



HAL
open science

Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes

Tien-Cuong Dinh, Christophe Dupont

► **To cite this version:**

Tien-Cuong Dinh, Christophe Dupont. Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes. 2004. hal-00001372v1

HAL Id: hal-00001372

<https://hal.science/hal-00001372v1>

Preprint submitted on 29 Mar 2004 (v1), last revised 12 Jan 2005 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dimension de la mesure d'équilibre d'applications mériomorphes

Tien-Cuong Dinh et Christophe Dupont

March 29, 2004

Abstract

Let f be a dominating meromorphic self-map of a compact Kähler manifold. Assume that the topological degree of f is larger than the other dynamical degrees. We give estimates of the dimension of the equilibrium measure of f , which involve the Lyapounoff exponents.

1 Introduction

Soient X une variété kählérienne compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ une application méromorphe dominante. On note d_t son degré topologique, λ_{k-1} son $(k-1)$ -ième degré dynamique (cf section 2.1), et on suppose que $d_t > \lambda_{k-1}$. Fixons aussi une forme de Kähler ω sur X , normalisée par $\int_X \omega^k = 1$. Sous ces hypothèses, Guedj a montré dans [G] que la suite de mesures :

$$\mu_n := \frac{1}{d_t^n} f^{n*} \omega^k$$

converge vers une mesure de probabilité invariante μ (cf aussi [RS] et [DS2]). Ce résultat avait été établi auparavant pour les applications holomorphes de degré algébrique $d \geq 2$ sur l'espace projectif \mathbb{P}^k (alors $d_t = d^k$ et $\lambda_{k-1} = d^{k-1}$). On consultera à ce sujet les livres de Berteloot-Mayer [BM] (en dimension 1) et de Sibony [S] (en dimension supérieure). On trouvera aussi dans ces ouvrages une bibliographie plus détaillée.

La mesure limite μ intègre les fonctions *quasi-psh*, ce qui assure l'existence de ses exposants de Lyapounoff. Nous les noterons en ordre croissant $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_k$. Si Σ désigne leur somme, on dispose des inégalités (cf [BD], [DS1], [G]) :

$$\chi_1 \geq \frac{1}{2} \log \frac{d_t}{\lambda_{k-1}} \quad \text{et} \quad 2\Sigma \geq \log d_t$$

D'une manière générale, les exposants de Lyapounoff sont reliés à l'entropie et à la dimension de μ , notées respectivement $h(\mu)$ et $\dim_{\mathcal{H}}(\mu)$ (cf section 2.4). Par exemple, si f désigne une fraction rationnelle de degré d sur \mathbb{P}^1 , on a $h(\mu) = \log d = \dim_{\mathcal{H}}(\mu) \cdot \chi$, où χ est l'unique exposant de μ (cf [L], [M]). Une telle formule provient du caractère conforme de f . Notons qu'il existe une relation semblable dans le cas proche des difféomorphismes des surfaces réelles compactes [Y].

En dimension complexe plus grande que 1, les applications méromorphes ne sont plus conformes. On connaît une minoration de la dimension lorsque μ est une masse de Monge-Ampère à potentiel höldérien (par exemple si f est holomorphe sur \mathbb{P}^k , [B] §III.2, [S] §1.7). Cette minoration fait apparaître l'exposant de Hölder. Notons que μ ne possède pas toujours cette propriété de régularité. On dispose aussi d'une majoration faisant intervenir les exposants lorsque f est un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k d'origine polynomiale [BdM].

Le but de cet article est d'établir l'encadrement suivant :

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses précédentes, la dimension de μ vérifie :*

$$\frac{\log d_t}{\chi_k} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq 2k - \frac{2\Sigma - \log d_t}{\chi_k} \quad (1)$$

La démonstration repose essentiellement sur l'existence et le contrôle des branches inverses des itérés de f le long d'orbites négatives typiques (cf la proposition 3.1). Nous donnons dans le cas méromorphe un énoncé semblable au cas holomorphe, dû à Briend-Duval [BD]. Le nouvel ingrédient est le contrôle de la vitesse d'approche des orbites négatives vers l'ensemble d'indétermination \mathcal{I} de f . L'intégrabilité de la fonction $\log(\text{dist}(\cdot, \mathcal{I}))$ (cf lemme 3.2) joue ici un rôle crucial. Notre énoncé apporte aussi une précision supplémentaire : il permet de comparer les familles de branches inverses $(f^{-n})_{n \geq 0}$ définies au voisinage de $f^p(x)$ lorsque p varie. Il stipule par exemple que le rayon de la boule sur laquelle elles sont définies décroît exponentiellement lentement lorsque p devient grand.

Esquissons la preuve de la majoration de (1). Nous reprenons en partie la méthode de Binder et DeMarco [BdM]. Il s'agit d'introduire un borélien A de mesure positive sur lequel on dispose d'un contrôle uniforme des branches inverses. La proposition 3.1 nous fournit des suites $(r_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ à décroissance lente telles que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq 0$:

- la branche inverse g_n de f^n existe sur la boule $\mathcal{B}_n := B_{f^n(x)}(r_n)$.
- l'ouvert $g_n(\mathcal{B}_n)$ contient la boule $\mathcal{B}'_n = B_x(\gamma_n e^{-n\chi_k})$,
- le volume de $g_n(\mathcal{B}_n)$ est majoré par $ce^{-2n\Sigma}$, où c est une constante.

On a noté $B_x(r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r . Les boules du type \mathcal{B}'_n permettent alors de construire des recouvrements de A de diamètre arbitrairement petit, et l'estimation sur le volume donne une borne sur leur cardinal. On obtient ainsi la majoration indiquée.

