



HAL
open science

SPACES OF POLYGONS TO SPACES OF POLYHEDRA FOLLOWING BAVARD, GHYS AND THURSTON

Francois Fillastre

► **To cite this version:**

Francois Fillastre. SPACES OF POLYGONS TO SPACES OF POLYHEDRA FOLLOWING BAVARD, GHYS AND THURSTON. 2003. hal-00000544v1

HAL Id: hal-00000544

<https://hal.science/hal-00000544v1>

Preprint submitted on 18 Aug 2003 (v1), last revised 7 Sep 2009 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DES ESPACES DE POLYGONES AUX ESPACES DE POLYÈDRES EN SUIVANT BAVARD, GHYS ET THURSTON

Fillastre François *

Juillet 2003

Résumé

Dans l'article *Polygones du plan et polyèdres hyperboliques* ([BG92]), C. Bavard et É. Ghys donnent une construction simple d'exemples d'orthoschèmes de Im Hof (cas particuliers de polyèdres de Coxeter) en montrant comment paramétrer des ensembles de polygones du plan réel par des polyèdres hyperboliques.

L'article de W. P. Thurston, ([Thu98]), examine les ensembles de métriques euclidiennes à singularités coniques sur la sphère et il montre qu'ils sont paramétrés par des cône-variétés hyperboliques complexes, et examine dans quels cas ce sont des orbifolds.

On va considérer des cône-variétés hyperboliques construites canoniquement à partir des polyèdres de Bavard et Ghys, et montrer que ces ensembles sont des formes réelles des cône-variétés de Thurston.

Abstract

In their article on polygons and hyperbolic polyhedra ([BG92]), C. Bavard and É. Ghys built in a simple way examples of Im Hof orthoschems (particular cases of Coxeter polyhedra). This construction relies on a parametrization of polygons in the plane by hyperbolic polyhedra.

In his article on shapes of polyhedra and triangulations of the sphere ([Thu98]), W. P. Thurston studies the sets of euclidean metrics with cone singularities on the sphere. He parametrizes these sets by complex hyperbolic cone-manifolds, and studies when they are orbifolds.

We will consider hyperbolic cone-manifolds built in a canonical way from Bavard and Ghys' polyhedra. We will show that they are real forms of Thurston's cone-manifolds.

Table des matières

1 Orbifolds et cône-variétés

2

*Institut de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Neuchâtel, Rue Emile Argand 11, CH-2007 Neuchâtel, Suisse ou Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. francois.fillastre@unine.ch

2	La construction de Bavard et Ghys	3
3	La construction de Thurston	7
3.1	Les cocycles	8
3.2	Construction d'une cône-variété hyperbolique complexe associée à un ensemble de métriques singulières sur la sphère	10
4	Les liens entre les deux constructions	14
4.1	Polygones et métriques sur la sphère	14
4.2	Polyèdres hyperboliques réels et formes réelle de cône-variétés hyperboliques complexes	16
5	Remerciements	21

1 Orbifolds et cône-variétés

Soit X une variété riemannienne complète de dimension n et G un groupe agissant sur X . Nous nous placerons dans le cas où G est un sous-groupe du groupe des isométries de X . Une (X, G) -variété M est un espace muni d'un atlas dont les cartes sont difféomorphes à des ouverts de X et dont les changements de cartes sont des éléments de G . On munit M de la métrique induite par celle de X . Pour plus de détails sur les (X, G) -structures, voir [Thu97a], [Thu97b], [BP92], [DCS00], [Rat94]. On attire l'attention sur le fait qu'ici X n'est pas forcément un espace à courbure constante.

Un (X, G) -orbifold (on peut trouver le terme orbivariété en français) a la même structure qu'une (X, G) -variété, à la différence que les ouverts des cartes de l'orbifold ne sont plus difféomorphes à des ouverts de X mais à des quotients des ouverts de X par des sous-groupes finis de G , ces groupes étant différents de point en point. On trouvera une définition complète dans [Thu97b], et de manière très développée dans [DCS00].

La notion d'orbifold est une généralisation de la notion de variété. On peut encore "généraliser" en introduisant les cône-variétés. Thurston donne dans son article une définition "fairly intuitive" que nous allons essayer d'expliquer clairement. Pour une définition dans le cas où X est à courbure constante (donc en particulier triangulable), on peut voir [DCS00] ou [BLP02].

Définition 1 *Pour un point p de X , le **link** en p est l'espace des germes de segments géodésiques d'origine p de vitesse unitaire.*

Pour un point p fixé, le link en p est une variété de dimension $n - 1$, que l'on note X_p . Si G_p est le stabilisateur de p , c'est un sous groupe des isométries de X_p , on peut donc parler de (X_p, G_p) -structure.

On définit une (X, G) -cône-variété par récurrence sur la dimension. Si X est de dimension 1, une (X, G) -cône-variété est une (X, G) -variété.

Soit X de dimension n et Y une (X_p, G_p) -variété compacte et connexe¹. On va construire le cône de rayon r de Y . On choisit r assez petit de telle sorte que la restriction à la boule de rayon r de $T_p X$ de l'application exponentielle de X en p soit un plongement sur X .

¹Il y a une coquille dans l'article de Thurston, page 523 ligne 27, il faut lire "If Y is any (X_p, G_p) -manifold" au lieu de "If Y is any (X_p, G_p) -cone-manifold".

On peut identifier X_p à l'ensemble des directions des rayons géodésiques partant de p , et donc à une sphère dans $T_p X$. Y étant une (X_p, G_p) -variété, il est constitué d'ouverts de X_p recollés d'une certaine façon. Ces ouverts sont vus comme des ouverts de la sphère correspondante dans $T_p X$, et à chacun d'eux on associe son cône dans $T_p X$, à savoir le secteur correspondant dans la boule. On plonge ces cônes dans X à l'aide de l'application exponentielle puis on recolle tous ces cônes dans X de la même façon que les ouverts correspondants de X_p sont recollés pour former Y . Cette opération est bien définie, puisque G_p agit à la fois sur l'ensemble des directions des rayons géodésiques et sur ces rayons. On obtient ainsi le r cône de Y .

Définition 2 Une (X, G) -cône-variété est un espace tel que chaque point ait un voisinage isométrique au r cône d'une (X_p, G_p) -variété.

Si le point a un voisinage isométriquement homéomorphe à un voisinage de X , il sera dit **régulier**, et **singulier** sinon. Les points réguliers sont denses, et la cône-variété est la complétion de l'ensemble de ses points singuliers.

Le théorème suivant va s'avérer très utile par la suite, il est donné par Thurston à la page 532 de [Thu98]. Il s'agit en fait d'une généralisation d'un théorème de Poincaré (pour tout savoir sur celui-ci, consulter [EP94]). Les définitions de strate et singularité conique seront données ultérieurement.

Théorème 1 Une cône-variété est un orbifold si et seulement si toutes les strates de codimension 2 ont des singularités coniques d'angles de la forme $2\pi/n$ avec n entier.

Exemples importants

Dans le cas où les angles dièdres d'un polyèdre sont de la forme π/n , avec n entier (il s'agit alors d'un **polyèdre de Coxeter**), l'espace quotient par le groupe des isométries engendrées par les réflexions par les faces du polyèdre est un orbifold (mais le domaine fondamental de l'action du groupe n'est pas forcément l'intérieur du polyèdre).

Si on prend deux exemplaires d'un polyèdre (plein), avec une orientation différente pour chacun, et qu'on les colle par identification des faces, on obtient un exemple de cône-variété. Si le polyèdre est de Coxeter, on obtient un orbifold.

2 La construction de Bavard et Ghys

On va rappeler la construction et les résultats de [BG92]. Il s'agit de construire un polyèdre hyperbolique associé à un ensemble de polygones.

