



**HAL**  
open science

## Recurrence and genericity

Christian Bonatti, Sylvain Crovisier

► **To cite this version:**

| Christian Bonatti, Sylvain Crovisier. Recurrence and genericity. 2003. hal-00000449

**HAL Id: hal-00000449**

**<https://hal.science/hal-00000449>**

Preprint submitted on 26 Jun 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Récurrence et genericité

Christian Bonatti et Sylvain Crovisier

26 juin 2003

## Résumé

Nous montrons un lemme de connexion  $C^1$  pour les pseudo-orbites des difféomorphismes des variétés compactes. Nous explorons alors les conséquences pour les difféomorphismes  $C^1$ -génériques. Par exemple, les difféomorphismes conservatifs  $C^1$ -génériques sont transitifs.

## Abstract

We prove a  $C^1$ -connecting lemma for pseudo-orbits of diffeomorphisms on compact manifolds. We explore some consequences for  $C^1$ -generic diffeomorphisms. For instance,  $C^1$ -generic conservative diffeomorphisms are transitive<sup>1</sup>.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Récurrence des difféomorphismes génériques . . . . .	2
1.1.1	Les divers types de récurrences . . . . .	2
1.1.2	Dynamiques génériques . . . . .	4
1.2	Énoncé précis des résultats . . . . .	6
1.2.1	Énoncé du lemme de connexion pour les pseudo-orbites . . . . .	6
1.2.2	Décomposition de la dynamique des difféomorphismes génériques en pièces élémentaires . . . . .	8
1.2.3	Classes de récurrence par chaînes et orbites périodiques . . . . .	10
1.2.4	Dynamiques conservatives . . . . .	11
1.3	Problèmes ouverts . . . . .	12
1.4	Présentation de l'article . . . . .	13
1.4.1	Idée de la preuve du théorème 1.2 . . . . .	13
1.4.2	Organisation de cet article . . . . .	15
1.4.3	Remerciements . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Boîtes de perturbation et énoncé du “connecting lemma”</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Existence d’une tour topologique</b>	<b>19</b>
3.1	Énoncé du résultat . . . . .	19
3.2	Un lemme de coloriage . . . . .	20
3.3	Mise en position générale . . . . .	22
3.4	Démonstration du théorème 3.1 . . . . .	23

<sup>1</sup>An announcement of these results, written in english, [BC], is available at the adresse <http://math.u-bourgogne.fr/topolog/bonatti/preprints/chaincras.ps>

<b>4</b>	<b>Lemme de connexion pour les pseudo-orbites : preuve du théorème 1.2</b>	<b>25</b>
4.1	Boîtes de perturbation recouvrant l'espace des orbites . . . . .	25
4.2	Au voisinage des points périodiques . . . . .	26
4.3	Preuve du théorème 1.2 : préparation . . . . .	28
4.4	Retour des pseudo-orbites dans les carreaux . . . . .	29
4.5	Regroupement des sauts dans les carreaux . . . . .	31
4.6	Fin de la preuve du théorème 1.2 . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Conséquences du lemme de connexion</b>	<b>33</b>
5.1	Preuve du théorème 1.1 : argument de généricité . . . . .	33
5.2	Conséquences du théorème 1.1 . . . . .	34
5.3	Décomposition en pièces élémentaires . . . . .	34
5.4	Classes de récurrence par chaînes et orbites périodiques . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Le cas conservatif</b>	<b>37</b>
6.1	Les théorèmes 1.2, 1.1 et 1.3 lorsque $\dim(M) \geq 3$ . . . . .	37
6.2	Difféomorphismes conservatifs des surfaces . . . . .	38
6.2.1	Au voisinage des points elliptiques . . . . .	38
6.2.2	Preuve du théorème 1.2 pour les difféomorphismes conservatifs des surfaces	40
6.2.3	Preuve du théorème 1.3 dans le cas des surfaces . . . . .	42
6.3	Exposants stables et décomposition dominée : preuve du théorème 1.4 . . . . .	44
<b>A</b>	<b>Le Connecting Lemma</b>	<b>47</b>
A.1	Cubes perturbatifs uniformes . . . . .	47
A.2	Fin de la preuve du connecting lemma . . . . .	49
A.3	Regroupement de points proximaux . . . . .	51
A.4	Preuve du lemme A.8 . . . . .	54

# 1 Introduction

## 1.1 Récurrence des difféomorphismes génériques

### 1.1.1 Les divers types de récurrences

On sait depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle que la dynamique globale des difféomorphismes ou des équations différentielles peut être très complexe même en basse dimension : pour décrire cette dynamique globale il ne suffit pas de chercher des états d'équilibre (des orbites périodiques) qui seraient la limite de toute orbite. L'existence d'intersections homoclines transverses, découverte par H. Poincaré [Po], est un phénomène simple et résistant aux perturbations et G. D. Birkhoff [Bi<sub>2</sub>] a montré qu'il entraîne l'existence d'une infinité d'orbites périodiques dont la période tend vers l'infini.

Cette complexité des systèmes a amené les dynamiciens à chercher la meilleure notion d'ensemble qui concentrerait la dynamique non-triviale. De nombreuses définitions ont été utilisées. En voici quelques unes parmi les plus fréquentes, exprimées ici pour un difféomorphisme  $f$  d'une variété compacte  $M$  :

- l'ensemble  $Per(f)$  des points périodiques,

- les ensembles des points positivement ou négativement récurrents de  $f$ , que l'on note  $Rec_+(f)$  et  $Rec_-(f)$ ,
- les ensembles  $L_+(f)$  et  $L_-(f)$  qui sont l'union des ensembles  $\omega$ -limite et  $\alpha$ -limite des points de la variété, et leur union  $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$ ,
- l'ensemble  $\Omega(f)$  des *points non-errants* de  $f$  (appelé également *ensemble non-errant*), introduit par Birkhoff dans [Bi<sub>1</sub>] : un point est dit *errant* s'il admet un voisinage disjoint de tous ses itérés. Cet ensemble est compact, invariant, et contient l'adhérence de tous les ensembles cités ci-dessus.

En général ces ensembles ne coïncident pas : pour deux quelconques d'entre eux il existe des difféomorphismes pour lesquels ils sont différents (voir [Sh] pour une exposition détaillée sur les différents types de récurrence).

Plus récemment C. Conley [Co] et R. Bowen [Bo] ont introduit les notions de *pseudo-orbites* et de *points récurrents par chaînes* : ce sont les points qui admettent des pseudo-orbites fermées, c'est-à-dire que l'on peut fermer leur orbite si l'on admet une erreur arbitrairement petite faite à chaque itération. Cette notion provient d'une vision perturbative de la dynamique : les pseudo-orbites sont les orbites que l'on voit si l'on ajoute un bruit à la dynamique.

La différence entre l'ensemble récurrent par chaînes  $\mathcal{R}(f)$  (i.e. l'ensemble des points récurrents par chaînes) et l'ensemble non-errant se comprend bien dans l'exemple des dynamiques hyperboliques, i.e. vérifiant l'Axiome A. Dans ce cas le théorème de décomposition spectrale de Smale (voir [Sm]) décompose l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  en union finie d'ensembles hyperboliques transitifs  $\Lambda_i$  disjoints, appelés *pièces basiques*. On appelle alors *cycle* toute suite périodique de pièces basiques telle que la variété instable de chacune rencontre la variété stable de la suivante. Les points errants mais récurrents par chaînes sont alors les points d'intersections des variétés invariantes des pièces basiques d'un même cycle. J. Palis [Pa] a montré que ces intersections de variétés invariantes formant un cycle sont responsables des  $\Omega$ -explosions. Dans ce cadre,  $\mathcal{R}(f)$  apparaît comme l'accroissement potentiel de  $\Omega(f)$ , ou plus précisément comme la limite supérieure des  $\Omega(g)$  pour  $g$  convergeant vers  $f$ . C'est donc naturellement l'hyperbolicité de l'ensemble récurrent par chaîne, plutôt que celle de l'ensemble non-errant qui est la clef de la stabilité structurelle, et les hypothèses de la théorie de Smale s'expriment plus simplement en termes de  $\mathcal{R}(f)$  :

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie l'Axiome A et la condition "pas de cycles"} &\iff \\ \Omega(f) = \overline{Per(f)}, \text{ est hyperbolique et ne présente pas de cycles} &\iff \\ \mathcal{R}(f) \text{ est hyperbolique.} & \end{aligned}$$

Cette condition est équivalente à l' $\Omega$ -stabilité (stabilité structurelle restreinte à  $\Omega(f)$ ), et équivalente de fait à la  $\mathcal{R}(f)$ -stabilité, *a priori* plus forte. La preuve de l' $\Omega$ -stabilité passe par deux étapes :

- la notion de filtration, qui structure de façon robuste la dynamique globale autour des pièces basiques : la variété est coupée en tranches ordonnées contenant chacune une unique pièce basique ; les orbites respectent l'ordre sur les tranches : si une orbite sort d'une tranche c'est pour entrer dans la suivante, et de ce fait elle ne reviendra plus visiter les tranches antérieures (chaque départ est sans retour) ; une orbite qui entre dans une tranche et qui n'en sort plus appartient à la variété stable de la pièce basique correspondante. En particulier, toute orbite s'accumule (positivement et négativement) sur une unique pièce basique.

- l'étude locale de la dynamique au voisinage de chaque pièce basique. Par exemple le lemme de pistage (shadowing lemma, voir [Bo]) montre que toute pseudo-orbite dont les points appartiennent à une pièce basique reste voisine de ("est pistée par") une unique orbite de cette pièce basique. En conséquence, tout point dont l'orbite s'accumule positivement sur une pièce basique appartient à la variété stable d'un point de cette pièce basique.

Des filtrations structurant la dynamique globale existent en toute généralité, associées à l'ensemble récurrent par chaînes :

On définit une relation entre les points de  $\mathcal{R}(f)$  : deux points sont équivalents s'il existe des pseudo-orbites (de sauts arbitrairement petits) joignant l'un à l'autre et réciproquement. L'ensemble  $\mathcal{R}(f)$  est ainsi l'union des classes d'équivalences qui sont des compacts invariants (nous les appellerons les *classes de récurrence par chaînes*). C. Conley (voir [Co] et [R<sub>2</sub>, Fundamental Theorem of Dynamical Systems]) montre l'existence de fonctions  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ , dites *fonctions de Lyapunov*, strictement croissantes le long de toute orbite de  $M \setminus \mathcal{R}(f)$ , et constantes le long de celles de  $\mathcal{R}(f)$ . On peut de plus choisir  $\psi$  telle que deux points de  $\mathcal{R}(f)$  soient dans un même niveau si et seulement s'ils sont équivalents et telle que l'image  $\psi(\mathcal{R}(f))$  soit un compact totalement discontinu de  $\mathbb{R}$ . Les niveaux d'une telle fonction de Lyapunov  $\psi$  permettent alors de construire des filtrations séparant les classes de récurrence par chaînes.

Cependant une classe de récurrence par chaînes n'est pas *a priori* une "pièce élémentaire de la dynamique" puisqu'elle peut parfois se décomposer en union de compacts invariants plus petits.

### 1.1.2 Dynamiques génériques

La variété des comportements possibles d'un système dynamique a amené l'idée d'éviter les pathologies fragiles (ne résistant pas à d'infimes perturbations du système) et de concentrer l'étude sur les comportements génériques.

Cette étude est intimement liée aux résultats perturbatifs : ainsi le théorème de transversalité de R. Thom se traduit pour les dynamiques génériques, en toute topologie  $C^r$ , par le théorème de Kupka-Smale :  $C^r$ -génériquement, toute orbite périodique est hyperbolique et toute intersection entre variétés invariantes d'orbites périodiques est une intersection transverse.

Dans cet esprit, un résultat essentiel de l'étude des dynamiques  $C^1$ -génériques est le célèbre lemme de fermeture de C. Pugh (Pugh's Closing Lemma [Pu, PR]). En permettant de créer par ( $C^1$ -petite) perturbation une orbite périodique passant près d'un point non-errant arbitraire, il montre que,  $C^1$ -génériquement, l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques. Ceci entraîne que,  $C^1$ -génériquement, tous les candidats pour représenter la dynamique non-triviale se valent, sauf éventuellement l'ensemble récurrent par chaînes pour lequel la question restait ouverte ; en formule :

$$f \text{ est } C^1\text{-générique} \implies \overline{Per(f)} = \overline{Rec_+(f)} = \overline{Rec_-(f)} = \overline{L(f)} = \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f).$$

Par analogie à la description donnée par Smale de la dynamique globale des difféomorphismes Axiome A sans cycles, on aimerait obtenir une "décomposition en pièces élémentaires de la dynamique non-triviale" d'un difféomorphisme générique. Un candidat naturel est bien sûr l'ensemble récurrent par chaînes  $\mathcal{R}(f)$  et sa décomposition en classes d'équivalence de la théorie de Conley (voir ci-dessus).

L'étude des dynamiques  $C^1$ -génériques a connu récemment de nombreux développements (voir [BD<sub>1</sub>, Ar<sub>1</sub>, CMP, CM, MP, Ab, W<sub>2</sub>]), à la suite d'un nouveau résultat de  $C^1$ -perturbation,

le lemme de connexion de S. Hayashi [Ha] et ses variantes par L. Wen et Z. Xia [WX] et par M.-C. Arnaud [Ar<sub>1</sub>]. Ce lemme de connexion permet de faire passer (par une  $C^1$ -perturbation du difféomorphisme) l'orbite d'un point  $x$  par un point  $y$ , si, pour la dynamique initiale, les orbites positive de  $x$  et négative de  $y$  s'accroissent sur un même point non-périodique.

Il existe, pour les difféomorphismes génériques, un second candidat pour la décomposition de la dynamique non-triviale en pièces élémentaires. Grâce au lemme de connexion, l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme générique se décompose en union disjointe de compacts invariants *faiblement transitifs maximaux* : pour tout couple de points d'un tel ensemble, tout voisinage du premier point possède des itérés positifs rencontrant un voisinage arbitraire du second de ces points, et réciproquement. En effet [Ar<sub>1</sub>, GW] montrent que cette relation sur les couples de points de  $\Omega(f)$  est, pour un difféomorphisme générique, une relation d'équivalence fermée dont les classes d'équivalence sont les ensembles faiblement transitifs maximaux (ce n'est pas vrai pour tous les difféomorphismes). Cette nouvelle décomposition en pièces élémentaires n'est pas indépendante de celle donnée par Conley : en effet, un faiblement transitif maximal est toujours inclus dans une classe de récurrence par chaînes. Ces résultats ne donnaient cependant pas de filtrations associées à cette partition de  $\Omega(f)$  en classes.

Suivant une approche légèrement différente, [BD<sub>1</sub>] avait proposé les *classes homoclines* (adhérence des points homoclines transverses) des orbites périodiques comme étant les candidats naturels à être les pièces élémentaires de la dynamique : les classes homoclines sont des ensembles transitifs canoniquement associés aux orbites périodiques et coïncident avec les pièces basiques dans le cas des dynamiques hyperboliques. De fait, [Ar<sub>1</sub>, CMP] montrent que les classes homoclines des difféomorphismes génériques sont des *ensembles transitifs saturés* : elles contiennent tout ensemble transitif qu'elles intersectent (en particulier elles sont disjointes ou confondues) ; leurs preuves montrent également que les classes homoclines sont (génériquement) des ensembles faiblement transitifs maximaux<sup>2</sup>. F. Abdenur [Ab] montre alors l'existence de deux  $C^1$ -ouverts disjoints  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  dont l'union est  $C^1$ -dense dans l'ensemble des difféomorphismes et tels que :

- les difféomorphismes génériques de  $\mathcal{S}$  possèdent une infinité de classes homoclines (on parle alors de *dynamique sauvage*) ;
- pour un difféomorphisme générique  $f$  de  $\mathcal{A}$ , l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  est l'union d'un nombre fini de classes homoclines disjointes, ce nombre étant localement constant parmi les difféomorphismes génériques ; de plus il existe une filtration de la variété associée à cette partition de  $\Omega(f)$  en classes homoclines. On parle alors de *dynamique apprivoisée*. Pour ces dynamiques apprivoisées, les ensembles  $\mathcal{R}(f)$  et  $\Omega(f)$  coïncident et de plus la partition de  $\mathcal{R}(f)$  en classes de récurrence par chaînes coïncide avec la partition de  $\Omega(f)$  en ensembles transitifs qui sont les classes homoclines.

Les systèmes apprivoisés admettent donc une description de leur dynamique globale très proche de celles des difféomorphismes de type Axiome A. La dynamique en restriction aux classes homoclines n'est cependant pas nécessairement hyperbolique : il s'agit bien d'une classe de difféomorphismes plus vaste que celle des Axiome A. Des exemples de dynamiques apprivoisées non-hyperboliques peuvent être construits à l'aide d'ensembles *robustement transitifs*, pour lesquels il existe de nombreux exemples locaux ou globaux. Il n'est à ce jour pas connu si

---

<sup>2</sup>Une classe homocline  $H(P, f)$  d'un difféomorphisme générique  $f$  est l'intersection de l'adhérence des variétés instable et stable du point  $P$ , d'après [Ar<sub>1</sub>]. Ces adhérences sont *stables au sens de Lyapunov* pour  $f$  et  $f^{-1}$ , respectivement, d'après [CMP], c'est-à-dire qu'elles admettent une base de voisinages positivement invariants pour  $f$  et  $f^{-1}$ , respectivement. On en déduit que tout ensemble faiblement transitif intersectant  $H(P, f)$  est inclus dans des voisinages arbitrairement petits des adhérences des variétés invariantes, et donc dans  $H(P, f)$ .

les classes homoclines des dynamiques apprivoisées sont nécessairement robustement transitives (dans ce cas l'ensemble des dynamiques apprivoisées serait un ouvert dense de  $\mathcal{A}$ ). Nous verrons cependant, en conséquence de nos résultats, qu'elles vérifient une propriété proche de la robuste transitivité que nous appellerons *robuste récurrence par chaînes*.

Le fait que le  $C^1$ -ouvert  $\mathcal{S}$  est non-vide pour les variétés de dimension supérieure ou égale à 3 (autrement dit, l'existence de dynamiques sauvages) à été montré dans [BD<sub>1</sub>]. Ce n'est pas connu en dimension 2 pour la topologie  $C^1$  considérée ici ; rappelons qu'en topologie  $C^2$ , la coexistence génériques sur les surfaces d'une infinité de classes homoclines (en fait, des puits ou des sources) est connue depuis [N<sub>1</sub>, N<sub>3</sub>]. De plus, ruinant les espoirs de [BD<sub>1</sub>], [BD<sub>2</sub>] montre l'existence de difféomorphismes localement génériques possédant une famille non-dénombrable d'ensembles transitifs saturés, stables au sens de Lyapunov pour les temps positifs et négatifs, et qui ne contiennent aucune orbite périodique : de fait, pour les exemples connus, la dynamique en restriction à ces ensembles transitifs est minimale.

Dans cet article, nous montrons un nouveau lemme de perturbation (voir le théorème 1.2) : si deux points sont joints par des pseudo-orbites de sauts arbitrairement petits, alors il existe des  $C^1$ -petites perturbations de la dynamique telles que l'orbite positive du premier point passe par le second de ces points. De plus, dans le cas conservatif, ces perturbations peuvent être choisies préservant le volume. En particulier, comme dans le cas des  $\Omega$ -explosions associées aux cycles des difféomorphismes Axiome A, l'ensemble  $\mathcal{R}(f)$  est l'accroissement potentiel de  $\Omega(f)$ .

Ceci nous permet de montrer que, génériquement, les ensembles  $\mathcal{R}(f)$  et  $\Omega(f)$  coïncident et que de plus la partition de  $\mathcal{R}(f)$  en classes de récurrence par chaînes coïncide (génériquement) avec la partition (définie génériquement) de  $\Omega(f)$  en ensembles faiblement transitifs. Les deux candidats que nous proposons comme pièces élémentaires de la dynamique sont génériquement les mêmes. D'après la théorie de Conley, il existe donc une filtration séparant les pièces élémentaires, ce qui montre que toute orbite positive ou négative s'accumule sur une unique de ces pièces (en fait, sur une partie de cette pièce). Chaque pièce élémentaire est faiblement transitive<sup>3</sup>. De plus [CM] montrent que pour un difféomorphisme générique, les points génériques de la variété ont leur orbite positive (ou négative) qui s'accumule sur toute une pièce élémentaire, qui de plus est stable au sens de Lyapunov.

Nous donnons alors une liste de conséquences plus ou moins directes, dont la plus spectaculaire est sans doute dans le cas conservatif : les difféomorphismes  $C^1$ -génériques d'une variété compacte connexe qui préservent le volume sont transitifs. Ceci est particulièrement remarquable pour les difféomorphismes préservant l'aire des surfaces, pour lesquels on sait que ce résultat est faux en topologie  $C^4$ . En effet, la théorie KAM assure l'existence de  $C^4$ -ouverts de difféomorphismes possédant des disques périodiques (qui empêchent la transitivité) (voir par exemple [M, section II.4.c] ou [He<sub>1</sub>, chapitre IV]).

## 1.2 Énoncé précis des résultats

### 1.2.1 Énoncé du lemme de connexion pour les pseudo-orbites

Dans tout ce travail nous considérons une variété compacte  $M$ , munie d'une métrique riemannienne arbitraire, et parfois munie d'une forme volume  $\omega$  (sans relation avec la métrique).

---

<sup>3</sup>Ceci suggère d'appeler *pièce élémentaire de la dynamique* d'un difféomorphisme  $f$  quelconque, toute classe de récurrence par chaînes qui est faiblement transitive.

Nous notons  $\text{Diff}^1(M)$  l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^1$  de  $M$  muni de la topologie  $C^1$  et  $\text{Diff}_\omega^1(M) \subset \text{Diff}^1(M)$  le sous-ensemble de ceux qui préservent le volume  $\omega$ .

Rappelons que, pour un espace métrique complet, une partie est dite *résiduelle* si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Une propriété est dite *générique* si elle est vérifiée sur un ensemble résiduel. Nous parlerons ici, par abus de langage, de difféomorphismes génériques : la phrase “*un difféomorphisme générique vérifie la propriété  $P$* ” signifie que la propriété  $P$  est générique.

Soit  $f \in \text{Diff}^1(M)$  un difféomorphisme de  $M$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite de  $f$  est une suite (finie ou infinie) de points  $(x_i)$  vérifiant  $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon$ . On définit les relations binaires suivantes pour les paires  $(x, y)$  de points de  $M$  :

- Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $x \dashv_\varepsilon y$  s'il existe une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $x_0 = x, \dots, x_k = y$  avec  $k \geq 1$ .
- On note  $x \dashv y$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $x \dashv_\varepsilon y$ . On notera parfois  $x \dashv_f y$  pour préciser le système dynamique considéré.
- On note  $x \prec y$  (ou  $x \prec_f y$ ) si, pour tous voisinages  $U, V$  de  $x$  et  $y$ , respectivement, il existe  $n \geq 1$  tel que  $f^n(U)$  rencontre  $V$ .

Voici quelques propriétés élémentaires de ces relations.

1. Les relations  $\dashv$  et  $\dashv_\varepsilon$  sont, par construction, transitives. L'ensemble récurrent par chaînes  $\mathcal{R}(f)$  est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels que  $x \dashv x$ .
2. La relation  $x \prec y$  n'est pas *a priori* transitive. L'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels que  $x \prec x$ .

Marie-Claude Arnaud montre dans [Ar<sub>1</sub>] que la relation  $\prec$  est transitive pour les difféomorphismes génériques. Par des méthodes similaires nous montrons :

**Théorème 1.1.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  (ou de  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ ) telle que pour tout difféomorphisme  $f$  de  $\mathcal{G}$  et tout couple  $(x, y)$  de points de  $M$  on a :*

$$x \dashv_f y \iff x \prec_f y.$$

Ce théorème est la conséquence pour les dynamiques génériques du résultat perturbatif suivant :

**Théorème 1.2.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :*

1. *toutes les orbites périodiques de  $f$  sont hyperboliques,*
2.  *$M$  est une surface compacte et toute orbite périodique est ou bien hyperbolique ou bien elliptique irrationnelle (ses valeurs propres sont complexes, de module 1, mais ne sont pas des racines de 1).*

*Soit  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$  (ou dans  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ , si  $f$  préserve une forme volume  $\omega$ ). Alors, pour toute paire  $(x, y)$  de points de  $M$  telle que  $x \dashv y$ , il existe un difféomorphisme  $g$  dans  $\mathcal{U}$  et un entier  $n > 0$  tel que  $g^n(x) = y$ .*

**Remarque 1.1.** *Dans le théorème 1.2 ci-dessus, si le difféomorphisme  $f$  est de classe  $C^r$ , avec  $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ , la  $C^1$ -perturbation  $g$  peut être choisie de classe  $C^r$ . En effet le difféomorphisme  $g$  est obtenu grâce à un nombre fini de  $C^1$ -perturbations données par le connecting lemma (théorème 2.1), chacune de ces perturbations étant elle-même de classe  $C^r$ .*



Voici quelques conséquences de ces résultats :

**Corollaire 1.2.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que pour tout difféomorphisme  $f$  de  $\mathcal{G}$ , son ensemble  $\mathcal{R}(f)$  de points récurrents par chaînes coïncide avec son ensemble  $\Omega(f)$  de points non-errants.*

**Corollaire 1.3.** *Supposons  $M$  connexe. Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que si  $f \in \mathcal{G}$  vérifie  $\Omega(f) = M$  alors il est transitif. De plus  $M$  est alors une unique classe homocline.*

Un argument classique (voir [T]) permet de renforcer légèrement l'énoncé du corollaire 1.3 : un difféomorphisme générique  $f$  tel que  $\Omega(f) = M$  est *topologiquement mélangeant*, i.e. pour tous ouverts  $U$  et  $V$  non vides de  $M$ , tout itéré positif assez grand de  $U$  rencontre  $V$ .

### 1.2.2 Décomposition de la dynamique des difféomorphismes génériques en pièces élémentaires

Considérons la relation symétrisée  $\vdash$  de  $\dashv$  définie par  $x \vdash y$  si  $x \dashv y$  et  $y \dashv x$ . Cette relation induit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{R}(f)$ , dont les classes d'équivalence sont appelées *classes de récurrence par chaînes*.

On dit qu'un compact  $\Lambda$  invariant par  $f$  est *faiblement transitif* si, pour tous  $x, y \in \Lambda$ , on a  $x \prec y$ . Un ensemble  $\Lambda$  est *faiblement transitif maximal* s'il est maximal pour  $\subset$  parmi les ensembles faiblement transitifs. L'adhérence d'une union croissante de compacts faiblement transitifs étant faiblement transitive, le lemme de Zorn implique que tout faiblement transitif est inclus dans un faiblement transitif maximal. Dans le cas où la relation  $\prec_f$  est transitive (c'est à dire pour  $f$  générique) les faiblement transitifs maximaux sont les classes d'équivalence de la relation symétrisée de  $\prec$  induite sur l'ensemble  $\Omega(f)$ . Pour un difféomorphisme générique on obtient alors :

**Corollaire 1.4.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  les classes de récurrence par chaînes sont exactement les faiblement transitifs maximaux de  $f$ .*

Les résultats de Conley sur la décomposition de  $\mathcal{R}(f)$  en classes de récurrence par chaînes vont donc s'appliquer (pour les difféomorphismes génériques) à la décomposition de  $\Omega(f)$  en ensembles faiblement transitifs maximaux. Rappelons donc ces résultats (voir [Co]).

