = 0$  pour tout indice  $i'$ . On cherche donc les éléments de  $\hat{A}$  dont l'image par  $N$  tombe dans  $A_{\text{ss}}$ . C'est l'objet du lemme suivant. On rappelle que, par le lemme 2.3.5 :

$$\hat{A} \simeq (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

l'isomorphisme consistant à faire correspondre  $X' = 1 + X$  et  $\frac{Y^i}{i!} = \frac{1}{i!} \left( \frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^i$ .

**Lemme 6.2.1.** *Avec les notations précédentes, l'ensemble des  $x \in \hat{A}$  tels que  $N(x) \in A_{\text{ss}}$  est  $A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p + (A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p) Y$ .*

**Démonstration.** Soit  $x \in \hat{A}$  tel que  $N(x) \in A_{\text{ss}}$ . Il s'écrit :

$$x = \sum_{j \geq 0} P_j(X') \frac{Y^j}{j!}$$

les  $P_j$  tant des polynomes de degr infrier  $p - 1$  coefficients dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  nuls pour  $j \gg 0$ .  
On a :

$$N(x) = \sum_{j \geq 0} (X' P'_j(X') + P_{j+1}(X')) \frac{Y^j}{j!}.$$

On remarque que *via* les identifications faites,  $A_{\text{ss}}$  est entirement inclus dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p[X']/(X'^p - 1)$  et donc il suffit de vrifier les conditions :

1.  $X' P'_0(X') + P_1(X') \in A_{\text{ss}}$
2.  $X' P'_j(X') + P_{j+1}(X') = 0$  pour tout  $j \geq 1$

La deuxime condition entrane  $P_1(X') = b$  pour un certain  $b \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  et  $P_j(X') = 0$  pour tout  $j \geq 2$ .

Exploitons maintenant la premiere condition. crivons  $P_0(X') = a_0 + a_1 X' + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$  o  $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . On obtient :

$$b + a_1 X' + 2a_2 X'^2 + \dots + (p-1) a_{p-1} X'^{p-1} \in A_{\text{ss}}.$$

Par dffinition de  $A_{\text{ss}}$  et en remarquant que  $u \in \hat{A}_{\text{st}}$  correspond  $\pi_1 X'^{p-1} \in \hat{A}$ , on voit que tous les termes de la somme prcdente sont lments de  $A_{\text{ss}}$ . En particulier on a  $b \in A_{\text{ss}}$ . D'autre part, les entiers  $2, \dots, p-1$  sont inversibles dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  et donc tous les  $a_i X'^i$ , pour  $i \geq 1$ , sont aussi lments de  $A_{\text{ss}}$ . Cela prouve finalement que  $P_0(X') \in A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  puis la conclusion annonce.

Il reste faire la rciproque, mais elle est immddiate au vu du calcul prcdent.  $\square$

Par le lemme prcdent, on peut crire :

$$\tilde{\psi}(e'_{i'}) = a_{i'} + b_{i'} Y \in \hat{A}/A_{\text{ss}}$$

o  $a_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ ,  $b_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . Comme  $\phi_r$  commute  $\psi$ , et que  $\phi_r(e'_{i'}) = e'_{i'+1}$ , on a  $u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'} Y) \in \text{Fil}^r(\hat{A}/A_{\text{ss}})$  et  $\phi_r(u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'} Y)) = a_{i'+1} + b_{i'+1} Y \pmod{A_{\text{ss}}}$ . De cela, on dduit  $u^{n'_{i'}} a_{i'} \in \text{Fil}^r(\hat{A}/A_{\text{ss}})$  et  $u^{n'_{i'}} b_{i'} \in \text{Fil}^{r-1} \hat{A}/A_{\text{ss}}$ . De plus  $\phi_r(u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'} Y)) = \phi_r(u^{n'_{i'}} a_{i'}) + \phi_{r-1}(u^{n'_{i'}} b_{i'}) Y$ , puisque  $\phi_1(Y) = Y$ , et donc :

$$\phi_r(u^{n'_{i'}} a_{i'}) + \phi_{r-1}(u^{n'_{i'}} b_{i'}) Y = a_{i'+1} + b_{i'+1} Y \pmod{A_{\text{ss}}}$$

Par le corollaire 2.3.6, cela implique  $\phi_{r-1}(u^{n'_{i'}} b_{i'}) = b_{i'+1}$ , l'galit se faisant dans  $\hat{A}$ . On sait donc dterminer une nouvelle fois en vertu du lemme 5.1.3 la forme prcise des  $b_{i'}$ .

