



**HAL**  
open science

# Correspondance de Langlands numerique pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algebre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de $GL_n(F)$ .

Rachel Ollivier

► **To cite this version:**

Rachel Ollivier. Correspondance de Langlands numerique pour la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algebre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_n(F)$ .. 2003. hal-00000754v1

**HAL Id: hal-00000754**

**<https://hal.science/hal-00000754v1>**

Preprint submitted on 16 Oct 2003 (v1), last revised 23 Apr 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Correspondance de Langlands numérique pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$

Rachel Ollivier

Soit  $F$  un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle  $p$ , de corps résiduel à  $q$  éléments. Toutes les représentations considérées sont lisses. On ne connaît pas les représentations irréductibles modulo  $p$  de  $\mathrm{GL}_n(F)$ . Mais il est tentant de conjecturer que le foncteur des invariants par le pro- $p$ -Iwahori  $I(1)$  les identifie avec les modules simples à droite de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ .

Dans le cas  $n = 2$ , on connaît les  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples. Parmi ceux-là, on distingue les modules que l'on appelle "supersinguliers" : ils ne correspondent pas, via le foncteur des invariants par le pro- $p$ -Iwahori, à des sous-quotients d'induites paraboliques de  $\mathrm{GL}_2(F)$ . Pour  $F = \mathbf{Q}_p$ , le foncteur des  $I(1)$ -invariants induit une bijection entre les  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  ayant un caractère central et les modules simples ayant un caractère central de  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p), I(1))$ . En particulier, les modules simples supersinguliers correspondent aux  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  qui ne sont pas des sous-quotients d'induites paraboliques et appelées supersingulières ([Vig1]).

Pour  $n$  quelconque, on décrit conjecturalement les  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples supersinguliers : ce sont ceux dont le caractère central est "aussi nul que possible". Sous réserve que le foncteur des  $I(1)$ -invariants les identifie avec les  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_n(F)$ , la correspondance de Langlands modulo  $p$  se traduirait en une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme des  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples supersinguliers de dimension  $n$  et les classes d'isomorphisme des  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations irréductibles de dimension  $n$  du groupe de Weil de  $F$ .

Nous montrons ici la remarquable coïncidence numérique suivante, conjecturée dans [Vig2], qui vient corroborer la possibilité d'une correspondance de Langlands modulo  $p$ . Les trois ensembles suivants ont le même cardinal  $N_n(q)$  :

- l'ensemble des polynômes irréductibles de degré  $n$  sur  $\mathbf{F}_q$ ,
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations irréductibles de dimension  $n$  du groupe de Weil de  $F$ , avec le déterminant du Frobenius géométrique fixé,
- l'ensemble des  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples supersinguliers de dimension  $n$  avec action de l'uniformisante fixée.

Dans la première partie, on rappelle la présentation de Bernstein de l'anneau de Hecke  $\mathcal{H}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$  qui permet d'en définir les modules standards induits par les caractères du sous-anneau commutatif  $\mathcal{A}^{(1)}$ .

On appelle  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -module standard supersingulier un module standard induit par un  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère de  $\mathcal{A}^{(1)}$  aussi nul que possible. Un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -module simple est dit supersingulier s'il est quotient d'un module standard supersingulier.

Le résultat principal est le

**Théorème :**

- (1) Tout  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -module simple supersingulier contient un caractère pour l'algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}$ .
- (2) Le nombre de  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples supersinguliers de dimension  $n$  avec action de l'uniformisante fixée est égal à  $N_n(q)$ .

(1) est démontré au paragraphe 2.3, théorème 4 ; la classification des  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ -modules simples supersinguliers et (2) s'en déduisent, grâce à [Vig2].

## Notations.

On désigne par  $F$  un corps local non archimédien de corps résiduel  $\mathbf{F}_q$  de caractéristique  $p$ . Soit  $O_F$  l'anneau des entiers de  $F$ , et  $\pi$  une uniformisante.

Soit  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  une clôture algébrique du corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbf{Q}_p$ ,  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  son anneau d'entiers de corps résiduel  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . On notera  $r_p : \overline{\mathbf{Z}}_p \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  la réduction modulo  $p$ .