Définition 3 On identifie les **polygones** à n sommets du plan réel à des n -uplets $P = (u_1, \dots, u_n)$ avec $u_i \in \mathbb{R}^2$ où u_i désigne le $i^{\text{ème}}$ sommet, numérotés dans l'ordre direct. On les considère centrés à l'origine, c'est à dire tels que $\sum u_i = 0$. On adopte une notation cyclique en posant $u_{n+1} = u_1$.

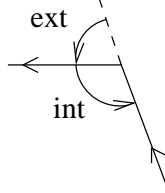
On note \mathcal{P}_n l'ensemble des polygones à n sommets. C'est un espace vectoriel réel de dimension $2n-2$.

Quand on oriente les arêtes du polygone dans le sens trigonométrique, **l'angle extérieur** (orienté positif) entre deux arêtes a_1 et a_2 est l'angle qu'elles

forment vues comme vecteurs de \mathbb{R}^2 . On considère la valeur positive de cet angle. On le note $\text{ext}(a_1, a_2)$.

L'angle intérieur (positif) entre a_1 et a_2 , noté $\text{int}(a_1, a_2)$, est donné par

$$\text{int}(a_1, a_2) = \pi - \text{ext}(a_1, a_2)$$



Un **polygone convexe** est un polygone dont les angles extérieurs sont compris entre 0 et π et dont la somme est égale à 2π .

\mathcal{P}_n est naturellement muni de la forme quadratique d'aire :

$$A_P(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(u_i, u_{i+1}) \quad (1)$$

En effet, le déterminant est la forme d'aire de \mathbb{R}^2 , et pour deux points a et b , $\det(a, b)$ est l'aire du parallélogramme de sommets l'origine, a , b et $a+b$ et donc $\frac{1}{2} \det(a, b)$ est l'aire du triangle formé par les sommets l'origine, a et b . L'aire de P est la somme des aires des triangles formés par deux sommets consécutifs de P et l'origine.

Si $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ est un n -uplet de droites vectorielles de \mathbb{R}^2 tel que pour tout i de 1 à n , les droites Δ_i et Δ_{i+1} soient distinctes, alors on considère le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_D de dimension $n-2$ de \mathcal{P}_n formé des polygones d'arêtes parallèles à $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, c'est à dire tels que $u_{i+1} - u_i \in \Delta_i$ pour tous les i de 1 à n .

Définition 4 Une **dégénérescence** d'une arête parallèle à la droite Δ_i correspond aux polygones de \mathcal{P}_D dont la $i^{\text{ème}}$ arête est réduite à zéro, c'est à dire que $u_i = u_{i+1}$.

Dans toute la suite, θ_k désigne un angle intérieur d'un polygone.

Ces dégénérescences ne peuvent avoir lieu que si l'angle extérieur entre les arêtes Δ_i et Δ_{i+1} est inférieur à π , c'est à dire, comme cet angle est égal à $2\pi - \theta_i + \theta_{i+1}$, seulement si $\theta_i + \theta_{i+1} > \pi$. Le nouvel angle intérieur obtenu est $\theta_i + \theta_{i+1} - \pi$.

En notant $\angle(\Delta, \Delta')$ l'angle orienté de deux droites distinctes (ce qui correspond à l'angle extérieur pour les arêtes), Bavard et Ghys montrent que la signature de la restriction de A à \mathcal{P}_D est (k_+, k_-) avec :

$$k_+ = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_i, \Delta_{i+1}) \right) - 1$$

$$k_- = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_{i+1}, \Delta_i) \right) - 1$$

Il suffit de procéder par récurrence sur le nombre de droites en utilisant la projection qui à un n -uplet de droites fait correspondre un $(n - 1)$ -uplet, par dégénérescence d'une droite. On obtient ainsi une formulation de l'aire du polygone en fonction de celle du polygone dégénéré de dimension inférieure moins un terme correcteur, on a bien une diagonalisation de A_P .

Maintenant considérons pour $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ la suite des directions des arêtes d'un polygone convexe P fixé, le **polygone initial**, ordonnées dans le sens direct, notée $\vec{D} = (\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_n)$ où $\vec{\Delta}_i$ est la demi-droite donnée par la i ème arête du polygone convexe de départ. Il est alors évident que :

$$A_P \text{ est de signature}(1, n - 3) \text{ sur } \mathcal{P}_D \quad (2)$$

On définit le cône $C_{\vec{D}} = \{Q \in P_D : u_{i+1} - u_i \in \vec{\Delta}_i \forall i\}$ ². Les polygones du cône sont tous ceux qui sont formés à partir des mêmes demi-droites que P , en prenant en compte les dégénérescences.

Tous les polygones du cône ont alors les mêmes angles orientés que P . Ils sont donc tous convexes et donc d'aire positive, c'est-à-dire :

$$A_P \text{ est strictement positive sur l'intérieur de } C_{\vec{D}} \quad (3)$$

L'ensemble des vecteurs positifs pour une forme quadratique de signature $(1, d - 1)$ sur un espace vectoriel de dimension d est un modèle de l'espace hyperbolique de dimension $d - 1$, le modèle projectif. Ici chaque polygone de $C_{\vec{D}}$ peut être identifié à un point du modèle projectif de l'espace hyperbolique réel de dimension $n-3$. On note $P_{\vec{D}}$ l'ensemble correspondant à $C_{\vec{D}}$ dans \mathbb{H}^{n-3} . Si on considère que tous les polygones sont d'aire fixée, par exemple d'aire 1, on se retrouve alors dans le modèle de l'hyperboloïde.

Proposition 1 $P_{\vec{D}}$ est un polyèdre hyperbolique de volume fini et compact si et seulement si le polygone initial n'a pas d'arêtes parallèles.

Preuve : Chaque sous-ensemble de $C_{\vec{D}}$ de codimension 1 est formé des polygones ayant la même dégénérescence, ce sont donc des hyperplans vectoriels de \mathbb{R}^n . Leur projection dans le modèle de Klein est donc un ensemble d'hyper-surfaces hyperboliques totalement géodésiques, ils délimitent donc un polyèdre hyperbolique.

Un sommet à l'infini de $P_{\vec{D}}$ correspond au cas où le polygone initial peut dégénérer en un polygone d'aire nulle, c'est-à-dire en une droite, ce qui n'est possible que s'il admet deux arêtes parallèles. Le nombre d'arêtes étant fini, il n'a qu'un nombre fini de points à l'infini dans $P_{\vec{D}}$, il est donc de volume fini. S'il n'a aucun point à l'infini, il est compact.

□

La suite de l'article, étudie la combinatoire de ce polyèdre hyperbolique, qui est parfaitement déterminée par la seule connaissance du polygone initial et ils déterminent les cas où ce polyèdre est un polyèdre de Coxeter :

²Dans l'article publié, il n'y a pas de distinction entre les droites et les demi-droites orientées. Nous avons repris les notations du pre print qui sont beaucoup plus claires.

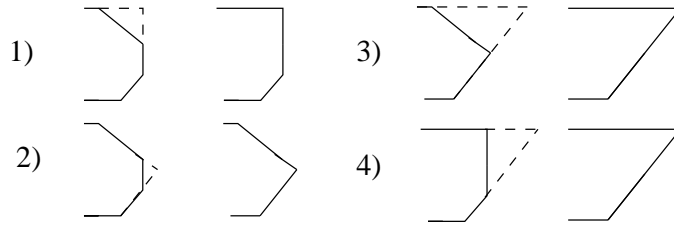


FIG. 1 – 1) On peut faire dégénérer une arête du polygone initial en un polygone qui correspondra à un point d'une face de codimension 1 du polyèdre. 2) Une autre dégénérescence définit une autre face de codimension 1. 3) Si on dégénère le polygone issu de la dégénérescence de 1), on obtient un polygone qui correspondra à un point sur une face de codimension 2 du polyèdre. 4) On obtient le même polygone par des dégénérescences différentes : la face de codimension 2 définie en 3) est l'intersection des faces de codimension 1 définies en 1) et 2).