Venons-en à la minoration. Elle repose sur le résultat classique suivant (cf [Y]) :

Théorème 1.2 *Soit Λ un borélien de X tel que $\mu(\Lambda) > 0$. Supposons que pour tout $x \in \Lambda$, il existe une suite décroissante de réels positifs $(\rho_n(x))_{n \geq 0}$ vérifiant :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \rho_{n+1}(x)}{\log \rho_n(x)} = 1 \quad (2)$$

et

$$a \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(B_x(\rho_n(x)))}{\log \rho_n(x)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(B_x(\rho_n(x)))}{\log \rho_n(x)} \leq b \quad (3)$$

Alors la dimension de Hausdorff de Λ vérifie $a \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda) \leq b$.

Notons que seule la minoration sera utilisée, sous la forme du corollaire :

Corollaire 1.3 *Si il existe un borélien Λ de X vérifiant les propriétés (2) et (3), alors la dimension de μ satisfait :*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq a$$

En effet, si Z est un borélien de X de mesure 1, alors les points de $\Lambda \cap Z$ satisfont (2) et (3), ce qui entraîne $\hat{\dim}_{\mathcal{H}}(Z) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda \cap Z) \geq a$.

L'ensemble Λ sera en fait de mesure 1, et proviendra de la proposition sur les branches inverses. Nous prendrons pour $B_x(\rho_n(x))$ les boules \mathcal{B}'_n introduites plus haut : la décroissance lente de leur rayon nous assure que (2) est bien satisfaite. La minoration dans (1) est alors conséquence du corollaire. Signalons que l'inégalité (3) avec $a = \frac{\log d_i}{\chi_k}$ provient du fait que μ est de jacobien constant d_i (cf section 2.1).

Dans le cas holomorphe, le théorème 1.1 se reformule ainsi :

Corollaire 1.4 *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k de degré algébrique $d \geq 2$. Alors la dimension de la mesure d'équilibre μ de f vérifie :*

$$\frac{k \log d}{\chi_k} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq 2k - \frac{2\Sigma - k \log d}{\chi_k} \leq 2k - 2 + \frac{\log d}{\chi_k}$$

La dernière majoration provient de l'inégalité $\chi_1 \geq \frac{1}{2} \log d$ due à Briend-Duval [BD]. On retrouve alors l'estimation de Binder-DeMarco établie pour les endomorphismes f d'origine polynomiale [BdM]. Lorsque les exposants de Lyapounoff sont minimaux, i.e. égaux à $\frac{1}{2} \log d$, les inégalités ci-dessus deviennent des égalités, et seuls les exemples de Lattès vérifient cette propriété (cf [BDu], [D]). Notons que notre résultat reste valable pour les applications à allure polynomiale dont la mesure d'équilibre intègre les fonctions *psh* [DS1]. On obtient également ces estimations

dans un cadre *réel*. Par exemple, il est possible d'associer à des revêtements ramifiés sur des variétés riemanniennes des “mesures d'équilibre” μ naturelles (cf [DS1] §2). Elles sont de jacobien constant d_t , et le jacobien de f est μ -intégrable (cf section 2.1). Si les exposants de μ sont strictement positifs (cette hypothèse est toujours satisfaite en dimension 1), on démontre de même la proposition sur les branches inverses et on en déduit un encadrement analogue sur la dimension de μ .

L'article s'organise de la manière suivante. La deuxième section consiste en des généralités : nous y précisons les notations, ainsi que la définition des fonctions à variation lente. La section suivante est consacrée à la proposition sur les branches inverses. La démonstration du théorème 1.1 occupe finalement le dernier paragraphe.

2 Généralités

2.1 Définitions et remarques

Nous travaillons avec la métrique induite par une forme de Kähler ω fixée. Pour simplifier les estimations, nous l'identifions dans les cartes avec la métrique standard. Une fonction u sur X est *quasi-plurisousharmonique* (*quasi-psh*) si elle est intégrable, semi-continue supérieurement et vérifie $i\partial\bar{\partial}u \geq -c\omega$, où $c \geq 0$. Autrement dit, localement, u est *psh* à une fonction lisse près.

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on note $B_x(r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r . Le diamètre et le volume d'une partie A de X sont respectivement notés $\text{diam}(A)$ et $\text{vol}(A)$. La distance d'un point $x \in X$ à une partie A est notée $\text{dist}(x, A)$. On note aussi $\text{Lip}(h)$ la constante de Lipschitz d'une application $h : U \rightarrow X$ définie sur un ouvert U de X .

Dans toute la suite, $f : X \rightarrow X$ désigne une application méromorphe dominante : son jacobien, défini plus bas, n'est identiquement nul sur aucun ouvert de X . On note d_t son *degré topologique* (c'est aussi le cardinal d'une fibre générique), \mathcal{C} son ensemble critique et \mathcal{I} son ensemble d'indétermination. Si $x \notin \mathcal{I}$, on note $df(x)$ la différentielle de f en x , et $\|df(x)\|$ sa norme. On fixe aussi un sous-ensemble analytique \mathcal{J} de X contenant $f(\mathcal{C} \cup \mathcal{I})$, de sorte que la restriction $f : X \setminus f^{-1}(\mathcal{J}) \rightarrow X \setminus \mathcal{J}$ soit un revêtement non-ramifié.

Pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, on définit la forme $f^*\omega^l$ comme l'extension triviale de $(f|_{X \setminus \mathcal{I}})^*\omega^l$ à travers \mathcal{I} . Avec cette convention, $\text{Jac}(f)$ est la fonction positive sur X vérifiant $f^*\omega^k = \text{Jac}(f) \cdot \omega^k$, et les *degrés dynamiques* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de f sont donnés par (cf [RS]) :

$$\lambda_l := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f^{n*} \omega^l \wedge \omega^{k-l} \right)^{1/n}$$

Sous l'hypothèse $d_t > \lambda_{k-1}$, la suite de mesure $\mu_n := \frac{1}{d_t^n} f^{n*} \omega^k$ converge vers une mesure de probabilité invariante ergodique μ vérifiant (cf [RS], [G], [DS2]) :

(α) Les fonctions *quasi-psh* sur X sont μ -intégrables.