Pour tout espace compact métrique  $X$  et tout homéomorphisme  $h: X \rightarrow X$ , il existe une fonction continue  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée *fonction de Lyapunov de  $h$* , qui est strictement croissante le long des orbites de  $X \setminus \mathcal{R}(h)$ , constante sur chaque classe de récurrence par chaînes et injective sur l'ensemble de ces classes. De plus l'image  $\phi(\mathcal{R}(h))$  est un compact totalement discontinu de  $\mathbb{R}$ . Une telle fonction de Lyapunov permet de construire une filtration, adaptée à  $h$  et séparant les classes de récurrence par chaînes :

On appelle *filtration adaptée à  $h$*  une famille  $\{X_i\}_{i \in I}$ , indexée par une partie  $I \subset \mathbb{R}$ , de compacts de  $X$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $X_j$  est contenu dans l'intérieur de  $X_i$  si  $j > i$ ;
- pour tout  $i$ ,  $h(X_i)$  est contenu dans l'intérieur de  $X_i$ .

On dira que la filtration  $\{X_i\}$  sépare deux ensembles invariants  $K_1$  et  $K_2$  s'il existe  $i$  tel que l'intérieur de  $X_i$  et  $X \setminus X_i$  contiennent chacun un et un seul de ces deux ensembles. L'ensemble maximal invariant  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^n(X_i)$  dans  $X_i$  est un attracteur topologique<sup>4</sup> (en général non-transitif). De même l'ensemble maximal invariant du complémentaire de  $X_j$  est un répulseur

<sup>4</sup>On appelle *attracteur topologique* l'ensemble maximal invariant d'un compact  $U$  dont l'image est contenue dans l'intérieur de  $U$  ; un *répulseur topologique* est un attracteur topologique pour la dynamique inverse.

topologique. L'ensemble maximal invariant dans  $X_i \setminus X_j$  est donc l'intersection d'un attracteur et d'un répulseur. Plus généralement, toute classe de récurrence par chaînes est l'intersection d'un ensemble Lyapunov stable pour  $h$  et d'un ensemble Lyapunov stable pour  $h^{-1}$  (les ensembles possédant cette propriétés sont appelés *ensembles neutres* par [CMP]).

Si  $\phi$  est une fonction de Lyapunov de  $h$ , on peut obtenir une filtration de  $X$ , adaptée à  $h$  et séparant les classes de récurrence par chaînes, de la façon suivante : on considère une partie  $I$  de  $\mathbb{R} \setminus \phi(\mathcal{R}(h))$  telle que toute composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus \phi(\mathcal{R}(h))$  contient exactement un point de  $I$ . La famille  $\{\phi^{-1}([i, +\infty[)\}_{i \in I}$  est la filtration annoncée.

Comme conséquence directe de nos résultats et de la théorie de Conley, nous obtenons donc :

**Corollaire 1.5.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que tout  $f \in \mathcal{G}$  possède une filtration adaptée qui sépare les ensembles faiblement transitifs maximaux.*

On aimerait que, pour tout difféomorphisme générique, tout point générique appartienne au bassin d'un attracteur topologique transitif. Nos résultats ne semblent pas répondre directement à ce problème. Cependant une version affaiblie de cette question a été proposée par M. Hurley dans [Hu]. Il définit un *quasi-attracteur* comme étant l'intersection d'une famille d'attracteurs topologiques. Il conjecture :

**Conjecture 1.6 (Hurley).** *Pour tout  $r \geq 1$ , il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^r(M)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , l'union des bassins des quasi-attracteurs récurrents par chaînes est une partie résiduelle de  $M$ .*

Il a démontré cette conjecture en topologie  $C^0$  (pour les champs de vecteurs). [Ar<sub>1</sub>] puis [MP] ont donné des résultats partiels dans ce sens qui nous permettent de montrer la conjecture en topologie  $C^1$ , avec le théorème 1.1 et la proposition suivante :

- Proposition 1.7.**
1. *Pour tout homéomorphisme  $f$ , un quasi-attracteur récurrent par chaînes est une classe de récurrence par chaînes stable au sens de Lyapunov.*
  2. *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , une classe de récurrence par chaînes qui est stable au sens de Lyapunov est un quasi-attracteur (bien sûr récurrent par chaînes).*

Voici donc la réponse positive à la conjecture de Hurley en topologie  $C^1$  :

**Corollaire 1.8.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , l'union des bassins des quasi-attracteurs récurrents par chaînes est une partie résiduelle de  $M$  ; plus précisément, pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , l'ensemble des points dont l' $\omega$ -limite est une classe de récurrence par chaînes stable au sens de Lyapunov est résiduel.*

Commentons ce résultat par quelques remarques :

- Remarque 1.9.**
1. *Pour un compact invariant  $\Lambda$ , on définit son ensemble stable comme l'ensemble des points dont l'ensemble  $\omega$ -limite est contenu dans  $\Lambda$ . Les variétés stables des classes de récurrence par chaînes forment une partition de  $M$ .*
  2. *Comme il a été remarqué dans [MP], l'application qui à un point associe l'adhérence de son orbite positive est semi-continue inférieurement, et donc continue sur une partie résiduelle de  $M$ . On en déduit qu'il existe une partie résiduelle de  $M$  telle que, en restriction à cette partie, les ensembles stables des classes de récurrence par chaînes sont fermés.*
  3. *De l'item précédent on déduit que, si l'ensemble stable d'une classe de récurrence par chaînes est d'adhérence non-maigre, alors l'ensemble stable lui-même est localement résiduel (résiduel dans un ouvert non-vide). Ceci provient de ce que tout borélien non-maigre,*

est localement résiduel dans un ouvert non-vide (voir [Ke, Proposition 8.26]), et que la différence entre l'ensemble stable et son adhérence est un ensemble maigre, d'après l'item précédent.

### 1.2.3 Classes de récurrence par chaînes et orbites périodiques

Rappelons que d'après le lemme de fermeture (closing lemma) de C. Pugh, l'ensemble des points périodiques d'un difféomorphisme générique est dense dans  $\Omega(f)$ , et on aimerait utiliser ces orbites périodiques pour mieux comprendre la dynamique des classes de récurrence par chaînes. Rappelons que la *classe homocline*  $H(p, f)$  de l'orbite d'un point périodique hyperbolique  $p$  est l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection transverse de ses variétés stable et instable. C'est un ensemble transitif, et comme nous l'avons vu à la section 1.2.2, les résultats de [CMP] entraînent que, pour un difféomorphisme générique, toute classe homocline est un ensemble faiblement transitif maximal. Ceci montre, d'après le corollaire 1.4 :

**Remarque 1.10.** *Les classes homoclines d'un difféomorphisme générique sont des classes de récurrence par chaînes.*

Une classe de récurrence par chaînes d'un difféomorphisme générique qui n'est pas une classe homocline ne contient donc aucune orbite périodique ; on appellera *classe aperiodique* toute classe de récurrence par chaînes sans orbite périodique.

**Corollaire 1.11.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , toute composante connexe d'intérieur non-vide de  $\Omega(f) = \mathcal{R}(f)$  est périodique et son orbite est une classe homocline.*

Le closing lemma de Pugh et la remarque 1.10 montrent :

**Remarque 1.12.** *Pour  $f$  générique, toute classe de récurrence par chaînes qui est isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  est une classe homocline. C'est en particulier le cas des classes qui sont des attracteurs ou des répulseurs topologiques.*

Une classe isolée est l'ensemble maximal invariant dans un voisinage  $M_i \setminus \overline{M}_j$ , appelé voisinage filtrant<sup>5</sup>.

On dit qu'un ensemble compact invariant  $\Lambda$  est *robustement transitif* s'il admet un voisinage isolant  $U$  tel que, pour tout difféomorphisme  $g$  suffisamment  $C^1$ -proche de  $f$ , le maximal invariant  $\Lambda_g$  de  $g$  dans  $\overline{U}$  est encore transitif. On aimerait montrer que, pour un difféomorphisme générique, les classes homoclines isolées sont robustement transitives. Notre travail donne un résultat dans ce sens :

**Corollaire 1.13.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , toute classe homocline  $\Lambda$  de  $f$  isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  est robustement récurrente par chaînes : pour tout voisinage isolant  $U$  de  $\Lambda$ , pour tout difféomorphisme  $g$  suffisamment  $C^1$ -proche de  $f$ , l'ensemble maximal invariant de  $g$  dans  $\overline{U}$  est récurrent par chaînes.*

Pour les classes non-isolées, un travail récent (voir [Cr]) précise la façon dont une classe de récurrence par chaînes est approchée par les orbites périodiques :

**Théorème .** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  (ou de  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ ) telle que pour  $f \in \mathcal{G}$  tout ensemble faiblement transitif maximal est la limite, pour la topologie de Hausdorff, d'une suite d'orbites périodiques de  $f$ .*

---

<sup>5</sup>Plus généralement, on appelle *voisinage isolant* d'un compact invariant  $K$  tout voisinage ouvert  $U$  de  $K$  tel que  $K$  est l'ensemble maximal invariant de l'adhérence de  $U$ . On dira que  $U$  est un *voisinage filtrant* s'il peut s'écrire  $U = U_1 \setminus \overline{U}_2$  où  $U_1$  et  $U_2$  sont des ouverts vérifiant  $\overline{U}_2 \subset U_1$ ,  $f(\overline{U}_1) \subset U_1$  et  $f(\overline{U}_2) \subset U_2$ .

De plus les classes de récurrence par chaînes ont une propriété de semi-continuité supérieure : si  $x_n \in \mathcal{R}(f)$  est une suite de points convergeant vers un point  $x$  alors pour  $n$  assez grand, la classe de  $x_n$  est contenue dans un voisinage arbitrairement petit de la classe de  $x$ .

### 1.2.4 Dynamiques conservatives

Dans le cas conservatif, l'ensemble non-errant coïncide toujours avec la variété  $M$ . On obtient donc :

**Théorème 1.3.** *Supposons  $M$  connexe. Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_\omega$  dans l'ensemble  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  des difféomorphismes préservant  $\omega$  pour laquelle tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_\omega$  est transitif.*

*De plus  $M$  est une unique classe homocline.*

Comme pour le corollaire 1.3, un difféomorphisme conservatif générique est donc topologiquement mélangeant.

**Remarque 1.14.** *Ce résultat était déjà connu en topologie  $C^0$  pour les homéomorphismes génériques. C'est en effet une conséquence directe du théorème d'Oxtoby et Ulam [OU] qui montre que pour des homéomorphismes conservatifs génériques, la mesure de Lebesgue est ergodique.*

Nos résultats permettent de répondre à une question posée par M. Herman dans [He<sub>2</sub>] :

**Question 1 (Herman).** *Est-ce que tout difféomorphisme  $f$  de classe  $C^\infty$  d'une variété compacte préservant une forme volume  $\omega$  vérifie l'une des deux propriétés suivantes ?*

1. *ou bien  $f$  possède une décomposition dominée<sup>6</sup> ;*
2. *ou bien  $f$  n'a pas d'exposants stables :  $f$  est approché en topologie  $C^1$  par une suite de difféomorphismes  $(g_k)$  de classe  $C^\infty$  possédant une orbite  $p_k$  de période  $n_k$  telle que tous les exposants de  $Dg_k^{n_k}(p_k)$  (logarithme des valeurs propres divisé par la période) sont plus petits que  $1/k$  en module.*

A. Arbieto et C. Matheus nous ont signalé le raisonnement suivant qui, comme conséquence directe de [BDP] et du théorème 1.3, répond partiellement à cette question :

[BDP] montre que si  $f$  ne peut pas être approchée en topologie  $C^1$  par un difféomorphisme ayant un point périodique dont la différentielle, à la période, est l'identité, alors il existe  $\ell$  tel que, pour tout difféomorphisme  $g$  dans un  $C^1$ -voisinage de  $f$ , toute classe homocline possède une décomposition  $\ell$ -dominée. D'après le théorème 1.3, il existe une suite  $h_k$  de difféomorphismes de classe  $C^1$  convergeant vers  $f$  en topologie  $C^1$ , pour lesquels  $M$  est une classe homocline, et possède donc une décomposition  $\ell$ -dominée. Les décompositions  $\ell$ -dominées passant à la limite (voir [BDP, Corollary 1.5]), la variété  $M$  hérite d'une décomposition dominée pour  $f$ .

Ceci donne presque une réponse positive à la question d'Herman : les difféomorphismes  $g_k$  de l'item 2 obtenus par ce raisonnement ne sont *a priori* que de classe  $C^1$ . Le "lissage" des

---

<sup>6</sup>On dit qu'un ensemble  $f$ -invariant  $K$  possède une *décomposition dominée* si le fibré tangent  $TM|_K$  à  $M$  au-dessus de  $K$  admet un scindement  $TM(x) = E(x) \oplus F(x)$ ,  $x \in K$  en somme directe de deux sous-fibrés  $Df$ -invariants continus tels que l'expansion des vecteurs dans  $E$  est uniformément plus petite que dans  $F$  : il existe un entier  $\ell$  tel que, pour tout point  $x \in K$  et tout couple de vecteurs non-nuls  $u \in E(x)$  et  $v \in F(x)$ , on ait :

$$\frac{\|Df^\ell(u)\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|Df^\ell(v)\|}{\|v\|}.$$

On dira que cette décomposition est  $\ell$ -dominée.

difféomorphismes  $g_k$  pose une difficulté : à notre connaissance on ne sait toujours pas<sup>7</sup> si les difféomorphismes de classe  $C^r$ ,  $r \in [2, +\infty]$ , préservant la forme volume  $\omega$  sont denses dans  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ . En raffinant le raisonnement de Arbieto et Matheus, nous pouvons cependant donner une réponse complète à la question d’Herman :

**Théorème 1.4.** *Soit  $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$  et  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  d’une variété compacte préservant une forme volume  $\omega$ . Alors,  $f$  vérifie une des deux propriétés suivantes :*

1. *ou bien  $f$  possède une décomposition dominée,*
2. *ou bien  $f$  est approché en topologie  $C^1$  par une suite de difféomorphismes  $g$  de classe  $C^r$  possédant une orbite  $p$  de période  $n$  telle que  $Dg^n(p) = \text{Id}$ .*

Ce résultat est à rapprocher des travaux de J. Bochi (voir [Boc]) qui montre que tout difféomorphisme conservatif générique d’une surface compacte, ou bien est un difféomorphisme d’Anosov, ou bien possède un ensemble de mesure totale de points dont les exposants de Lyapunov sont nuls. J. Bochi et M. Viana (voir [BV]) ont donné une généralisation en dimension plus grande : pour Lebesgue-presque tout point  $x$ , ou bien les exposants de Lyapunov de  $x$  sont tous nuls, ou bien la décomposition d’Oseledec (en espaces de Lyapunov) au-dessus de l’orbite de  $x$  est dominée.

### 1.3 Problèmes ouverts

Voici d’abord une liste de questions concernant la dynamique générique des difféomorphismes  $C^1$  (non-conservatifs) des variétés compactes :

**Problème 1 (Cas non-conservatif).** *Soit  $f$  un difféomorphisme  $C^1$ -générique de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

1. *Une classe homocline d’intérieur non-vide de  $f$  coïncide-t-elle avec la variété ?*  
On a vu que, si  $\mathcal{R}(f)$  est d’intérieur non-vide, il existe une classe homocline d’intérieur non-vide. Une telle classe est stable au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$ . On se demande donc plus généralement :  
*Une classe homocline stable au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$  est-elle égale à toute la variété ?*
2. *Une classe homocline stable au sens de Lyapunov de  $f$  est-elle un attracteur topologique ?*  
Dans le cas où la réponse serait négative, on peut atténuer cette question de la façon suivante : *Sa variété stable contient-elle un sous-ensemble localement résiduel ?*
3. *Une classe homocline de  $f$  qui est robustement récurrente par chaînes est-elle un ensemble robustement transitive ?*
4. *Est-ce que  $f$  peut posséder des ensembles faiblement transitifs maximaux qui ne sont pas transitifs ?* On sait (voir [BD<sub>2</sub>]) qu’il existe génériquement des ensembles faiblement transitifs maximaux qui ne sont pas des classes homoclines, mais les exemples connus sont transitifs.
5. *Est-ce que  $f$  peut avoir un ensemble (infini mais) dénombrable d’ensembles faiblement transitifs maximaux ? Si un tel difféomorphisme existe, possède-t-il des ensembles faiblement transitifs maximaux qui ne soient pas des classes homoclines ?*

---

<sup>7</sup>Cette question est le problème 44 de la liste de [PP]. E. Zehnder dans [Z] donne une réponse positive dans le cas où  $M$  est une surface ; plus généralement il montre la densité des difféomorphismes symplectiques  $C^\infty$  dans l’espace des difféomorphismes symplectiques  $C^r$ , pour tout  $r \geq 1$ , en toute dimension. Il donne aussi une réponse partielle dans le cas des difféomorphismes conservatifs d’une variété de dimension  $\geq 3$  : les difféomorphismes de classe  $C^\infty$  préservant  $\omega$  sont denses en topologie  $C^r$  dans  $\text{Diff}_\omega^{r+\alpha}(M)$ , où  $\alpha > 0$  et  $r \geq 1$  est un entier.

6. Pour tout difféomorphisme de  $\text{Diff}^1(M)$ , et pour tout point  $x$  de  $M$ , existe-t-il une  $C^1$ -perturbation  $g$  pour laquelle  $x$  est sur une variété stable d'orbite périodique ? Ceci aurait pour conséquence : génériquement, les variétés stables et instables d'orbites périodiques sont denses dans la variété.
7. Est-ce que l'union des bassins des attracteurs topologiques faiblement transitifs de  $f$  est dense dans la variété ? Un tel attracteur est une classe homocline et est transitif. Remarquons qu'une réponse positive impliquerait une réponse positive au problème précédent : en effet, d'après [CMP] l'adhérence de la variété stable d'une orbite périodique est stable au sens de Lyapunov pour  $f^{-1}$  ; en conséquence, la variété stable de cette orbite est dense dans le bassin d'attraction de sa classe homocline.

Voici deux remarques allant dans le sens d'une réponse positive à cette question :

- L'union des classes de récurrence par chaînes apériodiques est maigre : d'après le corollaire 1.11, ces classes sont contenues dans le bord de l'ensemble  $\mathcal{R}(f)$ , qui est un fermé d'intérieur vide.
- Le corollaire 1.8 montre que pour un point  $x$  générique d'un difféomorphisme générique, l'ensemble  $\omega(x)$  est un quasi-attracteur récurrent par chaînes.

Passons au cas conservatif. Nous avons vu qu'un difféomorphisme générique  $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$  est transitif. Par conséquent, l'ensemble des points de  $M$  d'orbite (positive et négative) dense dans  $M$  est résiduel dans  $M$ . Il est naturel de chercher à comprendre la mesure de cet ensemble :

**Problème 2 (Cas conservatif).** Soit  $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$  un difféomorphisme conservatif générique.

1. L'ensemble des points de  $M$ , d'orbites positive et négative par  $f$  denses dans  $M$ , est-il de mesure de Lebesgue totale dans  $M$  ?
2. La mesure de Lebesgue est-elle ergodique pour  $f$  ? Une réponse positive à cette question impliquerait une réponse positive à la précédente. En topologie  $C^0$ , c'est le théorème d'Oxtoby-Ulam [OU].

## 1.4 Présentation de l'article

### 1.4.1 Idée de la preuve du théorème 1.2

À la base de tous les résultats perturbatifs en topologie  $C^1$ , il y a la remarque que la taille du support d'une  $C^1$ -petite perturbation bougeant un point sur une distance  $\delta$  est proportionnelle à  $\delta$ . À partir d'un résultat d'algèbre linéaire, Pugh a montré, pour son "closing lemma", que, quitte à répartir dans le temps cette perturbation, on peut rendre la constante de proportionnalité arbitrairement proche de 1.

Pour fermer un segment d'orbite dont les extrémités sont suffisamment proches, il suffit de sélectionner un sous-segment dont les extrémités sont proches l'une de l'autre (à distance  $\delta$ ) mais sont "éloignées" (plus que la constante de proportionnalité fois  $\delta$ ) des autres points intermédiaires de l'orbite : c'est la stratégie suivie par Pugh pour le closing lemma.

Pour le connecting lemma, Hayashi a renoncé à réaliser la connexion en une seule perturbation qui ne modifierait pas les orbites sur les points intermédiaires. Nous considérons ici la version donnée par M.-C. Arnaud dans [Ar<sub>1</sub>] de ce connecting lemma. Étant donnés deux segments d'orbites tels que l'extrémité de l'un est proche de l'origine de l'autre, ces segments d'orbites seront perturbés en plusieurs endroits, la stratégie étant de faire de petites perturbations permettant

de raccourcir ces segments chaque fois qu'ils reviennent très près d'eux-mêmes où de l'autre segment : lors du premier passage près d'un point, plutôt que de poursuivre l'orbite initiale, on saute directement sur le dernier passage près de ce point, abandonnant le segment d'orbite intermédiaire.

La difficulté est de sélectionner ces sauts, afin de pouvoir les réaliser par des perturbations à supports disjoints. Une première notion de proximité utilise un quadrillage, dans une carte au voisinage d'un point. Deux passages des orbites seront considérés comme proches s'ils appartiennent à un même carreau de ce quadrillage. L'idée est donc, à chaque passage dans un carreau, de sauter directement sur le dernier passage dans ce carreau. Une difficulté supplémentaire provient de ce que les perturbations réalisant ces sauts peuvent interférer si elles concernent des carreaux adjacents. Comme nous l'avons dit à propos du closing lemma, ces perturbations sont réparties dans le temps, i.e. le long d'itérés des carreaux. À chaque instant, les supports des perturbations sont très petits (bien plus petits que la taille des carreaux). Les interférences ont lieu quand ces supports se rencontrent : cela signifie que les points concernés sont tous concentrés dans une boule très petite devant la taille des carreaux, ce qui définit une nouvelle notion de proximité. On applique alors de nouveau l'idée de sauter directement sur le point proche correspondant au dernier passage proche.

Pour résumer, le connecting lemma réalise par une vraie orbite une pseudo-orbite qui ne présentait qu'un seul saut entre deux orbites initiales. Pour ce faire, il utilise un quadrillage tel que ce saut se fasse dans un de ses carreaux. Cependant, la preuve utilise, et permet donc, un nombre arbitraire de sauts pourvu que chacun d'entre eux ait lieu dans un carreau. C'est cette version du connecting lemma dont nous nous servons ici. Elle est énoncée précisément à la section 2 (théorème 2.1).

On aimerait utiliser cette idée pour traiter tous les sauts d'une pseudo-orbite. La difficulté est que les sauts d'une pseudo-orbite n'ont aucune raison de se trouver dans les carreaux d'un même quadrillage. L'idée que nous avons suivie est de couvrir l'espace des orbites de la dynamique initiale par des quadrillages disjoints (c'est le corollaire 4.1). Toute orbite passe d'un carreau à un autre en temps fini, ce qui permet, pour toute pseudo-orbite de regrouper ses sauts dans les différents carreaux des quadrillages. Quadrillage par quadrillage, le connecting lemma permet alors de supprimer tous les sauts de la pseudo-orbite. Comme dans le connecting lemma, la nouvelle orbite est en général plus courte que la pseudo-orbite initiale, mais ses extrémités sont les mêmes. Nous obtenons ainsi un lemme de connexion pour les pseudo-orbites (c'est le théorème 1.2).

Les perturbations associées à chaque quadrillage sont réparties sur les  $N$  premiers itérés de ce quadrillage. On cherche de ce fait une famille de quadrillages dont les  $N$  premiers itérés sont deux à deux disjoints et dont l'intérieur des carreaux rencontre toute orbite. La première étape de cette construction consiste à construire un ouvert  $U$  disjoint de ses  $N$  premiers itérés et rencontrant toute orbite (bien sûr les orbites périodiques de petite période devront suivre un traitement spécial). On a appelé "tour topologique" un tel ouvert par analogie aux tours utilisées en théorie ergodique (c'est le théorème 3.1).

Voici le plan de construction de cette tour topologique en supposant ici pour simplifier qu'il n'y a pas d'orbite périodique : on choisit un entier  $K$  bien plus grand que  $N$  ; comme il n'y a pas d'orbite périodique, on peut recouvrir la variété par une famille finie d'ouverts  $(V_i)$  chacun disjoint de ses  $K$  premiers itérés. Pour construire  $U$ , on commence par garder  $V_0$  et on l'appelle  $U_0$ . On ôte de  $V_1$  les points qui rencontrent  $U_0$  en temps inférieur à  $K$  itérés. Le reste des points

de  $V_1$  est recouvert par une famille finie d'ouverts  $(W_j)$  et un "lemme de coloriage" permettra de choisir des entiers  $k_j \leq K$  tels que  $U_1 = U_0 \cup \bigcup_j f^{k_j}(W_j)$  soit un ouvert disjoint de ses  $N$  premiers itérés. De la même façon on ôte de  $V_2$  les points rencontrant  $U_1$  en moins de  $K$  itérés et on applique le même procédé pour construire un ouvert  $U_2$  disjoint de ses  $N$  premiers itérés et rencontrant toutes les orbites des points de  $V_0 \cup V_1 \cup V_2$ . L'ouvert  $U$  annoncé est construit en incorporant successivement à l'ouvert  $U_i$  les orbites de  $V_{i+1}$  par la même construction.

### 1.4.2 Organisation de cet article

L'outil technique essentiel est le lemme de connexion de Hayashi. La version que nous utilisons est présentée en détail en section 2 : nous définissons tout d'abord la notion de boîte de perturbation (définition 2.1) ; nous présentons alors le lemme de connexion comme un lemme d'existence de boîtes de perturbation (théorème 2.1). La preuve, très proche de celle de M.-C. Arnaud est donnée dans l'appendice A. Elle se fait en deux temps : le premier est un résultat perturbatif énoncé dans [Ar<sub>1</sub>] et dû à C. Pugh et C. Robinson (section A.1) ; le second s'appuie sur deux lemmes de sélection de pseudo-orbites (sections A.2 et A.4) et utilise un résultat de regroupement de points proximaux (section A.3).

L'autre clef de la démonstration, présentée en section 3 est un résultat d'existence de tours topologiques (théorème 3.1, section 3.1). La démonstration (section 3.4) utilise un lemme de coloriage (section 3.2).

Ceci permet alors (section 4) de montrer le théorème 1.2. À partir de l'existence des tours topologiques, on construit un ensemble fini de boîtes de perturbations disjointes intersectant chaque orbite non-périodique (section 4.1). Toute pseudo-orbite ayant des sauts assez petits peut être légèrement modifiée de façon à concentrer ses sauts dans les carreaux des quadrillages des boîtes de perturbation. La propriété des boîtes de perturbation permet ensuite de refermer ces pseudo-orbites en vraies orbites (sections 4.4 et 4.6).

Nous avons rassemblé les conséquences du lemme de connexion en section 5. Un argument de catégorie de Baire (section 5.1) donne le théorème 1.1. Les autres résultats se trouvent en section 5.2.

Le cas conservatif fait l'objet de la section 6. Lorsque la dimension de la variété est supérieure ou égale à 3 (section 6.1), les démonstrations sont presque inchangées par rapport au cas général : ceci provient du fait que génériquement les orbites périodiques sont toutes hyperboliques. La section 6.2 traite du cas de la dimension 2 où une étude au voisinage des orbites périodiques elliptiques doit être réalisée.

### 1.4.3 Remerciements

Nous remercions François Béguin, Bassam Fayad, Marguerite Flexor, Frédéric Le Roux, Enrique Pujals, Marcelo Viana et Jean-Christophe Yoccoz pour leur écoute attentive et plus particulièrement Marie-Claude Arnaud et Thérèse Vivier qui nous ont aidés à bien comprendre la preuve du Connecting Lemma ainsi que Flavio Abdenur pour les discussions sur la dynamique générique.