Théorème 2 (Bavard et Ghys) *Le polyèdre est de Coxeter si et seulement si les birapports de quatre droites consécutives (dans l'ordre cyclique) de $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ sont soit positifs ou nuls, soit dans la liste $\{-tg^2\pi/k ; k \geq 3\}$.*

Si le birapport est positif, c'est que les deux faces consécutives du polyèdre, données par les quatre droites, ne se rencontrent pas, s'il est nul, c'est qu'elles se rencontrent à l'infini. Par exemple, prenons le cas où l'ensemble des droites est composé de six droites formant entre elles un angle de $\pi/3$. Tous les birapports sont égaux à l'infini, et on voit bien sur un dessin que toutes les faces de codimension un sont définies, mais qu'il n'y a aucune intersection.

Lorsqu'il est négatif, Bavard et Ghys démontrent, à partir d'une définition de deux faces consécutives du polyèdre en fonction du rapport des aires des triangles du polygone correspondants aux dégénérescences de deux arêtes, que ce rapport d'aire est en fait l'opposé du birapport des quatre droites consécutives du polygone (celles à partir desquelles on définit les deux faces du polyèdre).

En fait l'angle dièdre θ du polyèdre est donné par :

$$tg^2(\theta) = -[\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}] \quad (4)$$

donc le polyèdre est de Coxeter quand les valeurs des birapports se trouvent dans la liste indiquée.

On sait qu'on peut avoir une expression du birapport en fonction des tangentes des angles que les quatre droites forment entre elles. Ce qu'on ne sait pas, c'est si le birapport peut s'exprimer comme la tangente d'un angle qui s'écrit comme une fonction simple (affine, quotient...) des angles que les droites forment entre elles. En particulier, on ne sait pas s'il est possible d'avoir une définition de l'angle dièdre du polyèdre par une fonction simple des angles du polygone.

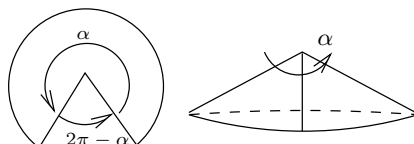
3 La construction de Thurston

On rappelle ici les constructions de [Thu98].

Définition 5 On définit $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme l'ensemble des métriques sur la sphère \mathbf{S}^2 qui sont localement euclidiennes à l'exception d'un nombre fini n de points où elles présentent une singularité conique.

Une **singularité (conique)** d'angle α en un point s de la sphère, avec α strictement positif et strictement plus petit que 2π , est un voisinage de s qui est isométrique à un cône dont l'angle autour du sommet est α . L'angle α est appelé **cône-angle** de s .

Un tel cône peut être obtenu en prenant un secteur du plan euclidien dont les deux segments font un angle $2\pi - \alpha$ et en les identifiant. L'angle $2\pi - \alpha$ est la **courbure** de la singularité. On note k_i la courbure correspondant au cône-angle α_i .



On peut aussi voir les éléments de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme des cône-variétés euclidiennes dont l'espace topologique sous-jacent est la sphère.

Attention, ce que Thurston note α_i dans son article sont les courbures des singularités.

Formule 1 (Gauss-Bonnet) Si S est une surface euclidienne à singularités coniques, compacte (sans bord) avec n singularités d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alors³ :

$$\sum_{i=1}^n k_i = 2\pi\chi(S)$$

Comme la caractéristique d'Euler de la sphère est 2, on a $\sum_{i=1}^n k_i = 4\pi$, ce qui indique que le nombre de points singuliers est au moins égal à 3. En terme de cône-angles, la formule de Gauss-Bonnet s'écrit :

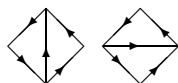
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2(n-2)\pi$$

Une référence très claire (et en français) sur les singularités coniques est [Tro86].

³ S est une cône-variété euclidienne, mais la caractéristique d'Euler utilisée dans cette formule est celle de la variété topologique sous-jacente. On obtient le même résultat en utilisant la définition de caractéristique d'Euler pour une cône-variété de dimension 2.

3.1 Les cocycles

On veut “paramétrer” localement $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par des nombres complexes. On utilise le résultat suivant, dont la première partie est faite dans [Thu98]. Le tout est fait dans le cas plus général d’une surface compacte localement euclidienne à singularités coniques dans [ILTC01].



Définition 6 On considère 4 points tels qu’aucun ne soit contenu dans l’enveloppe convexe des trois autres. Leur enveloppe convexe forme un polygone dont il suffit de prendre une diagonale pour obtenir une triangulation. Il y a donc deux choix de triangulation, et l’opération permettant de passer de l’une à l’autre en considérant l’autre diagonale s’appelle un **flip**.

Proposition 2 (Triangulation) Chaque élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admet une triangulation, dans le sens d’une subdivision par les images de triangles géodésiques euclidiens, avec identification possible des sommets et/ou des arêtes, et où l’ensemble des sommets est précisément l’ensemble des points singuliers.

De plus, pour deux triangulations de ce type, on peut passer de l’une à l’autre par une succession de flips (en nombre finis).

Dans toute la suite, nous ne considérerons que les triangulation du type décrit dans la proposition.

On envoie isométriquement un segment de la triangulation, arbitrairement choisi, dans \mathbb{C} , avec un sommet à l’origine. On voudrait étendre cette opération à toutes les arêtes de la triangulation, c’est à dire que l’image d’une autre arête par cette opération est un vecteur de module la longueur de l’arête et dont l’angle orienté (pour le sens direct) avec l’image de l’arête de départ est le même que celui que forment les deux arêtes dans la triangulation. Ainsi à chaque arête de la triangulation est associé un nombre complexe, qui est la différence des extrémités de son image. Modulo une isométrie de \mathbb{C} , on peut considérer que cette correspondance ne dépend pas du choix de l’arête de départ.

La nature des singularités fait que cette application est multi-valuée. Pour passer outre cette difficulté, on se place dans le revêtement universel de la sphère moins ses points singuliers. On relève aussi les segments de la triangulation. On peut voir l’ensemble des relevés des arêtes comme une “triangulation” du revêtement universel, à ceci près que les sommets de cette “triangulation” n’appartiennent pas à l’espace.

L’application qui envoie isométriquement chaque arête de la triangulation du revêtement universel dans \mathbb{C} est alors bien définie modulo les isométries de \mathbb{C} . On note Z cette application.

On observe que si γ est un lacet de la sphère moins ses points singuliers (notée M), et e une arête de la triangulation du revêtement universel, on a l’existence d’un morphisme de groupe H_0 :

$$\begin{aligned} \exists H_0 : \pi_1(M) &\rightarrow S^1 : \\ \forall \gamma \forall e, Z(\gamma e) &= H_0(\gamma)Z(e) \end{aligned}$$

Par exemple, si on prend un lacet autour d’un point singulier de point base un point sur une arête e , si ce lacet fait un tour, $H_0(\gamma)$ désigne la rotation (vue

comme isométrie de \mathbb{C}) qu'il faut effectuer dans \mathbb{C} pour passer de $Z(\gamma e)$ à $Z(e)$, c'est à dire dans ce cas la rotation est d'angle l'angle du point singulier autour de laquelle tourne le lacet.

Ces applications Z sont appelées des **cocycles**.

Il est clair que la somme des images des arêtes d'un triangle orienté est nulle, on appelle cette propriété la **propriété des cocycles**.