### 6.3 Fin de la preuve

Intressons-nous la structure de l'application  $\psi$ . Choisissons des relevs de  $e'_{i'}$  dans  $\mathcal{X}$ , relevs que l'on appelle encore  $e'_{i'}$ . En reprenant les notations prcdentes, l'application  $\psi$  a alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(e_i) &= x_i \\ \psi(e'_{i'}) &= a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'} Y \end{aligned}$$

o  $a_{i'}^{(1)} \in A_{\text{ss}}$  et o on connat prcisment la forme des  $x_i$  d'aprs le calcul fait dans le paragraphe 5.2 et de mme celle des  $b_{i'}$  : si  $x_i \neq 0$  et  $b_{i'} \neq 0$ , si l'on note comme dans le paragraphe 6.1 :

$$\begin{aligned} t_i &= 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots \\ t'_{i'} &= 0, n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1} \overline{n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1}} \dots \end{aligned}$$

et si on pose  $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$  et  $v'_{i'} = \frac{er-1}{p-1} - t'_{i'}$ , il existe deux racines  $(p^h - 1)$ -imes de l'unit,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , telles que  $\hat{x}_i = \varepsilon^{p^i} \pi^{v_i}$  et  $\hat{b}_{i'} = \varepsilon'^{p^{i'}} \pi^{v'_{i'}}$  et o  $x_i$  (resp  $b_{i'}$ ) est la rduction modulo  $p$  de  $\hat{x}_i$  (resp  $\hat{b}_{i'}$ ). On peut faire de mme pour les  $a_{i'}$ . Ils sont solutions d'un systme d'equation de la forme :

$$\phi_r \left( u^{n'_{i'}} a_{i'} + c_{i'} \right) = a_{i'+1} + r_{i'}$$

avec  $c_{i'}, r_{i'} \in A_{\text{ss}}$ . L'galit entrane  $r_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p \cap A_{\text{ss}}$ . Notons  $\hat{a}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  un relev de  $a_{i'}$ ,  $\hat{c}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  un lment tel que  $\phi_r(u^{n'_{i'}} a_{i'} + c_{i'}) \equiv \phi_r(u^{n'_{i'}} \hat{a}_{i'} + \hat{c}_{i'}) \pmod{p}$  et choisissons  $\hat{r}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  un relev de  $r_{i'}$ . Intrissons-nous au systme (dont les inconnus sont les  $\hat{x}_{i'}$ ) donn par les quations :

$$\frac{\left( \pi_1^{n'_{i'}} \hat{x}_{i'} + \hat{c}_{i'} \right)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_{i'+1} + \hat{r}_{i'}.$$

De faon vidente, les  $a_{i'}$  forment une solution modulo  $p$ , qui se remonte d'aprs le lemme 5.1.1 en une solution dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  que l'on note  $\hat{a}_{i'}$ . Le corollaire 5.1.4 s'applique : un lment du groupe de Galois  $G_K$  qui fixe les  $\hat{c}_i$  et les  $\hat{r}_i$ , fixe  $\hat{a}_{i'}$  si et seulement s'il fixe  $a_{i'}$ .

D'autre part, on rappelle que par hypothse la suite :

$$0 \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{N}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

est exacte et que l'on dispose d'une section  $s : T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  qui commute l'action de Galois.

Soit  $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  dcrit comme on vient de le voir. Le morphisme  $s(\psi) \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  prolonge  $\psi$ , on l'appellera simplement  $\psi$  par la suite. Comme  $s$  est compatible Galois, pour tout lment  $\sigma$  stabilisant les  $x_i$ , on a :

$$\sigma \left( a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'} Y \right) = \sigma a_{i'} + \sigma a_{i'}^{(1)} + \sigma b_{i'} t(\sigma) + \sigma b_{i'} Y = a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'} Y$$

o on rappelle que  $\sigma(Y) = Y + t(\sigma)$ . On a vu que  $t(\sigma) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  (voir lemme 2.3.7) et donc de l'galit prcdente, on dduit en particulier :

$$\sigma a_{i'} + \sigma a_{i'}^{(1)} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + a_{i'}^{(1)}.$$

Si  $t(\sigma) = 0$  et si  $\sigma$  fixe  $a_{i'}^{(1)}$ , on obtient  $\sigma a_{i'} = a_{i'}$ .

Remarquons que les  $\hat{c}_i$  et les  $\hat{r}_i$  peuvent tre choisis dans  $K^{\text{mr}}[\pi_1]$ , o  $K^{\text{mr}} \subset \bar{K}$  dsigne l'extension maximale modrment ramifie de  $K$ . Reprenons les notations du paragraphe prcdent et considrons  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}}[\pi_1])$ . Il est tel que  $t(\sigma) = 0$ , et donc  $\sigma a_{i'} = a_{i'}$ . D'autre part,  $\sigma$  fixe  $\hat{c}_i$  et  $\hat{r}_i$ , d'o on dduit  $\sigma \hat{a}_{i'} = \hat{a}_{i'}$  puis  $\hat{a}_{i'} \in K^{\text{mr}}[\pi_1]$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $\psi$  et  $i' \in \mathbb{Z}/h'\mathbb{Z}$  tels que  $b_{i'} \neq 0$ . De la description explicite de  $b_{i'}$ , on dduit :