(β) μ est de jacobien constant d_t : pour tout A borélien de $X \setminus \mathcal{I}$ sur lequel f est injective, on a $\mu(f(A)) = d_t \cdot \mu(A)$.

La propriété (α) montre que la fonction $\log(\text{dist}(x, \mathcal{J}))$ est μ -intégrable. En effet, elle est minorée par une fonction *quasi-psh* sur X . C'est clair si X est une variété projective. Si X est seulement kählérienne, ceci résulte d'un résultat de Blanchard (cf [DS2], App. A.1). Il s'ensuit $\mu(\mathcal{J}) = 0$. En travaillant dans des cartes, on peut majorer les valeurs absolues des fonctions $\log \|df(x)^{\pm 1}\|$ et $\log(\text{Jac } f(x))$ par une fonction du type $c_1 - c_2 \log(\text{dist}(x, \mathcal{J}))$, où c_1 et c_2 sont des constantes positives. Ainsi, les fonctions $\log \|df(x)^{\pm 1}\|$ et $\log(\text{Jac } f(x))$ sont aussi μ -intégrables. Les exposants de Lyapounoff $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_k$ de μ sont donc bien définis. On dispose de l'égalité :

$$2\Sigma := 2(\chi_1 + \dots + \chi_k) = \int_X \log \text{Jac}(f) d\mu$$

et de l'inégalité $2\Sigma \geq \log d_t$ (cf par exemple [DS1]). Observons pour terminer que l'on peut remplacer f par une itérée dans la démonstration du théorème 1.1. En effet, le degré topologique de f^N est d_t^N et μ est aussi la mesure d'équilibre de f^N , d'exposants $N\chi_1, \dots, N\chi_k$. On peut donc supposer que l'on a pour $0 < \epsilon_0 < 1$ fixé

$$-\chi_1 \leq \int_X \log \|df(x)^{-1}\| d\mu(x) \leq -\chi_1(1-\epsilon_0), \quad \chi_k \leq \int_X \log \|df(x)\| d\mu(x) \leq \chi_k(1+\epsilon_0) \quad (4)$$

En effet, les exposants χ_1 et χ_k sont définis par :

$$-\chi_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \int_X \log \|df^N(x)^{-1}\| d\mu(x) = \inf_{N \geq 1} \left\{ \frac{1}{N} \int_X \log \|df^N(x)^{-1}\| d\mu(x) \right\}$$

$$\chi_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \int_X \log \|df^N(x)\| d\mu(x) = \inf_{N \geq 1} \left\{ \frac{1}{N} \int_X \log \|df^N(x)\| d\mu(x) \right\}$$

2.2 Extension naturelle

Il s'agit ici de rendre inversible le système dynamique (X, f, μ) en considérant son *extension naturelle* (cf [CFS], Chap.10, §4). Posons :

$$\widehat{X} := \left\{ \hat{x} := (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, f(x_n) = x_{n+1} \right\} \subset X^{\mathbb{Z}}$$

muni de la topologie produit. On note $\pi_0 : \hat{x} \mapsto x_0$ la projection "au temps zéro", et \hat{f} le décalage à gauche sur \widehat{X} de sorte que $f \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \hat{f}$. L'*extension naturelle*

de (X, f, μ) est le système dynamique $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{\mu})$, où $\widehat{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité sur \widehat{X} , invariante par \widehat{f} , vérifiant $\widehat{\mu}(\pi_0^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien A de X .

Introduisons quelques notations. Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$, $f_{\hat{x}}^{-n}$ désigne la branche inverse de f^n définie au voisinage de x_0 , vérifiant $f_{\hat{x}}^{-n}(x_0) = x_{-n}$. Notons \widehat{X}^* le borélien \widehat{f} -invariant suivant :

$$\widehat{X}^* := \left\{ \hat{x} \in \widehat{X}, x_n \notin \mathcal{J}, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}$$

où \mathcal{J} a été introduit à la section 2.1. Cet ensemble est de mesure totale, car $\mu(\mathcal{J}) = 0$. Signalons qu'on lui supprimera par la suite des ensembles de mesure nulle, sans pour autant changer de notation.

2.3 Fonctions à variation lente

La preuve du théorème 1.1 repose sur l'existence des branches inverses le long d'orbites négatives typiques. Il sera aussi nécessaire de pouvoir comparer les familles de branches inverses $\left(f_{\widehat{f}^p(x)}^{-n} \right)_{n \geq 0}$ lorsque p devient grand. On s'intéresse en particulier aux variations du rayon de la boule sur laquelle celles-ci sont définies. Cela nous amène à introduire la définition de fonction à *variation lente*, qui rejoint celle de fonction *tempérée* ([KH], Chap.S. §2) :

Définition 2.1 Soit $\epsilon > 0$. Une fonction mesurable $S : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dite ϵ -lente si il existe une fonction mesurable $\tilde{S}_1 : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \text{ } \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall q \geq 1, S(\widehat{f}^q(\hat{x})) \geq e^{-q\epsilon} \tilde{S}_1(\hat{x})$$

S est dite ϵ -rapide si il existe une fonction mesurable $\tilde{S}_2 : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall \hat{x} \text{ } \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall q \geq 1, S(\widehat{f}^q(\hat{x})) \leq e^{q\epsilon} \tilde{S}_2(\hat{x})$$

Observons que le supremum et l'infimum d'une famille finie de fonctions ϵ -rapides (resp. ϵ -lentes) sont encore des fonctions ϵ -rapides (resp. ϵ -lentes). On peut aussi supposer que \tilde{S}_1 (resp. \tilde{S}_2) prend ses valeurs dans $]0, 1]$ (resp. $[1, +\infty[$). Le lemme qui suit repose sur le théorème de Birkhoff.