Le pro- $p$ -Iwahori  $I(1)$  de  $\mathrm{GL}_n(F)$  est l'unique pro- $p$ -Sylow du sous-groupe d'Iwahori standard  $I$  de  $\mathrm{GL}_n(F)$ . Le sous-groupe d'Iwahori standard est isomorphe au produit semi-direct  $I \simeq T(\mathbf{F}_q)I(1)$  où  $T(\mathbf{F}_q)$  désigne le tore déployé de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ ,  $T(\mathbf{F}_q) \simeq \mathbf{F}_q^{*n}$ .

Soit  $(X, X^\vee, R, R^\vee, B, B^\vee)$  la donnée radicielle associée à  $G = \mathrm{GL}_n(F)$ . L'ensemble  $X$  est le groupe additif des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont des puissance de  $\pi$ .

Le groupe de Weyl de  $\mathrm{GL}_n(F)$  est le groupe de Coxeter  $(W_0, S_0) = (\mathfrak{S}_n, \{s_1, \dots, s_{n-1}\})$  où  $s_i$  désigne la transposition  $(i, i+1)$ .

Le groupe de Weyl affine  $W_{aff}$  de  $G$  est le produit semi-direct  $W_{aff} = \mathfrak{S}_n \cdot Q$  où  $Q$  est le sous-groupe de  $X$  engendré par  $R$ . Si  $\alpha_0$  est la racine la plus longue et  $s$  la réflexion associée, on note  $s_0 = \alpha_0 \cdot s \in W_{aff}$ .

A l'aide de

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ \pi & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

l'élément  $s_0$  s'écrit  $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$ .

Le groupe  $W_{aff}$  est un groupe de Coxeter de système générateur  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ .

Le groupe de Weyl affine étendu de  $\mathrm{GL}_n(F)$ , noté  $\tilde{W}$ , est le produit semi-direct  $W_0 X$ . Il s'écrit aussi  $\langle \omega \rangle W_{aff}$  où  $\omega$  normalise  $W_{aff}$ . Ainsi, la longueur  $\ell$  du système de Coxeter  $(W_{aff}, S)$  se prolonge à  $\tilde{W}$  de façon à ce que le groupe cyclique  $\langle \omega \rangle$  engendré par  $\omega$  soit l'ensemble des éléments de longueur nulle.

Suivant [Vig2], on définit les groupes :

$X^{(1)}$ , le produit direct  $X^{(1)} = X \times T(\mathbf{F}_q)$ ,

$W_{aff}^{(1)}$ , le produit semi-direct  $W_{aff}^{(1)} = W_{aff} T(\mathbf{F}_q)$ ,

$W^{(1)}$ , le produit semi-direct  $W^{(1)} = W_0 X^{(1)} \simeq \tilde{W} T(\mathbf{F}_q) \simeq \langle \omega \rangle W_{aff}^{(1)}$ .

On prolonge  $\ell$  à  $W^{(1)}$  de façon à ce que  $\ell(twt') = \ell(w) \forall t, t' \in T(\mathbf{F}_q), w \in \tilde{W}$  ([Vig2] 10).

Pour  $s \in S$ , on désigne par  $T_s(\mathbf{F}_q)$  le sous-groupe de  $T(\mathbf{F}_q)$  égal à l'image du cocaractère  $\mathbf{F}_q^* \rightarrow T(\mathbf{F}_q)$  associé à  $s$ .

Le groupe des permutations  $W_0$  agit naturellement sur le tore  $T(\mathbf{F}_q)$ . On en déduit une action de  $W_0$  sur le groupe  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$  des  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractères de  $T(\mathbf{F}_q)$  : pour  $w_0 \in W_0, \lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$ ,  $w_0 \cdot \lambda = \lambda w_0^{-1}$ .

Les anneaux  $R$  seront commutatifs.

# 1 Modules standards de l'anneau de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ .

## 1.1 Présentations de l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ .

### (1.1.1) Présentation de Iwahori-Matsumoto.

L'anneau de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $\mathrm{GL}_n(F)$  possède une présentation de type Iwahori-Matsumoto. Les théorèmes suivants sont démontrés dans ([Vig2] 11, 14) .

**Théorème 1** *L'anneau de Hecke  $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$  du pro- $p$ -Iwahori de  $\mathrm{GL}_n(F)$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $(T_w)_{w \in W^{(1)}}$  vérifiant :*

- (1) *les relations de tresses,  $T_w T_{w'} = T_{ww'}$  pour  $w, w' \in W^{(1)}$  tels que  $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$ ,*
- (2) *les relations quadratiques,  $T_s^2 = q + T_s(\sum_{t \in T_s(\mathbf{F}_q)} T_t)$  pour  $s \in S$ .*

**Notations :** On notera  $\mathcal{H}^{(1)}$  l'anneau de Hecke  $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ .

L'élément  $T_w$  de la base de Iwahori-Matsumoto correspondant à  $w$  sera noté  $\Omega$ .

Soit  $R$  un anneau ; on désigne par  $\mathcal{H}_R^{(1)}$  la  $R$ -algèbre  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes_{\mathbf{Z}} R$ .

On notera  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$  lorsque  $R$  est un anneau contenant une racine  $q-1$ ème de l'unité et dans lequel  $q-1$  est inversible.

Lorsque  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ , la théorie de Fourier pour  $T(\mathbf{F}_q) \simeq (\mathbf{F}_q^*)^n$  permet de définir des idempotents centraux de  $\mathcal{H}_R^{(1)}$  et de décomposer cette algèbre :

**Théorème 2** *Soit  $R$  un anneau,  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ . Chaque  $W_0$ -orbite  $\gamma$  dans  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$  définit un idempotent central*

$$\epsilon_\gamma = \sum_{\lambda \in \gamma} \epsilon_\lambda, \quad \text{avec } \epsilon_\lambda = (q-1)^{-n} \sum_{t \in T(\mathbf{F}_q)} \lambda^{-1}(t) T_t.$$

*La  $R$ -algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$  est le produit, sur les  $W_0$ -orbites  $\gamma$  de  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ , des  $R$ -algèbres  $\mathcal{H}_R(G, \oplus_{\lambda \in \gamma} \lambda)$ , d'unité  $\epsilon_\gamma$  et de base  $(T_w \epsilon_\lambda)_{w \in \tilde{W}, \lambda \in \gamma}$ , avec les relations :*

- (1) *pour  $\lambda, \lambda' \in \gamma$ ,  $\lambda \neq \lambda'$ ,  $\epsilon_\lambda^2 = \epsilon_\lambda$ ,  $\epsilon_\lambda \epsilon_{\lambda'} = 0$ ,  $\sum_{\lambda \in \gamma} \epsilon_\lambda = \epsilon_\gamma$ ,*
- (2) *pour  $\tilde{w} = wx \in \tilde{W} = W_0.X$ ,  $\lambda \in \gamma$ ,  $\epsilon_\lambda T_{\tilde{w}} = T_{\tilde{w}} \epsilon_{\lambda w}$ ,*
- (3) *pour  $\tilde{w}, \tilde{w}' \in \tilde{W}$  tels que  $\ell(\tilde{w}\tilde{w}') = \ell(\tilde{w}) + \ell(\tilde{w}')$ , on a  $T_{\tilde{w}} T_{\tilde{w}'} = T_{\tilde{w}\tilde{w}'}$ ,*
- (4) *pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $T_{s_i}^2 = (q-1) \left( \sum_{\lambda \in \gamma, s_i \cdot \lambda = \lambda} \epsilon_\lambda \right) T_{s_i} + q$ .*

*On notera  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$  l'anneau de générateurs  $(T_w \epsilon_\lambda)_{w \in \tilde{W}, \lambda \in \gamma}$  et  $\mathcal{H}_R^{(1)}(\gamma)$  la  $R$ -algèbre  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma) \otimes R$  isomorphe à l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_R(G, \oplus_{\lambda \in \gamma} \lambda)$ .*

**Définition 1** On appelle sous-anneau de Hecke affine et l'on note  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}$  le sous-anneau de  $\mathcal{H}^{(1)}$  de générateurs

$$(T_w)_{w \in W_{aff}^{(1)}}.$$

Soit  $\gamma$  une  $W_0$ -orbite de  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ . On note  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}(\gamma)$  le sous-anneau de  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$  de générateurs

$$(T_w \epsilon_\lambda)_{w \in W_{aff}, \lambda \in \gamma}.$$

Soit  $R$  un anneau  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ . La  $R$ -algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)} \otimes R$  est le produit sur les  $W_0$ -orbites  $\gamma$  de  $\hat{T}_n(\mathbf{F}_q)$  des  $R$ -algèbres  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}(\gamma) \otimes R$ .