$$v(b_{i'}) = v_{i'} = \frac{e(r-1)}{p-1} - t_{i'}.$$

Soit  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$  ne fixant pas  $\pi_1$ . On a alors  $\sigma b_{i'} = b_{i'}$  et  $t(\sigma) \neq 0$ . On a dmontr dans le lemme 2.3.8 que  $t(\sigma)$  tait congru une racine  $(p-1)$ -ime de  $(-p)$ . En particulier, il est de valuation  $\frac{e}{p-1}$ . On en dduit :

$$v(b_{i'}t(\sigma)) = \frac{e(r-1)}{p-1} - t_{i'} + \frac{e}{p-1} = \frac{er}{p-1} - t_{i'} < 1$$

et donc  $b_{i'}t(\sigma)$  est non nul dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ .

Or  $\hat{a}_{i'} \in K^{\text{mr}}[\pi_1]$ . Cela signifie qu'il existe des  $\hat{d}_j \in K^{\text{mr}}$  tels que :

$$\hat{a}_{i'} = \hat{d}_0 + \hat{d}_1\pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1}\pi_1^{p-1}.$$

En appliquant  $\sigma$  puis en faisant la difference, on obtient :

$$\sigma\hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'} = \hat{d}_1(\varepsilon(\sigma) - 1)\pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1}(\varepsilon(\sigma)^{p-1} - 1)\pi_1^{p-1}.$$

La valuation de  $\hat{d}_i(\varepsilon(\sigma)^i - 1)$  est un rationnel lment de  $\mathbb{Z}_{(p)}$ . En consequence, les termes de la somme prcdente ont des valuations deux deux distinctes et puis :

$$v\left(\hat{d}_1(\varepsilon(\sigma) - 1)\pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1}(\varepsilon(\sigma)^{p-1} - 1)\pi_1^{p-1}\right) = \min_i v\left(\hat{d}_i(\varepsilon(\sigma)^i - 1)\pi_1^i\right) \notin \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par ailleurs,  $\sigma\hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'} \equiv b_{i'}t(\sigma) \pmod{p}$  et  $v(b_{i'}t(\sigma)) < 1$ . Ainsi :

$$v(\sigma\hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'}) = v(b_{i'}t(\sigma)) \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

On obtient une contradiction. Elle dmontre que tous les  $b_{i'}$  sont nuls, et ce pour tout  $\psi$  dans l'image de  $s$ . Il reste montrer que pour tous ces  $\psi$ , on a galement  $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$ . Cela conclura, car tout lment  $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$  s'crit comme somme d'un lment de  $T_{\text{st}}(\mathcal{N})$  et d'un lment de l'image de  $s$ . Si ces deux morphismes tombent dans  $A_{\text{ss}}$ , il en sera de mme de  $\psi$ . Le lemme 6.1.3 assurera alors que  $\mathcal{X}$  est semi-simple.

Soit  $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . On continue appeler  $\psi$  l'lment  $s(\varphi) \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ . On a  $\psi(e_i) = x_i$  et  $\psi(e'_{i'}) = a_{i'} + a_{i'}^{(1)}$  o les  $x_i$  sont des lments de  $A_{\text{sst}}$  si  $t$  est le « rationnel classifiant » de  $\mathcal{M}$  et o, par le mme argument que prcdemment, les  $a_{i'}$  se relvent en des lments de  $K^{\text{mr}}[\pi_1]$ . De plus il existe  $c_{i'}, r_{i'} \in A_{\text{ss}}$  tels que  $\phi_r(u^{n'_{i'}}a_{i'} + c_{i'}) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$ , qui est lment de  $\mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}/p$ . On en dduit que, pour tout  $i$ ,  $a_{i'} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}/p$ . Il existe donc un entier  $d$  tel que l'on puisse crire :

$$a_{i'} = \sum_{v \in I} \lambda_v \pi^v$$

o  $I$  dsigne l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1 et ayant pour dmoninateur  $(p^d - 1)$  et o les  $\lambda_v$  sont des lments de  $\mathcal{O}_K/p$ . Soit  $I_{\text{ss}}$  l'ensemble des rationnels appartenant  $I$  dont



le développement « dcimal » en base  $p$  ne fait intervenir que des chiffres compris entre 0 et  $r$ . Soit  $I_{\overline{ss}} = I \setminus I_{ss}$ . On pose :

$$a_{ss,i'} = \sum_{v \in I_{ss}} \lambda_v \pi^v \quad \text{et} \quad a_{\overline{ss},i'} = \sum_{v \in I_{\overline{ss}}} \lambda_v \pi^v.$$

Alors  $a_{i'} = a_{ss,i'} + a_{\overline{ss},i'}$ ,  $a_{ss,i'} \in A_{ss}$  et on vrifie que :

$$\phi_r(u^{n_{i'}} a_{\overline{ss},i'}) = a_{\overline{ss},i'+1}.$$

On sait rsoudre cette quation et ses solutions sont dans  $A_{ss}$ . Cela entrane  $a_{\overline{ss},i'} = 0$  pour tout indice  $i'$ . Ainsi  $a_{i'} \in A_{ss}$  ce qui est bien ce que l'on dsirait prouver.

