



HAL
open science

Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

| Xavier Caruso. Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié. 2004. hal-00002219v1

HAL Id: hal-00002219

<https://hal.science/hal-00002219v1>

Preprint submitted on 16 Jul 2004 (v1), last revised 24 Oct 2004 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Représentations semi-stables de torsion dans le cas peu ramifié

Xavier Caruso

Mai 2004

Abstract

Let K be a local field of mixed characteristic not absolutely ramified. Fontaine-Laffaille theory (see [FL82]) gives a description of the torsion crystalline \mathbb{Z}_p representations of the absolute Galois group of K (p denotes the characteristic of the residual field). Improving the former works, Breuil introduced new modules and obtained an integer and torsion theory for the semi-stable representations (see [Bre97a]).

In this paper, we follow Breuil's works and adapt them to the case where the local field K can be absolutely ramified. However, we would have a limitation on the index of absolute ramification.

Résumé

Soit K un corps local de caractéristique mixte non absolument ramifié. La théorie de Fontaine-Laffaille (voir [FL82]) permet de décrire les \mathbb{Z}_p -représentations galoisiennes cristallines entières de torsion (p désigne la caractéristique du corps résiduel). Poursuivant les précédents travaux, Breuil a introduit de nouveaux modules et a obtenu une théorie entière et de torsion pour les représentations semi-stables (voir [Bre97a]).

Dans cet article, nous reprenons les travaux de Breuil et les adaptons dans le cas où le corps local K peut être absolument ramifié. Nous aurons toutefois une contrainte sur l'indice de ramification absolu.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation des objets	4
2.1	La catégorie \mathcal{M}^r et ses variantes	5
2.2	Le foncteur vers les représentations galoisiennes	6
2.3	Les objets tus par p	8

ccsd-00002219, version 1 - 17 Jul 2004

3	Gnralits sur les catgories \mathcal{M}^r et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$	13
3.1	Indpendance du choix de l'uniformisante	13
3.2	Description des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$	19
3.3	La catgorie $\widetilde{\text{MF}}^r$	23
3.4	Un mot sur le cas $r = 1$	26
3.5	Des catgories abliennes et artiniennes	26
4	Classification des objets simples	29
4.1	La monodromie	30
4.2	Une base adapte simple	31
4.3	Classification proprement dite	32
5	tude du foncteur T_{st}	34
5.1	Un systme prliminaire	34
5.2	Calcul sur les objets simples	37
5.3	Exactitude et fidlit	38
6	Pleine fidlit du foncteur T_{st}	40
6.1	Le module A_{ss}	40
6.2	Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$	43
6.3	Fin de la preuve	45
6.4	Rcapitulatif et conclusion	47
7	Consquences	51
7.1	Modules filtrs et modules fortement divisibles	51
7.2	Modules fortement divisibles et foncteur T_{st}	52
7.3	Variante d'une conjecture de Serre	53

1 Introduction

Dans toute la suite de ce papier, p dsigne un nombre premier et k un corps parfait de caractristique p . On note \bar{k} une clture algbrique de k , \mathbb{F}_p le sous-corps premier de k et si $q = p^h$ est une puissance de p , \mathbb{F}_q l'ensemble des solutions dans \bar{k} de l'quation $x^q = x$.

On dsigne par W l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans k . On rappelle que comme k est parfait, cet anneau est un anneau de valuation discrte complet de caractristique nulle dont p est une uniformisante et dont le corps rsiduel s'identifie canoniquement k . On dispose en outre d'une application $\sigma : W \rightarrow W$ appele Frobenius qui induit par passage au quotient le Frobenius classique sur k , c'est--dire l'lvation la puissance p .

On appelle K_0 le corps des fractions de W , c'est un corps local de caractristique mixte. On prend K une extension finie totalement ramifie de K_0 . On note e le degr de l'extension K/K_0 , c'est l'indice de ramification absolue de K . On appelle \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K et on choisit π une uniformisante de cet anneau. On fixe \bar{K} une clture algbrique de K , on note $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de \bar{K} et $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois absolu du corps K . On note I le groupe d'inertie (c'est un sous-groupe de G_K), I_s le groupe d'inertie sauvage

et $I_t = I/I_s$ le groupe d'inertie modre. Enfin, on appelle v la valuation sur \bar{K} normalisee par $v(\pi) = 1$ (et donc $v(p) = e$).

Une \mathbb{Z}_p -representation (resp. \mathbb{F}_p -representation, resp. \mathbb{F}_q -representation, resp. \mathbb{Q}_p -representation) de G_K est une action lineaire et continue de G_K sur un \mathbb{Z}_p -module (resp. un \mathbb{F}_p -espace vectoriel, resp. un \mathbb{F}_q -espace vectoriel, resp. un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel). Afin d'étudier ces representations, diverses categories ont été introduites. Nous allons nous occuper dans ce papier des categories $\underline{\mathcal{M}}^r$ introduites par Breuil dans [Bre99a], et nous montrerons comment il résulte de notre étude le thorme 1.0.1 ci-dessous.

Avant de l'annoncer, faisons quelques rappels (pour plus de précisions, voir le paragraphe 1 de [Ser72]). Soient h un entier et $q = p^h$. Notons $\hat{V} = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} / x^{p^h} = \pi x\}$ et $V \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la réduction modulo p de \hat{V} . L'espace V est une \mathbb{F}_p -representation de G_K . De plus V hérite naturellement d'une structure de \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension 1 et fournit un caractere $I \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ qui se factorise par $\theta : I_t \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$. On pose $\theta_i = \theta^{p^i}$, ce sont les *caractères fondamentaux de niveau h* . Toute \mathbb{F}_p -representation irréductible de dimension d du groupe d'inertie modre s'écrit comme un produit de caractères fondamentaux de niveau h (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [Ser72]).

Thorme 1.0.1. *Soit X un schéma propre et lisse sur K réduction semi-stable sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K . On fixe r un entier. Les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifiée modulo p de $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^\star$ (où $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X sur \bar{K} et \star signifie que l'on prend le dual) sont compris entre 0 et er .*

Ce thorme est rapproché d'une conjecture formulée par Serre dans le paragraphe 1.13 de [Ser72] qui prédit le même résultat pour la représentation $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$. À l'heure actuelle, cette conjecture est connue dans le cas $r = 1$ bonne réduction ([Ray74]), le cas non ramifié bonne réduction ([FL82], [Kat87]), le cas non ramifié réduction semi-stable ([Bre98]) et le cas $r = 1$ ([Bre00]). Le résultat donné ici ne fait aucune hypothèse ni sur e , ni sur r . Remarquons toutefois qu'il est vide pour $er \geq p - 1$.

Soit r un entier vérifiant $er < p - 1$. Nous présentons dans le chapitre 2, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et le foncteur T_{st} qui associe tout objet de cette catégorie une \mathbb{Z}_p -representation de torsion de G_K . Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. En particulier, toujours dans le cas $er < p - 1$, on démontre qu'elle est abélienne et artinienne.

Nous donnons ensuite dans le chapitre 4 une description complète des objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$, lorsque le corps résiduel k est supposé algébriquement clos. Plus précisément nous prouvons le thorme suivant :

Thorme 1.0.2. *Supposons k algébriquement clos et $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors, il existe une base (e_1, \dots, e_h) de S et une suite d'entiers (n_i) compris entre 0 et er , périodique de période exactement h , le tout tel que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h + \text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M},$$

$\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$ pour tout i (considéré modulo d).

En outre, ces objets sont tous simples et deux à deux non isomorphes.

Par la suite, nous nous intéressons véritablement au foncteur T_{st} . On commence par déterminer son image sur les objets simples précédemment calculés. On obtient le thorme :

Thorme 1.0.3. *Supposons k algébriquement clos et $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme dans le thorme 1.0.2. Alors la représentation galoisienne $T_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

où m_i est défini par $n_i + m_i = er$ et où les θ_i sont les caractères fondamentaux de niveau h .

En particulier, pour tout objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modère sur la semi-simplifiée modulo p de $T_{st}(\mathcal{M})$ sont compris entre 0 et er .

La conclusion des chapitres 5 et 6 est une réponse affirmative à une conjecture formulée à la fin de [Bre99a], nonc que nous rappelons ici :

Thorme 1.0.4. *Supposons $er < p - 1$, alors le foncteur T_{st} de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations linaires de G_K est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objets et quotients et indépendante du choix de l'uniformisante π .*

Le chapitre 7 étudie les conséquences de tout ce travail préliminaire. On commence par répondre à un cas particulier d'une conjecture formulée dans [Bre02] (conjecture 2.2.6) :

Thorme 1.0.5. *Supposons $er < p - 1$. Alors le foncteur T_{st} réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles¹ et la catégorie des réseaux stables par Galois dans les \mathbb{Q}_p -représentations semi-stables de G_K poids de Hodge Tate compris entre 0 et r .*

On donne ensuite une preuve du thorme 1.0.1.

Ce travail a été accompli dans le cadre de ma thèse de doctorat en mathématique que je prépare sous la direction de Christophe Breuil. Je tiens à le remercier vivement ici pour les conseils, les explications et les réponses qu'il a toujours su me fournir, ainsi que pour la relecture patiente des versions préliminaires de ce texte.

2 Présentation des objets

Tous les objets introduits dans cette partie ne sont pas nouveaux et présents plus en détail dans les articles [Bre97a] et [Bre99a]. La première de ces références n'étudie que le cas $e = 1$, et donc ne présente les objets que dans ce cas particulier.

On fixe maintenant et jusqu'à la fin de cet article un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p - 1$. Les définitions que nous allons donner ont un sens pour tout entier $r < p - 1$ mais certains thormes ne sont plus vérifiés lorsque $er \geq p - 1$.

¹Voir le paragraphe 7.1 pour une définition.

2.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et ses variantes

L'anneau S

On commence par définir un anneau que l'on va munir de structures supplémentaires. Bien que ces structures dépendent du corps K et de l'uniformisante π choisie, nous le notons simplement S par la suite.

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u coefficients dans W . Soit $E(u)$ le polynôme minimal de l'élément π sur K_0 , c'est un polynôme d'Eisenstein. On considère l'enveloppe puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. On rappelle que cela signifie que l'on ajoute formellement à l'anneau $W[u]$ les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$. En tant qu'anneau, S est le complété p -adique de cette enveloppe puissances divisées. De façon plus terre-à-terre, S est la sous- W -algèbre de $K_0[[u]]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

où $q(i)$ désigne le reste de la division euclidienne de i par e , e étant l'indice de ramification absolue de corps K , également le degré du polynôme $E(u)$.

On prolonge le Frobenius à l'anneau S en définissant l'application ϕ par :

$$\phi \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(w_i) \frac{u^{pi}}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une application σ -semi-linéaire.

On munit en outre S de l'application W -linéaire N définie par :

$$N \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = - \sum_{i=1}^{\infty} i w_i \frac{u^i}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une dérivation au sens classique mais pas de la dérivation classique par rapport à u , le degré du polynôme n'étant pas abaissé.

On munit finalement S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n , on définit $\text{Fil}^n S$ comme le complété p -adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geq n$. On a donc :

$$\text{Fil}^n S = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

Il est évident que $\text{Fil}^0 S = S$, que $\text{Fil}^n S \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}^n S = 0$. On vérifie de plus certaines compatibilités avec les opérateurs définis précédemment : $N(\text{Fil}^n S) \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leq n \leq p-1$, $\phi(\text{Fil}^n S) \subset p^n S$. Ainsi, si $0 \leq n \leq p-1$, on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \text{Fil}^n S \rightarrow S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S , on le notera c par la suite.

Dfinition des catgories

On rappelle que r est un entier fix vrifiant $er < p - 1$. Un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est la donne :

1. d'un S -module \mathcal{M} isomorphe une somme directe (finie) de $S/p^n S$ pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

pour tout lment $s \in \text{Fil}^r S$ et tout lment $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module ;

4. d'une application W -linaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Une flche entre deux objets \mathcal{M} et \mathcal{M}' de cette catgorie est un morphisme S -linaire de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N .

On peut dfinir galement la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Il s'agit de la mme chose sauf que l'on ne fait pas cas de l'application N , les objets sont donc la donne des trois premiers points expos prcdemment.

2.2 Le foncteur vers les reprsentations galoisiennes

L'anneau A_{cris}

Soit R l'anneau limite projective du diagramme :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots \leftarrow$$

les applications de transition tant chaque fois l'lvation la puissance p . Un lment de R est une suite $(u^{(k)})_{k \geq 1}$ d'lments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ telle que pour tout entier k , $(u^{(k+1)})^p = u^{(k)}$.

On considre $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt coefficients dans R et l'application suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : W(R) &\rightarrow \mathbb{C}_p \\ (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) &\mapsto \sum_{n \geq 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{aligned}$$

o \mathbb{C}_p dsigne le complt p -adique de \bar{K} et o $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})^{p^m}$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ dsignant un relev quelconque de $a_i^{(j)}$.

On montre (pour une preuve simple, voir le paragraphe II.2.2 de [Ber]) que le noyau de $\hat{\theta}$ est l'idal principal de $W(R)$ engendr par l'element $\xi = [\underline{p}] - p$, o $[\underline{p}]$ est le representant de Teichmller de $\underline{p} \in R$ dfini par $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n, \dots)$, les p_n formant un systme compatible de racines p^n -imes de p . L'anneau A_{cris} s'obtient en introduisant des puissances divises en ξ , et en comptant p -adiquement :

$$A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

L'anneau A_{cris} hrite d'un Frobenius ϕ et d'une action du groupe de Galois G_K dfinis *via* leur action sur $W(R)$. On munit galement A_{cris} d'une filtration dcroissante dfinie de la faon suivante :

$$\text{Fil}^n A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i \geq n} a_i \frac{\xi^i}{i!}, a_i \in W(R), a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset A_{\text{cris}}.$$

L'anneau \hat{A}_{st}

L'anneau \hat{A}_{st} s'obtient en comptant p -adiquement la PD-algre polynomiale $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$:

$$\hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

On tend le Frobenius et l'action de Galois \hat{A}_{st} de la faon suivante. On pose $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$. Soit $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$ un systme compatible de racines p^n -ime de l'unitiformisante² π et soit $g \in G_K$. Pour tout entier n , il existe $\varepsilon_n(g)$ une racine p^n -ime de l'unit telle que $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g) \pi_n$. La suite $[\varepsilon_n(g)]$ dfnit un lment $[\underline{\varepsilon}(g)] \in A_{\text{cris}}$. L'element g agit sur X par $g(X) = [\underline{\varepsilon}(g)]X + [\underline{\varepsilon}(g)] - 1$. La filtration sur \hat{A}_{st} est obtenue en faisant le produit de convolution de la filtration de A_{cris} par la filtration naturelle donne par les puissances divises en X :

$$\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in \text{Fil}^{n-i} A_{\text{cris}}, a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset \hat{A}_{\text{st}}$$

avec la convention $\text{Fil}^k A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$ si $k < 0$. Pour $n \leq p - 1$, $\phi(\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}) \subset p^n \hat{A}_{\text{st}}$ et on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n}|_{\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}}$.

On munit finalement \hat{A}_{st} d'un opérateur de monodromie N dfini comme l'unique drivation continue A_{cris} -linaire telle que $N(X) = 1 + X$.

L'anneau \hat{A}_{st} n'est pas sans lien avec S : dans [Bre97b], Breuil prouve que le morphisme de W -algbres $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$, $u \mapsto \frac{[\pi]}{1+X}$ ($[\pi]$ dsigne le representation de Teichmller de $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n, \dots) \in R$, $\bar{\pi}_i$ tant la rduction modulo p de π_i) identifie S avec l'ensemble $\hat{A}_{\text{st}}^{G_K}$ des invariants de \hat{A}_{st} sous l'action du groupe de Galois. En outre, ce morphisme fait de \hat{A}_{st} un S -module. Toutefois, \hat{A}_{st} ne vrifie pas les proprits necessaires pour tre un objet de la catgorie \mathcal{M}^r .

²Ainsi l'anneau \hat{A}_{st} dpend *a priori* du choix de ce systme compatible de racines. Cependant, on prouve que ce n'est pas le cas.

Le foncteur T_{st}

On pose $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$. L'action du groupe de Galois, le Frobenius, la filtration et la monodromie s'étendent à $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ car $\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}} \cap p^r \hat{A}_{\text{st}} = p^r \text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}$. En outre, pour la même raison, si $r < p - 1$, l'objet $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ hérite de ϕ_r . Ce n'est toutefois pas un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$: il n'est pas de longueur finie en tant que S -module, et l'image de ϕ_r n'engendre pas tout l'espace. Il est quand même légitime de considérer l'ensemble des morphismes d'un objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ et on définit :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st},\infty})$$

le Hom précédent signifiant que l'on prend les morphismes compatibles au Fil^r , au Frobenius et l'opération de monodromie. Cet ensemble est naturellement une \mathbb{Z}_p -représentation galoisienne de torsion, tue par la puissance de p qui annule \mathcal{M} .

Notre but est principalement d'étudier le foncteur T_{st} , et pour ce faire, nous allons quasiment toujours procéder par dévissage en regardant dans un premier temps les objets tus par p , que nous étudions dans le paragraphe suivant.

2.3 Les objets tus par p

Les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

L'anneau qui va être important ici est $k[u]/u^{ep}$ qui est relié de près à S/pS . Sur cet anneau, on définit une filtration par $\text{Fil}^n k[u]/u^{ep} = u^{en} k[u]/u^{ep}$, un Frobenius ϕ par $\phi(\sum w_i u^i) = \sum w_i^p u^{ip}$ (pour $\lambda_i \in k$) et un opérateur de monodromie N comme l'unique dérivation k -linéaire vérifiant $N(u) = -u$

On définit ensuite la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$: les objets sont les données des quatre points qui suivent :

1. un $k[u]/u^{ep}$ -module \mathcal{M} libre de rang fini ;
2. un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r k[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{M} = u^{er} \mathcal{M}$;
3. une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que l'image de ϕ_r engendre \mathcal{M} en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module ;
4. une application k -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in k[u]/u^{ep}$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

On introduit également la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ définie comme $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ sauf que l'on oublie la donnée de l'opérateur N .

On peut comparer les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p et ceux de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. On commence pour cela par comparer les anneaux S/pS et $k[u]/u^{ep}$, simplement grâce à l'application $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$

qui envoie u sur u et toutes les puissances divisées de la forme $\frac{u^{e^i}}{i!}$ pour $i \geq p$ sur 0. Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , c'est naturellement un S/pS -module (mme libre de rang fini), et on peut donc considérer le produit tensoriel $T(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{(\sigma)} k[u]/u^{ep}$ qui hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'une monodromie et dont on vérifie qu'il est dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Cette construction définit un foncteur T allant de la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tus par p dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Proposition 2.3.1. *Le foncteur T défini précédemment est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Elle est en tout point similaire à celle donnée pour la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a]. \square

On obtient ainsi une description plus simple des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p , les objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ pouvant être vus comme des k -espaces vectoriels de dimension finie.

Description du quotient $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $p\mathcal{M} = 0$. Alors $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}}/p)$. Nous allons dans un premier temps décrire explicitement le quotient \hat{A}_{st}/p .

On rappelle que l'on a défini un élément $\underline{p} \in R$. De même, on définit l'élément $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_n) \in R$, en rappelant que les π_i forment un système compatible de racines p^i -èmes de l'uniformisante π et que les $\bar{\pi}_i$ correspondent à leur réduction modulo p .

