



**HAL**  
open science

# Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques adiabatiques : Interactions entre les bandes spectrales d'un opérateur périodique

Frédéric Klopp, Alexandre Fedotov

► **To cite this version:**

Frédéric Klopp, Alexandre Fedotov. Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques adiabatiques : Interactions entre les bandes spectrales d'un opérateur périodique. 2004. hal-00001381

**HAL Id: hal-00001381**

**<https://hal.science/hal-00001381v1>**

Preprint submitted on 30 Mar 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER QUASI-PÉRIODIQUES ADIABATIQUES : INTERACTIONS ENTRE LES BANDES SPECTRALES D'UN OPÉRATEUR PÉRIODIQUE

ALEXANDRE FEDOTOV AND FRÉDÉRIC KLOPP

RÉSUMÉ. This paper is devoted to the description of our recent results on the spectral behavior of one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators. The specific operator we study is a slow periodic perturbation of an incommensurate periodic Schrödinger operator, and we are interested in energies where the perturbation creates a strong interaction between two consecutive bands of the background periodic operator. We describe the location of the spectrum and its nature and discuss the various new resonance phenomena due to the interaction of the spectral bands of the unperturbed periodic operator.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous décrivons nos résultats récents sur la théorie spectrale d'une classe d'opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques adiabatiques sur la droite réelle. Ces opérateurs sont des perturbations périodiques lentes d'opérateurs périodiques. Nous étudions le spectre à des énergies auxquelles la perturbation lente crée une interaction forte entre deux bandes spectrales consécutives de l'opérateur périodique non perturbé. Nous décrivons le lieu et la nature du spectre ; nous nous intéressons plus particulièrement à différents phénomènes de résonance engendrés par l'interaction entre les bandes spectrales de l'opérateur périodique non perturbé.

## 0. INTRODUCTION

Nous analysons le spectre de la famille d'opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques

$$(0.1) \quad H_{\zeta, \varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \alpha \cos(\varepsilon x + \zeta),$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous supposons que

- (H1) :  $V$  est une fonction réelle de la variable réelle qui est 1-périodique, de carré localement intégrable et qui n'est pas constante ;
- (H2) :  $\varepsilon$  est un nombre positif qui, comme son nom le suggère, sera choisi petit ; de plus, nous supposons que  $2\pi/\varepsilon$  est irrationnel ;
- (H3) :  $\zeta$  est un paramètre réel servant en particulier à indexer la famille d'équations ;
- (H4) :  $\alpha$  est un paramètre strictement positif qui restera fixé dans la plus grande partie de l'exposé.

L'opérateur (0.1) est une perturbation lente de l'opérateur de Schrödinger périodique

$$(0.2) \quad H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34E05, 34E20, 34L05.

*Key words and phrases.* équation de Schrödinger quasi-périodique, puits microlocaux résonants, spectre purement ponctuel, spectre absolument continu, méthode WKB complexe, matrice de monodromie.

agissant sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Les résultats que nous allons décrire sont principalement tirés de [4, 5] et font suite à une série d'articles consacrés à la même famille d'opérateurs [10, 7, 8]. Ces travaux se fondent sur l'analyse de l'équation de monodromie pour la famille d'opérateurs quasi-périodiques (0.1). La matrice monodromie a été définie dans [10]; c'est une généralisation non triviale de celle utilisée pour l'étude des équations aux différences finies, voir [2]. Pour étudier cette matrice de monodromie, nous avons développé une nouvelle méthode asymptotique dans [6] et [9].

Dans nos travaux précédents, il a déjà été observé que la position relative de la *fenêtre spectrale*  $\mathcal{F}(E) := [E - \alpha, E + \alpha]$  par rapport au spectre de  $H_0$  joue un rôle crucial dans la détermination des caractéristiques spectrales de  $H_{\zeta, \varepsilon}$  à l'énergie  $E$ .

Dans cet article, nous supposons que cette position est celle décrite dans la figure 1; dans cette figure, la fenêtre spectrale est représentée au-dessus des bandes spectrales de  $H_0$ . On se donne donc deux bandes spectrales consécutives séparées par une unique lacune et on considère l'intervalle des énergies telles que  $\mathcal{F}(E)$  couvre partiellement chacune des bandes spectrales et couvre totalement la lacune entre ces deux bandes.

Décrivons maintenant brièvement l'heuristique qui sous-tend nos résultats; le reste du texte sera dévolu à un exposé précis de ces résultats.

Soit  $\mathbf{E}(\kappa)$  la relation de dispersion associée à  $H_0$  (voir la section 1.2); considérons les *variétés caractéristiques réelle et complexe*, respectivement  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  et  $\Gamma$ , définies par

$$(0.3) \quad \Gamma_{\mathbb{R}} := \{(\kappa, \zeta) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{E}(\kappa) + \alpha \cdot \cos(\zeta) = E\},$$

$$(0.4) \quad \Gamma := \{(\kappa, \zeta) \in \mathbb{C}^2, \mathbf{E}(\kappa) + \alpha \cdot \cos(\zeta) = E\}.$$

Ces courbes sont  $2\pi$ -périodiques dans les directions des  $\kappa$  et des  $\zeta$ ; elles sont décrites dans la partie 4. Les composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  sont appelées *branches réelles* de la variété caractéristique (0.4).

Considérons maintenant  $J$ , un intervalle d'énergies tel que, pour  $E \in J$ , notre hypothèse sur la position relative de  $\mathcal{F}(E)$  par rapport au spectre de  $H_0$  est vérifiée i.e. on est dans le cas de la figure 1. Dans ce cas, la courbe  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  consiste en une réunion infinie de composantes connexes chacune homéomorphe à un tore; il y a exactement deux telles composantes connexes par cellule de périodicité (voir la figure Fig. 2). Sur cette figure, chaque carré correspond à une cellule de périodicité du symbole  $(\zeta, \kappa) \mapsto \mathbf{E}(\kappa) + \alpha \cdot \cos(\zeta)$ . Les composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  sont représentées par une ligne en trait plein; on les note  $\gamma_0$  et  $\gamma_{\pi}$  (une définition précise est donnée dans la section 4.1).

Les lignes en pointillés représentent des lacets dans  $\Gamma$  qui joignent certaines composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  (une définition précise est donnée dans la section 4.2); on distingue les lacets dits « horizontaux » et ceux dits « verticaux ». On distingue deux lacets horizontaux particuliers notés  $\gamma_{h,0}$  et  $\gamma_{h,\pi}$  (ou, plus précisément, deux classes d'homotopie représentées chacune par un tel lacet horizontal); le lacet  $\gamma_{h,0}$  (resp.  $\gamma_{h,\pi}$ ) joint  $\gamma_0$  à  $\gamma_{\pi} - (2\pi, 0)$  (resp.

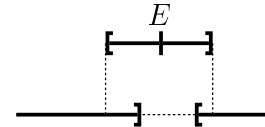


FIG. 1: « Bandes en interaction »

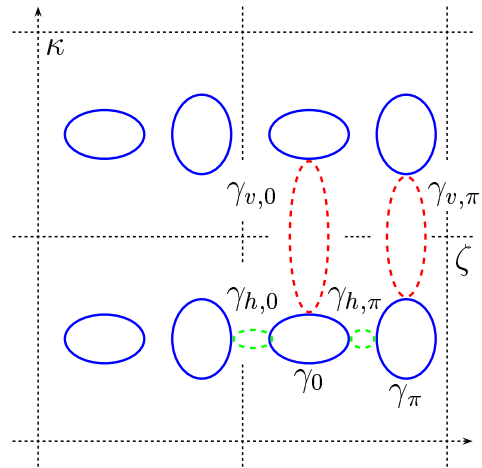


FIG. 2: L'espace des phases adiabatique

$\gamma_0$  à  $\gamma_\pi$ ). De même, on distingue deux lacets verticaux particuliers notés  $\gamma_{v,0}$  et  $\gamma_{v,\pi}$ ; le lacet  $\gamma_{v,0}$  (resp.  $\gamma_{v,\pi}$ ) joint  $\gamma_0$  à  $\gamma_0 + (0, 2\pi)$  (resp.  $\gamma_\pi$  à  $\gamma_\pi + (0, 2\pi)$ ) (les définitions précises sont données dans la section 4.2).

L'heuristique semi-classique standard suggère le comportement spectral suivant. À chacun des lacets  $\gamma_0$  et  $\gamma_\pi$  est associée une phase obtenue en intégrant la 1-forme fondamentale de la variété  $\Gamma$  le long de ce lacet; on note ces phases respectivement  $\Phi_0 = \Phi_0(E)$  and  $\Phi_\pi = \Phi_\pi(E)$ . Chacune de ces phases définit une condition de quantification

$$(0.5) \quad \frac{1}{\varepsilon}\Phi_0(E) = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } \frac{1}{\varepsilon}\Phi_\pi(E) = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chacune de ces conditions définit une suite de valeurs d'énergie, disons  $(E_0^{(l)})_l$  et  $(E_\pi^{(l')})_{l'}$ , dans  $J$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  dans  $J$  devrait alors être située dans un voisinage de ces énergies.

D'autre part, à chacun des lacets « complexes »  $\gamma_{0,h}$ ,  $\gamma_{\pi,h}$ ,  $\gamma_{0,v}$  et  $\gamma_{\pi,v}$  est associée une action obtenue comme précédemment en intégrant la 1-forme fondamentale de  $\Gamma$  le long du dit lacet. Pour  $a \in \{0, \pi\}$  et  $b \in \{v, h\}$ , on appelle  $S_{a,b}$  l'action associée à  $\gamma_{a,b}$ . Lorsque  $E \in \mathbb{R}$ , toutes ces actions sont réelles. On oriente les contours d'intégration de façon à ce qu'elles soient toutes positives. Finalement, on définit des coefficients de tunnel par

$$(0.6) \quad t_{a,b} = e^{-S_{a,b}/\varepsilon}, \quad a \in \{0, \pi\}, \quad b \in \{v, h\}.$$

Lorsque, dans une cellule de périodicité, la variété caractéristique réelle consiste en un unique tore (voir [10]), on sait que le spectre est contenu dans une suite d'intervalles. Chacun de ces intervalles est voisin d'une solution de la condition de quantification associé au tore en question. La longueur de ces intervalles est de l'ordre du plus grand des coefficients de tunnel associé à ce tore. La nature du spectre est déterminée par le quotient du coefficient de tunnel vertical (i.e. celui d'indice  $v$ ) et du coefficient de tunnel horizontal (i.e. celui d'indice  $h$ ) selon la règle suivante : si le quotient est grand, le spectre est singulier; si le quotient est petit, le spectre est absolument continu, voir [10].

Dans notre cas, il faut de plus tenir compte de l'interaction entre les deux tores présents dans la même cellule de périodicité. Comme dans le cas du « double puits » (voir [19, 13]), cet effet ne joue un rôle important que lorsque deux énergies, engendrées par chacun des deux tores, sont suffisamment proches l'une de l'autre. En fait, l'effet de cette interaction est manifeste dès que les énergies quantifiées par (0.5) sont exponentiellement proches l'une de l'autre.

Considérons d'abord le cas des énergies non résonantes. Soit  $E_0$  une énergie satisfaisant à la condition de quantification définie par  $\Phi_0$ . Supposons de plus qu'une distance d'ordre au moins  $\varepsilon^n$  sépare  $E_0$  des valeurs d'énergie satisfaisant à la condition de quantification définie par  $\Phi_\pi$ .