## 6.4 Rcapitulatif et conclusion

Rcapitulons tout ce que l'on vient de voir. On a prouv sans hypothse sur le corps rsiduel  $k$  que le foncteur  $T_{st}$  est toujours exact et fidle. On a galement prouv, pour l'instant, que si ce corps rsiduel est algbriquement clos, alors le foncteur  $T_{st}$  tait galement plein. En procdant comme dans le paragraphe 6.2 de [Fon82], on peut dduire le rsultat pour  $k$  quelconque du rsultat pour  $k$  algbriquement clos :

**Thorme 6.4.1.** *Le foncteur  $T_{st}$  de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$  dans la catgorie des representations  $\mathbb{Z}_p$ -linaires de torsion du groupe de Galois  $G_K$  est exact et pleinement fidle.*

*Remarque.* L'image essentielle du foncteur  $T_{st}$  est incluse dans la catgore des  $\mathbb{Z}_p$ -representations de longueur finie de  $G_K$  comme le montre le thorme 6.4.4 que nous prouvons par la suite.

Nous pouvons finalement rpondre compltement la conjecture A.2 formule dans [Bre99a]. Mais avant cela, nous allons noncer et prouver une propriit formelle :

**Propriit 6.4.2.** *Soient  $A$  et  $B$  deux catgories abliennes et artiniennes. Soit  $F : A \rightarrow B$  un foncteur additif, exact et pleinement fidle qui est tel que l'image de tout objet simple de  $A$  est encore simple dans  $B$ . Alors l'image essentielle de  $F$  est stable par sous-objets et par quotients.*

**Dmonstration.** On se ramne directement au cas o  $A$  est une sous-catgorie pleine de  $B$ . L'hypothse dit que les objets simples de  $A$  restent simples dans  $B$ . En particulier si  $M$  est un objet de  $A$  et si :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = M$$

est une suite de Jordan-Hlder dans  $A$ , elle restera une suite de Jordan-Hlder dans  $B$ . Il s'agit de prouver que la catgorie  $A$  est stable par sous-objets et par quotients.

Introduisons pour cela  $A'$  la sous-catgorie pleine de  $A$  forme des objets dont tous les quotients de Jordan-Hlder sont dans  $B$ . C'est une sous-catgorie ablienne de  $A$  qui est stable par sous-objets et par quotients. Évidemment  $A$  est une sous-catgorie de  $A'$ , on peut donc supposer que  $A' = B$  ou si l'on prfre que les objets simples de  $A'$  et ceux de  $B$  sont les mmes.

Soit  $M$  un objet de  $A$  et  $N$  un sous-objet de  $M$ . En considrant des suites de Jordan-Hlder de  $N$  et de  $M/N$ , on voit que l'on peut crire une suite de Jordan-Hlder de la forme suivante :

$$0 = M_0 \subset M_1 \dots \subset M_n = N \subset M_{n+1} \subset \dots \subset M_m = M$$

Le quotient  $M_m/M_{m-1}$  est un objet simple et donc un objet de  $A$ . Par suite le noyau de la projection  $M_m \rightarrow M_m/M_{m-1}$  qui s'identifie  $M_{m-1}$  est galement objet de  $A$ . Par rcurrence, on montre que tous les  $M_i$  sont objets de  $A$  et donc qu'il en est de mme de  $N$ . Ceci prouve la stabilit par sous-objets, la stabilit par quotients se traite de faon totalement identique.  $\square$

*Remarque.* Cette propriit redmontre en particulier le fait que la sous-catgorie  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$  de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  est stable par sous-objets et par quotients, puisque l'on a vu dans la proposition 3.3.4 que tous les objets simples de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  taient dans  $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ .

On peut dsormais noncer le thorme qui rsout la conjecture mentionne prcdemment :

**Thorme 6.4.3.** *L'image essentielle du foncteur  $T_{\text{st}}$  est stable par sous-objets et par quotients et indpendante du choix de l'uniformisante  $\pi$ .*

**Dmonstration.** L'indpendance du choix de l'uniformisante est une consquence directe de la propriit 3.1.10.

Supposons  $k$  algriquement clos. On sait, par le lemme 5.3.2, que l'image par le foncteur  $T_{\text{st}}$  d'un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  est une representation irrductible. Le foncteur  $T_{\text{st}}$  vrifie les conditions de la propriit prcdente, ce qui conclut.