La connaissance de la valeur des images d'un cocycle permet de retrouver les angles des singularités, et donc un cocycle décrit une métrique.

Une autre façon de voir est de considérer une $(\mathbb{C}, Isom(\mathbb{C}))$ -structure sur la sphère moins ses points singuliers, le cocycle peut être donné par l'application développante, et H_0 désigne alors la partie orthogonale (la rotation) de l'holonomie du lacet γ .

Pour une métrique donnée, il y a un cocycle pour chaque triangulation. En fait, si on a seulement trois points singuliers, il n'y a qu'une triangulation possible, et dans les autres cas, pour des triangulations différentes, les cocycles sont équivalents dans un sens que l'on va définir.

Définition 7 Soient deux cocycles, Z et Z' , définis pour les triangulations respectives T et T' d'une même métrique qui diffèrent au plus d'un flip et tels que pour toute arête e hors du 4-gone qui définit le flip, $Z(e)=Z'(e)$. On dit alors que Z et Z' sont en relation.

On peut définir formellement la relation : le polygone où intervient le flip est formé de quatre arêtes e_1, e_2, e_3, e_4 orientées dans le sens direct, qui relient successivement les quatre points singuliers, et d'une cinquième notée e_5 , qui est la diagonale. On définit la relation suivante (pour une orientation adéquate de e_5) :

$$Z\overline{\mathfrak{R}}Z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Soit } Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2) \\ \text{Soit } Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4) \end{cases}$$

On note \mathfrak{R} la relation engendrée par $\overline{\mathfrak{R}}$, c'est-à-dire que s'il existe n cocycles Z_i tels que Z_i est en relation avec Z_{i+1} , avec $Z = Z_1$ et $Z' = Z_n$, alors

$$Z\mathfrak{R}Z' \Leftrightarrow Z\overline{\mathfrak{R}}Z_2\overline{\mathfrak{R}}\dots\overline{\mathfrak{R}}Z_{n-1}\overline{\mathfrak{R}}Z'$$

Proposition 3 \mathfrak{R} est un relation d'équivalence. De plus il y a une seule classe d'équivalence (pour chaque métrique et pour le choix d'une orientation).

Preuve : La première condition dans la définition de la relation concerne le cas où, pour 4 points, la triangulation est la même. Cette condition est en fait trivialement donnée par la propriété des cocycles, et on a donc bien que $Z\mathfrak{R}Z$.

La propriété des cocycles donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z(e_5) &= -Z(e_1) - Z(e_2) \\ Z(e_5) &= Z(e_3) + Z(e_4) \\ Z'(e_5) &= -Z'(e_1) - Z'(e_4) \\ Z'(e_5) &= Z'(e_2) + Z'(e_3) \end{aligned}$$

De plus on remarque que si $Z\mathfrak{R}Z'$, on a forcément les égalités :

$$Z(e_1) = Z'(e_1), Z(e_2) = Z'(e_2), Z(e_3) = Z'(e_3), Z(e_4) = Z'(e_4)$$

On montre alors que si $Z\mathfrak{R}Z'$ alors $Z'\mathfrak{R}Z$:

– Si Z et Z' sont issus de la même triangulation, on est dans le cas :

$$Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2)$$

– Sinon :

$$\begin{aligned} Z\mathfrak{R}Z' &\Leftrightarrow Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4) \\ &\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_4) = -Z(e_1) - Z(e_4) \\ &\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_4) - Z'(e_2) + Z'(e_2) = -Z(e_1) - Z(e_4) + Z(e_2) - Z(e_2) \\ &\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_2) - Z'(e_4) + Z'(e_2) = Z(e_5) - Z(e_4) + Z(e_2) \\ &\Leftrightarrow Z(e_5) = -Z'(e_1) - Z'(e_2) \\ &\Leftrightarrow Z'\mathfrak{R}Z \end{aligned}$$

La transitivité est donnée par la définition de \mathfrak{R} , qui est bien partout définie, car la proposition 2 indique que toutes les triangulations sont en relation.

□

Définition 8 On appelle les classes d'équivalence Z modulo \mathfrak{R} des **cocycles généralisés**. Comme le cocycle généralisé ne dépend pas de la triangulation, on peut parler du cocycle (généralisé) associé à une métrique.

3.2 Construction d'une cône-variété hyperbolique complexe associée à un ensemble de métriques singulières sur la sphère

On va étudier non pas $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, mais $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, l'ensemble des cocycles généralisés associés aux métriques de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Proposition 4 On peut munir $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'une structure de variété complexe de dimension $n-2$.

Preuve : On fixe une triangulation d'une métrique. Deux cocycles sont dans la même carte si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une petite déformation de la métrique. Si Z est dans la même carte Z' , il définit une métrique m , et cette métrique peut être obtenue par un autre cocycle défini à partir d'une déformation d'une autre métrique. Il s'agit de deux cartes différentes de $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ou autrement dit, une carte est donnée par le choix d'une triangulation.

On montre d'abord que les applications de coordonnées sont à valeur dans \mathbb{C}^{n-2} , ce qui revient à regarder sur combien d'arêtes on doit connaître la valeur du cocycle pour pouvoir retrouver toutes les valeurs du cocycle.

On choisit un sommet S , dans la triangulation.

On prend un arbre connexe dans le 1-squelette de la triangulation des n sommets moins S .

Supposons que la valeur de l'image par le cocycle soit connue pour chaque arête de l'arbre, alors on connaît les valeurs de toutes les images des arêtes de la triangulation par la propriété des cocycles, sauf celles pour les arêtes ayant S pour sommet.

Pour un lacet (qui fait un seul tour) autour de S , l'holonomie de la structure localement euclidienne de la métrique fournit une isométrie de \mathbb{C} , qui est une rotation. On reproduit dans \mathbb{C} l'image par le cocycle d'un domaine fondamental du revêtement de la triangulation moins les arêtes partant de S , ce que l'on peut faire puisqu'on connaît toutes ces valeurs. On applique la rotation, et les valeurs manquantes pour le cocycle sont les différences entre le point fixe de la rotation et les valeurs des extrémités des arêtes autour de S .

Or un arbre maximal dans un ensemble de n sommets moins un a $n - 2$ arêtes, car dans un arbre, le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes est égal à 1.

Il faut vérifier que les changements de cartes sont holomorphes.

Or pour changer de carte, il suffit de passer d'une triangulation à l'autre, ce qui se fait par une succession de flips, ce qui revient à faire plusieurs fois l'opération $Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2)$ (ou $Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4)$), avec les notations de la section précédente, qui est une application linéaire de \mathbb{C}^{n-2} dans \mathbb{C}^{n-2} .

□

On remarque qu'il s'agit même d'une structure de variété affine puisque les changements de cartes sont \mathbb{C} -linéaires.

La suite est dans le même esprit que le chapitre précédent puisqu'on considère la forme d'aire sur l'espace des cocycles :

$$A_C(Z) = \frac{1}{4} \sum_{\text{triangles}} iZ(e_1)\overline{Z(e_2)} - iZ(e_2)\overline{Z(e_1)} \quad (5)$$

où e_1 et e_2 sont deux des arêtes successives pour le sens trigonométrique d'un triangle de la triangulation du revêtement de la sphère moins ses points singuliers. À ce moment là les cocycles sont d'aire positive. En effet, $A(Z)$ est toujours positive quand on tourne dans le sens trigonométrique : dans le sens direct, on a

$$e_1 = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e_2 = \cos \theta' + i \sin \theta'$$

avec $\theta' \geq \theta$. Donc :

$$ie_1\bar{e}_2 - ie_2\bar{e}_1 = \cos \theta \sin \theta' - \cos \theta' \sin \theta = \sin(\theta' - \theta)$$

qui est positif puisque $\theta' - \theta$ est compris entre 0 et π .