À ces énergies, les états du système ne « voient » pas l'autre réseau de tores, ceux obtenus par translation de  $\gamma_\pi$ , pas plus qu'ils ne « sentent » les coefficients de tunnel associés à ces tores,  $t_{v,\pi}$ . Tout se passe comme s'il n'existait qu'un seul tore par cellule de périodicité. Près de  $E_0$ , le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  est situé dans un intervalle de longueur de l'ordre du maximum des coefficients de tunnel  $t_{v,0}$  et  $t_h = t_{h,0}t_{h,\pi}$  (voir la section 4.3). Ainsi, la nature du spectre est déterminée par le quotient  $t_{v,0}/t_h$ .

Clairement, la situation est symétrique pour des énergies proches seulement de solutions de la condition de quantification déterminée par  $\Phi_\pi$ .

Dans le domaine des énergies non résonantes, le spectre est contenu dans deux suites d'intervalles exponentiellement petits; pour chaque suite, la nature du spectre est obtenue

en comparant le coefficient de tunnel vertical à celui horizontal pour le tore « engendrant » cette suite en suivant l’heuristique établie dans [10]. Comme les coefficients de tunnel pour les deux tores sont « indépendants », il se peut que le spectre dans l’une des suites d’intervalles soit singulier et que dans l’autre, il soit absolument continu. Si tel est le cas, on obtient de nombreuses transitions d’Anderson (i.e. de nombreux seuils séparant du spectre absolument continu de spectre singulier), voir la figure 5(b).

Dans le cas d’une énergie  $E$  résonante, i.e. qui vérifie « presque » la condition de quantification pour chacun des deux tores  $\gamma_0$  et  $\gamma_\pi$ , on doit prendre en compte l’interaction entre ces deux tores ; cet effet est analogue à celui observé dans le cas des puits multiples, en particulier, dans le cas du double puits symétrique. Dans le cas du double puits, on observe le phénomène bien connu de répulsion de niveaux (« splitting »), voir [19, 12, 13]. Donc, dans notre cas, il faut s’attendre à voir une répulsion des intervalles contenant le spectre. La nature du spectre est, elle aussi, affectée par les résonances. Pour simplifier la discussion, supposons que  $t_{v,0} = t_{v,\pi} \equiv t_v$ . Dans le cas où  $E$  vérifie en même temps les deux conditions de quantification (0.5), les deux réseaux de tores forment un seul réseau. Pour ce nouveau réseau, les tores des deux types jouent le même rôle, et le coefficient de tunnel « horizontal » est égal à  $t_{h,0} = t_{h,\pi} = \sqrt{t_h}$ . Donc, la nature du spectre est définie par le quotient  $t_v/\sqrt{t_h}$  qui est exponentiellement petit par rapport au quotient  $t_v/t_h$  définissant la nature du spectre dans le cas des énergies non résonantes. Donc, si dans le cas « non résonant », le spectre était singulier, dans le cas « résonant », il peut devenir absolument continu. On peut donc trouver des transitions d’Anderson dues aux résonances, voir la figure 5(a). En général, on peut dire que les états tendent à devenir moins localisés. On peut donc s’attendre à voir des variations très marquées dans le comportement de l’exposant de Liapounoff (qui mesure la vitesse de décroissance des fonction propres).

Dans le cas des énergies résonantes, on voit donc un ensemble de phénomènes spectraux beaucoup plus riche que dans le cas des énergies non résonantes, phénomènes dont la description fait l’objet de cet article.

Il y a, en particulier, un jeu subtil entre la répulsion et le comportement de l’exposant de Liapounoff. On voit une répulsion forte sur la plupart des intervalles résonants sur lesquels l’exposant de Liapounoff s’annule : dans ce cas-là, il reste toujours une lacune entre les intervalles résonants. Ces intervalles contiennent majoritairement du spectre absolument continu et les états correspondants sont « étendus ».

Pour les intervalles où l’exposant de Liapounoff est positif et d’ordre 1, la répulsion est négligeable : la lacune entre les intervalles résonants peut disparaître. Remarquons que, sur les intervalles où le Liapounoff est positif, il n’y a que du spectre singulier et les états correspondants sont « localisés ».

Finalement, on voit une répulsion des intervalles sur lesquels l’exposant de Liapounoff devient anormalement petit (les états dans ces intervalles ne sont que « légèrement » localisés) : dans ce cas aussi, il reste toujours une petite lacune entre les intervalles résonants.

## 1. L’OPÉRATEUR PÉRIODIQUE

Dans cette partie, nous décrivons la théorie spectrale de l’opérateur de Schrödinger périodique  $H_0$  (agissant sur  $L^2(\mathbb{R})$ ) défini dans (0.2) (pour plus de précisions ainsi que des preuves le lecteur pourra se reporter à [3, 11]).

1.1. **Son spectre.** Le spectre de l'opérateur (0.2) consiste en une réunion d'intervalles de l'axe réel  $[E_{2n+1}, E_{2n+2}]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pour lesquels

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \leq \dots , \\ E_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Ce spectre est purement absolument continu. Les points  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont les valeurs propres de l'opérateur obtenu en considérant le polynôme différentiel (0.2) agissant sur  $L^2([0, 2])$  avec des conditions au bord périodiques. Les intervalles introduits ci-dessus sont les *bandes spectrales*, et les intervalles  $(E_{2n}, E_{2n+1})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sont appelés *lacunes spectrales*. Lorsque  $E_{2n} < E_{2n+1}$ , on dit que la  $n$ -ième lacune est *ouverte*, et, lorsque  $[E_{2n-1}, E_{2n}]$  est séparé du reste du spectre par des lacunes ouvertes, la  $n$ -ième bande est dite *isolée*.

Dorénavant, pour simplifier notre exposé, nous supposons que

**(O):** toutes les lacunes du spectre de  $H_0$  sont ouvertes.

1.2. **La quasi-impulsion de Bloch.** Soit  $x \mapsto \psi(x, E)$  une solution non triviale de l'équation de Schrödinger périodique  $H_0\psi = E\psi$  pour laquelle il existe  $\mu \in \mathbb{C}^*$  telle que  $\psi(x+1, E) = \mu \psi(x, E)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\psi$  est *solution de Bloch* de l'équation, et que  $\mu = \mu(E)$  est le *multipliateur de Floquet* associé à  $\psi$ . On peut écrire  $\mu(E) = \exp(ik(E))$ ; la fonction  $E \mapsto k(E)$  est appelée *quasi-impulsion de Bloch*. La solution de Bloch  $\psi$  s'écrit donc  $\psi(x, E) = e^{ik(E)x} p(x, E)$  où  $x \mapsto p(x, E)$  est une fonction 1-périodique.

La fonction  $E \mapsto k(E)$  est analytique et multi-valuée; ses points de branchement sont les points  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ . Ils sont tous de type « racine carré ».

La relation de dispersion  $k \mapsto \mathbf{E}(k)$  est l'inverse de la quasi-impulsion de Bloch.

Soit  $D$ , un domaine simplement connexe ne contenant pas de points de branchement du quasi-impulsion de Bloch  $k$ . Sur  $D$ , fixons  $k_0$ , une détermination continue (donc analytique) de  $k$ . Toutes les autres déterminations continues de  $k$  sur  $D$  sont décrites par

$$(1.1) \quad k_{\pm, l}(E) = \pm k_0(E) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $\mathbb{C}_+$ , le demi-plan complexe supérieur. Il existe  $k_p$ , une détermination analytique de  $k$  qui envoie de façon conforme  $\mathbb{C}_+$  sur le quadrant  $\{k \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} k > 0, \operatorname{Re} k > 0\}$  coupé le long d'intervalles compacts du type  $\pi l + iI_l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ ,  $I_l \subset \mathbb{R}$ . La détermination  $k_p$  se prolonge continuellement à  $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ . Elle est réelle et croissante le long du spectre de  $H_0$ ; elle envoie la bande spectrale  $[E_{2n-1}, E_{2n}]$  sur l'intervalle  $[\pi(n-1), \pi n]$ . Sur les lacunes ouvertes,  $\operatorname{Re} k_p$  est constante, et  $\operatorname{Im} k_p$  est positive et admet exactement un maximum; ce dernier est non dégénéré.

Pour obtenir davantage de renseignements sur la quasi-impulsion de Bloch, le lecteur pourra consulter [16, 17, 11]

1.3. **La fonctionnelle  $\Lambda_n(V)$ .** Nous décrivons maintenant une fonctionnelle du potentiel périodique  $V$  importante pour l'étude spectrale de (0.1).

Pour  $E \in \mathbb{C}_+$ , il existe deux solutions de Bloch  $x \mapsto \psi_{\pm}(x, E)$  de la forme

$$\psi_{\pm}(x, E) = e^{\pm ik_p(E)x} p_{\pm}(x, E)$$

où  $x \mapsto p_{\pm}(x, E)$  sont des fonctions 1-périodiques. On peut normaliser les solutions de Bloch par la condition  $\psi_{\pm}(0, E) = 1$ . Les solutions normalisées par cette condition sont

définie d'une façon unique; elles sont analytique en  $E \in \mathbb{C}_+$ . Considérons la fonction

$$(1.2) \quad \omega(E) = -\frac{\int_0^1 p_-(x, E) \frac{\partial p_+}{\partial E}(x, E) dx}{\int_0^1 p_-(x, E) p_+(x, E) dx}.$$

Elle a été étudiée dans [9]. Définie sur  $\mathbb{C}_+$ , elle peut être prolongée analytiquement à  $\mathbb{C}$  privé du complémentaire du spectre de  $H_0$  dans l'axe réel, c'est-à-dire à  $\mathbb{C}$  privé des intervalles  $(-\infty, E_1]$  et  $[E_{2j}, E_{2j+1}]$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $L_n = ]E_{2n}, E_{2n+1}[$ , une lacune du spectre de  $H_0$ . Alors, à cette lacune, on associe le nombre  $\Lambda_n$  défini par

$$(1.3) \quad \Lambda_n = \frac{1}{2} \left( \theta_n + \frac{1}{\theta_n} \right), \quad \theta_n = \exp \left( \oint_{g_n} \omega(E) dE \right).$$

où  $g_n$  est le lacet entourant la lacune  $L_n$ .

Fixons  $n$  et considérons  $\Lambda_n$  comme une fonctionnelle du potentiel 1-périodique  $V$ . Pour cela, on identifie les fonctions 1-périodiques de carré localement intégrable à  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$  et on démontre le résultat suivant

**Théorème 1.1** ([5]). *La fonctionnelle  $V \mapsto \Lambda_n(V)$  a les propriétés suivantes :*

- pour tout  $V \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , on a  $\Lambda_n(V) \geq 1$ ;
- sur un ouvert dense de  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , on a  $\Lambda_n(V) > 1$ ;
- si  $V$  est pair, alors  $\Lambda_n(V) = 1$ ;
- elle est invariante par l'action du groupe des translations  $(\tau_s)_{s \in \mathbb{R}}$  où  $\tau_s(V)(\cdot) = V(\cdot + s)$ .

On peut donc considérer  $\Lambda_n(V)$  comme une mesure de la parité du potentiel  $V$ .

## 2. UNE HYPOTHÈSE « GÉOMÉTRIQUE » SUR LA RÉGION D'ÉNERGIE

Nous pouvons maintenant décrire la région des énergies où nous allons étudier le spectre de (0.1).

La *fenêtre spectrale centrée en  $E$*  est l'intervalle  $\mathcal{F}(E) = [E - \alpha, E + \alpha]$ . C'est l'image de  $\mathbb{R}$  par l'application  $\zeta \mapsto E - \alpha \cos(\zeta)$ .

Nous considérons les intervalles compacts  $J \subset \mathbb{R}$  tels que, pour  $E \in J$ , la fenêtre  $\mathcal{F}(E)$  contient exactement deux bords de bandes spectrales de  $H_0$  provenant de deux bandes distinctes (voir la figure 1) c'est-à-dire nous supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que, pour  $E \in J$ , on a

$$(BEI) : [E_{2n}, E_{2n+1}] \subset \dot{\mathcal{F}}(E) \text{ et } \mathcal{F}(E) \subset ]E_{2n-1}, E_{2n+2}[.$$

où  $\dot{\mathcal{F}}(E)$  désigne l'intérieur de  $\mathcal{F}(E)$ .