**(1.1.2) Z-Base de Bernstein** ([Vig2] 30, 31.) On dispose d'une présentation de Bernstein de  $\mathcal{H}^{(1)}$  qui reflète la décomposition  $W^{(1)} = W_0 X^{(1)}$ .

Dans la  $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -algèbre  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]}^{(1)}$ , on définit les éléments analogues des éléments de Bernstein pour la  $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -algèbre de Hecke-Iwahori.

Pour  $w \in \tilde{W}^{(1)}$ , on pose  $\tilde{T}_w = q^{-\ell(w)/2} T_w$ . Soit  $x \in X^{(1)}$ ,  $x = y - z$  avec  $y, z \in X^{(1)}$  dominants. Alors, l'élément  $\tilde{\theta}_x = \tilde{T}_y \tilde{T}_z^{-1}$  ne dépend pas du choix de  $x$  et  $y$ . De plus, L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}][X^{(1)}] & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]}^{(1)} \\ x & \longmapsto & \tilde{\theta}_x \end{array}$$

est un morphisme injectif de  $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -algèbres ([Vig2] 27). On note  $\mathcal{A}_{\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]}^{(1)}$  son image. On définit, pour  $w = w_0 \cdot x \in W_0 X^{(1)}$ , l'élément

$$E_w = q^{\ell(w)/2} \tilde{T}_{w_0} \tilde{\theta}_x.$$

**Théorème 3** (1) Une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{H}^{(1)}$  est donnée par  $(E_w)_{w \in W^{(1)}}$ .

Soit  $\gamma$  une  $W_0$ -orbite dans  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ . Une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$  est donnée par  $(E_w \epsilon_\lambda)_{w \in W, \lambda \in \gamma}$ .

(2)  $(E_x)_{x \in X^{(1)}}$  est  $\mathbf{Z}$ -une base de l'anneau commutatif  $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}_{\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]}^{(1)} \cap \mathcal{H}^{(1)}$ .

On note  $\mathcal{A}^{(1)}(\gamma)$  le sous-anneau commutatif de  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$  de générateurs  $(E_x \epsilon_\lambda)_{x \in X, \lambda \in \gamma}$ .

Soit  $R$  un anneau  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ . La  $R$ -algèbre  $\mathcal{A}_R^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)} \otimes R$  est le produit sur les  $W_0$ -orbites  $\gamma$  dans  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$  des  $R$ -algèbres  $\mathcal{A}_R^{(1)}(\gamma) = \mathcal{A}^{(1)}(\gamma) \otimes R$ .

(3) L'action de  $W_0$  sur  $\mathcal{A}^{(1)}$  est induite par l'action de  $W_0$  sur  $X$ . Le centre de  $\mathcal{H}^{(1)}$  est égal au sous-anneau  $(\mathcal{A}^{(1)})^{W_0}$  des  $W_0$ -invariants de  $\mathcal{A}^{(1)}$ .

$\mathcal{H}^{(1)}$  est un anneau de type fini sur son centre.

Soit  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , de fonction caractéristique  $\xi_I$ , et  $x_I$  la diagonale de coefficients  $(\pi^{\xi_I(i)})_{i=1, \dots, n}$ . Lorsque  $I = \{i\}$ , on notera  $x_i = x_{\{i\}}$ .

On note  $E_I = E_{x_I}$ . En particulier,  $E_{\{1, \dots, n\}}$  est l'élément central inversible  $\Omega^n$ . Le groupe des permutations  $W_0$  agit naturellement sur les parties  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  : on note  $w_0 \cdot I$  le sous ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  de fonction caractéristique  $\xi_I \circ w_0^{-1}$ .

Suivant la démonstration relative au sous-anneau commutatif de l'anneau de Hecke-Iwahori de  $\mathrm{GL}_n(F)$ , on montre ([Vig2 ] 35) qu'un système de générateurs de  $\mathcal{A}^{(1)}$  est donné par

$$E_{\{1,\dots,n\}}^{\pm 1}, (E_I)_{I \subsetneq \{1,\dots,n\}}, (T_t)_{t \in T(\mathbf{F}_q)},$$

avec les relations :

$$T_t T_{t'} = T_{tt'}, \text{ pour } t, t' \in T(\mathbf{F}_q),$$

$$E_I E_J = q^{yz} E_{I \cup J} E_{I \cap J} \text{ où } |I \cap J| = x, |I| = x + y, |J| = x + z.$$