Cette forme est définie localement sur l'ensemble des cocycles, plus précisément sur chaque ouvert d'une carte qui est holomorphe à un domaine de \mathbb{C}^{n-2} , et il faut vérifier qu'elle est compatible avec les changements de cartes. Or, il est évident qu'un flip ne change pas les sommes des aires des deux couples de triangles concernés.

On ne va considérer que les cocycles d'aire égale à 1, ce qui revient à quotienter par \mathbb{C}^* . La structure de variété passe au quotient grâce à sa structure affine.

Remarque On note une analogie, qui sera précisée ultérieurement, entre cette forme et celle utilisée par Bavard et Ghys. En effet, en prenant $e_1 = a_1 + ib_1$ et $e_2 = a_2 + ib_2$, on a $ie_1\bar{e}_2 - ie_2\bar{e}_1 = 2a_1b_2 - 2b_1a_2$ ce qui est quatre fois

l'aire d'un triangle du plan, vue comme la moitié du produit extérieur entre les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , formule utilisée par Bavard et Ghys.

Le lecteur alerte se doutera alors du résultat :

Proposition 5 A_C est de signature $(1, n-3)$

Preuve : Pour le cas $n = 4$, l'aire est le déterminant d'une matrice 2×2 , qui est soit positif soit négatif, donc de signature $(1,1)$.

Pour n quelconque on calcule par récurrence en "ajoutant" un point singulier, ce qui permet de réduire le nombre de points singuliers. Pour ce faire, on coupe d'abord la surface le long d'un segment géodésique tracé entre deux points singuliers dont les singularités sont d'angles α_1 et α_2 , telles que $\alpha_1 + \alpha_2 > 2\pi$.

Si n est supérieur à 4, il existe toujours deux singularités dont la somme des cônes-angles est supérieure à 2π . Sinon, comme cette condition est équivalente à la somme des courbures inférieure à 2π , on aurait :

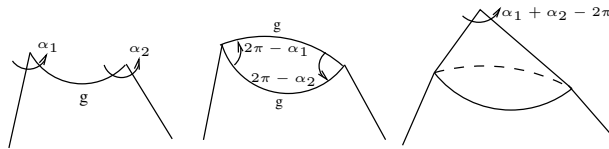
$$k_i + k_j \geq 2\pi \text{ pour } i, j = 1..4, i \neq j$$

$$3 \sum_{i=1..4} k_i \geq 12\pi$$

$$\sum_{i=1..4} k_i \geq 4\pi$$

Ce qui contredit la formule de Gauss-Bonnet, puisque comme n est supérieur à 4, il y a au moins une cinquième courbure qui fait que la somme totale des courbures est strictement supérieure à 4π .

On a alors entre les deux points singuliers deux segments géodésiques de même longueur. On va recoller le long de ces segments deux exemplaires d'un même triangle, dont les angles associés à l'arête que l'on colle sur les segments géodésiques sont $\pi - \alpha_1/2$ et $\pi - \alpha_2/2$. Un tel triangle (à savoir longueur d'une arête et les deux angles associés fixés) existe toujours grâce à la condition $\alpha_1 + \alpha_2 > 2\pi$, qui indique que la somme des deux angles est bien inférieure à π . L'angle au sommet de ce triangle est alors $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 - \pi$. On identifie les deux autres arêtes avec leur double et on obtient ainsi un cône. L'angle autour des deux points singuliers initiaux est maintenant 2π par construction, il n'y a donc plus de singularité, mais le sommet du cône est un nouveau point singulier de cône-angle $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$. On remarque qu'à similitude près, le cône est déterminé uniquement par les angles α_1 et α_2 .



On obtient ainsi une nouvelle métrique avec $(n - 1)$ points singuliers et la signature de la forme d'aire est $(1, (n - 1) - 3)$ par hypothèse de récurrence. L'aire de la sphère munie de la métrique de départ est l'aire de la sphère munie de la nouvelle métrique moins l'aire du cône qu'on a rajouté, à savoir une constante

fois le carré de la longueur D du segment géodésique : $\frac{D^2}{2k}$, avec k la courbure de la singularité.

Puisque ce segment géodésique peut être pris comme une arête de la triangulation, la signature de la forme d'aire sur la sphère munie de la métrique de départ est donc $(1, (n-1) - 3 + 1) = (1, n-3)$.

□

Donc les voisinages de $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont isométriques à des domaines de $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$, l'espace hyperbolique complexe de dimension $n-3$, d'où, par identification de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un recollement de morceaux de $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ compatible avec la métrique hyperbolique. On rappelle que $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ est de courbure sectionnelle non constante et comprise entre -4 et -1 .

Ce sous-ensemble n'est pas métriquement complet, mais Thurston décrit cette complétion que l'on note $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

Théorème 3 (Thurston) $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cône variété hyperbolique complexe de dimension (complexe) $n-3$.

La complétion est équivalente au fait d'ajouter à $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les métriques correspondant à la "fusion" de certains points singuliers :

Définition 9 La *strate de codimension $p-1$* de $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est constituée d'éléments correspondants à des métriques obtenues à partir de métriques de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dont p points singuliers sont suffisamment proches (i.e. la somme de leur cône-angles est strictement supérieure à 2π). Ces éléments sont définis par la limite du rapprochement (le long de géodésiques) de ces points singuliers (qu'on appelle la **fusion** des p points singulier).

On note $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ l'angle de la singularité obtenue par fusion des singularités $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. La strate de codimension (complexe) $k-1$ s'écrit :

$$M_{k-1} = \{\text{métriques sur } S^2 \text{ de cône-angles } (\alpha_{i_1 \dots i_k}, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_{i_1}, \dots, \hat{\alpha}_{i_k}, \dots, \alpha_n)\}$$

où \hat{a} signifie qu'on ne tient pas compte de l'élément a .

Les fusions de couples de points singuliers sur la sphère correspondent à un sous-ensemble de $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de codimension 1. Or ce sont les strates de codimension 1 qui définissent la structure de cône-variété (ici il s'agit de codimension complexe 1, donc de codimension réelle 2, on est bien dans le cadre du théorème de Poincaré). Thurston donne une formulation explicite de l'angle de la singularité autour d'une strate de codimension 1 en fonction des angles autour des singularités qui fusionnent :

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha_i = \alpha_j, & \text{ alors la singularité autour de la strate est d'angle } \alpha_i - \pi \\ & \text{sinon l'angle est } \alpha_i + \alpha_j - 2\pi \end{aligned}$$

Un fait remarquable est que, dans le cas où les angles sont différents, l'angle de la singularité autour de la strate de la cône-variété est le même que l'angle de la singularité autour du nouveau point singulier obtenu par fusion de la métrique localement euclidienne sur la sphère (angle calculé dans la preuve de la proposition 5 page 12). On pourra se ramener uniquement à ce cas plus tard.

On peut alors énoncer le résultat principal de son article :

Théorème 4 (Thurston) Soient k_1, \dots, k_n des nombres réels compris entre 0 et 2π dont la somme est 4π .

Alors l'ensemble des métriques euclidiennes à singularités coniques sur la sphère avec des points singuliers de courbure k_i forme une cône-variété hyperbolique complexe de volume fini.