Pour le cas gnral, notons  $K^{\text{mr}}$  l'extension maximale modrment ramifie de  $K$  et  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_{\text{mr}}^r$  la catgorie  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$  construite partir de  $K^{\text{mr}}$ . Soit  $\mathcal{M}$  un objet simple de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . Il est tu par  $p$  et donc peut tre vu comme un objet de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ . Il suffit de prouver que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est une representation irrductible. Notons  $\mathcal{M}_{\text{mr}} = \bar{k} \otimes_k \mathcal{M}$ . L'application :

$$\begin{aligned} T_{\text{st}}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) \\ f &\mapsto [\lambda \otimes x \mapsto [\lambda] f(x)] \end{aligned}$$

(o  $[\lambda] \in W(\bar{k}) \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}$  est le representant de Teichmller de  $\lambda \in \bar{k}$ ) est un isomorphisme commutant l'action de  $G_{K^{\text{mr}}} = \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $V$  un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ , strict, non nul et  $G_K$ -quivariant. C'est aussi un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module de  $T_{\text{st}}(\bar{\mathcal{M}})$   $G_{K^{\text{mr}}}$ -quivariant et donc d'apr le cas prcdent, on peut crire  $V = T_{\text{st}}(\mathcal{C}_{\text{mr}})$  (galit de representations de  $G_{K^{\text{mr}}}$ ) o  $\mathcal{C}_{\text{mr}}$  est un quotient de  $\mathcal{M}_{\text{mr}}$  dans la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$ . Soit  $\mathcal{M}'_{\text{mr}}$  le noyau de la projection  $\mathcal{M}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{mr}}$ , c'est un sous-objet strict et non nul de  $\mathcal{M}_{\text{mr}}$  dans la catgorie  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_{\text{mr}}^r$ .

Soient  $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$  et  $\hat{\sigma} \in G_K$  un prolongement de  $\sigma$ . Soient  $\psi \in V \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  et  $\psi_{\text{mr}}$  son image dans  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}})$ . L'lment  $\hat{\sigma}$  agit sur  $\psi_{\text{mr}}$  de la faon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}\psi_{\text{mr}} : \quad \mathcal{M}_{\text{mr}} &\rightarrow \hat{A} \\ s \otimes x &\mapsto s \hat{\sigma}\psi(x) \end{aligned}$$

De plus,  $\sigma$  d'finit un morphisme  $\sigma : \mathcal{M}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{mr}}$  dans la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}_{K^{\text{mr}}}^r$ . On vrifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{mr}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{M}_{\text{mr}} \\ \hat{\sigma}^{-1}\psi_{\text{mr}} \downarrow & & \downarrow \psi_{\text{mr}} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & A \end{array}$$

Comme  $\psi \in V$ , on a  $\psi|_{\mathcal{M}'_{\text{mr}}} = 0$  et par le diagramme prcdent,  $\psi|_{\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}}} = 0$ .

On obtient un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui fournit un isomorphisme  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}})$ , se relevant par pleine fidlitt en un isomorphisme  $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_{\text{mr}} & \longrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

On en dduit  $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} = \mathcal{M}'_{\text{mr}}$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$ .

On pose  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{\text{mr}} \cap \mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}'_{\text{mr}}{}^{\text{Gal}(\bar{K}^{\text{mr}}/K)}$ . On va montrer que  $\mathcal{M}'$  est un sous-objet strict et non nul de  $\mathcal{M}$  dans la catgorie  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ , ce qui est une contradiction. Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une  $k[u]/u^{ep}$ -base de  $\mathcal{M}$ . Soit  $y \in \bar{\mathcal{M}}'_{\text{mr}}$ ,  $y \neq 0$ . On peut crire :

$$y = P_1(u) e_1 + \dots + P_d(u) e_d$$

o les  $P_i$  sont des polynmes coefficients dans  $\ell[u]/u^{ep}$  pour  $\ell$  une extension finie de  $k$ . D'autre part, si  $P \in \ell[u]/u^{ep}$ , on peut d'finit  $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$  en calculant la trace de chacun des coefficients. En outre, comme  $\ell/k$  est sparable, on peut supposer  $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1) \neq 0$ , quitte multiplier  $\bar{x}$  par un lment non nul de  $\ell$ . Posons :

$$x = \text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u)) e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(P_d(u)) e_d.$$

C'est un lment de  $\mathcal{M}$  et, puisque  $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} = \mathcal{M}'_{\text{mr}}$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$ , c'est aussi un lment de  $\mathcal{M}'_{\text{mr}}$ . Comme on a suppos  $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u)) \neq 0$ , on a  $x \neq 0$ , puis  $\mathcal{M}' \neq 0$  comme on voulait.