Lemme 2.2 Soient $\epsilon > 0$ et $u : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable telle que $\log(u) \in L^1(\mu)$. Posons $\chi := \int_X \log u \, d\mu$.

(a) Il existe une fonction ϵ -lente $V_1 : \widehat{X} \rightarrow]0, 1]$, et une fonction ϵ -rapide $V_2 : \widehat{X} \rightarrow [1, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \text{ } \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 1, V_1(\hat{x})e^{n(\chi-\epsilon)} \leq \prod_{j=1}^n u(x_{-j}) \leq V_2(\hat{x})e^{n(\chi+\epsilon)}$$

(b) Il existe une fonction ϵ -lente $V : \widehat{X} \rightarrow]0, 1]$ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 0, u(x_{-n}) \geq V(\hat{x})e^{-n\epsilon}$$

DÉMONSTRATION : Montrons la première partie. Il suffit d'établir l'existence de V_2 , car celle de V_1 s'en déduit, en considérant la fonction $1/u$. Le théorème de Birkhoff entraîne :

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log u(x_{-j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log u(x_j) = \chi$$

Il existe donc une fonction mesurable $p : \widehat{X} \rightarrow [1, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 1, \prod_{j=1}^n u(x_{-j}) \leq p(\hat{x})e^{n(\chi+\epsilon/2)}$$

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 0, p(\hat{x})^{-1}e^{n(\chi-\epsilon/2)} \leq \prod_{j=0}^n u(x_j) \leq p(\hat{x})e^{n(\chi+\epsilon/2)} \quad (5)$$

Posons

$$V_2'(\hat{x}) := \sup_{n \geq 1} \left\{ \prod_{j=1}^n u(x_{-j}) e^{-n(\chi+\epsilon/2)} \right\} \text{ et } V_2(\hat{x}) := \max \left\{ 1, V_2'(\hat{x}) \right\}$$

Ces fonctions sont bien finies presque partout. Fixons \hat{x} générique, et posons $p := p(\hat{x})$, $V_2 := V_2(\hat{x})$, $\tau_{\pm} := e^{\chi \pm \epsilon/2}$ et $\pi_n := \prod_{j=0}^n u(x_j)$. La ligne (5) s'écrit alors $p^{-1}\tau_-^n \leq \pi_n \leq p\tau_+^n$. Ainsi, pour tout $q \geq 1$:

$$\begin{aligned} V_2'(\hat{f}^q(\hat{x})) &\leq \sup \left\{ \frac{\pi_{q-1}\tau_+^{-1}}{\pi_{q-2}}, \dots, \frac{\pi_{q-1}\tau_+^{1-q}}{\pi_0}, \pi_{q-1}\tau_+^{-q}, \pi_{q-1}\tau_+^{-q}V_2 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{p^2\tau_+^{q-2}}{\tau_-^{q-2}}, \dots, p^2, p\tau_+^{-1}, p\tau_+^{-1}V_2 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ p^2e^{(q-2)\epsilon}, \dots, p^2, p\tau_+^{-1}, p\tau_+^{-1}V_2 \right\} \\ &\leq p^2e^{q\epsilon} \max(1, \tau_+^{-1})V_2 \end{aligned}$$

car $p \geq 1$ et $V_2 \geq 1$. Ceci entraîne que V_2 est ϵ -rapide. Le point (b) est une conséquence du point (a) en remplaçant ϵ par $\epsilon/2$: l'inégalité est satisfaite avec la fonction $V := \min\{1, u(x_0), e^{\chi}V_1/V_2\}$. \square

2.4 Dimensions

Nous rappelons la définition de la dimension de Hausdorff et celle de la dimension d'une mesure. On consultera par exemple les livres de Falconer ([F], Chap.2) et de Pesin ([P], Chap.2). Soit Λ une partie de X . Pour tout $\alpha \geq 0$ et $\delta > 0$, on note :

$$\Lambda_{\alpha,\delta}(\Lambda) := \inf_{\mathcal{G}_\delta} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\delta} (\text{diam } U)^\alpha \right\}$$

où \mathcal{G}_δ parcourt l'ensemble des recouvrements de Λ par une famille finie ou dénombrable d'ouverts de diamètre inférieur à δ . La α -mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff de Λ sont alors définies par :

$$\Lambda_\alpha(\Lambda) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \uparrow \Lambda_{\alpha,\delta}(\Lambda)$$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda) = \inf \left\{ \alpha \geq 0, \Lambda_\alpha(\Lambda) = 0 \right\} = \sup \left\{ \alpha \geq 0, \Lambda_\alpha(\Lambda) = +\infty \right\}$$

et la dimension de μ est égale à :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) := \inf \left\{ \dim_{\mathcal{H}}(Z), Z \text{ borélien de } X, \mu(Z) = 1 \right\}$$

Celle-ci nous renseigne sur la manière dont μ remplit son support. Observons pour terminer le fait élémentaire suivant. Nous l'utiliserons pour établir la majoration du théorème 1.1.