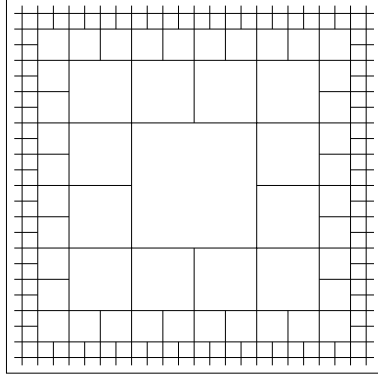


FIG. 1: Cube quadrillé de  $\mathbb{R}^2$ .

## 2 Boîtes de perturbation et énoncé du “connecting lemma”

L’outil essentiel de la preuve est une version du connecting lemma que l’on peut extraire de la preuve donnée dans [Ar<sub>1</sub>], et que nous présentons dans cette section.

Pour tout  $i \geq 0$ , notons  $\alpha_i = 1 + \sum_{j=0}^i 2^{-j}$ . Appelons *carreau standard* de  $\mathbb{R}^d$  tout cube  $C$  défini de la façon suivante :

- ou bien  $C = [-1, 1]^d$ ,
- ou bien il existe des entiers  $j_0 \in \{1, \dots, d\}$  et  $i \geq 0$  ainsi que, pour tout  $j \in \{1, \dots, d\}$ , un entier  $k(j) \in [-2^i \alpha_i, 2^i \alpha_i - 1]$  tels que  $k(j_0) \in \{-2^i \alpha_i, 2^i \alpha_i - 1\}$  et tels que  $C$  est le produit

$$C = \prod_{j=1}^d \left[ \frac{k(j)}{2^i}, \frac{k(j) + 1}{2^i} \right].$$

Remarquons que les carreaux standards sont d’intérieurs deux à deux disjoints, que deux carreaux d’intersection non vide ont des longueurs de côtés qui sont de rapport 2, 1, ou  $\frac{1}{2}$ , et finalement que l’union de tous les carreaux standards est le cube ouvert  $C = ]-3, 3[^d$  (voir la figure 1).

La collection de tous les carreaux standards est appelée le *quadrillage standard*. Nous appellerons *cube quadrillé* de  $\mathbb{R}^d$ , l’image du cube ouvert  $] - 3, 3[^d$  pavé de ses carreaux standards, par la composée d’une homothétie et d’une translation de  $\mathbb{R}^d$ .

Pour toute carte  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de la variété  $M$ , nous appellerons *cube quadrillé de  $\varphi$*  l’image inverse par  $\varphi$  d’un cube quadrillé de  $\mathbb{R}^d$  contenu dans  $\varphi(U)$ . Ceci définit aussi les *carreaux* et le *quadrillage* de ce cube quadrillé.

**Définition 2.1.** Soit  $f$  un difféomorphisme d’une variété compacte  $M$ , et  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$ . Pour tout entier  $N > 0$ , on appelle boîte de perturbation  $B$  d’ordre  $N$  (pour  $(f, \mathcal{U})$ ) tout cube quadrillé de  $M$  disjoint de tous ses itérés  $f^i(B)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  et vérifiant la propriété suivante.

Pour toute suite finie  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \{1, \dots, \ell\}}$  de paires de points de  $B$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  les points  $x_i$  et  $y_i$  appartiennent à un même carreau de  $B$ , il existe :

- un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  coïncidant avec  $f$  hors de l’union  $\bigcup_{t=0}^{N-1} f^t(B)$ ,
- une suite strictement croissante  $n_0 = 1 < n_1 < \dots < n_s \leq \ell$ ,

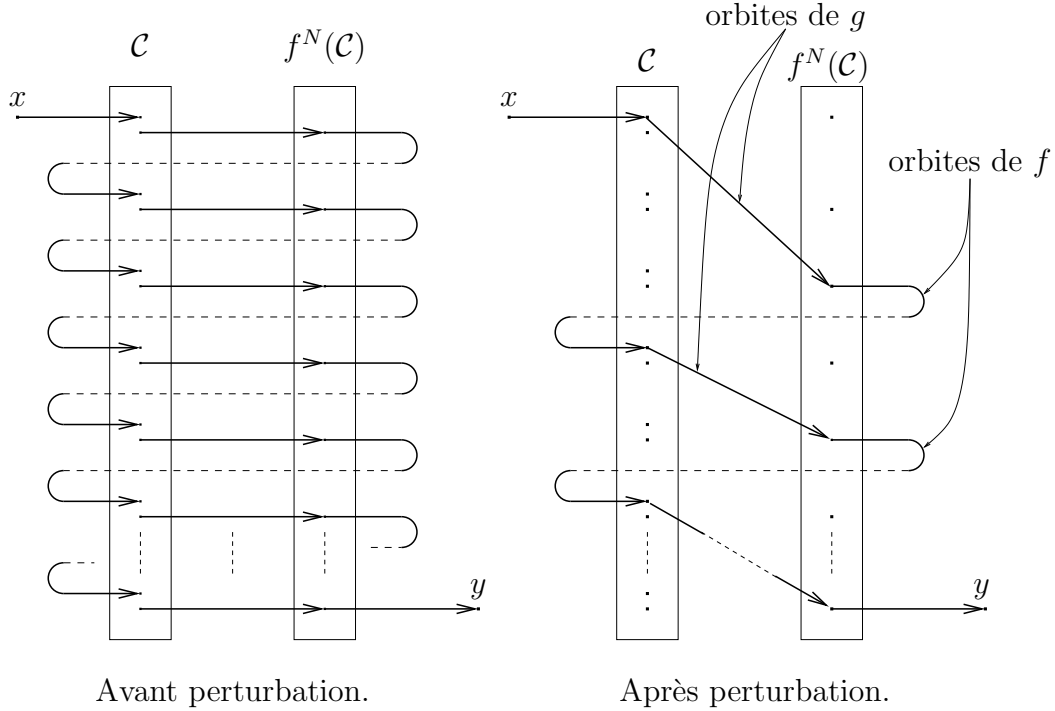


FIG. 2: Perturbation associée à une pseudo-orbite ayant tous ses sauts dans une même  $B$ .

tels que  $g^N(x_{n_k}) = f^N(y_{n_{k+1}-1})$  pour tout  $k \neq s$ , et  $g^N(x_{n_s}) = f^N(y_\ell)$ .

On appelle support de la boîte de perturbation  $B$  l'union  $\text{supp}(B) = \bigcup_0^N f^t(B)$

Cette définition peut sembler abstraite et difficile à interpréter. La remarque ci-dessous explique la propriété essentielle des boîtes de perturbations :

Soient  $x$  et  $y$  deux points hors du support de la boîte de perturbation  $B$  et soit  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant  $x$  à  $y$ .

On dira que la pseudo-orbite *préserve le quadrillage* (de la boîte  $B$ ) si les intersections de la pseudo-orbite avec le support de  $B$  est une union de segments  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k} \dots x_{i+N}$  de la forme  $x_i \in B, x_{i+k} = f^k(y_i), k \in \{1, \dots, N\}$ , où  $y_i$  est un point de  $B$  appartenant au même carreau que  $x_i$ .

On dira que cette pseudo-orbite *n'a pas de sauts dans  $\text{supp}(B)$*  si les intersections de la pseudo-orbite avec le support de  $B$  est une union de segment  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k} \dots x_{i+N}$  de la forme  $x_i \in B, x_{i+k} = f^k(x_i), k \in \{1, \dots, N\}$ .

**Remarque 2.2.** Soit  $B$  une boîte de perturbation d'ordre  $N$  associée à  $(f, \mathcal{U})$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux points hors du support de la boîte  $B$  et soit  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant  $x$  à  $y$  qui préserve le quadrillage de  $B$ . Alors, par définition d'une boîte de perturbation, il existe un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$ , coïncidant avec  $f$  hors de  $\bigcup_{t=0}^{N-1} f^t(B)$ , et une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $z_0 = x, z_1, \dots, z_m = y$  de  $g$  qui n'a pas de saut dans le support de  $B$ .

De plus  $\{z_0, \dots, z_m\} \setminus \bigcup_{i=1}^{N-1} f^i(B)$  est formé de points de  $\{x_0, \dots, x_n\}$  (et plus précisément, de segments de la pseudo-orbite  $(x_i)$  dont l'origine est ou bien  $x$  ou bien appartient à  $f^N(B)$  et l'extrémité est ou bien  $y$  ou bien appartient à  $B$ ). (La figure 2 présente un exemple de combinaison lorsque tous les sauts ont lieu dans la même boîte  $B$ .)

Si  $\mathcal{B}$  est une famille de boîtes de perturbation de supports deux à deux disjoints, on dira qu'une pseudo-orbite n'a pas de saut hors des boîtes de  $\mathcal{B}$  si elle préserve les quadrillages et si pour tout  $x_i$  n'appartenant pas à l'une de ces boîtes, on a  $x_{i+1} = f(x_i)$ . Ceci s'applique aux point  $x_i$  appartenant à l'image  $f^j(B)$ , avec  $B \in \mathcal{B}$  et  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

De la remarque ci-dessus, on déduit immédiatement :

**Lemme 2.3.** *Soit  $\mathcal{B}$  une famille de boîtes de perturbation de supports deux à deux disjoints, soient  $x$  et  $y$  deux points hors du support de ces boîtes et soit  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant  $x$  à  $y$ . On suppose que cette pseudo-orbite préserve les quadrillages et n'a aucun saut hors des boîtes de  $\mathcal{B}$ .*

*Considérons une boîte  $B \in \mathcal{B}$  d'ordre  $N$ . Il existe alors un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$ , coïncidant avec  $f$  hors de  $\bigcup_{t=0}^{N-1} f^t(B)$ , et une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $z_0 = x, z_1, \dots, z_m = y$  de  $g$  qui préserve les quadrillages et n'a aucun saut hors des boîtes de  $\mathcal{B} \setminus \{B\}$ .*

De la preuve du connecting lemma dans [Ar<sub>1</sub>] on extrait le résultat suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  de dimension  $d$ . Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  il existe  $N > 0$  vérifiant : pour tout point  $x \in M$ , il existe une carte locale  $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$  en  $x$  telle que tout cube quadrillé disjoint de ses  $N$  premiers itérés est une boîte de perturbation d'ordre  $N$  pour  $(f, \mathcal{U})$ .*

*De plus, cette propriété est encore vérifiée par les cartes proches de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ .*

Une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  dont les cubes quadrillés sont des boîtes de perturbation sera appelée une *carte de perturbation*.

Cet énoncé n'est pas écrit explicitement dans [Ar<sub>1</sub>]; de plus, le fait que  $N$  est uniforme sur toute la variété n'est pas explicite dans [Ar<sub>1</sub>], mais a été remarqué dans [W<sub>1</sub>]. C'est pourquoi nous donnerons dans l'Appendice A une preuve complète du théorème 2.1.

**Remarque 2.4.** On peut retrouver à partir du théorème 2.1 l'énoncé du connecting lemma de [Ar<sub>1</sub>] pour les difféomorphismes  $C^1$  des variétés compactes :

*Soient  $f$  un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété compacte  $M$ ,  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$ ,  $p_0$  un point de  $M$  qui n'est pas périodique pour  $f$ , et  $U$  un voisinage de  $p_0$  dans  $M$ . Il existe, d'après le théorème 2.1, un entier  $N > 0$  et une boîte de perturbation  $B$  d'ordre  $N$  pour  $(f, \mathcal{U})$  contenue dans  $U$  dont l'un des carreaux  $C$  contient  $p_0$  dans son intérieur. Notons  $W$  l'intérieur de  $C$  (pour reprendre les notations de [Ar<sub>1</sub>]). Soient  $p, q$  deux points de  $M$  hors du support de la boîte  $B$  tels que l'orbite positive de  $p$  et l'orbite négative de  $q$  rencontrent  $W$ . Alors, il existe  $g \in \mathcal{U}$  tel que  $q$  appartienne à l'orbite positive de  $p$ .*

En effet, si  $f^{n_p}(p)$  et  $f^{-n_q}(q)$  appartiennent à  $W$ , pour  $n_p, n_q > 0$ , et si  $p_1, \dots, p_n = f^{n_p}(p)$  et  $q_m = f^{-n_q}(q), \dots, q_1$  sont les passages successifs dans  $B$  des orbites respectives de  $p$  sur l'intervalle de temps  $\{0, \dots, n_p\}$  et de  $q$  sur l'intervalle de temps  $\{-n_q, \dots, 0\}$  on applique la propriété de la boîte de perturbation aux couples de points  $(p_1, p_1), (p_2, p_2), \dots, (p_{n-1}, p_{n-1}), (p_n, q_m), (q_{m-1}, q_{m-1}), \dots, (q_1, q_1)$ .

**Remarque 2.5.** – *Si le difféomorphisme  $f$  du théorème 2.1 préserve une forme volume  $\omega$ , alors les boîtes de perturbation construites par ce théorème permettent des  $C^1$ -perturbations qui préservent  $\omega$ .*

– *Si le difféomorphisme  $f$  du théorème 2.1 est de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  les boîtes de perturbation construites par ce théorème permettent des  $C^1$ -perturbations qui sont de classe  $C^r$ . Ceci est immédiat dans le cas non-conservatif, puisque les difféomorphismes  $C^r$  sont denses parmi les difféomorphismes  $C^1$ . Dans le cas conservatif, cela provient de la nature des*

*perturbations élémentaires qui apparaissent dans la démonstration (voir le lemme A.4 et la remarque qui suit).*

### 3 Existence d'une tour topologique

L'une des clefs de la preuve du théorème 1.2 est l'existence d'une famille finie de boîtes de perturbation d'ordre  $N$ , de supports disjoints, et dans lesquelles toute orbite entre en temps fini. Remarquons que l'union de telles boîtes de perturbation forme un ouvert  $U$ , disjoint de ses  $N$  premiers itérés, et rencontrant tout segment d'orbite suffisamment long. De fait, la construction d'un tel ouvert (appelé ici *tour topologique*) est l'étape essentielle qui, avec le théorème 2.1, nous permettra de construire une telle famille de boîtes de perturbation. Le but de cette partie et de prouver l'existence d'une telle tour topologique.

Clairement, l'existence d'orbites périodiques de période inférieure à  $N$  est une obstruction incontournable : l'ouvert  $U$  devant rencontrer ces orbites, ne peut être disjoint de ses  $N$  premiers itérés. C'est pourquoi, dans les énoncés suivants, nous particularisons les orbites périodiques (de période  $\leq N$ ) et leurs variétés invariantes locales<sup>8</sup>.

Dans le cas d'un compact  $K$  sans orbites périodiques, nous montrons l'existence pour tout  $N_0 \in \mathbb{N}$  d'un ouvert  $U$  disjoint de ses  $N_0$  premiers itérés, par lequel passe toute orbite de  $K$  : la compacité de  $K$  implique alors que les orbites de  $K$  ont un temps de retour uniformément borné dans  $U$ . Voici maintenant l'énoncé général, tenant compte des orbites périodiques :

#### 3.1 Énoncé du résultat

**Théorème 3.1.** *Pour tout entier naturel  $d$ , il existe  $\kappa_d \in \mathbb{N}$  tel que pour tout difféomorphisme  $f$  d'une variété de dimension  $d$ , pour tout  $N_0 \in \mathbb{N}$ , pour toute constante  $\delta > 0$  et tout compact invariant  $K$  ne contenant pas de point périodique non-hyperbolique de période inférieure à  $\kappa_d N_0$ , il existe un ouvert  $U$  ayant les propriétés suivantes :*

1. *Notons  $Per_{N_0}(f)$  l'ensemble des orbites périodiques de période inférieure à  $N_0$  de  $K$ . Pour tout point  $x \in K$  tel que  $x \notin \bigcup_{p \in Per_{N_0}} W_\delta^s(p)$ , il existe  $n > 0$  tel que  $f^n(x) \in U$ .*
2. *Pour tout point  $x \in K \setminus \bigcup_{p \in Per_{N_0}} W_\delta^u(p)$  il existe  $n > 0$  tel que  $f^{-n}(x) \in U$ .*
3. *Les fermés  $\bar{U}, f(\bar{U}), \dots, f^{N_0}(\bar{U})$  sont deux à deux disjoints.*

*De plus, les composantes connexes de  $\bar{U}$  peuvent être choisies de diamètre arbitrairement petit.*

La démonstration de ce résultat fera l'objet de la section 3.

**Corollaire 3.1.** *Sous les hypothèses et conclusions du théorème 3.1, il existe un compact  $V \subset U$  tel que :*

- *Pour tout point  $x \in K$  tel que  $x \notin \bigcup_{p \in Per_{N_0}} W_{2\delta}^s(p)$ , il existe  $n > 0$  tel que  $f^n(x) \in V$ .*
- *Pour tout point  $x \in K \setminus \bigcup_{p \in Per_{N_0}} W_{2\delta}^u(p)$  il existe  $n > 0$  tel que  $f^{-n}(x) \in V$ .*

---

<sup>8</sup>Pour tout point périodique hyperbolique  $x$  de  $f$ , on rappelle que sa variété stable locale de taille  $\delta > 0$  est l'ensemble :

$$W_\delta^s(x) = \{y \in M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) < \delta\}.$$

On définit de même la variété instable locale  $W_\delta^u(x)$ .

**Démonstration :** À partir du théorème 3.1, l'existence d'un tel compact peut se montrer de la façon suivante : on considère pour chaque point périodique de  $Per_{N_0}$  un domaine fondamental compact de sa variété instable. On peut le choisir contenu dans une variété instable locale suffisamment petite pour qu'il ne rencontre pas les variétés  $W_\delta^s(Per_{N_0})$ . Par conséquent, chaque point de ces domaines fondamentaux a un itéré positif rencontrant  $U$ . Par compacité, il existe un voisinage  $O^u$  dans  $M$  de ces domaines fondamentaux et un compact  $V_1^u$  de  $U$  tel que tout point de  $O^u$  a un itéré positif dans l'intérieur de  $V_1^u$ .

L'union des variétés stables locales  $W_{2\delta}^s(x)$ ,  $x \in Per_{dN}$  et des itérés négatifs de  $O^u$  contient un voisinage ouvert  $\mathcal{O}^u$  de  $W_\delta^s(Per_{N_0})$ . On remarque que  $K \setminus \mathcal{O}^u$  est compact. Par définition de  $U$ , tout point de ce compact possède un itéré positif dans  $U$  et donc dans l'intérieur d'un compact  $V_2^u \subset U$ . Tout point de  $\mathcal{O}^u \setminus W_{2\delta}^s(Per_{N_0})$  a par construction un itéré positif dans  $O^u$  et donc un autre itéré positif dans l'intérieur du compact  $V_1^u \subset U$ .

On construit de même des compacts  $V_1^s$  et  $V_2^s$  de  $U$  tels que tout point de  $K \setminus W_{2\delta}^u(Per_{N_0})$  possède un itéré négatif dans l'intérieur de  $V_1^s \cup V_2^s$ . Le compact annoncé est l'union  $V_1^u \cup V_2^u \cup V_1^s \cup V_2^s$ .  $\square$

### 3.2 Un lemme de coloriage

Soit  $\{V, U_1, \dots, U_\ell\}$  un ensemble fini de sous-variétés compactes à bord d'intérieurs non vides contenues dans une variété  $M$  de dimension  $d$ . Un *coloriage de  $V \setminus \cup_i \text{int}(U_i)$  par  $k$  couleurs* est la donnée d'une famille finie  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  de sous-variétés compactes à bord, d'intérieurs non vides, de  $M$  et d'une fonction  $c: j \mapsto c(j) \in \{1, \dots, k\}$  telles que

- la réunion des intérieurs des  $V_i$  recouvre le compact  $V \setminus \cup_i \text{int}(U_i)$ ;
- pour toute paire  $(j, j')$ ,  $j \neq j'$ , les *couleurs*  $c(j)$  et  $c(j')$  sont différentes dès que  $V_j$  et  $V_{j'}$  se rencontrent.

Nous appellerons  *$\gamma$ -peinture de  $\{U_i\}$  à  $k$  couleurs* une fonction  $c_0$  qui, à toute variété  $U_i$ , associe une partie de  $\{1, \dots, k\}$ , de cardinal borné par  $\gamma$ . On dira qu'un coloriage  $(\mathcal{V}, c)$  de  $V \setminus \cup_i \text{int}(U_i)$  *respecte  $c_0$* , si pour tout  $j \in J$  et toute variété  $U_i$  rencontrant  $V_j$ , la couleur  $c(j)$  n'appartient pas à la peinture  $c_0(i)$ .

Une suite finie de sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel de dimension  $d$  sera dite *en position générale* si la somme de leur codimension est égale à la codimension de leur intersection. Remarquons que, si une suite de sous-espaces vectoriels est en position générale, toute sous-suite l'est également. Une suite  $E_1, \dots, E_i, E_{i+1}$  est en position générale si et seulement si la suite  $E_1, \dots, E_i$  est en position générale et si  $E_{i+1}$  est transverse à l'intersection  $\bigcap_1^i E_j$ .

Une suite de sous-variétés  $\{X_i\}_{i \in I}$  d'une variété  $M$  de dimension  $d$  sera dite *en position générale*, si pour toute partie finie  $J \subset I$  et tout point  $x \in \bigcap_{j \in J} X_j$ , la suite  $\{T_x(X_j)\}_{j \in J}$  des espaces tangents est en position générale. Pour des sous-variétés de codimensions non-nulles et en position générale, un point de  $M$  appartient à au plus  $d$  de ces sous-variétés. Nous dirons que les sous-variétés  $\{X_i\}_{i \in I}$  sont *en position générale au voisinage d'un compact  $V \subset M$*  s'il existe un ouvert contenant  $V$  tel que les intersections des  $X_i$  avec cet ouvert sont en position générale.

Le but de cette section 3.2 est de montrer :

**Proposition 3.2. [Lemme de coloriage]**

*Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , il existe  $k_d \in \mathbb{N}$  tel que tout  $k \geq k_d$  possède la propriété suivante :*

Soient  $V, U_1, \dots, U_\ell$  des sous-variétés compactes à bord de dimension  $d$  d'une variété de dimension  $d$  telles que les bords  $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_\ell$  soient en position générale au voisinage de  $V$ . Pour tout  $k \geq k_d$  et pour toute 2-peinture  $c_0$  de  $\{U_1, \dots, U_\ell\}$  à valeurs dans  $\{1, \dots, k\}$ , il existe un coloriage  $(\mathcal{V}, c)$  de  $V \setminus \cup_{i=1}^\ell \text{int}(U_i)$  qui respecte  $c_0$ .

Notons  $W = V \setminus \cup_{i=1}^\ell \text{int}(U_i)$ . Comme les bords  $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_\ell$  sont par hypothèse en position générale au voisinage de  $V$ , on vérifie que  $W$  est une variété compacte à bord et à coins, c'est à dire que tout point  $x$  de  $W$  possède un voisinage  $O_x$  difféomorphe à un ouvert  $\hat{O}_x$  du cadran positif  $\mathbb{R}_+^d = [0, +\infty[^d \subset \mathbb{R}^d$ , chaque bord  $\partial V \cap O_x, \partial U_1 \cap O_x, \dots, \partial U_\ell \cap O_x$  étant ou bien vide, ou bien correspondant à l'intersection avec  $\hat{O}_x$  de l'un des hyperplans du bord de  $\mathbb{R}_+^d$ .

Puisque les bords  $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_\ell$  sont en position générale au voisinage de  $V$ , l'intersection de  $s$  d'entre eux est au voisinage de  $V$  une variété (éventuellement vide) de dimension  $d - s$ ; les composantes connexes de l'intersection de cette variété avec  $W$  seront appelées *face de dimension*  $d - s$  de  $W$ . On vérifie que chaque face de dimension  $d - s$  est une variété à bord et à coins incluse dans  $\partial W$ . Les composantes connexes de  $W$  seront appelées les *faces de dimension*  $d$ .

Le bord de  $W$  est stratifié par les faces de différentes dimensions : le bord d'une face  $\Sigma$  de dimension  $j \geq 1$  est la réunion de faces de dimension strictement inférieure à  $j$ . Si  $\Sigma'$  est une face incluse dans  $\partial \Sigma$ , on dira que  $\Sigma$  est adjacente à  $\Sigma'$ .

**Lemme 3.3.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.2, et avec les notations ci-dessus, il existe pour tout  $j \in \{0, \dots, d\}$  une variété compacte à bord  $O_j$  de dimension  $d$  ayant les propriétés suivantes :*

1. *Pour chaque composante connexe  $\Delta$  de  $O_j$ , l'ouvert  $\text{int}(\Delta) \cup \cup_{j'=0}^{j-1} \text{int}(O_{j'})$  contient exactement une face  $\Sigma(\Delta)$  de dimension  $j$  de  $W = V \setminus \cup_{i=1}^\ell \text{int}(U_i)$ . De plus l'application  $\Delta \mapsto \Sigma(\Delta)$  est une bijection de l'ensemble des composantes connexes de  $O_j$  sur l'ensemble des faces de dimension  $j$ . On dira que  $\Delta$  est la composante associée à  $\Sigma(\Delta)$ .*
2. *Une composante  $\Delta'$  de  $O_{j'}$ , avec  $j' < j$ , rencontre  $\Delta$  si et seulement si  $\Sigma(\Delta')$  est contenue dans le bord de  $\Sigma(\Delta)$ .*
3. *Si la composante connexe  $\Delta$  rencontre une des variétés  $U_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , alors la face correspondante  $\Sigma(\Delta)$  est incluse dans le bord  $\partial U_i$  de cette variété.*

**Démonstration :** On construit les variétés  $O_j$  par récurrence sur  $j$ .

Pour  $j = 0$ ,  $O_0$  est un voisinage des faces de dimension 0 (i.e. des points), constitué de disques centré en chacun de ces points. On le choisit suffisamment petit pour qu'une composante  $\Delta$  de  $O_0$  ne rencontre qu'une seule face  $\Sigma(\Delta)$  de dimension 0 et ne rencontre que les faces de dimension plus grande et les variétés  $U_i$  qui contiennent  $\Sigma(\Delta)$  dans leur bord.

En supposant construits les variétés  $O_0, \dots, O_{j-1}$ , on construit  $O_j$  de la façon suivante :

Pour toute face  $\Sigma$  de  $N$  de dimension  $j$ , on peut choisir un compact connexe  $\Sigma'$  de l'intérieur de  $\Sigma$  qui contient le compact  $\Sigma \setminus \cup_{j'=0}^{j-1} \text{int}(O_{j'})$ . Les compacts  $\Sigma'$  que l'on obtient ainsi sont deux à deux disjoints. La variété  $O_j$  est l'union de voisinages connexes deux à deux disjoints des compacts  $\Sigma'$ , où  $\Sigma$  parcourt l'ensemble des faces de dimension  $j$ , et choisis suffisamment petits pour que :

- Une composante  $\Delta$  de  $O_j$  ne rencontre qu'une seule face de dimension  $j$ , notée  $\Sigma(\Delta)$ .
- $\Delta$  ne rencontre une composante  $\Delta'$  de  $O_{j'}$ , pour  $j' < j$ , seulement si  $\Delta' \cap \Sigma(\Delta)$  est non-vide et par hypothèse de récurrence cela signifie que  $\Sigma(\Delta')$  est contenue dans  $\Sigma(\Delta)$ .
- Finalement  $\Delta$  ne rencontre que les faces de dimension supérieure et les variétés  $U_i$  qui contiennent  $\Sigma(\Delta)$ .

□

### Démonstration de la proposition 3.2 :

Comme on ne cherche pas à trouver  $k_d$  minimal, nous allons juste montrer que  $k_d = (2d+1)^2$  convient. Nous considérons la famille de variétés  $\{O_i\}$  donnée par le lemme 3.3.

Fixons donc une 2-peinture  $c_0$  de  $\{U_1, \dots, U_\ell\}$  à valeurs dans  $\{1, \dots, k\}$  avec  $k \geq (2d+1)^2$ .

