



# **Linéarisation d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{CP}(k)$ et caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green**

François Berteloot, Christophe Dupont

## **► To cite this version:**

François Berteloot, Christophe Dupont. Linéarisation d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{CP}(k)$  et caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green. 2004. <hal-00001045>

**HAL Id: hal-00001045**

**<https://hal.science/hal-00001045v1>**

Preprint submitted on 20 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Linéarisation d'endomorphismes holomorphes de $\mathbf{P}^k$ et caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green

F. Berteloot et C. Dupont

## 1 Introduction et résultats

Les propriétés dynamiques d'un endomorphisme  $f$ , holomorphe et de degré algébrique  $d \geq 2$  sur l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^k$ , se reflètent sur son courant et sa mesure de Green. Ce sont respectivement un  $(1,1)$ -courant positif fermé  $T$  obtenu comme limite de  $\frac{1}{d^n} f^{n*} \omega$  où  $\omega$  désigne la forme de Fubini-Study et une mesure de probabilité invariante  $\mu$  obtenue comme  $k$ -ième puissance extérieure de  $T$ . Ces objets, introduits par Hubbard-Papadopol [12] et Fornaess-Sibony [9] possèdent de remarquables propriétés ergodiques. Fornaess et Sibony ont montré que la mesure de Green est mélangeante [10], elle est aussi l'unique mesure d'entropie maximale et ses exposants de Liapounov sont supérieurs à  $\frac{1}{2} \log d$  comme l'ont montré Briend et Duval [3], [4].

La dimension de Hausdorff de  $\mu$  ( $Dim_H \mu$ ), définie comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des ensembles de  $\mu$ -mesure pleine, est une caractéristique géométrique importante du système dynamique  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ . L'une des premières questions concernant l'estimation de cette dimension est de déterminer les systèmes pour lesquels elle est maximale.

En dimension  $k = 1$ , Ledrappier a montré que la maximalité de  $Dim_H \mu$  équivaut à l'absolue continuité de  $\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue [14]. Un argument de renormalisation montre alors que l'endomorphisme  $f$  est un exemple de Lattès, il s'agit d'un cas particulier d'un résultat de Mayer [15]. Notons aussi le résultat très précis de Zdunik [17] qui stipule que la dimension de Hausdorff de  $\mu$  coïncide avec celle de son support (l'ensemble de Julia de  $f$ ) si et seulement si  $f$  est un exemple de Lattès, un polynôme de Tchebychev ou une puissance  $z^{\pm d}$ .

En dimension supérieure, il est possible d'adapter le travail de Ledrappier selon lequel, pour toute mesure invariante par  $f$ , l'égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle force l'absolue continuité. Ceci fait l'objet de [8] et concerne en particulier les mesures de Green d'exposants de Liapounov minimaux. Par ailleurs, la maximalité de  $Dim_H \mu$  entraîne la minimalité des exposants, comme l'ont implicitement établi Binder et DeMarco [2] (voir aussi l'appendice). Ainsi, une caractérisation précise des endomorphismes dont la mesure est absolument continue montrerait que, pour un système

$(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  générique, l'un au moins des exposants de Liapounov de  $\mu$  est strictement supérieur à  $\frac{1}{2} \log d$  et  $\dim_H \mu$  est strictement inférieure à  $2k$ . En outre ceci répondrait à une question posée par Fornaess et Sibony dans [11]. Le principal résultat de cet article fournit une telle caractérisation :

**Théorème 1** *Pour tout système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ , la mesure de Green  $\mu$  est non singulière par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si  $f$  est un endomorphisme de Lattès : il existe alors un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^k & \xrightarrow{D} & \mathbf{C}^k \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbf{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^k \end{array}$$

où  $D$  est une application affine de partie linéaire  $\sqrt{d} U$  ( $U$  unitaire) et  $\sigma$  un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique complexe agit transitivement.

Il est crucial, dans notre contexte, que la mesure de Green provienne d'un courant ( $\mu = T^k$ ) car l'invariance du courant de Green ( $f^*T = dT$ ) recèle plus d'informations géométriques que celle de la mesure. En particulier, il a été démontré dans [1] que  $f$  est un endomorphisme de Lattès dès que son courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert de  $\mathbf{P}^k$ . La preuve du théorème 1 revient donc à déduire la régularité de  $T$  de celle de  $\mu$ . Nous utiliserons pour cela des arguments de renormalisation qui nécessitent de linéariser la suite  $(f^n)_n$  le long d'orbites typiques.

La mise au point d'un tel procédé de linéarisation occupe la section 3. Il s'agit, pour des choix  $\mu$ -génériques de  $x$ , de rendre la suite  $(f^n)_n$  normale en  $x$  en la précomposant par des contractions équivalentes aux applications linéaires tangentes inverses  $(\tau_x \circ (d_0 f_x^n)^{-1})$ . A cet effet, nous estimons précisément les erreurs cumulées lorsque l'on remplace  $f$  par sa différentielle le long d'une orbite (cf. Proposition 2). Outre la stricte positivité des exposants de Liapounov  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  du système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ , ceci requiert l'hypothèse  $\lambda_k < 2\lambda_1$ . Une fois acquise la possibilité de linéariser, nous majorons la norme des différentielles  $(d_0 f_x^n)^{-1}$  en reprenant, dans ce contexte, la méthode pluripotentialiste de Briend et Duval. Nous obtenons finalement une minoration de la masse des points  $x$  où  $(f^n)_n$  est linéarisable et les normes  $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\|$  convenablement majorées :

**Théorème 2** *Soit  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  un système tel que  $\lambda_k < 2\lambda_1$ . Pour  $\tau > 0$ ,  $\rho \in ]0, 1]$  et  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$  l'ensemble des points  $x \in \mathbf{P}^k$  tels que  $f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1}$  soit injective de  $B(0, \rho)$  dans  $B(0, R_0)$  et  $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \leq \tau d^{-\frac{n}{2}}$ .*

*Alors il existe  $\alpha : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  et  $C > 0$  ne dépendants que de  $f$  tels que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$  et  $\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)] \geq \alpha(\rho) - \frac{C}{\tau^2 \rho^2}$ .*

Il est facile de d'établir une version plus maniable du théorème 2. En outre, grâce à la propriété de mélange, on peut assujettir une sous-suite de l'orbite  $(f^n(x))_n$  à ne pas s'échapper d'un borélien prescrit :

**Théorème 3** *Si les exposants de Liapounov de  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  sont tels que  $\lambda_k < 2\lambda_1$ , alors pour tout borélien  $B$  chargé par  $\mu$ , on peut trouver  $\tilde{B} \subset B$  de masse arbitrairement proche de  $\mu(B)^2$  et  $\tau_0 > 0$  tels que pour tout point  $x \in \tilde{B}$  il existe une suite extraite  $(f^{n_j})_j$  ainsi qu'un réel  $\nu(x) > 0$  vérifiant :*

- 1)  $f^{n_j}(x) \in B$  pour tout  $j \in \mathbf{N}$
- 2)  $f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}$  converge uniformément vers un biholomorphisme sur  $B(0, \nu(x))$
- 3)  $\|(d_0 f_x^{n_j})^{-1}\| \leq \tau_0 d^{-\frac{n_j}{2}}$ .

La section 4 concerne la preuve du théorème 1 proprement dite. La régularité de  $T$  se déduit, par des arguments de renormalisation, des relations  $f^{n*}T = d^n T$  pourvu que la suite  $(f^n)_n$  soit assimilable à une suite d'homothéties  $(d^{-\frac{n}{2}} Id)_n$  (cf. Lemme 3). Il s'agit donc de s'assurer que, lorsque  $\mu$  est absolument continue, les différentielles  $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$  intervenant dans le théorème 3 sont équivalentes à des homothéties de rapport  $d^{-\frac{n_j}{2}}$ . En d'autres termes, il faut contrôler les distorsions des ellipsoïdes  $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}[B(0, 1)]$ . Or, d'après la dernière assertion du théorème 3 la taille de ces ellipsoïdes est au plus de l'ordre de  $d^{-\frac{n_j}{2}}$  et il convient donc d'en minorer convenablement le volume. Ceci résulte de l'absolue continuité de  $\mu$  et des relations  $f^{n*}\mu = d^{kn}\mu$  (cf. Proposition 3).

Signalons pour finir que les exemples de Lattès interviennent naturellement dans d'autres problèmes (voir par exemple [7] et [5]).

## 2 Préliminaires.

Dans cette section, nous résumons les principaux outils et résultats utilisés dans la suite et fixons quelques notations.