Cette cône-variété est un orbifold si et seulement si, pour chaque paire k_i, k_j dont la somme s est inférieure à 2π , on a :

- (i) Soit $k_i \neq k_j$ et alors $(2\pi - s)$ divise 2π
- (ii) Soit $k_i = k_j$ et alors $(2\pi - s)/2 = (\pi - k_i)$ divise 2π

En terme de cône-angles, le cas i) s'écrit :

$$\begin{aligned} & 2\pi - (k_i + k_j) | 2\pi \\ \Leftrightarrow & 2\pi + \alpha_i - 2\pi + \alpha_j - 2\pi | 2\pi \\ \Leftrightarrow & \alpha_i + \alpha_j - 2\pi | 2\pi \\ \Leftrightarrow & \alpha_{ij} = \frac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

c'est à dire l'angle de la singularité autour de la strate de codimension 1 (réelle 2) est de la forme $\frac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{N}$.

Les liens entre une construction de Deligne et Mostow ([DM86]) et cet article de Thurston ont été mis en lumière dans [Tro]. De plus cette dernière référence (en français) facilite la lecture de l'article de Thurston.

4 Les liens entre les deux constructions

4.1 Polygones et métriques sur la sphère

Les deux précédents chapitres ont montré que, par des méthodes similaires, on obtient un polyèdre hyperbolique réel dans un cas, et une cône-variété hyperbolique complexe dans l'autre. Ce n'est pas dû au hasard comme on va le voir.

La métrique induite sur un polyèdre de \mathbb{R}^3 par la métrique euclidienne est une métrique plate sur les faces et les arêtes du polyèdre et singulière sur les sommets, et l'angle de la singularité est égal à la somme des angles dièdres des arêtes à ce sommet.

Chaque polyèdre de \mathbb{R}^3 à n sommets est topologiquement équivalent à la sphère et avec la métrique induite est un élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. La réciproque est donnée par le théorème d'Aleksandrov qui sera énoncé plus tard.

On peut considérer un polygone à n sommets comme un polyèdre de \mathbb{R}^3 , en collant deux exemplaires par identification des cotés (avec une orientation différente sur chacun). On obtient un espace topologiquement équivalent à la sphère, et la métrique induite est localement euclidienne sur chacune des deux faces et des n arêtes, avec n singularités coniques d'angles deux fois celui au sommet considéré du polygone. Pour un polygone P , on note \mathbf{P} le polyèdre correspondant. \mathbf{P} est un élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Pour qu'un polygone soit convexe, il faut que la somme de ses angles extérieurs soit 2π . Or l'angle extérieur entre deux arêtes à un sommet est exactement la

moitié de la courbure de la singularité correspondante : la formule de Gauss-Bonnet est bien vérifiée.

Donc les espaces $C_{\bar{D}}$ de polygones de Bavard et Ghys peuvent être considérés comme des sous-ensembles des espaces des métriques localement euclidiennes sur la sphère à singularités coniques. Si le polygone initial a n sommets où θ_i est l'angle intérieur entre les deux arêtes à ce sommet, on note $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$ l'ensemble des métriques associées, qui est donc un sous ensemble de $C(2\theta_1, \dots, 2\theta_n)$.

Dans toute la suite on prend comme convention $\alpha_i = 2\theta_i$.

Lemme 1 *La dégénérescence d'une arête du polygone initial correspond à la fusion de deux points singuliers sur l'ensemble de métriques associées.*

Preuve : La condition de dégénérescence $\theta_i + \theta_{i+1} > \pi$ qui conduit au nouvel angle $\theta_i + \theta_{i+1} - \pi$ est exactement la condition de dégénérescence $\alpha_i + \alpha_j > 2\pi$ qui conduit au nouvel angle $\alpha_i + \alpha_j - 2\pi$

□

En fait, on a simplement dit que les faces de codimension 1 du polyèdre $P_{\bar{D}}$ sont les strates de codimension 1 du polyèdre vu comme sous espace de $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On pourrait être troublé car les strates de codimension 1 sont de codimension 1 complexe et donc de codimension 2 réelle alors que les faces du polyèdre sont de codimension 1 réelle. Ce qui se passe, c'est que les métriques issues de polygones (on peut les appeler des 'métriques réelles') sont dans \mathbb{H}^{n-3} vu comme forme réelle de $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$, et dans cet espace, on a que les strates de codimension p complexes dans $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ sont de codimension p réelle.

Plus généralement, on a une strate de codimension $p - 1$ quand p arêtes consécutives du polygone dégèrent. Donc le polyèdre hyperbolique $P_{\bar{D}}$ est exactement la complétion de $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$, que l'on notera désormais $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, et on a donc une inclusion canonique :

$$\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n) \subset \bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (6)$$

Dans la section suivante, nous décrirons plus précisément cette inclusion.

Il faut faire attention que l'ordre des angles n'a pas d'importance dans \bar{C} mais est fixé dans \overline{BG} .

On résume tout ceci dans une proposition :

Proposition 6 *Les polyèdres de Bavard et Ghys se plongent de manière isométrique dans les cône-variétés de Thurston.*

Preuve : Il faut vérifier que la correspondance est bien isométrique, or les métriques hyperboliques sont définies par les formes d'aire, et on a vu que la forme d'aire sur les polygones est la restriction au plan réel de la forme d'aire sur les cocycles.

□

Intéressons nous maintenant au cas où le polyèdre de Bavard et Ghys est de Coxeter. C'est le cas si les angles dièdres entre deux faces sont de la forme $2\pi/k$, avec k entier. Bavard et Ghys ont montré que l'angle dièdre entre deux faces du polyèdre est donné explicitement par la façon de dégénérer de deux

arêtes consécutives du polygone. Au niveau des métriques cela correspond à la fusion de trois singularités dont les angles sont données par les angles intérieurs successifs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ du polygone. La fusion est dans une strate de codimension complexe 2, réelle 4. La strate de codimension réelle 2, celle qui détermine la structure d'orbifold pour la cône-variété de Thurston, n'intervient donc pas a priori, ce qui donne lieu à trois remarques :

- Bien que la construction de Bavard et Ghys puisse être vue comme analogue à la construction de Thurston, il n'y a pas d'implication entre leurs théorèmes respectifs.

- Sur le polygone, le nouvel angle obtenu après dégénérescence de deux arêtes consécutives est $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 2\pi$, mais il n'a a priori pas de rapport avec l'angle dièdre des deux faces. On n'est donc pas plus avancé pour un calcul simple du birapport en terme d'angles des droites.

- Que la cône-variété $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans lequel s'injecte le polyèdre soit ou non un orbifold n'a pas de rapport direct avec le fait que le polyèdre soit de Coxeter ou non. Ce fait sera expliqué de manière géométrique plus tard.

C'est cette dernière remarque qui motive en partie la construction de la section suivante.

Remarque On se demande alors si on peut trouver un exemple d'un polyèdre de Coxeter de Bavard et Ghys qui ne soit pas dans un orbifold de Thurston. En fait, en considérant la liste des 82 exemples de polyèdres de Coxeter donnée par Bavard et Ghys (on ne tient pas compte des familles infinies), un petit programme permet de s'apercevoir qu'aucun de ces polyèdre n'est dans un orbifold de Thurston. Ce résultat peut paraître étonnant, mais il s'explique par la nature des calculs à effectuer : Bavard et Ghys nous donnent les pentes des droites du polygone initial, il faut prendre les arctangentes de ces pentes, soustraires les résultats consécutifs, les multiplier par deux, les soustraires à 2π (on obtient ainsi les courbures), et vérifier pour chaque couple la condition du théorème de Thurston. Au vu des pentes, on perçoit qu'on a peu de chance d'arriver à des angles de la forme π/k , avec k entier !

De la même manière, on pourrait prendre la liste de courbures donnant des orbifolds indiquée par Thurston, trouver les polyèdres correspondants à chaque orbifold, et lister ceux qui sont de Coxeter.