Montrons à présent, par récurrence sur  $i \in \{0, \dots, d\}$ , que l'on peut associer à toute composante  $\Delta$  de  $O_i$  une couleur  $c(\Delta) \in \{i \cdot (2d+1) + 1, \dots, (i+1) \cdot (2d+1)\}$  de façon que le coloriage de  $O_i$  ainsi obtenu respecte  $c_0$ . Comme les composantes connexes de  $O_i$  sont par définition disjointes, il n'y a pas de compatibilités à vérifier entre les couleurs des différentes composantes.

Considérons une composante  $\Delta$  de  $O_i$ , associée à une face  $\Sigma(\Delta)$  de dimension  $i$ .

Il y a, par hypothèse, au plus  $d-i$  faces de dimension  $d-1$  qui sont adjacentes à  $\Sigma(\Delta)$  et, d'après l'item (3) du lemme 3.3, la composante  $\Delta$  rencontre au plus  $d-i$  variétés  $U_j$ . L'union  $p(\Delta)$  des peintures associées aux  $U_j$  rencontrant  $\Delta$  est un ensemble de couleurs de cardinal inférieur à  $2d$ . On peut donc associer à  $\Delta$  une couleur  $c(\Delta)$  dans  $\{i \cdot (2d+1) + 1, \dots, (i+1) \cdot (2d+1)\}$  (de cardinal  $2d+1$ ) qui ne soit pas contenue dans  $p(\Delta)$ .

Montrons que la collection des composantes  $\Delta$  des variétés  $O_j$  et la fonction  $c$  ainsi construite définissent bien un coloriage respectant  $c_0$ . Si deux composantes  $\Delta$  et  $\Delta'$  se rencontrent, les faces associées sont par construction de dimension différentes  $i \neq i'$ . De ce fait les ensembles  $\{i \cdot (2d+1) + 1, \dots, (i+1) \cdot (2d+1)\}$  et  $\{i' \cdot (2d+1) + 1, \dots, (i'+1) \cdot (2d+1)\}$  sont disjoints et les couleurs  $c(\Delta)$  et  $c(\Delta')$  sont donc différentes. Comme l'union des intérieurs des  $O_i$  contient  $W$  (item (1) du lemme 3.3), la fonction  $c$  induit donc bien un coloriage de  $W$ . Par construction, pour tout  $\Delta$ , la couleur  $c(\Delta)$  n'appartient pas à l'union des peintures des  $U_j$  qui rencontrent  $\Delta$  : le coloriage  $c$  respecte la peinture  $c_0$ .

□

### 3.3 Mise en position générale

**Lemme 3.4.** *Soit  $n$  un entier,  $M$  d'une variété de dimension  $d$  et  $f$  un difféomorphisme de  $M$  dont l'ensemble des points périodiques de période inférieure à  $n$  est fini.*

*Soit  $S$  une variété compacte de dimension  $d-1$  et soit  $\psi: S \rightarrow M$  un plongement de  $S$ . Il existe  $\psi'$  arbitrairement proche de  $\psi$  en topologie  $C^r$ , ( $r \geq 1$  arbitraire si  $\psi$  est  $C^r$ ), tel que la famille des sous variétés  $f^i \circ \psi'(S)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  soit en position générale.*

#### Démonstration :

Quitte à perturber  $\psi$ , on peut supposer que  $\psi(S)$  ne contient aucun point de  $Per_n(f)$ , qui est fini par hypothèse. Tout point  $x \in S$  possède un voisinage  $U_x$  tel que  $\psi(U_x)$  est disjoint de ses  $n$  premiers itérés. Il existe donc des collections  $\{U_i\}_{i \in I}$  et  $\{V_i\}_{i \in I}$  d'ouverts de  $S$  telles que  $\bar{V}_i \subset U_i$  pour  $i \in I$ , que les  $V_i$  recouvrent  $S$  et que les  $U_i$  aient la propriété suivante :

(\*) Pour tous  $i, j \in I$  et  $t \in \{1, \dots, n\}$  si  $\psi(\bar{U}_i)$  intersecte  $f^t \circ \psi(\bar{U}_j)$  alors  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$ .

On considère successivement les  $n+1$ -uplets  $(i_0, \dots, i_n)$  de  $I^{n+1}$ . Pour chacun de ces  $n+1$ -uplets, nous allons mettre en position générale les variétés  $(\psi(U_{i_0}), f \circ \psi(U_{i_1}), \dots, f^n \circ \psi(U_{i_n}))$  au voisinage des compacts  $(\psi(\bar{V}_{i_0}), f \circ \psi(\bar{V}_{i_1}), \dots, f^n \circ \psi(\bar{V}_{i_n}))$ . Cette propriété persiste par

perturbations de  $\psi$ . La mise en position générale pour les  $n + 1$ -uplets suivants ne la détruira pas. Après un nombre fini de perturbations, on obtiendra le résultat voulu.

La mise en position générale de  $(\psi(U_{i_0}), f \circ \psi(U_{i_1}), \dots, f^n \circ \psi(U_{i_n}))$  est possible car pour toute sous-famille de ce  $n + 1$ -uplet de variétés, d'après la propriété (\*) on a :

- soit l'intersection de leur adhérence est vide, ce qui est stable par perturbation,
- soit les adhérences des  $U_i$  correspondants sont deux à deux disjointes, ce qui permet de faire des perturbations indépendantes au voisinage de chaque  $\bar{V}_i$ . Dans ce dernier cas la mise en position générale est obtenue par le lemme de transversalité de Thom.

On applique donc inductivement ce procédé à l'ensemble des sous-familles du  $n + 1$ -uplet  $(i_0, \dots, i_n)$ .  $\square$

**Remarque 3.5.** *Dans le lemme 3.4, si l'on veut seulement que la famille des sous variétés  $f^i \circ \psi'(S)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  soit en position générale au voisinage d'un compact  $V$ , il suffit de supposer que  $f$  ne possède qu'un nombre fini de points périodiques de période inférieure à  $n$  au voisinage de  $V$  (mais peut-être un nombre infini, loin de  $V$ ).*

### 3.4 Démonstration du théorème 3.1

**Lemme 3.6.** *Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $d$  et  $k_d$  la constante de la proposition 3.2. Soient  $N > 0$  un entier et  $f$  un difféomorphisme de  $M$ .*

*Soient  $U$  et  $V$  deux sous-variétés compactes à bord, de dimension  $d$ . On suppose que  $U$  est disjoint de ses  $N$  premiers itérés positifs, et  $V$  est disjoint de ses  $2(k_d + 1)N$  premiers itérés positifs. Alors, il existe  $W$ , sous-variété compacte à bord de dimension  $d$ , disjointe de ses  $N$  premiers itérés, telle que  $U \subset W$  et  $V \subset \bigcup_{i=0}^{2(k_d+1) \cdot N} f^{-i}(W)$ .*

**Démonstration :** Remarquons que, comme  $V$  est disjoint de ses  $2(k_d + 1)N$  premiers itérés positifs, il n'existe aucune orbite de période inférieure ou égale à  $2(k_d + 1)N$  au voisinage de  $V$ . D'après le lemme 3.4 et la remarque 3.5, on peut augmenter légèrement la variété à bord  $U$  pour obtenir une variété à bord  $\tilde{U}$  telle que la famille  $\partial f^{-i}(\tilde{U})$ ,  $i \in \{0, \dots, 2(k_d + 1)N\}$  soit en position générale au voisinage de  $V$ . De plus, comme  $U$  est un compact disjoint de ses  $N$  premiers itérés, quitte à choisir  $\tilde{U} \supset U$  suffisamment petit, on peut supposer que  $\tilde{U}$  est aussi disjoint de ses  $N$  premiers itérés. Quitte à augmenter  $V$ , on supposera que son bord est en position générale avec la famille  $\partial f^{-i}(\tilde{U})$ ,  $i \in \{0, \dots, 2(k_d + 1)N\}$ .

On considère l'intersection de  $V$  avec les  $f^{-i}(\tilde{U})$  pour  $i \in \{0, \dots, 2(k_d + 1)N - 1\}$ . On associe à  $U_i = f^{-i}(\tilde{U})$  les couleurs  $c_0(i) = \{E(\frac{i}{2N}), E(\frac{i}{2N}) + 1\}$  qui appartiennent à  $\{0, \dots, k_d + 1\}$ , où  $E(\frac{i}{2N})$  représente la partie entière de  $\frac{i}{2N}$ .

D'après le proposition 3.2, il existe un coloriage  $(\{V_j\}, c)$  de  $V \setminus \cup_i U_i$  qui respecte  $c_0$  et à valeurs dans  $\{1, \dots, k_d\}$ . Puisque  $V$  est disjoint de ses  $2(k_d + 1)N$  premiers itérés, on peut supposer que l'union  $\cup_j V_j$  est contenue dans un voisinage de  $V$ , lui aussi disjoint de ses  $2(k_d + 1)N$  premiers itérés. On pose alors

$$W = \tilde{U} \cup \bigcup_j f^{2c(j)N}(V_j).$$

Voyons maintenant que  $W$  est disjoint de ses  $N$  premiers itérés. Supposons par l'absurde que  $x$  et  $y = f^t(x)$ , avec  $t \in \{1, \dots, N\}$ , appartiennent à  $W$ . Nous allons raisonner en envisageant toutes les positions possibles des points  $x$  et  $y$  :



- Les points  $x$  et  $y$  ne peuvent appartenir simultanément à  $\tilde{U}$  qui est disjoint de ses  $N$  premiers itérés.
- De même, ils ne peuvent pas appartenir à un même ensemble  $f^{2c(j)N}(V_j)$ .
- Si  $x$  et  $y$  appartiennent à des ensembles  $f^{2c(j_1)N}(V_{j_1})$  et  $f^{2c(j_2)N}(V_{j_2})$  différents, alors, puisque  $y = f^t(x)$ , les itérés  $f^{-2c(j_1)N}(x)$  et  $f^{t-2c(j_2)N}(x)$  de  $x$  appartiennent tous deux à  $\cup_j V_j$ . Par ailleurs,  $2|c(j_1) - c(j_2)|N + t$  est inférieur à  $2(k_d - 1)N + N$ . Ceci contredit donc le fait que  $\cup_j V_j$  est disjoint de ses  $2k_d N$  premiers itérés.
- Traitons enfin le cas où  $x$  appartient à  $f^{2c(j)N}(V_j)$  et  $y$  à  $\tilde{U}$  (le cas où  $y$  appartient à  $f^{2c(j)N}(V_j)$  et  $x$  à  $\tilde{U}$  lui est similaire) :  $V_j$  et  $f^{-(2c(j)N+t)}(\tilde{U})$  se rencontrent. La peinture associée à  $U_{2c(j)N+t} = f^{-(2c(j)N+t)}(\tilde{U})$  est  $c_0(2c(j)N + t) = \{c(j), c(j) + 1\}$ . Cependant, puisque  $c$  est un coloriage qui respecte la peinture  $c_0$  et que  $V_j$  rencontre  $U_{2c(j)N+t}$ , la couleur  $c(j)$  ne doit pas appartenir à  $c_0(2c(j)N + t) = \{c(j), c(j) + 1\}$  ce qui est contradictoire.

Par le même raisonnement, les variétés  $\tilde{U}$  et  $f^{2c(j)N}(V_j)$  sont deux à deux disjointes. Ceci montre que  $W$  est une sous-variété compacte à bord de dimension  $d$ . D'autre part, par construction,  $U \subset W$  et  $V \subset \bigcup_0^{k_d N} f^{-i}(W)$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Démonstration du théorème 3.1 :** Posons  $\kappa_d = 2k_d + 1$ . Puisque les orbites périodiques de période plus petite que  $\kappa_d N_0$  sont hyperboliques, il existe une variété compacte à bord  $U_0$ , disjointe de ses  $N_0$  premiers itérés et disjointe de  $Per_{\kappa_d N_0}(f)$  telle que

- pour tout  $x \in W^s(Per_{\kappa_d N_0}(f)) \setminus W_\delta^s(Per_{\kappa_d N_0}(f))$ , il existe  $n > 0$  tel que  $f^n(x) \in \text{int}(U_0)$  ;
- pour tout  $x \in W^u(Per_{\kappa_d N_0}(f)) \setminus W_\delta^u(Per_{\kappa_d N_0}(f))$ , il existe  $n > 0$  tel que  $f^{-n}(x) \in \text{int}(U_0)$ .

En d'autres termes,  $U_0$  est un voisinage d'une sorte de domaine fondamental (non connexe) des variétés stables et instables des points de  $Per_{\kappa_d N_0}(f)$ . Comme dans la preuve du corollaire 4.1, on peut montrer que l'union des itéré positifs de  $U_0$  et de la variété instable locale  $W_\delta^u(Per_{\kappa_d N_0}(f))$  contient un voisinage de  $Per_{\kappa_d N_0}(f)$  (et de même pour ses itérés négatifs).

Par conséquent, il existe un voisinage ouvert  $O_0$  de  $Per_{\kappa_d N_0}(f)$  tel que tout point de  $O_0 \setminus W_\delta^s(Per_{\kappa_d N_0}(f))$  a un itéré positif dans  $U_0$  et tout point de  $O_0 \setminus W_\delta^u(Per_{\kappa_d N_0}(f))$  a un itéré négatif dans  $U_0$ . Choisissons  $O$  un voisinage ouvert de  $Per_{\kappa_d N_0}(f)$  tel que pour tout  $j \in \{0, \dots, 2\kappa_d N_0\}$ , son itéré  $f^j(O)$  est inclus dans  $O_0$ .

Soit  $K$  le compact invariant de l'énoncé du théorème 3.1. Tout point  $x$  de  $K \setminus O$  possède un voisinage  $U_x$  disjoint de ses  $\kappa_d N_0$  premiers itérés. Par compacité de  $K \setminus O$ , il existe donc une collection finie de variétés à bord de dimension  $d$ ,  $\{V_0, \dots, V_r\}$ , chacune disjointe de ses  $\kappa_d N_0$  premiers itérés telles que leurs intérieurs recouvrent  $K \setminus O$ .

Considérons le lemme 3.6 appliqué à  $U = U_0$ ,  $V = V_0$  et  $N = N_0$ . On obtient une variété compacte à bord  $U_1$  disjointe de ses  $N_0$  premiers itérés contenant  $U_0$  et telle que  $V_0 \subset \bigcup_{j=0}^{\kappa_d N_0} f^{-j}(U_1)$ . On construit par récurrence une suite de variétés compactes à bord  $(U_i)$  disjointes de leurs  $N_0$  premiers itérés, contenant  $U_0$  et telles que  $\bigcup_{j=0}^i V_j \subset \bigcup_{j=0}^{\kappa_d N_0} f^{-j}(U_i)$ .

Pour construire  $U_{i+1}$ , on applique le lemme 3.6 à  $U = U_i$ ,  $V = V_{i+1}$  et  $N = N_0$ . On obtient une variété compacte à bord  $U_{i+1}$  disjointe de ses  $N_0$  premiers itérés contenant  $U_i$  et telle que  $V_{i+1} \subset \bigcup_{j=0}^{\kappa_d N_0} f^{-j}(U_{i+1})$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $U_i$  permet de montrer que  $U_0$  est inclus dans  $U_{i+1}$  et  $\bigcup_{j=0}^i V_j$  est contenue dans  $\bigcup_{j=0}^{\kappa_d N_0} f^{-j}(U_{i+1})$ .

Posons  $U = U_r$ . Tout point  $x$  de  $K \setminus O$  a un itéré  $f^i(x)$ ,  $i \in \{0, \dots, \kappa_d N_0\}$ , appartenant à  $U$ . Tout point  $x$  de  $K \setminus O_0$  possède un itéré positif dans  $U$  et par ailleurs,  $f^{-(\kappa_d N_0 + 1)}(x)$  appartient

à  $K \setminus O$  par définition de  $O$ . Il existe donc  $i \in \{0, \dots, \kappa_d N_0\}$  tel que  $f^{-(\kappa_d N_0 + 1) + i}(x)$  appartient à  $U$ . C'est un itéré négatif de  $x$ . Ceci montre le résultat pour les points de  $K \setminus O_0$ .

Par définition de  $O_0$ , tout point de  $O_0 \setminus W_\delta^s(\text{Per}_{\kappa_d N_0}(f))$  a un itéré positif dans  $U_0 \subset U$  et, de même, tout point de  $O_0 \setminus W_\delta^u(\text{Per}_{\kappa_d N_0}(f))$  a un itéré négatif dans  $U$ . Ceci conclut la démonstration pour les points de  $K \cap O_0$ . □

## 4 Lemme de connexion pour les pseudo-orbites : preuve du théorème 1.2

### 4.1 Boîtes de perturbation recouvrant l'espace des orbites

À partir du théorème 3.1 on est à présent capable de construire une famille finie de boîtes de perturbation de supports disjoints et rencontrant toute orbite. Bien sûr les orbites périodiques et leurs variétés invariantes locales doivent être traitées séparément :

**Corollaire 4.1.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte de dimension  $d$ , et  $U$  voisinage de  $f$  pour la topologie  $C^1$ . Soient  $N$  l'entier associé à l'ouvert  $U$  par le théorème 2.1,  $\kappa_d$  l'entier donné par le théorème 3.1 et soit  $\delta > 0$  arbitraire. On note  $N_0 = 10dN$ .*

*Pour tout compact invariant  $K$  ne contenant pas d'orbite périodique non-hyperbolique de période inférieure à  $\kappa_d N_0$ , il existe une famille finie  $\mathcal{B}_0$  de boîtes de perturbation d'ordre  $N$  pour  $(f, U)$  et de supports deux à deux disjoints telle que toute orbite positive de points de  $K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^s(p)$  et toute orbite négative de points de  $K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^u(p)$  rencontre l'intérieur d'un carreau d'un quadrillage d'une des boîtes de  $\mathcal{B}_0$ .*

*De plus, pour tout  $x \in M$ , il existe  $t \in \{0, \dots, N\}$  tel que  $f^t(x)$  n'appartienne pas à l'union des supports de boîtes de  $\mathcal{B}_0$ .*

*En conséquence, il existe une famille finie  $\mathcal{C}_0$  de carreaux associés aux boîtes de  $\mathcal{B}_0$  et une famille finie  $\mathcal{D}_0$  de compacts contenus dans l'intérieur des carreaux de  $\mathcal{C}_0$  telles que,*

- chaque carreau de  $\mathcal{C}_0$  contient exactement un compact de  $\mathcal{D}_0$  dans son intérieur ;
- toute orbite positive de points de  $K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^s(p)$ , et toute orbite négative de point de  $K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^u(p)$  rencontre l'intérieur d'un compact de  $\mathcal{D}_0$ .

**Démonstration :** D'après le théorème 3.1 et le corollaire 3.1 appliqué à  $N_0$  et à  $\delta/2$ , il existe un ouvert  $U$  dont l'adhérence est disjointe de ses  $N_0$  premiers itérés et un compact  $V \subset U$  tel que tout point  $x \in K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^s(p)$  possède un itéré  $f^n(x) \in V$ ,  $n > 0$  et tout point  $y \in K \setminus \bigcup_{p \in \text{Per}_{N_0}} W_\delta^u(p)$  possède un itéré  $f^{-n}(y) \in V$ ,  $n > 0$ . De plus on peut choisir  $U$  tel que les composantes de son adhérence soient assez petites pour que tous leurs itérés d'ordre inférieur à  $N_0$  soient inclus dans une carte de perturbation donnée par le théorème 2.1.

Soit  $U_0$  une composante de  $U$  et notons  $V_0 = U_0 \cap V$ . Par hypothèse,  $U_0$  est contenue dans une carte de perturbation  $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pavons  $\mathbb{R}^n$  par des cubes quadrillés de côté de même longueur  $\ell$ . On choisit  $\ell$  de façon que tout cube rencontrant  $\varphi(V_0)$  soit inclus dans  $\varphi(U_0)$ .

On fait de même pour chacune des composantes de  $U$  contenant un point de  $V$ . On obtient ainsi une famille finie  $\mathcal{P}_0$  de boîtes de perturbation, deux à deux disjointes (une boîte de perturbation est un cube ouvert), contenues dans  $U$ , et dont l'union des adhérences contient  $V$  dans son intérieur. Notons  $\Phi_0$  la famille des cartes de perturbation servant dans la construction de  $\mathcal{P}_0$ .

En répétant cette construction pour  $f^{2iN}(U), f^{2iN}(V), i \in \{1, \dots, 10d - 1\}$ , on construit de même des familles  $\mathcal{P}_i$  de boîtes de perturbations contenues dans  $f^{2iN}(U)$ , et dont l'union des adhérences contient  $f^{2iN}(V)$  dans son intérieur, et l'on note  $\Phi_i$  la famille des cartes de perturbation correspondantes.

On considère les familles de cubes  $f^{-2iN}(\mathcal{P}_i)$  contenues dans  $U$ . Pour tout  $i$ , l'union des adhérences des cubes de la famille  $f^{-2iN}(\mathcal{P}_i)$  contient  $V$  dans son intérieur. Quitte à perturber légèrement les  $\Phi_i$  (en topologie  $C^1$ ), on peut supposer que, pour toute famille de cubes choisis dans des familles deux à deux différentes  $f^{-2iN}(\mathcal{P}_i)$ , leurs bords sont en position générale. En particulier un point de  $V$  peut appartenir au bord de cubes d'au plus  $d$  familles parmi les  $f^{-2iN}(\mathcal{P}_i)$ . Puisqu'il y a au moins  $5d$  familles de cubes, tout point de  $V$  appartient à l'intérieur d'au moins  $4d$  de ces cubes.

On remplace à présent dans  $\mathbb{R}^n$  chaque cube quadrillé par un cube de même centre, homothétique de rapport  $\rho < 1$  très proche de 1. On obtient ainsi des familles  $\mathcal{P}_{i,\rho}$  de boîtes de perturbation qui cette fois sont d'adhérences disjointes. Pour  $\rho$  assez proche de 1, tout point de  $V$  appartient encore à l'intérieur d'un cube d'au moins  $4d$  familles  $f^{-2iN}(\mathcal{P}_{i,\rho})$ .

Par compacité de  $V$ , on peut extraire, pour tout  $i$ , une famille finie  $\Gamma_i$  de carreaux des boîtes de  $\mathcal{P}_{i,\rho}$  telle que l'union  $\Sigma_i$  de ces carreaux possède la propriété suivante : tout point de  $V$  appartient à l'intérieur d'au moins  $4d$  compacts  $f^{-2iN}(\Sigma_i)$ . Appelons carreaux de  $f^{-2iN}(\Sigma_i)$  l'image par  $f^{-2iN}$  des carreaux de la famille  $\Gamma_i$ .

Quitte à perturber à nouveau les  $\Phi_i$ , on peut supposer que, pour toute famille de carreaux choisis dans des familles deux à deux différentes  $f^{-2iN}(\Gamma_i)$ , leurs bords sont en position générale. En particulier un point de  $V$  peut appartenir au bord de carreaux d'au plus  $d$  familles parmi les  $f^{-2iN}(\Gamma_i)$ . Puisqu'il y a au moins  $4d$  familles de carreaux, tout point de  $V$  appartient à l'intérieur d'au moins un de ces carreaux.

Ainsi tout point de  $V$  appartient à l'intérieur d'un carreau d'une famille  $f^{-2iN}(\Gamma_i)$ . Par conséquent, d'après le corollaire 3.1, tout point de  $K \setminus W_\delta^s(Per_{N_0})$  a un itéré positif dans l'intérieur d'un carreau d'une des familles  $\Gamma_i$ . De même, tout point de  $K \setminus f^{N_0}(W_\delta^u(Per_{N_0}))$  a un itéré négatif dans  $f^{N_0}(V)$  et donc dans un des carreaux d'une famille  $\Gamma_i$ . En appliquant ce résultat à un  $\delta'$  assez petit pour que  $f^{N_0}(W_{\delta'}^u(Per_{N_0})) \subset W_\delta^u(Per_{N_0})$ , on obtient la propriété voulue.

Remarquons que par construction, les supports des boîtes sont deux à deux disjoints. Plus précisément, pour toutes boîtes distinctes  $B$  et  $B'$  choisies dans l'union des familles  $\mathcal{P}_{i,\rho}$  et tous  $n, n' \in \{0, \dots, 2N - 1\}$ , les itérés  $f^n(B)$  et  $f^{n'}(B')$  sont disjoints. En particulier, pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe un entier  $n \in \{0, \dots, N\}$  tel que l'itéré  $f^n(x)$  n'appartienne à aucune boîte des familles  $\mathcal{P}_{i,\rho}$ . L'union des familles  $\mathcal{P}_{i,\rho}$  et l'union des familles  $\Gamma_i$  définissent les familles  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{C}_0$  respectivement.

Finalement, le compact  $V$  a été recouvert par l'intérieur des carreaux des familles  $f^{-2iN}(\Gamma_i)$ . D'un recouvrement d'un compact par des ouverts, on peut choisir un compact inclus dans chacun de ces ouverts de façon à obtenir un recouvrement du compact initial par l'intérieur de ces compacts. Ceci permet de choisir la famille  $\mathcal{D}_0$  annoncées. □

## 4.2 Au voisinage des points périodiques

**Proposition 4.2.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte de dimension  $d$ , et  $\mathcal{U}$  voisinage de  $f$  pour la topologie  $C^1$ . Soit  $N$  l'entier associé à l'ouvert  $\mathcal{U}$  par le théorème 2.1.*

Pour toute orbite périodique hyperbolique  $\gamma$  de  $f$ , et tout voisinage  $V$  de  $\gamma$ , il existe un voisinage  $W$  de  $\gamma$ , deux familles finies de boîtes de perturbations  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$  d'ordre  $N$  pour  $(f, \mathcal{U})$ , deux familles finies de carreaux  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  des boîtes de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$  et deux familles finies  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$  de compacts, et un entier  $n_0$  tels que :

1. L'ouvert  $V$  contient  $\bar{W}$  et le support des boîtes de perturbation de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$ .
2. Les supports des boîtes de perturbations de  $\mathcal{E} \cup \mathcal{S}$  sont deux à deux disjoints.
3. Chaque compact de  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  est inclus dans l'intérieur d'un carreau  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ , et chaque compact de  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$  dans l'intérieur d'un carreau  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ . Chaque carreau de  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  contient exactement un carreau de  $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \cup \mathcal{C}(\mathcal{S})$ .
4. Pour toute paire  $D_e \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  et  $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$  de carreaux, il existe  $n \in \{0, \dots, n_0\}$  tel que  $f^n(D_e) \cap D_s \neq \emptyset$ .
5. Pour tout point  $z$  de  $W \setminus W_{loc}^s(\gamma)$ , il existe  $n > 0$  et un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$  tel que  $f^n(z) \in \text{int}(D)$  et  $f^j(z) \in V$  pour tout  $0 \leq j \leq n$ . De plus, si  $f(z) \notin W$ , l'entier  $n$  est majoré par  $n_0$ .
6. Pour tout point  $z$  de  $W \setminus W_{loc}^u(\gamma)$ , il existe  $n > 0$  et un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  tel que  $f^{-n}(z) \in \text{int}(D)$  et  $f^{-j}(z) \in V$  pour tout  $0 \leq j \leq n$ . De plus, si  $f^{-1}(z) \notin W$ , l'entier  $n$  est majoré par  $n_0$ .