On a le résultat suivant (voir paragraphe 3.7 de [Fon83]) :

Lemme 2.3.2. *Avec les notations précédentes, $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ s'identifie à l'enveloppe aux puissances divisées R^{PD} de R par rapport à l'idéal principal engendré par \underline{p} . En outre, on peut également identifier cet anneau $R[X_i] / (\underline{p}^p, X_i^p)_{i \geq 1}$, l'isomorphisme envoyant X_i sur la p^i -ième puissance divisée $\frac{[\underline{p}]^{p^i}}{(p^i)!} \in A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$.*

La première projection $R \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ induit un isomorphisme $R/\underline{p}^p R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On déduit du lemme précédent que $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i]/X_i^p$, i décrivant l'ensemble des entiers strictement positifs. Finalement on voit que $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ s'identifie à l'anneau suivant :

$$(\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i] \langle X \rangle) / (\underline{p}^p, X_i^p)_{i \geq 1}.$$

On rappelle que p_1 est une racine p -ième de p . Via les identifications précédentes, et pour $n < p$, $\text{Fil}^n \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ est le $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ -module engendré par les $p_1^{n-i} \frac{X^i}{i!}$ (pour $i \leq n$), les $\frac{X^i}{i!}$ (pour $i > n$) et les X_i (pour $i \geq 1$). On a $\phi_r(X_i) = 0$ et $\phi_1(X) = \frac{(1+X)^{p-1}}{p} = Y$. La monodromie est l'unique dérivation $(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$ -linéaire et continue N qui envoie $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$.

Description du foncteur T_{st}

Il nous faut faire le transport *via* le foncteur T pour voir comment le foncteur T_{st} se réalise travers la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. L'objet à calculer est le produit tensoriel $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$. Pour cela, on définit $\hat{A} = (\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \langle X \rangle$. On a un morphisme de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$:

$$\text{pr} : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}$$

donn, *via* la description prcdente, par $\text{pr}(X) = X$ et $\text{pr}(X_i) = 0$ pour tout i . On vrifie que pr est S/pS -linaire. D'autre part, on a une inclusion S/pS -linaire :

$$i : k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}$$

dfinie par $i(1) = 1$. On peut former le produit :

$$\text{pr} \cdot i : \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}.$$

Lemme 2.3.3. *L'application prcdente est un isomorphisme.*

Dmonstration. La surjectivit est immddiate. Comme $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$ est surjectif, tout lment de $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ s'crit $x \otimes 1$ avec $x \in \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. Pour vrifier l'injectivit, il suffit donc de voir que $(\ker \text{pr}) \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} = 0$ mais ceci rsulte directement de :

$$X_i \otimes 1 = \frac{\pi_1^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = \frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = 1 \otimes \sigma\left(\frac{u^{ep^i}}{(p^i)!}\right) = 0.$$

□

On construit une application :

$$\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$$

dduite de la tensorisation par $k[u]/u^{ep}$ au-dessus de S/pS .

Lemme 2.3.4. *L'application prcdente est un isomorphisme de \mathbb{Z}_p -modules galoisiens.*

Dmonstration. Commenons par l'injectivit. Soit $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty})$ induisant par tensorisation l'application nulle $T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}, \infty} \\ x \mapsto 1 \otimes x \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{0} & \hat{A} \end{array}$$

d'o $\text{im } \psi \subset \ker \text{pr}$. On vrifie facilement que $\phi_r(\ker \text{pr}) = 0$. Comme ψ commute ϕ_r et $\phi(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} , on en dduit $\psi = 0$. L'application $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$ est injective.

Pour la surjectivit, notons $T(\mathcal{M})_0$ l'image de ϕ_r sur $T(\mathcal{M})$. La preuve de la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a] fournit l'isomorphisme :

$$\mathcal{M} \simeq T(\mathcal{M})_0 \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS.$$

Soit $\bar{\psi} : T(\mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}$. D'apr l'isomorphisme prcdent, elle induit une application S/pS -linaire $\mathcal{M} \rightarrow \hat{A} \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS$, et ce dernier module s'envoie de faon naturelle dans $\hat{A}_{\text{st}, \infty}$. On vrifie finalement que l'application compose commute Fil^r , ϕ_r et N et relve $\bar{\psi}$. □

Description de l'anneau \hat{A}

Lemme 2.3.5. *Soit R un anneau dans lequel tous les entiers premiers p sont inversibles. Alors on a un isomorphisme :*

$$(R[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p) \longrightarrow (R \langle X \rangle) / p$$

envoyant X' sur $X + 1$ et $\frac{Y^i}{i!}$ sur $\frac{1}{i!} \left(\frac{(X+1)^p - 1}{p} \right)^i$.

Dmonstration. D'abord, l'application précédente, disons ψ , est bien définie : on a $(1 + X)^p \equiv 1 + X^p \equiv 1 \pmod{p}$.

Pour prouver que ψ est un isomorphisme, on remarque que chacun des objets intervenant est un R/p -module libre et que ψ est R/p -linéaire. Une base du module source est donnée par la famille $\left(X^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right)_{0 \leq i \leq p-1, j \geq 0}$. Le module but admet pour base la famille $\left(\frac{X^n}{n!} \right)_{n \geq 0}$. L'image par ψ de l'élément $X^i \cdot \frac{Y^j}{j!}$ est :

$$\psi \left(X^i \cdot \frac{Y^j}{j!} \right) = (1 + X)^i \cdot \frac{\left(\frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^j}{j!}.$$

Le terme dominant de cette dernière expression est $\frac{X^{pj+i}}{p^j j!}$ et si on note v_p la valuation p -adique normalisée par $v_p(p) = 1$, on a :

$$v_p((pj + i)!) = j + v_p(j!) = v_p(p^j j!)$$

puisque $i < p$. Comme les entiers premiers p sont par hypothèse inversibles dans R , l'égalité précédente assure qu'il existe un élément inversible $\alpha \in R/p$ tel que $p^j j! = \alpha (pj + i)!$. Ainsi la « matrice » représentant l'application ψ dans les bases données ci-dessus est triangulaire et les termes diagonaux sont tous inversibles. Cela prouve que ψ est bijective. \square

L'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifie les hypothèses du lemme que l'on vient de prouver ; on obtient donc le corollaire suivant qui donne une nouvelle description relativement explicite de l'anneau \hat{A} :

Corollaire 2.3.6. *On a un isomorphisme :*

$$\hat{A} \rightarrow (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

En outre l'opérateur de monodromie s'exprime simplement sur cette description : on a $N(X') = X'$ et $N\left(\frac{Y^i}{i!}\right) = \frac{Y^{i-1}}{(i-1)!}$.

Action de Galois sur l'anneau \hat{A} .

On va déterminer l'action de Galois sur les éléments X' et Y . Pour X' c'est facile puisque par définition on a $g(X') = \varepsilon(g) X'$ pour tout $g \in G_K$.

Pour Y , on pourrait tentent d'écrire :

$$g(Y) = \frac{\varepsilon(g)^p (1 + X)^p - 1}{p} = Y$$

mais on n'a pas le droit de faire ce calcul cause de la division par p . Ce qu'il faut, c'est choisir un relev de Y dans \hat{A}_{st} , calculer l'action de Galois sur ce relev et voir quel lment correspond dans \hat{A} .

Comme relev, on pourrait choisir $\frac{(1+X)^p-1}{p}$ mais on choisit ici :

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{X^i}{i} + \dots \in \hat{A}_{\text{st}}$$

Soit $g \in G_K$. On a $g \log(1+X) = \log(g(1+X)) = \log([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)) = g(Y) = Y + \hat{t}(g)$
o :

$$\hat{t}(g) = \log([\underline{\varepsilon}(g)]) = [\underline{\varepsilon}(g)] - \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^2}{2} + \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^3}{3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^i}{i} + \dots \in A_{\text{cris}}$$

Nous allons dterminer l'image $t(g)$ de $\hat{t}(g)$ dans \hat{A} . Remarquons que comme $\hat{t}(g) \in A_{\text{cris}}$, on a simplement $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Nous allons prouver qu'il s'agit d'une racine $(p-1)$ -ime de $(-p)$.

Lemme 2.3.7. *Avec les notations prcdentes, $t(g)$ est l'image dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ de :*

$$-\frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p}$$

o $\varepsilon(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est la racine p -ime de l'unit telle que $g(\pi_1) = \varepsilon(g)\pi_1$.

Dmonstration. Il est plus pratique ici d'crire les choses sous la forme suivante :

$$Y - \frac{X^p}{p} = \frac{X'^p - 1 - (X' - 1)^p}{p}$$

et de dvelopper :

$$Y - \frac{X^p}{p} = a_1 X' + a_2 X'^2 + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$$

avec $a_i = \frac{(-1)^i C_p^i}{p}$. En appliquant g , on obtient :

$$gY - g\left(\frac{X^p}{p}\right) = a_1 [\varepsilon(g)] X' + a_2 [\varepsilon(g)]^2 X'^2 + \dots + a_{p-1} [\varepsilon(g)]^{p-1} X'^{p-1}$$

d'o dans \hat{A} :

$$t(g) \equiv g\left(\frac{X^p}{p}\right) - \frac{(\varepsilon(g) - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

Comme on sait que $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, il suffit pour conclure de prouver que $g\left(\frac{X^p}{p}\right)$ est nul modulo X . Mais dans \hat{A}_{st} , on a $g\left(\frac{X^p}{p}\right) = \frac{([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)-1)^p}{p}$ et donc modulo X , on obtient :

$$g\left(\frac{X^p}{p}\right) \equiv \frac{([\underline{\varepsilon}(g)] - 1)^p}{p} \pmod{X}$$

On conclut en remarquant que $[\underline{\varepsilon}(g)] - 1 \in \ker \hat{\theta}$. □

Lemme 2.3.8. *L'élément $t(g)$ est soit nul soit gal dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la réduction modulo p d'une racine $(p-1)$ -ième de $(-p)$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.*

Démonstration. Supposons $t(g) \neq 0$. Prouvons d'abord que $t(g)^{p-1} \equiv -p \pmod{p^2}$. D'après le lemme 2.3.7, cela revient à montrer que :

$$(\varepsilon(g) - 1)^{p(p-1)} \equiv -p^p \pmod{p^{p+1}}.$$

Modulo $1 + X + \dots + X^{p-1}$, le polynôme $(X-1)^{p-1}$ s'écrit $a_0 + a_1X + \dots + a_{p-2}X^{p-2}$ avec $a_i = (-1)^i C_{p-1}^i - 1$. On vérifie que a_i est un multiple de p et on pose $b_i = \frac{a_i}{p}$. En levant la puissance p , on obtient :

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1X + \dots + b_{p-2}X^{p-2})^p \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}}$$

d'où

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2}) \pmod{1 + X + \dots + X^{p-1}, p^{p+1}}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $b_0 + b_1 + \dots + b_{p-2} = -1$ pour conclure.

Notons $\eta_1, \dots, \eta_{p-1} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ les racines $(p-1)$ -ièmes de $(-p)$. On a :

$$(t(g) - \eta_1) \dots (t(g) - \eta_{p-1}) = 0 \pmod{p^2}$$

ou encore $v(t(g) - \eta_1) + \dots + v(t(g) - \eta_{p-1}) \geq 2e$. Il existe donc i tel que $v(t(g) - \eta_i) \geq \frac{2e}{p-1}$. De plus pour tout i , $v(\eta_i) = \frac{e}{p-1}$ et pour $i \neq j$, $v(\eta_i - \eta_j) = \frac{e}{p-1}$ car deux racines $(p-1)$ -ièmes de l'unité sont encore distinctes dans le corps résiduel. Il vient, si $j \neq i$, $v(t(g) - \eta_j) = v((t(g) - \eta_i) + (\eta_i - \eta_j)) = \frac{e}{p-1}$, puis $v(t(g) - \eta_i) \geq \left(2 - \frac{p-2}{p-1}\right)e \geq e$. Cela conclut. \square

3 Généralités sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$

Outre de nombreuses explicitations, cette partie a pour but de démontrer les deux résultats suivants. D'une part les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ définies précédemment ne dépendent pas du choix d'une uniformisante π . D'autre part, ces catégories sont abéliennes et même artiniennes.

3.1 Indépendance du choix de l'uniformisante

Considérons π et π' deux uniformisantes de K . Notons respectivement $E(u)$ et $E'(u)$ les polynômes minimaux de π et π' .

Soit $P(u)$ un polynôme à coefficients dans W tel que $P(\pi) = \pi'$ et $P(0) = 0$. On définit une application $\nu : S \rightarrow S$ en posant $\nu(s) = s \circ P$. C'est un morphisme d'anneaux, bijectif. Il n'est par contre compatible ni au Frobenius, ni l'opérateur de monodromie, et nous allons dans un premier temps voir comment ν se comporte vis-à-vis de ces opérateurs.

Plongeons S dans $T = K_0[[u]]$ et prolongeons les opérateurs ϕ et N sur T . Ils vérifient la relation $N\phi = p\phi N$. De même la bijection ν s'étend en une bijection de T . Notons finalement \mathfrak{m} l'idéal maximal de S , c'est l'idéal engendré par p , u et $\frac{u^e}{i}$ pour $i \geq 1$.

Lemme 3.1.1. Soit $t \in \mathfrak{m}$. L'application de T dans T définie par :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(x)$$

est l'unique morphisme d'anneaux qui envoie u sur $u \exp(-t)$.

Démonstration. Puisque $t \in \mathfrak{m}$, on n'a aucun souci de convergence dans T . En outre, comme $N(u) = -u$, il vient $N^i(u) = (-1)^i u$ et donc u est bien envoyé sur $u \exp(-t)$.

Il reste à vérifier que l'on a bien affaire à un morphisme d'anneaux. La stabilité par addition est immédiate. Soient x et y dans T , calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(xy) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{k+l=i} C_i^k N^k(x) N^l(y) \\ &= \sum_{k,l \geq 0} \frac{t^i}{k!l!} N^k(x) N^l(y) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k(x) \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} N^l(y) \right) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 3.1.2. Il existe un (unique) élément $t \in \mathfrak{m}$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu : S \rightarrow S$ soit donnée par la formule :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi(x).$$

Démonstration. Faisons les calculs dans T après avoir vérifié que si une suite d'éléments de S admet une limite dans S , alors elle converge aussi dans T , et vers la même limite.

Regardons d'abord le cas où P s'écrit $uH(u)$ avec $H \in 1 + \mathfrak{m}$. Dans ces conditions on est capable de définir $\log H \in T$. D'autre part, notons $uS(u)$ l'image réciproque de u par ν . Notons $H^{(\phi)}$ le polynôme obtenu de H en appliquant ϕ à chacun de ses coefficients : on a $\phi(H)(u) = H^{(\phi)}(u^p)$.

Dans l'anneau T , on a alors les égalités suivantes :

$$\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \quad \text{et} \quad \nu^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^i}{i!} N^i(x).$$

Un calcul donne :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]^i}{p^i i!} \nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)).$$

On a d'autre part :

$$\nu^{-1} \circ N^i(\phi(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

et donc en regroupant :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{[-\log(H^{(\phi)}(u^p S(u)^p))]}{p^i i!} \frac{(-\log S(u))^j}{j!} N^{i+j}(\phi(x))$$

ce que l'on rduit, grce la formule du binme, en :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\frac{-\log H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)}{p} - \log S(u) \right]^i N^i(\phi(x)).$$

On voit sur cette dernire criture que l'on a trouv un candidat pour t . Il se rcrit sous la forme plus sympathique suivante :

$$t = -\frac{1}{p} \log [S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p)]$$

Mais par dfinition de S et de H , on a $S(u) H(uS(u)) = 1$ et donc en appliquant ϕ et en regardant modulo p , on trouve $S(u)^p H^{(\phi)}(u^p S(u)^p) \equiv 1 \pmod{p}$. On en dduit que $t \in S$ et vrifie les conditions du lemme.

Si P n'est pas de la forme prcdente, on peut toujours dcomposer $\nu : S \rightarrow S \rightarrow S$ o la premiere flche ν_0 est de la forme prcdente et la seconde un morphisme d'anneaux envoyant u sur $[\lambda]u$, o $[\lambda]$ est le representant de Teichmller d'un $\lambda \in k$. On vrifie que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \nu & & \\ & & \curvearrowright & & \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\quad} & S \\ \downarrow \nu^{-1}\phi\nu = \nu_0^{-1}\phi\nu_0 & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{\nu_0} & S & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

On est donc ramen au mme problme avec ν_0 , dj trait. \square

Lemme 3.1.3. *Il existe un (unique) lment $n \in S$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ N \circ \nu : S \rightarrow S$ soit donne par la formule :*

$$x \mapsto nN(x)$$

Dmonstration. Rappelons que l'application ν tait donne par $x \mapsto x \circ P$, et que l'on peut dcire N via la formule $N(s) = -us'$ o s' dsigne la drive usuelle de s (par rapport u).

On peut alors calculer :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} [N(x \circ P)] = \nu^{-1} [-uP' \cdot (x' \circ P)]$$

D'autre part, on a :

$$\nu(N(x)) = \nu(-ux') = -P(u) \cdot (x' \circ P)$$

d'o :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu(x) = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) N(x)$$

et on a ainsi un candidat pour n . Or $\nu^{-1}(P(u)) = u$ par dfinition et par ν^{-1} , u s'envoie sur un multiple de u : $n = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) \in S$ et convient. \square

Construction du foncteur

Notons $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$) la catégorie obtenue en choisissant π (resp. π') comme uniformisante de K . On souhaite construire un foncteur (qui va s'avérer être une équivalence de catégories) entre les catégories $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$. Notons que si $r = 0$, les catégories $\underline{\mathcal{M}}_\pi^0$ et $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^0$ sont identiques. On peut supposer $r > 0$ et donc $p > 2$ (puisque $er < p - 1$).

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. L'application ν définie précédemment fait de S une S -algèbre et on remarque que si l'on munit les anneaux des filtrations correspondant respectivement au choix des uniformisantes π et π' , l'application ν est compatible aux filtrations.

Considérons les constantes t et n fournies par les lemmes 3.1.2 et 3.1.3 et définissons :

$$\begin{aligned} M' &= S_{(\nu)} \otimes M \\ \text{Fil}^r M' &= S_{(\nu)} \otimes \text{Fil}^r M \\ \phi'_r(s \otimes x) &= \phi(s) \otimes \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi_r(x) \right) \\ N'(s \otimes x) &= N(s) \otimes x + s \otimes nN(x) \end{aligned}$$

les deux dernières égalités sont définies pour tout $s \in S$ et respectivement tout $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et tout $x \in \mathcal{M}$.

Lemme 3.1.4. *Pour tout entier $i \geq 1$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Démonstration. On prouve la propriété par récurrence. Pour $i = 1$, elle est vraie par hypothèse. Pour l'hérédité, juxtaposons les deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)^i N^i \downarrow & & \downarrow c^i N^i \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Le grand rectangle est commutatif puisque les deux carrés le sont. Soient $x \in \mathcal{M}$ et $s \in S$. On a :

$$\begin{aligned} (sN) \circ (s^i N^i)(\phi_r(x)) &= s [N(s^i) N^i(\phi_r(x)) + s^i N^{i+1}(\phi_r(x))] \\ &= s^i N(s) N^i(x) + s^{i+1} N^{i+1}(x). \end{aligned}$$

En appliquant le calcul précédent deux fois et en utilisant la commutativité du diagramme, on obtient, pour tout $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} c^i N(c) N^i(\phi_r(x)) + c^{i+1} N^{i+1}(\phi_r(x)) \\ &= \phi_r \left[E(u)^i N(E(u)) N^i(x) + E(u)^{i+1} N^{i+1}(x) \right] \\ &= \phi(N(E(u))) \phi_r \left(E(u)^i N^i(x) \right) + \phi_r \left(E(u)^{i+1} N^{i+1}(x) \right). \end{aligned}$$

On sait que $\phi(N(E(u))) = N(c)$, ce qui permet de conclure en utilisant une dernire fois l'hypothse de rccurrence. \square

Lemme 3.1.5. *L'application ϕ'_r est bien dfinie et est ϕ -semi liniaire.*

Dmonstration. Dans un premier temps, si $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, d'aprs le lemme 3.1.4 l'lment $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$ est bien dfinie puisqu'gal $\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!} \circ N^i(x)\right)$. Remarquons que $\frac{E(u)^i}{i!} \circ N^i(x)$ est toujours lment de $\text{Fil}^r \mathcal{M}$: si $i < r < p$, c'est vrai car $i!$ est inversible et si $i \geq r$, c'est vrai par hypothse.