4.2 Polyèdres hyperboliques réels et formes réelle de cône-variétés hyperboliques complexes

L'orientation des cocycles On a défini l'ensemble des cocycles $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en partant d'une orientation sur la sphère, pour laquelle les cocycles sont d'aire positive. Si on fixe l'orientation inverse sur la sphère (et donc sur les triangulations), on obtient un nouvel ensemble de cocycles qui est en bijection avec le premier, et dont chaque cocycle est d'aire positive pour la forme quadratique $-A$. On note le premier ensemble $\mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (que l'on notait jusque là $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) et le second $\mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, qui décrivent tous deux $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

La symétrie sur les cocycles On note T une triangulation orientée positive d'une métrique m , et T^* une triangulation orientée négative d'une métrique m' ,

et on introduit l'application suivante, appelée symétrie sur les métriques :

$$\phi_M : C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ m \mapsto m'$$

définie de la façon suivante :

$$\phi_C : \mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sqcup \mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sqcup \mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \left(Z : \begin{array}{ccc} T & \rightarrow & \mathbb{C} \\ e & \mapsto & Z(e) \end{array} \right) \mapsto \left(\phi_C(Z) : \begin{array}{ccc} T^* & \rightarrow & \mathbb{C} \\ e & \mapsto & -\overline{Z(e)} \end{array} \right)$$

On remarque que les éléments de \mathcal{Z}^+ sont envoyés sur \mathcal{Z}^- et réciproquement.

Il faut vérifier que cette application est bien définie, c'est à dire qu'il existe bien une triangulation T^* telle que l'application $\phi_C(Z)$ soit un cocycle sur cette triangulation, pour tout Z . Cela va se faire grâce à une description géométrique de ϕ_C , en utilisant le théorème d'Aleksandrov, voir par exemple [Bus58] pour une démonstration et des références.

Théorème 5 (Aleksandrov) *Pour chaque métrique m localement euclidienne sur la sphère \mathbf{S}^2 avec des singularités de courbures singulières positives il existe un unique polyèdre de \mathbb{R}^3 , à isométrie près, qui peut être dégénéré, tel que la métrique induite sur ce polyèdre soit m .*

En effet, il indique le résultat suivant, avec ϕ la symétrie des polyèdres de l'espace \mathbb{R}^3 par rapport à un plan, à isométrie près.

Proposition 7 ϕ_C correspond à l'action de ϕ sur les polyèdres.

Preuve : A chaque métrique de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on associe un polyèdre, les points singuliers sont alors les sommets du polyèdre. On prend comme triangulation de la métrique une de celles issues de la subdivision des faces du polyèdre en triangles, et on applique ϕ à ce polyèdre. ϕ correspond à une symétrie plane pour chacune des faces du polyèdre, et donc pour chacun des triangles de la triangulation T . Il en est de même dans le revêtement universel, et la symétrie sur les triangles donne une autre triangulation qui est exactement T^* , puisque dans \mathbb{C} la symétrie est donnée par l'application $z \mapsto -\bar{z}$.

□

Si on note \mathcal{A} la correspondance donnée par le théorème d'Aleksandrov et $\mathcal{P}ol_n$ l'ensemble des polyèdres de \mathbb{R}^3 (à isométries et homothéties près) à n sommets, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \xrightarrow{\phi_M} & C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ \mathcal{P}ol_n & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{P}ol_n \end{array}$$

Corollaire 1 ϕ_C est bien définie.

Corollaire 2 *Les métriques induites sur des polygones (vus comme polyèdres de \mathbb{R}^3) sont invariantes par ϕ .*

Preuve : En effet, le polyèdre qui représente un métrique issue d'un polygone est le polygone lui-même (doublé avec identification des côtés et une orientation différente sur chaque face). Donc à isométrie près, il est invariant par symétrie planaire. □

Proposition 8 *ϕ_C est une involution anti-holomorphe isométrique.*

Preuve : Il faut juste vérifier que ϕ_C est isométrique.

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ les arêtes d'un triangle orientés dans le sens direct, pour un triangle d'une triangulation associée à un cocycle Z .

$\{\phi_C(Z)(e_1), \phi_C(Z)(e_2), \phi_C(Z)(e_3)\}$ est donc un triangle négativement orienté, que l'on identifie au triangle positivement orienté $\{\phi_C(Z)(e_2), \phi_C(Z)(e_1), \phi_C(Z)(e_3)\}$.

$$\begin{aligned} A_C(\phi_C(Z)) &= \sum i\phi_C(Z)(e_2)\overline{\phi_C(Z)(e_1)} - i\phi_C(Z)(e_1)\overline{\phi_C(Z)(e_2)} \\ &= \sum i\overline{(-Z(e_2))}\overline{(-Z(e_1))} - i\overline{(-Z(e_1))}\overline{(-Z(e_2))} \\ &= \sum iZ(e_1)\overline{Z(e_2)} - iZ(e_2)\overline{Z(e_1)} \\ &= A_C(Z) \end{aligned}$$

□

La cône variété \mathbb{T} Il peut exister des métriques n'étant pas issues de polygones et qui sont des points fixes de ϕ . En effet, les points singuliers des métriques de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ne sont pas numérotés, c'est à dire que si on intervertit deux points singuliers qui ont le même cône-angle, on ne change pas la métrique.

Par exemple, considérons une métrique avec 8 points singuliers, tous de même courbure singulière, et telle que le polyèdre qui la représente soit un cube. A ce moment là il n'y a aucun moyen de distinguer cette métrique (qui n'est pas issue d'un polygone) de son image par ϕ . Par contre, si on numérote les points singuliers, on aura bien deux métriques différentes, puisque la symétrie change l'emplacement des points.

On va donc considérer un ensemble de métriques plus vaste, qui "numérote" les points singuliers, noté $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Quand par exemple trois singularités ont le même angle dans une métrique, elle correspondra à un seul point de $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, mais il y aura six points dans $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, correspondant aux six façons d'ordonner les trois points singuliers.

Définition 10 *On définit l'ensemble $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times Per$, où Per est un sous-groupe du groupe des permutations d'un ensemble à n éléments construit de la façon suivante : si $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k}$, Per est composé du sous-groupe de toutes les permutations de l'ensemble $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$.*

Dans la suite on écrira \mathbb{T} au lieu de $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Le fait important est que pour deux singularités, dans le cas où $\alpha_i = \alpha_j$, l'angle de la singularité autour de la strate de \mathbb{T} correspondante est $\alpha_i + \alpha_j - 2\pi$, et non plus $\alpha_i - \pi$ comme dans le cas de $\overline{\mathcal{C}}$, c'est à dire que l'on double la valeur de cet angle, à cause justement de la distinction des deux points singuliers de même cône-angle, voir [Thu98]. Ainsi, les conditions pour que \mathbb{T} soit un orbifold sont plus restrictives que pour $\overline{\mathcal{C}}$.

La cône variété \mathbb{BG} On fait la même chose avec l'ensemble des métriques réelles, c'est à dire que si $\theta_k = \theta_{k'}$, les polyèdres $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_{k'}, \dots, \theta_n)$ et $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_{k'}, \dots, \theta_k, \dots, \theta_n)$ seront considérés comme deux polyèdres distincts.

On veut connaître exactement l'ensemble des points fixes de ϕ , ce qui conduit à la remarque suivante : le polyèdre $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est constitué à partir d'un polygone initial convexe dont les angles sont successivement $\theta_1, \dots, \theta_n$ dans l'ordre trigonométrique. Si on ordonne ces angles d'une autre façon, on obtient un polygone initial différent (quel que soit l'ordre le polygone est toujours convexe, puisque la somme des angles extérieurs est toujours 2π), qui engendre donc a priori un polyèdre différent, mais tous ces polyèdres sont contenus dans le même espace $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, puisque les singularités induites par les angles sont les mêmes.