On pose  $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ . L'oprateur  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$  (resp.  $N : \mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ ) induit une application  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$  (resp.  $N : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$ ). Ces applications vrifient les bonnes conditions pour d'finit un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Le seul point dlicat est le fait que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$  engendre  $\mathcal{M}'$  en tant que  $k[u]/u^{ep}$ -module. Soit  $x \in \mathcal{M}'$ . On sait qu'il existe  $\lambda_i \in \bar{k}[u]/u^{ep}$  et  $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}}$  tels que :

$$x = \lambda_1 \phi_r(y_1) + \dots + \lambda_n \phi_r(y_n).$$

De plus, quitte rentrer les constantes l'intérieur des  $\phi_r$ , on peut supposer que  $\lambda_i = u^{s_i}$  pour certains entiers  $s_i$ . Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une  $k[u]/u^{ep}$ -base de  $\mathcal{M}$ .crivons :

$$y_j = P_{1,j}(u)e_1 + \dots + P_{d,j}(u)e_d$$

o  $P_{i,j} \in \bar{k}[u]/u^{ep}$ . Soit  $\ell$  une extension finie de  $k$  contenant tous les coefficients des polynmes  $P_{i,j}$  dfinis ci-dessus. Comme prcdemment, on peut dfinir  $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$  pour  $P \in \ell[u]/u^{ep}$ . Soit  $\alpha \in \ell$  un lment tel que  $\text{Tr}_{\ell/k}(\alpha) = 1$ . On pose :

$$x_j = \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{1,j}(u))e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{d,j}(u))e_d.$$

On a alors  $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'$  et :

$$x = u^{s_1} \phi_r(x_1) + \dots + u^{s_n} \phi_r(x_n)$$

ce qui prouve bien que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$  engendre  $\mathcal{M}'$  en tant que  $S$ -module.  $\square$

*Remarque.* Comme consequence du thorme prcdent et de la pleine fidlitt de  $T_{\text{st}}$ , un objet  $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$  est semi-simple si et seulement si  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est une representation semi-simple.

Il rsulte de la dmonstration prcdente et de l'exactitude du foncteur  $T_{\text{st}}$  le thorme suivant :

**Thorme 6.4.4.** *Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ , on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

**Proposition 6.4.5.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  isomorphe en tant que  $S$ -module  $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$  pour certains entiers  $n_i$ . Alors en tant que  $\mathbb{Z}_p$ -module,  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est isomorphe  $\mathbb{Z}_p/p^{n_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n_d}\mathbb{Z}_p$ .*

**Dmonstration.** Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] dit que si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ , alors  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension  $\text{rg } X$ . On en dduit par exactitude du foncteur  $T_{\text{st}}$  que :

$$\text{long}_S(\mathcal{M}) = \text{long}_{\mathbb{Z}_p}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

o les longueurs sont calcules respectivement dans la catgorie des  $S$ -modules et dans celle des  $\mathbb{Z}_p$ -modules.

Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$  isomorphe en tant que  $S$ -module  $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$ . La representation galoisienne  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de longueur finie et donc est isomorphe en tant que  $\mathbb{Z}_p$ -modules  $\mathbb{Z}_p/p^{n'_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n'_d}\mathbb{Z}_p$  pour certains entiers  $n'_i$ . Soit  $n$  un entier. Le noyau de la multiplication par  $p^n$  sur  $\mathcal{M}$  s'envoie par le foncteur exact  $T_{\text{st}}$  sur le conoyau de la multiplication par  $p^n$  sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . On en dduit en regardant les longueurs que :

$$\sum_{i=1}^d \min(n_i, n) = \sum_{i=1}^{d'} \min(n'_i, n).$$

Cela permet de conclure.  $\square$

## 7 Consquences

### 7.1 Modules filtrs et modules fortement divisibles

#### Dfnitions

On reprend dans ce paragraphe les dfinitions et propriets du paragraphe 4.1.1 de [Bre97a].

On rappelle que  $K_0$  dsigne le corps des fractions de  $W$ , anneau des vecteurs de Witt coefficients dans  $k$ . On dfinit  $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$ . C'est l'ensemble suivant :

$$S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On munit  $S_{K_0}$  d'une filtration en posant  $\text{Fil}^n S_{K_0} = \text{Fil}^n S \otimes_W K_0$ , ou encore :

$$\text{Fil}^n S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On prolonge de manire vidente le Frobenius et l'oprteur de monodromie dfinis sur  $S$  tout  $S_{K_0}$ .