Lemme 2.3 *Pour tout borélien Λ vérifiant $\mu(\Lambda) > 0$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda)$.*

DÉMONSTRATION : Introduisons l'ensemble

$$Z := \left\{ z \in X, \exists n \in \mathbb{Z}, f^n(z) \cap \mathcal{J} \neq \emptyset \right\}$$

où \mathcal{J} a été défini à la section 2.1. Puisque $\mu(\mathcal{J}) = 0$, l'invariance de μ entraîne $\mu(Z) = 0$. L'ensemble invariant $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Lambda \setminus Z)$ est donc de mesure 1, car μ est ergodique. On en déduit :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Lambda \setminus Z) \right) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathcal{H}} f^n(\Lambda \setminus Z) = \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda \setminus Z) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda)$$

où la première égalité est classique, tandis que la deuxième provient du caractère méromorphe de f . \square

3 Branches inverses

L'objectif de cette partie est d'établir la proposition 3.1 qui fournit l'existence et le contrôle des branches inverses des itérés de f le long d'orbites génériques. On trouve des résultats similaires dans les articles de Briend-Duval [BD] et Binder-DeMarco [BdM]. Nous traitons ici le cas méromorphe et nous précisons comment varient les fonctions C, κ et r . On se fixe une fois pour toutes $0 < \epsilon \ll \chi_1$. Rappelons que l'ensemble \widehat{X}^* a été introduit dans la section 2.2.

Proposition 3.1 *Il existe une constante $\rho \geq 1$ indépendante de ϵ , et des fonctions mesurables $C, \kappa : \widehat{X}^* \rightarrow [1, +\infty[$, $r : \widehat{X}^* \rightarrow]0, 1]$ satisfaisant :*

- (a) r est $\rho\epsilon$ -lente, C et κ sont ϵ -rapides.
- (b) $f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $B_{x_0}(r(\hat{x}))$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) Pour tout $0 < s \leq r(\hat{x})$, on a $B_{x_{-n}}\left(\frac{s}{C(\hat{x})}e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}\right) \subset f_{\hat{x}}^{-n}B_{x_0}(s)$.
- (d) Pour tout $0 < s \leq r(\hat{x})$, on a $\text{vol } f_{\hat{x}}^{-n}(B_{x_0}(s)) \leq \kappa(\hat{x})\text{vol } B_{x_0}(s).e^{-n(2\Sigma-\epsilon)}$.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants. Le premier montre que les orbites négatives typiques de f ne s'approchent pas trop vite de l'ensemble analytique \mathcal{J} définie à la section 2.1 :

Lemme 3.2 *Il existe une fonction ϵ -lente $A_1 : \widehat{X}^* \rightarrow]0, 1]$ telle que :*

$$\forall \hat{x} \in \widehat{X}^* , \forall n \in \mathbb{N} , \text{dist}(x_{-n}, \mathcal{J}) \geq 2A_1(\hat{x})e^{-n\epsilon}$$

DÉMONSTRATION : La fonction $u(x) := \log(\text{dist}(x, \mathcal{J}))$ est μ -intégrable, d'après la section 2.1. On invoque alors le lemme 2.2-(b). On supprime ici à l'ensemble \widehat{X}^* un ensemble de mesure $\widehat{\mu}$ nulle. \square

Le deuxième lemme est un résultat d'inversion locale quantitative. Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}^*$, on pose :

$$\mathcal{V}_n(\hat{x}) := \{z \in X , \text{dist}(z, \mathcal{J}) \geq A_1(\hat{x})e^{-n\epsilon}\}$$

Ainsi, f possède d_t branches inverses $f_1^{-1}, \dots, f_{d_t}^{-1}$ au voisinage de tout point $z \in \mathcal{V}_n(\hat{x})$. On note

$$M_n(\hat{x}) := 1 + \|f\|_{\mathcal{C}^2, \mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})} + \|f^{-1}\|_{\mathcal{C}^2, \mathcal{V}_n(\hat{x})}$$

où on a posé :

$$\|f^{-1}\|_{\mathcal{C}^2, \mathcal{V}_n(\hat{x})} := \sup_{i \in \{1, \dots, d_t\}} \left\{ \|f_i^{-1}\|_{\mathcal{C}^2, \mathcal{B}} , \mathcal{B} \text{ boule de } \mathcal{V}_n(\hat{x}) \right\}$$

L'application f étant méromorphe, il existe des constantes $c, c' \geq 1$ et $\rho' \geq 1$ indépendantes de ϵ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \in \widehat{X}^*, \forall z \in \mathcal{V}_n(\hat{x}), M_n(\hat{x})^{2k+1} \leq c' \text{dist}(z, \mathcal{J})^{-\rho'} \leq c (A_1(\hat{x})e^{-n\epsilon})^{-\rho'} \quad (6)$$

Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$\alpha_n(\hat{x}) := \min \{1, \|df(x_{-n-1})\|, \|df(x_{-n-1})^{-1}\|, \text{Jac } f(x_{-n-1})\}$$

On pose alors :

$$r_n(\hat{x}) := \frac{\alpha_n(\hat{x})A_1(\hat{x})e^{-n\epsilon}}{CM_n(\hat{x})^{2k+1}}$$

où C est une constante vérifiant $C > \max\{e^{5\epsilon/4}, (e^{\epsilon/4}-1)^{-1}\}$. Le théorème d'inversion locale "précisé" est le suivant.

Lemme 3.3 *Soit $B_n := B_{x_{-n}}(r_n(\hat{x}))$. Alors, pour tout $n \geq 0$,*

- (a) f possède une branche inverse g sur B_n vérifiant $g(x_{-n}) = x_{-n-1}$.
- (b) $\text{Lip}(g|_{B_n}) \leq \|df(x_{-n-1})^{-1}\| e^{\epsilon/2}$
- (c) $\text{Lip}(f|_{g(B_n)}) \leq \|df(x_{-n-1})\| e^{\epsilon/2}$
- (d) $\inf \{ \text{Jac } f(y), y \in g(B_n) \} \geq \text{Jac } f(x_{-n-1})e^{-\epsilon/2}$
- (e) *Il existe une fonction $\eta : \widehat{X}^* \rightarrow]0, 1]$, qui est $3\rho'\epsilon$ -lente, et telle que*

$$\forall n \geq 0, r_n(\hat{x}) \geq e^{-3n\rho'\epsilon}\eta(\hat{x})$$

DÉMONSTRATION :

(a) On a $B_n \subset \mathcal{V}_n(\hat{x}) \subset X \setminus \mathcal{J}$ car $r_n(\hat{x}) \leq d(x_{-n}, \mathcal{J})/2$.