**Remarque 2.1.** Comme toutes les lacunes spectrales de  $H_0$  sont ouvertes, comme leur longueur tend vers 0 et que la longueur des bandes spectrales tend vers l'infini, on voit que, pour toute valeur non nulle de  $\alpha$ , l'hypothèse (BEI) est vérifiée dans toute lacune d'énergie assez grande; il suffit que cette lacune soit de longueur inférieure à  $2\alpha$ .

Dans toute la suite,  $J$  est un intervalle compact vérifiant (BEI) et  $\Lambda_n$  désigne le coefficient défini dans la section 1.3 pour la lacune  $]E_{2n}, E_{2n+1}[$  de l'hypothèse (BEI).

### 3. L'IMPULSION COMPLEXE

Pour décrire nos résultats, il nous faut introduire l'impulsion complexe, quantité centrale de la méthode WKB complexe adiabatique construite dans [6, 9]. Pour cela, nous fixons une valeur d'énergie  $E$  dans  $J$ .

On définit l'impulsion complexe  $\zeta \mapsto \kappa(\zeta)$  par

$$(3.1) \quad \kappa(\zeta) = k(E - \alpha \cos(\zeta)).$$

Remarquons que (3.1) est équivalent à la relation (0.4). À l'instar de  $k$ ,  $\kappa$  est analytique et multi-valuée. Les points de branchements de  $k$  étant les points  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , ceux de  $\kappa$  vérifient

$$(3.2) \quad E - \alpha \cos(\zeta) = E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'ensemble de ces points de branchement est symétrique par rapport à l'axe réel et est  $2\pi$ -périodique en  $\zeta$ . Comme  $E$  est réel, tous les points de branchements sont situés  $\arccos(\mathbb{R})$ , la pré-image de  $\mathbb{R}$  par  $\alpha \cdot \cos$ . L'ensemble  $\arccos(\mathbb{R})$  est formé de l'axe réel et de tous les translatés de l'axe imaginaire par un multiple entier de  $\pi$ .

À l'instar des points de branchement de la quasi-impulsion de Bloch, les points de branchements de  $\kappa$  sont de type « racine carré » sauf s'ils coïncident avec l'un des points  $l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ; sous l'hypothèse (BEI), cette dernière possibilité est exclue.

Décrivons maintenant ces points de branchement. Comme le cosinus est analytique réel, pair et  $2\pi$ -périodique, il suffit de décrire les points de branchement dans la bande  $\{\zeta; \text{Im } \zeta \geq 0, 0 \leq \text{Re } \zeta \leq \pi\}$ ; tous les autres points de branchement sont ensuite obtenus par les translations d'argument  $2n\pi$  (pour  $n$  entier relatif), par réflexion par rapport à l'axe réel et par symétrie par rapport à l'origine.

La quasi-impulsion complexe  $\kappa$  a exactement deux points de branchements dans  $[0, \pi[$ . En accord avec (3.2), nous les notons  $\zeta_{2n}$  et  $\zeta_{2n+1}$ . Ils vérifient  $\zeta_{2n} < \zeta_{2n+1}$  (voir la figure 3). Comme  $\zeta \mapsto \cos(\zeta)$  est symétrique par rapport à la droite  $\text{Re } \zeta = \pi$ , les points de branchements de  $\kappa$  dans  $[\pi, 2\pi[$  sont les points  $2\pi - \zeta_{2n}$  et  $2\pi - \zeta_{2n+1}$ . Les points de branchement hors de l'axe réel sont situés sur les droites  $n\pi + i\mathbb{R}$ ,  $n \in \{0, 1\}$ . En accord avec (3.2), ceux sur  $i\mathbb{R}$  sont nommés  $(\zeta_j)_{1 \leq j \leq 2n-1}$ , et on les ordonne de façon à ce que  $0 < \text{Im } \zeta_{2n-1} < \dots < \text{Im } \zeta_1$ . De même, ceux sur  $\pi + i\mathbb{R}$  seront notés  $(\zeta_j)_{2n+2 \leq j}$  ordonnés de façon à ce que  $0 < \text{Im } \zeta_{2n+2} < \text{Im } \zeta_{2n+3} < \dots$  (voir la figure 3).

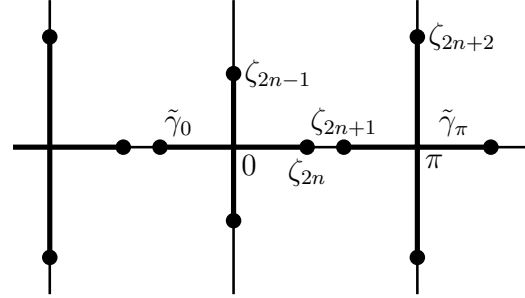


FIG. 3: Les points de branchements

### 4. LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

Nous décrivons maintenant  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  et  $\Gamma$  définies en (0.3) et (0.4). Nous ne décrivons pas la totalité de la topologie de  $\Gamma$  mais seulement certains lacets qui sont utiles dans notre étude.

**4.1. La variété caractéristique réelle.** Cette variété est  $2\pi$ -périodique en  $\kappa$  et en  $\zeta$ . Elle est symétrique par rapport aux droites  $\zeta = \pi n$  et  $\kappa = \pi m$  pour  $n$  et  $m$  entiers relatifs.

Décrivons la partie de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  contenue dans une cellule de périodicité. L'application  $\mathcal{E} : \zeta \mapsto E - \alpha \cos(\zeta)$  envoie l'intervalle  $[\zeta_{2n+1}, \pi]$  dans la bande spectrale  $[E_{2n+1}, E_{2n+2}]$ ,



l'intervalle  $[0, \zeta_{2n}]$  dans la bande spectrale  $[E_{2n-1}, E_{2n}]$ , et l'intervalle  $]\zeta_{2n}, \zeta_{2n+1}[$  dans la lacune  $]E_{2n}, E_{2n+1}[$ . Ainsi,  $\kappa_p(\zeta) = k_p(\mathcal{E}(\zeta))$  est réelle sur les intervalles  $[\zeta_{2n+1}, \pi]$  et  $[0, \zeta_{2n}]$ , et elle est de partie imaginaire positive sur  $]\zeta_{2n}, \zeta_{2n+1}[$ .

Cela implique que, dans la bande  $\{0 \leq \text{Re } \zeta \leq \pi\}$ , toutes les composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  sont situées « au-dessus » des intervalles  $[\zeta_{2n+1}, \pi]$  et  $[0, \zeta_{2n}]$ .

Les graphes de  $\kappa_p$  sur ces intervalles sont contenus dans certaines composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ . Remarquons que  $\kappa_p$  est monotone sur chacun des intervalles  $[\zeta_{2n+1}, \pi]$  et  $[0, \zeta_{2n}]$  et que

$$\pi(n-1) < \kappa_p(0) < \kappa_p(\zeta_{2n}) = \pi n = \kappa_p(\zeta_{2n+1}) < \kappa_p(\pi) < \pi(n+1).$$

Les symétries de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  impliquent que chacun de ces graphes est un « quart » d'une des deux composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ . La composante connexe de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  correspondant au graphe de  $\kappa_p$  sur  $[\zeta_{2n+1}, \pi]$ , appelons la  $\gamma_{\pi}$ , est symétrique par rapport à la droite  $\zeta = \pi$ ; celle correspondant au graphe de  $\kappa_p$  sur  $[0, \zeta_{2n}]$ , appelons la  $\gamma_0$ , est symétrique par rapport à la droite  $\zeta = 0$ . Les deux composantes sont symétriques par rapport à la droite  $\kappa = \pi n$  et elles sont homéomorphes au cercle.

Toutes les autres composantes connexes de la variété caractéristique réelle sont obtenues en translatant  $\gamma_0$  et  $\gamma_{\pi}$  d'un multiple entier de  $2\pi$  dans les directions verticales ou horizontales (i.e. en leur appliquant les translations de vecteur  $(2\pi n, 2\pi m)$  pour  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ). Sur la figure 2, nous avons représenté en trait plein quelques périodes d'un exemple de variété caractéristique réelle.

Chaque cellule de périodicité contient exactement deux composantes connexes de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ .

**4.2. Les lacets sur la variété caractéristique complexe.** Soit  $\Pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , la projection  $\Pi(\kappa, \zeta) = \zeta$ .

L'impulsion complexe se prolonge analytiquement le long des lacets  $\tilde{\gamma}_{h,0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{h,\pi}$ ,  $\tilde{\gamma}_{v,0}$  et  $\tilde{\gamma}_{v,\pi}$  (voir la figure 4.2). Donc, ces lacets sont les projections (i.e. image par  $\Pi$ ) sur le plan des  $\zeta$  de lacets de  $\Gamma$ ; appelons-les respectivement  $\gamma_{h,0}$ ,  $\gamma_{h,\pi}$ ,  $\gamma_{v,0}$  et  $\gamma_{v,\pi}$  (i.e.  $\tilde{\gamma}_{h,0} = \Pi(\gamma_{h,0})$ ,  $\tilde{\gamma}_{h,\pi} = \Pi(\gamma_{h,\pi})$ , etc). Nous les avons représenté sur la figure 2. Le lacet  $\gamma_{h,\pi}$  connecte les branches réelles  $\gamma_{\pi}$  et  $\gamma_0$ ; le lacet  $\gamma_{h,0}$  connecte les branches réelles  $\gamma_0$  et  $\gamma_{\pi} - (2\pi, 0)$ . Le lacet  $\gamma_{v,\pi}$  connecte les branches réelles  $\gamma_{\pi}$  et  $\gamma_{\pi} + (0, 2\pi)$ ; le lacet  $\gamma_{v,0}$  connecte les branches réelles  $\gamma_0$  et  $\gamma_0 + (0, 2\pi)$ .

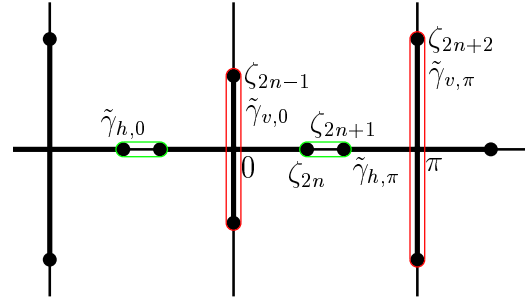


FIG. 4: Les lacets pour les phases

**4.3. Les intégrales de phase, les intégrales d'action et les coefficients de tunnel.** Soit  $\sigma \in \{0, \pi\}$ . Au lacet  $\gamma_{\sigma}$ , nous associons l'intégrale de phase  $\Phi_{\sigma}$  définie par

$$(4.1) \quad \Phi_{\sigma}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_{\sigma}} \kappa d\zeta.$$

La fonction  $E \mapsto \Phi_{\sigma}(E)$  est analytique réelle sur  $J$ . Elle ne s'annule pas pour  $E$  dans  $J$ . Le sens d'intégration est choisi de façon à ce que  $\Phi_{\sigma}(E)$  soit positive. On montre alors qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$(4.2) \quad \forall E \in J, \quad \Phi'_0(E) < -c \quad \text{et} \quad \Phi'_{\pi}(E) > c.$$

Au lacet  $\gamma_{v,\sigma}$ , nous associons l'intégrale d'action verticale  $S_{v,\sigma}$  définie par

$$(4.3) \quad S_{v,\sigma}(E) = -\frac{i}{2} \oint_{\gamma_{v,\sigma}} \kappa d\zeta,$$

et le coefficient de tunnel vertical

$$(4.4) \quad t_{v,\sigma}(E) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_{v,\sigma}(E)\right).$$

La fonction  $E \mapsto S_{v,\sigma}(E)$  est analytique réelle et elle ne s'annule pas sur  $J$ . Par définitions, le sens d'intégration est choisi de façon à ce que  $S_{v,\sigma}(E)$  soit positive.