- L'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^k$  est muni d'une structure de variété hermitienne induite par la forme de Fubini-Study  $\omega$ . On construit une famille de cartes holomorphes  $(\tau_x)_{x \in \mathbf{P}^k}$  telle que :

1.  $\tau_x : \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$  est un biholomorphisme sur son image et  $\tau_x(0) = x$
2.  $(\tau_x^* \omega)_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1, k} dz_j \wedge d\bar{z}_j$

Cette famille est obtenue en explicitant une telle carte pour un point base  $x_0 \in \mathbf{P}^k$  puis en la propageant à  $\mathbf{P}^k$  par l'action transitive de  $\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{C})$ . Ce faisant, on obtient plutôt une classe de cartes en  $x$  car  $\tau_x$  est définie à un élément du sous-groupe d'isotropie de  $x_0$  près. Cette ambiguïté pourra cependant être ignorée puisque  $\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{C})$  est compact ; les affirmations faisant intervenir  $\tau_x$  devront être comprises comme valables pour tous les éléments de la classe de cartes en  $x$ .

On peut aussi, localement, faire un choix différentiable de  $\tau_x$  et en particulier s'assurer de la propriété suivante :

3.  $\tau_{x_0}^{-1} \circ \tau_x - \tau_{x_0}^{-1}(x)$  converge vers l'identité en topologie  $\mathcal{C}^\infty$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

- L'extension naturelle  $(\widehat{\mathbf{P}}^k, \hat{f}, \hat{\mu})$  est un système dynamique inversible associé au système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  de la façon suivante :

$\widehat{\mathbf{P}}^k := \{\hat{x} := (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} / f(x_n) = x_{n+1}\}$  est muni de la topologie et de la tribu produit.

On note  $\pi_0 : \widehat{\mathbf{P}}^k \rightarrow \mathbf{P}^k$  la projection définie par  $\pi_0(\hat{x}) = x_0$  de sorte que  $\pi_0 \circ f = \hat{f} \circ \pi_0$  où  $\hat{f}$  désigne le décalage à droite sur  $\widehat{\mathbf{P}}^k$ . La mesure  $\hat{\mu}$  est l'unique mesure de probabilité invariante par  $\hat{f}$  sur  $\widehat{\mathbf{P}}^k$  telle que  $\pi_{0*}\hat{\mu} = \mu$ . Elle hérite de  $\mu$  le caractère mélangeant.

On notera  $\hat{f}^{-n}$  le décalage à gauche itéré  $n$  fois.

Soit  $\mathcal{C}_f$  l'ensemble des points critiques de  $f$ , on considère alors

$$\widehat{X} := \{\hat{x} \in \widehat{\mathbf{P}}^k / x_n \notin \mathcal{C}_f, \forall n \in \mathbf{Z}\}$$

cet ensemble est de  $\hat{\mu}$ -mesure pleine car  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires (voir [16] Proposition A.6.3).

- Nous noterons  $B(0, R)$  (resp.  $P(0, R)$ ) la boule euclidienne centrée en 0 et de rayon  $R$  (resp. le polydisque centré en 0 et de polyrayon  $R$ ) de  $\mathbf{C}^k$ . Nous noterons  $B(x, s)$  l'image de  $B(0, s)$  par  $\tau_x$

- A tout endomorphisme holomorphe  $f$  sur  $\mathbf{P}^k$  et tout  $x \in \mathbf{P}^k$  on associe les applications suivantes. Elles sont définies sur un voisinage de l'origine de  $\mathbf{C}^k$  dont la taille dépend de  $x$  et  $n$  :

$$f_x := \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$$

$$f_x^n = \tau_{f^n(x)}^{-1} \circ f^n \circ \tau_x = f_{f^n(x)} \circ \dots \circ f_x$$

Pour tout  $\hat{x} \in \widehat{X}$  on définit une application  $f_{\hat{x}}^{-n}$  par :

$$f_{\hat{x}}^{-n} := f_{x_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{-1}}^{-1}$$

$f_{\hat{x}}^{-n}$  est définie sur un voisinage de l'origine dont la taille dépend mesurablement de  $\hat{x}$  (voir le lemme ci-dessous).

- Nous notons  $T = T_a + T_s$  la décomposition de Lebesgue d'un  $(1, 1)$ -courant positif  $T$ . Cette décomposition est unique et les courants  $T_a, T_s$  sont positifs. Par contre la fermeture de  $T$  n'implique pas celle de  $T_a$  (ou  $T_s$ ).

Nous noterons  $\sigma_T$  la mesure trace du courant  $T$ . On observe que la décomposition de Lebesgue de  $\sigma_T$  est donnée par  $\sigma_T = \sigma_{T_a} + \sigma_{T_s}$ .

- Nous utiliserons le résultat de Briend et Duval sur la minoration optimale des exposants de Liapounov :

**Théorème** (Briend-Duval) *Les exposants de Liapounov du système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  sont supérieurs ou égaux à  $\frac{1}{2} \text{Log } d$ .*

ainsi que des propriétés des branches inverses de  $f$ , mises en évidence dans leur démonstration et qui, compte tenu de la stricte positivité des exposants peuvent s'exprimer ainsi (cf. [3] ou [6]) :

**Lemme 1** *Soient  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  les exposants de Liapounov du système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$ . Soient  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \ll 1$  et  $0 < r_0 \leq R_0 \ll 1$ . Il existe des fonctions  $\rho, r$  continues sur  $\mathbf{P}^k$  et strictement positives hors de  $\mathcal{C}_f$  ainsi que des fonctions mesurables  $\eta : \hat{Y} \rightarrow ]0, r_0]$ ,  $C : \hat{Y} \rightarrow [1, +\infty[$  définies sur un ensemble de  $\hat{\mu}$ -mesure pleine  $\hat{Y}$  telles que :*

1.  $f_x$  est injective sur  $B(0, \rho(x))$  et  $B(0, r(x)) \subset f_x[B(0, \rho(x))]$ ,  $\forall x \in \mathbf{P}^k \setminus \mathcal{C}_f$
2.  $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log } \rho(x_n) = 0$ ,  $\forall \hat{x} \in \hat{Y}$
3.  $f_{\hat{x}}^{-n}$  est injective sur  $B(0, \eta(\hat{x}))$  pour tout  $\hat{x} \in \hat{Y}$  et tout  $n$ , de plus :

$$d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \gamma \eta(\hat{x}))] \subset B(0, \gamma r(x_{-(n+1)})e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)})$$

pour tout  $0 < \gamma < 1$

4.  $\text{Lip } f_{\hat{x}}^{-n} \leq C(\hat{x})e^{-n(\lambda_1 - \frac{\epsilon}{2})}$  sur  $B(0, \eta(\hat{x}))$ .

### 3 Un procédé de linéarisation.

Dans toute cette partie nous considérons le système dynamique  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  et adoptons la définition suivante.

**Définition 1** *La suite des itérées  $(f^n)_n$  est linéarisable en  $x \in \mathbf{P}^k$  si et seulement si il existe  $\nu(x) > 0$  tel qu'après une éventuelle extraction, la suite  $[f^n \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^n)^{-1}]_n$  converge uniformément vers une limite injective sur  $B(0, \nu(x))$ .*

Nous commencerons par montrer que cette propriété est  $\mu$ -générique dès que le spectre de Liapounov du système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  est assez étroit, cela correspond à la seconde assertion du théorème 3 lorsque le borélien  $B$  est pris égal à  $\mathbf{P}^k$  :

**Théorème 4** *Si les exposants de Liapounov de  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  sont tels que  $\lambda_k < 2\lambda_1$  alors  $(f^n)_n$  est linéarisable en  $\mu$ -presque tout point.*

Fixons  $R_0 > 0$  puis, pour tout  $\rho \in ]0, 1]$  et tout  $n \in \mathbf{N}$  définissons  $\mathcal{B}_n(\rho)$  par :

$$\mathcal{B}_n(\rho) := \{x \in \mathbf{P}^k / f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1} \text{ injective de } B(0, \rho) \text{ dans } B(0, R_0)\}$$

Dans ce qui suit, on pourra diminuer  $R_0$  sans affecter la validité des énoncés. La linéarisabilité en  $x$  résulte immédiatement, via le théorème de Montel, de l'appartenance de  $x$  à  $\cup_{0 < \rho \leq 1} \mathcal{B}(\rho)$  où  $\mathcal{B}(\rho) := \limsup_n \mathcal{B}_n(\rho)$ . Ainsi, comme  $\mu[\mathcal{B}(\rho)] \geq \limsup_n \mu[\mathcal{B}_n(\rho)]$ , l'énoncé suivant est une version quantifiée du théorème 4 :

**Proposition 1** *Si les exposants de Liapounov de  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  sont tels que  $\lambda_k < 2\lambda_1$ , alors il existe  $\alpha : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  telle que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$  et  $\mu[\mathcal{B}_n(\rho)] \geq \alpha(\rho)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .*

Pour établir la proposition 1, nous nous plaçons dans l'extension naturelle  $\widehat{\mathbf{P}^k}$  et comparons les branches inverses de  $f$  à leurs différentielles le long d'orbites négatives génériques  $\hat{x}_- := (x_{-j})_{j \geq 0}$ . Plus précisément, l'invariance de  $\hat{\mu}$  nous permettra de déduire la proposition 1 de la proposition technique suivante :