D'autre part, pour $i \gg 0$, on a :

$$\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!} N^i(x)\right) = \frac{1}{c^r} \phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}\right) \phi_r(E(u)^r N^i(x))$$

et le facteur $\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}\right)$ est multiple de $\frac{p^{i-r}}{i!}$. Comme on a suppos $p > 2$, la valuation p -adique de ce dernier tend vers l'infini. Cela prouve que la suite des $\frac{1}{i!} N^i \circ \phi_r(x)$ converge vers 0 et donc que la somme de la srie est bien dfinie.

Reste voir que si $s \in S$ et $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, on a $\phi'_r(1 \otimes sx) = \phi'_r(\nu(s) \otimes x)$. Comme dans le lemme 3.1.1, on prouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(sx)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi(s)) \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(x)) \right).$$

Le premier facteur vaut $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(s)$ d'aprs le lemme 3.1.2. Cela conclut, le fait que ϕ'_r est ϕ -semi-linaire tant vident. \square

Lemme 3.1.6. *L'application N' est bien dfinie et vrifie la condition de Leibniz.*

Dmonstration. Comme prcdemment, il s'agit de vrifier que pour $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $N'(1 \otimes sx) = N'(\nu(s) \otimes x)$. Calculons :

$$N'(1 \otimes sx) = 1 \otimes nN(sx) = 1 \otimes nN(s)x + 1 \otimes nsN(x).$$

Or d'aprs le lemme 3.1.3, on a $nN(s) = \nu^{-1} \circ N \circ \nu(s)$ et donc $1 \otimes nN(s)x = N \circ \nu(s) \otimes x$. D'autre part, on a $1 \otimes nsN(x) = \nu(s) \otimes nN(x)$. On en dduit que :

$$N'(1 \otimes sx) = N \circ \nu(s) \otimes x + \nu(s) \otimes nN(x)$$

comme on voulait. \square

Proposition 3.1.7. *L'objet \mathcal{M}' muni de $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$, de ϕ'_r et de N' est un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$.*

Dmonstration. La seule vrification qui pose problme est la commutativit du diagramme reliant ϕ'_r N' . Par un simple calcul, on prouve dans un premier temps qu'il existe une constante c' faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \\ \nu(E(u))N' \downarrow & & \downarrow c'N' \\ \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \xrightarrow{\phi'_r} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Comme $\nu(E(u))$ s'obtient partir de $E'(u)$ simplement par la multiplication par une unit de S , un diagramme quivalent, dans lequel on a remplac $\nu(E(u))$ par $E'(u)$ et dans lequel la constante c' a t modifi, commute. D'autre part le calcul prouve que la constante c' obtenue ne dpend pas de \mathcal{M} .

Soient n un entier et $\mathcal{M} = S/p^n S \cdot e_1$ muni de $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M}$, $\phi_r(e_1) = e_1$ et $N(e_1) = 0$. On a $(c'N') \circ \phi'_r(u \otimes e_1) = \phi'_r \circ (E'(u)N)(u \otimes e_1)$, ce qui donne aprs calcul :

$$[c'pu^p - u^p \phi(E'(u))] \otimes e_1 = 0.$$

Ainsi p^n divise $c'pu^p - u^p \phi(E'(u))$ pour tout n et finalement $c' = \phi_1(E'(u))$. \square

On a ainsi dfini un foncteur (la ddefinition sur les flches est vidente) $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$.

Canonicit et compatibilit

Proposition 3.1.8. *Le foncteur dfini prcdemment ne dpend pas du choix de l'lement $P \in S$.*

Dmonstration. Avec les notations prcdentes, il suffit de prouver que si $P = uH$ est tel que $P(\pi) = \pi$, alors \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont canoniquement isomorphes. Notons $\nu : S \rightarrow S$ le morphismes d'anneau tel que $\nu(u) = P(u)$. La condition implique $H(u) - 1 \in \text{Fil}^1 S$ et donc l'lement $\log(H(u))$ est bien dfini dans S .

Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$, on peut dfinir l'application :

$$\begin{aligned} S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M} &\rightarrow S \\ s \otimes x &\mapsto s \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \end{aligned}$$

Comme $\log(H(u)) \in \text{Fil}^1 S$, l'lement $\frac{(-\log H(u))^i}{i!}$ est bien dfini. En outre le fait que dans T , $\exp(\log H(u)) = H(u) \in S$ prouve que la suite $\frac{(\log H(u))^i}{i!}$ converge vers 0 et finalement que l'application est bien dfinie.

Il ne reste plus qu' voir que c'est un isomorphisme S -linaire et compatible toutes les structures; c'est donc une flche dans $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$. \square

Corollaire 3.1.9. *Le foncteur dfini prcdemment est une quivalence de catgorie.*

Si, comme prcdemment, π et π' sont deux uniformisantes de K , on peut dfinir $\hat{A}_{\text{st}\pi}$ et $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$. Pour cela, rappelons que l'on avait besoin de choisir $(\pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$ (resp. $(\pi'_1, \dots, \pi'_n, \dots)$) un systme compatible de racines p^n -imes de π (resp. de π'). On dfinit ω_n en imposant $\pi_n = \omega_n \pi'_n$, obtenant ainsi $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n, \dots) \in R$ puis $[\underline{\omega}] \in A_{\text{cris}}$ (notez que A_{cris} ne dpend pas du choix d'une uniformisante).

L'unique morphisme de A_{cris} -algbre $\hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ envoyant $(1+X)$ sur $[\underline{\omega}](1+X)$ est un isomorphisme compatible ϕ_r , N et l'action du groupe de Galois G_K .

Proposition 3.1.10. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{M}}_\pi^r & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r \\ & \searrow T_{\text{st}\pi} & \swarrow T_{\text{st}\pi'} \\ & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) & \end{array}$$

o la flche horizontale est le foncteur dfini prcdemment.

Dmonstration. L'anneau S s'identifie la fois aux points fixes sous l'action de Galois de $\hat{A}_{\text{st}\pi}$ et de $\hat{A}_{\text{st}\pi'}$. Notons $\rho : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi}$ et $\rho' : S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ les inclusions correspondantes. Il existe un unique morphisme de A_{cris} -algre, $\nu : \hat{A}_{\text{st}\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\nu} & S \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \hat{A}_{\text{st}\pi} & \xrightarrow{\nu} & \hat{A}_{\text{st}\pi'} \end{array}$$

En effet, le diagramme impose la valeur de $\nu \left(\frac{X^i}{i!} \right)$ et on vrifie que l'application ainsi dfinie convient. En outre, elle est G_K -quivariante et induit une flche $\nu : \hat{A}_{\text{st},\infty\pi} \rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'}$ encore G_K -quivariante.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{\pi}^r$ et \mathcal{M}' l'objet de $\underline{\mathcal{M}}_{\pi'}^r$ qui lui est associ par le foncteur prcdent. On rappelle qu'en tant que module, on a $\mathcal{M}' = S_{(\nu)} \otimes \mathcal{M}$. Soit $f \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On lui associe l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &\rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'} \\ s \otimes x &\mapsto \rho'(s) \cdot \nu \circ f(x) \end{aligned}$$

On vrifie qu'elle est S -linaire et compatible aux structures dfinissant ainsi un lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$.

On dfinit ainsi une application $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$. Elle est \mathbb{Z}_p -linaire et bijective puisque l'on peut construire l'application rciproque de faon analogue. On vrifie qu'elle est compatible l'action de Galois et donc qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes. \square

3.2 Description des objets de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$

On considre dans ce paragraphe un objet \mathcal{M} de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$. Il s'agit d'un $k[u]/u^{ep}$ -module libre de rang fini d muni d'une filtration, d'une application ϕ_r et d'une application N , le tout vrifiant les propriets donnes prcdemment.

Bases adaptes

On a dans un premier temps un rsultat bien utile (et classique) qui est le suivant :

Proposition 3.2.1. *Il existe une base (e_1, \dots, e_d) de \mathcal{M} et des entiers n_1, \dots, n_d tels que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^d u^{n_i} k[u]/u^{ep} \cdot e_i.$$

Une telle base est par dfnition une base adapte de \mathcal{M} .

Dmonstration. Comme \mathcal{M} est suppos libre, il existe un $k[u]$ -module libre \mathcal{M}' tel que $\mathcal{M}'/u^{ep}\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Autrement dit, il existe une flche $f : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ dont le noyau est exactement $u^{ep}\mathcal{M}'$. Dfinissons $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = f^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M})$. C'est un sous- $k[u]$ -module de \mathcal{M}' .

Puisque $k[u]$ est un anneau principal, d'aprs le thorme de structure, il existe une suite de polynmes P_1, \dots, P_d tels que P_i divise P_{i+1} pour tout i et une base $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d)$ de \mathcal{M}' telle

que $(P_1\hat{e}_1, \dots, P_d\hat{e}_d)$ soit une base de $\text{Fil}^r \mathcal{M}'$. D'autre part, $u^{er} \mathcal{M}' \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}'$ et donc tous les polynomes P_i sont des diviseurs de u^{er} ; ils sont donc de la forme $P_i = u^{n_i}$ pour certains entiers n_i .

En posant $e_i = f(\hat{e}_i)$, on a bien le resultat annonce. \square

Remarque. Les entiers n_i ne dependent pas permutation pris de la base considere. En effet, la dimension en tant que k -espace vectoriel du quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M} / (u^k \mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M})$ est donnee par la somme des $k - n_i$, somme tendue tous les i pour lesquels $n_i \leq k$. On voit facilement que la connaissance de toutes ces sommes permet de dterminer les n_i permutation pris.

Fixons present (e_1, \dots, e_d) une base adaptee de \mathcal{M} . Nous allons essayer de dcire un peu mieux la fonction ϕ_r et pour cela nous introduisons la dfnition suivante.

Dfnition 3.2.2. Soit $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$, et soit n le plus petit entier tel que $u^n x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On pose $\varphi_r(x) = \phi_r(u^n x)$.

Soit $x_i = \varphi_r(e_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. On rappelle que la famille des e_i est la base adaptee que l'on s'est fixe prcdemment.

Proposition 3.2.3. Avec les notations prcdentes, (x_1, \dots, x_d) est une base de \mathcal{M} .

D'autre part, si $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$, alors $\varphi_r(x) \in x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$.

Dmonstration. Pour le premier nonc, il suffit de voir que si $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, alors $\phi_r(x)$ s'crit comme une combinaison lineaire (coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$) des x_i . Comme $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} comme $k[u]/u^{ep}$ -module, il en est de mme de la famille (x_1, \dots, x_d) . Comme elle est de bon cardinal, elle en est une base.

Soit $x \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$. On voit en dcomposant x sur la base des e_i , que $\varphi_r(x)$ s'crit forcment sous la forme :

$$\varphi_r(x) = Q_1(u^p)x_1 + \dots + Q_d(u^p)x_d$$

o au moins l'un des polynmes Q_i est de valuation nulle. Dans ce cas, on a directement $\varphi_r(x) \in \mathcal{M} \setminus u\mathcal{M}$. \square

Remarque. La deuxime partie de la proposition prcdente permet de dfinir correctement les itr de φ_r .

L'oprateur de monodromie

Nous allons present tudier l'oprateur de monodromie. Pour cela, nous notons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$. Par ce qui prcde, \mathcal{M}_0 s'identifie au $k[u^p]/u^{ep}$ -module engendr par les x_i . Nous avons alors :

Proposition 3.2.4. L'operation N induit une application $k[u^p]/u^{ep}$ -lineaire et nilpotente de \mathcal{M}_0 sur lui-mme.

Dmonstration. Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

prouve que si x est dans l'image de ϕ_r , alors il en est de mme de $N(x)$, et donc que N induit une application de \mathcal{M}_0 dans lui-mme. D'autre part, $N(u^p x) = N(u^p)x + u^p N(x) = -pu^p x + u^p N(x) = u^p N(x)$, ce qui prouve bien la linarit annonce.

La nilpotence provient du mme diagramme que l'on crit p fois :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
 \downarrow u^e N & & \downarrow -N \\
 \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
 \downarrow u^e N & & \downarrow -N \\
 \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
 \downarrow u^e N & & \downarrow -N \\
 \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}
 \end{array}$$

0
 $-N^p$

On en dduit bien que $N^p = 0$ sur \mathcal{M}_0 et donc que N est nilpotent. □

Corollaire 3.2.5. *Il existe un lment $x \in \mathcal{M}_0$ non divisible par u tel que $N(x) = 0$.*

Dmonstration. Le fait que N soit nilpotent sur \mathcal{M}_0 qui est un k -espace vectoriel prouve que le noyau de N n'est pas rduit 0 . Ainsi, il existe un $x' \in \mathcal{M}_0$ tel que $N(x') = 0$.crivons $x' = u^{pk}x''$ o x'' est un lment de \mathcal{M}_0 non divisible par u et o $k < e$. On a alors $N(u^{pk}x'') = u^{pk}N(x'') = 0$ et donc $N(x'')$ est un multiple de u^p . Notons n le plus petit entier tel que $u^n x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ de telle sorte que l'on ait $\varphi_r(x'') = \phi_r(u^n x'') = x$. On a :

$$\phi_r(u^e N(u^n x'')) = -N(\phi_r(u^n x'')) = -N(x).$$

Mais $N(u^n x'') = -nu^n x'' + u^n N(x'')$. Le premier terme de cette somme est dans $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ puisque $u^n x''$ y est. Le second y est galement puisque $N(x'')$ est un multiple de u^p . On en dduit que $N(u^n x'') \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc que $\phi_r(u^e N(u^n x'')) = 0$. Ainsi $N(x) = 0$. D'autre part, on a $x = \varphi_r(x'')$ et donc d'aprs la proposition 3.2.3, x n'est pas divisible par u . Ceci conclut la preuve du corollaire. □

Description matricielle

Le but de ce paragraphe est d'crire sous forme matricielle les applications ϕ_r et N , explicitations que nous utiliserons dans la suite. On fixe \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et (e_1, \dots, e_d) une base adapte de \mathcal{M} , les entiers correspondants tant n_1, \dots, n_d .

On note Δ la matrice diagonale suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} u^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & u^{n_d} \end{pmatrix}$$

Dfinition 3.2.6. La matrice de ϕ_r dans la base adapte (e_1, \dots, e_d) est la matrice G dfinie par l'galit suivante :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1}e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d}e_d) \end{pmatrix} = \phi_r \left(\Delta \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix} \right) = {}^tG \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

Remarque. Cette dfinition n'a un sens que si la base (e_1, \dots, e_d) est adapte. De plus, la prsence de la transpose sert rester fidle la dfinition classique de la matrice d'une application linraire.

En gardant les notations du paragraphe prcdent, on voit que G est simplement la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_d) la base (x_1, \dots, x_d) . En tant que telle, il s'agit d'une matrice inversible.

Dfinition 3.2.7. Soit (a_1, \dots, a_d) une base de \mathcal{M} . La matrice de N dans la base (a_1, \dots, a_d) est la matrice H dfinie par l'galit suivante :

$$\begin{pmatrix} N(a_1) \\ \vdots \\ N(a_d) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = {}^tH \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

On a une formule de changement de base :

Proposition 3.2.8. Soient $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_d)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ deux bases de \mathcal{M} , et soit P la matrice de passage de \mathcal{A} \mathcal{B} . On note $H_{\mathcal{A}}$ (resp. $H_{\mathcal{B}}$) la matrice de N dans la base \mathcal{A} (resp. dans la base \mathcal{B}). On a alors la relation :

$$H_{\mathcal{B}} = P^{-1}H_{\mathcal{A}}P + P^{-1}N(P)$$

Dmonstration. Il s'agit d'un simple calcul. On crit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N(b_1) \\ \vdots \\ N(b_d) \end{pmatrix} &= N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = N \left({}^tP \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right) \\ &= N({}^tP) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + {}^tP \cdot N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \\ &= N({}^tP) {}^tP^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + {}^tPH_{\mathcal{A}}{}^tP^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne ${}^tH_{\mathcal{B}} = N({}^tP) {}^tP^{-1} + {}^tPH_{\mathcal{A}}{}^tP^{-1}$ puis le rsultat annonc en prenant la transpose. \square

Remarque. Un simple calcul prouve que si A et B sont des matrices coefficients dans $k[u]/u^{ep}$, alors $N(AB) = N(A)B + AN(B)$. Ceci a pour consquence l'galit $P^{-1}N(P) = -N(P^{-1})P$ et prouve la cohrence de la formule lorsque l'on passe d'une base \mathcal{A} une base \mathcal{B} puis que l'on revient \mathcal{A} .

Proposition 3.2.9. *Si les n_i sont rangs par ordre croissant, la matrice de N dans la base (x_1, \dots, x_d) (o on rappelle que $x_i = \phi_r(u^{n_i} e_i)$) est coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$ et triangulaire infrieure avec des 0 sur la diagonale.*

Dmonstration. La preuve rsulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

En effet, fixons un entier i et partons de l'ement $u^{n_i} e_i$. Par ϕ_r , il s'envoie sur x_i par dffinition. Puis par $-N$, il s'envoie sur $-N(x_i)$. Par l'autre chemin, on a d'abord :

$$u^e N(u^{n_i} e_i) = -n_i u^{e+n_i} e_i + u^{e+n_i} N(e_i)$$

Comme $u^{n_i} e_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$, le premier terme de la somme prcdente s'envoie sur 0 par ϕ_r et $u^{e+n_i} N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Pour le second terme, dcomposons $N(e_i) = \sum_{j=1}^d a_j e_j$ o $a_j \in k[u]/u^{ep}$ est tel que $u^{e+n_i} N(e_i) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ (i.e. $u^{e+n_i} a_j \in u^{n_j} k[u]/u^{ep}$). On a alors :

$$\phi_r(u^e N(u^{n_i} e_i)) = \sum_{j=1}^d \phi(u^{e+n_i-n_j} a_j) x_j$$

et les $\phi(u^{e+n_i-n_j} a_j)$ sont les coefficients de la j -ime colonne de la matrice. Ils sont donc dj tous bien dans $k[u^p]/u^{ep}$.

De plus, si $j \leq i$, on a par hypothse $n_j \leq n_i$ et donc $e+n_i-n_j \geq e$. Ainsi $\phi(u^{e+n_i-n_j} a_j) = 0$ et on a bien dmontr le rsultat annonc. \square

Remarque. Cette dernire proposition redmontre en particulier, en donnant un rsultat plus prcis, la proposition 3.2.4 et le corollaire qui s'ensuit.

3.3 La catgorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$

Dans cette partie, nous introduisons des sous-catgories pleines $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ qui correspondent aux catgories de Fontaine-Laffaille (voir [FL82]) tues par p pour $e = 1$.

Commenons par donner une proposition qui caractrise les objets de cette sous-catgorie. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$. Notons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$ et plus gnralement $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$ pour un entier i compris entre 0 et $p-1$. Les \mathcal{M}_i sont des $k[u^p]/u^{ep}$ -modules libres et :

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}_i.$$

Proposition 3.3.1. *Avec les notations prcdentes, les proprits suivantes sont quivalentes :*

- i) $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$;
- ii) *il existe une base adapte de \mathcal{M} forme d'lments de \mathcal{M}_0 ;*

iii) On peut munir \mathcal{M} d'un opérateur de monodromie nul sur \mathcal{M}_0 et faisant de \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Dmonstration. La proprié ii) implique de façon presque immédiate les deux autres. Nous allons montrer que iii) implique i) puis que i) implique ii).