L'indice  $\sigma$  étant choisi comme ci-dessus, nous définissons l'intégrale d'action horizontale  $S_{h,\sigma}$  par

$$(4.5) \quad S_{h,\sigma}(E) = -\frac{i}{2} \oint_{\gamma_{h,\sigma}} \kappa(\zeta) d\zeta.$$

La fonction  $E \mapsto S_{h,\sigma}(E)$  est analytique réelle et elle ne s'annule pas sur  $J$ . Par définition, nous choisissons l'orientation du contour d'intégration afin que  $S_{h,\sigma}(E)$  soit positive. Le coefficient de tunnel horizontal est défini par

$$(4.6) \quad t_{h,\sigma}(E) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_{h,\sigma}(E)\right).$$

Comme le cosinus est une fonction paire, on calcule

$$(4.7) \quad S_{h,0}(E) = S_{h,\pi}(E) \quad \text{et} \quad t_{h,0}(E) = t_{h,\pi}(E).$$

On définit

$$(4.8) \quad S_h(E) = S_{h,0}(E) + S_{h,\pi}(E) \quad \text{et} \quad t_h(E) = t_{h,0}(E) \cdot t_{h,\pi}(E).$$

## 5. UNE FAMILLE ERGODIQUE

Avant discuter les propriétés spectrales de  $H_{\zeta,\varepsilon}$ , nous rappelons quelques résultats généraux bien connus de la théorie spectrale des opérateurs quasi-périodiques.

Comme  $2\pi/\varepsilon$  est supposé irrationnel, la fonction  $x \mapsto V(x-z) + \alpha \cos(\varepsilon x)$  est quasi-périodique en  $x$ , et les opérateurs définis par (0.1) forment une famille ergodique (voir [18]).

L'ergodicité entraîne immédiatement les conséquences suivantes :

- (1) le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  est presque sûrement indépendant de  $\zeta$  ([18]); en fait, dans le cas des opérateurs quasi-périodiques, il est indépendant de  $\zeta$  ([1]);
- (2) les composantes spectrales, à savoir les spectres absolument continu, singulier continu et purement ponctuel (c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des valeurs propres) sont presque sûrement indépendantes de  $\zeta$  ([18]);
- (3) le spectre absolument continu ne dépend pas de  $\zeta$  ([15]);
- (4) le spectre discret est vide ([18]);
- (5) l'exposant de Liapounoff existe pour presque tout  $\zeta$  et n'en dépend pas ([18]); il est défini de la façon suivante : soit  $x \mapsto \psi(x)$ , la solution du problème de Cauchy

$$H_{\zeta,\varepsilon}\psi = E\psi, \quad \psi|_{x=0} = 0, \quad \psi'|_{x=0} = 1,$$

la limite suivante existe et définit l'exposant de Liapounoff

$$\Theta(E) = \Theta(E, \varepsilon) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \sqrt{|\psi(x, E, \zeta)|^2 + |\psi'(x, E, \zeta)|^2} \right)}{|x|}.$$

- (6) le spectre absolument continu est la clôture essentielle de l'ensemble des énergies auxquelles l'exposant de Liapounoff s'annule (Théorème de Ishii-Pastur-Kotani ([18]))
- (7) la densité d'états intégrée existe pour presque tout  $\zeta$  et n'en dépend pas ([18]); elle est définie de la façon suivante : pour  $L > 0$ , soit  $H_{\zeta, \varepsilon; L}$ , l'opérateur  $H_{\zeta, \varepsilon}$  restreint à l'intervalle  $[-L, L]$  avec les conditions de Dirichlet au bord ; pour presque tout  $\zeta$ , pour  $E \in \mathbb{R}$ , la limite suivante existe

$$N(E) = N(E, \varepsilon) := \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\#\{\text{valeurs propres de } H_{\zeta, \varepsilon; L} \text{ inférieures à } E\}}{2L}$$

et ne dépend pas de  $\zeta$  ; c'est la densité d'états intégrée de  $H_{\zeta, \varepsilon}$ .

- (8) le spectre de  $H_{\zeta, \varepsilon}$  est l'ensemble des points de croissance stricte de la densité d'états intégrée.

Après ces rappels de propriétés générales des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques générales, revenons au modèle (0.1).

## 6. UNE DESCRIPTION GROSSIÈRE DU LIEU DU SPECTRE DANS $J$

Nous supposons dorénavant, et ce dans toute la suite du texte, que les hypothèses (H), (O) sont satisfaites et que  $J$  est un intervalle compact vérifiant (BEI). Nous supposons de plus que,

(T) : pour  $E \in J$ ,

$$2\pi \cdot \min(\operatorname{Im} \zeta_{2n-2}(E), \operatorname{Im} \zeta_{2n+3}(E)) > \max(S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E)).$$

Cette hypothèse est nécessaire pour obtenir les résultats les plus simples (voir [4] pour plus de détails). Elle est vérifiée s'il y a deux bandes consécutives assez proches l'une de l'autre et suffisamment éloignées du reste du spectre. Remarquons que les résultats de cet article restent vrais sous une hypothèse plus faible (mais moins explicite) que (T). Lorsque (T) n'est pas vérifiée, d'autres coefficients d'effet tunnel que ceux présentés dans la partie 4 peuvent entrer en jeu.

Soit

$$(6.1) \quad \delta_0 = \frac{1}{2} \inf_{E \in J} \min(S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E)) > 0.$$

On démontre

**Théorème 6.1.** *Fixons  $E_* \in J$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe  $V_* \subset \mathbb{C}$ , un voisinage de  $E_*$  indépendant de  $\varepsilon$ , et deux fonctions analytiques réelles  $E \mapsto \check{\Phi}_0(E, \varepsilon)$  et  $E \mapsto \check{\Phi}_\pi(E, \varepsilon)$ , définies dans  $V_*$  et vérifiant*

$$(6.2) \quad \check{\Phi}_0(E, \varepsilon) = \Phi_0(E) + o(\varepsilon), \quad \check{\Phi}_\pi(E, \varepsilon) = \Phi_\pi(E) + o(\varepsilon) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

telles que, si on définit les deux suites finies de points de  $J \cap V_*$ ,  $(E_0^{(l)})_l := (E_0^{(l)}(\varepsilon))_l$  et  $(E_\pi^{(l')})_{l'} := (E_\pi^{(l')}(\varepsilon))_{l'}$  par

$$(6.3) \quad \frac{1}{\varepsilon} \check{\Phi}_0(E_0^{(l)}, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \pi l \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} \check{\Phi}_\pi(E_\pi^{(l')}, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \pi l', \quad (l, l') \in \mathbb{N}^2,$$

alors, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, pour tout  $\zeta$  réel, le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  dans  $J \cap V_*$  est contenu dans la réunion des intervalles

$$(6.4) \quad I_0^{(l)} := E_0^{(l)} + [-e^{-\delta_0/\varepsilon}, e^{-\delta_0/\varepsilon}] \quad \text{et} \quad I_\pi^{(l')} := E_\pi^{(l')} + [-e^{-\delta_0/\varepsilon}, e^{-\delta_0/\varepsilon}]$$

c'est-à-dire

$$(6.5) \quad \sigma(H_{\zeta,\varepsilon}) \cap J \cap V_* \subset \left( \bigcup_l I_0^{(l)} \right) \cup \left( \bigcup_{l'} I_\pi^{(l')} \right).$$

Dans la suite pour simplifier les notations, on omettra la référence à  $\varepsilon$  dans les fonctions  $\check{\Phi}_0$  et  $\check{\Phi}_\pi$ .

D'après (4.2) et (6.2), il existe  $C > 0$  telle que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, les points définis en (6.3) vérifient

$$(6.6) \quad \frac{1}{C}\varepsilon \leq E_0^{(l)} - E_0^{(l-1)} \leq C\varepsilon, \quad l = L_0^- + 1, \dots, L_0^+$$

$$(6.7) \quad \frac{1}{C}\varepsilon \leq E_\pi^{(l')} - E_\pi^{(l'-1)} \leq C\varepsilon, \quad l' = L_\pi^- + 1, \dots, L_\pi^+.$$

De plus, pour  $\nu \in \{0, \pi\}$ , dans l'intervalle  $J \cap V_*$ , le nombre de points  $E_\nu^{(l)}$  est d'ordre  $1/\varepsilon$ .

On dira dans la suite que les points  $E_0^{(l)}$  (resp.  $E_\pi^{(l')}$ ), et, par extension, les intervalles  $I_0^{(l)}$  (resp.  $I_\pi^{(l')}$ ) qui y sont attachés, sont de type 0 (resp. de type  $\pi$ ).

Par (6.6) et (6.7), les intervalles de type 0 (resp.  $\pi$ ) sont disjoints et, tout intervalle de type 0 (resp.  $\pi$ ) rencontre au plus un intervalle de type  $\pi$  (resp. 0).

## 7. LA DESCRIPTION PRÉCISÉE DU SPECTRE DANS $J$

On va maintenant décrire le spectre dans l'un des intervalles définis dans le Théorème 6.1. Pour ce faire, il va falloir distinguer deux cas selon que cet intervalle, supposons le de type 0, rencontre ou non un intervalle de type  $\pi$ . Les intervalles de l'une des familles qui ne coupent aucun intervalle de l'autre famille seront dit *non-résonant*, les autres étant les intervalles *résonants*. Comme dit au paragraphe précédent, à chaque intervalle résonant de l'une des familles (s'il en existe) correspond un unique intervalle résonant de l'autre famille. Quand nous discuterons les intervalles résonants, nous décrirons le spectre dans la réunion des deux intervalles.

On peut se demander si des énergies résonantes existent. Comme la dérivée de  $\Phi_\pi$  (resp.  $\Phi_0$ ) est strictement positive (resp. négative) sur  $J$ , alors, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il en est de même pour celle de  $\check{\Phi}_\pi$  (resp.  $\check{\Phi}_0$ ). Donc, approximativement, lorsque  $\varepsilon$  décroît vers 0, les points de type  $\pi$  se déplacent vers la gauche et ceux de la suite de type 0 vers la droite; comme les points ont un mouvement continu en  $\varepsilon$ , ils se rencontrent. Ainsi, quitte à réduire  $\varepsilon$ , on peut donc toujours créer des intervalles résonants! Clairement, ceci peut être réalisé dans tout sous-intervalle relativement compact de l'intérieur de  $J \cap V_*$  de longueur au moins  $C\varepsilon$  si  $C$  est suffisamment grand.

**Remarque 7.1.** Pour une fonction  $V$  générique, il n'y a que peu d'intervalles résonants. Mais, si  $V$  présente des symétries particulières, par exemple si  $V$  est paire, alors tous les points  $E_0^{(l)}$  et  $E_\pi^{(l')}$  coïncident et tous les intervalles sont résonants! Ceci est dû à la parité du cosinus; ce n'est plus vrai en général si on remplace le potentiel  $\alpha \cos(\cdot)$  par un autre potentiel.

**7.1. Le cas des intervalles non-résonants.** C'est le cas le plus simple. On décrira les résultats dans le cas de la famille  $\pi$ ; la transposition à la famille 0 est immédiate.