De plus tous ces polyèdres sont des ensembles fixes pour ϕ .

On va définir une relation d'équivalence sur cet ensemble de polyèdres :

Si $\theta_i + \theta_{i+1} < \pi$, on note $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ la face de codimension 1 du polyèdre $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ correspondant à la dégénérescence de l'arête du polygone initial issue des angles θ_i et θ_{i+1} . Les polyèdres $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots, \theta_n)$ et $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ sont différents mais ont la même face de codimension 1 : $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$. De plus, pour $\theta_1, \dots, \theta_n$ fixés, ce sont les deux seuls polyèdres de type BG ayant cette même face, et ils n'ont que cette face en commun. On dit qu'on identifie $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ et $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ si on recolle les deux polyèdres le long de la face commune $\overline{BG}(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$.

On note \sim la relation engendrée par l'identification. En particulier tous les polyèdres sont en relation, car pour une face de codimension 1 donnée, il existe toujours un polyèdre différent ayant la même face, il suffit d'inverser les deux angles concernés. C'est une relation d'équivalence, qui permet de définir un nouvel espace :

Définition 11 $\mathbb{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est l'ensemble constitué de tous les polyèdres construits à partir de tous les polygones initiaux convexes que l'on peut obtenir avec n angles intérieurs fixés, avec identification des faces communes de codimension 1 :

$$\mathbb{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \bigcup_{\sigma \in \sigma_n} \overline{BG}(\theta_{\sigma(1)}, \dots, \theta_{\sigma(n)}) / \sim$$

Dans la suite, on écrira \mathbb{BG} au lieu de $\mathbb{BG}(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Puisque toutes les faces sont identifiées, il s'agit d'une cône variété hyperbolique réelle de dimension $n - 3$, et $\phi(\mathbb{BG}) = \mathbb{BG}$.

Le fait que les polyèdres soient ou non de Coxeter n'a pas de rapport avec le fait que cet ensemble soit ou non un orbifold, puisqu'autour d'une même

face de codimension 2 il y a en général plusieurs faces identifiées, donc même si aucun angle dièdre n'est de la forme $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. il n'y a pas de polyèdre de Coxeter), leur somme peut être de la forme $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est un orbifold), et inversement tous les polyèdres peuvent être de Coxeter sans que $\mathbb{B}\mathbb{G}$ soit un orbifold.

On peut même voir plus exactement qu'autour d'une face de codimension 2, définie par la dégénérescence de trois angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ du polygone initial, on identifie les faces de codimension 1 de 6 polyèdres différents, correspondants aux 6 permutations de l'ordre des angles.

On pourrait ainsi théoriquement calculer la singularité de la face de codimension 2 en additionnant les 6 angles dièdres, mais cela semble compliqué en pratique puisque la formule pour calculer les angles dièdres du théorème de Bavard et Ghys n'est pas très maniable.

Une forme réelle Avec une numérotation des points, les seuls polyèdres de \mathbb{R}^3 invariants par la symétrie sont les polygones et donc les seules métriques qui sont des points fixes de ϕ dans \mathbb{T} sont les métriques issues des polygones. Or par construction, $\mathbb{B}\mathbb{G}$ contient toutes les métriques de ce type qu'il est possible de construire avec n angles donnés et leurs dégénérescences. Donc $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est exactement l'ensemble des points fixes de ϕ , c'est à dire :

Théorème 6 $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est une forme réelle de \mathbb{T} .

Le cas des orbifolds Les cône-variétés $\mathbb{B}\mathbb{G}$ donnent une méthode pour construire plusieurs exemples d'orbifolds hyperboliques réels de dimension quelconque : il suffit de trouver des listes d'angles tels que pour chaque triplet $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tel que la somme soit strictement supérieure à 4π , l'angle $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 4\pi$ soit de la forme $2\pi/k$, avec k entier positif.

En dimension 1, c'est-à-dire pour 4 points singuliers, le théorème de Gauss-Bonnet indique que la somme des cône-angles est égale à 4π , donc on ne peut pas obtenir de dégénérescences qui forment une strate de codimension 2 puisque aucun triplet de cône-angles ne peut être de somme plus grande que 4π . Il n'existe donc pas d'orbifold de Bavard et Ghys. Par contre il existe des orbifolds de Thurston, par exemple celui donné par les cône-angles :

$$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \pi\right)$$

En dimension deux et trois respectivement, les angles suivants fournissent des exemples où \mathbb{T} est un orbifold, mais où aucun triplet d'angle ne remplit la condition de dégénérescence.

$$\left(\frac{6\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Par contre les exemples suivants sont des orbifolds de Bavard et Ghys de dimension 2 et 3 respectivement :

$$\left(\frac{2\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right), \left(\frac{2\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}\right)$$

La formule de Gauss-Bonnet et un peu d'arithmétique montrent qu'au-delà de la dimension 3, il existe toujours un triplet d'angle qui permet une dégénérescence.

La question qui vient naturellement à l'esprit est la suivante : à partir de la dimension 2, quand les strates réelles de codimension 2 existent, y'a-t-il un lien entre le fait que la cône-variété de Thurston soit un orbifold et le fait que la cône-variété de Bavard et Ghys soit un orbifold ?

Il existe une classe de contre-exemples où $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est un orbifold, mais pas \mathbb{T} : à chaque fois qu'il y a trois fois le cône-angle $10\pi/6$, \mathbb{T} n'est pas un orbifold, par contre, sous réserve de bon comportement des autres cône-angles, $\mathbb{B}\mathbb{G}$ en est un. Par exemple, en dimensions respectives 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\right), \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right), \\ & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right), \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}\right), \\ & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right), \\ & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}\right), \\ & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}\right), \\ & \left(\frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Par contre, pour tous ces cône-angles, $\overline{\mathcal{C}}$ est un orbifold.

On se demande alors si, quand \mathbb{T} est un orbifold, $\mathbb{B}\mathbb{G}$ en est un. Il est peut-être possible de répondre à cette question par des considérations arithmétiques, ou alors en répondant à la question plus générale : une forme réelle d'un orbifold est-elle un orbifold ?

5 Remerciements

L'idée de départ est de Jean-Marc Schlenker, de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et rien n'aurait été possible sans ses explications, son écoute patiente, sa disponibilité et sa volonté de voir ce travail mené à terme. Je dois aussi remercier Michel Boileau pour ses explications et Bruno Colbois de l'Université de Neuchâtel, pour m'avoir permis de terminer la rédaction.

Références

- [BG92] C. Bavard and É. Ghys. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geometriae Dedicata*, 43 :207–224, 1992.
- [BLP02] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds, part i : geometry of cone-manifolds. 2002.
- [BP92] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Verlag, 1992.
- [Bus58] H. Buseman. *Convex surfaces*. Interscience Publishers, New York, 1958.

- [DCS00] Cooper D., Hodgson C., and Kerckhoff S. *Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*. MJS, 2000.
- [DM86] P. Deligne and G.D. Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 63 :5–89, 1986.
- [EP94] David B.A. Epstein and Carlo Petronio. An exposition of Poincaré’s polyhedron theorem. *L’enseignement mathématique*, 40 :113–170, 1994.
- [ILTC01] C. Indermitte, Th.M. Liebling, M. Troyanov, and H. Cléménçon. Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and application to biological growth. *Theoretical Computer Science*, 2001.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer Verlag, 1994.
- [Thu97a] William P. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. <http://www.msri.org/gt3m>, 1997.
- [Thu97b] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton, 1997.
- [Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. *Geometry and topology monographs*, 1 :511–549, 1998.
- [Tro] Marc Troyanov. Le papier de Deligne-Mostow. Manuscrit.
- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *L’enseignement Mathématique*, 32 :79–94, 1986.