**Proposition 1** *Relations de commutation.*

- (i) Si  $i, i + 1 \notin I$ , alors  $T_{s_i}$  et  $E_I$  commutent.
- (ii) Si  $i \in I$  et  $i + 1 \notin I$ , alors,  $E_I T_{s_i} = T_{s_i} E_{s_i \cdot I} - E_{s_i \cdot I} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$ .
- (iii) Si  $i \notin I$  et  $i + 1 \in I$ , alors,  $E_I T_{s_i} = T_{s_i} E_{s_i \cdot I} + E_I \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$ .
- (iv) Si  $i, i + 1 \in I$ , alors  $T_{s_i}$  et  $E_I$  commutent.

**Preuve :** Les relations de Bernstein pour la  $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -algèbre de Hecke-Iwahori ont un analogue pour la  $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de  $\mathrm{GL}_n(F)$ . Il est donné par ([Vig2] 28). Remarquons que le morphisme de  $R$ -algèbres que nous utilisons ici est  $\tilde{\theta}^-$  ([Vig2] 27) auquel on adapte la démonstration de ([Vig2] 28) pour obtenir les relations suivantes.

Soit  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . On note,  $\tilde{\theta}_j = \tilde{\theta}_{x_j}$ . Alors,

- (a) si  $j \neq i, i + 1$ ,  $T_{s_i}$  et  $\tilde{\theta}_j$  commutent ;
- (b)  $\tilde{\theta}_i T_{s_i} = T_{s_i} \tilde{\theta}_{i+1} - \tilde{\theta}_{i+1} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$  ;
- (c)  $\tilde{\theta}_{i+1} T_{s_i} = T_{s_i} \tilde{\theta}_i + \tilde{\theta}_i \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$ .

Soit  $I \subset \{1, \dots, n\}$  de cardinal  $t$ , alors  $E_I = q^{t(n-t)/2} \prod_{k \in I} \tilde{\theta}_k$ .

(i) se déduit de (a).

Supposons  $i \in I$ ,  $i + 1 \notin I$  et montrons (ii).

$$\begin{aligned} E_I T_{s_i} &= q^{t(n-t)/2} \prod_{k \in I \setminus \{i\}} \tilde{\theta}_k (\tilde{\theta}_i T_{s_i}) \\ &= q^{t(n-t)/2} \prod_{k \in I \setminus \{i\}} \tilde{\theta}_k (T_{s_i} \tilde{\theta}_{i+1} - \tilde{\theta}_{i+1} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t) \quad \text{d'après (b)} \\ &= (T_{s_i} - \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t) q^{t(n-t)/2} \prod_{k \in I \setminus \{i\} \cup \{i+1\}} \tilde{\theta}_k \quad \text{d'après (a)} \\ &= T_{s_i} E_{s_i \cdot I} - E_{s_i \cdot I} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t \end{aligned}$$

(iii) et (iv) se déduisent de (a), (b), (c) par de tels calculs.

## 1.2 Modules standards de l'anneau de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ .

**Définition 2** Soit  $R$  un anneau et  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow R$  un  $R$ -caractère de  $\mathcal{A}^{(1)}$ .

On appelle  $\mathcal{H}_R^{(1)}$ -module standard induit par  $\chi$  le  $\mathcal{H}_R^{(1)}$ -module

$$I(\lambda) = \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \chi.$$

La proposition suivante se déduit du théorème 3.

**Proposition 2 Propriétés des modules standards :**

- (1) Le  $\mathcal{H}_R^{(1)}$ -module standard induit par  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow R$  est un  $R$ -module de type fini.
- (2) Tout  $\mathcal{H}_R^{(1)}$ -module simple ayant un caractère central est quotient d'un  $\mathcal{H}_R^{(1)}$ -module standard.
- (3) Soit  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_p$  et  $r_p\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  sa réduction modulo  $p$ .  
Le  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module standard induit par  $r_p\chi$  est égal à la réduction modulo  $p$  du  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)}$ -module standard induit par  $\chi$  :

$$I(r_p\chi) = I(\chi) \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p.$$

## 2 Modules simples supersinguliers de la $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ .

### 2.1 Définition.

**Définition 3** Le  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  est dit supersingulier lorsqu'il est "aussi nul que possible" c'est à dire :

$$\text{pour } x \in X, \text{ si } \chi(E_x) \neq 0 \text{ alors } \ell(x) = 0,$$

**Remarque :** Le  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  s'étend de façon naturelle à  $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$  en un caractère que l'on désigne encore par  $\chi$  et dont on dit qu'il est supersingulier. Le  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier de  $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$  est entièrement déterminé par sa valeur  $\chi(\Omega^n)$  en l'uniformisante et par la donnée de l'unique  $\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$  tel que  $\chi(\epsilon_\lambda) \neq 0$ ,  $\chi(\epsilon_\lambda) = 1$ .