**Proposition 2** *Sous les hypothèses du théorème 4, pour tout  $r_0 \in ]0, R_0]$  il existe des fonctions mesurables  $\eta, S : \widehat{Z} \rightarrow ]0, r_0]$  définies sur un ensemble  $\widehat{Z}$  de  $\hat{\mu}$ -mesure pleine telles que  $S \leq \eta$  et  $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, S(\hat{x}))] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]$  pour tout  $\hat{x} \in \widehat{Z}$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ .*

Voyons comment la proposition 1 se déduit de la proposition 2. Posons  $\widehat{\mathcal{S}}(\rho) := \{\hat{x} \in \widehat{Z} / S(\hat{x}) \geq \rho\}$  où  $S$  désigne la fonction fournie par la proposition 2 et vérifions les inclusions suivantes :

$$\pi_0[\hat{f}^{-n}(\widehat{\mathcal{S}}(\rho))] \subset \mathcal{B}_n(\rho)$$

L'appartenance de  $\hat{x}_n := \hat{f}^n(\hat{x})$  à  $\widehat{\mathcal{S}}(\rho)$  signifie que :

$$d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, \rho)] \subset d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, S(\hat{x}_n))] \subset f_{\hat{x}_n}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}_n))]$$

Comme  $f_{\hat{x}_n}^{-n}$  est injective sur  $B(0, \eta(\hat{x}_n))$  d'inverse  $f_{x_0}^n$ , l'appartenance de  $x$  à  $\mathcal{B}_n(\rho)$  s'obtient en composant les inclusions précédentes par  $f_{x_0}^n$  :

$$f_{x_0}^n \circ (d_0 f_{x_0}^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset B(0, \eta(\hat{x}_n)) \subset B(0, R_0)$$

Compte tenu de l'invariance de  $\hat{\mu}$  on a  $\mu[\mathcal{B}_n(\rho)] \geq \hat{\mu}[\hat{f}^{-n}(\widehat{\mathcal{S}}(\rho))] = \hat{\mu}[\widehat{\mathcal{S}}(\rho)] =: \alpha(\rho)$  et, comme  $S$  est  $\hat{\mu}$ -presque partout strictement positive,  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 1$ .  $\Lambda$

La preuve de la proposition 2 consiste à compenser les erreurs dues à la substitution de  $d_0 f_{x_j}^{-1}$  à  $f_{x_j}^{-1}$  le long de  $\hat{x}$  en diminuant le rayon  $\eta(\hat{x})$ . Pour que les compensations, cumulées, fournissent un rayon  $S(\hat{x}) > 0$ , il faut que les erreurs soient négligeables devant la plus petite dimension caractéristique de l'ellipsoïde  $d_0 f_{\hat{x}}^{-j}[B(0, 1)]$ . Il résulte du lemme suivant que tel est le cas lorsque  $\lambda_k < 2\lambda_1$ .

**Lemme 2** *Pour tout système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  et tout  $0 < \epsilon \ll 1$ , on peut trouver  $\widehat{Z} \subset \widehat{\mathbf{P}^k}$  de  $\hat{\mu}$ -mesure pleine et des fonctions mesurables  $\eta, E, F : \widehat{Z} \rightarrow \mathbf{R}^{+*}$  telles que  $0 < \eta \leq r_0 \leq R_0$  et :*

1)  $\forall \hat{x} \in \widehat{Z}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall \gamma \in ]0, 1], \forall u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \gamma \eta(\hat{x}))]$  :

$$|| (d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{-1} - f_{x_{-(n+1)}}^{-1})(u) || \leq \gamma E(\hat{x}) e^{-2n(\lambda_1 - \epsilon)}$$

2)  $\forall \hat{x} \in \widehat{Z}, \forall n \in \mathbf{N} : || d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} || \leq F(\hat{x}) e^{n(\lambda_k + \epsilon)}$

Preuve de la Proposition 2 :

Reprenons les notations du lemme 2 et définissons sur  $\widehat{Z}$  les fonctions mesurables suivantes :

$$\xi_n(\hat{x}) := \text{Sup}\{t \leq \eta(\hat{x})/d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, t)] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]\}$$

$$n_0(\hat{x}) := \text{Min}\{p \geq 1/\forall n \geq p : \frac{EF}{\eta}(\hat{x}) \leq e^{n\epsilon}\}$$

$$s(\hat{x}) := \text{Min}\{\xi_n(\hat{x}) : 0 \leq n \leq n_0(\hat{x})\}$$

Posons  $\kappa_j := 1 - e^{-j(2\lambda_1 - \lambda_k - 6\epsilon)}$  où  $\epsilon$  est assez petit pour que  $\prod_{j=1}^{\infty} \kappa_j =: \kappa > 0$  et définissons  $s_n(\hat{x})$  par :

$$s_n(\hat{x}) := s(\hat{x}) \quad \text{si } n \leq n_0(\hat{x})$$

$$s_n(\hat{x}) := s(\hat{x}) \prod_{j=n_0(\hat{x})}^{n-1} \kappa_j \quad \text{si } n \geq n_0(\hat{x}) + 1$$

Pour montrer que la fonction  $S(\hat{x}) := \kappa s(\hat{x})$  convient, il suffit alors d'établir les inclusions :

$$(I_n)_{n \geq 0} \quad : \quad d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n(\hat{x}))] \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \eta(\hat{x}))]$$

Par définition de  $s_n(\hat{x})$ , les inclusions  $(I_n)$  sont satisfaites lorsque  $n \leq n_0(\hat{x})$ . Supposons  $(I_n)$  vraie pour  $n \geq n_0(\hat{x})$  et posons  $\nu_n := \left(\frac{Es_n}{\eta}\right)(\hat{x})e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}$ . On a alors :

$$(1) \quad s_{n+1} \leq s_n - \|(d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)})^{-1}\| \nu_n$$

En effet :

$$s_{n+1} = s_n \kappa_n = s_n (1 - e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k - 6\epsilon)}) \leq s_n \left(1 - \frac{EF}{\eta}(\hat{x}) e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k - 5\epsilon)}\right)$$

$$\leq s_n - \|d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1}\| \nu_n = s_n - \|(d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)})^{-1}\| \nu_n$$

la première majoration résultant de la définition de  $n_0(\hat{x})$  et la seconde de l'assertion (2) du lemme 2.

Désignons par  $\Lambda$  la frontière de  $d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)]$ , on vérifie alors aisément que l'inégalité (1) se traduit par

$$(2) \quad d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_{n+1})] \subset d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)] \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n)$$



Par ailleurs, la première assertion du lemme 2 (où l'on prend  $\gamma = \frac{s_n}{\eta}$ ) stipule que  $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$  diffère d'au plus  $\nu_n$  de sa différentielle sur  $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n)]$ , il s'ensuit que

$$(3) \quad d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, s_n)] \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n) \subset f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n)]$$

Observons finalement que l'inclusion  $(I_n)$ , composée par  $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$ , s'écrit

$$(4) \quad f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, s_n)] \subset f_{\hat{x}}^{-(n+1)}[B(0, \eta(\hat{x}))]$$

Les inclusions (2), (3) et (4) enchaînées donnent  $(I_{n+1})$

**$\Lambda$**

Preuve du lemme 2 :

D'après la première assertion du lemme 1, l'application  $f_{x_{-(n+1)}}$  est inversible sur  $B(0, r)$  où  $r := r(x_{-(n+1)})$  et son inverse  $g$  est à valeurs dans  $B(0, \rho)$  où  $\rho := \rho(x_{-(n+1)})$  pour tout  $\hat{x}$  d'un ensemble  $\hat{Y}$  de  $\hat{\mu}$ -mesure pleine et tout entier  $n$ . Considérons alors le développement de Taylor  $g - d_0 g =: \sum_{p \geq 2} Q_p$  où  $Q_p$  désigne une application homogène de degré  $p$ . Pour tout  $u \in B(0, r)$  on a  $\|Q_p(u)\| = \|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta} u) e^{-ip\theta} d\theta\| \leq \rho$  et donc

$$\|(g - d_0 g)(u)\| \leq \sum_{p \geq 2} \frac{\|u\|^p}{r^p} \|Q_p(\frac{ru}{\|u\|})\| \leq \rho \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\|u\|}{r}\right)^p$$

Si de plus  $u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}[B(0, \gamma\eta(\hat{x}))]$  alors  $\frac{\|u\|}{r} \leq \gamma e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)} =: \delta_n$  (cf. Lemme 1, 3.) et donc  $\|(g - d_0 g)(u)\| \leq \frac{1}{1 - \delta_1} \rho \delta_n^2$ . La première assertion du lemme 2 s'en déduit car  $\rho(x_{-(n+1)})$  a un taux de croissance exponentiel nul (cf. Lemme 1, 2.). La seconde assertion découle presque immédiatement de la définition des exposants de Liapounov.  **$\Lambda$**