**Démonstration :** De même que dans l'énoncé du corollaire 4.1, on pose  $N_0 = 10dN$ .

Soit  $\gamma$  une orbite périodique hyperbolique et  $V$  un voisinage de  $\gamma$ . Nous choisissons une variété stable locale  $W_{loc}^s(\gamma)$  dont tous les itérés positifs sont contenus dans  $V$ . Il existe un ouvert  $U^s \subset V$  tel que  $U^s$  et ses  $N_0$  premiers itérés sont deux à deux disjoints et contenus dans  $V$  et tel que  $U^s \cap W_{loc}^s(\gamma)$  rencontre toute orbite de  $W^s(\gamma) \setminus \{\gamma\}$ . De même, on choisit une variété instable locale  $W_{loc}^u(\gamma)$  dont tous les itérés négatifs sont contenus dans  $V$  et un ouvert  $U^u \subset V$  tel que  $U^u$  et ses  $N_0$  premiers itérés sont deux à deux disjoints, disjoints de l'union  $\bigcup_{j=0}^{N_0} f^j(U^s)$ , contenus dans  $V$  et tels que toute orbite de  $W^u(\gamma) \setminus \{\gamma\}$  rencontre  $f^{N_0}(U^u) \cap W_{loc}^u(\gamma)$ .

Comme dans la preuve du corollaire 4.1, on peut choisir une famille finie  $\mathcal{E}$  de boîtes de perturbation dont les supports sont deux à deux disjoints et contenus dans l'intérieur de  $\bigcup_{j=0}^{N_0} f^j(U^s)$ , et ayant la propriété suivante : il existe une famille finie  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  de carreaux de l'ensemble de ces boîtes, et pour chaque carreau  $C$  un compact  $D$  inclus dans l'intérieur de  $C$  tels que toute orbite de  $W^s(\gamma) \setminus \gamma$  rencontre l'intersection de  $W_{loc}^s(\gamma)$  avec l'intérieur d'un des compacts  $D$  (le compact  $D$  dépend de l'orbite). Nous noterons  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  l'ensemble de ces compacts.

De même, on peut choisir une famille finie  $\mathcal{S}$  de boîtes de perturbation de supports deux à deux disjoints et contenus dans l'intérieur de  $\bigcup_{j=0}^{N_0} f^j(U^u)$ , une famille finie  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  de carreaux de ces boîtes et une famille  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$  de compacts inclus dans l'intérieur des carreaux de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  (un compact par carreau) tel que toute orbite de  $W^u(\gamma) \setminus \gamma$  rencontre l'intersection de  $W_{loc}^u(\gamma)$  avec l'intérieur d'un des compacts  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ .

Soient  $D_e \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  et  $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$  deux compacts comme ci-dessus. Remarquons que  $D_e$  et  $D_s$  contiennent dans leur intérieur un point de  $W^s(\gamma)$  et de  $W^u(\gamma)$ , respectivement. Le  $\lambda$ -lemma montre qu'il existe un entier  $n = n(D_e, D_s) > 0$  tel que  $f^n(D_e) \cap D_s \neq \emptyset$ .

Notons  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$  l'union des éléments de  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ . Pour tout  $n \geq 0$ , l'ouvert  $D_n(\mathcal{E}) = f^n(\text{int}(D(\mathcal{E}))) \cap \bigcap_{j=0}^{n-1} f^j(V)$ , est l'image par  $f^n$  des points de  $\text{int}(D(\mathcal{E}))$  dont les  $n$  premiers itérés restent dans  $V$ . L'ensemble  $W_e = W_{loc}^u(\gamma) \cup \bigcup_{n \geq 0} D_n(\mathcal{E})$  contient un voisinage de l'orbite  $\gamma$ . Par construction, tout point  $x$  de  $W_e \setminus W_{loc}^u(\gamma)$  possède un itéré négatif  $f^{-n}(x)$  dans l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  tel que  $f^{-i}(x)$  reste dans  $V$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

De même, l'union  $W_s$  de  $W_{loc}^s(\gamma)$  et, pour tout  $n$ , de l'image par  $f^{-n}$  des points de  $int(D(\mathcal{S}))$  dont les  $n$  premiers itérés négatifs restent dans  $V$  contient un voisinage de l'orbite  $\gamma$ . On choisit un voisinage ouvert  $W_0$  de  $\gamma$  contenu dans l'intersection  $W_e \cap W_s$ .

Remarquons que l'orbite positive d'un point  $x$  de  $W_0$  passe par l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$  avant de sortir de  $V$  si  $x$  n'est pas sur la variété stable locale de  $\gamma$ , et son orbite négative passe par l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  avant de sortir de  $V$  si  $x$  n'est pas sur la variété instable locale de  $\gamma$ . On pourrait choisir  $W = W_0$  et conclure la preuve de la proposition si le temps pour atteindre  $int(D(\mathcal{S}))$  ou  $int(D(\mathcal{E}))$  était uniformément borné pour tout  $x \in W_0$  tel que  $f(x) \notin W_0$  ou  $f^{-1}(x) \notin W_0$ , respectivement. Nous allons choisir  $W \subset W_0$  ayant cette dernière propriété.

Il existe des domaines fondamentaux  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_s$  inclus dans  $W_0$  des variétés stables et instables locales de  $\gamma$ , tels que le temps pour atteindre  $int(D(\mathcal{E}))$  ou  $int(D(\mathcal{S}))$  est uniformément borné par un entier  $n_1$  pour tout  $x \in \overline{\Gamma_e}$  ou  $x \in \overline{\Gamma_s}$ , respectivement. De plus cette borne uniforme reste valide sur des voisinages tubulaires  $\Delta_e$  et  $\Delta_s$  des adhérences  $\overline{\Gamma_e}$  et  $\overline{\Gamma_s}$ . On peut choisir un voisinage ouvert  $W$  de  $\gamma$  de façon que tout point  $x \in W$  tel que  $f(x) \notin W$  ou  $f^{-1}(x) \notin W$  appartient à de tels voisinages tubulaires  $\Delta_s$  ou  $\Delta_e$ , respectivement.

Pour conclure la preuve de la proposition, il suffit de choisir  $n_0$  majorant  $n_1$  et tous les entiers  $n(D_e, D_s)$  définis ci-dessus. □

### 4.3 Preuve du théorème 1.2 : préparation

Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$ , dont toutes les orbites périodiques sont hyperboliques. Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $f$  pour la topologie  $C^1$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $M$  tels que  $x \dashv y$ .

**Remarque 4.3.** Étant donné un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de  $f$  il existe un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$  ayant la propriété suivante :

*Soient  $V_1, \dots, V_r$  des ouvert disjoints de  $M$  et  $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{U}$  des difféomorphismes tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $g_i$  coïncide avec  $f$  hors de  $V_i$ . Alors le difféomorphisme  $g$ , égal à  $g_i$  sur  $V_i$  et à  $f$  hors de  $\bigcup_i V_i$ , appartient également à  $\mathcal{U}$ .*

Quitte à restreindre le voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$ , on supposera désormais que  $\mathcal{U}$  vérifie la propriété de la remarque ci-dessus. On considère l'entier  $N$  associé à  $\mathcal{U}$  par le théorème 2.1 et on pose  $N_0 = 10dN$ . On choisit une constante  $\delta > 0$  telle que les variétés invariantes locales  $W_\delta^s(z)$  et  $W_\delta^u(z')$  de points  $z, z'$  de  $Per_{N_0}(f)$  ne se coupent qu'aux points de  $Per_{N_0}(f)$ .

Afin de commencer la preuve du théorème, nous allons maintenant fixer une famille de boîtes de perturbations associées à l'ouvert  $\mathcal{U}$  et aux points  $x$  et  $y$ . Ceci se fait en deux étapes : une première famille de boîtes est choisie à l'aide du corollaire 4.1. Cette famille sera enrichie de boîtes, au voisinage des orbites périodiques de basse période, à l'aide de la proposition 4.2.

Nous allons considérer quelques configurations particulières des points  $x$  et  $y$  et montrer comment elles se ramènent au cas général :

**Remarque 4.4.** 1. *Si  $y$  est un itéré strictement positif de  $x$  :* la conclusion du théorème est alors déjà vérifiée.

2. *Si  $x$  ou  $y$  n'appartiennent pas à  $Per_{N_0}(f)$  :* si  $x \in Per_{N_0}(f)$  et si  $y$  n'est pas sur l'orbite de  $x$  (voir l'item (1) ci-dessus) alors il existe un point  $x'$  (arbitrairement proche de  $x$ ) sur

la variété instable locale de  $x$  tel que  $x' \dashv y$  : le point  $x'$  est un point d'accumulation de points de  $\varepsilon$ -pseudo-orbites joignant  $x$  à  $y$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour montrer la conclusion du théorème il suffit dans ce cas de la montrer pour les points  $x'$  et  $y$ . En effet, s'il existe une  $C^1$ -arbitrairement petite perturbation  $g$  de  $f$  telle que  $y$  soit sur l'orbite positive pour  $g$  de  $x'$ , par une conjugaison proche de l'identité à support ne contenant pas le point  $y$ , on envoie  $x'$  sur  $x$ , et maintenant l'orbite positive de  $x$  passe par  $y$ . On traite de la même façon le cas où  $y \in \text{Per}_{N_0}(f)$ .

*Par la suite nous supposons désormais que  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à  $\text{Per}_{N_0}(f)$  et que  $y$  n'est pas un point de l'orbite strictement positive de  $x$ .*

On fixe une famille  $\mathcal{B}_0$  de boîtes de perturbations données par le corollaire 4.1, appliqué à toute la variété au voisinage  $\mathcal{U}$  et à la constante  $\delta$ . On note  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{D}_0$  l'ensemble de carreaux  $C$  et l'ensemble de compacts  $D$  contenus dans l'intérieur des carreaux  $C$ , annoncés par ce corollaire.

Pour toute orbite périodique  $\gamma$  de période inférieure à  $N_0$  on choisit un voisinage  $V(\gamma)$  de façon que les  $V(\gamma)$  soient deux à deux disjoints, soient chacun disjoint des supports de boîtes de perturbations de  $\mathcal{B}_0$  et ne contiennent pas les points  $x$  et  $y$  (c'est possible puisque ni  $x$  ni  $y$  n'appartient à  $\text{Per}_{N_0}(f)$ ). Notons  $\mathcal{E}(\gamma)$  et  $\mathcal{S}(\gamma)$  les familles de boîtes de perturbations contenues dans  $V(\gamma)$  obtenues à l'aide de la proposition 4.2. En suivant encore les notations de cette proposition, on notera  $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$ , (resp.  $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ ) les familles de carreaux (resp. de compacts contenus dans l'intérieur des carreaux) des boîtes de perturbation de  $\mathcal{E}(\gamma)$  et  $\mathcal{S}(\gamma)$ , respectivement ; finalement on note  $n_0(\gamma)$  et  $W(\gamma)$  l'entier et le voisinage de  $\gamma$  annoncés par cette proposition. On notera  $n_0$  un majorant des entiers  $n_0(\gamma)$ , pour  $\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)$ .

On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble  $\mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)} (\mathcal{E}(\gamma) \cup \mathcal{S}(\gamma))$  de toutes les boîtes de perturbation ainsi obtenues. On note de même  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  l'ensemble de tous les carreaux et l'ensemble de tous les compacts contenus dans l'intérieur des carreaux, respectivement, ainsi obtenus.

**Remarque 4.5.** *Si  $x$  ou  $y$  appartient au support d'une boîte de perturbation  $B \in \mathcal{B}$  (rappelons que l'on a supposé que  $y$  n'est pas un itéré strictement positif de  $x$ ) : remarquons que la boîte  $B$  doit appartenir à la famille  $\mathcal{B}_0$  car  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas aux ouverts  $V(\gamma)$ .*

Puisque  $y$  n'est pas un itéré strictement positif de  $x$ , pour tout itéré  $f^i(x)$  et  $f^j(y)$  on a encore  $f^i(x) \dashv f^j(y)$ . D'autre part, d'après le corollaire 4.1, on peut choisir  $i$  et  $j$  dans  $\{0, \dots, N\}$  tels que  $f^i(x)$  et  $f^j(y)$  n'appartiennent pas à l'union des supports des  $B_i$  (si  $x = y$  on choisit bien sûr  $i = j$ ). Pour montrer la conclusion du théorème il suffit dans ce cas de la montrer pour les points  $f^i(x)$  et  $f^j(y)$ . En effet, s'il existe une  $C^1$ -arbitrairement petite perturbation  $g$  de  $f$  telle que  $f^j(y)$  soit sur l'orbite positive pour  $g$  de  $f^i(x)$ , par une conjugaison proche de l'identité, on envoie  $g^{-i}(f^i(x))$  sur  $x$  et  $g^{-j}(f^j(y))$  sur  $y$ , et maintenant l'orbite positive de  $x$  passe par  $y$ .

*On supposera désormais de plus que les points  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas aux supports des boîtes de perturbation de  $\mathcal{B}$ . Cette hypothèse est sans perte de généralité d'après la remarque ci-dessus.*

#### 4.4 Retour des pseudo-orbites dans les carreaux

Si une pseudo-orbite retourne en temps borné dans les compacts  $D \in \mathcal{D}$  des carreaux et si ses sauts sont suffisamment petits, on peut regrouper les sauts au moment des passages dans les carreaux, obtenant ainsi une pseudo-orbite qui préserve les quadrillages des boîtes de perturbation (voir la section 2 et la remarque 2.2). Le lemme 4.6 montre que si le retour dans les carreaux se fait en temps très long, l'orbite passe près des points périodiques de  $\text{Per}_{N_0}$  et donc

dans les carreaux des familles  $\mathcal{E}(\gamma)$  et  $\mathcal{S}(\gamma)$ . On remplacera alors le segment de pseudo-orbite près d'une orbite périodique  $\gamma$  par un morceau de vraie orbite entrant et sortant du voisinage de  $\gamma$  par les mêmes carreaux de  $\mathcal{E}(\gamma)$  et  $\mathcal{S}(\gamma)$  que la pseudo-orbite initiale.

**Lemme 4.6.** *Avec les notations de la section 4.3, il existe  $n_1 > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  avec la propriété suivante :*

*Pour toute  $\varepsilon_0$ -pseudo-orbite  $x_0 = x, \dots, x_k = y$ , il existe une suite strictement croissante  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_r = k$  telle que, pour tout  $s \notin \{0, r\}$ , le point  $x_{t_s}$  appartient à un compact  $D_s$  de la famille  $\mathcal{D}$ . De plus, pour tout  $s \in \{0, \dots, r-1\}$ , ou bien  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ , ou bien il existe une orbite périodique  $\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)$  telle que  $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $D_{s+1} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$  (dans ce cas,  $s \notin \{0, r-1\}$ ).*

**Démonstration :**

Considérons tout d'abord le cas des vraies orbites : tout point  $z$  a des itérés positifs et négatifs dans l'union des ouverts  $W(\gamma)$  et des intérieurs des compacts  $D$  de  $\mathcal{D}$ . Les temps de retour sont uniformément bornés par un entier  $n_1$ , par compacité de  $M$ . On choisit  $n_1$  supérieur à l'entier  $n_0$  introduit à la fin de la section 4.3 (de ce fait,  $n_1$  majore tous les entiers  $n_0(\gamma)$  pour chaque orbite périodique  $\gamma$  de  $\text{Per}_{N_0}(f)$ ).

Afin d'assurer que les pseudo-orbites visitent l'intérieur des compacts  $D \in \mathcal{D}$ , nous introduisons des compacts plus petits  $\tilde{D}$  inclus dans l'intérieur des compacts  $D$ , et visités par les vraies orbites.

Par compacité de  $M$ , tout point de  $M$  retourne, en temps borné par  $n_1$ , dans des compacts  $\tilde{W}(\gamma)$  et  $\tilde{D}$  inclus dans les ouverts  $W(\gamma)$  et les intérieurs des compacts  $D$ . En utilisant la définition de  $n_0(\gamma)$  (voir la proposition 4.2), on montre que l'on peut choisir la famille  $\tilde{D}$  de façon que, si  $z \in W(\gamma)$  mais que  $f(z) \notin W(\gamma)$ , il existe un itéré positif inférieur à  $n_0(\gamma) < n_1$  de  $z$  qui appartient à l'intérieur d'un de ces compacts  $\tilde{D}$  contenu dans l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ . De plus, le segment d'orbite joignant  $z$  à  $\tilde{D}$  est inclus dans  $V(\gamma)$ . De même, si  $z \in W(\gamma) \setminus f(W(\gamma))$ , son orbite négative rencontre, en temps borné par  $n_1$ , l'intérieur d'un compact  $\tilde{D}$  contenu dans un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$  avant de sortir de  $V(\gamma)$ .

On note  $\eta$  l'infimum des distances entre un point de  $\bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)} \tilde{W}(\gamma) \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \tilde{D}$  et un point du complémentaire de  $\bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)} W(\gamma) \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ .

Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que pour toute  $\varepsilon_0$ -pseudo-orbite  $z_0, \dots, z_{n_1}$ , et tout  $i \in \{0, \dots, n_1\}$ , les distances  $d(f^i(z_0), z_i)$  et  $d(f^{-i}(z_i), z_0)$  sont inférieures à  $\eta$ . Par ce qui précède, il existe  $i \in \{0, \dots, n_1\}$ , tel que  $f^i(z_0)$  appartienne à un compact  $\tilde{W}(\gamma)$  ou  $\tilde{D}$ . On en déduit que le point  $z_i$  appartient à  $W(\gamma)$  ou à l'intérieur du compact  $D$  correspondant.

Soit  $x_0, \dots, x_k$  une  $\varepsilon_0$ -pseudo-orbite dont les extrémités  $x_0, x_k$  ne sont dans aucun  $V(\gamma)$ . Si un point  $x_j$  appartient à un  $W(\gamma)$  et si  $f(x_j)$  n'appartient pas à  $W(\gamma)$ , il existe  $x_{j'}$  avec  $0 \leq j' - j \leq n_1$  tel que  $x_{j'}$  appartienne à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ . En effet, par définition de  $n_0(\gamma) < n_1$ , il existe un itéré  $f^{j'-j}(x_j)$  de  $x_j$  qui appartient à l'intérieur de  $\tilde{D}$ . De même, si un point  $x_j$  appartient à un  $W(\gamma)$  et si  $f^{-1}(x_j)$  n'appartient pas à  $W(\gamma)$ , il existe  $x_{j'}$  avec  $-n_1 \leq j' - j \leq 0$  tel que  $x_{j'}$  appartienne à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ .

À tout point  $x_j$  appartenant à l'un des  $W(\gamma)$ , on associe un segment de la pseudo-orbite  $x_{e(j)}, \dots, x_{s(j)}$  contenant  $x_j$  de la façon suivante : considérons le segment maximal de la pseudo-orbite contenant  $x_j$  et inclus dans  $V(\gamma)$ . Alors,  $e(j)$  est le plus petit indice dans ce segment tel que  $x_{e(j)}$  appartienne à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $s(j)$  est le plus grand indice dans ce segment tel que  $x_{s(j)}$  appartienne à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ .

**Affirmation 1.** *Pour tout  $j$  tel que  $x_j$  appartient à l'union des  $W(\gamma)$ , le segment  $\{e(j), \dots, s(j)\}$*

est bien défini et contient  $j$ . Deux segments  $\{e(j), \dots, s(j)\}$  et  $\{e(j'), \dots, s(j')\}$  sont disjoints ou confondus.

**Démonstration :** D'après ce qui précède, il existe un segment de pseudo-orbite  $x_{j_0}, \dots, x_j$ , avec  $j_0 < j$ , inclus dans  $V(\gamma)$  et tel que  $x_{j_0}$  appartienne à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ . Ceci montre que  $e(j)$  est bien défini et inférieur à  $j$ . De même  $s(j)$  est bien défini et supérieur à  $j$ .

Soient  $I = \{e(j), \dots, s(j)\}$  et  $I' = \{e(j'), \dots, s(j')\}$  deux segments se rencontrant en un point. Les  $V(\gamma)$  étant deux à deux disjoints, les points  $x_j, j \in I$ , et  $x_{j'}, j' \in I'$  appartiennent au même  $V(\gamma)$ . On obtient  $I = I'$  par maximalité.  $\square$

Soient  $t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1}$  l'ensemble des indices  $j$  pour lesquels :

- soit il existe  $j'$  tel que  $j = e(j')$  ou  $j = s(j')$ ,
- soit  $x_j$  appartient à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}$  et  $j$  n'appartient à aucun segment  $\{e(j'), \dots, s(j')\}$ .

En conséquence, pour tout  $s \in \{1, \dots, r-2\}$ , ou bien le segment de pseudo-orbite  $\{x_{t_s}, \dots, x_{t_{s+1}}\}$  rencontre un ouvert  $W(\gamma)$  et dans ce cas il existe  $j'$  tel que  $t_s = e(j')$  et  $t_{s+1} = s(j')$ , ou bien ce segment d'orbite ne rencontre aucun  $W(\gamma)$  et dans ce cas le segment de pseudo-orbite  $\{x_{t_{s+1}}, \dots, x_{t_{s+1}-1}\}$  ne rencontre aucun intérieur de compact  $D \in \mathcal{D}$ .

Nous devons montrer que tout intervalle de temps  $\{t_s, \dots, t_{s+1}\}$  qui n'est pas de la forme  $\{e(j), \dots, s(j)\}$  est de longueur  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ . Le segment de pseudo-orbite correspondant n'a, par construction, de point dans aucun ouvert  $W(\gamma)$ . On considère le point  $x_{t_s}$ . Par définition de  $n_1$ , ce point possède un premier itéré positif  $f^\ell(x_{t_s})$ , avec  $0 \leq \ell \leq n_1$ , appartenant à l'un des  $\tilde{W}(\gamma)$  ou à l'un des  $\tilde{D}$ . Par le choix de  $\varepsilon_0$ , le point  $x_{t_s+\ell}$  appartient à  $W(\gamma)$  ou à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}$ .

Montrons que  $t_{s+1} \leq t_s + \ell$  ce qui conclura puisque  $\ell \leq n_1$  : si  $x_{t_s+\ell}$  appartient à un  $W(\gamma)$ , on a remarqué que la suite  $\{x_{t_s}, \dots, x_{t_{s+1}}\}$  ne contient pas de point dans  $W(\gamma)$  et donc  $t_{s+1} < t_s + \ell$ . Dans l'autre cas,  $x_{t_s+\ell}$  appartient à l'intérieur d'un compact  $D$  ; nous avons vu que le segment de pseudo-orbite  $\{x_{t_{s+1}}, \dots, x_{t_{s+1}-1}\}$  ne rencontre pas l'intérieur de  $D$ , ce qui implique que  $t_{s+1} \leq t_s + \ell$ .

Posons à présent  $t_0 = 0$  et  $t_r = k$ .

Le point  $x_0$  n'appartient à aucun  $V(\gamma)$  et il existe  $\ell \leq n_1$  tel que  $x_\ell$  appartient à l'intérieur d'un compact  $D \in \mathcal{D}$  ou à un  $W(\gamma)$ . Dans le premier cas,  $t_1 \leq \ell$ . Dans le second cas,  $0 < e(\ell) < \ell$  et  $t_1 \leq e(\ell)$ .

Dans tous les cas,  $t_1 \leq n_1$ . On montre de même que  $t_r - t_{r-1} \leq n_1$ .  $\square$

## 4.5 Regroupement des sauts dans les carreaux

Notons  $\eta_1$  l'infimum des distances entre un point d'un compact  $D \in \mathcal{D}$  et le bord du carreau  $C \in \mathcal{C}$  qui contient  $D$ . Il existe  $\varepsilon_1 \in ]0, \varepsilon_0[$  tel que pour toute  $\varepsilon_1$ -pseudo-orbite  $x_0, \dots, x_m$  de longueur  $m$  inférieure à  $n_1$ , les distances  $d(f^{-m}(x_m), x_0)$  et  $d(f^m(x_0), x_m)$  sont plus petites que  $\eta_1$ .

Considérons à présent une  $\varepsilon_1$ -pseudo-orbite  $x_0 = x, \dots, x_k = y$  joignant  $x$  à  $y$ . Comme  $\varepsilon_1$  à été choisi inférieur à  $\varepsilon_0$ , le lemme 4.6 lui associe une suite  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = k$ . Par le choix de  $\varepsilon_1$  et  $\eta_1$ , et comme les points  $x_{t_i}, i \in \{1, \dots, r-1\}$ , appartiennent tous à un compact  $D \in \mathcal{D}$ , on obtient :



**Lemme 4.7.** *Sous ces hypothèses, pour tout  $s \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ , les points  $f^{t_s - t_{s+1}}(x_{t_{s+1}})$  et  $x_{t_s}$  sont dans l'intérieur d'un même carreau  $C \in \mathcal{C}$ ; de même, pour tout  $s \in \{0, \dots, r-2\}$  tel que  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ , les points  $f^{t_{s+1} - t_s}(x_{t_s})$  et  $x_{t_{s+1}}$  sont dans l'intérieur d'un même carreau  $C \in \mathcal{C}$ .*

Rappelons que les temps  $t_s$  correspondent à des retours de la pseudo-orbite dans les compacts  $D$ , et que si un segment d'orbite entre deux temps  $t_s, t_{s+1}$  consécutifs est de longueur plus grand que  $n_1$ , il est contenu dans un voisinage  $V(\gamma)$  d'une orbite périodique  $\gamma$  et à extrémités dans les carreaux  $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$ . Nous allons traiter différemment les segments d'orbite de longueur inférieure à  $n_1$  et ceux contenus dans un voisinage  $V(\gamma)$ , pour obtenir finalement une pseudo-orbite  $y_0 = x, \dots, y_\ell = y$  qui préserve le quadrillage des boîtes de perturbation.

Pour les segments  $\{x_{t_s}, \dots, x_{t_{s+1}}\}$  de longueur inférieure à  $n_1$ , nous modifions la pseudo-orbite  $x_0, \dots, x_k$  et définissons une nouvelle pseudo-orbite  $\tilde{x}_0 = x, \dots, \tilde{x}_k = y$  de la façon suivante :

- Pour tout  $i \in \{0, \dots, t_1\}$  on pose  $\tilde{x}_i = f^i(x_0)$ . Remarquons que, comme  $t_1 \leq n_1$ , le point  $\tilde{x}_{t_1}$  appartient à l'intérieur du même carreau que  $x_{t_1}$ .
- Pour tout  $s \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que  $t_{s+1} - t_s > n_1$  et tout  $i \in \{t_s + 1, \dots, t_{s+1}\}$ , on pose  $\tilde{x}_i = x_i$ .
- Pour tout  $s \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$  et tout  $i \in \{t_s + 1, \dots, t_{s+1}\}$ , on pose  $\tilde{x}_i = f^{i - t_{s+1}}(x_{t_{s+1}})$ .

Remarquons que, pour tout  $s \in \{0, \dots, r-1\}$  tel que  $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ , alors le segment  $\tilde{x}_{t_s}, \dots, \tilde{x}_{t_{s+1}}$  est une pseudo-orbite n'ayant qu'un seul saut : entre  $\tilde{x}_{t_s}$  et  $\tilde{x}_{t_{s+1}}$ . De plus ce saut préserve le quadrillage : en effet, d'après le lemme 4.7,  $\tilde{x}_{t_s}$  et  $f^{-1}(\tilde{x}_{t_{s+1}})$  appartiennent tous deux à l'intérieur du carreau qui contient  $x_{t_s}$ .

Nous pouvons enfin construire la suite  $y_0 = x, y_1, \dots, y_\ell = y$  annoncée :

Pour tout  $s$  tel que  $t_{s+1} - t_s > n_1$ , alors il existe une orbite périodique  $\gamma \subset \text{Per}_{N_0}(f)$  telle que les points  $x_{t_s}$  et  $x_{t_{s+1}}$  appartiennent à des carreaux  $C_e \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$  et  $C_s \in \mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$ , respectivement (d'après le lemme 4.6). Les points  $x_{t_s}$  et  $x_{t_{s+1}}$  appartiennent à ces mêmes carreaux, par construction. D'après la proposition 4.2, il existe un point  $z$  de l'intérieur de  $C_e$  et un entier  $n \leq n_1$  tel que  $f^n(z)$  appartienne à l'intérieur de  $C_s$ .