Supposons iii). Prouvons dans un premier temps que cela implique que $N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Soit $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. D'après le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow -N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

on a $\phi_r(u^e N(x)) = 0$. La proposition 3.2.3 implique facilement que $\ker \phi_r = u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc il existe $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ tel que $u^e N(x) = u^e y$. La différence $N(x) - y$ est tue par u^e . Elle s'écrit $u^{e(p-1)}z$ pour un certain $z \in \mathcal{M}$. Comme $e(p-1) \geq er$, $u^{e(p-1)}z \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ d'où $N(x) \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Ceci prouve la propriété annoncée.

Soit $y \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On cherche à construire des $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$ tels que $y = y_0 + \dots + y_{p-1}$. On peut dire une égalité de ce type avec $y_i \in \mathcal{M}_i$. Appliquons l'opérateur N à cette égalité en remarquant que puisque N est supposé nul sur \mathcal{M}_0 , on a $N(y_i) = -iy_i$. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} y &= x_0 + y_1 + \dots + y_{p-1} \\ N(y) &= -y_1 + \dots - (p-1)y_{p-1} \\ N^2(y) &= y_1 + \dots + (p-1)^2 y_{p-1} \\ &\vdots \\ N^{p-1}(y) &= y_1 + \dots + (-1)^{p-1} (p-1)^{p-1} y_{p-1}. \end{aligned}$$

Les coefficients qui apparaissent forment une matrice de Vandermonde inversible. Ainsi on peut exprimer les y_i comme combinaisons linéaires de coefficients dans \mathbb{F}_p des $N^j(y)$. Par ce qui précède, cela entraîne $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc bien la propriété voulue.

Supposons i). Fixons (e_1, \dots, e_d) une base de \mathcal{M}_0 comme $k[u^p]/u^{ep}$ -module, et notons \mathcal{M}'_0 le sous- k -espace vectoriel de \mathcal{M}_0 engendré par les e_i . Notons également $\mathcal{M}'_i = u^i \mathcal{M}'_0$. Pour tout entier i , on a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}'_0 \rightarrow \mathcal{M}'_i$ qui est la multiplication par u^i . Notons $F'_i = f_i^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'_i)$. On obtient une filtration croissante par des sous- k -espaces vectoriels. Il suffit alors pour répondre à la question de considérer une base (x_1, \dots, x_d) de \mathcal{M}'_0 compatible à cette filtration. \square

Définition 3.3.2. On note $\widetilde{\text{MF}}_0^r$ la sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ formée des objets satisfaisant les propriétés de la proposition précédente. On note $\widetilde{\text{MF}}^r$ la sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ formée des objets dont l'image dans $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ par le foncteur d'oubli satisfait les propriétés de la proposition précédente.

Les lettres MF font référence « modules filtrés » car l'on peut donner une nouvelle interprétation de ces objets *via* des modules filtrés. Avant cela, faisons quelques remarques générales :

Proposition 3.3.3. *La catégorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ est une sous-catégorie abélienne de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ stable par sous-objets et par quotients. De plus, elle est gale $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ si et seulement si $e = r = 1$.*

Dmonstration. Nous ne savons pas encore ce stade que $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est une catégorie abélienne. Nous allons l’admettre momentanément pour prouver la première partie de la proposition. Il suffit de prouver la stabilité par sous-objets et par quotients, un noyau tant un sous-objet et un conoyau un quotient. Elle est immédiate avec la caractérisation iii).

Traisons le cas $e = r = 1$. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ et soit $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On peut écrire $x = x_0 + \dots + x_{p-1}$ avec $x_i \in \mathcal{M}_i$. Par hypothèse $u\mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$, et donc $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ pour $i \geq 1$, puis $x_0 \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. On a ainsi vérifié la propriété i). Réciproquement, considérons $\mathcal{M} = k[u]/u^{ep}e_1 \oplus k[u]/u^{ep}e_2$, $\text{Fil}^r \mathcal{M} = (e_1, u^2e_2)$, $\phi_r(e_1) = \frac{1}{u+1}e_1 + e_2$, $\phi_r(u^2e_2) = (u+1)e_2$. On vérifie facilement que l’on ne peut pas munir cet objet d’un N qui vaudrait 0 sur $\text{im } \phi_r$. Si $r = 1$, le lemme 5.1.2. de [BCDT01] prouve que l’on peut munir l’objet précédent d’un opérateur de monodromie. Cela en fait un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ qui répond à la question. Pour $r > 1$, on remarque que les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ sont naturellement des sous-catégories pleines les unes des autres lorsque r augmente (voir [Bre97a]). L’image par les foncteurs d’inclusion de l’objet précédemment défini contient alors encore. \square

Proposition 3.3.4. *Tout objet non nul de $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$) admet un sous-objet non nul dans $\widetilde{\mathbf{MF}}_0^r$ (resp. dans $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ pour lequel N est nul sur $\text{im } \phi_r$).*

Dmonstration. La preuve de cette propriété est donnée dans le paragraphe 4.1 lors de l’étude des objets simples. \square

Les objets de $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ comme modules filtrés

Il est possible de décrire la catégorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ avec des objets plus proches des objets de Fontaine-Laffaille du cas $e = 1$. Soit \mathcal{M} un objet de $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$. Posons $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$ et $\mathcal{M}_i = u^i \mathcal{M}_0$, pour $0 \leq i \leq p-1$. On a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_i$ qui est la multiplication par u^i . Définissons $F_{i/e} = f_{er-i}^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i)$. On obtient une suite décroissante de sous- $k[u^p]/u^{ep}$ -modules de \mathcal{M}_0 contenant $u^p \mathcal{M}_0$ telle que $F_0 = \mathcal{M}_0$ par hypothèse.

L’application ϕ_r induit des applications $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}_0$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} F_{i+\frac{1}{e}} & \longrightarrow & F_i \\ \phi_{i+\frac{1}{e}} \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ \mathcal{M}_0 & \xrightarrow{u^p} & \mathcal{M}_0 \end{array}$$

La monodromie, quant elle est définie, définit une application $N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ qui vérifie $N \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ N$.

Si on remarque pour finir que $k[u^p]/u^{ep}$ est isomorphe en tant qu’anneau \mathcal{O}_K/p (en envoyant u^p sur π), on obtient la proposition suivante quinonce précisément le pont entre les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et celles de Fontaine-Laffaille, du moins dans le cas modulo p :

Proposition 3.3.5. *La catégorie $\widetilde{\mathbf{MF}}^r$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les données suivantes :*

1. un \mathcal{O}_K/p -module libre de rang fini \mathcal{M} ;
 2. une filtration dcroissante (F_i) de sous-modules de \mathcal{M}_0 contenant $\pi\mathcal{M}$ indexe par les rationnels de dnominateur e compris entre 0 et r telle que $F_0 = \mathcal{M}$;
 3. des applications ϕ -semi-linaires $\phi_i : F_i \rightarrow \mathcal{M}$ vrifiant $\phi_i|_{F_{i+\frac{1}{e}}} = \pi\phi_{i+\frac{1}{e}}$;
 4. d'une application linaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $N \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ N$ pour tout i
- et o les flches sont les morphismes \mathcal{O}_K/p -linaires compatibles toutes les structures.

Remarque. Dans le cas non ramifi (*i.e.* $e = 1$), on retrouve exactement la description des catgories de Fontaine-Laffaille modulo p (voir [FL82]). On peut tendre cette remarque toute une sous-catgorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme expliqu dans le paragraphe 2.4.1 de [Bre97a].

On peut rsumer tout ce qui prcde par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{MF}}_0^r & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\mathcal{M}}_0^r \\
\updownarrow & & \up \\
\widetilde{\mathcal{MF}}^r & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\mathcal{M}}^r
\end{array}$$

Les flches qui montent correspondent aux foncteurs d'oubli vidents. La flche courbe est un foncteur « N canonique » qui munit un objet de $\widetilde{\mathcal{MF}}_0^r$ du N (ncessairement unique) donn par le iii) de la proposition 3.3.1. On pourrait se demander s'il est possible de prolonger ce foncteur tout $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$. La rponse est oui dans le cas $r = 1$ (voir le lemme 5.1.2. de [BCDT01]), et non dans le cas gnral puisqu'il n'est dj pas vrai que le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathcal{M}}^r \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ est toujours essentiellement surjectif (reprendre l'exemple donn dans la dmonstration de la proposition 3.3.3)

3.4 Un mot sur le cas $r = 1$

Ce cas est amplement discut dans [Bre00]. Plus exactement, Breuil construit l un foncteur contravariant entre la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_0^1$ et la catgorie des schmas en groupes finis et plats sur \mathcal{O}_K tus par p . Il prouve ensuite, en exhibant en quasi-inverse, que ce foncteur est une anti-ivalence de catgories.

Il tend par la suite ce foncteur toute la catgorie \mathcal{M}_0^1 et atteint tous les schmas en groupes sur \mathcal{O}_K tus par une puissance de p . De cette faon, Breuil retrouve la classification des schmas en groupes sur \mathcal{O}_K dbute par Raynaud ([Ray74]) et poursuivie par Fontaine ([Fon75]) et Conrad ([Con99]), et tend mme cette classification sans restriction sur la ramification.

3.5 Des catgories abliennes et artiniennes

Nous montrons dans ce paragraphe que les catgories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont abliennes. Nous rappelons dans un premier temps que ce rsultat est prouv dans [Bre97a] lorsque $e = 1$.

La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Notons $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ la catégorie \mathcal{M}^r obtenue lorsque $e = 1$ et rappelons le thorme prcis (corollaire 2.2.3.2 de [Bre97a]) dans le cas de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$:

Thorme 3.5.1. *La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ est ablienne et artinienne. Plus prcisment soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$, alors :*

i) $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$;

ii) Soit \mathcal{K} le noyau de l'application $k[u]/u^p$ -linaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Avec ces structures, \mathcal{K} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$;

iii) Soit \mathcal{C} le conoyau de l'application $k[u]/u^p$ -linaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$ dans \mathcal{C} , $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Avec ces structures, \mathcal{C} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$.

Nous allons prsent montrer les propriets analogues pour la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, et nous utiliserons pour cela le thorme 3.5.1.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Notons $\bar{\mathcal{X}}$ (resp. $\bar{\mathcal{Y}}$) la rduction de \mathcal{X} (resp. de \mathcal{Y}) modulo u^p , et $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ (resp. $p_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$) la projection correspondante. On munit $\bar{\mathcal{X}}$ et $\bar{\mathcal{Y}}$ de Fil^r , Frobenius et opérateurs de monodromie en regardant les structures quotients. On obtient des objets de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$ et la flche f induit un morphisme $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$ dans cette catégorie. Finalement, puisque $er < p - 1$, on a :

$$\text{Fil}^r \mathcal{X} = p_{\bar{\mathcal{X}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}^r \mathcal{Y} = p_{\bar{\mathcal{Y}}}^{-1}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}})$$

Lemme 3.5.2. *Soit \mathcal{K} le noyau (au sens classique) de f . Alors \mathcal{K} est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre.*

Dmonstration. Comme f commute ϕ_r , elle induit une application $f : \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \rightarrow \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{Y})$ qui est $k[u^p]/u^{ep}$ -linaire. Il suffit de prouver que $(\mathcal{K} \cap \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X}))$ est un $k[u^p]/u^{ep}$ -module libre.

Soit $z \in \mathcal{K} \cap \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ tel que $u^p z = 0$. Comme $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ est libre, on peut trouver $x \in \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ tel que $z = u^{p(e-1)}x$. Alors, $f(z) = u^{p(e-1)}f(x) = 0$ et, puisque \mathcal{Y} est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre, il existe $y \in \mathcal{Y}$ tel que $f(x) = u^p y$. De plus $x \in \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ par hypothse et donc il existe $t \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$ tel que $\phi_r(t) = x$. Ainsi $f \circ \phi_r(t) = u^p y$ et $\phi_r \circ f(t) = u^p y$. Cela prouve $f(t) \in u \text{Fil}^r \mathcal{Y}$ d'après la deuxime partie de la proposition 3.2.3.

Rduisons modulo u^p et notons avec des barres les lments rduits. On a $\bar{f}(\bar{t}) \in u \text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}}$ et donc il existe $\bar{s}' \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}}$ tel que $\bar{f}(\bar{t}) = u\bar{s}'$. De plus on peut supposer $\bar{s}' \in \text{im } \bar{f}$ puisque $\text{im } \bar{f}$ est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(1)}^r$, donc libre en tant que $k[u]/u^p$ -module. Cet lment \bar{s}' admet un antcdent (par \bar{f}) dans $\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$ d'après le i) du thorme 3.5.1. Finalement, il existe $\bar{t}' \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$ tel que $\bar{f}(\bar{t}') = u\bar{s}'$. La diffrence $\bar{t} - u\bar{t}'$ est donc un lment de $\ker \bar{f}$.

Vu dans \mathcal{X} et \mathcal{Y} , il existe $t' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$ et $z' \in \ker f$ tels que $t = z' + ut'$ (puisque $u^{p-1}\mathcal{X} \subset \text{Fil}^r \mathcal{X}$). En appliquant ϕ_r cette dernire galit, il vient $x = \phi_r(z') + u^p \phi_r(t')$ et on a bien $\phi_r(z') \in \ker f$ et $z = u^{p(e-1)}x = u^{p(e-1)}\phi_r(z')$.

Ceci dmontre bien la libert du noyau. \square

Lemme 3.5.3. *L'image et le conoyau de f sont des $k[u]/u^{ep}$ -modules libres.*

Dmonstration. En tant que $k[u]/u^{ep}$ -module, l'image de f s'identifie au quotient $\mathcal{X}/\ker f$ et le conoyau au quotient $\mathcal{Y}/\text{im } f$. Le lemme rsulte du fait que si M est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre de type fini et N est un sous $k[u]/u^{ep}$ -module libre de M , alors le quotient M/N est libre. \square

Notons \mathcal{C} le conoyau de f , $\bar{\mathcal{K}}$ le noyau de \bar{f} et $\bar{\mathcal{C}}$ le conoyau de \bar{f} et considrons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & p_{\mathcal{K}} \downarrow & & p_{\mathcal{X}} \downarrow & & p_{\mathcal{Y}} \downarrow & & p_{\mathcal{C}} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{\mathcal{Y}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lemme 3.5.4. *La flche $p_{\mathcal{K}}$ (resp. $p_{\mathcal{C}}$) dfinie par le diagramme prcdent est surjective et de noyau $u^p\mathcal{K}$ (resp. $u^p\mathcal{C}$). Autrement dit $\bar{\mathcal{K}}$ s'identifie $\mathcal{K}/u^p\mathcal{K}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}/u^p\mathcal{C}$.*

Dmonstration. Commenons par le noyau et la surjectivit. Soit $\bar{x} \in \bar{\mathcal{K}}$. Il se relve en $x \in \mathcal{X}$ tel que $f(x) = 0 \pmod{u^p}$. Il existe donc $y \in \mathcal{Y}$ tel que $f(x) = u^py$. On a $u^py \in \text{im } f$ et, puisque $\text{im } f$ est libre sur $k[u]/u^{ep}$, il existe $y' \in \text{im } f$ tel que $u^py = u^py'$ et donc $u^py = f(u^px')$ pour un certain $x' \in \mathcal{X}$. Mais alors $x - u^px' \in \mathcal{K}$ s'envoie sur \bar{x} par $p_{\mathcal{K}}$. Ceci prouve la surjectivit.

Soit maintenant $x \in \mathcal{K}$ tel que $p_{\mathcal{K}}(x) = 0$. On a $p_{\mathcal{X}}(x) = 0$ et donc x est un multiple de u^p dans \mathcal{X} . Il l'est aussi dans \mathcal{K} puisque \mathcal{K} est un $k[u]/u^{ep}$ -module libre. Finalement $\ker p_{\mathcal{K}} = u^p\mathcal{K}$.

On utilise des arguments analogues pour le conoyau. \square

On dfnit $\text{Fil}^r\mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^r\mathcal{X}$, un Frobenius $\phi_r : \text{Fil}^r\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ et un opérateur de monodromie $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ dduits des opérateurs sur \mathcal{X} . De mme, on dfnit $\text{Fil}^r\mathcal{C}$ comme l'image de $\text{Fil}^r\mathcal{Y}$ par la projection $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{C}$, un Frobenius et un opérateur de monodromie sur \mathcal{C} , les opérateurs sur \mathcal{Y} passant au quotient.

Lemme 3.5.5. *Munis des structures prcdentes, les objets \mathcal{K} et \mathcal{C} sont des objets de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et respectivement un noyau et un conoyau de l'application f .*

Dmonstration. Les conditions de compatibilit et le fait que si les objets sont dans la catgorie, ils sont noyau ou conoyau est vident. Le seul point dlicat est la « surjectivit » des ϕ_r .

Modulo u^p , les objets \mathcal{K} et \mathcal{C} avec toutes leurs structures se rduisent d'apr s le lemme 3.5.4 sur $\bar{\mathcal{K}}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ et on sait alors que les ϕ_r dfnis sur ces objets sont « surjectifs ». Notons (e_1, \dots, e_d) une base adapte de \mathcal{K} (qui existe bien) et G la matrice de ϕ_r dans cette base. Cette matrice est inversible modulo u^p et donc son dterminant est inversible modulo u^p puis modulo u^{ep} . La matrice G est donc inversible et $\text{im } \phi_r$ engendre bien tout \mathcal{K} . On raisonne de mme pour \mathcal{C} . \square

Corollaire 3.5.6. *La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, alors :*

- i) $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) = \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$;*
- ii) Soit \mathcal{K} le noyau de l'application $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \text{Fil}^r \mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Avec ces structures, \mathcal{K} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$;*
- iii) Soit \mathcal{C} le conoyau de l'application $k[u]/u^{ep}$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{Y}$ dans \mathcal{C} , $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Avec ces structures, \mathcal{C} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.*

Démonstration. On a déjà prouvé ii) et iii). Il ne reste en fait plus qu'à démontrer i) car il implique l'isomorphisme entre image et coimage. On a évidemment toujours l'inclusion $f(\text{Fil}^r \mathcal{X}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$.

Soit $y \in \text{Fil}^r \mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$. La réduction \bar{y} de y modulo u^p est un élément de $\text{Fil}^r \bar{\mathcal{Y}} \cap \bar{f}(\bar{\mathcal{X}})$ (en gardant les notations précédentes) et d'après le théorème 3.5.1, $\bar{y} \in \bar{f}(\text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}})$. Il existe $\bar{x} \in \text{Fil}^r \bar{\mathcal{X}}$ tel que $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$. Notons x un relevé de \bar{x} dans $\text{Fil}^r \mathcal{X}$. Il existe un élément $t \in \mathcal{Y}$ tel que $y = f(x) + u^p y'$. Les éléments y et $f(x)$ sont dans $\text{im } f$, il en est donc de même de $u^p y'$ et puisque $\text{im } f$ est libre sur $k[u]/u^{ep}$, il existe $y'' \in \text{im } f$ tel que $u^p y' = u^p y''$. On écrit $y'' = f(x'')$ pour un certain $x'' \in \mathcal{X}$, et il vient $y = f(x + u^p x'')$. Comme $u^{er} \mathcal{X} \subset \text{Fil}^r \mathcal{X}$ et $er < p - 1$, on a $u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$ et donc $x + u^p x'' \in \text{Fil}^r \mathcal{X}$. Finalement $y \in f(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ et on peut conclure. \square

La catégorie \mathcal{M}^r

Pour la catégorie \mathcal{M}^r , on procède par dévissage. La preuve est en tout point analogue à celle déjà connue dans le cas $e = 1$ et présente dans le paragraphe 2.3 de [Bre97a]. Les lemmes et les propositions successives gardent un sens dans ce contexte plus général, et sont également vrais, les preuves tant encore textuellement les mêmes. Nous n'insisterons donc pas davantage et laissons le lecteur se reporter à cette référence.