Nous chercherons, dans la section suivante, des conditions pour que les transformations linéaires  $(d_0 f_x^n)^{-1}$  intervenant dans la définition de la linéarisabilité en  $x \in \mathbf{P}^k$  soient assimilables à des homothéties. Cela revient à contrôler le volume et la taille des ellipsoïdes  $(d_0 f_x^n)^{-1}[B(0, 1)]$ . Le théorème de Briend-Duval, déjà implicitement pour établir le lemme 1, majore le taux de décroissance exponentielle de la taille de ces ellipsoïdes par  $-\frac{\text{Log} d}{2}$ . Cela signifie que, pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \cdot e^{n\epsilon} d^{-\frac{n}{2}}$  pour  $n$  assez grand. En reprenant la méthode de Briend-Duval dans le contexte de la proposition 1, nous allons établir une majoration plus précise :  $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \cdot d^{-\frac{n}{2}}$ . A cet effet, nous introduisons pour tout  $\tau > 0$  les sous-ensembles de  $\mathcal{B}_n(\rho)$  suivants :

$$\mathcal{LB}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \cap \{x \in \mathbf{P}^k / \|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \leq \tau d^{-\frac{n}{2}}\}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1, nous allons montrer que :

$$\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)] \geq \alpha(\rho) - \frac{C}{\tau^2 \rho^2}$$

où  $C > 0$  ne dépend que de  $f$  et  $\alpha : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  est la fonction introduite à la proposition 1. Ceci établira le théorème 2.

La preuve est basée sur le principe suivant. Par tout point de  $\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \setminus \mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$  passe un disque dont le diamètre est au moins égal à  $\tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$  et dont l'image par  $f^n$  reste contenue dans une boule de rayon fixé. Comme  $f^{n*}T = d^n T$ , il passe donc par tout point de  $\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau)$  un grand disque peu chargé par  $T$ . Des techniques pluripotentialistes permettent alors de majorer précisément la masse de cet ensemble de points pour la mesure  $\mu = T^k$ . Nous adoptons la définition suivante :

**Définition** On dit qu'un disque holomorphe  $\sigma : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$  est de taille  $\alpha$  et passe par  $z \in \mathbf{C}^k$  si il est de la forme  $\sigma(u) = z + \alpha u \cdot v + \beta(u)$  où  $\alpha > 0$ ,  $v$  est un vecteur unitaire de  $\mathbf{C}^k$ ,  $\beta(0) = 0$  et  $\|\beta\| \leq \frac{\alpha}{1000}$ .

Preuve du théorème 2 :

l'ingrédient principal est le théorème suivant dont la preuve sera résumée dans l'appendice.

**Théorème** (Briend-Duval) Soit  $S := dd^c w$  un  $(1, 1)$  courant positif fermé de potentiel  $w$  continu sur  $P(0, R)$  et  $E \subset P(0, \frac{R}{2})$ . On suppose que par tout  $z \in E$  passe un disque holomorphe  $\sigma_z : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$  de taille  $\alpha$  et qu'il existe une fonction  $h_z$  harmonique telle que  $|w \circ \sigma_z - h_z| \leq \epsilon$  sur  $\Delta$ . Alors il existe une constante  $C(w)$  ne dépendant que de  $w$  telle que  $S^k(E) \leq C(w) \frac{k^2}{\alpha^2} \epsilon$ .

En vue d'utiliser ce résultat, nous fixons des systèmes de coordonnées locales sur  $\mathbf{P}^k$ . Considérons un recouvrement de  $\mathbf{P}^k$  par des ouverts  $U_1, \dots, U_N$  centrés en des points  $m_j$  et tel que sur chaque  $U_j$  nous puissions fixer des déterminations des cartes  $\tau_x$  dépendant différenciablement de  $x$  (cf. Préliminaires). Posons  $\tau_j := \tau_{m_j}$  puis, pour  $R > 0$  fixé,  $V_j := \tau_j(P(0, R))$ . Si le recouvrement est assez fin alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i)  $U_j \subset \tau_j(P(0, \frac{R}{2}))$  et  $\tau_x(P(0, \frac{R}{2})) \subset V_j$  pour tout  $x \in U_j$
- (ii)  $\forall x \in U_j, \|\tau_j^{-1} \circ \tau_x - (\tau_j^{-1}(x) + Id)\|_{C^1, \overline{P(0, \frac{R}{2})}} \leq \frac{1}{1000}$
- (iii)  $\mu\{x \in U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho) / (d_0 f_x^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset P(0, \frac{R}{2})\} = \mu(U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho)) - \epsilon_{n,j}$  avec  $\lim_n \epsilon_{n,j} = 0$

puis, si  $R_0$  est pris assez petit ( $R_0$  a été introduit au lemme 1) :

- (iv)  $\forall x \in \mathbf{P}^k, \exists l \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $\tau_x[B(0, R_0)] \subset V_l$

enfin, si  $v_j$  désigne un potentiel continu de  $T$  sur  $V_j$

- (v)  $T = dd^c v_j$  et  $|v_j| \leq M$  sur  $V_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

D'après la proposition 1 on a  $\mu(\mathcal{B}_n(\rho)) \geq \alpha(\rho)$  et, comme il s'agit de minorer  $\liminf_n \mu[\mathcal{LB}_n(\rho, \tau)]$ , la propriété (iii) montre que l'on peut considérer que :

$$(5) \quad (d_0 f_x^n)^{-1}[B(0, \rho)] \subset P(0, \frac{R}{2}), \quad \forall x \in U_j \cap \mathcal{B}_n(\rho)$$

Rappelons que  $\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) := \mathcal{B}_n(\rho) \setminus \mathcal{LB}_n(\rho, \tau)$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  nous allons établir que :

$$(6) \quad \mu[\widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) \cap U_j] \leq C(v_j \circ \tau_j) \frac{Mk^2}{\tau^2 \rho^2}$$

Soit donc  $x \in \widehat{\mathcal{LB}}_n(\rho, \tau) \cap U_j$  et  $V_n(x)$  un vecteur unitaire réalisant  $\|(d_0 f_x^n)^{-1}\|$ . On définit un disque affine  $\Phi_{n,x} : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbf{C}^k$  de diamètre au moins égal à  $\tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$  par

$$\Phi_{n,x}(t) := (d_0 f_x^n)^{-1}[t \rho V_n(x)] =: t \rho v_n(x).$$

Comme  $x \in U_j$ , (5) et (i) permettent de définir un nouveau disque  $\Phi_{j,n,x} : \Delta \rightarrow P(0, R)$  par  $\Phi_{j,n,x} := \tau_j^{-1} \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}$ . Compte tenu de la propriété (ii),  $\Phi_{j,n,x}$  est un disque holomorphe de taille  $\alpha := \rho \|v_n(x)\| \geq \tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$  passant par  $\tau_j^{-1}(x)$ .

Choisissons  $l \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $\tau_{f^n(x)}[B(0, R_0)] \subset V_l$  (propriété (iv)) alors, comme  $x \in \mathcal{B}_n(\rho)$ , on a  $f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}(\Delta) \subset \tau_{f^n(x)}[B(0, R_0)] \subset V_l$  et donc

$$dd^c(v_l \circ f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}) = (f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T = (\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* f^{n*} T = d^n(\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T.$$

Par ailleurs, puisque  $\tau_x \circ \Phi_{n,x}(\Delta) \subset V_j$  (cf. (5) et (i)), on a

$$(\tau_x \circ \Phi_{n,x})^* T = dd^c(v_j \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x}) = dd^c(v_j \circ \tau_j \circ \Phi_{j,n,x})$$

Ainsi,  $dd^c[v_l \circ f^n \circ \tau_x \circ \Phi_{n,x} - d^n v_j \circ \tau_j \circ \Phi_{j,n,x}] = 0$ . Autrement dit, la fonction entre crochets est harmonique sur  $\Delta$  et, puisque  $|v_l| \leq M$ , le potentiel  $w := v_j \circ \tau_j$  de  $\tau_j^* T =: S$  diffère d'au plus  $\frac{M}{d^n}$  d'une fonction harmonique  $h_x$  sur le disque  $\sigma_x := \Phi_{j,n,x}$  de taille  $\alpha \geq \tau \rho d^{-\frac{n}{2}}$ . Dans ces conditions, (6) découle immédiatement du théorème de Briend-Duval. On en déduit l'estimation annoncée avec  $C = Mk^2 \Sigma_1^N C(v_j \circ \tau_j)$ .  $\Lambda$

Il est utile de disposer d'une version du théorème 4 où les orbites issues d'un borélien prescrit sont assujetties à récurrence. Cette précision s'obtient facilement grâce au caractère mélangeant de  $\mu$  et conduit à l'énoncé du théorème 3.