**Définition 4** On appelle module standard supersingulier un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module standard induit par un  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier de  $\mathcal{A}^{(1)}$ .

Un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple est dit supersingulier lorsqu'il est quotient d'un module standard supersingulier.

**Remarque :** D'après la proposition 2 (2), un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple ayant un caractère central est supersingulier si et seulement si son caractère central  $\phi$  est "aussi nul que possible", c'est à dire que  $\phi$  est la restriction à  $(\mathcal{A}^{(1)})^{W_0}$  d'un  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  supersingulier.

### 2.2 Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -modules simples supersinguliers.

**Théorème 4** Tout  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple supersingulier contient un caractère pour la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ .



Combiné avec ([Vig2] 24, 37), qui fournit une description des  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -modules simples contenant un caractère de  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}$ , le théorème 4 donne la classification des  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -modules simples supersinguliers.

## 2.3 Démonstration du théorème 4.

**(2.3.1)** On définit l'action de  $W_0$  sur les caractères supersinguliers de la façon suivante. Pour  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  un caractère supersingulier de  $\mathcal{A}^{(1)}$  et  $w_0 \in W_0$ ,  ${}^{w_0}\chi$  désigne le  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier de  $\mathcal{A}^{(1)}$  déterminé par la donnée :

$$({}^{w_0}\chi)(\Omega^n) = \chi(\Omega^n), \quad ({}^{w_0}\chi)(T_t) = \chi(T_{w_0^{-1}tw_0}) \quad \forall t \in T(\mathbf{F}_q).$$

Soit  $V \neq \{0\}$  un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple supersingulier quotient du  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module standard induit par le  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier  $\chi$ .

Soit  $W_0 \cdot \chi$  l'orbite de  $\chi$  sous l'action de  $W_0$ . On désigne par  $V_\chi$  et  $V_\chi^{iso}$  les sous- $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espaces vectoriels non nuls de  $V$  définis par :

$$V_\chi = \{v \in V, \forall a \in \mathcal{A}^{(1)}, a.v = \chi(a)v\}.$$

$$V_\chi^{iso} = \bigoplus_{\chi' \in W_0 \cdot \chi} V_{\chi'}.$$

### (2.3.2)

Soit  $\mathcal{H}_0^{(1)}$  l'anneau de Hecke ‘‘fini’’ de générateurs  $(T_{w_0} T_t)_{w_0 \in W_0, t \in T(\mathbf{F}_q)}$ . Il est isomorphe à l'anneau de Hecke  $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q), U)$  où  $U$  est le radical unipotent du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$  ([CE] Théorème 3.30 (i)).

Soit  $\gamma$  une  $W_0$ -orbite de  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ . On note  $\mathcal{H}_0^{(1)}(\gamma)$  le sous-anneau de  $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$  de générateurs  $(T_{w_0} \epsilon_\lambda)_{w_0 \in W_0, \lambda \in \gamma}$ . Soit  $R$  un anneau  $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ . La  $R$ -algèbre de Hecke finie  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes R$  est le produit sur les  $W_0$ -orbites  $\gamma$  de  $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$  des  $R$ -algèbres  $\mathcal{H}_0^{(1)}(\gamma) \otimes R$ .

**Proposition 3** *Soit  $V$  un  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple supersingulier et  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$ , un  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier de  $\mathcal{A}^{(1)}$  tel que  $V_\chi \neq \{0\}$ . Alors  $V_\chi^{iso}$  contient un caractère pour la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ .*

**Preuve :** On montre que  $V_\chi^{iso}$  est un  $\mathcal{H}_0^{(1)}$ -module. Soit  $v \in V_\chi$ .

- Soit  $t \in T(\mathbf{F}_q)$ . On a  $T_t.v = \chi(T_t)v$ . Ainsi  $T_t.v \in V_\chi^{iso}$ .
- Soit  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Montrons que  $T_{s_i}.v \in V_{s_i\chi} \subset V_\chi^{iso}$ .