On dfinit un *module fortement divisible* (resp. un *module filtr sur  $S_{K_0}$* ) comme la donne suivante :

1. un  $S$ -module (resp. un  $S_{K_0}$ -module)  $\mathcal{M}$  libre de rang fini ;
2. un sous- $S$ -module (resp. un sous- $S_{K_0}$ -module) de  $\mathcal{M}$ , not  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$  (resp. contenant  $\text{Fil}^r S_{K_0} \cdot \mathcal{M}$ ) et tel que  $\mathcal{M}/\text{Fil}^r \mathcal{M}$  soit sans  $p$ -torsion (cette dernire condition est automatique pour les modules filtrs sur  $S_{K_0}$ ) ;
3. d'une fiche  $\phi$ -semi-linaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vrifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

et ce pour tout lment  $s \in \text{Fil}^r S$  (resp. tout lment  $s \in \text{Fil}^r S_{K_0}$ ) et tout lment  $x \in \mathcal{M}$  telle que  $\text{im } \phi_r$  engendre  $\mathcal{M}$  en tant que  $S$ -module (resp. en tant que  $S_{K_0}$ -module) ;

4. une application  $W$ -linaire (resp. une application  $K_0$ -linaire)  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vrifiant les trois conditions :
  - pour tout  $s \in S$  (resp. pour tout  $s \in S_{K_0}$ ) et tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
  - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
  - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Suivant toujours [Bre97a], on dñit de manire vidente la catgorie des modules filtrs sur  $S_{K_0}$  et celle des modules fortement divisibles. Elles sont quipes d'un foncteur vers les representations galoisiennes. Prcisment, si  $\mathcal{M}$  est un module filtr sur  $S_{K_0}$ , on pose  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{B}_{\text{st}}^+)$  o par dñition  $\hat{B}_{\text{st}}^+ = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0$  muni des structures induites et o  $\text{Hom}$  est compatible toutes les structures; on obtient une  $\mathbb{Q}_p$ -reprsentation de  $G_K$ . De mme si  $\mathcal{M}$  est un module fortement divisible, on dñit  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}})$ , le  $\text{Hom}$  tant encore compatible toutes les structures. On obtient une  $\mathbb{Z}_p$ -reprsentation libre de  $G_K$ . Les rangs des representations obtenues concident avec les rangs des objets  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un module fortement divisible, on vrifie immdiatement que  $\mathcal{M} \otimes_W K_0$  est un module filtr sur  $S_{K_0}$  et que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$  est un objet de la catgorie  $\underline{\mathcal{M}}^r$ . De plus, on montre que  $\mathcal{M}$  s'identifie la limite projective de  $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$ , puis que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  s'identifie la limite projective de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^n \mathcal{M})$ . On dduit de la pleine fidlit prouve prcdemment le corollaire suivant :

**Thorme 7.1.1.** *Le foncteur  $T_{\text{st}}$  de la catgorie des modules fortement divisibles dans la catgorie des  $\mathbb{Z}_p$ -reprsentations (libres) de  $G_K$  est pleinement fidle.*

## 7.2 Modules fortement divisibles et foncteur $T_{\text{st}}$

Nous dmontrons dans ce paragraphe le thorme 1.0.5. En fait, nous dmontrons la formulation quivalente mais lgrement diffrente suivante :

**Thorme 7.2.1.** *On suppose  $er < p - 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un module fortement divisible sur  $S$ , et soit  $V$  la reprsentation galoisienne associe via le foncteur  $T_{\text{st}}$   $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$  qui est un module filtr sur  $S_{K_0}$ . Le foncteur  $T_{\text{st}}$  ralise une anti-quivalence de catgories entre la catgorie des sous-modules fortement divisibles de  $\mathcal{M}_{K_0}$  et celle des sous- $\mathbb{Z}_p$ -rseaux de  $V$  stables par  $G_K$ .*

**Dmonstration.** Nous suivons pas pas la preuve de la proposition 3 de [Bre99b], qui n'utilise essentiellement que la pleine fidlit du foncteur  $T_{\text{st}}$  et un quivalent du thorme 6.4.3.

Dans un premier temps, la pleine fidlit du foncteur  $T_{\text{st}}$  considre dans l'nonc du thorme se dduit directement du thorme 7.1.1.

Reste l'essentielle surjectivit. Soit  $T$  un  $\mathbb{Z}_p$ -rseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$p^{n_0} T \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset (1/p^{n_0}) T$$

On en dduit que pour  $n \geq n_0$ ,  $p^{n_0} T / p^n T$  est un sous-objet de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) / p^n T$ , ce dernier tant un quotient de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^{n+n_0} \mathcal{M})$ . Le thorme 6.4.3 assure alors que  $p^{n_0} T / p^n T$  s'crit  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$  pour  $\mathcal{M}_n$  un certain objet de  $\underline{\mathcal{M}}^r$ .

La pleine fidlit de  $T_{\text{st}}$  assure l'existence d'une unique flche  $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$  relevant la projection  $p^{n_0} T / p^{n+1} T \rightarrow p^{n_0} T / p^n T$ , et la limite inductive de ce systme s'identifie  $\mathcal{M}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$  pour un certain module fortement divisible  $\mathcal{M}_\infty$  qui rpond la question.  $\square$

*Remarque.* Noter que si  $\mathcal{M}$  est un  $S_{K_0}$ -module filtr « faiblement admissible », alors il contient toujours un module fortement divisible par [Bre99a].