**Théorème 7.1.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 6.1. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, soient  $(I_0^{(l)})_{l'}$  et  $(I_\pi^{(l)})_l$ , les suites finies d'intervalles définies dans ce résultat. Considérons  $l$  tel que, pour tout  $l'$ ,  $I_\pi^{(l)} \cap I_0^{(l')} = \emptyset$ . Alors, il existe  $\check{E}_\pi^{(l)}$  et  $\check{w}_\pi^{(l)}$  vérifiant*

$$(7.1) \quad \check{E}_\pi^{(l)} = E_\pi^{(l)} + \varepsilon \frac{\Lambda_n(V)}{2\check{\Phi}'_\pi(E_\pi^{(l)})} t_h(E_\pi^{(l)}) \tan\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi^{(l)})}{\varepsilon}\right) (1 + o(1)),$$

$$(7.2) \quad \check{w}_\pi^{(l)} = \frac{\varepsilon}{\check{\Phi}'_\pi(E_\pi^{(l)})} \left( \frac{t_h(E_\pi^{(l)})}{2 \left| \cos\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi^{(l)})}{\varepsilon}\right) \right|} + t_{v,\pi}(E_\pi^{(l)}) \right) (1 + o(1)),$$

tels que, si on définit

$$(7.3) \quad \check{I}_\pi^{(l)} := [\check{E}_\pi^{(l)} - \check{w}_\pi^{(l)}, \check{E}_\pi^{(l)} + \check{w}_\pi^{(l)}]$$

alors

$$\sigma(H_{\zeta,\varepsilon}) \cap I_\pi^{(l)} \subset \check{I}_\pi^{(l)}$$

De plus, si  $dN_\varepsilon(E)$  est la mesure de densité d'états  $H_{\zeta,\varepsilon}$ , alors

$$\int_{\check{I}_\pi^{(l)}} dN_\varepsilon(E) = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

On remarque que, dans le cas non-résonant, pour chacune des famille d'intervalles, la description du lieu du spectre est semblable à celle obtenue pour le fond de spectre dans le travail [10]. Néanmoins, même dans le cas non-résonant, on constate l'influence de l'une des suites sur l'autre dans les formules (7.1) et (7.2). Soit  $E_0$ , le point de la suite  $E_0^{(l')}$  le plus proche à  $E_\pi := E_\pi^{(l)}$ . Considérons le deuxième terme dans la formule (7.1) décrivant le centre de l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$ . Comme  $\check{\Phi}'_\pi(E) > 0$ , le signe de ce terme est celui du facteur  $\tan\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi)}{\varepsilon}\right)$ . Supposons que  $E_0$  et  $E_\pi$  sont assez proches l'un de l'autre. Comme  $\frac{1}{\varepsilon}\check{\Phi}_0(E_0) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$  par définition et comme  $\check{\Phi}'_0(E) < 0$ , le deuxième terme de (7.1) est négatif si  $E_\pi$  est à gauche de  $E_0$ , et positif si  $E_\pi$  est à droite de  $E_0$ . Donc, on voit qu'il y a une répulsion entre les intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$ . Comme la distance du point  $E_\pi$  à  $E_0$  est contrôlée par le facteur

$$(7.4) \quad \cos\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi^{(l)})}{\varepsilon}\right),$$

la répulsion est d'autant plus importante que  $|E_0 - E_\pi|$  est petit.

Discutons maintenant la nature du spectre dans l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$ . Soit

$$(7.5) \quad \lambda_\pi(E) = \frac{t_{v,\pi}(E)}{t_h(E)} \text{dist}\left(E, \bigcup_l \{E_0^{(l')}\}\right),$$

où, pour  $A$  un ensemble d'énergies,  $\text{dist}(E, A)$  désigne la distance de  $E$  à l'ensemble  $A$ . On démontre le

**Théorème 7.2.** *Sur l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$ , l'exposant de Liapounoff admet l'asymptotique*

$$(7.6) \quad \Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \log^+ \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) + o(1),$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tends vers 0. Ici,  $\log^+$  désigne la partie positive du logarithme naturel, i.e.  $\log^+ = \max(0, \log)$ .

Supposons que  $(S_h - S_{v,\pi})(E_\pi^{(l)}) > 0$ . Si  $\text{dist} \left( E_\pi^{(l)}, \bigcup_l \{E_0^{(l')}\} \right) \geq \varepsilon^N$  (où  $N$  étant un entier positif fixé) alors le Théorème 7.2 et la formule (7.5) impliquent que

$$(7.7) \quad \Theta(E, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} (S_h - S_{v,\pi})(E_\pi^{(l)}) + o(1) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par contre, quand  $E_\pi^{(l)}$  est seulement à une distance  $e^{-\delta/\varepsilon}$  (pour  $0 < \delta < (S_h - S_{v,\pi})^+$ ) de l'ensemble des points  $E_0^{(l')}$ , sur  $\check{I}_\pi^{(l)}$ , on a

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} (S_h - S_{v,\pi})(E_\pi^{(l)}) - \delta + o(1) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On voit donc que la valeur de  $\Theta$  sur  $\check{I}_\pi^{(l)}$  chute brutalement lorsque l'on approche  $E_\pi^{(l)}$  de la suite de points  $(E_0^{(l')})_\nu$ .

Le Théorème (7.2) entraîne le

**Corollaire 7.1.** *Fixons  $c > 0$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, si  $I_\pi^{(l)}$  est non-résonant et si  $\varepsilon \log \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) > c$ , alors, l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$  défini dans le Théorème 7.1 ne contient que du spectre singulier.*

Si la quantité  $\lambda_\pi$  est petite sur l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$ , la plus grande partie de cet intervalle est dans le spectre absolument continue; on démontre le

**Théorème 7.3.** *Pour  $c > 0$ , il existe  $\eta$ , une constante positive, et un ensemble de nombres diophantiens  $D \subset (0, 1)$  tels que*

–  *$D$  est asymptotiquement de mesure totale i.e.*

$$\frac{\text{mes}(D \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} = 1 + o(e^{-\eta/\varepsilon}) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

– *pour  $\varepsilon \in D$  suffisamment petit, si  $\check{I}_\pi^{(l)}$  est non résonant et si  $\varepsilon \log \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) < -c$ , alors l'intervalle  $\check{I}_\pi^{(l)}$  défini dans le Théorème 7.1 contient majoritairement du spectre absolument continu de  $H_{\zeta,\varepsilon}$ ; plus précisément, on a*

$$\frac{\text{mes}(\check{I}_\pi^{(l)} \cap \Sigma_{ac})}{\text{mes}(\check{I}_\pi^{(l)})} = 1 + o(1),$$

où,  $\Sigma_{ac}$  désigne le spectre absolument continu de  $H_{\zeta,\varepsilon}$ .

Pour les intervalles de la famille de type 0, on obtient bien sûr les pendants des Théorèmes 7.1, 7.2, 7.3 et du Corollaire 7.1.

Ces résultats appellent quelques commentaires.

Comme nous l'avons vu à la fin de la section 6, en choisissant judicieusement  $\varepsilon$ , on peut s'arranger pour que la distance minimale entre les points de la suite 0 et ceux de la suite  $\pi$  soit aussi petite que souhaitée; de plus, ceci peut être fait dans tout sous-intervalle relativement compact de l'intérieur de  $J$  de longueur au moins  $C\varepsilon$  si  $C$  est suffisamment grand. Or, sur un tel intervalle, les actions  $E \mapsto S_h(E)$ ,  $E \mapsto S_{v,0}(E)$  et  $E \mapsto S_{v,\pi}(E)$  varient d'au plus  $C'\varepsilon$ . Donc, quitte à choisir  $\varepsilon$  assez petit correctement, on peut essentiellement supposer qu'il existe un point de la suite de type 0 et un point de la suite de type  $\pi$  séparés d'une distance arbitraire, inférieure à  $\varepsilon$  tels que, sur un voisinage de taille  $\varepsilon$  de ces points, le triplé des actions  $E \mapsto (S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E))$  prenne l'une

quelconque de ses valeurs possibles sur  $J$ . On peut donc choisir les grandeurs  $E_\pi^{(l')} - E_0^{(l)}$  et  $(S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E))$  essentiellement indépendamment l'une de l'autre.

Dans le cas où (BEI) est vérifiée, deux nouveaux phénomènes spectraux peuvent apparaître. Nous allons les décrire maintenant.

7.1.1. *Transitions dues à l'approche de la situation résonante.* On voit que la nature du spectre sur les intervalles définis dans le Théorème 7.1 dépend de leur proximité avec les intervalles de l'autre famille. L'effet de l'interaction entre les deux familles d'intervalles peut aller jusqu'à entraîner des changements dans la nature du spectre par rapport à ce qu'on voit lorsque la distance entre les points de deux familles reste d'ordre  $\varepsilon$ . Prenons un exemple. Supposons que l'intervalle  $J$  vérifie les hypothèses :

$$(7.8) \quad \min_{E \in J} S_h(E) > \max_{\nu \in \{0, \pi\}} \max_{E \in J} S_{v,\nu}(E),$$

et

$$(7.9) \quad \frac{3}{2} \min_{\nu \in \{0, \pi\}} \min_{E \in J} S_{v,\nu}(E) > \max_{E \in J} S_h(E).$$

Sous la condition (7.8), on obtient  $\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{\nu \in \{0, \pi\}} \min_{E \in J} S_{v,\nu}(E)$ . Donc, il existe  $c > 0$  tel que, pour  $E \in J$ ,

$$(7.10) \quad S_h(E) - S_{v,\nu}(E) - \delta_0 < -c < 0, \quad \nu = 0, \pi.$$

Considérons deux intervalles  $I_0^{(l')}$  et  $I_\pi^{(l)}$  non résonants situés dans  $J \cap V_*$ . On a

- si ces deux intervalles sont séparés par une distance de taille  $\varepsilon^N$  (où  $N$  est un entier fixé), la relation (7.8) garantit que, sur ces intervalles, le spectre est contrôlé par le Corollaire 7.1 et son pendant pour la suite de type 0.
- si ces deux intervalles sont séparés par une distance d'ordre  $\exp(-\delta_0/\varepsilon)$ , alors la relation (7.10) garantit que, sur ces intervalles, le spectre est contrôlé par le Théorème 7.3 et son pendant pour la suite de type 0.

L'existence d'intervalles  $J$  pour lesquels on a (7.8) et (7.9) peut être vérifiée numériquement, voir la partie 8. Ainsi, non seulement l'emplacement du spectre dépend de la distance séparant localement les suites de type 0 et de type  $\pi$ , mais la nature du spectre en dépend également. Il peut s'opérer une transition : du spectre qui serait singulier lorsque les deux suites sont éloignées l'une de l'autre peut devenir absolument continu lorsqu'elles sont proches (voir la figure 5(a)). Notons que la transition ne peut s'opérer dans l'autre sens : le spectre absolument continu lorsque les suites sont éloignées le reste si elles sont proches.

7.1.2. *Alternance des types spectraux.* De plus, un autre nouveau phénomène spectral peut apparaître. Pour simplifier, supposons que, dans  $V_* \cap J$ , les distances entre les points  $\{E_0^{(l)}\}$  et les points  $\{E_\pi^{(l')}\}$  sont supérieures à  $\varepsilon^N$ , où  $N$  est un entier fixé (c'est-à-dire que toutes les énergies sont non résonantes). En tenant compte du Théorème 7.3 et du Corollaire 7.1, ceci implique que, sur  $\check{I}_0^{(l)}$  (resp.  $\check{I}_\pi^{(l')}$ ), la nature du spectre est déterminée par la taille des quotients  $t_{v,0}(E_0^{(l)})/t_h(E_0^{(l)})$  (resp.  $t_{v,\pi}(E_\pi^{(l')})/t_h(E_\pi^{(l')})$ ) par rapport à 1. S'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$(7.11) \quad \forall E \in J_*, \quad S_{v,\pi}(E) - S_h(E) > \delta \quad \text{et} \quad S_{v,0}(E) - S_h(E) < -\delta,$$

alors, dans  $V_* \cap J$ , les suites de type 0 et de type  $\pi$  contiennent du spectre de types spectraux « opposés », i.e. le spectre dans les intervalles de type 0 est singulier, et celui

dans les intervalles de type  $\pi$  est, pour l'essentiel, absolument continu. Ceci ne vaut bien sûr que si  $\varepsilon$  est suffisamment petit et vérifie la condition diophantienne imposée dans le Théorème 7.3 On obtient ainsi un entrelacement d'ensembles de spectres de type « opposés », voir la figure 5(b). Dans ce cas, le nombre de transitions d'Anderson dans l'intervalle  $V_* \cap J$  est de l'ordre de  $1/\varepsilon$ .