On remplace alors le segment de pseudo-orbite  $\{\tilde{x}_{t_s+1}, \dots, \tilde{x}_{t_{s+1}}\}$  par le segment de vraie orbite  $\{f(z), \dots, f^n(z)\}$ .

La suite obtenue en appliquant ce procédé à chaque segment  $\{\tilde{x}_{t_s+1}, \dots, \tilde{x}_{t_{s+1}}\}$  de longueur supérieure à  $n_1$  est notée  $y_0 = x, y_1, \dots, y_\ell = y$ . On notera  $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_r$  les temps de cette suite correspondants aux temps  $t_0, \dots, t_r$  de la suite  $\tilde{x}_i$  : formellement, la suite  $\{y_0, \dots, y_\ell\}$  a été obtenue en concaténant des segments de la forme  $\{y_{\tau_0}, \dots, y_{\tau_1}\}$  ou  $\{y_{\tau_s+1}, \dots, y_{\tau_{s+1}}\}$  qui remplacent les segments de la forme  $\{\tilde{x}_{t_0}, \dots, \tilde{x}_{t_1}\}$  ou  $\{\tilde{x}_{t_s+1}, \dots, \tilde{x}_{t_{s+1}}\}$ .

**Lemme.** *La suite  $y_0 = x, \dots, y_\ell = y$  définie ci-dessus est une pseudo-orbite préservant le quadrillage de toutes les boîtes  $B$  de  $\mathcal{B}$ , et n'ayant pas de saut hors des boîtes de  $\mathcal{B}$ .*

**Démonstration :** Nous devons vérifier que pour tout  $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ , si  $f(y_i) \neq y_{i+1}$  alors  $y_i$  et  $f^{-1}(y_{i+1})$  appartiennent à l'intérieur d'un même carreau  $C \in \mathcal{C}$ . Par construction, ceci n'arrive que lorsque  $i$  est de la forme  $\tau_s$ ,  $s \in \{1, \dots, r-1\}$ . De nouveau par construction, les points  $y_{\tau_s}$  et  $f^{-1}(y_{\tau_s+1})$  appartiennent à l'intérieur du même carreau que  $x_{t_s}$  (et aussi que  $\tilde{x}_{t_s}$ ), ce qui conclut.  $\square$

En résumé, nous avons montré :

**Proposition 4.8.** *Il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que, pour tous points  $x, y$  hors des voisinages  $V(\gamma)$  et des supports des boîtes de perturbations  $B \in \mathcal{B}$  on ait la propriété suivante :*

*Si  $x \dashv_{\varepsilon_1} y$ , alors il existe une pseudo-orbite préservant le quadrillage de toutes les boîtes de  $\mathcal{B}$  et n'ayant pas de sauts hors des boîtes de  $\mathcal{B}$  joignant  $x$  à  $y$ .*

## 4.6 Fin de la preuve du théorème 1.2

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 1.2 : soient  $x$  et  $y$  deux points tels que  $x \dashv y$ . D'après la section 4.3, on peut supposer que ces points n'appartiennent pas à  $Per_{N_0}(f)$  et que  $y$  n'est pas sur l'orbite positive de  $x$ . Soit  $\mathcal{U}$  un  $C^1$  voisinage de  $f$ , que l'on peut choisir comme dans la remarque 4.3. On note  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  la famille de boîtes de perturbation que l'on a associée, dans la section 4.3, à  $\mathcal{U}$  et à ces deux points. D'après la remarque 4.5, on peut supposer que les points  $x$  et  $y$  sont situés hors des boîtes  $B \in \mathcal{B}$  (ils sont par construction hors des voisinages  $V(\gamma)$ ).

D'après la proposition 4.8, il existe alors une pseudo-orbite  $y_0 = x, \dots, y_\ell = y$  préservant le quadrillage de toutes les boîtes de  $\mathcal{B}$  et n'ayant pas de sauts hors des boîtes de  $\mathcal{B}$ .

Par le choix de l'ouvert  $\mathcal{U}$  et puisque les boîtes de  $\mathcal{B}$  sont de supports disjoints, un difféomorphisme obtenu en composant des perturbations dans  $\mathcal{U}$  à support dans chacune des boîtes  $B \in \mathcal{B}$  est encore un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$ .

D'après le lemme 2.3 appliqué à la suite  $y_0, \dots, y_\ell$  et à la boîte  $B_1$ , on obtient un difféomorphisme  $f_1 \in \mathcal{U}$  et une pseudo-orbite de  $f_1$  joignant les points  $x$  et  $y$ , préservant le quadrillage de toutes les boîtes de  $\{B_2, \dots, B_m\}$  et n'ayant pas de sauts hors des boîtes de  $\{B_2, \dots, B_m\}$ .

On applique à nouveau ce procédé successivement à chaque boîte de  $\{B_2, \dots, B_m\}$ . À la  $i^{\text{ème}}$  étape, on associe une perturbation de  $f$  dans  $\mathcal{U}$ , respectant les quadrillages de toutes les boîtes et n'ayant aucun saut hors des boîtes  $B_{i+1}, \dots, B_m$ . La  $m^{\text{ème}}$  étape crée un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  tel que l'orbite positive de  $x$  passe par  $y$ , ce qui conclut la démonstration.

## 5 Conséquences du lemme de connexion

### 5.1 Preuve du théorème 1.1 : argument de généricité

Soit  $\mathcal{B}$  une base dénombrable d'ouverts de  $M$ .

Pour tous  $U, V \in \mathcal{B}$  on note  $\mathcal{O}(U, V)$  l'ensemble des difféomorphismes tels que, ou bien, de façon robuste, il existe un itéré positif de  $U$  qui rencontre  $V$ , ou bien, de façon robuste, tout itéré positif de  $U$  est disjoint de  $V$ . Plus précisément,  $\mathcal{O}(U, V)$  est l'union  $\mathcal{O}_\infty(U, V) \cup \bigcup_0^\infty \mathcal{O}_n(U, V)$ , où  $\mathcal{O}_n(U, V)$  est l'ensemble des difféomorphismes pour lequel  $f^n(U)$  rencontre  $V$ , et où  $\mathcal{O}_\infty(U, V)$  est l'intérieur du complémentaire de  $\bigcup_0^\infty \mathcal{O}_n(U, V)$ .

Chacun des  $\mathcal{O}_n(U, V)$  est ouvert car  $U$  et  $V$  sont ouverts et  $\mathcal{O}_\infty(U, V)$  est ouvert par définition. On en déduit que  $\mathcal{O}(U, V)$  est un ouvert de  $\text{Diff}^1(M)$ . Il est dense par construction.

Notons  $\mathcal{G}_0$  l'ensemble des difféomorphismes Kupka-Smale : toutes les orbites périodiques sont hyperboliques et leurs variétés invariantes sont transverses. Par le théorème de Kupka-Smale,  $\mathcal{G}_0$  est un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ . Soit  $\mathcal{G}_1$  l'intersection  $\mathcal{G}_0 \cap \bigcap_{U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{O}(U, V)$ . C'est un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  d'après le théorème de Baire.

Soit  $f$  un difféomorphisme dans  $\mathcal{G}_1$ , et soit  $(x, y)$  une paire de points tels que  $x \dashv_f y$ . Soient  $U \in \mathcal{B}$  et  $V \in \mathcal{B}$  des voisinages de  $x$  et  $y$ , respectivement. D'après le théorème 1.2 tout voisinage de  $f$  contient un difféomorphisme  $g$  pour lequel un itéré positif de  $U$  rencontre  $V$ . Par définition

de  $\mathcal{G}_1$ ,  $f$  appartient à  $\mathcal{O}(U, V)$ . L'existence de  $g$  arbitrairement proche de  $f$  interdit que  $f$  appartienne à l'ouvert  $\mathcal{O}_\infty(U, V)$ . Il existe donc un itéré positif de  $U$  par  $f$  qui rencontre  $V$ . On a montré  $x \prec_f y$ , ce qui conclut la preuve du théorème 1.1.

## 5.2 Conséquences du théorème 1.1

Le corollaire 1.2 est une conséquence directe du théorème 1.1 : soit  $\mathcal{G}_1$  le  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  construit à la section 5.1, sur laquelle les relations  $\dashv$  et  $\prec$  coïncident.  $\Omega(f)$  est l'ensemble des points  $x$  tels que  $x \prec x$  donc coïncide avec l'ensemble des points  $x$  tels que  $x \dashv x$  qui est  $\mathcal{R}(f)$ .

La première partie du corollaire 1.3 se déduit du théorème 1.1 et du lemme (sans doute classique) suivant :

**Lemme 5.1.** *Si  $f$  est un difféomorphisme d'une variété connexe  $M$  tel que  $\Omega(f) = M$  alors, pour tous  $x, y \in M$  on a  $x \dashv y$ .*

**Démonstration :** Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tous  $x, y \in M$  choisissons une suite de points  $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$  tels que  $d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , pour tout  $i$ . Pour tout  $i$  il existe une  $\varepsilon$  pseudo-orbite joignant  $x_i$  à  $x_{i+1}$  : en effet, comme  $x_i$  est non-errant il existe un point  $\tilde{x}_i$  arbitrairement proche de  $x_i$  ayant un retour  $f^{n_i}(\tilde{x}_i)$  lui aussi proche de  $x_i$  ; la suite  $x_i, f(\tilde{x}_i), f^2(\tilde{x}_i), \dots, f^{n_i-1}(\tilde{x}_i), x_{i+1}$  est alors une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite. En mettant bout à bout ces pseudo-orbites on obtient une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant  $x$  à  $y$ . Donc  $x \dashv_\varepsilon y$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et finalement  $x \dashv y$ .  $\square$

Si  $f$  appartient à la partie résiduelle  $\mathcal{G}_1$  de  $\text{Diff}^1(M)$  annoncée par le théorème 1.1 et si  $\Omega(f) = M$ , alors pour tous points  $x, y \in M$  on a  $x \dashv y$  et donc  $x \prec y$ . On en déduit que pour tout couple d'ouvert  $U, V$  de  $M$  il existe un itéré positif de  $U$  qui rencontre  $V$ , c'est à dire que  $f$  est transitif : ceci montre la première partie du corollaire 1.3.

Il existe d'autre part, comme conséquence du lemme de fermeture de Pugh, une partie résiduelle  $\mathcal{G}_2$  de  $\text{Diff}^1(M)$  sur laquelle l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$ ,  $f \in \mathcal{G}_2$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques hyperboliques de  $f$ . D'autre part, en conséquence du lemme de connexion d'Hayashi, [BD<sub>1</sub>] montre qu'il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_3$  de  $\text{Diff}^1(M)$  sur laquelle deux points périodiques hyperboliques appartiennent à un même ensemble transitif si et seulement s'ils ont même classe homocline. En conséquence,  $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3$  est une partie résiduelle de  $\text{Diff}^1(M)$  et, si  $f \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3$  vérifie que  $\Omega(f) = M$ , alors il est transitif et possède au moins un point périodique  $p$  dont la classe homocline doit coïncider avec celle de tous les autres points périodiques, mais ceux-ci étant denses dans  $M$ , on obtient que  $H(p, f) = M$ . Ceci conclut la preuve du corollaire 1.3.

## 5.3 Décomposition en pièces élémentaires

Le corollaire 1.4 découle directement du théorème 1.1 et du fait que, quand la relation  $\prec$  est transitive (par exemple sur la partie résiduelle  $\mathcal{G}_1$  introduite ci-dessus), les ensembles faiblement transitifs maximaux sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence obtenue sur  $\Omega(f)$  en symétrisant la relation  $\prec$ . Sur  $\mathcal{G}_1$  cette relation coïncide avec la relation d'équivalence  $\dashv$  définie sur  $R(f) = \Omega(f)$  : les classes de récurrences par chaînes d'un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_1$  sont donc exactement les ensembles faiblement transitifs maximaux, ce qui prouve le corollaire 1.4.

Nous utiliserons plusieurs fois par la suite le lemme suivant :

**Lemme 5.2.** Soit  $\mathcal{G}_1$  la partie résiduelle de  $\text{Diff}^1(M)$  sur laquelle  $\prec_f$  et  $\dashv_f$  coïncident. Pour tout  $f \in \mathcal{G}_1$  et tout compact invariant  $K$ , Lyapunov stable pour  $f$ , on a :

$$x \in K \text{ et } x \dashv_f y \implies y \in K. \quad (1)$$

Si de plus  $K$  est récurrent par chaînes,  $K$  est une classe de récurrence par chaînes.

**Démonstration :** Comme  $K$  est stable au sens de Lyapunov, il possède des voisinages  $U$  arbitrairement petits qui sont positivement invariant par  $f$  (i.e.  $f(U) \subset U$ ). On en déduit que, si  $x \in K$  et  $y \in M$  vérifient  $x \prec y$  alors  $y \in K$ . Comme les relations  $\prec$  et  $\dashv$  coïncident sur  $M$ , on a montré l'implication (1). L'ensemble  $K$  contient donc toute classe de récurrence par chaînes qui le rencontre. Si  $K$  est lui-même récurrent par chaînes, c'est exactement une classe de récurrence par chaînes.  $\square$

Afin de montrer le corollaire 1.8 (conjecture de Hurley pour la topologie  $C^1$ ) nous devons préalablement montrer la proposition 1.7. Le premier item de cette proposition est presque une tautologie : un quasi-attracteur  $K$  possède des voisinages ouverts  $U$  arbitrairement petits qui sont strictement invariants (i.e.  $f(\overline{U}) \subset U$ ). Il est donc stable au sens de Lyapunov et de plus les  $\varepsilon$ -pseudo-orbites, pour  $\varepsilon$  assez petit, ne peuvent pas sortir de  $U$ . Un quasi-attracteur contient donc toute classe de récurrence par chaînes qu'il rencontre. S'il est lui-même récurrent par chaînes, il est de ce fait une classe de récurrence par chaînes, ce qui montre le premier item.

Le second item de la proposition 1.7 est la réciproque générique du premier item : soit  $f$  un difféomorphisme appartenant à la partie générique  $\mathcal{G}_1$  donnée par le théorème 1.1, et soit  $K$  une classe de récurrence par chaînes de  $f$  qui est stable au sens de Lyapunov. On définit pour  $\varepsilon > 0$  l'ensemble  $V(K, \varepsilon) = \{y \in M \mid \exists x \in K, x \dashv_\varepsilon y\}$ . On remarque que pour tout  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , l'adhérence de  $V(K, \varepsilon_1)$  est incluse dans  $V(K, \varepsilon_2)$ . On en déduit que  $\bigcap_\varepsilon \overline{V(K, \varepsilon)}$  est une intersection décroissante de compacts qui est égale à  $\bigcap_\varepsilon V(K, \varepsilon)$  et donc égale à  $\{y \in M \mid \exists x \in K, x \dashv y\}$ . Finalement, puisque  $K$  est supposé être stable au sens de Lyapunov,  $\bigcap_\varepsilon \overline{V(K, \varepsilon)}$  coïncide avec  $K$  d'après le lemme 5.2.

On en déduit que, pour tout voisinage  $U$  de  $K$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'ensemble  $V(K, \varepsilon) = \{y \in M \mid \exists x \in K, x \dashv_\varepsilon y\}$  est inclus dans  $U$ . Remarquons que  $V(K, \varepsilon)$  est un voisinage de  $K$  ; de plus, si  $y$  est un point de  $V(K, \varepsilon)$  et si  $x_0 \in K, x_1, \dots, x_k = y$  est une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant un point  $x_0 \in K$  à  $y$ , alors pour tout point  $z$  tel que  $d(f(y), z) < \varepsilon$ , la suite  $x_0 \in K, x_1, \dots, x_k = y, x_{k+1} = z$  est une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite joignant  $x_0$  à  $z$ . Ceci montre  $f(\overline{V(K, \varepsilon)}) \subset \text{int}(V(K, \varepsilon))$ . La classe de récurrence par chaînes  $K$  possède donc une base de voisinages strictement invariants par  $f$ , et est donc un quasi-attracteur récurrent par chaînes, ce qui conclut la preuve de la proposition 1.7.

D'après [MP], il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_4$  de  $\text{Diff}^1(M)$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{G}_4$ , il existe une partie résiduelle  $R$  de  $M$  telle que, pour tout point  $x \in R$ , l'ensemble  $\omega(x, f)$  est un ensemble récurrent par chaînes, stable au sens de Lyapunov. Considérons  $f \in \mathcal{G}_4 \cap \mathcal{G}_1$ . Pour tout  $x \in R$ , l'ensemble  $\omega(x, f)$  étant stable au sens de Lyapunov et récurrent par chaînes, d'après le lemme 5.2, il est donc une classe de récurrence par chaînes stable au sens de Lyapunov, et donc un quasi-attracteur récurrent par chaînes, d'après la proposition 1.7. L'union des bassins d'attraction des quasi-attracteurs récurrents par chaînes de  $f$  contiennent donc la partie résiduelle  $R$  de  $M$ , ce qui termine la preuve de la conjecture de Hurley en topologie  $C^1$ .

## 5.4 Classes de récurrence par chaînes et orbites périodiques

Montrons le corollaire 1.11 : pour tout  $f$ , d'après le théorème fondamental des systèmes dynamiques de Conley, toute composante connexe de  $\mathcal{R}(f)$  est incluse dans une classe de récurrence par chaînes. Si celle-ci est d'intérieur non vide, elle contient, pour  $f$  générique, une orbite périodique hyperbolique. Pour  $f$  générique, la classe homocline de cette orbite périodique est une classe de récurrence par chaînes (voir la remarque 1.10). Nous avons montré que pour  $f$  générique, toute composante connexe de  $\mathcal{R}(f)$  d'intérieur non-vide est incluse dans une classe homocline, ce qui conclut la preuve du corollaire 1.11.

Finalement, nous montrons le corollaire 1.13. Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la preuve est calculée sur celle de [Ab, Theorem A] :

**Lemme 5.3.** *Il existe un ensemble  $\mathcal{G}_5$  de  $\text{Diff}^1(M)$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{G}_5$  et toute classe homocline isolée  $H(p, f)$  d'une orbite périodique hyperbolique  $p$  de  $f$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$  et  $U$  de  $H(p, f)$  dans  $M$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{G}_5 \cap \mathcal{U}$ ,  $U$  ne contient qu'une seule classe homocline de  $g$ .*

**Démonstration :** Fixons une base dénombrable d'ouverts  $\mathcal{O} = \{O_n\}$  de  $M$ . Notons  $\mathcal{G}_6$  la partie résiduelle de  $\text{Diff}^1(M)$ , donnée par [CMP] sur laquelle deux classes homoclines sont disjointes ou confondues et toute classe homocline varie continûment avec le difféomorphisme (celui-ci variant dans  $\mathcal{G}_6$ ).

À tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_6$  et tout ouvert  $O_n$ , nous associons le nombre  $N(n, f) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  de classes homoclines de  $f$  rencontrant  $O_n$ . Par le choix de  $\mathcal{G}_6$  les applications  $f \mapsto N(n, f)$  sont semi-continues en restriction à  $\mathcal{G}_6$ . La base d'ouverts  $O_n$  étant dénombrable, il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_5 \subset \mathcal{G}_6$  en restriction à laquelle les fonctions  $f \mapsto N(n, f)$  sont continues donc localement constantes.

Soit  $H(p, f)$  une classe homocline isolée d'un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_5$ . Soit  $U_0$  un voisinage de  $H(p, f)$  qui ne rencontre aucune autre classe homocline. Soient  $O_{i_1}, \dots, O_{i_k}$  un recouvrement fini de  $H(p, f)$  par des ouverts de la base  $\mathcal{O}$ , contenus dans  $U_0$ , et soit  $U$  un voisinage de  $H(p, f)$  contenu dans l'union  $\bigcup_1^k O_{i_j}$ . Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $f$  tel que, pour tout  $g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{G}_5$  et tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $N(i_j, g) = N(i_j, f)$ , c'est-à-dire que  $O_{i_j}$  ne rencontre pas d'autre classe homocline que  $H(p, g)$ . Ainsi  $U$  ne contient qu'une seule classe homocline de  $g$ . □

**Démonstration du corollaire 1.13 :** Soient  $f \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_5$  et  $H(p, f)$  une classe homocline isolée de  $f$ . Supposons par l'absurde que  $H(p, f)$  n'est pas robustement récurrente par chaînes. Soit  $V$  un voisinage filtrant de  $H(p, f)$  (construit à l'aide d'une fonction de Lyapunov) et soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $f$ , choisit assez petit pour que  $V$  soit toujours un voisinage filtrant (c'est-à-dire qu'il est intersection d'un ouvert strictement invariant pour tout  $g \in \mathcal{V}$  et d'un ouvert strictement invariant pour tout  $g^{-1}$ ,  $g \in \mathcal{V}$ ).

Pour tout  $g \in \mathcal{V}$ , l'ouvert  $V$  étant filtrant, l'ensemble  $\mathcal{R}(g) \cap V$  est inclus dans l'ensemble maximal invariant  $\Lambda_g$  de  $g$  dans  $\bar{V}$  et dans  $V$ . De plus, les classes de récurrence par chaînes de  $g$  incluses dans  $\Lambda_g$  coïncident avec les classes de récurrence par chaînes de la restriction de  $g$  à  $\Lambda_g$  : en effet,  $\Lambda_g$  possède une base de voisinages, qui sont des voisinages filtrants. Les pseudo-orbites joignant deux points de  $\Lambda_g$  ne peuvent donc pas s'éloigner de  $\Lambda_g$  et peuvent donc être remplacées par des pseudo-orbites de points de  $\Lambda_g$ .

Par hypothèse, il existe  $g \in \mathcal{V}$  tel que  $\Lambda_g$  n'est pas récurrent par chaînes. La théorie de Conley permet de montrer que la restriction de  $g$  à  $\Lambda_g$  possède au moins deux classes distinctes

de récurrence par chaînes, qui sont, comme nous l'avons vu, deux classes distinctes de récurrence par chaînes de la dynamique de  $g$  sur  $M$ . Il existe donc une classe de récurrence par chaînes  $K$  de  $g$ , incluse dans  $\Lambda_g$  et disjointe de  $H(p, g)$ . La théorie de Conley montre l'existence d'un ouvert de  $M$  strictement invariant  $V'$  tel que  $V'$  et le complémentaire de  $\bar{V}'$  contiennent chacun un et un seul des compacts  $K$  et  $H(p, g)$  : nous supposons, pour fixer les idées que  $K \subset V'$  et  $H(p, g) \subset M \setminus \bar{V}'$ . L'ouvert  $V'$  est encore strictement invariant pour tout difféomorphisme  $g'$  proche de  $g$ . Le closing lemma appliqué à une orbite récurrente de  $K$  permet de construire un difféomorphisme  $g'$  arbitrairement proche de  $g$ , possédant une orbite périodique hyperbolique  $p'$  contenue dans  $V' \cap V$ . Pour tout difféomorphisme  $\tilde{g}$  proche de  $g$ , les deux classes homoclines  $H(p, \tilde{g})$  et  $H(p', \tilde{g})$  sont distinctes et contenues dans  $V \cap (M \setminus \bar{V}')$  et  $V \cap V'$  respectivement. Nous avons montré que pour tout difféomorphisme  $\tilde{g}$  contenu dans un ouvert de difféomorphismes arbitrairement proche de  $f$ , le voisinage  $V$  de  $H(p, f)$ , choisi arbitrairement petit, contient deux classes homoclines distinctes. Ceci contredit le choix initial du difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_5$ .  $\square$

## 6 Le cas conservatif

### 6.1 Les théorèmes 1.2, 1.1 et 1.3 lorsque $\dim(M) \geq 3$

Le lemme de connection (connecting lemma) de Hayashi, tel qu'il est énoncé au théorème 2.1, reste valide dans le monde conservatif, sa preuve restant inchangée (voir les remarques 2.5 et A.5).

Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  de dimension  $d$  préservant une forme volume  $\omega$ . On définit une *boîte de perturbation d'ordre  $N$*  pour  $(f, \mathcal{U}, \omega)$ , où  $\mathcal{U}$  est un voisinage ouvert de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$ , en demandant que le difféomorphisme  $g$ , dans la définition 2.1, préserve  $\omega$  (c'est-à-dire que  $g$  appartient à  $\mathcal{U} \cap \text{Diff}_\omega^1(M)$ ).

**Théorème 6.1.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  de dimension  $d$  préservant une forme volume  $\omega$ . Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$  il existe  $N > 0$  vérifiant : pour tout point  $x \in M$ , il existe une carte locale  $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$  en  $x$  telle que tout cube quadrillé de  $(U_x, \varphi)$ , disjoint de ses  $N$  premiers itérés est une boîte de perturbation d'ordre  $N$  pour  $(f, \mathcal{U}, \omega)$ .*

*De plus, cette propriété est encore vérifiée par les cartes proches de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ .*

La seule précaution additionnelle (par rapport au cas non-conservatif) consiste à vérifier que le lemme A.4 reste valide pour les difféomorphismes préservant  $\omega$  ; nous renvoyons à [Ar<sub>2</sub>, proposition 5.1.1] où ce lemme est montré dans le cadre conservatif.

On transpose alors sans modification la preuve du théorème 1.2 (en utilisant le théorème 6.1 au lieu du théorème 2.1) et on obtient :

**Théorème 6.2.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  préservant une forme volume  $\omega$ . On suppose de plus que toutes les orbites périodiques de  $f$  sont hyperboliques. Soit  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ . Alors, pour toute paire  $(x, y)$  de points de  $M$  telle que  $x \dashv y$ , il existe un difféomorphisme  $g$  dans  $\mathcal{U}$  et un entier  $n > 0$  tel que  $g^n(x) = y$ .*

Soit  $M$  une variété compacte connexe de dimension  $d \geq 3$ , munie d'une forme volume  $\omega$ . Il existe alors (voir [R<sub>1</sub>]) une partie résiduelle  $\mathcal{G}_\omega$  de  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  telle que tout point périodique d'un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_\omega$  est hyperbolique. Ceci permet de répéter sans modification la preuve du théorème 1.1 donnée à la section 5.1, et on obtient :

**Théorème 6.3.** *Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  telle que pour tout difféomorphisme  $f$  de  $\mathcal{G}$  et tout couple  $(x, y)$  de points de  $M$  on a :*

$$x \dashv_f y \iff x \prec_f y.$$

**Fin de la preuve du théorème 1.3 dans le cas où  $\dim M \geq 3$  :** Finalement, pour tout difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ , l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  coïncide avec la variété ; on a vu que ceci implique que  $M$  est alors une classe de récurrence par chaînes pour  $f$ . Si  $f$  est générique, on a  $\prec_f = \dashv_f$  d'après le théorème 6.3 ; ceci implique que  $f$  est un difféomorphisme transitif ; de plus, d'après [PR, R<sub>1</sub>], ses points périodiques hyperboliques sont denses. D'après [Ar<sub>1</sub>, corollaire 19] dans le cadre conservatif (quand tous les points périodiques sont hyperboliques, voir [Ar<sub>1</sub>, paragraphe 1.5]), il existe une partie résiduelle de  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  sur laquelle tout compact invariant transitif de  $M$  contenant un point périodique hyperbolique  $p$  est contenu dans la classe homocline de  $p$ . Ainsi, pour  $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$  générique (avec  $\dim M \geq 3$ ), la variété  $M$  toute entière est incluse dans la classe homocline de chacune de ses orbites périodiques (qui sont toutes hyperboliques).