(b) Par définition de $M_n(\hat{x})$ et de $r_n(\hat{x})$, on obtient en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \text{Lip}(g|_{B_n}) &\leq \sup \{ \|dg(y)\|, y \in B_n \} \\ &\leq \|df(x_{-n-1})^{-1}\| + r_n(\hat{x})M_n(\hat{x}) \\ &\leq \|df(x_{-n-1})^{-1}\| + \|df(x_{-n-1})^{-1}\|/C \\ &\leq \|df(x_{-n-1})^{-1}\| e^{\epsilon/4} \leq \|df(x_{-n-1})^{-1}\| e^{\epsilon/2} \end{aligned}$$

(c) D'après (b), $g(B_n)$ est contenu dans la boule centrée en x_{-n-1} et de rayon :

$$r'_n(\hat{x}) := r_n(\hat{x}) \|df(x_{-n-1})^{-1}\| e^{\epsilon/4} \leq r_n(\hat{x})M_n(\hat{x})e^{\epsilon/4}$$

Elle est en particulier contenue dans $\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})$. En effet, on a :

$$r_n(\hat{x})M_n(\hat{x})e^{\epsilon/4} \leq A_1(\hat{x})e^{-n\epsilon}e^{\epsilon/4}/C \leq A_1(\hat{x})e^{-(n+1)\epsilon} \leq d(x_{-n-1}, \mathcal{J})/2$$

On en déduit comme précédemment :

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f|_{g(B_n)}) &\leq \|df(x_{-n-1})\| + r'_n(\hat{x})M_n(\hat{x}) \\ &\leq \|df(x_{-n-1})\| e^{\epsilon/2} \end{aligned}$$

(d) On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \text{Jac } f(y), y \in g(B_n) \right\} &\leq \text{Jac } f(x_{-n-1}) + r'_n(\hat{x})M_n(\hat{x})^{2k} \\ &\leq \text{Jac } f(x_{-n-1})e^{\epsilon/2} \end{aligned}$$

(e) Puisque les fonctions *quasi-psh* sont μ -intégrables, il en est de même pour

$$z \mapsto \min \left\{ 1, \|df(z)\|, \|df(z)^{-1}\|, \text{Jac } f(z) \right\}$$

Ainsi, d'après le lemme 2.2(b), il existe une fonction ϵ -lente $A_2 : \widehat{X} \rightarrow]0, 1]$ vérifiant

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 0, \alpha_n(\hat{x}) \geq A_2(\hat{x})e^{-n\epsilon}$$

A l'aide de la ligne (6), on vérifie facilement que l'on a (avec $\rho' \geq 1$) :

$$\forall \hat{x} \hat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 0, r_n(\hat{x}) \geq e^{-3n\rho'\epsilon} \left((Cc)^{-1} A_1(\hat{x})^{2\rho'} A_2(\hat{x})^{\rho'} \right)$$

On prend alors pour η la fonction entre les parenthèses : elle est bien $3\rho'\epsilon$ -lente car A_1 et A_2 sont ϵ -lentes. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1 (cf [BD] et [BdM]): Les notations sont celles du lemme 3.3. Posons

$$\forall n \geq 1, \tilde{B}_n := \{ f^{n-1}(z) / z \in B_{n-1}, f(z) \in B_{n-2}, \dots, f^{n-1}(z) \in B_0 \} \subset B_0$$

D'après le lemme 2.2, le lemme 3.3, et les inégalités de la ligne (4) (cf section 2.1), il existe des fonctions ϵ -rapides $C_1, C_2 : \widehat{X}^* \rightarrow [1, +\infty[$ et une fonction ϵ -lente $C_3 : \widehat{X}^* \rightarrow]0, 1]$ vérifiant :

- (1) Pour tout $n \geq 1$, $g_n := f_{\hat{x}}^{-n}$ existe sur \tilde{B}_n .
- (2) $\text{Lip}(g_n|_{\tilde{B}_n}) \leq \prod_{i=1}^n \|df(x_{-i})^{-1}\| e^{n\epsilon/2} \leq C_1(\hat{x})e^{n(-\chi_1(1-\epsilon_0)+\epsilon)}$
- (3) $\text{Lip}\left(f_{g_n}^n|_{\tilde{B}_n}\right) \leq \prod_{i=1}^n \|df(x_{-i})\| e^{n\epsilon/2} \leq C_2(\hat{x})e^{n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}$
- (4) $\inf \left\{ \text{Jac } f^n(y), y \in g_n(\tilde{B}_n) \right\} \geq \text{Jac } f^n(x_{-n})e^{-n\epsilon/2} \geq C_3(\hat{x})e^{n(2\Sigma-\epsilon)}$

Posons $C := \max\{C_1, C_2\}$ et $r := \eta/C$, où η a été introduite au lemme 3.3. Ces fonctions sont respectivement ϵ -rapide et $\rho\epsilon$ -lente, avec $\rho := 3\rho' + 1$. Pour montrer (b), on vérifie l'inclusion $B(x_0, r(\hat{x})) \subset \tilde{B}_n$ par récurrence, en utilisant (2). L'assertion (c) découle de (3). Enfin, le point (d) provient du théorème de changement de variables avec $\kappa := C_3^{-1}$. \square