Soit  $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ . D'après la proposition 1, on a bien  $E_I.(T_{s_i}.v) = 0 = ({}^{s_i}\chi)(E_I)T_{s_i}.v$ .

De plus, pour  $t \in T(\mathbf{F}_q)$ , on a :  $T_t.T_{s_i}.v = T_{s_i}.T_{s_i t s_i}v = ({}^{s_i}\chi)(T_t)T_{s_i}.v$ .

Ainsi  $V_\chi^{iso}$  est un module non nul pour la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ . Or les  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ -modules simples sont des caractères ([CE] Théorème 3.30 (iii)), donc  $V_\chi^{iso}$  contient un caractère pour la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ .

### (2.3.3) Un relèvement d'un caractère supersingulier.

**Proposition 4** Soit  $\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$ ,  $z \in \overline{\mathbf{F}}_p^*$  et  $\bar{\chi} : \mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  le caractère supersingulier de  $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$  tel que  $\bar{\chi}(\Omega^n) = z$  et  $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = 1$ .

Soit  $\tilde{\chi} : \mathcal{A}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$  le caractère défini par :

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\Omega^n) &= z_0 \in \overline{\mathbf{Z}}_p, \text{ un relèvement de } z \in \overline{\mathbf{F}}_p, \\ \tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_1}) &= z_0 q^{(n-2)/2}, \\ \tilde{\chi}(\theta_{x_2}) &= 1, \\ &\dots \\ \tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_{n-1}}) &= 1, \\ \tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_n}) &= q^{(2-n)/2}. \\ \tilde{\chi}(\epsilon_\lambda) &= 1\end{aligned}$$

Alors  $\chi_0 = \tilde{\chi}|_{\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)}}$  est à valeurs dans  $\overline{\mathbf{Z}}_p$  et relève  $\bar{\chi} : r_p \chi_0 = \bar{\chi}$ .

**Preuve :** Il suffit de vérifier que  $\text{val}_p(\chi_0(E_I)) > 0$ ,  $\forall \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ . Soit  $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ . On a  $E_I = q^{|I|(n-|I|)/2} \tilde{\theta}_{x_I}$ . Ainsi,

si  $n \notin I$ ,  $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I})$  est de valuation positive ou nulle. Dès lors,  $\chi_0(E_I)$  est de valuation strictement positive.

si  $n \in I$  :

– si  $1 \in I$ ,  $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I}) = z_0$  et  $\chi_0(E_I)$  est de valuation strictement positive.

– sinon,  $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I}) = q^{(2-n)/2}$  et  $\text{val}_p(\chi_0(E_I)) = \text{val}_p(q)(|I|(n-|I|) + 2 - n)/2$  est strictement positive pour  $|I| = 1, \dots, n-1$ .

Par conséquent, d'après la proposition 2 (3), le  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module standard  $I(\bar{\chi})$  est isomorphe à la réduction modulo  $p$  du  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)}$ -module standard  $I(\chi_0)$ .

### (2.3.4)

**Proposition 5** Soit  $\bar{\chi} : \mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$  un caractère supersingulier de  $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ . Dans  $I(\bar{\chi})$  de générateur canonique  $\bar{\varphi}$ , on a

$$T_{s_0} \cdot \bar{\varphi} = 0 \text{ ou bien } T_{s_0} \cdot \bar{\varphi} = -\bar{\varphi}.$$

**Preuve :** On étend  $\bar{\chi}$  de façon naturelle à la  $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre  $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$  pour se ramener à la situation de la proposition 4.

**Deux calculs de  $E_{s_1 \omega^{n-1}}$  :**

D'une part, on a :  $s_1 \omega^{n-1} = s_2 \dots s_{n-1} \text{diag}(\pi, \dots, \pi, 1)$ . Ainsi,  $E_{s_1 \omega^{n-1}} = q^{1/2} q^{-(n-2)/2} T_{s_2} \dots T_{s_{n-1}} \tilde{\theta}_{x_1} \dots \tilde{\theta}_{x_{n-1}}$ .