À l'instar des conditions (7.8) et (7.9), on vérifie numériquement que la condition (7.11) est effectivement réalisable (voir section 8).

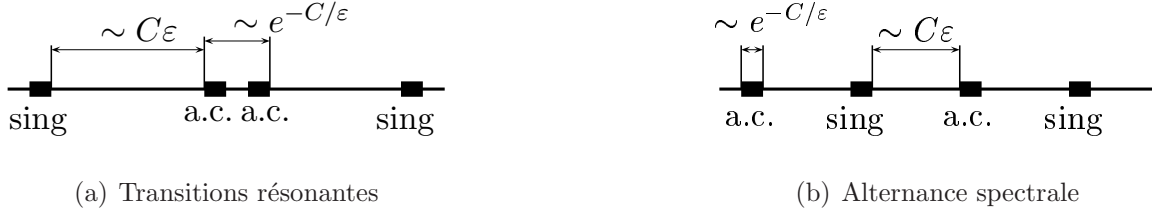


FIG. 5: Deux nouveaux phénomènes spectraux dûs à des résonances faibles

**7.2. Les résonances.** On considère maintenant deux énergies,  $E_0^{(l)}$  et  $E_\pi^{(l')}$ , résonantes, c'est-à-dire telles que

$$(7.12) \quad |E_\pi^{(l')} - E_0^{(l)}| < 2e^{-\frac{\delta_0}{\varepsilon}}.$$

Si (7.12) est vérifiée, les intervalles  $I_0^{(l)}$  et  $I_\pi^{(l')}$  se rencontrent. On ne décrira donc plus le spectre dans chacun des intervalles séparément mais dans la réunion des deux intervalles. Pour simplifier l'exposé, nous renommons les énergies et les intervalles résonants

$$(7.13) \quad E_0 := E_0^{(l)}, \quad E_\pi := E_\pi^{(l')}, \quad I_0 := I_0^{(l)}, \quad \text{et} \quad I_\pi := I_\pi^{(l')}.$$

Dans le cas résonant, le lieu du spectre et sa nature dépendent de la valeur du paramètre

$$(7.14) \quad \tau = 2\sqrt{\frac{t_{v,0}(\bar{E})t_{v,\pi}(\bar{E})}{t_h(\bar{E})}} \quad \text{où} \quad \bar{E} = \frac{E_\pi + E_0}{2}.$$

Nous allons analyser en détail les cas où  $\tau \gg 1$  et où  $\tau \ll 1$ . Plus précisément, nous fixons  $\delta > 0$  arbitraire et supposons soit que

$$(7.15) \quad \forall E \in V_* \cap J, \quad S_h(E) - S_{v,0}(E) - S_{v,\pi}(E) \geq \delta, \quad (\text{qui sera le cas } \tau \gg 1),$$

soit que

$$(7.16) \quad \forall E \in V_* \cap J, \quad S_h(E) - S_{v,0}(E) - S_{v,\pi}(E) \leq -\delta, \quad (\text{qui sera le cas } \tau \ll 1).$$

Le cas où  $\tau \asymp 1$  est le cas le plus compliqué (mais aussi le moins fréquent). Nous n'en parlerons que brièvement.

Les résultats sont décrits avec les « variables locales »

$$(7.17) \quad \xi_\nu(E) = \frac{\check{\Phi}'(\bar{E})}{\varepsilon} \cdot \frac{E - E_\nu}{t_{v,\nu}(\bar{E})} \quad \text{où} \quad \nu \in \{0, \pi\}.$$



7.2.1. *Quand  $\tau$  est grand.* On suppose maintenant que  $\tau \gg 1$ . Dans ce cas, le lieu du spectre près des énergies  $E_0$  et  $E_\pi$  est décrit par le

**Théorème 7.4.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 6.1. Supposons que l'hypothèse (7.15) est vérifiée. Alors, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , et des énergies résonnantes,  $E_0$  et  $E_\pi$ , dans  $V_* \cap J$ , le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  dans  $I_0 \cup I_\pi$  est situé dans deux intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$  définis par*

$$(7.18) \quad \check{I}_0 = \{E \in I_0 : |\xi_0(E)| \leq 1 + o(1)\} \quad \text{et} \quad \check{I}_\pi = \{E \in I_\pi : |\xi_\pi(E)| \leq 1 + o(1)\}.$$

Ici,  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et ne dépend que de  $\varepsilon$ . Si  $dN_\varepsilon(E)$  est la mesure de densité d'états  $H_{\zeta,\varepsilon}$ , alors

$$(7.19) \quad \int_{\check{I}_0} dN_\varepsilon(E) = \int_{\check{I}_\pi} dN_\varepsilon(E) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{si } \check{I}_0 \cap \check{I}_\pi = \emptyset, \quad \text{et} \quad \int_{\check{I}_0 \cup \check{I}_\pi} dN_\varepsilon(E) = \frac{\varepsilon}{\pi} \quad \text{sinon.}$$

De plus, l'exposant de Liapounoff sur  $\check{I}_0 \cup \check{I}_\pi$  est donné par

$$(7.20) \quad \Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{1 + |\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) + o(1),$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et ne dépend que de  $\varepsilon$ .

L'équation (7.19) nous dit que, si  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$  sont disjoints, alors ils contiennent tous les deux du spectre; s'ils ne sont pas disjoints, on sait seulement que leur réunion contient du spectre.

Analysons plus avant les résultats du Théorème 7.4.

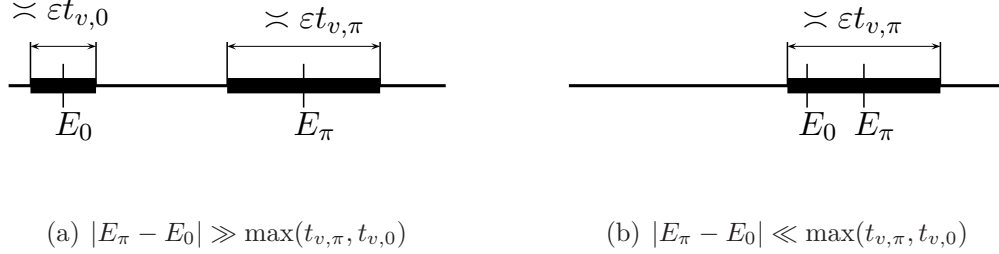


FIG. 6: Le lieu du spectre quand  $\tau$  est grand

*Le lieu du spectre.* Par (7.17), les intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$  définis dans Théorème 7.4 sont respectivement « centrés » aux points  $E_0$  et  $E_\pi$ . Leur longueurs sont données par les formules :

$$|\check{I}_0| = \frac{2\varepsilon}{|\check{\Phi}'_0(E_0)|} \cdot t_{v,0}(E_0) \cdot (1 + o(1)) \quad \text{et} \quad |\check{I}_\pi| = \frac{2\varepsilon}{|\check{\Phi}'_\pi(E_\pi)|} \cdot t_{v,\pi}(E_\pi) \cdot (1 + o(1)).$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et ne dépend que de  $\varepsilon$ . Suivant la distance séparant  $E_\pi$  de  $E_0$ , on obtient les dessins de la figure 6 pour le lieu du spectre.

L'effet de répulsion observé dans la section 7.1 ne se manifeste pas : il est négligeable par rapport aux longueurs des intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$ .

*La nature du spectre.* Dans les intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$ , d'après l'hypothèse (7.15) et la formule (7.20), l'exposant de Liapounoff est positif. Donc, par le Théorème de Ishii, Pastur et Kotani ([18]), dans les deux intervalles  $\check{I}_0$  et  $\check{I}_\pi$ , le spectre est singulier.

La variation de  $\Theta(E, \varepsilon)$  sur le spectre. La formule générale (7.20) peut être simplifiée de la façon suivante :

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{1 + |\xi_0(E)|} \right) + o(1) \quad \text{si } E \in \check{I}_\pi,$$

et

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{1 + |\xi_\pi(E)|} \right) + o(1) \quad \text{si } E \in \check{I}_0.$$

Si  $|E_\pi - E_0| \gg \max(t_{v,\pi}, t_{v,0})$ , alors l'exposant de Liapounoff est essentiellement constant sur chacun des intervalles  $\check{I}_\nu$ . Par contre, si  $|E_\pi - E_0| \ll \max(t_{v,\pi}, t_{v,0})$ , alors, sur cet ensemble exponentiellement petit, la variation de l'exposant de Liapounoff peut être de l'ordre d'une constante. Prenons un exemple. Supposons que  $t_{v,0} \ll t_{v,\pi}$ , ou, plus exactement, qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall E \in V_* \cap J, \quad S_{v,0}(E) > S_{v,\pi}(E) + \delta.$$

Si  $E_0$  et  $E_\pi$  coïncident, alors,  $\check{I}_0 \subset \check{I}_\pi$ , et, au centre de l'intervalle  $\check{I}_\pi$ , l'exposant de Liapounoff vaut

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \tau + o(1) = \frac{1}{2\pi} (S_h(\bar{E}) - S_{v,\pi}(\bar{E}) - S_{v,0}(\bar{E})) + o(1).$$

Alors qu'au bord de  $\check{I}_\pi$ , il vaut

$$\begin{aligned} \Theta(E, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{\pi} \log \tau + \frac{\varepsilon}{2\pi} \log(t_{v,\pi}(\bar{E})/t_{v,0}(\bar{E})) + o(1) \\ &= \frac{1}{2\pi} (S_h(\bar{E}) - 2S_{v,\pi}(\bar{E})) + o(1). \end{aligned}$$

L'exposant de Liapounoff varie donc essentiellement de  $\frac{1}{2\pi} (S_{v,0}(\bar{E}) - S_{v,\pi}(\bar{E}))$  sur l'intervalle de longueur exponentiellement petite. On observe donc une chute brutale de l'exposant de Liapounoff sur l'intervalle contenant du spectre quand on part d'un des bord de  $\check{I}_\pi$  pour rejoindre le point  $E_\pi$ .

7.2.2. *Quand  $\tau$  est petit.* On suppose maintenant que  $\tau \ll 1$ , c'est-à-dire que (7.16) est vérifiée. Dans ce cas, le comportement spectral dépend de la valeur de la constante  $\Lambda_n(V)$  définie dans la section 1.3. Remarquons que  $\Lambda_n(V)$  ne dépend que de  $V$ . Dans cet article, on suppose que

$$(7.21) \quad \Lambda_n(V) > 1.$$

D'après le Théorème 1.1, cette condition est vérifiée pour un potentiel  $V$  générique. Il y plusieurs « scénarios » possibles pour le comportement spectral dans le cas  $\tau \ll 1$ . Avant de les détailler, commençons par une description générale du lieu et de la nature du spectre. On démontre le

**Théorème 7.5.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 6.1. Supposons que (7.16) et (7.21) sont vérifiées. Alors, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , et  $E_0$  et  $E_\pi$ , deux énergies résonantes dans  $V_* \cap J$  telles que l'inégalité (7.12) est vérifiée, le spectre de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  dans  $I_0^{(l)} \cup I_\pi^{(l)}$  est contenu dans l'ensemble  $\Sigma(\varepsilon)$  des énergies  $E$  vérifiant*

$$(7.22) \quad \left| \tau^2 \xi_0(E) \xi_\pi(E) + 2\Lambda_n(V) \right| \leq (2 + \tau^2 |\xi_0(E)| + \tau^2 |\xi_\pi(E)|) (1 + o(1)).$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et ne dépend que de  $\varepsilon$ .