4 Démonstration du théorème 1.1

4.1 Minoration

Etant donné $\epsilon > 0$, prenons les fonctions à variation lente r, C définies par la proposition 3.1. La fonction $\zeta := r/C$ est donc $(\rho + 1)\epsilon$ -lente, et il existe une fonction $\sigma : \widehat{X}^* \rightarrow]0, 1]$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \zeta(\widehat{f}^n(\widehat{x})) \geq \sigma(\widehat{x}).e^{-n(\rho+1)\epsilon}$$

On obtient ainsi, en posant $\delta_n := e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}.e^{-n(\rho+1)\epsilon}$:

$$\forall \widehat{x} \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 1, B_{x_0}(\sigma(\widehat{x}).\delta_n) \subset B_{x_0}(\zeta(\widehat{f}^n(\widehat{x})).e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)})$$

Puisque f^n est injective sur ces boules (cf proposition 3.1-(c)), et que μ est une mesure de *probabilité* et de *jacobien* d_t (cf section 2.1), cette inclusion implique :

$$\forall \widehat{x} \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 1, \mu(B_{x_0}(\sigma(\widehat{x}).\delta_n)) \leq d_t^{-n}$$

ce qui fournit immédiatement :

$$\forall \widehat{x} \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \forall n \geq 1, \frac{\log \mu(B_{x_0}(\sigma(\widehat{x}).\delta_n))}{\log(\sigma(\widehat{x}).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t^{-n}}{\log(\sigma(\widehat{x}).\delta_n)}$$

On en déduit, en prenant la limite inférieure :

$$\forall \widehat{x} \widehat{\mu}\text{-p.p.}, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(B_{x_0}(\sigma(\widehat{x}).\delta_n))}{\log(\sigma(\widehat{x}).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1 + \epsilon_0) + (\rho + 2)\epsilon}$$

Il existe donc un borélien Λ de X vérifiant $\mu(\Lambda) = 1$, et $\theta : \Lambda \rightarrow]0, 1]$ tels que :

$$\forall x \in \Lambda, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(B_x(\theta(x).\delta_n))}{\log(\theta(x).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1 + \epsilon_0) + (\rho + 2)\epsilon} \quad (7)$$

Le corollaire 1.3 appliqué à $\rho_n(x) := \theta(x).\delta_n$ entraîne :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1 + \epsilon_0) + (\rho + 2)\epsilon}$$

On obtient la minoration $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq \log d_t / \chi_k$ en faisant tendre ϵ et ϵ_0 vers 0.

4.2 Majoration

Considérons pour $\epsilon > 0$ fixé les fonctions à variation lente r, C et κ définies à la proposition 3.1. On leur associe des fonctions mesurables \tilde{r}, \tilde{C} et $\tilde{\kappa}$ vérifiant les propriétés de la définition 2.1. Fixons aussi $r_0, C_0, \kappa_0 > 0$ pour que le borélien

$$\widehat{A} := \left\{ \widehat{x} \in \widehat{X}^*, \tilde{r}(\widehat{x}) \geq r_0, \tilde{C}(\widehat{x}) \leq C_0, \tilde{\kappa}(\widehat{x}) \leq \kappa_0 \right\}$$

vérifie $\hat{\mu}(\hat{A}) > 0$. On note alors $A := \pi_0(\hat{A})$, et pour tout $n \geq 0$:

$$r_n := r_0 e^{-n\rho\epsilon}, \quad C_n := C_0 e^{n\epsilon}, \quad \kappa_n := \kappa_0 e^{n\epsilon}, \quad \delta_n := (r_n/C_n) \cdot e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}$$

Pour tout $\hat{x} \in \hat{A}$ et $n \geq 0$, on pose aussi :

$$\hat{x}_n := \hat{f}^n(\hat{x}), \quad g_n := f_{\hat{x}_n}^{-n}, \quad x := \pi_0(\hat{x}), \quad x_n := \pi_0(\hat{x}_n) = f^n(x)$$

Le lemme suivant est une conséquence de la proposition 3.1 :

Lemme 4.1 *Pour tout $\hat{x} \in \hat{A}$, on a :*

- (a) g_n est définie sur $B_{x_n}(r_n)$
- (b) Pour tout $s \in]0, r_n]$, $B_x(\frac{s}{r_n}\delta_n) \subset g_n(B_{x_n}(s))$.
- (c) $\text{vol } g_n(B_{x_n}(r_n)) \leq c e^{-2n\Sigma}$, où c est une constante indépendante de n .

DÉMONSTRATION : Les deux premiers points s'obtiennent à l'aide de la proposition 3.1-(b),(c), en observant :

$$r(\hat{x}_n) \geq \tilde{r}(\hat{x}) e^{-n\rho\epsilon} \geq r_0 e^{-n\rho\epsilon} = r_n \quad \text{et} \quad C(\hat{x}_n) \leq \tilde{C}(\hat{x}) e^{n\epsilon} \leq C_0 e^{n\epsilon} = C_n$$

Pour le dernier point, la proposition 3.1-(d) et l'inégalité $\kappa(\hat{x}_n) \leq \kappa_0 e^{n\epsilon}$ entraînent :

$$\begin{aligned} \text{vol } g_n(B_{x_n}(r_n)) &\leq \kappa_0 e^{n\epsilon} \text{vol}(B_{x_n}(r_n)) e^{-n(2\Sigma-\epsilon)} \\ &= \kappa_0 e^{n\epsilon} \text{vol}(B_{x_n}(r_0)) \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^{2k} e^{-n(2\Sigma-\epsilon)} \leq c e^{-2n\Sigma} \end{aligned}$$

avec $c := \kappa_0 \cdot \text{vol}(X)$. □

Nous montrons la majoration en prouvant l'inégalité :

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \alpha_\epsilon := 2k - \frac{2\Sigma - \log d_t - 2k\rho\epsilon}{\chi_k(1+\epsilon_0) + (\rho+2)\epsilon} \quad (8)$$

Etant donné $\delta > 0$, fixons $n \geq 0$ pour que $2\delta_n < \delta$ et choisissons E_n , un sous-ensemble fini de A , vérifiant :

- (i) les boules de la famille $\{B_x(\delta_n/4), x \in E_n\}$ sont disjointes deux à deux.
- (ii) A est recouvert par la réunion $\bigcup_{x \in E_n} B_x(\delta_n)$.