Nous avons donc montré le théorème 1.3, dans le cas où  $\dim M \geq 3$ .  $\square$

Pour les sections suivantes, nous utiliserons le résultat classique suivant (adapté de [F]) :

**Proposition 6.1 (Lemme de Franks conservatif, voir par exemple [BDP], Lemma 7.6).**

*Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  d'une variété compacte  $M$  préservant une forme volume  $\omega$ . Pour tout  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$ , il existe un  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{O}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$  et  $\varepsilon > 0$  avec la propriété suivante :*

*Étant donné un difféomorphisme  $\tilde{f} \in \mathcal{O}$ , une partie finie  $E$  de  $M$ , un voisinage  $V$  de  $E$  et en tout point  $x \in E$  une  $\varepsilon$ -perturbation  $B_x: T_x M \rightarrow T_{\tilde{f}(x)} M$  de  $D_x \tilde{f}$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  coïncidant avec  $\tilde{f}$  hors de  $V$  et sur  $E$ , tel que pour tout point  $x \in E$ ,  $D_x g = B_x$ .*

Bien que l'énoncé soit légèrement plus fort que celui de [BDP] ( $g$  est de classe  $C^r$ , la partie  $E$  n'est pas supposé invariante et le résultat est uniforme pour  $\tilde{f} \in \mathcal{O}$ ), la preuve est rigoureusement identique.

## 6.2 Difféomorphismes conservatifs des surfaces

### 6.2.1 Au voisinage des points elliptiques

Soit  $S$  une surface compacte munie d'une forme volume (forme d'aire)  $\omega$ . Il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_\omega$  de  $\text{Diff}_\omega^1$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{G}_\omega$  toute orbite périodique est ou bien hyperbolique, ou bien la différentielle (à la période) de cette orbite est conjuguée à une rotation irrationnelle (voir [R<sub>1</sub>]). Par conséquent l'ensemble  $\text{Per}_{N_0}(f)$  des orbites périodiques de période inférieure à  $N_0$  est fini.

Au voisinage des points périodiques elliptiques, nous avons besoin d'un résultat équivalent à la proposition 4.2.

**Proposition 6.2.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une surface compacte préservant une forme volume  $\omega$ , et  $\mathcal{U}$  voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  pour la topologie  $C^1$ . Soit  $N$  l'entier associé à l'ouvert  $\mathcal{U}$  par le théorème 6.1. Pour toute orbite périodique  $\gamma$  de  $f$  dont la différentielle (à la période) est conjuguée à une rotation irrationnelle, et tout voisinage  $V$  de  $\gamma$ , il existe un ouvert  $U$ , un voisinage  $W$  de  $\gamma$ , une boîte de perturbation  $B$ , un compact  $D$  contenu dans l'intérieur du carreau central de  $B$  et un entier  $n_0$  tels que (voir la figure 3) :*

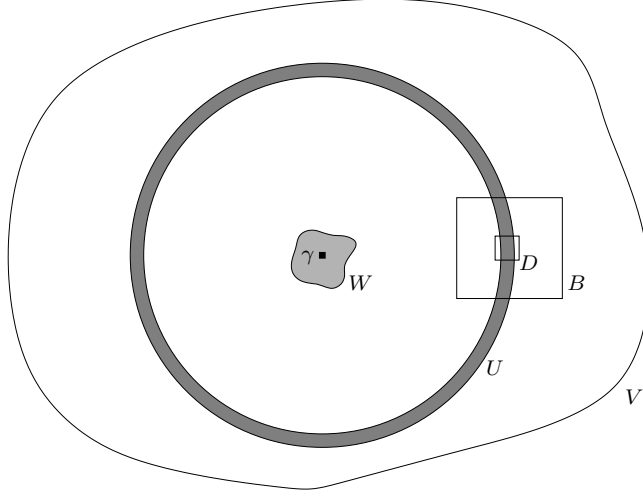


FIG. 3: Boîte de perturbation au voisinage d'un point fixe elliptique.

1. L'ouvert  $V$  contient les compacts  $\bar{W}$ ,  $\bar{U}$  et le support de la boîte de perturbation  $B$ . De plus  $\bar{U}$  et  $\bar{W}$  sont disjoints.
2. Pour tout point  $z$  de  $U$ , il existe un itéré positif  $f^n(z)$  avec  $n \in \{0, \dots, n_0\}$  qui appartient à l'intérieur de  $D$ . De même, il existe un itéré négatif  $f^{-n}(z)$  avec  $n \in \{0, \dots, n_0\}$  qui appartient à l'intérieur de  $D$ . (On pense à  $U$  comme étant une réunion de couronnes autour de chaque point de  $\gamma$ .)
3. Pour toute orbite finie  $z, \dots, f^n(z)$  rencontrant  $M \setminus V$  et  $W$ , il existe un itéré  $f^m(z)$  avec  $m \in \{0, \dots, n\}$  qui appartient à  $U$ .

**Démonstration :** Nous noterons  $q$  la période de l'orbite  $\gamma$ . Considérons une carte de perturbation  $\varphi$  donnée par le théorème 6.1 appliqué en un point  $z_0$  de l'orbite  $\gamma$ . De ce fait, nous pouvons travailler dans  $\mathbb{R}^2$  au voisinage du point  $0 = \varphi(z_0)$  avec l'application  $F = \varphi \circ f^q \circ \varphi^{-1}$ .

Nous considérons n'importe quel carré quadrillé  $B_1$ , contenu dans un petit voisinage de 0. Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , l'image  $B_t$  de  $B_1$  par une homothétie de rapport  $t$  centrée en 0 est encore un carré quadrillé. Quitte à choisir  $B_1$  assez petit, pour tout  $t \in ]0, 1[$  les boîtes  $\varphi^{-1}(B_t)$  sont disjointes de leur  $N$  premiers itérés et définissent des boîtes de perturbation d'ordre  $N$  pour  $(f, \mathcal{U}, \omega)$ . Considérons un compact  $D_1$  d'intérieur non vide contenu dans l'intérieur du carreau central de la boîte  $B_1$  et  $D_t$  son image par l'homothétie de rapport  $t$ .

Par hypothèse, la différentielle  $A: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  de l'application  $F$  en 0 est conjuguée à une rotation irrationnelle  $R$  de  $\mathbb{R}^2$  par un automorphisme  $H \in GL(2, \mathbb{R})$  (ainsi  $A = H^{-1}RH$ ). On note  $C_t$  l'image par  $H^{-1}$  du cercle de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $t$ . Quitte à multiplier  $H$  par une homothétie, on peut supposer également que  $C_1$  contient un point de l'intérieur de  $D_1$  (et  $C_t$  un point de l'intérieur de  $D_t$  pour tout  $t \in ]0, 1[$ ). On fixe une constante  $\eta \in ]0, 1[$  telle que, pour tout  $t \in ]0, 1[$  et tout  $t' \in ]t, (1 + \eta)t[$ , la courbe  $C_{t'}$  rencontre l'intérieur de  $D_t$ .

L'application  $A$  préserve chaque courbe  $C_t$ . D'autre part, il existe un entier  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $t \in ]0, 1[$  et tout  $t' \in ]t, (1 + \eta)t[$ , tout point  $z \in C_{t'}$  possède un itéré positif  $A^n(z)$  par  $A$ , avec  $n \leq n_0$ , qui appartient à l'intérieur de  $D_t$ . Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment proche de 0, l'application  $F$  est proche de  $A$  en topologie  $C^1$  sur la boule de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ . On en déduit que pour  $t$  suffisamment petit les deux propriétés suivantes sont satisfaites :



1. Pour tout  $t' \in ]t, (1 + \eta)t[$ , tout point  $z$  de  $C_{t'}$  possède un itéré positif  $F^n(z)$  par  $F$  avec  $n \in \{0, \dots, n_0\}$  appartenant à l'intérieur de  $D_t$ .
2. Pour tout  $n \in \{0, \dots, n_0\}$  et tout point  $z \in C_t$ , le point  $F^n(z)$  appartient à une courbe  $C_{t'}$  avec  $t' < (1 + \eta)t$ .

Les mêmes propriétés sont encore vérifiées par  $F^{-1}$ . Fixons un choix  $t_0$  de  $t$  de sorte que ces deux propriétés soient satisfaites simultanément pour  $F$  et  $F^{-1}$ .

Soit  $W_0$  un petit voisinage connexe de  $0$  qui ne rencontre pas  $C_{t_0}$ , et  $z$  un point de  $W_0$ . Alors, on est dans un des cas suivants :

- Ou bien l'orbite positive de  $z$  par  $F$  ne rencontre aucune courbe  $C_t$  avec  $t \in ]t_0, (1 + \eta)t_0[$ . Dans ce cas, la seconde propriété montre que l'orbite de  $z$  par  $F$  reste contenue dans l'union des courbes  $C_t$  avec  $t \leq t_0$ .
- Ou bien l'orbite positive de  $z$  par  $F$  rencontre une courbe  $C_t$  avec  $t \in ]t_0, (1 + \eta)t_0[$  et, d'après la première propriété, intersecte l'intérieur de  $D_{t_0}$ .

On obtient encore le même résultat pour l'orbite négative de  $z$  par  $F$ . Soit  $U_0$  l'union des courbes  $C_t$  avec  $t \in ]t_0, (1 + \eta)t_0[$ .

On peut supposer dans cette construction que tous les cercles  $\varphi^{-1}(C_t)$ , avec  $t \in ]0, 1[$ , et leurs  $q$  premiers itérés par  $f$  sont contenus dans  $V$  ( $q$  est la période de  $\gamma$ ). Il suffit pour conclure la démonstration de choisir pour  $B$  et  $D$  l'image de  $B_{t_0}$  et  $D_{t_0}$  par  $\varphi^{-1}$ . L'ouvert  $U$  est l'union de  $\varphi^{-1}(U_0)$  et de ses  $q$  premiers itérés par  $f$ . On définit de la même façon  $W$  à partir de  $W_0$ .  $\square$

**Remarque 6.3.** *Dans l'énoncé de la proposition 6.2, on peut demander de plus que l'adhérence de la boîte de perturbation  $B$  soit disjointe de ses  $m$  premiers itérés où  $m$  est un entier arbitraire.*

### 6.2.2 Preuve du théorème 1.2 pour les difféomorphismes conservatifs des surfaces

Afin d'appliquer le corollaire 4.1, il faut se ramener à un compact invariant ne contenant pas d'orbite périodique elliptique de basse période. C'est pourquoi cette fois, nous devons commencer par traiter le cas des orbites elliptiques en construisant, au voisinage, des boîtes de perturbation grâce à la proposition 6.2. Si  $K$  est l'ensemble maximal invariant hors d'un voisinage  $W$  des orbites elliptiques de basse période, le corollaire 4.1 lui associe un nombre fini de boîtes de perturbation de supports disjoints couvrant l'espace des orbites. En procédant de cette façon, il est nécessaire de s'assurer que les nouvelles boîtes ainsi construites ont leur support disjoint des boîtes que l'on avait préalablement introduites près des orbites elliptiques; ceci nous amènera à reprendre légèrement la preuve du corollaire 4.1. Comme dans la preuve de la section 4, on peut alors grâce à la proposition 4.2 ajouter de nouvelles boîtes de perturbation au voisinage des orbites périodiques hyperboliques de basse période. Cette nouvelle collection de boîtes de perturbation permet de terminer la preuve comme dans le cas non-conservatif.

Nous allons détailler maintenant les étapes de la démonstration qui sont différentes du cas général.

**Adaptation de la preuve du corollaire 4.1 aux difféomorphismes conservatifs des surfaces :**

Considérons un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}_\omega$  de  $S$  et  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$ . Nous supposons, quitte à le réduire, que  $\mathcal{U}$  satisfait la propriété de la remarque 4.3. Soient enfin  $x$  et  $y$  deux points de  $S$  tels que  $x \dashv y$ . Comme toujours, nous poserons  $N_0 = 10dN$  où  $N$  est l'entier associé à  $\mathcal{U}$  par le théorème 2.1. On choisit une constante  $\delta > 0$  telle que les variétés invariantes locales  $W_\delta^s(z)$  et  $W_\delta^u(z')$  de points  $z$  et  $z'$  de  $\text{Per}_{3N_0}(f)$  soient deux à deux disjointes.

Nous supposons (comme cela a été expliqué par la remarque 4.4) que  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à  $Per_{3\kappa_d N_0}(f)$  et que  $y$  n'est pas un point de l'orbite positive de  $x$  (la raison pour laquelle nous avons remplacé  $Per_{N_0}(f)$  par  $Per_{3\kappa_d N_0}(f)$  par rapport à la section 4 vient de l'ordre légèrement différent dans lequel nous faisons la preuve).

Pour toute orbite périodique elliptique  $\gamma$  de période inférieure à  $3\kappa_d N_0$ , on choisit un voisinage  $V(\gamma)$  de façon à ce que les  $V(\gamma)$  soient deux à deux disjoints et ne contiennent pas les points  $x$  et  $y$ . Notons  $B(\gamma)$  la boîte de perturbation ainsi que  $D(\gamma)$  le compact contenu dans le carreau central  $C(\gamma)$  de  $B(\gamma)$  obtenus à l'aide de la proposition 4.2. Grâce à la remarque 6.3 et en choisissant les voisinages  $V(\gamma)$  suffisamment petits, on peut demander que les adhérences des boîtes  $B(\gamma)$  et leurs  $4N_0$  premiers itérés soient deux à deux disjointes.

**Lemme 6.4.** *Sous ces hypothèses, il existe  $r > 0$  tel que, pour tout point  $z \in M$ , il existe  $n \in \{0, \dots, 2N_0\}$  tel que les itérés  $f^i(B(z, r))$ , avec  $i \in \{n, \dots, n + N_0\}$ , de la boule  $B(z, r)$  sont disjoints des adhérences des supports des boîtes  $B(\gamma)$ .*

**Démonstration :** Soit  $z$  un point de  $M$ .

- Ou bien, pour tout  $i \in \{0, \dots, N_0\}$ , le point  $f^i(z)$  ne rencontre pas l'union des adhérences des supports des boîtes  $B(\gamma)$ .
- Ou bien il existe  $i \in \{0, \dots, N_0\}$  tel que  $f^i(z)$  appartient à l'adhérence du support d'une boîte  $B(\gamma)$ . Alors, les points  $f^{i+N+1+k}(z)$  pour  $k \in \{0, \dots, N_0\}$  sont hors des adhérences des supports des boîtes  $B(\gamma)$ , par construction de ces boîtes.

Nous avons montré qu'il existe pour tout point  $z$  un entier  $n \in \{0, \dots, 2N_0\}$  tel que les itérés  $f^i(z)$ , avec  $i \in \{n, \dots, n + N_0\}$ , de  $z$  sont disjoints des adhérences des supports des boîtes  $B(\gamma)$ . Il existe donc un rayon  $r(z)$  tel que les itérés  $f^i(B(z, r(z)))$ , avec  $i \in \{n, \dots, n + N_0\}$ , de la boule  $B(z, r(z))$  sont disjoints des adhérences des supports des boîtes  $B(\gamma)$ . Un argument de compacité de  $M$  permet de choisir un rayon  $r$  uniforme. □

Finalement, on note aussi  $W(\gamma)$ ,  $U(\gamma)$  et  $n_0(\gamma)$  les ouverts et entiers annoncés par la proposition 6.2.

Soit  $K$  l'ensemble des points dont l'orbite n'intersecte pas l'union de ces ouverts  $W(\gamma)$ , avec  $\gamma$  orbite elliptique de période inférieure à  $3\kappa_d N_0$ . Le compact  $K$  est invariant et ne contient pas d'orbite périodique non-hyperbolique de période inférieure à  $3\kappa_d N_0$ . On applique le théorème 3.1 et le corollaire 3.1 à l'entier  $3N_0$  afin d'obtenir un ouvert  $U$  disjoint de ses  $3N_0$  premiers itérés. Le théorème 3.1 permet de choisir les composantes connexes de  $U$  de diamètre arbitrairement petit. On les choisit de diamètre plus petit que le rayon  $r$  du lemme 6.4. Soit  $C$  l'une de ces composantes, et  $n(C) \in \{0, \dots, 2N_0\}$  un itéré tel que  $f^{n(C)+i}(C)$  est disjoint des supports des boîtes  $B(\gamma)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N_0\}$ . On considère  $\tilde{U}$  l'ouvert obtenu en remplaçant chaque composante  $C$  de  $U$  par  $f^{n(C)}(C)$ . C'est un ouvert, disjoint de ses  $N_0$  premiers itérés et disjoint du support de toutes les boîtes  $B(\gamma)$ , qui vérifie les conclusions du théorème 3.1 (la constante  $\delta$  a pu être modifiée).

On peut reprendre la preuve du corollaire 4.1 avec le compact  $K$  et l'ouvert  $\tilde{U}$  afin d'obtenir une famille de boîtes de perturbation  $\mathcal{B}_0$  vérifiant les conclusions du corollaire 4.1 et disjointes des supports des boîtes  $B(\gamma)$ . On applique enfin la proposition 4.2 au voisinage des orbites périodiques hyperboliques de période inférieure ou égale à  $3N_0$  et on note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des boîtes de perturbations introduites.

**Adaptation de la fin de la démonstration du théorème 1.2 :**

Afin d'uniformiser les notations avec le cas des orbites périodiques hyperboliques, pour toute orbite elliptique  $\gamma$  (de période inférieure à  $3\kappa_d N_0$ ), on note  $\mathcal{E}(\gamma) = \mathcal{S}(\gamma) = \{B(\gamma)\}$ , de même  $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma) = \mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma) = \{C(\gamma)\}$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma) = \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma) = \{D(\gamma)\}$ . La fin de la démonstration est alors identique au cas sans orbite elliptique (sections 4.4, 4.5 et 4.6).

### 6.2.3 Preuve du théorème 1.3 dans le cas des surfaces

La transitivité annoncée par le théorème 1.3 est une conséquence immédiate du théorème 1.1 comme en dimension  $d \geq 3$ . La nouvelle difficulté du théorème 1.3 consiste à montrer que la surface est une unique classe homocline. Pour cela, nous avons besoin de créer des orbites périodiques hyperboliques.

Voici l'une des clefs de la démonstration que nous énonçons en classe  $C^r$ , avec  $r \geq 1$ , pour préparer les sections suivantes<sup>9</sup>.

**Proposition 6.5.** *Soient  $r \geq 1$ ,  $f \in \text{Diff}_\omega^r(S)$  et  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(S)$ . Il existe  $N \geq 1$  tel que pour toute orbite périodique  $\gamma$  de  $f$  de période supérieure à  $N$  et tout voisinage  $V$  de  $\gamma$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$ , coïncidant avec  $f$  hors de  $V$  et le long de  $\gamma$ , pour lequel  $\gamma$  est une orbite périodique hyperbolique.*

**Démonstration :** D'après le lemme de Franks (proposition 6.1), il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \geq 1$  tel que pour toute orbite périodique de période supérieure à  $N$ , il existe une  $\varepsilon$ -perturbation de la différentielle le long de l'orbite de façon que le produit (le long de l'orbite) des applications linéaires ainsi obtenues soit hyperbolique. Il s'agit en fait d'un résultat sur les suites finies, de longueur supérieure à  $N$ , de matrices de  $SL(2, \mathbb{R})$  de norme uniformément bornée : le lemme 6.6 ci-dessous permet d'obtenir par une perturbation de la différentielle, une valeur propre réelle. Une perturbation aussi petite que l'on veut permet alors d'obtenir une valeur propre (réelle) de module différent de 1 ce qui, dans  $SL(2, \mathbb{R})$ , assure l'hyperbolicité.  $\square$

**Lemme 6.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $n \geq N$  et toute suite finie  $A_0, \dots, A_n$  d'éléments finis de  $SL(2, \mathbb{R})$ , il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  dans  $] -\varepsilon, \varepsilon[$  tels que l'on a la propriété suivante :*

*Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $B_i = R_{\alpha_i} \circ A_i$  la composée de  $A_i$  avec la rotation  $R_{\alpha_i}$  d'angle  $\alpha_i$ . Alors, la matrice  $B_n \circ B_{n-1} \circ \dots \circ B_0$  a ses valeurs propres réelles.*

**Démonstration :** Les matrices de  $SL(2, \mathbb{R})$  agissent sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  des demi-droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ . La rotation d'angle  $\alpha$  s'écrit  $x \mapsto x + \alpha$  et le demi-tour  $R_{1/2}$  s'écrit  $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ .

**Affirmation.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour toute matrice  $A$  de  $SL(2, \mathbb{R})$ , l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

1. *il existe  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  et  $\theta \in ]0, \varepsilon[$  tels que*

$$R_\theta \circ A \circ R_\theta(\varphi) = -R_{-\theta} \circ A \circ R_{-\theta}(\varphi) ;$$

2. *pour tout  $\varphi \in \mathbb{S}^1$ , la distance entre  $A(\varphi + \varepsilon)$  et  $A(\varphi)$  est plus grande que  $\eta$ .*

---

<sup>9</sup>M.-C. Arnaud nous a signalé que [N<sub>2</sub>] permet de remplacer avantageusement la proposition 6.5 ainsi que son corollaire principal, le corollaire 6.7. En effet, S. Newhouse montre le corollaire 6.7 en topologie  $C^r$ , ce qui est suffisant pour les applications que nous donnons (voir la fin de la démonstration du théorème 1.3 pour les surfaces ci-dessous et la démonstration du lemme 6.8).

**Démonstration :** En effet,  $A$  est la composée  $O_1 \circ D \circ O_2$  où  $O_1$  et  $O_2$  sont des rotations et  $D$  est une matrice diagonale. Puisque les rotations commutent entre elles et sont des isométries de  $\mathbb{S}^1$ , il suffit de montrer l'affirmation pour les matrices diagonales, de valeurs propres  $\lambda, \lambda^{-1}$ .

Si  $\lambda$  est supérieure à une constante  $\lambda_0$  (très grande par rapport à  $\varepsilon^{-1}$ ), il existe  $\theta \in ]0, \varepsilon[$  tel que le vecteur  $R_\theta \circ D \circ R_\theta((0, 1))$  est colinéaire à  $(1, 0)$ . Par symétrie on obtient que le vecteur  $R_{-\theta} \circ D \circ R_{-\theta}((0, 1))$  est lui aussi colinéaire à  $(1, 0)$  et plus précisément :  $R_{-\theta} \circ D \circ R_{-\theta}((0, 1)) = -R_\theta \circ D \circ R_\theta((0, 1))$ , ce qui donne le premier cas de l'affirmation.

L'ensemble des matrices diagonales de valeurs propres bornées par  $\lambda_0$  étant compact, il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute matrice  $A$  dans cet ensemble, le second cas de l'affirmation est vérifié.  $\square$  Posons  $N > \frac{1}{2\eta}$ . Soit  $A_0, \dots, A_n, n \geq N$ , une famille finie de matrice de  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Supposons d'abord qu'il existe  $1 \leq k \leq \ell \leq n$  tels que la matrice  $A = A_\ell \circ A_{\ell-1} \circ \dots \circ A_k$  vérifie le premier cas de l'affirmation précédente. Il existe alors  $\theta \in ]0, \varepsilon[$  et une demi-droite  $\xi \in \mathbb{S}^1$  telle que  $M_1(\xi) = -M_{-1}(\xi)$  où l'on a posé, pour  $t \in [-1, 1]$ ,

$$M_t = (A_n \circ \dots \circ A_{\ell+1}) \circ R_{t\theta} \circ (A_\ell \circ \dots \circ A_k) \circ R_{t\theta} \circ (A_{k-1} \circ \dots \circ A_0).$$

Par continuité de la famille, quand  $t$  parcourt  $[-1, 1]$ , la demi-droite  $M_t(\xi)$  contient un demi-cercle de  $\mathbb{S}^1$  et donc contient  $\xi$  ou  $-\xi$ . Il existe donc une valeur  $t \in [-1, 1]$  telle que  $M_t(\xi)$  est colinéaire à  $\xi$ . La matrice  $M_t$  a donc ses valeurs propres réelles. On pose alors  $\alpha_{k-1} = \alpha_\ell = t\theta$  et  $\alpha_i = 0$  pour  $i \notin \{k-1, \ell\}$ .

Dans le cas contraire, on pose pour  $t \in [0, 1]$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

$$M_{i,t} = (A_n \circ \dots \circ A_{i+1}) \circ (R_{t\varepsilon} \circ A_i) \circ (R_\varepsilon \circ A_{i-1} \dots \circ R_\varepsilon A_1 \circ R_\varepsilon \circ A_0).$$

Puisque  $A_n \circ \dots \circ A_{i+1}$  vérifie le second cas de l'affirmation (par hypothèse, il ne vérifie pas le premier cas), on peut montrer que pour tout  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  la différence  $M_{i,1}(\varphi) - M_{i,0}(\varphi)$  est minorée par  $\eta$ . En remarquant que  $M_{i,0} = M_{i-1,1}$ , on forme une famille continue de matrice joignant  $M_{0,0}$  à  $M_{n,1}$ . La variation totale de l'image d'un point  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  le long de cette famille est minorée par  $N\eta > 1$ . Il existe donc une application  $M_{i,t}$  de cette famille qui possède un point fixe sur  $\mathbb{S}^1$ . Cette matrice a donc une valeur propre réelle. On pose donc  $\alpha_i = t\varepsilon, \alpha_j = \varepsilon$  pour  $j < i$  et  $\alpha_j = 0$  pour  $j > i$ .  $\square$

**Corollaire 6.7.** *Soit  $S$  une surface compacte munie d'une forme volume  $\omega$ . Il existe un ensemble résiduel  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}_\omega^1(S)$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques de  $f$  est dense dans  $S$ .*

**Démonstration :** D'après  $[R_1]$ , les orbites périodiques d'un difféomorphisme générique  $f \in \text{Diff}_\omega^1(S)$  sont toutes hyperboliques ou elliptiques. Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ , il existe un ouvert dense de  $\text{Diff}_\omega^1(S)$  sur lequel les orbites de période  $n$  sont en nombre fini. D'autre part, le closing lemma de Pugh entraîne que les orbites périodiques d'un difféomorphisme générique sont denses dans  $S$ . Donc pour un difféomorphisme générique, les orbites périodiques de période plus grande qu'une constante arbitraire sont denses dans  $S$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons que l'ensemble des difféomorphismes dont l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques est  $\varepsilon$ -dense dans  $S$  est un ouvert dense de  $\text{Diff}_\omega^1(S)$ . Puisque les orbites périodiques hyperboliques peuvent être suivies localement continûment avec  $f$ , cet ensemble est clairement ouvert ; il reste à montrer la densité.

Fixons donc un difféomorphisme générique  $f$  et un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  qui vérifie la propriété de la remarque 4.3. Soit  $N$  l'entier donné par la proposition 6.5. L'ensemble des orbites de  $f$  de

période plus grande que  $N$  est dense dans  $S$ . On considère donc un nombre fini d'entre elles dont l'union est  $\varepsilon$ -dense. La proposition 6.5 permet de les rendre chacune hyperbolique en perturbant  $f$  sur des voisinages disjoints de ces orbites. Le choix de  $\mathcal{U}$  montre que le difféomorphisme ainsi obtenu appartient à  $\mathcal{U}$ . Ceci montre la densité.

L'intersection de ces ouverts denses pour une suite  $(\varepsilon_n)$  tendant vers 0 est l'ensemble résiduel annoncé.  $\square$

**Conclusion de la démonstration du théorème 1.3 dans le cas des surfaces :** Nous avons vu qu'il existe une partie résiduelle  $\mathcal{G}_0$  de  $\text{Diff}_\omega^1(S)$  formée de difféomorphismes transitifs pour lesquels les orbites périodiques hyperboliques sont denses dans  $S$ . Puisque nous sommes en dimension 2, les orbites périodiques hyperboliques sont des selles de même indice. Il suffit de voir que pour  $f$  générique, elles sont deux à deux homocliniquement reliées<sup>10</sup>.