### 7.3 Variante d'une conjecture de Serre

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliquer comment le thorme donn dans l'introduction et que nous rappelons ci-dessous est consequence de la thorie presente prcdemment. Noter qu'ici, on ne suppose *a priori* plus rien ni sur  $e$ , ni sur  $r$ .

**Thorme 7.3.1.** *Soit  $X$  un schma propre et lisse sur  $K$  et rduction semi-stable sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ . On fixe  $r$  un entier. Les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo  $p$  de  $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$  (o  $X_{\bar{K}}$  est l'extension des scalaires de  $X$   $\bar{K}$  et o  $\star$  signifie que l'on prend le dual) sont tous compris entre 0 et  $er$ .*

**Dmonstration.** Dans un premier temps, il est clair que l'on peut supposer  $er < p - 1$ , le thorme tant trivialement vrifi dans le cas contraire. On peut donc utiliser les rsultats prcdents.

D'aprs les rsultats de [Tsu99] et du paragraphe 2.2 de [Bre02], la  $\mathbb{Q}_p$ -representation  $V = H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$  (le dual tant cette fois-ci le  $\mathbb{Q}_p$ -dual) provient *via* le foncteur  $T_{\text{st}}$  d'un module filtr  $\mathcal{M}_{K_0}$  sur  $S_{K_0}$ , et d'aprs les rsultats de [Bre99a], ce module admet un sous-module fortement divisible  $\mathcal{M}$ .

D'autre part, la  $\mathbb{Z}_p$ -representation  $T$  est un rseau de  $V$  stable par Galois, et donc d'aprs le thorme 7.2.1, il existe un module fortement divisible inclus dans  $\mathcal{M}_{K_0}$  dont l'image par  $T_{\text{st}}$  est isomorphe  $T$ . Appelons  $\mathcal{M}$  un tel module.

La representation quotient  $T/p$  correspond *via* le foncteur  $T_{\text{st}}$   $\mathcal{M}/p$  qui est un objet de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . La semi-simplifie de  $T/p$  est la somme directe de ses quotients de Jordan-Hlder, et chacun de ces quotients correspond un objet simple de  $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ . Le thorme 5.2.2 permet de conclure.  $\square$

*Remarque.* Si l'on prfre, on peut ne pas utiliser le thorme 7.2.1, mais dire la place que si  $T$  et  $T'$  sont deux  $\mathbb{Z}_p$ -rseaux de  $V$  stables par Galois, alors les semi-simplifies des rductions modulo  $p$  de ces deux representations sont isomorphes. On aurait donc pu garder le premier module fortement divisible  $\mathcal{M}$ .

## Références

- [Ber] L. Berger, *An introduction to the theory of  $p$ -adic representations*, paraitre dans Geometric Aspects of Dwork's Theory.
- [Bre97a] C. Breuil, *Construction de representations  $p$ -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327.
- [Bre97b] ———, *Representations  $p$ -adiques semi-stables et transversalit de griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224.
- [Bre98] ———, *Cohomologie tale de  $p$ -torsion et cohomologie cristalline en rduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620.
- [Bre99a] ———, *Representation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122.

- [Bre99b] ———, *Une remarque sur les représentations locales  $p$ -adiques et les congruences entre formes modulaires de hilbert*, Bull. soc. math. France **127** (1999), 459–472.
- [Bre00] ———, *Groupes  $p$ -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549.
- [Bre01] ———, *On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  : wild 3-adic exercises*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939.
- [Bre02] ———, *Integral  $p$ -adic hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80.
- [Con99] B. Conrad, *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math. **119** (1999), 239–320.
- [Fal92] G. Faltings, *Crystalline cohomology and  $p$ -adic galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82.
- [Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144.
- [Fon75] J.M. Fontaine, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1423–1425.
- [Fon82] ———, *Construction de représentations  $p$ -adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608.
- [Fon83] ———, *Cohomologie de de rham, cohomologie cristalline et représentations  $p$ -adique*, Lecture notes in math. **1016** (1983), 86–108, 113–184.
- [Fon94a] ———, *Le corps des priodes  $p$ -adiques*, Astrisque **223** (1994), 59–111.
- [Fon94b] ———, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Astrisque **223** (1994), 113–184.
- [Kat87] K. Kato, *On  $p$ -adic vanishing cycles*, Advanced Study in Pure Math. **10** (1987), 207–251.
- [Ray74] M. Raynaud, *Schmas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bull. Soc. math. France **102** (1974), 241–280.
- [Ser72] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inventiones math. **15** (1972), 259–331.
- [Tsu99] T. Tsuji,  *$p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inventiones math. **137** (1999), 233–411.
- [Wac97] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240.