On a alors par définition de la fonction d'ensemble $\Lambda_{\alpha,\delta}$ (cf section 2.4) :

$$\Lambda_{\alpha_\epsilon,\delta}(A) \leq \#E_n \cdot (2\delta_n)^{\alpha_\epsilon} \quad (9)$$

Nous montrons maintenant l'estimation (8) en vérifiant que le membre de droite de (9) est borné par une constante indépendante de δ . Nous évaluons $\#E_n$ à l'aide du résultat élémentaire suivant :

Lemme 4.2 *Il existe une famille d'ouverts \mathcal{P}_n de cardinal au plus $\sigma r_n^{-2k} d_t^n$, où σ est une constante indépendante de n , vérifiant :*

- (a) $\forall P \in \mathcal{P}_n, \text{vol}(P) \leq ce^{-2n\Sigma}$.
- (b) $\forall x \in E_n, B_x(\delta_n/4) \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n} P$.

Supposons ce résultat acquis, et terminons la démonstration du théorème. Si Γ_n désigne le volume d'une boule de rayon $\delta_n/4$, le lemme 4.2 et (i) entraînent :

$$\#E_n \leq \frac{1}{\Gamma_n} \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \text{vol}(P) \leq \frac{1}{\Gamma_n} \sigma r_n^{-2k} d_t^n \cdot ce^{-2n\Sigma} \quad (10)$$

On obtient alors facilement $\Lambda_{\alpha_\epsilon, \delta}(A) \leq \tau$ où τ est une constante indépendante de δ (utiliser (ii) et les lignes (9) et (10)). On a donc $\Lambda_{\alpha_\epsilon}(A) \leq \tau$, ce qui donne (8). On en déduit $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \alpha_\epsilon$ car A est un borélien de mesure positive (cf le lemme 2.3). La majoration s'ensuit car ϵ est arbitraire.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.2 : Soient $n \geq 0$ et \mathcal{B} une famille finie de boules recouvrant X de rayon $r_n/4$ de cardinal majoré par σr_n^{-2k} , où σ est une constante indépendante de n . Reprenons les notations et les résultats du lemme 4.1. Soient $x \in A$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $f^n(x) \in B$. Si $2B$ désigne la boule concentrique à B et de rayon double, on a clairement :

$$B_{x_n}(r_n/4) \subset 2B \subset B_{x_n}(r_n) \quad (11)$$

Posons $P_x := g_n(2B)$. L'inclusion de droite dans (11) et le lemme 4.1-(a) montrent que l'ouvert P_x est bien défini et qu'il est contenu dans $g_n(B_{x_n}(r_n))$. Le lemme 4.1-(c) entraîne :

$$\text{vol}(P_x) \leq ce^{-2n\Sigma}$$

Si $x \in E_n$, l'inclusion de gauche dans (11) et le lemme 4.1-(b) avec $s = r_n/4$ impliquent :

$$B_x(\delta_n/4) \subset g_n(B_{x_n}(r_n/4)) \subset P_x$$

La famille $\mathcal{P}_n := \{g_n(2B), B \in \mathcal{B}\}$ répond au problème posé. Son cardinal est bien majoré par $\sigma r_n^{-2k} \cdot d_t^n$, car f^n est de degré topologique d_t^n et les applications g_n sont des branches inverses de f^n sur les boules de \mathcal{B} . \square

References

- [BDu] F. Berteloot, C. Dupont, *Linéarisation d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ et caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green*, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.DS/0401250> (2003).

- [BM] F. Berteloot, V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés, **7**, SMF et EDP Sciences, 2001.
- [BdM] I. Binder, L. DeMarco, *Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of \mathbb{C}^n* , Int. Math. Res. Not., **11** (2003), 613-625.
- [B] J.Y. Briend, *Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1997.
- [BD] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.
- [CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya. B. Sinai, *Ergodic Theory*, Grund. Math. Wiss., No **245**, Springer, 1985.
- [DS1] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale*, J. Math. Pures Appl., (9) **82** (2003), no. 4, 367-423.
- [DS2] T.C. Dinh, N. Sibony, *Distributions des valeurs de transformations méromorphes et applications*, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.DS/0306095> (2003).
- [D] C. Dupont, *Endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k vérifiant la formule de Pesin*, Prépublication, 2003.
- [F] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, Wiley, 1997
- [G] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Prépublication no **254**, Laboratoire E. Picard, Toulouse, 2003.
- [KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [L] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.
- [M] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*, Lecture Notes in Math., **1331**, Springer, 1988.
- [P] Y. B. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems*, Chicago Lectures in Math. Series, 1997.
- [R] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **50** (1979), 27-58.

- [RS] A. Russakovskii, B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Ind. Univ. Math. J., **46** (1997), 897-932.
- [S] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* , in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No **8**, SMF et EDP Sciences, 1999.
- [Y] L.S. Young, *Dimension, entropy and Lyapounov exponents*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, **2** (1982), no. 1, 109-124.

Tien-Cuong Dinh et Christophe Dupont
Mathématique, UMR 8628 - Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France.

TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr
Christophe.Dupont@math.u-psud.fr