Remarque. De même, on prouve que les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}_0^r$ et $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et \mathcal{M}_0^r sont abéliennes et artiniennes.

4 Classification des objets simples

Nous allons donner une classification complète des objets simples de la catégorie \mathcal{M}^r lorsque le corps résiduel k est algébriquement clos. Nous essaierons également d'expliquer ce qui se passe lorsque ce n'est pas le cas. Pour l'instant, on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur k .

On considère \mathcal{M} un objet simple (donc non nul) de \mathcal{M}^r . Il est obligatoirement tué par p . En effet, si ce n'était pas le cas, le noyau de la multiplication par p dans \mathcal{M} fournirait un sous-objet strict de \mathcal{M} (noter que la multiplication par p ne peut pas être injective car elle est nilpotente : \mathcal{M} est supposé être tué par une puissance de p). L'objet simple \mathcal{M} peut être vu

dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$: c'est un $k[u]/u^{ep}$ -module muni d'un Fil^r , d'un ϕ_r et d'un opérateur de monodromie vérifiant les bonnes propriétés.

4.1 La monodromie

Si l'on note $\mathcal{M}_0 = \text{im } \phi_r$, l'application de monodromie N induit une application linéaire nilpotente $N : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ (voir proposition 3.2.4) et il existe $x_1 \in \mathcal{M}_0 \setminus u\mathcal{M}_0$ tel que $N(x_1) = 0$ (voir corollaire 3.2.5). Notons $x_2 = \varphi_r(x_1)$ (voir définition 3.2.2) puis par récurrence $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$, ce qui est possible d'après la deuxième partie de la proposition 3.2.3. On a $N(x_i) = 0$ pour tout entier i .

Notons \bar{x}_i la réduction modulo u^p de x_i . Les \bar{x}_i sont des éléments non nuls de $\mathcal{M}_0/u^p\mathcal{M}_0$ qui est un k -espace vectoriel de dimension finie. Notons $n \geq 1$ le plus petit indice tel que \bar{x}_{n+1} puisse s'écrire comme combinaison linéaire des \bar{x}_i pour i variant de 1 à n . Il existe donc $\lambda_i \in k$ tels que :

$$\bar{x}_{n+1} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$$

et on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$ quitte à remplacer x_1 par le plus petit indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. Comme $\bar{x}_{n+1} \neq 0$, les λ_i ne peuvent être tous simultanément nuls.

Nous allons maintenant corriger les x_i pour que cette relation ne soit plus vraie seulement modulo u^p . On procède par approximations successives et on construit une suite indexée par j d'éléments $x_i^{(j)}$ qui sont tels que $x_i^{(j)} \equiv x_i \pmod{u^p}$, $x_{i+1}^{(j)} = \varphi_r(x_i^{(j)})$, $N(x_{i+1}^{(j)}) = 0$ et finalement :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$$

les λ_i restant inchangés. On a une solution pour $j = 1$. Supposons qu'on l'ait pour j et construisons-en une pour $j + 1$. On cherche un élément $r \in \mathcal{M}_0$ tel que l'on puisse poser $x_1^{(j+1)} = x_1^{(j)} + u^{jp}r$. On définirait alors les $x_i^{(j+1)}$ via la formule de récurrence $x_{i+1}^{(j+1)} = \varphi_r(x_i^{(j+1)})$ et il est facile de vérifier que pour tout $i \geq 2$, on aurait $x_i^{(j+1)} \equiv x_i^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$. Au final, il suffit de trouver r tel que :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 (x_1^{(j)} + u^{jp}r) + \lambda_2 x_2^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$$

mais comme par hypothèse, on a $x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$, on a bien l'existence d'un tel r : il suffit de le prendre tel que $u^{jp}\lambda_1 r = x_{n+1}^{(j)} - \lambda_1 x_1^{(j)} + \dots + \lambda_n x_n^{(j)}$. De plus, en appliquant N à cette dernière égalité, on voit que $N(u^{jp}\lambda_1 r) = \lambda_1 u^{jp}N(r) = 0$ et donc que $N(x_1^{(j+1)}) = 0$ puisque λ_1 est supposé non nul. Ceci implique la nullité de tous les $N(x_i^{(j+1)})$.

Pour $j = e$, l'égalité a lieu modulo u^{ep} et donc dans \mathcal{M} . Soit K le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendré par les $x_i^{(e)}$, pour $1 \leq i \leq n$. La liberté sur k des \bar{x}_i assure que K est un module libre de rang n . Notons $\mathcal{M}_i = u^i \text{im } \phi_r$ et $\text{Fil}^r K = \sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}_i \cap K$. Par construction, N stabilise K et ϕ_r envoie $\text{Fil}^r K$ sur K . En outre, encore par construction l'image de la restriction de ϕ_r à $\text{Fil}^r K$ engendre K : on voit que l'objet K est dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Comme \mathcal{M} est simple, ce sous-objet est tout \mathcal{M} . Ainsi on a prouvé la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}^r}$ et l'opérateur de monodromie N est nul sur $\text{im } \phi_r$. De plus \mathcal{M} admet une base adaptée de la forme (x_1, \dots, x_d) telle que $N(x_i) = 0$, $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$ (voir définition 3.2.2) et :*

$$\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$$

o les λ_i sont des éléments de k tels que $\lambda_1 \neq 0$.

qui admet pour corollaire immédiat la proposition 3.3.4 que l'on vient donc de démontrer.

4.2 Une base adaptée simple

Nous allons dans ce paragraphe préciser un peu plus l'énoncé de la proposition 4.1.1 dans le cas où le corps résiduel k est algébriquement clos.

Lemme 4.2.1. *Supposons k algébriquement clos. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}^r}$ et il existe (e_1, \dots, e_d) une base adaptée de \mathcal{M} telle que $N(e_i) = 0$, $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$, les indices i tant considérés dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On sait d'après la proposition précédente qu'il existe une base adaptée (x_1, \dots, x_d) telle que $\varphi_r(x_i) = x_{i+1}$ pour i compris entre 1 et $d-1$ et $\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$ où $\lambda_i \in k$ et $\lambda_1 \neq 0$.

Parmi toutes les bases adaptées qui vérifient ces conditions, choisissons-en une pour laquelle le nombre de λ_i non nuls est minimal. On écrit alors plutôt :

$$x_{d+1} = \varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_k x_{i_k}$$

où tous les λ_i sont non nuls et les indices i_k sont compris entre 0 et d . De plus, on peut supposer $i_1 = 1$. Notons pour tout i , n_i le plus petit entier tel que $u^{n_i} x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Si tous les n_{i_j} n'étaient pas égaux, $\varphi_r(x_{d+1})$ s'écrirait comme une combinaison linéaire de x_2, \dots, x_{d+1} faisant intervenir strictement moins de k termes et la famille (x_2, \dots, x_{d+1}) fournirait une base adaptée de \mathcal{M} (en reprenant l'étude faite de ce paragraphe précédent). Mais ceci est en contradiction avec la minimalité considérée.

Ainsi tous les n_{i_j} sont égaux et donc égaux à n_{d+1} . Par récurrence, on prouve que pour tout entier fixé a , tous les n_{i_j+a} sont égaux, les indices $i_j + a$ tant considérés modulo d .

Notons t le plus grand commun diviseur de d et de toutes les différences $i_j - i_{j'}$. D'après ce qui précède la suite des n_i est périodique de période (divisant) t . On considère alors le sous- k -espace vectoriel de \mathcal{M} engendré par les x_{tn} où n parcourt $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. L'application φ_r^t stabilise ce sous-espace et y est ϕ^t -semi-linéaire. En particulier, puisque k est algébriquement clos, il existe un élément e_1 de ce sous-espace tel que $\varphi_r^t(e_1) = \lambda e_1$ pour un certain $\lambda \in k^*$. Quitte à multiplier e_1 par un élément de k , on peut supposer $\lambda = 1$.

On définit $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$. La famille (e_1, \dots, e_t) engendre un espace stable par N et par ϕ_r qui est par construction un sous-objet non nul de \mathcal{M} . C'est donc tout \mathcal{M} . De plus, d'après la proposition 4.1.1, $N(e_i) = 0$ pour tout i . Finalement (e_1, \dots, e_t) est une base adaptée vérifiant les conditions du lemme. Cela conclut. \square

4.3 Classification proprement dite

Dfinition 4.3.1. Soit (n_i) une suite priodique³ d'entiers compris entre 0 et er . On note h la priode de cette suite. On dfinit l'objet $\mathcal{M}(n_i) \in \widetilde{\mathcal{M}}^r$ de la faon suivante :

1. $\mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} k[u]/u^{ep}e_i$;
2. $\text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} u^{ni}k[u]/u^{ep}e_i$;
3. $\phi_r(u^{ni}e_i) = e_{i+1}$ pour tout indice i ;
4. $N(e_i) = 0$ pour tout indice i .

Il est facile de vrifier que tous ces objets sont bien dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et on a le thorme suivant :

Thorme 4.3.2. Supposons k algbriquement clos. Les objets $\mathcal{M}(n_i)$ sont des objets simples de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. De plus, si \mathcal{M} est un objet simple de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, alors il est isomorphe un certain $\mathcal{M}(n_i)$.

Dmonstration. Voyons d'abord la simplicit de $\mathcal{M}(n_i)$. Soit \mathcal{M} un sous-objet non nul de $\mathcal{M}(n_i)$. L'image de la restriction de ϕ_r $\mathcal{M} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}(n_i)$ est suppose engendrer tout \mathcal{M} ; en particulier elle n'est pas rduite 0 et comprend un lment non divisible par u^p , disons x . On crit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_h e_h$ o les λ_i sont des polynmes coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$. On peut supposer $\lambda_i \in k$ quitte remplacer x par $\varphi_r \circ \varphi_r(x)$.

Considrons un x pour lequel le nombre de λ_i non nuls est minimal et crivons :

$$x = \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_k e_{i_k}$$

avec ici tous les λ_i non nuls. En appliquant φ_r ventuellement plusieurs fois, on voit que tous les n_{i_j} doivent tre gaux car sinon, on obtient un nouvel x qui serait combinaison d'un nombre plus petit de e_i . On applique alors φ_r l'galit prcdente et comme prcdemment, on prouve que tous les n_{i_j+1} sont gaux. Par rcurrence, on voit que pour a fix tous les n_{i_j+a} sont gaux. Ainsi, pour que la suite (n_i) soit priodique de priode exactement h , il faut que $k = 1$, c'est--dire que x soit multiple de l'un des e_i . Mais alors le sous-objet engendr par x est tout $\mathcal{M}(n_i)$ et finalement $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n_i)$. Ce qui assure la simplicit.

Voyons la rciproque. On applique le lemme 4.2.1 qui donne une description explicite de l'objet \mathcal{M} . Il reste juste dmontrer que la suite (n_i) ne peut-tre priodique de priode divisant strictement h . Mais supposons que ce soit le cas et notons t cette priode. On considere le sous-objet engendr par l'lment $x = e_t + e_{2t} + \dots + e_h$ et on vrifie immdiatement qu'il est non nul et strictement inclus dans \mathcal{M} . C'est une contradiction. \square

Remarque. En utilisant la correspondance de [Bre00], on retrouve exactement la classification donne par Raynaud dans [Ray74].

³Par « priodique », on entend dans ce papier « priodique ds le dbut » et pas « priodique partir d'un certain rang ».

tude des endomorphismes

On suppose toujours le corps k algébriquement clos. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Soit (e_1, \dots, e_h) une base adaptée de \mathcal{M} vérifiant les conditions du thorme 4.3.2. Nous allons en fait voir que les e_i sont presque uniquement déterminés. Plus précisément, on a :

Thorme 4.3.3. *Supposons k algébriquement clos. Si $\lambda \in k$ vérifie $\lambda^{p^h} = \lambda$, alors l'application $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par $\psi(e_i) = \lambda^{p^i} e_i$ est un endomorphisme de \mathcal{M} . Ce sont les seuls.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que les applications définies dans l'énoncé du thorme sont bien compatibles au Fil^r, au Frobenius et l'opérateur de monodromie.

Pour la réciproque, nous allons anticiper sur des résultats ultérieurs donnant une application non nulle $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ (la non-nullité se déduit de la fidélité du foncteur T_{st} , voir corollaire 5.3.4). D'autre part $\text{End}(\mathcal{M})$ est un corps *a priori* non commutatif et $\text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est un corps fini p^h -éléments (cela se déduit de thorme 5.2.2). On en déduit facilement que la flèche $\text{End}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est bijective, ce qui prouve le thorme. \square

Corollaire 4.3.4. *Les objets simples $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes si et seulement si la suite (m_i) se déduit de la suite (n_i) par translation.*

Démonstration. Si deux objets $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes, on peut transporter une base adaptée de $\mathcal{M}(n_i)$ sur $\mathcal{M}(m_i)$ et le thorme précédent entraîne la conclusion voulue. \square

Un autre point de vue

Donnons finalement un point de vue différent sur cette classification, peut-être plus agréable à retenir.

Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'entiers compris entre 0 et $p-1$ et soit t le rationnel dont le développement « décimal » en base p est :

$$t = 0, n_1 n_2 n_3 n_4 \dots$$

On a une propriété classique :

Propriété 4.3.5. *Avec les notations précédentes, les suites périodiques sont exactement celles qui correspondent aux rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1]$ où $\mathbb{Z}_{(p)}$ désigne le localisé de \mathbb{Z} en p .*

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 4.3.6. *Soit \mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ pour la relation d'équivalence suivante : $a \sim b$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $a \equiv p^n b \pmod{\mathbb{Z}}$.*

La dernière relation d'équivalence n'est pas mystérieuse : elle correspond simplement au décalage des décimales du nombre. En particulier, à cause de la périodicité, les classes d'équivalence sont toutes finies.

Dans ces conditions, \mathcal{R} classe exactement les objets simples de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ (via la correspondance que l'on a décrite précédemment).

Nous verrons par la suite que le « rationnel classifiant » va apparaître de façon naturelle.

5 tude du foncteur T_{st}

5.1 Un systme prliminaire

Ce paragraphe prsente une version lgrement diffrente de rsultats classiques et par exemple dj discuts dans [Wac97] ou dans le paragraphe 3.3.2 de [Bre97a]. On suppose dans ce paragraphe que le corps rsiduel k est algbriquement clos.

On considre un entier h strictement positif. On fixe $\eta^{(h)}$ une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'uniformisante π de K et on appelle $K^{(h)}$ l'extension de K engendree par cette racine. On rappelle que $K^{(h)}/K$ est totalement et modrment ramifiee de degr $p^h - 1$. On rappelle galement que la limite inductive de toutes ces extensions est l'extension maximale modrment ramifiee de K . Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguit, on notera η la place de $\eta^{(h)}$. On rappelle enfin que π_1 dsigne une racine p -ime de π .

On s'intresse au systme d'equations suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{(\pi_1^{n_1} \hat{x}_1 + \hat{c}_1)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_2 + \hat{r}_1 \\ \frac{(\pi_1^{n_2} \hat{x}_2 + \hat{c}_2)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_3 + \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \frac{(\pi_1^{n_h} \hat{x}_h + \hat{c}_h)^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_1 + \hat{r}_h \end{cases}$$

o les n_i sont des entiers fixes tous compris entre 0 et er , et o les \hat{r}_i et les \hat{c}_i sont des lments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Les inconnues sont les \hat{x}_i que l'on cherche galement dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On pose dans la suite $m_i = er - n_i$.

Sans coefficient constant

On s'intresse tout d'abord au cas o toutes les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i sont nulles. Il est alors possible de rsoudre directement le systme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, le systme se rcrit simplement :

$$\hat{x}_i^p = \pi^{m_i} \hat{x}_{i+1}.$$

Par des manipulations simples, on voit que \hat{x}_1 doit tre solution de l'equation :

$$\hat{x}_1^{p^h} = \pi^{s_1} \hat{x}_1$$

o s_1 est dfini par la formule :

$$s_1 = m_1 p^{h-1} + m_2 p^{h-2} + \dots + m_{h-1} p + m_h.$$

Cette equation admet p^h solutions qui sont 0 et toutes les racines $(p^h - 1)$ -imes de π^{s_1} . partir de \hat{x}_1 , on reconstruit les autres \hat{x}_i et on vrifie qu'ils forment bien une solution du systme.

On peut prsenter les choses de faon plus homogene en procdant comme suit. On pose pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$:

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

Si ε est une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'unit (qui est dj dans K), la famille des $\hat{x}_i = \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ est une solution de (S) . Toutes les solutions s'obtiennent ainsi l'exception de la solution nulle $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_h = 0$.

Un lemme la Hensel

On ne suppose plus que les constantes sont nulles et on cherche un lien entre les solutions de (S) modulo p et les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$:

Lemme 5.1.1. *Avec les notations précédentes, si le système (S) admet une solution (x_1, \dots, x_h) modulo p , alors cette solution se relève dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ en une solution $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$.*

Démonstration. On construit cette solution par approximations successives. Fixons tout d'abord une extension finie L de $K^{(h)}$ suffisamment grande pour contenir tous les \hat{r}_i , les \hat{c}_i et pour que tous les x_i puissent s'y relever. L'extension $L/K^{(h)}$ est totalement ramifiée (puisque k est supposé algébriquement clos), disons de degré d . Notons \mathcal{O}_L l'anneau des entiers de L .

On va construire une suite de $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_h^{(n)})$ de solutions compatibles du système (S) modulo η^n dans \mathcal{O}_L . Il suffira par la suite de prendre la limite de cette suite pour avoir une solution du système dans \mathcal{O}_L et donc dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

On a déjà, par hypothèse, un h -uplet pour $n = e(p^h - 1)$. Les suivants se construisent par récurrence. On part d'un entier $n \geq e(p^h - 1)$ et d'éléments $x_1^{(n)}, \dots, x_h^{(n)}$ vérifiant :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \hat{r}_i \pmod{\eta^n}$$

pour tout indice i pris dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ et on cherche à construire y_1, \dots, y_h , tels que :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{m_i}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_{i+1} + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

Un calcul donne :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i} \eta^n y_i\right)^p}{\pi^{er}} = \frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} + \sum_{k=1}^p C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} y_i^k \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}$$

Soit un entier $k \geq 1$. On a $v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}}\right) = \frac{kn_i}{p} + \frac{kn}{p^h - 1} - er$. D'autre part, $\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}}$ est un entier, donc de valuation positive et on en déduit que $v\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right) \geq \frac{er}{p}$. On obtient :

$$\begin{aligned} v_i &= v\left(\frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{kn}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geq \frac{kn}{p^h - 1} + \frac{kn_i}{p} - er + (p-k) \frac{er}{p} \\ &= \frac{n}{p^h - 1} + (k-1) \frac{n}{p^h - 1} - \frac{km_i}{p} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $n \geq e(p^h - 1)$ et $m_i \leq er$, il vient :

$$v_i \geq \frac{n}{p^h - 1} + e(k-1) - \frac{ker}{p} = \frac{n}{p^h - 1} - e + ek \left(1 - \frac{r}{p}\right)$$

Maintenant si $k < p$, le coefficient binomial C_p^k est multiple de p et donc :

$$v \left(C_p^k \frac{\pi_1^{kn_i} \eta^{nk}}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i \right)^{p-k} \right) \geq e + v_i \geq \frac{n}{p^h - 1} + ek \left(1 - \frac{r}{p} \right) \geq \frac{n+1}{p^h - 1}$$

la dernire inegalit rsultant du fait que $r \leq er \leq p - 2$.