On peut préciser ce théorème grâce à la

**Proposition 7.1.** *L'ensemble  $\Sigma(\varepsilon)$  défini dans le Théorème 7.5 est la réunion de deux intervalles fermés disjoints.*

Ce résultat est une conséquence immédiate de (7.22), des définitions de  $\xi_0$  et  $\xi_\pi$ , et des faits simples suivants :

- (1)  $\Lambda_n(V) > 1$ ;
- (2)  $E \mapsto \xi_0(E)$  et  $E \mapsto \xi_\pi(E)$  sont linéaires en  $E$ ;
- (3) le produit  $\xi_0(E)\xi_\pi(E)$  est positif pour  $E$  dans l'intervalle  $]E_0, E_\pi[$ .

On note les intervalles décrits dans la Proposition 7.1 par  $I_0$  et  $I_\pi$ .  
On montre le

**Théorème 7.6.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 7.5. Si  $dN_\varepsilon(E)$  est la mesure de densité d'états  $H_{\zeta,\varepsilon}$ , alors*

$$\int_{I_0} dN_\varepsilon(E) = \int_{I_\pi} dN_\varepsilon(E) = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Ce théorème implique que chacun des intervalles  $I_0$  et  $I_\pi$  contient du spectre. Cela et la Proposition 7.1 montre que, dans le cas où  $\tau \ll 1$  et  $\Lambda_n(V) > 1$ , il y a une répulsion (« splitting ») des intervalles résonants contenant du spectre.

Pour ce qui concerne la nature du spectre, on démontre les résultats suivants. Le comportement de l'exposant de Liapounoff est décrit par le

**Théorème 7.7.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 7.5. Dans l'ensemble  $\Sigma(\varepsilon)$ , l'exposant de Liapounoff de  $H_{\zeta,\varepsilon}$  vérifie*

$$(7.23) \quad \Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) + o(1),$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et ne dépend que de  $\varepsilon$ .

Pour  $c > 0$ , on définit l'ensemble

$$(7.24) \quad I_c^+ = \left\{ E \in \Sigma(\varepsilon) : \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) > c \right\}.$$

Le Théorème 7.7 implique le

**Corollaire 7.2.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 7.5. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, l'ensemble  $\Sigma(\varepsilon) \cap I_c^+$  ne contient que du spectre singulier.*

Soit

$$(7.25) \quad I_c^- = \left\{ E \in \Sigma(\varepsilon) : \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left( \tau \sqrt{|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) < -c \right\}.$$

On démontre le

**Théorème 7.8.** *Plaçons nous dans les conditions du Théorème 7.5. Alors, il existe  $\eta > 0$ , une constante, et  $D \subset (0, 1)$ , un ensemble de nombres diophantiens, tels que*  
*-  $D$  est asymptotiquement de mesure totale i.e.*

$$\frac{\text{mes}(D \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} = 1 + o(e^{-\eta/\varepsilon}) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- pour  $\varepsilon \in D$  suffisamment petit, l'ensemble  $\Sigma(\varepsilon) \cap I_c^-$  contient majoritairement du spectre absolument continu de  $H_{\zeta,\varepsilon}$ ; plus précisément, si  $\Sigma_{ac}$  désigne le spectre absolument continu de  $H_{\zeta,\varepsilon}$ , on a

$$\frac{\text{mes}([\Sigma(\varepsilon) \cap I_c^-] \cap \Sigma_{ac})}{\text{mes}(\Sigma(\varepsilon) \cap I_c^-)} = 1 + o(1)$$

où  $o(1)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

**7.2.3. Les principaux scénarios possibles quand  $\tau$  est petit.** Comme dans la section précédente, nous supposons que  $\tau \ll 1$  et  $\Lambda_n(V) > 1$ . Il y a principalement deux comportements possibles pour le lieu et la nature du spectre. Définissons le paramètre

$$(7.26) \quad \rho := \frac{\max(t_{v,\pi}, t_{v,0})}{\sqrt{t_h}} \Big|_{E=\bar{E}}.$$

Nous ne considérerons en détails que les cas quand  $\rho$  est exponentiellement petit et quand  $\rho$  est exponentiellement grand.

**1.** Lorsque  $\rho \ll 1$  et  $|E_\pi - E_0| \ll \varepsilon\sqrt{t_h(\bar{E})}$ ,  $\Sigma(\varepsilon)$  consiste en deux intervalles de longueur d'ordre  $\varepsilon\sqrt{t_h}$  qui sont séparés par une lacune de longueur, elle aussi, d'ordre  $\varepsilon\sqrt{t_h}$  (voir la figure 7); cette lacune est essentiellement « centrée » au point  $\bar{E}$ . La longueur des intervalles contenant le spectre ainsi que la longueur et le centre de la lacune ne dépendent que très marginalement de la distance  $E_\pi - E_0$ . Lorsque  $|E_\pi - E_0|$  approche  $\varepsilon\sqrt{t_h(\bar{E})}$ , les intervalles contenant le spectre commencent à s'éloigner l'un de l'autre.

Pour ce qui concerne la nature du spectre, lorsque  $\rho$  est exponentiellement petit et que  $|E_\pi - E_0| \ll \varepsilon\sqrt{t_h(\bar{E})}$ , les intervalles contenant du spectre se trouvent dans la zone  $I_c^-$ ; ainsi, dans ce cas, l'essentiel du spectre est absolument continu dans les deux intervalles (si  $\varepsilon$  vérifie la condition diophantienne du Théorème 7.8).

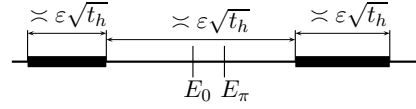


FIG. 7: Quand  $\tau \ll 1$  et  $\rho \ll 1$

**2.** Si  $\rho \gg 1$ , il y a toujours un intervalle, disons  $I_\pi$ , qui est asymptotiquement centré en  $\pi$  et qui contient du spectre. La longueur de cet intervalle est d'ordre  $\varepsilon t_{v,\pi}(\bar{E})$ . On peut distinguer deux cas :

- (1) si  $E_0$  se trouve à l'intérieur de  $I_\pi$  et si la distance entre  $E_0$  et les bords de  $I_\pi$  est de même ordre que la longueur de  $I_\pi$ , alors  $\Sigma(\varepsilon)$  consiste en l'intervalle  $I_\pi$  privé d'une lacune de longueur d'ordre  $\varepsilon t_h(\bar{E})/t_{v,\pi}(\bar{E})$  contenant  $E_0$  (voir la figure 8(b)). De plus, la distance de  $E_0$  à chacun des bords de la lacune est aussi d'ordre  $\varepsilon t_h(\bar{E})/t_{v,\pi}(\bar{E})$ .
- (2) si  $E_0$  se trouve à l'extérieur de  $I_\pi$  et la distance entre  $E_0$  et  $I_\pi$  est au moins de même ordre que la longueur de  $I_\pi$ , alors  $\Sigma(\varepsilon)$  consiste en l'intervalle  $I_\pi$  et un intervalle  $I_0$  (voir la figure 8(a)). L'intervalle  $I_0$  est situé dans un voisinage de  $E_0$  dont la taille est d'ordre  $\varepsilon t_h(\bar{E})/|E_0 - E_\pi|$ . La longueur de  $I_0$  est d'ordre  $\varepsilon(t_h(\bar{E})/|E_0 - E_\pi| + t_{v,0}(\bar{E}))$ .

Lorsque  $\rho$  est exponentiellement grand, le Liapounoff peut varier très brutalement sur les intervalles contenant du spectre. Considérons le cas où  $|E_\pi - E_0| \ll \varepsilon t_{v,\pi}(\bar{E})$ . Pour  $E$  près de la lacune entourant  $E_0$ , on voit que  $\tau^2 \xi_0(E)$  est d'ordre 1, alors que  $\tau^2 \xi_\pi(E)$  est exponentiellement petit. Donc, pour  $E$  près de la lacune entourant  $E_0$ , le Théorème 7.7 donne  $\Theta(E, \varepsilon) = o(1)$ . Par contre, aux autres extrémités de l'intervalle contenant le spectre,  $\tau^2 \xi_0(E)$  est de taille  $\rho^2$ ; comme ce dernier est exponentiellement grand en  $\varepsilon$ , on voit

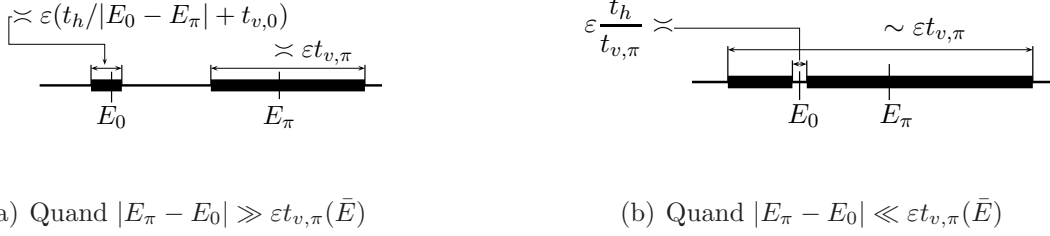


FIG. 8: Le lieu du spectre quand  $\tau \ll 1$  et  $\rho \gg 1$

que, pour de telles énergies, l'exposant de Liapounoff est positif et donné par

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \rho + o(1).$$

Cette situation est semblable à celle obtenue pour  $\tau \gg 1$ ; mais, maintenant, l'exposant varie brutalement entre une valeur positive et une valeur très petite qui pourrait être nulle.

Sur la plus grande partie de  $\Sigma(\varepsilon)$ , l'exposant de Liapounoff est positif et, le spectre est singulier (d'après le Corollaire 7.2). Par contre, près de la lacune entourant  $E_0$ , ni le Corollaire 7.2, ni le Théorème 7.8 ne s'applique. Ces zones sont semblables aux zones où ont lieu les transitions d'Anderson asymptotiques (voir [10]).

7.2.4. *Quand  $\tau$  n'est ni petit, ni grand.* Supposons qu'il existe une constante  $C > 1$  et une zone d'énergies  $Z$  tels que

$$(7.27) \quad \forall E \in Z, \quad \frac{1}{C} \leq \tau(E) \leq C \quad \text{et} \quad |\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)| \leq C.$$

Dans ce cas, on pose  $h = \varepsilon \cdot (\frac{2\pi}{\varepsilon} \bmod 1)$ , et l'étude spectrale de  $H_{\zeta, \varepsilon}$  se ramène à l'étude des solutions de l'équation aux différences finies

$$(7.28) \quad \Psi_{k+1} = M(E, kh + \zeta) \Psi_k, \quad \Psi_k \in \mathbb{C}^2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où la matrice  $M(E, \zeta)$  satisfait

$$(7.29) \quad M(E, \zeta) = \begin{pmatrix} \tau^2 g_0(\zeta) g_\pi(\zeta) + \theta_n^{-1} & \tau g_0(\zeta) \\ \theta_n \tau g_\pi(\zeta) & \theta_n \end{pmatrix} + o(1),$$

et  $\theta_n$  est la solution de l'équation  $2\Lambda_n = \theta_n + \theta_n^{-1}$  dans  $[1, +\infty[$ ; en outre, on a posé

$$g_\nu = \xi_\nu + \sin(2\pi\zeta/\varepsilon + \phi_\nu), \quad \nu \in \{0, \pi\}.$$

Ici,  $\phi_0$  et  $\phi_\pi$  sont des fonctions réelles analytiques de  $E$  indépendantes de  $\zeta$ . Dans (7.29),  $o(1)$  désigne une fonction à valeurs matricielles, réelle analytique de  $E$  et  $\zeta$ . Elle est  $\varepsilon$ -périodique en  $\zeta$  et exponentiellement petite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Le comportement des solutions de l'équation (7.28) imite le comportement des solutions de l'équation  $H_{\zeta, \varepsilon} \psi = E \psi$  au sens du Théorème 2.1 de [10].