### Preuve du théorème 3 :

Posons  $\mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B) := \mathcal{LB}_n(\rho, \tau) \cap B \cap f^{-n}(B)$  et  $\mathcal{LB}(\rho, \tau, B) := \limsup_n \mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B)$ . Il est clair que si  $x \in \mathcal{LB}(\rho_0, \tau_0, B)$  alors il existe une suite extraite  $(f^{n_j})_j$  vérifiant les trois assertions du théorème 3. Il suffit donc d'observer que  $\mu(\mathcal{LB}_n(\rho, \tau, B)) \geq (1 - 0)\mu(B)^2$  pourvu que  $\rho_0, \frac{1}{\tau_0}$  soient assez petits et  $n$  assez grand. Or ceci résulte immédiatement du théorème 2 et du caractère mélangeant de  $\mu$ .  $\Lambda$

## 4 Systèmes linéarisables.

Dans cette partie nous commençons par établir des conditions pour que la suite des itérées  $(f^n)_n$  d'un système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  soit  $\mu$ -presque partout linéarisable par des

homothéties de rapport  $d^{-\frac{n}{2}}$ . Nous montrons ensuite que le courant de Green d'un tel système est une forme lisse strictement positive sur un ouvert non vide de  $\mathbf{P}^k$ . D'après [1],  $f$  est alors un endomorphisme de Lattès.

Dans cette perspective, nous adoptons la définition suivante :

**Définition 2** *On dit que le système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  est  $\sqrt{d}$ -linéarisable si pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbf{P}^k$  il existe  $\nu(x) > 0$  ainsi qu'une suite  $[f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d^{-\frac{n_j}{2}} Id)]_j$  qui converge uniformément vers une limite injective sur  $B(0, \nu(x))$ .*

A la lumière du théorème 3, ceci revient à exiger que les ellipsoïdes  $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}[B(0, 1)]$  soient assimilables à des boules euclidiennes de rayon  $d^{-\frac{n_j}{2}}$ . Or, la taille de ces ellipsoïdes étant au plus de l'ordre de  $d^{-\frac{n_j}{2}}$ , il s'agit en fait d'en contrôler le volume. Nous introduisons donc, pour tout  $0 < \nu < 1$ , les ensembles suivants où  $J_0 f_x^n$  désigne le Jacobien complexe de  $f_x^n$  en 0 :

$$\mathcal{V}_n(\nu) := \{x \in \mathbf{P}^k / \nu^2 d^{kn} \leq |J_0 f_x^n|^2 \leq \frac{1}{\nu^2} d^{kn}\}$$

En estimant la masse des  $\mathcal{V}_n(\nu)$ , nous caractérisons la linéarisabilité d'un système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  par l'absence de partie singulière dans la mesure  $\mu$  :

**Proposition 3** *Pour un système  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- 1)  $\mu$  n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue  $m := \omega^k$
- 2)  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $m := \omega^k$
- 3) i)  $\exists \beta : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  telle que  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \beta(\nu) = 1$  et  $\liminf_n \mu[\mathcal{V}_n(\nu)] \geq \beta(\nu)$   
ii) les exposants du système sont tous égaux à  $\frac{\text{Log} d}{2}$
- 4) Le système est  $\sqrt{d}$ -linéarisable.

Preuve de la proposition 3 :

1)  $\Rightarrow$  2). Soit  $\mu = \mu_a + \mu_s$  la décomposition de Lebesgue de  $\mu$ . On a  $\mu = f_* \mu = f_* \mu_a + f_* \mu_s$ . Or,  $f$  étant un revêtement ramifié, les images directes ou réciproques par  $f$  d'ensembles  $m$ -négligeables sont encore  $m$ -négligeables. Il résulte alors facilement des définitions que  $f_* \mu_a \ll m$  et  $f_* \mu_s \perp m$ . Donc, la décomposition de Lebesgue de  $\mu$  étant unique, les mesures  $\mu_a$  et  $\mu_s$  sont invariantes :  $f_* \mu_a = \mu_a$ ,  $f_* \mu_s = \mu_s$ . Etant ergodique, la mesure  $\mu$  est extrémale parmi les mesures de probabilité invariantes par  $f$ . Donc, si  $m_a := \mu_a(\mathbf{P}^k) > 0$  alors  $m_s := \mu_s(\mathbf{P}^k) = 1 - m_a$  et l'identité  $\mu = m_a \frac{\mu_a}{m_a} + (1 - m_a) \frac{\mu_s}{m_s}$  force l'égalité  $\mu = \mu_a$ .

2)  $\Rightarrow$  3)i). Puisque  $\mu \ll m$ , il existe une fonction  $\varphi$   $m$ -intégrable sur  $\mathbf{P}^k$  telle que  $\mu = \varphi m$ . De plus, par le théorème de Lusin, on trouve pour tout  $n \in \mathbf{N}$  des fonctions

continues  $g_n, h_n$  et des boréliens  $C_n(\varphi), C_n(\varphi \circ f^n)$  tels que :

$$\varphi = g_n \text{ sur } C_n(\varphi) \text{ et } \mu[C_n(\varphi)] \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\varphi \circ f^n = h_n \text{ sur } C_n(\varphi \circ f^n) \text{ et } \mu[C_n(\varphi \circ f^n)] \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour tout  $0 < \nu < 1$  définissons un borélien  $A_\nu$  par  $A_\nu := \{x \in \mathbf{P}^k / \nu < \varphi < \frac{1}{\nu}\}$  et posons  $\beta(\nu) := \mu(A_\nu)^2$ . Soit alors  $Z_{n,\nu} := [f^{-n}(A_\nu) \cap A_\nu] \cap [C_n(\varphi) \cap C_n(\varphi \circ f^n)] \cap Y^c$  où  $Y := \cup_p \text{Crit } f^p$  et  $Z_{n,\nu}^{Leb}$  l'ensemble des points de Lebesgue de  $Z_{n,\nu}$  c'est à dire :

$$Z_{n,\nu}^{Leb} := \{x \in Z_{n,\nu} / \lim_{s \rightarrow 0} \frac{m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}]}{m[B(x, s)]} = 1\}$$

Puisque  $\mu \ll m$  on a  $\mu(Z_{n,\nu}^{Leb}) = \mu(Z_{n,\nu})$ . Alors, compte tenu du caractère mélangeant de  $\mu$  et du fait que  $\mu(Y) = 0$ , on voit que pour  $n$  assez grand on a :

$$\mu(Z_{n,\nu}^{Leb}) \geq [\beta(\nu) - 0] - \frac{2}{n}$$

Il suffit donc de vérifier que  $Z_{n,\nu}^{Leb} \subset \mathcal{V}_n(\nu)$ . Fixons  $x \in Z_{n,\nu}^{Leb}$ . Puisque  $x \notin \text{Crit } f^n$ , il existe  $s_0 > 0$  tel que  $f^n$  soit injective sur  $B(x, s_0)$ . En outre,  $x$  étant un point de Lebesgue de  $Z_{n,\nu}$ , on peut diminuer  $s_0$  de façon à ce que  $m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}] \geq \frac{1}{2}m[B(x, s)] > 0$  pour tout  $0 < s < s_0$ . Par changement de variables, d'abord par rapport à  $\mu = \varphi m$  qui est de Jacobien constant égal à  $d^k$  puis par rapport à  $m = \omega^k$ , on obtient :

$$d^{kn} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} \varphi m = \int_{f^n[B(x,s) \cap Z_{n,\nu}]} \varphi m = \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} \varphi \circ f^n(f^{n*} \omega^k)$$

Or, puisque  $C_n(\varphi) \cap C_n(\varphi \circ f^n)$  contient  $Z_{n,\nu}$ , on peut remplacer  $\varphi$  par  $g_n$  et  $\varphi \circ f^n$  par  $h_n$  dans ces intégrales. Après normalisation par  $m(s, n, \nu) := m[B(x, s) \cap Z_{n,\nu}]$  cela donne :

$$\frac{d^{kn}}{m(s, n, \nu)} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} g_n m = \frac{1}{m(s, n, \nu)} \int_{B(x,s) \cap Z_{n,\nu}} h_n(f^{n*} \omega^k)$$

Faisons tendre  $s$  vers 0, comme les fonctions  $g_n, h_n$  sont continues et  $(f^{n*} \omega^k)_x = |J_0 f_x^n|^2 (\omega^k)_x$ , on obtient :

$$d^{kn} \varphi(x) = d^{kn} g_n(x) = h_n(x) |J_0 f_x^n|^2 = \varphi \circ f^n(x) |J_0 f_x^n|^2$$

c'est à dire  $\frac{|J_0 f_x^n|^2}{d^{kn}} = \frac{\varphi(x)}{\varphi \circ f^n(x)}$  ce qui, puisque  $x$  et  $f^n(x)$  appartiennent à  $A_\nu$ , montre que  $x \in \mathcal{V}_n(\nu)$ .