On en dduit que tous les termes de la somme pour k compris strictement entre 0 et p sont nuls modulo η^{n+1} . En fait, c'est aussi le cas pour $k = p$. En reprenant les galits prcdentes, on voit que :

$$v_p \geq \frac{n}{p^h - 1} + e(p - 1 - r)$$

mais $p - 1 - r \geq 1$ et donc on a galement $v_p \geq \frac{n+1}{p^h - 1}$. Finalement le systme que l'on a rsoudre se rduit :

$$\frac{\left(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i \right)^p}{\pi^{er}} \equiv x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_i + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

mais on sait que la difference $\frac{(\pi_1^{m_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}} - x_{i+1}^{(n)} - \hat{r}_i$ est un multiple de η^n , et donc s'crit $\eta^n q_i$. Il suffit ensuite de choisir $y_i = q_i$ pour avoir la solution que l'on cherchait. \square

Rsolution du systme

Une premiere consequence du lemme que l'on vient de prouver est la rsolution du systme (S) modulo p lorsque les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i sont toutes nulles :

Lemme 5.1.2. *Supposons que les constantes \hat{r}_i et \hat{c}_i soient nulles. Mise part la solution nulle, les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ s'crivent $x_i = \varepsilon^{p^i} \bar{\eta}^{s_i}$ o $\varepsilon \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'unit, $\bar{\eta}$ est la rduction de η dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et :*

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}$$

Dmonstration. Si ε est une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'unit et si x_i dsigne la rduction modulo p de $\varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$, le uplet (x_1, \dots, x_h) est solution du systme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus, si ε et ε' sont deux racines $(p^h - 1)$ -imes de l'unit distinctes, on a pour tout entier i , $\varepsilon^{p^i} \neq \varepsilon'^{p^i}$ dans le corps rsiduel et donc $\varepsilon^{p^i} - \varepsilon'^{p^i}$ est de valuation nulle. On en dduit, puisque $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} < 1$, que $x_i = \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ et $x'_i = \varepsilon'^{p^i} \eta^{s_i}$ sont distincts dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.

On a ainsi trouv p^h solutions (S) modulo p . Le lemme 5.1.1 assure qu'il y en a au moins autant dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Mais on a vu qu'il y en a exactement p^h dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, on les a donc toutes. \square

Passons au cas gnral. On reprend le systme (S) mais on ne suppose plus la nullit de \hat{r}_i et de \hat{c}_i .

Thorme 5.1.3. *Supposons que le systme (S) admette une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, alors il admet toujours p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus l'application de rduction modulo p dfinit une bijection entre ces ensembles de solutions.*

En outre si (x_1, \dots, x_h) et (y_1, \dots, y_h) sont deux solutions distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, alors il existe une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'unit ε telle que $y_i = x_i + \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ o s_i est dfini par la formule :

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}$$

Dmonstration. Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Si l'on note $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la rduction modulo p de \hat{x}_i , le uplet (x_1, \dots, x_h) est solution de (S) modulo p . Prenons ε une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'unit et posons $y_i = x_i + \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$. Un calcul donne :

$$\left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p = \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p + \pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i} + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \pi_1^{kn_i} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k}$$

Or les \hat{x}_i forment une solution de (S) et donc on a $v(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i) \geq \frac{er}{p}$. galement, on a $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h - 1} \geq \frac{m_i}{p}$. Finalement, on obtient :

$$v\left(\pi_1^{kn_i} \varepsilon^{kp^i} \eta^{ks_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^{p-k} \right) \geq k \frac{n_i}{p} + k \frac{m_i}{p} + (p-k) \frac{er}{p} = er$$

Ainsi tous les termes de la somme sont des multiples de $p\pi^{er}$. Modulo p , il reste :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i \right)^p &\equiv \frac{\left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i \right)^p}{\pi^{er}} + \frac{\pi_1^{n_i} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{er}} \pmod{p} \\ &\equiv \hat{x}_{i+1} + \hat{r}_i + \frac{\varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{ps_i}}{\pi^{m_i}} \pmod{p} \end{aligned}$$

On remarque que $ps_i = s_{i+1} + m_i(p^h - 1)$, puis que (y_1, \dots, y_h) est solution de (S) . On conclut en reprenant la dmonstration du lemme 5.1.2. \square

Voici un dernier corollaire qui nous sera utile par la suite :

Corollaire 5.1.4. *Soit g un lment du groupe de Galois G_K qui fixe tous les \hat{r}_i et tous les \hat{c}_i . Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On note x_i la rduction modulo p de \hat{x}_i . Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, g fixe \hat{x}_i si et seulement si g fixe x_i .*

Dmonstration. Il suffit de montrer que si g fixe les x_i alors $(g\hat{x}_1, \dots, g\hat{x}_h)$ est aussi solution de (S) . En effet, d'aprs le thorme prcdent, si ces deux solutions sont distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, elles le sont aussi modulo p . Le thorme 5.1.3 donne ceci : dans le cas o les deux solutions sont distinctes, dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ comme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, toutes les « coordonnes » des h -uplets sont distinctes. Le corollaire en dcoule directement. \square

Remarque. Dans le cas o tous les \hat{c}_i sont nuls, il existe toujours une solution au systme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, en combinant les quations, on aboutit une unique quation polynomiale coefficients entiers que doit vrifier \hat{x}_1 . Comme \bar{K} est algbriquement clos, cette quation admet une solution.

5.2 Calcul sur les objets simples

Dans ce paragraphe uniquement, on suppose le corps rsiduel k algbriquement clos. Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Le thorme 4.3.2 affirme que \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{M}(n_i)$ pour une certaine suite priodique (n_i) . Notons h sa priode.

L'image de \mathcal{M} par le foncteur T_{st} s'identifie, comme le prouve le lemme 2.3.4, l'ensemble $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$. Se donner un tel morphisme revient se donner pour tout i , un lment $x_i \in \hat{A}$, image de e_i , ces lments x_i tant soumis certaines relations que nous allons expliciter. On rappelle que d'aprs le lemme 2.3.3, l'anneau \hat{A} s'identifie $(\mathcal{O}_{\bar{K}} \langle X \rangle) / p$.

Lemme 5.2.1. *L'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) = 0$ est $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.*

Dmonstration. Le lemme rsulte directement du fait que $N(X)$ est une unit de \hat{A} . \square

De $N(e_i) = 0$, on dduit $N(x_i) = 0$ et donc d'aprs le lemme prcdent $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Intrissons-nous maintenant la condition impose par le Frobenius. Sur l'objet \mathcal{M} , ϕ_r est dfini par $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$. Cela impose donc deux choses : l'ment $u^{n_i}x_i$ appartient $\text{Fil}^r(\mathcal{O}_{\bar{K}}\langle X \rangle)/p$ et on a l'galit $\phi_r(u^{n_i}x_i) = x_{i+1}$.

On rappelle que l'on avait appel p_1 (resp. π_1) une racine p -ime de p (resp. de π). Par la suite, on supposera que $p_1 = \pi_1^e$, ce qui est toujours possible si $p \neq 2$ (si $p = 2$, $r = 0$, il y a un unique objet simple isomorphisme prs, et le thorme 4.3.2 est immdiat). D'autre part, si $x = \sum_{i \geq 0} a_i \frac{X^i}{i!} \in \hat{A}$ ($a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$), alors $x \in \text{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si a_i est un multiple de \bar{p}_1^{r-i} pour tout entier i compris entre 0 et r . Comme, dans \hat{A} , $u = \frac{\pi_1}{1+X}$, on a $u^{n_i}x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si $\pi_1^{n_i}x_i \in \text{Fil}^r \hat{A}$, c'est--dire $\pi_1^{er-n_i}$ divise x_i pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$.

Soit \hat{x}_i un relev de x_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ qui est un multiple de $\pi_1^{er-n_i}$. Par dfinition $\phi_r(u^{n_i}x_i)$ est la rduction modulo p de :

$$\frac{1}{p^r} \cdot \phi \left(\frac{\pi^{n_i}}{(1+X)^{n_i}} \hat{x}_i \right) = \frac{1}{p^r} \cdot \frac{\pi^{pn_i}}{(1+X)^{pn_i}} \hat{x}_i^p = \frac{1}{(1+X)^{pn_i}} \cdot \frac{1}{\pi^{er-n_i}} \hat{x}_i^p.$$

Or modulo p , $(1+X)^p = 1$ et finalement $\phi_r(u^{n_i}x_i) = \frac{x_i^p}{\pi^{er-n_i}}$.

Ces quations fournissent un systme qui est exactement celui tudi dans le paragraphe 5.1 avec $\hat{c}_i = \hat{r}_i = 0$. En particulier, le lemme 5.1.2 nous fournit directement les solutions.

On vient de prouver le thorme 1.0.3 dont nous rappelons l'nonc :

Thorme 5.2.2. *Supposons k algbriquement clos et $er < p-1$. Si l'objet simple \mathcal{M} s'identifie $\mathcal{M}(n_i)$ pour une suite (n_i) priodique de priode h (voir thorme 4.3.2), alors la representation galoisienne $T_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

o m_i est dfini par $n_i + m_i = er$ et o les θ_i sont les caractres fondamentaux de niveau h .

En particulier, pour tout objet \mathcal{M} de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p , les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo p de $T_{st}(\mathcal{M})$ sont tous compris entre 0 et er .

5.3 Exactitude et fidlit

Exactitude

Thorme 5.3.1. *Le foncteur T_{st} de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes de torsion est exact.*

Dmonstration. La preuve est en tout point semblable celle donne dans le paragraphe 3.2.1. de [Bre97a], et dans le paragraphe 2.3.1. de [Bre99a]. \square

Fidlit

Commenons par le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. *Supposons k algbriquement clos. L'image par le foncteur T_{st} d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une representation irrductible.*

Dmonstration. Par le thorme 5.2.2, on connat l'image d'un objet simple par le foncteur T_{st} . On vrifie directement que cette image est une representation galoisienne irrductible. \square

Corollaire 5.3.3. *Supposons k algbriquement clos. Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{st}(\mathcal{M}))$$

Dmonstration. Cela dcoule directement du lemme prcdent et de l'exactitude. \square

Remarque. Ces deux derniers rsultats restent vrais si k n'est pas algbriquement clos (voir thorme 6.4.4).

Corollaire 5.3.4. *Le foncteur T_{st} de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations galoisiennes de torsion est fidle.*

Dmonstration. Supposons dans un premier temps k algbriquement clos. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T_{st}(f) = 0$. On a la suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \text{im } f \longrightarrow 0$$

En outre l'application $\text{im } f \rightarrow \mathcal{Y}$ est injective et donc la flche dduite $T_{st}(\mathcal{Y}) \rightarrow T_{st}(\text{im } f)$ est surjective. On en dduit que $T_{st}(\tilde{f}) = 0$. En appliquant le foncteur exact T_{st} la suite exacte cite prcdemment, on voit que $T_{st}(\text{im } f) = 0$. D'aprs le corollaire prcdent, $\text{im } f = 0$, puis $f = 0$.

Pour le cas gnral, notons K^{mr} l'extension maximale modrment ramifie de K . Son corps rsiduel s'identifie une clture algbrique \bar{k} de k . Dsignons par S_{mr} l'anneau S construit partir de K^{mr} et par $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$ la catgorie de modules sur S_{mr} .

Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors $\mathcal{M}_{\text{mr}} = S_{\text{mr}} \otimes_S \mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$ et l'application :

$$\begin{aligned} T_{st}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{st}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) \\ f &\mapsto [s \otimes x \mapsto sf(x)] \end{aligned}$$

est un isomorphisme commutant l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$. De plus, le morphisme $\iota_M : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{mr}}, x \mapsto 1 \otimes x$ est injectif.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T_{st}(f) = 0$. Il induit un morphisme $f_{\text{mr}} : \mathcal{X}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{mr}}$ de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$ et on a $T_{st}(f_{\text{mr}}) = 0$. Par la fidlit dans le cas algbriquement clos, il vient $\bar{f} = 0$. La compose $\iota_Y \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{mr}}$ est nulle et comme ι_Y est injectif, f est nulle. Ceci dmontre la fidlit. \square

6 Pleine fidlit du foncteur T_{st}

Dans cette partie, on suppose toujours dans un premier temps que le corps rsiduel k est algbriquement clos. La propriit de pleine fidlit reste valable sans cette hypothse et nous verrons dans le dernier paragraphe comment le cas gnral se dduit simplement du cas « algbriquement clos ».

Par un argument classique (voir [FL82]), on se ramne prouver le lemme suivant :

Lemme 6.0.5. *Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors la flche canonique $\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ext}^1(T_{\text{st}}(\mathcal{N}), T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ est injective.*

6.1 Le module A_{ss}

Pour prouver le lemme 6.0.5, on considre \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets simples, \mathcal{X} une extension dans la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ de ces deux objets telle que $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ soit isomorphe au produit direct $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$. Il nous faut montrer que \mathcal{X} est isomorphe $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Les hypothses impliquent que \mathcal{X} est tu par p . En effet, $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est tu par p , ce qui signifie que la multiplication par p sur $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est l'application nulle. Par fidlit, on en dduit que la multiplication par p sur \mathcal{X} est galement l'application nulle. Par la suite, on va donc pouvoir travailler dans les catgories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.

Commenons par donner une caractrisation, faisant intervenir explicitement le foncteur T_{st} , des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ qui sont semi-simples.

On construit un sous-module A_{ss} de \hat{A} (ss pour *semi-simple*). Pour cela, comme dans le paragraphe 5.1, on fixe, pour tout entier h , $\eta^{(h)}$ une racine $(p^h - 1)$ -ime de l'uniformisante π . On impose en outre une condition de compatibilit : on demande que lorsque h' divise h , on ait :

$$\left(\eta^{(h')}\right)^{\frac{p^h-1}{p^{h'}-1}} = \eta^{(h)}$$

De cette faon, si $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (le localis de \mathbb{Z} en p) on pourra sans ambiguït parler de π^s . En effet, comme tout nombre premier p admet un multiple de la forme $p^h - 1$, on peut toujours crire $s = \frac{a}{p^h-1}$, et poser :

$$\pi^s = \left(\eta^{(h)}\right)^a.$$

La condition de compatibilit dit prcisment que le rsultat ne dpend pas de la fraction choisie pour reprsenter s . En outre, on a les formules videntes $\pi^s \times \pi^{s'} = \pi^{s+s'}$ et $\pi^{ns} = (\pi^s)^n$ si s et s' sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et si n est un entier.

Reprenons la description donne tout la fin du paragraphe 4.3. Choisissons un lment $t \in \mathcal{R}$ classifiant un certain objet simple \mathcal{M} de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Appelons t_1, \dots, t_h les rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$ correspondant t . Prcisment si c'est la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ qui classifie \mathcal{M} , on aura :

$$t_i = 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots$$

Si l'on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$, on voit d'aprs le calcul fait dans le paragraphe 5.2 que tout lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ tombe dans le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module de \hat{A} engendr par les π^{v_i} . On pose, pour

tout $t \in \mathcal{R}$:

$$A_{sst} = k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_1} + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_2} + \dots + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_h}$$

o l'entier h depend de t . La somme prcdente est directe (voir lemme 6.1.2). Il faut faire attention au fait que les modules $k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_i}$ ne sont pas libres, car par exemple on a toujours $u^{ep-1}\pi^{v_i} = 0$. En particulier A_{sst} n'est pas isomorphe \mathcal{M} .

Dfinition 6.1.1. On pose :

$$A_{ss} = \sum_{t \in \mathcal{R}} A_{sst} \subset \hat{A}.$$

Autrement dit, A_{ss} est le sous- $k[u]/u^{ep}$ -module engendr par les $\pi^{t'}$ o t' parcourt l'ensemble des rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et e .

Lemme 6.1.2. Le morphisme vident :

$$\bigoplus_{t'} k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{t'} \rightarrow A_{ss}$$

est un isomorphisme (o la somme est nouveau tendue aux t' rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'criture « dcimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et e).

Avant de faire la dmonstration, insistons sur le fait que la notation est trompeuse : le module $k(u)/u^{ep} \cdot \pi^{t'}$ n'est pas libre, il doit tre vu comme un sous-module de \hat{A} . Le lemme dit donc que la somme dans \hat{A} de tous ces sous-modules est directe.

Dmonstration. La surjectivit est une consquence immddiate de la dfinition de A_{ss} . Passons l'injectivit. Considrons une relation de la forme :

$$P_1(u) \pi^{v_1} + \dots + P_n(u) \pi^{v_n} = 0$$

o les v_i sont deux deux distincts et o on peut supposer que tous les polynmes $P_i \in k[u]/u^{ep}$ sont non nuls. Il faut alors montrer que tous les termes de la somme $P_i(u) \pi^{v_i}$ sont nuls, et ceci va rsulter d'un simple calcul de valuation.

On crit $u = \pi_1 X'^{p-1}$ o l'on rappelle que $X' = 1 + X$ vrifie la relation $X'^p = 1$. En identifiant les coefficients en X' , on obtient pour tout j compris entre 0 et $p-1$ des galits de la forme :

$$P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} = 0$$

o les $P_i^{(j)}$ sont des polynmes coefficients dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On rappelle que l'on dispose d'une valuation sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et que le fait d'tre nul signifie simplement d'tre de valuation suprieure e . La valuation de $P_i^{(j)}(\pi)$ est un entier. Comme $v_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$, et que tous les v_i sont deux deux distincts, les valuations de $P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i}$ sont aussi deux deux distinctes, et on a :

$$v \left(P_1^{(j)}(\pi) \pi^{v_1} + \dots + P_n^{(j)}(\pi) \pi^{v_n} \right) = \min_i v \left(P_i^{(j)}(\pi) \pi^{v_i} \right)$$

En particulier, la somme est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait prouver. \square

Soit \mathcal{X} un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$. L'injection $A_{\text{ss}} \rightarrow \hat{A}$ fournit une flche injective $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$.

Lemme 6.1.3. *L'objet \mathcal{X} est semi-simple si et seulement si la flche précédente est surjective (et donc un isomorphisme).*

Dmonstration. Le sens direct est facile : si \mathcal{X} est semi-simple et s'crit donc comme la somme $\mathcal{X} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n$ pour certains objets simples \mathcal{M}_i , alors $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ se dcompose lui aussi comme la somme directe :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{X}) = T_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \oplus \dots \oplus T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$$

et on a dj vu que $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_i) = \text{Hom}(\mathcal{M}_i, A_{\text{ss}})$.

Faisons la rciproque. Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] affirme que le cardinal de $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est $p^{\text{rg } \mathcal{X}}$ o $\text{rg } \mathcal{X}$ dsigne le rang de \mathcal{X} en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module. On prouve par rcurrence sur la longueur de l'objet \mathcal{X} que $\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg } \mathcal{X}}$ et qu'il y a galit si et seulement si \mathcal{X} est semi-simple. Cela entrainera bien le rsultat annonc dans le lemme.

Le rsultat est vident si \mathcal{X} est simple (de longueur 1). Prenons un objet \mathcal{X} de longueur $n + 1$. Il existe une suite exacte courte de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

o \mathcal{M} est un objet simple et \mathcal{N} est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}$ de longueur n . Par application du foncteur contravariant $\text{Hom}(\cdot, A_{\text{ss}})$, on en dduit une suite exacte gauche :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$$

d'o :

$$\text{Card Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leq \text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \cdot \text{Card Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}}) \leq p^{\text{rg } \mathcal{N}} \cdot p^{\text{rg } \mathcal{M}} = p^{\text{rg } \mathcal{X}}$$

Pour que les deux ingalits précédentes soient des galits, il faut que la flche $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$ soit surjective et que $\text{Card Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) = p^{\text{rg } \mathcal{N}}$. D'après l'hypothse de rcurrence, cette dernire condition implique que \mathcal{N} est semi-simple.