Sous les conditions (7.27), le terme principal de la matrice (7.29) ne contient plus de paramètre asymptotique. L'équation (7.28) où la matrice est remplacée par son terme principal est une équation modèle, le terme principal de la matrice  $M$  jouant le rôle de « hamiltonien effectif ». On se trouve dans un régime analogue à celui de la transition d'Anderson asymptotique obtenu dans [10].

**Remarque 7.2.** Si l'une des « variables »  $\xi_\nu(E)$  devient grande ou si le paramètre  $\tau$  devient soit grand soit petit, alors, de nouveau, le spectre peut être analysé avec la même précision que dans les sections précédentes.

## 8. LE DIAGRAMME DE PHASE : DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Comme nous l'avons vu dans les théorèmes énoncés précédemment, les modifications de la nature du spectre consécutives aux phénomènes de résonances dépendent des valeurs des fonctions  $S_h, S_{v,0}, S_{v,\pi}$  sur les intervalles d'énergies considérés.

Bien que ces fonctions ne soient sans doute pas accessibles à un calcul direct, pour des potentiels  $V$  particuliers, on peut les calculer numériquement assez facilement.

Dans les résultats (numériques) que nous présentons maintenant, nous avons choisi pour  $V$  un potentiel à deux lacunes ; pour de tels potentiels, on sait que la quasi-impulsion de Bloch  $k$  (voir la section 1.2) est donnée par une intégrale hyper-elliptique ([14, 16]). Ceci rend les actions particulièrement faciles à calculer. Comme le spectre de  $H_0 = -\Delta + V$  n'a que deux lacunes, on écrit  $\sigma(H_0) = [E_1, E_2] \cup [E_3, E_4] \cup [E_5, +\infty[$ . Dans les exemples ci-dessous, on prend les valeurs suivantes

$$E_1 = 0, E_2 = 3.8571429, E_3 = 6.8571429, E_4 = 12.100395, \text{ et } E_5 = 100.70923.$$

Sur les figures 9 et 10, on a représenté la région du plan des  $(\alpha, E)$  où la condition (BEI) est vérifiée pour  $n = 1$ . Elle est délimitée par les quatre droites d'équation  $E = E_1 + \alpha$ ,  $E = E_2 + \alpha$ ,  $E = E_3 - \alpha$  et  $E = E_4 - \alpha$ . Notons la  $\Delta$ .

Le calcul numérique permet de vérifier l'hypothèse (T). Comme nous avons pris  $n = 1$ , on a  $E_{2n-2} = -\infty$ . Il ne reste donc qu'à vérifier (T) pour  $\zeta_{2n+3} = \zeta_5$ . Le fait que (T) soit vraie peut alors être compris comme une conséquence du fait que  $E_5 - E_4$  est grand.

Sur la figure 9, on a représenté les zones de la région  $\Delta$  où l'on a les divers régimes

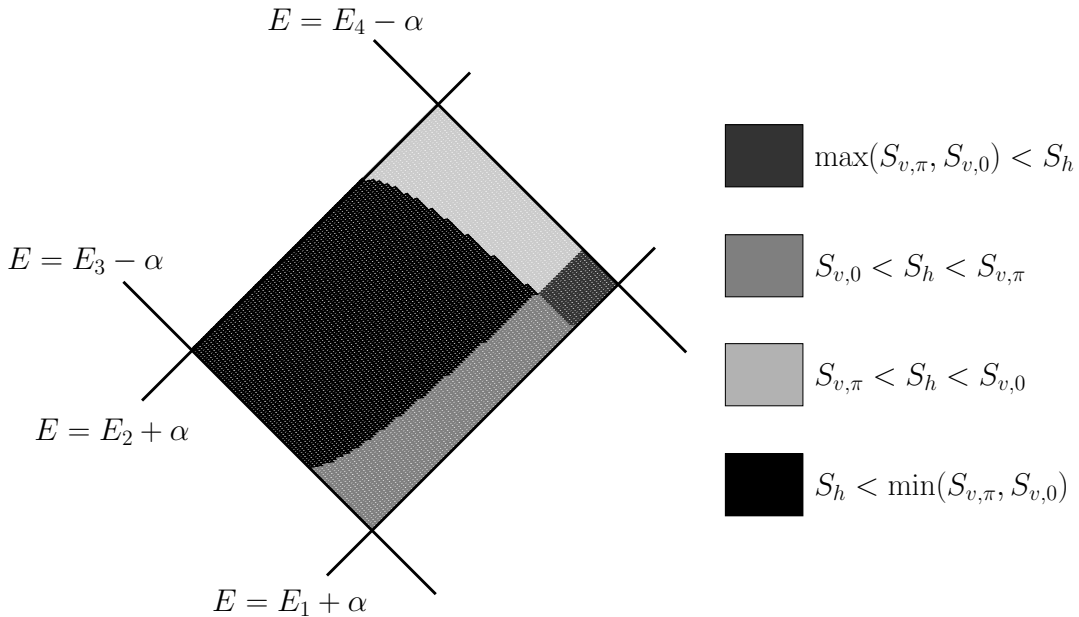


FIG. 9: Comparaison des actions

asymptotiques entre les coefficients de tunnel ; dans la légende, ces zones sont décrites avec les actions. On voit que, pour les intervalles non résonants,

- les zones où on a l’alternance de types spectraux décrit dans le paragraphe 7.1.2 ont lieu dans les zones  $\{S_{v,0} < S_h < S_{v,\pi}\}$  et  $\{S_{v,\pi} < S_h < S_{v,0}\}$
- les transitions dues à l’approche de la situation résonantes décrite dans le paragraphe 7.1.1 ont lieu dans la zone  $\{S_h > \max(S_{v,\pi}, S_{v,0})\}$  lorsqu’on est suffisamment près de la zone  $\{S_h < \min(S_{v,\pi}, S_{v,0})\}$ .

Sur la figure 10, on a représenté les zones sur lesquelles  $\tau$  et  $\rho$  sont grands et/ou petits. On voit ainsi que, pour des valeurs de  $\alpha$  bien choisies, tous les phénomènes décrits dans

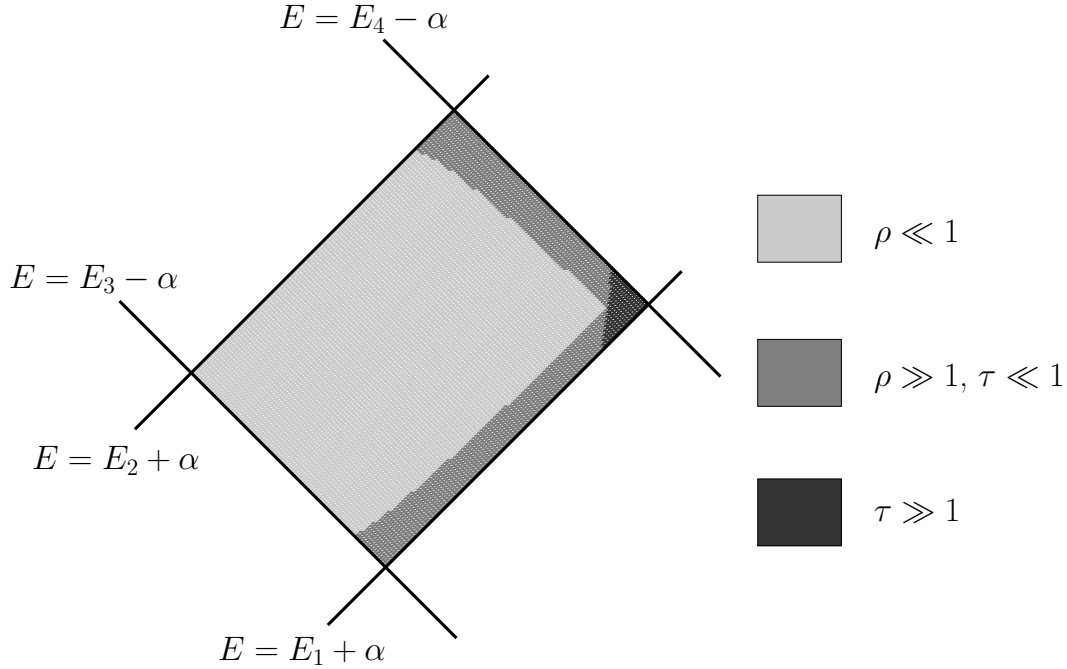


FIG. 10: Comparaison des coefficients  $\tau$  et  $\rho$  à 1

les paragraphes 7.2.1, 7.2.2 et 7.2.3, c’est-à-dire dans les figures 6, 7 et 8, ont bien lieu.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Avron and B. Simon. Almost periodic Schrödinger operators, II. the integrated density of states. *Duke Mathematical Journal*, 50 :369–391, 1983.
- [2] V. Buslaev and A. Fedotov. Bloch solutions of difference equations. *St Petersburg Math. Journal*, 7 :561–594, 1996.
- [3] M. Eastham. *The spectral theory of periodic differential operators*. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [4] A. Fedotov and F. Klopp. On the interaction of two spectral bands of periodic Schrödinger operator through an adiabatic incommensurate periodic perturbation : the non-resonant case. In progress.
- [5] A. Fedotov and F. Klopp. On the interaction of two spectral bands of periodic Schrödinger operator through an adiabatic incommensurate periodic perturbation : the resonant case. In progress.
- [6] A. Fedotov and F. Klopp. A complex WKB analysis for adiabatic problems. *Asymptotic Analysis*, 27 :219–264, 2001.
- [7] A. Fedotov and F. Klopp. On the absolutely continuous spectrum of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operators in the adiabatic limit. Preprint, Université Paris-Nord, 2001.
- [8] A. Fedotov and F. Klopp. On the singular spectrum of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operators in the adiabatic limit. To appear in *Ann. H. Poincaré*, 2004.

- [9] A. Fedotov and F. Klopp. Geometric tools of the adiabatic complex WKB method. To appear in *Asymp. Anal*, 2004.
- [10] A. Fedotov and F. Klopp. Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case. *Comm. Math. Phys.*, 227(1) :1–92, 2002.
- [11] N. E. Firsova. On the global quasimomentum in solid state physics. In *Mathematical methods in physics (Londrina, 1999)*, pages 98–141. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [12] E. M. Harrell. Double wells. *Comm. Math. Phys.*, 75(3) :239–261, 1980.
- [13] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit I. *Communications in Partial Differential Equations*, 9 :337–408, 1984.
- [14] A. R. It's and V. B. Matveev. Hill operators with a finite number of lacunae. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(1) :69–70, 1975.
- [15] Y. Last and B. Simon. Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 135(2) :329–367, 1999.
- [16] H. McKean and P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Mathematicae*, 30 :217–274, 1975.
- [17] H. P. McKean and E. Trubowitz. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(2) :143–226, 1976.
- [18] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [19] B. Simon. Instantons, double wells and large deviations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 8(2) :323–326, 1983.

(Alexandre Fedotov) DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ D'ÉTAT DE SAINT-PÉTERSBOURG, 1, ULIANOVSKAJA, 198904 SAINT-PÉTERSBOURG – PETRODVORETS, RUSSIE  
*E-mail address:* [fedotov@mph.phys.spbu.ru](mailto:fedotov@mph.phys.spbu.ru)

(Frédéric Klopp) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, INSTITUT GALILÉE, U.R.A 7539 C.N.R.S, UNIVERSITÉ DE PARIS-NORD, AVENUE J.-B. CLÉMENT, F-93430 VILLETANEUSE, FRANCE  
*E-mail address:* [klopp@math.univ-paris13.fr](mailto:klopp@math.univ-paris13.fr)