3)i)  $\Rightarrow$  3)ii). On sait que  $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log} |J_0 f_x^n|^2 = 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i$  pour  $\mu$ -presque tout  $x$ . Par ailleurs, si  $x \in \mathcal{V}(\nu) := \limsup_n \mathcal{V}_n(\nu)$  on a  $\lim_n \frac{1}{n} \text{Log} |J_0 f_x^n|^2 = k \text{Log} d$ . Or, d'après 3)i),  $\mu[\mathcal{V}(\nu)] \geq \beta(\nu) \geq \frac{1}{2}$  pourvu que  $\nu$  soit assez petit. On a donc  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = k \frac{\text{Log} d}{2}$ , d'où 3)ii) puisque  $\lambda_i \geq \frac{\text{Log} d}{2}$ .

3)  $\Rightarrow$  4). On peut, compte tenu de 3)ii), appliquer le théorème 2. Nous en reprenons les notations et posons  $\mathcal{LVB}_n(\rho, \tau, \nu) := \mathcal{LB}_n(\rho, \tau) \cap \mathcal{V}_n(\nu)$ ,  $\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu) := \limsup_n \mathcal{LVB}_n(\rho, \tau, \nu)$ . D'après 3)i) et le théorème 2,  $\mu[\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu)]$  est arbitrairement proche de 1 pourvu que  $\rho, \nu$  soient assez petits et  $\tau$  assez grand. Il suffit donc de montrer que  $(f^n)_n$  est linéarisable par  $\Lambda_n := (\sqrt{d})^{-n} \text{Id}$  lorsque  $x \in \mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu)$ . Soit donc  $(n_j)_j$  une suite strictement croissante d'entiers telle que  $x \in \mathcal{LVB}_{n_j}(\rho, \tau, \nu)$  pour tout  $j$ . Puisque  $\mathcal{LVB}(\rho, \tau, \nu) \subset \mathcal{B}(\rho)$  on a  $f_x^{n_j} \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}(B(0, \rho)) \subset B(0, R_0)$  pour tout  $j$  et il nous reste donc à voir que  $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$  est équivalente à  $\Lambda_{n_j}$ . A cet effet, notons  $\delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k}$  les valeurs singulières de  $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ . On a  $\delta_{j,k} \leq \tau(\sqrt{d})^{-n_j}$  car  $x \in \mathcal{LB}_{n_j}(\rho, \tau)$  et  $(\delta_{j,1} \dots \delta_{j,k})^2 = |J_0 f_x^{n_j}|^{-2} \geq \nu^2(d)^{-kn_j}$  car  $x \in \mathcal{V}_{n_j}(\nu)$ . On en déduit l'équivalence voulue :  $\nu(\tau)^{1-k}(\sqrt{d})^{-n_j} \leq \delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k} \leq \tau(\sqrt{d})^{-n_j}$ .

4)  $\Rightarrow$  1). Soit  $x \in \mathbf{P}^k$  un point où  $(f^n)_n$  est linéarisable par  $\Lambda_n := (\sqrt{d})^{-n} \text{Id}$ . Cela signifie qu'il existe  $\rho > 0$  et une suite strictement croissante d'entiers  $(n_j)_j$  tels que  $f_x^{n_j} \circ \Lambda_{n_j} : B(0, \rho) \rightarrow B(0, R_0)$  soit une suite d'injections. Notons  $B_{n_j} := B(0, \rho d^{-\frac{n_j}{2}})$  alors, puisque  $f^* \mu = d^k \mu$  on a  $\mu[f^{n_j} \circ \tau_x(B_{n_j})] = d^{kn_j} \mu[\tau_x(B_{n_j})]$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu[\tau_x(B(0, r))]}{m[\tau_x(B(0, r))]} &\leq \liminf_j \frac{\mu[\tau_x(B_{n_j})]}{m[\tau_x(B_{n_j})]} \cdot \liminf_j \frac{\mu[\tau_x(B_{n_j})]}{d^{-kn_j}} \\ &= \liminf_j \mu[f^{n_j} \circ \tau_x(B_{n_j})] \leq 1 \end{aligned}$$

et donc  $\mu \ll m$ , puisque ceci est vrai pour  $\mu$ -presque tout  $x$ .  $\Lambda$

**Remarque 1** Comme nous l'avons fait pour établir le théorème 3, une légère modification de l'argumentation dans 3)  $\Rightarrow$  4) permet de choisir la sous-suite  $[f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d^{-\frac{n_j}{2}} \text{Id})]_j$  de façon à ce que  $f^{n_j}(x)$  ne s'échappe pas d'un borélien de  $\mu$ -mesure strictement positive prescrit.

La fin de cette section est dévolue à la preuve du théorème 1 proprement dite. Au vu de la proposition 3, il s'agit de caractériser les systèmes  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  qui sont  $\sqrt{d}$ -linéarisables. Comme le courant de Green  $T$  satisfait les équations fonctionnelles  $f^{n*}T = d^n T$ , nous verrons que pour de tels systèmes le procédé de linéarisation peut fournir des coordonnées locales dans lesquelles  $T$  est une forme lisse définie positive. L'endomorphisme  $f$  est alors un exemple de Lattès en vertu du résultat de [1].

Preuve du théorème 1 :

Le procédé de linéarisation permet d'établir le lemme suivant :

**Lemme 3** Soit  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  un système  $\sqrt{d}$ -linéarisable et  $S$  un  $(1, 1)$  courant positif sur  $\mathbf{P}^k$  tel que  $f^*S = dS$  ( $S$  n'est pas nécessairement fermé).

1) Si  $S = S_a$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbf{P}^k$  chargé par  $\mu$  alors il existe une boule  $B(0, r) \subset \mathbf{C}^k$  et un biholomorphisme  $\Phi : B(0, r) \rightarrow \Omega' \subset \Omega$  tels que  $\Phi^*S$  soit une forme différentielle à coefficients constants et  $\mu(\Omega') > 0$ .

2) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{P}^k$  chargé par  $\mu$  et sur lequel  $S$  dérive d'un potentiel p.s.h continu  $v$  ( $S = dd^c v$ ). Si  $S_a$  est identiquement nul sur  $\Omega$  alors  $\mu(\Omega \cap \text{Supp } S) = 0$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{P}^k$  tel que  $\mu(\Omega) > 0$ . Considérons la décomposition  $T = T_a + T_s$ . La première assertion du lemme 3 appliquée à  $T_a$  permet de supposer que  $T_a|_\Omega$  est donné par une forme  $H$  à coefficients constants dans de bonnes coordonnées. En particulier cela montre que  $T_a$  possède un potentiel continu sur  $\Omega$  et il en va donc de même pour  $T_s = T - T_a$ . Ceci permet, sur  $\Omega$ , d'exprimer  $\mu$  sous la forme d'une somme de mesures positives obtenues comme produits extérieurs de  $T_a$  et  $T_s$  :

$$(7) \quad \mu = T^k = (T_a + T_s)^k = T_a^k + \sum_{j=1}^k C_k^j T_s^j \wedge T_a^{k-j}$$

Puisque  $(T_s)_a \equiv 0$ , la seconde assertion du lemme 3 montre que  $\mu$  ne charge pas  $\Omega \cap \text{Supp } T_s$  et donc, au vu de (7), la mesure  $T_a^k$  n'est pas identiquement nulle sur  $\Omega$ . Autrement dit la forme  $H$  n'est pas dégénérée. Par ailleurs, chaque terme du second membre de (7) doit, en tant que mesure positive, être absolument continue. En particulier,  $(T_s \wedge T_a^{k-1})_s$  est identiquement nul sur  $\Omega$ . Or, puisque  $H$  est strictement positive,  $(T_s \wedge T_a^{k-1})$  est équivalente à la mesure trace  $\sigma_{T_s}$  de  $T_s$  et donc  $\sigma_{T_s}$  est nulle sur  $\Omega$ . Ainsi,  $T_s|_\Omega \equiv 0$  et  $T$  coïncide sur  $\Omega$  avec une forme lisse définie positive.  $\blacksquare$

Preuve du lemme 3 :

1) Quitte à diminuer  $\Omega$  on peut supposer que  $\tau_x^{-1}$  soit défini sur  $\Omega$  pour tout  $x \in \Omega$ . Choisissons  $x_0 \in \Omega$ . Alors, puisque  $S \equiv S_a$ , on peut écrire  $\tau_{x_0}^* S$  sous la forme

$$\tau_{x_0}^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q}(z) dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

où les  $h_{p,q}$  sont des fonctions  $L_{loc}^1$ . Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points de  $\tau_{x_0}^{-1}(\Omega)$  où chacune des fonctions  $h_{p,q}$  est continue en mesure et  $\mathcal{R}$  l'ensemble des points de  $(\Omega \cap \text{Supp } \mu)$  où  $(f^n)_n$  est linéarisable par des homothéties  $\Lambda_n := d^{-\frac{n}{2}} Id$ . Comme  $\mu \ll m$ , on voit grâce à la proposition 3 que  $\mu[\tau_{x_0}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{R}] > 0$ . Soit alors  $x_1 \in \tau_{x_0}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{R}$  et  $\psi := \tau_{x_0}^{-1} \circ \tau_{x_1}$ . Comme  $\tau_{x_1}^* S = \psi^* \tau_{x_0}^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q} \circ \psi d\psi_p \wedge d\bar{\psi}_q$  on voit que, quitte à remplacer

$x_0$  par  $x_1$ , on peut supposer que  $0 \in \mathcal{C}$  et  $x_0 \in \mathcal{R}$ .