Exploitions la premire condition. Soit $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$, $\psi \neq 0$. Si t dsigne le « rationnel classifiant » de \mathcal{M} , ψ tombe dans un A_{sst} qui est un facteur direct de A_{ss} . Par hypothse, ψ se prolonge tout \mathcal{X} . On s'intresse la compose $s : \mathcal{X} \rightarrow A_{\text{ss}} \rightarrow A_{\text{sst}}$ o la premire flche est ψ ainsi prolonge et la seconde flche est la projection canonique.

Notons (e_1, \dots, e_d) une base adapte de \mathcal{X} pour les entiers n_1, \dots, n_d et notons pour tout i , f_i un relev de $s(e_i)$ dans \mathcal{M} , qui existe puisque tous les morphismes non nuls $\mathcal{M} \rightarrow A_{\text{sst}}$ sont surjectifs. Nous allons corriger les f_i pour que la flche $s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$, $e_i \mapsto f_i$ dfinisse un scindage de :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

Les f_i sont uniques modulo $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$ (on peut faire beaucoup mieux en fait, mais ce ne sera pas utile). En particulier, quelle que soit la faon de les choisir, la flche s obtenue respecte Fil^r . D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_i} f_i) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} f_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

o G dsigne la matrice de ϕ_r dans la base adapte (e_1, \dots, e_d) et o les r_i sont des lments de $u^e \text{Fil}^r \mathcal{X}$. On voit donc que si l'on remplace le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} + {}^t G^{-1} \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$, on obtient une flche compatible Fil^r et ϕ_r .

Pour prouver que cette rtraction est galement compatible N , on considre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow & & \downarrow s \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \downarrow u^e N & & & \downarrow cN \\ & & \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ & \nearrow s & \downarrow cN & & \downarrow s \\ \text{Fil}^r \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{X} & & \end{array}$$

Les faces du cube situs devant, derriere, au-dessus et au-dessous commutent. La face de gauche commute modulo $u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et donc $\phi_r \circ (u^e N) \circ s = \phi_r \circ s \circ (u^e N)$. Une chasse au diagramme permet d'obtenir $(cN) \circ s \circ \phi_r = s \circ (cN) \circ \phi_r$, ce qui permet de conclure puisque $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{X})$ engendre tout \mathcal{X} . \square

6.2 Le calcul de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\text{ss}})$

Rappelons que notre objectif est de prouver le lemme 6.0.5. On considre donc \mathcal{X} , objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et extension de deux objets simples \mathcal{M} et \mathcal{N} . On suppose que $T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T_{\text{st}}(\mathcal{N})$ et on veut montrer que \mathcal{X} est semi-simple. Pour cela d'apr's le lemme 6.1.3, il suffit de prouver que tout lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ d'finit un morphisme qui tombe dans A_{ss} . Soit $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$. On peut dessiner le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} \longrightarrow 0 \\ & & \searrow 0 & & \downarrow \psi & & \downarrow \tilde{\psi} \\ & & & & \hat{A} & & \\ & & & & \downarrow \text{pr} & & \\ & & & & \hat{A}/A_{\text{ss}} & & \end{array}$$

La compose $\psi \circ f$ est un morphisme de \mathcal{M} dans \hat{A} , qui tombe dans A_{ss} par simplicité de \mathcal{M} et devient nulle lorsqu'elle est composée avec la projection canonique. Il existe donc une flèche $\tilde{\psi} : \mathcal{N} \rightarrow \hat{A}/A_{\text{ss}}$ faisant commuter le diagramme. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier plus en détail cette flèche.

Notons d'abord que le quotient \hat{A}/A_{ss} hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie : on définit $\text{Fil}^i(\hat{A}/A_{\text{ss}}) = \text{pr}(\text{Fil}^i \hat{A})$ et on vérifie que $N(A_{\text{ss}}) \subset A_{\text{ss}}$ et que $\phi_i(A_{\text{ss}} \cap \text{Fil}^i \hat{A}) \subset A_{\text{ss}}$. Cela suffit pour transporter les structures.

Comme \mathcal{M} est un objet simple, on sait le décrire précisément : par le théorème 4.3.2, il existe un entier h , des éléments e_1, \dots, e_h qui forment une base de \mathcal{M} et des entiers n_1, \dots, n_h le tout tel que $\text{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \dots + u^{n_h} e_h$, $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$, les indices tant considérés dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. De même, on a une description de \mathcal{N} : il existe un entier h' , des éléments $e'_1, \dots, e'_{h'}$ et des entiers $n'_1, \dots, n'_{h'}$ le tout vérifiant des conditions analogues.

Dans un premier temps, comme ψ commute N , on a $N(\tilde{\psi}(e_{i'})) = 0$ pour tout indice i' . On cherche donc les éléments de \hat{A} dont l'image par N tombe dans A_{ss} . C'est l'objet du lemme suivant. On rappelle que, par le lemme 2.3.5 :

$$\hat{A} \simeq (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

l'isomorphisme consistant à faire correspondre $X' - 1 + X$ et $\frac{Y^i}{i!} - \frac{1}{i!} \left(\frac{(1+X)^p - 1}{p} \right)^i$.

Lemme 6.2.1. *Avec les notations précédentes, l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) \in A_{\text{ss}}$ est $A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p + (A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)Y$.*

Démonstration. Soit $x \in \hat{A}$ tel que $N(x) \in A_{\text{ss}}$. Il s'écrit :

$$x = \sum_{j \geq 0} P_j(X') \frac{Y^j}{j!}$$

les P_j tant des polynômes de degré inférieur $p - 1$ coefficients dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ nuls pour $j \gg 0$. On a :

$$N(x) = \sum_{j \geq 0} (X' P'_j(X') + P_{j+1}(X')) \frac{Y^j}{j!}.$$

On remarque que *via* les identifications faites, A_{ss} est entièrement inclus dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p[X']/(X'^p - 1)$ et donc il suffit de vérifier les conditions :

1. $X' P'_0(X') + P_1(X') \in A_{\text{ss}}$
2. $X' P'_j(X') + P_{j+1}(X') = 0$ pour tout $j \geq 1$

La deuxième condition entraîne $P_1(X') = b$ pour un certain $b \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et $P_j(X') = 0$ pour tout $j \geq 2$.

Exploitions maintenant la première condition.crivons $P_0(X') = a_0 + a_1 X' + \dots + a_{p-1} X'^{p-1}$ o $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On obtient :

$$b + a_1 X' + 2a_2 X'^2 + \dots + (p-1) a_{p-1} X'^{p-1} \in A_{\text{ss}}.$$

Par définition de A_{ss} et en remarquant que $u \in \hat{A}_{\text{st}}$ correspond $\pi_1 X'^{p-1} \in \hat{A}$, on voit que tous les termes de la somme précédente sont éléments de A_{ss} . En particulier on a $b \in A_{\text{ss}}$. D'autre

part, les entiers $2, \dots, p-1$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et donc tous les $a_i X^i$, pour $i \geq 1$, sont aussi lments de A_{ss} . Cela prouve finalement que $P_0(X') \in A_{\text{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ puis la conclusion annoncee.

Il reste faire la rciproque, mais elle est immdiate au vu du calcul prcdent. \square

Par le lemme prcdent, on peut crire :

$$\tilde{\psi}(e'_{i'}) = a_{i'} + b_{i'}Y \in \hat{A}/A_{\text{ss}}$$

o $a_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, $b_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Comme ϕ_r commute ψ , et que $\phi_r(e'_{i'}) = e'_{i'+1}$, on a $u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'}Y) \in \text{Fil}^r(\hat{A}/A_{\text{ss}})$ et $\phi_r(u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'}Y)) = a_{i'+1} + b_{i'+1}Y \pmod{A_{\text{ss}}}$. De cela, on dduit $u^{n'_{i'}}a_{i'} \in \text{Fil}^r(\hat{A}/A_{\text{ss}})$ et $u^{n'_{i'}}b_{i'} \in \text{Fil}^{r-1}\hat{A}/A_{\text{ss}}$. De plus $\phi_r(u^{n'_{i'}}(a_{i'} + b_{i'}Y)) = \phi_r(u^{n'_{i'}}a_{i'}) + \phi_{r-1}(u^{n'_{i'}}b_{i'})Y$, puisque $\phi_1(Y) = Y$, et donc :

$$\phi_r(u^{n'_{i'}}a_{i'}) + \phi_{r-1}(u^{n'_{i'}}b_{i'})Y = a_{i'+1} + b_{i'+1}Y \pmod{A_{\text{ss}}}$$

Par le corollaire 2.3.6, cela implique $\phi_{r-1}(u^{n'_{i'}}b_{i'}) = b_{i'+1}$, l'galit se faisant dans \hat{A} . On sait donc dterminer une nouvelle fois en vertu du lemme 5.1.3 la forme prcise des $b_{i'}$.

6.3 Fin de la preuve

Intressons-nous la structure de l'application ψ . Choisissons des relevs de $e'_{i'}$ dans \mathcal{X} , relevs que l'on appelle encore $e'_{i'}$. En reprenant les notations prcdentes, l'application ψ a alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(e_i) &= x_i \\ \psi(e'_{i'}) &= a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'}Y \end{aligned}$$

o $a_{i'}^{(1)} \in A_{\text{ss}}$ et o on connat prcisment la forme des x_i d'aprs le calcul fait dans le paragraphe 5.2 et de mme celle des $b_{i'}$: si $x_i \neq 0$ et $b'_{i'} \neq 0$, si l'on note comme dans le paragraphe 6.1 :

$$\begin{aligned} t_i &= 0, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1} \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}} \dots \\ t'_{i'} &= 0, n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1} \overline{n'_{i'} n'_{i'+1} \dots n'_{i'+h'-1}} \dots \end{aligned}$$

et si on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$ et $v'_{i'} = \frac{er-1}{p-1} - t'_{i'}$, il existe deux racines $(p^h - 1)$ -imes de l'unit, ε et ε' , telles que $\hat{x}_i = \varepsilon^{p^i} \pi^{v_i}$ et $\hat{b}_{i'} = \varepsilon^{p^{i'}} \pi^{v'_{i'}}$ et o x_i (resp $b_{i'}$) est la rduction modulo p de \hat{x}_i (resp $\hat{b}_{i'}$). On peut faire de mme pour les $a_{i'}$. Ils sont solutions d'un systme d'quation de la forme :

$$\phi_r(u^{n'_{i'}}a_{i'} + c_{i'}) = a_{i'+1} + r_{i'}$$

avec $c_{i'}, r_{i'} \in A_{\text{ss}}$. L'galit entrane $r_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p \cap A_{\text{ss}}$. Notons $\hat{a}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ un relev de $a_{i'}$, $\hat{c}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ un lment tel que $\phi_r(u^{n'_{i'}}a_{i'} + c_{i'}) \equiv \phi_r(u^{n'_{i'}}\hat{a}_{i'} + \hat{c}_{i'}) \pmod{p}$ et choisissons $\hat{r}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ un relev de $r_{i'}$. Intressons-nous au systme (dont les inconnus sont les $\hat{x}_{i'}$) donn par les quations :

$$\frac{(\pi_1^{n'_{i'}} \hat{x}_{i'} + \hat{c}_{i'})^p}{\pi^{er}} = \hat{x}_{i'+1} + \hat{r}_{i'}.$$

De faon vidente, les $a_{i'}$ forment une solution modulo p , qui se remonte d'aprs le lemme 5.1.1 en une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ que l'on note $\hat{a}_{i'}$. Le corollaire 5.1.4 s'applique : un lment du groupe de Galois G_K qui fixe les \hat{c}_i et les \hat{r}_i , fixe $\hat{a}_{i'}$ si et seulement s'il fixe $a_{i'}$.

D'autre part, on rappelle que par hypothse la suite :

$$0 \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{N}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

est exacte et que l'on dispose d'une section $s : T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ qui commute l'action de Galois.

Soit $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ dcrit comme on vient de le voir. Le morphisme $s(\psi) \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ prolonge ψ , on l'appellera simplement ψ par la suite. Comme s est compatible Galois, pour tout lment σ stabilisant les x_i , on a :

$$\sigma \left(a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'} Y \right) = \sigma a_{i'} + \sigma a_{i'}^{(1)} + \sigma b_{i'} t(\sigma) + \sigma b_{i'} Y = a_{i'} + a_{i'}^{(1)} + b_{i'} Y$$

o on rappelle que $\sigma(Y) = Y + t(\sigma)$. On a vu que $t(\sigma) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ (voir lemme 2.3.7) et donc de l'galit prcdente, on dduit en particulier :

$$\sigma a_{i'} + \sigma a_{i'}^{(1)} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + a_{i'}^{(1)}.$$

Si $t(\sigma) = 0$ et si σ fixe $a_{i'}^{(1)}$, on obtient $\sigma a_{i'} = a_{i'}$.

Remarquons que les \hat{c}_i et les \hat{r}_i peuvent tre choisis dans $K^{\text{mr}}[\pi_1]$, o $K^{\text{mr}} \subset \bar{K}$ dsigne l'extension maximale modrment ramifie de K . Reprenons les notations du paragraphe prcdent et considrons $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}}[\pi_1])$. Il est tel que $t(\sigma) = 0$, et donc $\sigma a_{i'} = a_{i'}$. D'autre part, σ fixe \hat{c}_i et \hat{r}_i , d'o on dduit $\sigma \hat{a}_{i'} = \hat{a}_{i'}$ puis $\hat{a}_{i'} \in K^{\text{mr}}[\pi_1]$.

Supposons par l'absurde qu'il existe ψ et $i' \in \mathbb{Z}/h'\mathbb{Z}$ tels que $b_{i'} \neq 0$. De la description explicite de $b_{i'}$, on dduit :

$$v(b_{i'}) = v_{i'} = \frac{e(r-1)}{p-1} - t_{i'}.$$

Soit $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$ ne fixant pas π_1 . On a alors $\sigma b_{i'} = b_{i'}$ et $t(\sigma) \neq 0$. On a dmontr dans le lemme 2.3.8 que $t(\sigma)$ tait congru une racine $(p-1)$ -ime de $(-p)$. En particulier, il est de valuation $\frac{e}{p-1}$. On en dduit :

$$v(b_{i'} t(\sigma)) = \frac{e(r-1)}{p-1} - t_{i'} + \frac{e}{p-1} = \frac{er}{p-1} - t_{i'} < 1$$

et donc $b_{i'} t(\sigma)$ est non nul dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.

Or $\hat{a}_{i'} \in K^{\text{mr}}[\pi_1]$. Cela signifie qu'il existe des $\hat{d}_j \in K^{\text{mr}}$ tels que :

$$\hat{a}_{i'} = \hat{d}_0 + \hat{d}_1 \pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1} \pi_1^{p-1}.$$

En appliquant σ puis en faisant la difference, on obtient :

$$\sigma \hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'} = \hat{d}_1 (\varepsilon(\sigma) - 1) \pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1} (\varepsilon(\sigma)^{p-1} - 1) \pi_1^{p-1}.$$

La valuation de $\hat{d}_i(\varepsilon(\sigma)^i - 1)$ est un rationnel lment de $\mathbb{Z}_{(p)}$. En consequence, les termes de la somme prcdente ont des valuations deux deux distinctes et puis :

$$v\left(\hat{d}_1(\varepsilon(\sigma) - 1)\pi_1 + \dots + \hat{d}_{p-1}(\varepsilon(\sigma)^{p-1} - 1)\pi_1^{p-1}\right) = \min_i v\left(\hat{d}_i(\varepsilon(\sigma)^i - 1)\pi_1^i\right) \notin \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Par ailleurs, $\sigma\hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'} \equiv b_{i'}t(\sigma) \pmod{p}$ et $v(b_{i'}t(\sigma)) < 1$. Ainsi :

$$v(\sigma\hat{a}_{i'} - \hat{a}_{i'}) = v(b_{i'}t(\sigma)) \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

On obtient une contradiction. Elle dmontre que tous les $b_{i'}$ sont nuls, et ce pour tout ψ dans l'image de s . Il reste montrer que pour tous ces ψ , on a galement $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$. Cela conclura, car tout lment $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$ s'crit comme somme d'un lment de $T_{\text{st}}(\mathcal{N})$ et d'un lment de l'image de s . Si ces deux morphismes tombent dans A_{ss} , il en sera de mme de ψ . Le lemme 6.1.3 assurera alors que \mathcal{X} est semi-simple.

Soit $\psi \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On continue appeler ψ l'lment $s(\varphi) \in T_{\text{st}}(\mathcal{X})$. On a $\psi(e_i) = x_i$ et $\psi(e'_{i'}) = a_{i'} + a_{i'}^{(1)}$ o les x_i sont des lments de A_{sst} si t est le « rationnel classifiant » de \mathcal{M} et o, par le mme argument que prcdemment, les $a_{i'}$ se relvent en des lments de $K^{\text{mr}}[\pi_1]$. De plus il existe $c_{i'}, r_{i'} \in A_{\text{ss}}$ tels que $\phi_r(u^{n_{i'}}a_{i'} + c_{i'}) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$, qui est lment de $\mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}/p$. On en dduit que, pour tout i , $a_{i'} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}/p$. Il existe donc un entier d tel que l'on puisse crire :

$$a_{i'} = \sum_{v \in I} \lambda_v \pi^v$$

o I dsigne l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1 et ayant pour dmoninateur $(p^d - 1)$ et o les λ_v sont des lments de \mathcal{O}_K/p . Soit I_{ss} l'ensemble des rationnels appartenant I dont le dveloppement « dcimal » en base p ne fait intervenir que des chiffres compris entre 0 et er . Soit $I_{\overline{\text{ss}}} = I \setminus I_{\text{ss}}$. On pose :

$$a_{\text{ss},i'} = \sum_{v \in I_{\text{ss}}} \lambda_v \pi^v \quad \text{et} \quad a_{\overline{\text{ss}},i'} = \sum_{v \in I_{\overline{\text{ss}}}} \lambda_v \pi^v.$$

Alors $a_{i'} = a_{\text{ss},i'} + a_{\overline{\text{ss}},i'}$, $a_{\text{ss},i'} \in A_{\text{ss}}$ et on vrifie que :

$$\phi_r(u^{n_{i'}} a_{\overline{\text{ss}},i'}) = a_{\overline{\text{ss}},i'+1}.$$

On sait rsoudre cette quation et ses solutions sont dans $A_{\overline{\text{ss}}}$. Cela entrane $a_{\overline{\text{ss}},i'} = 0$ pour tout indice i' . Ainsi $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$ ce qui est bien ce que l'on dsirait prouver.

6.4 Rcapitulatif et conclusion

Rcapitulons tout ce que l'on vient de voir. On a prouv sans hypothse sur le corps rsiduel k que le foncteur T_{st} est toujours exact et fidle. On a galement prouv, pour l'instant, que si ce corps rsiduel est algbriquement clos, alors le foncteur T_{st} tait galement plein. En procdant comme dans le paragraphe 6.2 de [FL82], on peut dduire le rsultat pour k quelconque du rsultat pour k algbriquement clos :

Thorme 6.4.1. *Le foncteur T_{st} de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des representations \mathbb{Z}_p -linaires de torsion du groupe de Galois G_K est exact et pleinement fidle.*

Remarque. L'image essentielle du foncteur T_{st} est incluse dans la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de longueur finie de G_K comme le montre le théorème 6.4.4 que nous prouvons par la suite.