Soit  $\chi_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)} \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_p$  comme dans la proposition 4. On note  $\varphi$  le générateur canonique du  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)}$ -module standard  $I(\chi_0)$ . Alors,

$$E_{s_1 \omega^{n-1}} \cdot \varphi = q^{(3-n)/2} T_{s_2} \dots T_{s_{n-1}} \cdot z_0 q^{(n-2)/2} \varphi = z_0 q^{1/2} T_{s_2} \dots T_{s_{n-1}} \cdot \varphi.$$

Donc, dans  $I(\bar{\chi}) = I(\chi_0) \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$  de générateur canonique  $\bar{\varphi}$ , on a  $E_{s_1 \omega^{n-1}} \cdot \bar{\varphi} = 0$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned}E_{s_1 \omega^{n-1}} &= q^{(3-n)/2} q^{(n-1)/2} T_{s_2} \dots T_{s_{n-1}} T^{-1} \\ &= q \Omega^n T_{s_2} \dots T_{s_{n-1}} (\Omega T_{s_1} \dots T_{s_{n-1}})^{-1} \\ &= (q T_{s_1}^{-1}) \Omega^{n-1}.\end{aligned}$$

D'où, dans  $I(\bar{\lambda})$ ,  $(T_{s_0} - \sum_{t \in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t) \cdot \bar{\varphi} = 0$

Or, il existe un unique  $\lambda \in \hat{T}_n(\mathbf{F}_q)$  tel que  $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = 1$ . On a  $(\sum_{t \in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t) \cdot \epsilon_\lambda = (\sum_{t \in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} \lambda(T_t)) \epsilon_\lambda = (q-1)\epsilon_\lambda$  si  $\lambda_{s_0} = \lambda$ ;  $(\sum_{t \in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t) \cdot \epsilon_\lambda = 0$  sinon. Donc,  $T_{s_0} \cdot \bar{\varphi} = -\bar{\varphi}$  ou  $0$ .

### (2.3.5)

Soit  $V$  un  $\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -module simple supersingulier. Il existe  $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p$  un caractère supersingulier de  $\mathcal{A}^{(1)}$  tel que le sous- $\bar{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel  $V_\chi^{iso}$  de  $V$  est non nul. Ce dernier contient  $v \in V_\chi^{iso} \setminus \{0\}$  un vecteur propre pour  $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \bar{\mathbf{F}}_p$  pour le caractère  $\mu$  (2.3.2). Il existe un unique  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -caractère supersingulier  $\bar{\chi} : \mathcal{A}^{(1)} \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p$  tel que  $v \in V_{\bar{\chi}}$ . (Puisque tous les conjugués de  $\chi$  sont supersinguliers et  $v \in V_\chi^{iso}$ , on a  $E_I \cdot v = 0 \forall \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ . De plus,  $\epsilon_\lambda \cdot v = \mu(\epsilon_\lambda)v$ ,  $\forall \lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$ . Le caractère  $\bar{\chi}$  est le caractère supersingulier défini sur  $\mathcal{A}_{\bar{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$  par  $\bar{\chi}(\Omega^n) = \chi(\Omega^n)$ ,  $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = \mu(\epsilon_\lambda) \forall \lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$ . C'est un conjugué de  $\chi$  et l'on a bien  $v \in V_{\bar{\chi}}$ .)

Par adjonction, on dispose d'un morphisme surjectif de  $\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -modules :  $I(\bar{\chi}) \xrightarrow{F} V$ ,  $F(\bar{\varphi}) = v$ . D'après (2.3.4),  $v$  est bien un caractère pour la  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}_{aff}^{(1)}$  et le théorème 4 est démontré.

D'après ce qui précède et ([Vig2] 25), le nombre de  $\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ -modules simples supersinguliers de dimension  $n$  avec action de l'uniformisante fixée est égal à  $N_n(q)$ , où  $N_n(q)$  est le nombre de polynômes irréductibles de degré  $n$  sur  $\mathbf{F}_q$ . La conjecture ([Vig2] 7) est donc vérifiée.

## Références

- [CE] Cabanes, M. ; Enguehard, M. Representation theory of finite reductive groups. Book in preparation (Mars 2003).
- [Vig1] Vignéras, M.-F. Representations of the p-adic group  $GL(2, \mathbf{F})$  modulo  $p$ . Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint 30 (2001). Compositio Mathematica. A paraître.
- [Vig2] Vignéras, M.-F. On a numerical Langlands correspondence modulo  $p$  with the  $p$ -Iwahori Hecke ring. Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint (Septembre 2003).