Soit donc  $\Phi_n := f^n \circ \tau_{x_0} \circ \Lambda_n$ . Modulo extraction,  $\Phi_n$  converge vers un biholomorphisme  $\Phi : B(0, \nu) \rightarrow \Omega'$  et l'on peut supposer que  $\Phi_n(0) = f^n(x_0)$  reste dans  $V_{x_0} \cap \text{Supp } \mu$  où  $V_{x_0}$  est un voisinage arbitrairement petit de  $x_0$  (cf. Remarque 1). Ainsi  $\Phi(0) \in \Omega \cap \text{Supp } \mu$  et, quitte à diminuer  $\nu$ , on a  $\Omega' \subset \Omega$  et  $\mu(\Omega') > 0$ . D'après l'invariance de  $S$  on a :

$$\Phi_n^* S = \Lambda_n^* \tau_{x_0}^* f^{n*} S = d^n \Lambda_n^* [\tau_{x_0}^* S] = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q} \circ \Lambda_n dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

d'où, en passant à la limite,  $\Phi^* S = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq k} h_{p,q}(0) dz_p \wedge d\bar{z}_q =: H$ .

2) Quitte à diminuer  $\Omega$  on peut supposer que  $S = dd^c v$  sur un voisinage  $V$  de  $\overline{\Omega}$ . Supposons que  $\mu(\Omega \cap \text{Supp } S) > 0$ . Soit  $\Lambda_n$  l'homothétie de rapport  $d^{-\frac{n}{2}}$ . D'après la proposition 3 et la remarque 1, il existe  $\mathcal{R} \subset (\Omega \cap \text{Supp } S)$  tel que  $\mu(\mathcal{R}) > 0$  et, pour tout point  $x_0 \in \mathcal{R}$ , il existe une suite  $\Phi_{n_j} := f^{n_j} \circ \tau_{x_0} \circ \Lambda_{n_j}$  qui converge uniformément sur  $B(0, \nu(x_0))$  vers un biholomorphisme  $\Phi$  telle que  $f^{n_j}(x_0) \in \mathcal{R}$  pour tout  $j$ .

Nous allons montrer que  $(\sigma_S)$  possède une dérivée de Radon-Nykodym strictement positive en tout point de  $\mathcal{R}$ . Comme  $\mu(\mathcal{R}) > 0$  et  $\mu \ll m$ , cela montrera que  $\sigma_{S_a}$  (qui est égale à  $(\sigma_S)_a$ ) et donc  $S_a$  ne sont pas nuls sur  $\Omega$ .

Comme  $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{R}} \subset \overline{\Omega}$  on peut diminuer  $\nu$  de façon à ce que  $\Phi_{n_j}(B(0, \nu))$  et  $\Phi(B(0, \nu))$  soient contenus dans  $V$ . Soit  $S_0 := \tau_{x_0}^* S$  et  $\omega_0 := \frac{i}{2} dd^c \|z\|^2$ . Il suffit de contrôler la dérivée de  $(\sigma_{S_0})_a$  à l'origine, c'est à dire d'établir que

$$\limsup_n d^{kn} \int_{B(0, d^{-\frac{n}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} > 0.$$

Or, puisque par hypothèse  $f^* S = dS$ , il vient

$$\begin{aligned} d^{kn_j} \int_{B(0, d^{-\frac{n_j}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} &= d^{(k-1)n_j} \int_{\Lambda_{n_j}[B(0, \nu)]} \tau_{x_0}^* f^{n_j*} S \wedge \omega_0^{k-1} = \\ d^{(k-1)n_j} \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge (\Lambda_{n_j}^* \omega_0)^{k-1} &= \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge \omega_0^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} dd^c(v \circ \Phi_{n_j}) \wedge \omega_0^{k-1} \end{aligned}$$

d'où par le théorème de convergence dominée :

$$\limsup_j d^{kn_j} \int_{B(0, d^{-\frac{n_j}{2}} \nu)} S_0 \wedge \omega_0^{k-1} \geq \int_{B(0, \nu)} dd^c(v \circ \Phi) \wedge \omega_0^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} \Phi^* S \wedge \omega_0^{k-1}.$$

Ceci achève la preuve car  $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{R}} \subset \text{Supp } S$  entraîne  $\int_{B(0, \nu)} \Phi^* S \wedge \omega_0^{k-1} = \sigma_{\Phi^* S}[B(0, \nu)] > 0$ .  $\Lambda$

## APPENDICE



• Pour la commodité du lecteur, nous résumons la preuve du théorème de Briend-Duval que nous avons utilisé dans la section 3.

**Théorème** (Briend-Duval) *Soit  $S := dd^c w$  un  $(1, 1)$  courant positif fermé de potentiel  $w$  continu sur  $P(0, R)$  et  $E \subset P(0, \frac{R}{2})$ . On suppose que par tout  $z \in E$  passe un disque holomorphe  $\sigma_z : \Delta \rightarrow \mathbf{C}^k$  de taille  $\alpha > 0$ , c'est à dire de la forme  $\sigma(u) = z + \alpha u \cdot v + \beta(u)$  où  $v$  est un vecteur unitaire de  $\mathbf{C}^k$ ,  $\beta(0) = 0$  et  $\|\beta\| \leq \frac{\alpha}{1000}$ , tel qu'il existe une fonction  $h_z$  harmonique vérifiant  $|w \circ \sigma_z - h_z| \leq \epsilon$  sur  $\Delta$ . Alors il existe une constante  $C(w)$  ne dépendant que de  $w$  telle que  $S^k(E) \leq C(w) \frac{k^2}{\alpha^2} \epsilon$ .*

Soit  $p_l$  la projection sur le  $l$ -ième axe de  $\mathbf{C}^k$  et  $E_l := \{z \in E / \|p_l(v_z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\}$ , on a  $E = \cup_{l=1,k} E_l$ . Pour fixer les idées estimons  $S^k(E_1)$ . On recouvre le polydisque  $P(0, \frac{1}{2}R)$  par environ  $N := \frac{1}{4} \frac{100k}{\alpha^2}$  ellipsoïdes contenus dans  $P(0, R)$  et de la forme  $z + \mathcal{D}[B(0, R)]$  où  $\mathcal{D}(z_1, z') = (\frac{\alpha}{10\sqrt{k}} z_1, z')$ .

Soit  $\mathcal{E}$  l'un de ces ellipsoïdes. Puisque  $\mathcal{E}$  est strictement pseudoconvexe, il existe une fonction  $\hat{w}$  p.s.h maximale sur  $\mathcal{E}$ , continue sur  $\overline{\mathcal{E}}$  et coïncidant avec  $w$  sur  $b\mathcal{E}$ . Si  $z \in \mathcal{E} \cap E_1$ , on voit facilement que le disque  $\sigma_z(\Delta)$  traverse  $\mathcal{E}$  au sens où la composante connexe de  $\sigma_z^{-1}(\mathcal{E} \cap \sigma_z(\Delta))$  passant par l'origine ( $C_0$ ) est relativement compacte dans  $\Delta$ . Un argument de principe du maximum montre que  $C_0$  est simplement connexe. En exhaustant  $C_0$  par des domaines à bord suffisamment régulier on peut paramétrer des disques holomorphes contenus dans  $\mathcal{E}$  et dont le bord est arbitrairement proche de  $b\mathcal{E}$ . Plus précisément,  $\epsilon > 0$  étant fixé, on trouve une transformation conforme et continue au bord  $\psi : \overline{\Delta} \rightarrow \psi(\overline{\Delta}) \subset \mathcal{E}$  telle que  $\psi(0) = 0$  et  $|\hat{w} - w| \leq \epsilon$  sur  $\sigma_z \circ \psi(b\Delta)$ . Posons  $\tilde{\sigma}_z := \sigma_z \circ \psi$ , soit  $\tilde{h}$  la fonction harmonique sur  $\Delta$  continue sur  $\overline{\Delta}$  et coïncidant avec  $w \circ \tilde{\sigma}_z$  sur  $b\Delta$ . On a alors :

$$(8) \quad w(z) \leq \hat{w}(z) \leq \tilde{h}(0) + \epsilon$$

la première inégalité découlant de la maximalité de  $\hat{w}$  sur  $\mathcal{E}$  et la seconde du principe du maximum appliqué à  $\hat{w} \circ \tilde{\sigma}_z - \tilde{h}$  qui coïncide avec  $\hat{w} \circ \tilde{\sigma}_z - w \circ \tilde{\sigma}_z$  sur  $b\Delta$ .