Nous pouvons finalement répondre complètement la conjecture A.2 formulée dans [Bre99a]. Mais avant cela, nous allons noncer et prouver une propriété formelle :

Propriété 6.4.2. *Soient A et B deux catégories abéliennes et artiniennes. Soit $F : A \rightarrow B$ un foncteur additif, exact et pleinement fidèle qui est tel que l'image de tout objet simple de A est encore simple dans B . Alors l'image essentielle de F est stable par sous-objets et par quotients.*

Démonstration. On se ramène directement au cas où A est une sous-catégorie pleine de B . L'hypothèse dit que les objets simples de A restent simples dans B . En particulier si M est un objet de A et si :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = M$$

est une suite de Jordan-Hölder dans A , elle restera une suite de Jordan-Hölder dans B . Il s'agit de prouver que la catégorie A est stable par sous-objets et par quotients.

Introduisons pour cela A' la sous-catégorie pleine de A formée des objets dont tous les quotients de Jordan-Hölder sont dans B . C'est une sous-catégorie abélienne de A qui est stable par sous-objets et par quotients. Évidemment A est une sous-catégorie de A' , on peut donc supposer que $A' = B$ ou si l'on préfère que les objets simples de A' et ceux de B sont les mêmes.

Soit M un objet de A et N un sous-objet de M . En considérant des suites de Jordan-Hölder de N et de M/N , on voit que l'on peut écrire une suite de Jordan-Hölder de la forme suivante :

$$0 = M_0 \subset M_1 \dots \subset M_n = N \subset M_{n+1} \subset \dots \subset M_m = M$$

Le quotient M_m/M_{m-1} est un objet simple et donc un objet de A . Par suite le noyau de la projection $M_m \rightarrow M_m/M_{m-1}$ qui s'identifie à M_{m-1} est également un objet de A . Par récurrence, on montre que tous les M_i sont des objets de A et donc qu'il en est de même de N . Ceci prouve la stabilité par sous-objets, la stabilité par quotients se traite de façon totalement identique. \square

Remarque. Cette propriété redmontre en particulier le fait que la sous-catégorie $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$ de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ est stable par sous-objets et par quotients, puisque l'on a vu dans la proposition 3.3.4 que tous les objets simples de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ étaient dans $\widetilde{\underline{\text{MF}}}^r$.

On peut désormais noncer le théorème qui résout la conjecture mentionnée précédemment :

Théorème 6.4.3. *L'image essentielle du foncteur T_{st} est stable par sous-objets et par quotients et indépendante du choix de l'uniformisante π .*

Démonstration. L'indépendance du choix de l'uniformisante est une conséquence directe de la propriété 3.1.10.

Supposons k algébriquement clos. On sait, par le lemme 5.3.2, que l'image par le foncteur T_{st} d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une représentation irréductible. Le foncteur T_{st} vérifie les conditions de la propriété précédente, ce qui conclut.

Pour le cas gnral, notons K^{mr} l'extension maximale modrment ramifie de K et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$ la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ construite partir de K^{mr} . Soit \mathcal{M} un objet simple de \mathcal{M}^r . Il est tu par p et donc peut tre vu comme un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Il suffit de prouver que $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est une representation irrductible. Notons $\mathcal{M}_{\text{mr}} = \bar{k} \otimes_k \mathcal{M}$. L'application :

$$\begin{aligned} T_{\text{st}}(\mathcal{M}) &\rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) \\ f &\mapsto [\lambda \otimes x \mapsto [\lambda] f(x)] \end{aligned}$$

(o $[\lambda] \in W(\bar{k}) \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est le representant de Teichmller de $\lambda \in \bar{k}$) est un isomorphisme commutant l'action de $G_{K^{\text{mr}}} = \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{mr}})$.

Supposons par l'absurde qu'il existe V un sous- \mathbb{Z}_p -module de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$, strict, non nul et G_K -quivariant. C'est aussi un sous- \mathbb{Z}_p -module de $T_{\text{st}}(\bar{\mathcal{M}})$ $G_{K^{\text{mr}}}$ -quivariant et donc d'apr le cas prcdent, on peut crire $V = T_{\text{st}}(\mathcal{C}_{\text{mr}})$ (galit de representations de $G_{K^{\text{mr}}}$) o \mathcal{C}_{mr} est un quotient de \mathcal{M}_{mr} dans la catgorie $\mathcal{M}_{\text{mr}}^r$. Soit \mathcal{M}'_{mr} le noyau de la projection $\mathcal{M}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{mr}}$, c'est un sous-objet strict et non nul de \mathcal{M}_{mr} dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{mr}}^r$.

Soient $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$ et $\hat{\sigma} \in G_K$ un prolongement de σ . Soient $\psi \in V \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ et ψ_{mr} son image dans $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}})$. L'lment $\hat{\sigma}$ agit sur ψ_{mr} de la faon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}\psi_{\text{mr}} : \mathcal{M}_{\text{mr}} &\rightarrow \hat{A} \\ s \otimes x &\mapsto s \hat{\sigma}\psi(x) \end{aligned}$$

De plus, σ dfnit un morphisme $\sigma : \mathcal{M}_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{mr}}$ dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{K^{\text{mr}}}^r$. On vrifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{mr}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{M}_{\text{mr}} \\ \hat{\sigma}^{-1}\psi_{\text{mr}} \downarrow & & \downarrow \psi_{\text{mr}} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \hat{A} \end{array}$$

Comme $\psi \in V$, on a $\psi|_{\mathcal{M}'_{\text{mr}}} = 0$ et par le diagramme prcdent, $\psi|_{\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}}} = 0$.

On obtient un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\mathcal{M}_{\text{mr}}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui fournit un isomorphisme $T_{\text{st}}(\mathcal{M}'_{\text{mr}}) \rightarrow T_{\text{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}})$, se relevant par pleine fidlit en un isomorphisme $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} \longrightarrow \mathcal{M} \\ & & \downarrow \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_{\text{mr}} \longrightarrow \mathcal{M} \end{array}$$

On en dduit $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} = \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$.

On pose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{\text{mr}} \cap \mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}'_{\text{mr}}{}^{\text{Gal}(\bar{K}^{\text{mr}}/K)}$. On va montrer que \mathcal{M}' est un sous-objet strict et non nul de \mathcal{M} dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, ce qui est une contradiction. Soit (e_1, \dots, e_d) une $k[u]/u^{ep}$ -base de \mathcal{M} . Soit $y \in \bar{\mathcal{M}}'_{\text{mr}}$, $y \neq 0$. On peut écrire :

$$y = P_1(u)e_1 + \dots + P_d(u)e_d$$

où les P_i sont des polynômes coefficients dans $\ell[u]/u^{ep}$ pour ℓ une extension finie de k . D'autre part, si $P \in \ell[u]/u^{ep}$, on peut définir $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$ en calculant la trace de chacun des coefficients. En outre, comme ℓ/k est séparable, on peut supposer $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1) \neq 0$, quitte multiplier \bar{x} par un élément non nul de ℓ . Posons :

$$x = \text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u))e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(P_d(u))e_d.$$

C'est un élément de \mathcal{M} et, puisque $\sigma\mathcal{M}'_{\text{mr}} = \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{mr}}/K)$, c'est aussi un élément de \mathcal{M}'_{mr} . Comme on a supposé $\text{Tr}_{\ell/k}(P_1(u)) \neq 0$, on a $x \neq 0$, puis $\mathcal{M}' \neq 0$ comme on voulait.

On pose $\text{Fil}^r \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}}$. L'opérateur $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ (resp. $N : \mathcal{M}'_{\text{mr}} \rightarrow \mathcal{M}'_{\text{mr}}$) induit une application $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$ (resp. $N : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$). Ces applications vérifient les bonnes conditions pour définir un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Le seul point délicat est le fait que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$ engendre \mathcal{M}' en tant que $k[u]/u^{ep}$ -module. Soit $x \in \mathcal{M}'$. On sait qu'il existe $\lambda_i \in \bar{k}[u]/u^{ep}$ et $y_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'_{\text{mr}}$ tels que :

$$x = \lambda_1 \phi_r(y_1) + \dots + \lambda_n \phi_r(y_n).$$

De plus, quitte rentrer les constantes à l'intérieur des ϕ_r , on peut supposer que $\lambda_i = u^{s_i}$ pour certains entiers s_i . Soit (e_1, \dots, e_d) une $k[u]/u^{ep}$ -base de \mathcal{M} . Écrivons :

$$y_j = P_{1,j}(u)e_1 + \dots + P_{d,j}(u)e_d$$

où $P_{i,j} \in \bar{k}[u]/u^{ep}$. Soit ℓ une extension finie de k contenant tous les coefficients des polynômes $P_{i,j}$ définis ci-dessus. Comme précédemment, on peut définir $\text{Tr}_{\ell/k}(P)$ pour $P \in \ell[u]/u^{ep}$. Soit $\alpha \in \ell$ un élément tel que $\text{Tr}_{\ell/k}(\alpha) = 1$. On pose :

$$x_j = \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{1,j}(u))e_1 + \dots + \text{Tr}_{\ell/k}(\alpha P_{d,j}(u))e_d.$$

On a alors $x_i \in \text{Fil}^r \mathcal{M}'$ et :

$$x = u^{s_1} \phi_r(x_1) + \dots + u^{s_n} \phi_r(x_n)$$

ce qui prouve bien que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$ engendre \mathcal{M}' en tant que S -module. \square

Remarque. Comme conséquence du théorème précédent et de la plénitude de T_{st} , un objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ est semi-simple si et seulement si $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est une représentation semi-simple.

Il résulte de la démonstration précédente et de l'exactitude du foncteur T_{st} le théorème suivant :

Théorème 6.4.4. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\text{long}(\mathcal{M}) = \text{long}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

Proposition 6.4.5. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$ pour certains entiers n_i . Alors en tant que \mathbb{Z}_p -module, $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est isomorphe $\mathbb{Z}_p/p^{n_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n_d}\mathbb{Z}_p$.

Dmonstration. Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] dit que si \mathcal{M} est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$, alors $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension $\text{rg } X$. On en dduit par exactitude du foncteur T_{st} que :

$$\text{long}_S(\mathcal{M}) = \text{long}_{\mathbb{Z}_p}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$$

o les longueurs sont calculées respectivement dans la catégorie des S -modules et dans celle des \mathbb{Z}_p -modules.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S/p^{n_1}S \oplus \dots \oplus S/p^{n_d}S$. La représentation galoisienne $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un \mathbb{Z}_p -module de longueur finie et donc est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -modules $\mathbb{Z}_p/p^{n'_1}\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n'_d}\mathbb{Z}_p$ pour certains entiers n'_i . Soit n un entier. Le noyau de la multiplication par p^n sur \mathcal{M} s'envoie par le foncteur exact T_{st} sur le conoyau de la multiplication par p^n sur $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On en dduit en regardant les longueurs que :

$$\sum_{i=1}^d \min(n_i, n) = \sum_{i=1}^d \min(n'_i, n).$$

Cela permet de conclure. □

7 Conséquences

7.1 Modules filtrés et modules fortement divisibles

Définitions

On reprend dans ce paragraphe les définitions et propriétés du paragraphe 4.1.1 de [Bre97a].

On rappelle que K_0 désigne le corps des fractions de W , anneau des vecteurs de Witt coefficients dans k . On définit $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$. C'est l'ensemble suivant :

$$S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On munit S_{K_0} d'une filtration en posant $\text{Fil}^n S_{K_0} = \text{Fil}^n S \otimes_W K_0$, ou encore :

$$\text{Fil}^n S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in K_0, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}.$$

On prolonge de manière évidente le Frobenius et l'opérateur de monodromie définis sur S tout S_{K_0} .

On définit un *module fortement divisible* (resp. un *module filtré sur S_{K_0}*) comme la donne suivante :

1. un S -module (resp. un S_{K_0} -module) \mathcal{M} libre de rang fini ;

2. un sous- S -module (resp. un sous- S_{K_0} -module) de \mathcal{M} , not $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$ (resp. contenant $\text{Fil}^r S_{K_0} \cdot \mathcal{M}$) et tel que $\mathcal{M}/\text{Fil}^r \mathcal{M}$ soit sans p -torsion (cette dernire condition est automatique pour les modules filtrs sur S_{K_0});
3. d'une fiche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrfiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

et ce pour tout lment $s \in \text{Fil}^r S$ (resp. tout lment $s \in \text{Fil}^r S_{K_0}$) et tout lment $x \in \mathcal{M}$ telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module (resp. en tant que S_{K_0} -module);

4. une application W -linaire (resp. une application K_0 -linaire) $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vrfiant les trois conditions :
 - pour tout $s \in S$ (resp. pour tout $s \in S_{K_0}$) et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Suivant toujours [Bre97a], on dfinit de manire vidente la catgorie des modules filtrs sur S_{K_0} et celle des modules fortement divisibles. Elles sont quipes d'un foncteur vers les representations galoisiennes. Prcisment, si \mathcal{M} est un module filtr sur S_{K_0} , on pose $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{B}_{\text{st}}^+)$ o par dfnition $\hat{B}_{\text{st}}^+ = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0$ muni des structures induites et o Hom est compatible toutes les structures; on obtient une \mathbb{Q}_p -reprsentation de G_K . De mme si \mathcal{M} est un module fortement divisible, on dfinit $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}})$, le Hom tant encore compatible toutes les structures. On obtient une \mathbb{Z}_p -reprsentation libre de G_K . Les rangs des representations obtenues concident avec les rangs des objets \mathcal{M} .

Si \mathcal{M} est un module fortement divisible, on vrfie immdiatement que $\mathcal{M} \otimes_W K_0$ est un module filtr sur S_{K_0} et que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$ est un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. De plus, on montre que \mathcal{M} s'identifie la limite projective de $\mathcal{M}/p^n \mathcal{M}$, puis que $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ s'identifie la limite projective de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^n \mathcal{M})$. On dduit de la pleine fidlit prouve prcdemment le corollaire suivant :

Thorme 7.1.1. *Le foncteur T_{st} de la catgorie des modules fortement divisibles dans la catgories des \mathbb{Z}_p -reprsentations (libres) de G_K est pleinement fidle.*

7.2 Modules fortement divisibles et foncteur T_{st}

Nous dmontrons dans ce paragraphe le thorme 1.0.5. En fait, nous dmontrons la formulation quivalente mais lgrement diffrente suivante :

Thorme 7.2.1. *On suppose $er < p - 1$. Soit \mathcal{M} un module fortement divisible sur S , et soit V la reprsentation galoisienne associe via le foncteur T_{st} $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$ qui est un module filtr sur S_{K_0} . Le foncteur T_{st} ralise une anti-quivalence de catgories entre la catgorie des sous-modules fortement divisibles de \mathcal{M}_{K_0} et celle des sous- \mathbb{Z}_p -rseaux de V stables par G_K .*

Dmonstration. Nous suivons pas pas la preuve de la proposition 3 de [Bre99b], qui n'utilise essentiellement que la pleine fidlité du foncteur T_{st} et un équivalent du thorme 6.4.3.

Dans un premier temps, la pleine fidlité du foncteur T_{st} considre dans l'nonc du thorme se dduit directement du thorme 7.1.1.

Reste l'essentielle surjectivit. Soit T un \mathbb{Z}_p -rseau de V stable par G_K . Il existe un entier n_0 tel que :

$$p^{n_0}T \subset T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset (1/p^{n_0})T$$

On en dduit que pour $n \geq n_0$, $p^{n_0}T/p^nT$ est un sous-objet de $T_{\text{st}}(\mathcal{M})/p^nT$, ce dernier tant un quotient de $T_{\text{st}}(\mathcal{M}/p^{n+n_0}\mathcal{M})$. Le thorme 6.4.3 assure alors que $p^{n_0}T/p^nT$ s'crit $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$ pour \mathcal{M}_n un certain objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

La pleine fidlité de T_{st} assure l'existence d'une unique flche $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$ relevant la projection $p^{n_0}T/p^{n+1}T \rightarrow p^{n_0}T/p^nT$, et la limite inductive de ce systme s'identifie $\mathcal{M}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ pour un certain module fortement divisible \mathcal{M}_∞ qui rpond la question. \square

Remarque. Noter que si \mathcal{M} est un S_{K_0} -module filtr « faiblement admissible », alors il contient toujours un module fortement divisible par [Bre99a].

7.3 Variante d'une conjecture de Serre

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliquer comment le thorme donn dans l'introduction et que nous rappelons ci-dessous est consquence de la thorie prsente prcdemment. Noter qu'ici, on ne suppose *a priori* plus rien ni sur e , ni sur r .

Thorme 7.3.1. *Soit X un schma propre et lisse sur K et rduction semi-stable sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K . On fixe r un entier. Les exposants qui dcrivent l'action de l'inertie modre sur la semi-simplifie modulo p de $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$ (o $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X \bar{K} et o « \star » signifie que l'on prend le dual) sont tous compris entre 0 et er .*

Dmonstration. Dans un premier temps, il est clair que l'on peut supposer $er < p - 1$, le thorme tant trivialement vrifi dans le cas contraire. On peut donc utiliser les rsultats prcdents.

D'apr's les rsultats de [Tsu99] et du paragraphe 2.2 de [Bre02], la \mathbb{Q}_p -reprsentation $V = H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^*$ (le dual tant cette fois-ci le \mathbb{Q}_p -dual) provient *via* le foncteur T_{st} d'un module filtr \mathcal{M}_{K_0} sur S_{K_0} , et d'apr's les rsultats de [Bre99a], ce module admet un sous-module fortement divisible \mathcal{M} .

D'autre part, la \mathbb{Z}_p -reprsentation T est un rseau de V stable par Galois, et donc d'apr's le thorme 7.2.1, il existe un module fortement divisible inclus dans \mathcal{M}_{K_0} dont l'image par T_{st} est isomorphe T . Appelons \mathcal{M} un tel module.

La reprsentation quotient T/p correspond *via* le foncteur T_{st} \mathcal{M}/p qui est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. La semi-simplifie de T/p est la somme directe de ses quotients de Jordan-Hlder, et chacun de ces quotients correspond un objet simple de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Le thorme 5.2.2 permet de conclure. \square

Remarque. Si l'on prfre, on peut ne pas utiliser le thorme 7.2.1, mais dire la place que si T et T' sont deux \mathbb{Z}_p -rseaux de V stables par Galois, alors les semi-simplifies des rductions

modulo p de ces deux représentations sont isomorphes. On aurait donc pu garder le premier module fortement divisible \mathcal{M} .

Bibliographie

- [BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercices*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939
- [Ber] L. Berger, *An introduction to the theory of p -adic representations*, paraitre dans Geometric Aspects of Dwork’s Theory
- [Bre97a] C. Breuil, *Construction de représentations p -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [Bre97b] ———, *Représentations p -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [Bre98] ———, *Cohomologie étale de p -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [Bre99a] ———, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122
- [Bre99b] ———, *Une remarque sur les représentations locales p -adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. soc. math. France **127** (1999), 459–472
- [Bre00] ———, *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549
- [Bre02] ———, *Integral p -adic Hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80
- [Con99] B. Conrad, *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math. **119** (1999), 239–320
- [Fal92] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82
- [Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144
- [FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608
- [Fon75] J.M. Fontaine, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1423–1425
- [Fon83] ———, *Cohomologie étale de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adique*, Lecture notes in math. **1016** (1983), 86–108, 113–184
- [Fon94a] ———, *Le corps des priodes p -adiques*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [Fon94b] ———, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184
- [Kat87] K. Kato, *On p -adic vanishing cycles*, Advanced Study in Pure Math. **10** (1987), 207–251

- [Ray74] M. Raynaud, *Schmas en groupes de type (p, \dots, p)* , Bull. Soc. math. France **102** (1974), 241–280
- [Ser72] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inventiones math. **15** (1972), 259–331
- [Tsu99] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inventiones math. **137** (1999), 233–411
- [Wac97] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240