Par hypothèse on a  $h_z \circ \psi - \epsilon \leq w \circ \sigma_z \circ \psi = w \circ \tilde{\sigma}_z \leq h_z \circ \psi + \epsilon$  sur  $\overline{\Delta}$ . On a donc aussi  $h_z \circ \psi - \epsilon \leq \tilde{h} \leq h_z \circ \psi + \epsilon$  et il s'ensuit que :

$$(9) \quad |w(z) - \tilde{h}(0)| \leq 2\epsilon.$$

Les inégalités (8) et (9) montrent que :

$$\mathcal{E} \cap E_1 \subset \mathcal{E}(w, \epsilon) := \{z \in \mathcal{E} / 0 \leq \hat{w}(z) - w(z) \leq 3\epsilon\}.$$

La majoration annoncée résulte alors immédiatement de l'estimation suivante qui est au coeur de la démonstration de Briend-Duval et pour laquelle nous renvoyons à [3]

ou [16] page 180, Théorème A.10.2 :

*Il existe une constante  $C(w) > 0$  telle que  $(dd^c w)^k [\mathcal{E}(w, \epsilon)] \leq C(w)\epsilon$ .* **A**

• Nous reprenons, *mutatis mutandis*, des arguments développés par Binder et De-Marco [2] dans le cas d'endomorphismes polynomiaux de  $\mathbf{C}^k$  pour justifier le résultat suivant :

**Théorème** *Soit  $(\mathbf{P}^k, f, d, \mu)$  un système dynamique, d'exposants  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ . La dimension de Hausdorff de  $\mu$  vérifie :  $\dim_H(\mu) \leq 2(k-1) + \frac{\log d}{\lambda_k}$ .*

Rappelons que la dimension est définie comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des boréliens de mesure totale. Ce résultat montre que si la dimension de  $\mu$  est égale à  $2k$ , alors tous les exposants de  $\mu$  sont minimaux, égaux à  $\log d/2$ .

Esquissons maintenant la démonstration : il s'agit d'exhiber pour tout  $\epsilon > 0$  un borélien  $Y$  de mesure totale vérifiant :

$$(10) \quad \dim_H(Y) \leq 2(k-1) + \frac{\log d}{\lambda_k} + \frac{2k}{\lambda_k} \cdot \epsilon$$

Soit  $\widehat{A}$  l'ensemble des points  $\hat{x} = (x_{-n})_{n \geq 0}$  de l'extension naturelle  $\widehat{\mathbf{P}^k}$  vérifiant pour tout  $n \geq 0$  :

$$f_{\hat{x}}^{-n}[B(x_0, r_0)] \supset B(x_{-n}, \frac{r_0}{\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)}) \quad \text{et} \quad \text{Vol}(f_{\hat{x}}^{-n}[B(x_0, r_0)]) \leq \kappa_0 \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$$

On montre que  $\hat{\mu}(\widehat{A}) > 0$  pour  $\kappa_0$  assez grand et  $r_0$  assez petit (cf. [2], lemme 2).

Soit  $\widehat{A}_n := f_{\hat{x}}^{-n} \widehat{A}$ . La mesure  $\hat{\mu}$  étant ergodique, le théorème de Birkhoff entraîne que  $\widehat{Y} := \limsup_n \widehat{A}_n$  est de mesure totale.

On pose alors  $Y := \pi_0(\widehat{Y})$  et  $A_n := \pi_0(\widehat{A}_n)$ , de sorte que  $Y$  est aussi de mesure totale et est contenu dans  $\limsup_n A_n$ . Estimer la dimension de Hausdorff de  $Y$  revient à estimer celle des ensembles  $A_n$ , pour  $n$  assez grand. Par définition de  $\widehat{A}$ , tout point  $y$  de  $A_n$  vérifie :

1.  $f^n$  admet une branche inverse  $g$  sur  $B(f^n(y), r_0)$ , telle que  $g(f^n(y)) = y$ .
2.  $\mathcal{P} := g[B(f^n(y), r_0)] \supset B(y, \frac{r_0}{\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)})$
3.  $\text{Vol}(\mathcal{P}) \leq \kappa_0 \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$

Il découle de ces propriétés que  $A_n$  est recouvert par une famille  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  d'ouverts du type  $\mathcal{A}$  dont le cardinal est de l'ordre de  $d^{kn}$ . Il suffit pour le voir de recouvrir  $\overline{A_0}$  par un nombre fini de boules  $B(x_{i_0}, \frac{1}{4}r_0)$  puis d'observer que tout  $y \in A_n$  est dans  $g[B(x_{i_0}, \frac{1}{2}r_0)]$  dès lors que  $f^n(y) \in B(x_{i_0}, \frac{1}{4}r_0)$ . D'après le point 3, le volume de la réunion des  $\mathcal{P}_i$  n'excède pas  $d^{kn} \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}$ .

Considérons à présent un recouvrement  $(\mathcal{M}_j)_{j \in J}$  de  $A_n$  par des sous-ensembles de diamètre  $\frac{r_0}{100\kappa_0} \cdot e^{-n(\lambda_k + \epsilon)}$  provenant d'un maillage de  $\mathbf{P}^k$ . D'après le point 2, un sous-ensemble  $\mathcal{M}_j$  intersectant  $A_n$  est nécessairement contenu dans  $\cup_{i \in I} \mathcal{P}_i$ . On a donc :

$$\text{Card}(J) \leq \frac{\text{Vol}(\cup_{i \in I} \mathcal{P}_i)}{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)} \cdot \frac{d^{kn} \cdot e^{-2n(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + n\epsilon}}{(e^{-n(\lambda_k + \epsilon)})^{2k}}$$

En minorant les exposants  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$  par  $\log d/2$ , on obtient :

$$\text{Card}(J) \cdot d^n \cdot e^{n([2(k-1)\lambda_k] + (2k+1)\epsilon)}$$

Il s'ensuit que la mesure de Hausdorff de  $A_n$  de dimension  $\alpha_\epsilon = 2(k-1) + \log d/\lambda_k + 2k\epsilon/\lambda_k$  est minorée  $e^{-n\epsilon}$ , pour  $n$  assez grand. La  $\alpha_\epsilon$ -mesure de Hausdorff de  $Y \subset \limsup_n A_n$  est donc finie pour tout  $\epsilon > 0$ , ce qui prouve le théorème.

## Références

- [1] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de  $\mathbf{P}^k$* , Bull. Soc. Math. Fr., **129** (2001), no. 2, 175-188.
- [2] I. Binder, L. DeMarco, *Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of  $\mathbf{C}^n$* , Int. Math. res. Not., **11** (2003), 613-625.
- [3] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de  $\mathbf{P}^k$* , Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.
- [4] J.Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de  $\mathbf{P}^k$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93** (2001), 145-159.
- [5] T.C. Dinh, N. Sibony, *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de  $\mathbf{P}^k$* , Math. Ann., **324** (2002), no. 1, 33-70.
- [6] C. Dupont, *Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès*, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, (2002).
- [7] C. Dupont, *Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques.*, Manuscripta Mathematica, (to appear).
- [8] C. Dupont, *Endomorphismes holomorphes de  $\mathbf{P}^k$  vérifiant la formule de Pesin*, preprint.
- [9] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions*, in Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993), NATO ASI series Math. and Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ. (1994), 131-186.
- [10] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions II*, Ann. of Math. Studies, **137**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995), 135-187.
- [11] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics*, Publ. Mat., **45** (2001), no. 2, 529-547.

- [12] J.H. Hubbard, P. Papadopol, *Superattractive fixed points in  $\mathbf{C}^n$* , Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), no. 1, 321-365.
- [13] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measure on an interval*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 77-93.
- [14] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.
- [15] V. Mayer, *Comparing measures and invariant line fields*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **22** (2002), no. 2, 555-570.
- [16] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$* , in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No 8, SMF et EDP Sciences, 1999.
- [17] A. Zdunik, *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps*, Invent. Math., **99** (1990), no. 3, 627-649.

F. Berteloot  
 Université P. Sabatier, Toulouse III  
 Lab. Emile Picard, Bat. 1R2, UMR 5580  
 118, route de Narbonne  
 31062 Toulouse Cedex France  
 berteloo@picard.ups-tlse.fr

C. Dupont  
 Université Paris-Sud  
 Mathématique, Bat. 425, UMR 8628  
 91405 Orsay, France  
 christophe.dupont@math.u-psud.fr