Pour  $n \geq 1$ , voyons que l'ensemble  $O_n$  des difféomorphismes dont les orbites périodiques hyperboliques de période inférieure ou égale  $n$  sont deux à deux homocliniquement reliées contient un ouvert dense de  $\text{Diff}_\omega^1(S)$ . Comme il a été rappelé dans la preuve du corollaire 6.7, il existe un ouvert dense  $U_n \subset \text{Diff}_\omega^1(S)$  de difféomorphismes dont les orbites périodiques de période inférieure à  $n$  est fini ; le même argument montre que, quitte à restreindre  $U_n$ , ce nombre est localement constant, chacune des orbites peut être suivie localement continûment en restant, suivant le cas, elliptique ou hyperbolique. Pour deux orbites périodiques selles, la propriété d'être homocliniquement reliées est ouverte : on en déduit que  $O_n \cap U_n$  est un ouvert. Il nous reste à montrer la densité de  $O_n \cap U_n$ . Pour cela fixons  $f \in U_n$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $f$  dans  $U_n$  sur lequel toute orbite périodique de période inférieure à  $n$  peut être suivie continûment. Soient  $\gamma$  et  $\sigma$  deux orbites selles de période inférieure à  $n$  de  $f$ . Nous avons vu qu'il existe  $\tilde{f} \in \mathcal{V}$  arbitrairement proche de  $f$  qui est transitif. Le connecting lemma de Hayashi (dans le cas conservatif) permet de créer une intersection transverse entre la variété instable de  $\gamma$  et la variété stable de  $\sigma$ , par une petite perturbation  $\hat{f} \in \mathcal{V}$  de  $\tilde{f}$ . Une nouvelle perturbation  $\bar{f} \in \mathcal{V}$  de  $\hat{f}$  est transitive tout en conservant cette intersection transverse. Le connecting lemma d'Hayashi permet enfin de créer l'autre intersection transverse afin de lier homocliniquement  $\gamma$  et  $\sigma$ . En procédant ainsi pour toutes les paires de selles de période inférieure à  $n$ , on obtient la densité de  $O_n$ .

L'intersection  $\mathcal{G}_1$  des  $O_n$  est donc un ensemble résiduel. Pour tout  $f \in \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ , toutes les orbites périodiques hyperboliques sont homocliniquement reliées et leur union est dense, chacune des classes homoclines coïncide donc avec  $S$ .  $\square$

### 6.3 Exposants stables et décomposition dominée : preuve du théorème 1.4

Soit  $r \geq 1$  et  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  d'une variété compacte  $M$  qui préserve une forme volume  $\omega$ . La démonstration suit facilement du lemme 6.8 suivant et du théorème 6.4 qui est une adaptation directe d'un résultat de [BDP] :

**Lemme 6.8.** *Soit  $r \geq 1$  et  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  d'une variété compacte  $M$  qui préserve une forme volume  $\omega$ . Il existe alors une suite  $(g_n)$  de difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $M$ , convergeant en topologie  $C^1$  vers  $f$ , et pour tout  $n$  un point périodique  $p_n \in M$  de  $g_n$  tel que la classe homocline  $H(p_n, g_n)$  soit non-triviale<sup>11</sup> et  $\frac{1}{n}$  dense dans  $M$ .*

<sup>10</sup>Deux orbites périodiques selle de même indice sont *homocliniquement reliées* si la variété stable de chacune d'entre elles coupe transversalement la variété instable de l'autre. Dans ce cas, leurs classes homoclines coïncident.

<sup>11</sup>La classe homocline d'une orbite périodique  $p$  est dite non-triviale si elle n'est pas réduite à l'orbite périodique elle-même.

**Théorème 6.4** ([BDP], Theorem 5). *Soit  $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$ . Alors :*

1. *ou bien il existe un  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$  et  $\ell \geq 1$  tels que, pour tout difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$ , toute classe homocline non-triviale  $H(p, g)$  admet une décomposition  $\ell$ -dominée ;*
2. *ou bien pour tout  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$ , il existe  $g \in \mathcal{V}$  et un point périodique  $p \in M$  pour  $g$  de période  $n$  tel que  $Dg^n(p) = \text{Id}$ .*

Avant de montrer le lemme 6.8 et d'expliquer comment obtenir cette adaptation de [BDP], nous terminons la preuve du théorème 1.4.

**Démonstration du théorème 1.4 :** Considérons  $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$ . D'après le théorème 6.4,

- ou bien (d'après l'item 2)  $f$  est approché en topologie  $C^1$  par une suite de difféomorphismes  $g$  de classe  $C^r$  possédant une orbite périodique  $p$  de période  $n$  telle que  $Dg^n(p) = \text{Id}$  ;
- ou bien (item 1) il existe un  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$  et  $\ell \geq 1$  tels que, pour tout difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$ , toute classe homocline non-triviale  $H(p, g)$  admet une décomposition  $\ell$ -dominée. Considérons des suites (données par le lemme 6.8) :  $(g_n)$  et  $(p_n)$ . Pour  $n$  assez grand,  $g_n$  est dans le voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$ . La classe homocline  $H(p_n, g_n)$  est donc  $\ell$ -dominée. La suite  $(H(p_n, g_n))$  converge vers  $M$  pour la topologie de Hausdorff et la suite  $(g_n)$  vers  $f$  en topologie  $C^1$ . La  $\ell$ -domination passe à la limite (voir [BDP, Corollary 1.5]) ce qui montre que  $M$  possède une décomposition  $\ell$ -dominée pour  $f$ .

Nous avons ainsi montré la dichotomie annoncée par le théorème 1.4. □

Pour montrer le lemme 6.8, nous utiliserons les lemmes suivants :

**Lemme 6.9.** *Soient  $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  et  $\gamma$  une orbite périodique et  $x$  un point de  $M$ . Pour tout  $\eta > 0$ , il existe un difféomorphisme  $g \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $f$  et une orbite périodique  $\sigma$  de  $g$  qui contient  $\gamma \cup \{x\}$  dans son  $\eta$ -voisinage.*

**Démonstration :** Notons  $m$  la période de  $\gamma$ . Commençons par perturber  $f$  en difféomorphisme  $\tilde{f} \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $f$  qui vérifie les hypothèses du théorème 1.2 (les orbites périodiques sont hyperboliques ou elliptiques). Soit  $y$  un point proche de  $\gamma$  qui n'est pas sur l'orbite positive de  $x$ . Remarquons que l'on a :  $x \dashv_{\tilde{f}} y$  (voir le lemme 5.1). D'après le théorème 1.2 et la remarque 1.1, il existe un difféomorphisme  $h \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $\tilde{f}$  (et donc de  $f$ ) tel que  $y$  appartient à l'orbite positive de  $x$ . Le segment d'orbite joignant  $x$  à  $y$  étant de longueur plus grande que  $m$  (sa longueur tend vers  $\infty$  lorsque  $h$  tend vers  $f$ ), il contient les points  $h^{-m}(y), \dots, y$  qui sont arbitrairement proches des points de  $\gamma$ . Puisque l'on a  $x \dashv_h x$ , il existe un difféomorphisme  $g \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $h$  tel que le point  $x$  est périodique. L'orbite  $\sigma$  de  $x$  par  $g$  passe arbitrairement près de tout point du segment  $x, h(x) \dots, y$  et contient donc dans son  $\eta$ -voisinage à la fois le point  $x$  et l'orbite  $\gamma$ . On conclut en remarquant que, par construction, le difféomorphisme  $g$  est arbitrairement  $C^1$ -proche de  $f$ . □

**Lemme 6.10.** *Soient  $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  et  $\sigma$  une orbite périodique hyperbolique. Alors, il existe  $g \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $f$  tel que la classe homocline de  $\sigma_g$  est non-triviale, où  $\sigma_g$  est la continuation hyperbolique de  $\sigma$  pour  $g$ .*

**Démonstration :** Quitte à perturber  $f$ , on peut supposer qu'il vérifie les hypothèses du théorème 1.2. Soit  $\mathcal{U}$  un petit  $C^1$ -voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}_\omega^r(M)$  sur lequel la continuation de  $\sigma$

est bien définie. Soit  $N$  l'entier associé à ce voisinage par le théorème 2.1. Quitte à réduire  $\mathcal{U}$ , on peut supposer que  $N$  est supérieur à la période de  $\sigma$ . On reprend la preuve du théorème 1.2 : considérons une famille de boîtes de perturbation  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{N_0}(f)} (\mathcal{E}(\gamma) \cup \mathcal{S}(\gamma))$  pour  $(f, \mathcal{U})$  comme aux sections 4.3 et 6.2 (les boîtes de  $\mathcal{E}(\gamma)$  et de  $\mathcal{S}(\gamma)$  correspondent aux voisinages des orbites périodiques hyperboliques ou elliptiques de basse période). Puisque  $\sigma$  est de période inférieure ou égale à  $N$ , elle est disjointe des boîtes de perturbation.

On choisit deux points  $x$  et  $y$  de  $W_\delta^u(\sigma)$  et  $W_\delta^s(\sigma)$  contenus dans le voisinage  $W(\sigma)$  de  $\sigma$ , tels que les itérés négatifs de  $x$  et positifs de  $y$  par  $f$  restent dans  $W(\gamma)$ . Il existe deux entiers  $n_x, n_y \geq 1$  tels que les points  $x_1 = f^{n_x}(x)$  et  $y_1 = f^{-n_y}(y)$  ne soient contenus dans aucune boîte de perturbation de  $\mathcal{B}$  et n'appartiennent à aucun ouvert  $V(\gamma)$ . Puisque  $x_1 \dashv y_1$  (lemme 5.1), il existe une pseudo-orbite, joignant  $x_1$  à  $y_1$ , qui préserve les quadrillages de boîtes de  $\mathcal{B}$  et n'ayant aucun saut en dehors de ces boîtes (proposition 4.8). On la complète par les segments d'orbite joignant  $x$  à  $x_1$  et  $y_1$  à  $y$  pour obtenir une pseudo-orbite qui préserve les quadrillages de boîtes de  $\mathcal{B}$  et n'ayant aucun saut en dehors de ces boîtes joignant  $x$  à  $y$ . Comme pour la section 4.6, on supprime boîte par boîte tous les sauts de cette pseudo-orbite et on obtient un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  tel que  $y$  est sur l'orbite positive de  $x$  et coïncidant avec  $f$  sur  $W(\sigma)$ .

Comme les itérés négatifs de  $x$  et positifs de  $y$  par  $f$  restent dans  $W(\gamma)$ , ils n'ont pas été modifiés par la perturbation. Les points  $x$  et  $y$  appartiennent donc aux variétés instable et stable de  $\sigma_g$  respectivement. Ces variétés s'intersectent donc le long de l'orbite de  $x$ . On peut rendre ces intersections transverses par une nouvelle petite perturbation.  $\square$

**Démonstration du lemme 6.8 :** En appliquant un nombre fini de fois le lemme 6.9 aux points  $\{x_i\}_{i \in I}$  d'une famille  $\frac{1}{4n}$ -dense dans  $M$  on montre qu'il existe un difféomorphisme  $h_n \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  arbitrairement  $C^1$ -proche de  $f$  et possédant une orbite périodique  $\alpha_n$  passant arbitrairement proche des points  $x_i$ , et donc  $\frac{1}{3n}$ -dense dans  $M$ . Une nouvelle  $C^1$ -petite perturbation  $\phi_n \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  de  $h_n$  (donnée par le lemme de Franks si  $\dim M \geq 3$  et par la proposition 6.5 dans le cas des surfaces) permet alors de créer une orbite périodique hyperbolique  $\beta_n$  de  $\phi_n$ , contenant  $\alpha_n$  dans son  $\frac{1}{3n}$ -voisinage : en particulier,  $\beta_n$  est  $\frac{2}{3n}$ -dense dans  $M$ .

Pour terminer la preuve du lemme 6.8, il suffit à présent de créer, à l'aide du lemme 6.10 une intersection homocline transverse entre les variétés invariantes de  $\beta_n$  de façon que la classe homocline de cette orbite soit non-triviale.  $\square$

Il reste à expliquer comment obtenir le théorème 6.4 à partir de [BDP]. La démonstration utilise deux résultats. Le premier est le lemme de Franks (proposition 6.1). Le second est la proposition suivante de [BDP] que nous traduisons dans le langage des classes homoclines.

**Proposition 6.11 ([BDP], Proposition 7.3).** *Soient  $K > 0$  et  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}_\omega^1(M)$  un ouvert tels que, pour tout  $f \in \mathcal{U}$ , les normes de  $Df$  et  $Df^{-1}$  sont uniformément bornées par  $K$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $\ell > 0$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{U}$  et toute classe homocline  $H(p, f)$  non-triviale, l'une au moins des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- $H(p, f)$  admet une décomposition  $\ell$ -dominée ;
- il existe une orbite périodique  $\gamma$  homocliniquement reliée à  $p$  et une  $\varepsilon$ -perturbation  $(B_x)_{x \in \gamma}$  de la différentielle de  $f$  le long de  $\gamma$  telles que le produit des applications linéaires  $B_x$  le long de  $\gamma$  est l'identité.

**Démonstration du théorème 6.4 :** Soit  $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$  un difféomorphisme ne vérifiant pas l'item (1) du théorème 6.4. Fixons un  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{V} \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$  de  $f$ . Quitte à réduire  $\mathcal{V}$ , on peut supposer que les normes de  $Dg$  et  $Dg^{-1}$  sont uniformément bornées par une constante  $K$

pour  $g \in \mathcal{V}$ . Soient  $\mathcal{O}$  et  $\varepsilon > 0$  le voisinage de  $f$  et la constante donnés par le lemme de Franks appliqué à l'ouvert  $\mathcal{V}$ , et  $\ell$  l'entier associé à la constante  $K$ , l'ouvert  $\mathcal{V}$  et  $\varepsilon$  par la proposition 6.11.

Comme  $f$  ne vérifie pas l'item (1) du théorème 6.4, il existe  $\tilde{f} \in \mathcal{O}$  et une classe homocline  $H(p, \tilde{f})$  qui ne possède aucune décomposition  $\ell$ -dominée. D'après la proposition 6.11, il existe donc une orbite périodique  $\gamma$  de  $\tilde{f}$  et une  $\varepsilon$ -perturbation  $(B_x)_{x \in \gamma}$  de la différentielle de  $\tilde{f}$  le long de  $\gamma$  telle que le produit des applications linéaires  $B_x$  le long de  $\gamma$  soit l'identité. Finalement, comme  $\tilde{f}$  appartient à  $\mathcal{O}$ , le lemme de Franks permet de réaliser la perturbation  $(B_x)$  des différentielles par une perturbation  $g \in \mathcal{V}$  de  $\tilde{f}$  : l'ensemble  $\gamma$  est une orbite périodique de  $g$ , dont la différentielle à la période est l'identité.  $\square$

## A Le Connecting Lemma

Dans cet appendice, nous expliquons comment montrer le théorème 2.1. Cet énoncé n'existant pas sous cette forme dans la littérature (et puisqu'il est difficile d'expliquer au lecteur comment modifier certaines hypothèses dans des preuves longues et techniques), nous avons choisi d'en redonner une preuve complète qui est cependant très proche de [Ar<sub>1</sub>, pages 359–368].

### A.1 Cubes perturbatifs uniformes

L'une des étapes clef de la démonstration est un résultat perturbatif (que [Ar<sub>1</sub>] attribue pour l'essentiel à [Pu, PR]).

Étant donnée une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$ , nous appellerons *cube* de la carte tout cube  $C$  plongé dans  $V$  tel que  $\varphi(C)$  soit obtenu à partir du cube standard  $[-1, 1]^d$  par une homothétie-translation. Nous noterons alors  $(1 + \varepsilon)C$  le cube de même centre qui lui est homothétique de rapport  $(1 + \varepsilon)$  (dans les coordonnées données par  $\varphi$ ). Pour un cube  $C$  de la carte  $\varphi$ , le cube  $(1 + \varepsilon)C$  est bien défini si  $\varepsilon$  est suffisamment petit. Par la suite (en particulier lorsque nous considérerons les cubes perturbatifs définis ci-après) nous supposerons implicitement que le cube  $3C$  est encore un cube de la carte  $\varphi$ .

Soit  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage d'un difféomorphisme  $f$ . Fixons  $N \in \mathbb{N}$  et des constantes  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$ . On dira que  $C$  est un *cube*  $(f, \mathcal{U}, \varphi, N, \varepsilon, \eta)$ -perturbatif si pour toute paire  $(p, q)$  de points du cube  $C$  il existe  $g \in \mathcal{U}$  qui a les propriétés suivantes :

- $g$  coïncide avec  $f$  hors de  $\bigcup_{t=0}^{N-1} f^t((1 + 2\varepsilon)C)$  ;
- $g^N(p) = f^N(q)$  ;
- pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ ,  $g^t(p)$  appartient à  $f^t((1 + \varepsilon)C)$  ;
- pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ ,  $g$  ne diffère de  $f$  sur  $f^t((1 + 2\varepsilon)C)$  que sur une boule centrée en  $g^t(p \in f^t((1 + \varepsilon)C))$  et de rayon inférieur à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((1 + \varepsilon)C)$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C)$ .

**Théorème A.1 ([Ar<sub>1</sub>], théorème 22 et son addendum).** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  et  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$ . Fixons deux nombres  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$ .*

*Pour tout point  $p_0 \in M$  non-périodique, il existe un entier  $N$  et, au voisinage de  $p_0$ , une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que tout cube  $C$  de  $V$  est un cube  $(f, \mathcal{U}, \varphi, N, \varepsilon, \eta)$ -perturbatif.*

Pour la version annoncée du connecting lemma que nous utilisons ici, nous avons besoin d'une version très légèrement plus forte de cet énoncé, mais dont la preuve est, en fait, contenue



dans celle donnée dans [Ar<sub>1</sub>]. Plus précisément nous avons besoin de l'uniformité de l'entier  $N$  et d'une formulation qui soit aussi valable au voisinage des points périodiques.

**Théorème A.2.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  et  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$ . Fixons deux nombres  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$ .*

*Il existe un entier  $N$  et, au voisinage de tout point  $p_0 \in M$ , une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifiant la propriété suivante :*

*Tout cube  $C$  de  $V$  tel que le cube  $(1 + 2\varepsilon)C$  est disjoint de ses  $N$  premiers itérés est un cube  $(f, \mathcal{U}, \varphi, N, \varepsilon, \eta)$ -perturbatif.*

Appelons *forme de cube* de  $\mathbb{R}^d$  la donnée d'une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée)  $b$  de  $\mathbb{R}^d$ . Le cube standard  $C(b)$  de forme  $b$  sera l'image du cube standard de  $\mathbb{R}^d$  par l'application linéaire envoyant la base standard de  $\mathbb{R}^d$  sur  $b$ .

Le théorème A.1 s'appuie essentiellement sur la proposition suivante (due initialement à [PR]) :

**Proposition A.1 (voir [Ar<sub>1</sub>], proposition 26).** *Soit  $(T_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $GL(\mathbb{R}, d)$ . Fixons  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$ . Il existe  $N$  et il existe une forme de cube  $b$  de  $\mathbb{R}^d$  tels que pour toute paire  $(p, q)$  de points du cube  $C(b)$ , il existe une suite  $(x_t)_{t \in \{0, \dots, N\}}$  de points de  $(1 + \varepsilon)C(b)$  telle que  $x_0 = p$  et  $x_N = q$  et, pour tout  $t \in \{1, \dots, N\}$ , la distance  $d(T_t(x_{t-1}), T_t(x_t))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $T_t((\varepsilon + 1)C(b))$  et le complémentaire de  $T_t((1 + 2\varepsilon)C(b))$ .*

Dans la démonstration du théorème A.1, la suite  $(T_t)$  de la proposition A.1, correspond à la suite  $(Df^t(p_0))$  exprimée dans des bases orthonormées de  $T_{p_0}M$  et  $T_{f^t(p_0)}M$ .

Remarquons que quitte à modifier légèrement les constantes  $\varepsilon$  et  $\eta$ , la conclusion de la proposition reste vérifiée par des suites  $(\tilde{T}_t)$  proches de  $(T_t)$  pour la topologie produit (il suffit bien sûr que les  $N$  premiers termes  $\tilde{T}_t$  soient proches des  $T_t$  correspondants).

Le théorème A.2 a la même démonstration que le théorème A.1, à partir d'une version uniforme de la proposition A.1 :

**Proposition A.2.** *Soient  $K > 0$  et  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$  fixés. Il existe  $N$  tel que, pour toute suite  $(T_t)_{t \in \{0, \dots, N\}}$  avec  $T_t \in GL(\mathbb{R}, d)$  vérifiant  $\|T_t \circ T_{t-1}^{-1}\| \leq K$  et  $\|T_{t-1} \circ T_t^{-1}\| \leq K$  on a la propriété suivante :*

*il existe une forme de cube  $b$  de  $\mathbb{R}^d$  telle que, pour toute paire  $(p, q)$  de points du cube  $C(b)$ , il existe une suite  $(x_t)_{t \in \{0, \dots, N\}}$  de points de  $(1 + \varepsilon)C(b)$  telle que  $x_0 = p$  et  $x_N = q$  et, pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , la distance  $d(f^t(x_t), f^t(x_{t+1}))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((1 + \varepsilon)C(b))$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C(b))$ .*

(Cette version uniforme se déduit de la proposition A.1 par compacité de l'ensemble des suites de matrices bornées et d'inverses bornés par  $K$ ).

On en déduit la proposition suivante qui avec le lemme A.4 énoncé ci-dessous implique le théorème A.2. C'est cet énoncé que nous utiliserons finalement par la suite.

**Proposition A.3.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  et  $\mathcal{U}$  un  $C^1$ -voisinage de  $f$ . Fixons deux nombres  $\varepsilon, \eta \in ]0, 1[$ . Il existe un entier  $N$  et, au voisinage de tout point  $p_0 \in M$ , une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que pour tout cube  $C$  de  $V$  disjoint de ses  $N$  premiers itérés et toute paire  $(a, b)$  de points de  $C$ , il existe une suite  $(a_t)_{t \in \{0, \dots, N\}}$  de points de  $(1 + \varepsilon)C$  telle que  $a_0 = a$  et  $a_N = b$  et, pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , la distance  $d(f^t(a_t), f^t(a_{t+1}))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((\varepsilon + 1)C)$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C)$ .*

Nous utiliserons également un lemme de perturbation classique.

**Lemme A.4 (Voir [Ar<sub>2</sub>], proposition 5.1.1).** Soit  $M$  une variété compacte  $M$  et  $\mathcal{V}$  un voisinage de l'identité dans  $\text{Diff}^1(M)$ . Il existe des constantes  $\lambda > 1$  et  $\delta > 0$  telles que pour tous points  $p, q$  de  $M$  satisfaisant  $d(p, q) < \delta$ , il existe une perturbation  $h$  de l'identité, à support dans la boule de centre  $p$  et de rayon  $\lambda d(p, q)$ , telle que  $h \circ f$  appartienne à  $\mathcal{U}$  et  $h(p) = q$ .

**Remarque A.5.** La  $C^1$ -perturbation  $h$  de l'identité peut être choisie de classe  $C^\infty$ . De plus si  $M$  est munie d'une forme volume  $\omega$ , alors on peut imposer que  $h$  préserve  $\omega$ .

## A.2 Fin de la preuve du connecting lemma

On commence par choisir quelques constantes. Nous allons devoir appliquer la proposition A.3 aux carreaux d'un quadrillage. Chaque perturbation peut déborder d'un carreau. Nous aurons donc besoin de majorer le nombre de carreaux adjacents à un carreau donné. Il existe une borne uniforme  $N^* = 4^d$  où  $d$  est la dimension de  $M$ .

Les supports des perturbations associées à des carreaux ne pourront se chevaucher que si les carreaux sont adjacents. Pour cela nous choisissons la constante  $\varepsilon$  de la proposition A.3 inférieure à  $\frac{1}{10}$  : pour tous carreaux  $C_1, C_2$  du quadrillage standard, si  $(1 + 2\varepsilon)C_1 \cap (1 + 2\varepsilon)C_2 \neq \emptyset$ , alors  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ .

Au voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$ , on peut associer un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'identité dans  $\text{Diff}^1(M)$  avec la propriété suivante : pour toute famille finie  $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$  de perturbations de l'identité, contenues dans  $\mathcal{V}$  et de supports deux à deux disjoints, le difféomorphisme  $g$ , qui coïncide avec  $f$  hors de l'union des supports des  $\psi_i$  et avec  $f \circ \psi_i$  sur le support de  $\psi_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , appartient à  $\mathcal{U}$ . Le lemme A.4 associe au voisinage  $\mathcal{V}$  des constantes  $\lambda > 1$  et  $\delta > 0$ . Nous fixons ensuite la constante  $\eta > 0$  de la proposition A.3 pour que

$$\frac{1}{\eta} > (6\lambda N^*)^{N^*+1}.$$

Ce choix sera justifié par la proposition A.9.

On applique alors la proposition A.3. Ceci définit l'entier  $N$ . Pour tout point  $x = p_0$  de  $M$ , on obtient aussi une carte locale  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  en  $x$ . La carte locale  $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la restriction de  $\varphi$  à un voisinage  $U_x$  de  $x$  sur lequel les applications  $f, \dots, f^N$  sont proches des différentielles  $Df(x), \dots, Df^N(x)$ .

**Remarque A.6.** On choisit  $U_x$  assez petit pour que l'on ait de plus que le diamètre de  $U_x$  et de ses  $N$  premiers itérés soit majoré par la constante  $\delta > 0$  du lemme A.4.

Soit  $\mathcal{C}$  un cube quadrillé de  $(U_x, \varphi)$  disjoint de ses  $N$  premiers itérés. Pour voir que c'est une boîte de perturbation pour  $(f, \mathcal{U})$ , nous considérons jusqu'à la fin de cette section, une suite de paires de points  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \{1, \dots, \ell\}}$  de  $\mathcal{C}$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , les points  $x_i$  et  $y_i$  appartiennent au même carreau de  $\mathcal{C}$ .

**Lemme A.7.** Il existe une sous-suite  $i_0 = 0, \dots, i_m$ , telle que pour tout  $n \in \{0, \dots, m-1\}$  les points  $a^n = x_{i_n}$  et  $b^n = y_{i_{n+1}-1}$  appartiennent à un même carreau  $C_n$ . De même, les points  $a^m = x_{i_m}$  et  $b^m = y_\ell$  appartiennent à un même carreau  $C_m$ . De plus, si  $n \neq n'$  alors  $C_n \neq C_{n'}$ .

**Démonstration :** On construit les suites  $(i_n)$  et  $(C_n)$  par récurrence sur  $n$ . On pose  $i_0 = 0$  et on appelle  $C_0$  le carreau contenant  $x_{i_0}$ . Soit  $k_0 \geq i_0$  le plus grand indice tel que les points  $x_{k_0}$  et  $y_{k_0}$  appartiennent à  $C_0$ . On pose  $i_1 = k_0 + 1$  et on appelle  $C_1$  le carreau contenant  $x_{i_1}$  et  $y_{i_1}$ . Nécessairement,  $C_1$  est différent de  $C_0$ .

Supposons maintenant que  $i_n$  et  $C_n$  ont été définis. Soit  $k_n$  le plus grand indice tel que les points  $x_{k_n}$  et  $y_{k_n}$  appartiennent à  $C_n$ . On pose  $i_{n+1} = k_n + 1$  et on appelle  $C_{n+1}$  les carreaux contenant  $x_{i_n}$  et  $y_{i_n}$ . Nécessairement,  $C_{n+1}$  est différent des carreaux  $C_0, \dots, C_n$ .  $\square$

D'après la proposition A.3, pour tout  $n \in \{0, \dots, m\}$ , il existe une suite  $a_0^n = a^n, \dots, a_N^n = b^n$  de points dans  $(1 + \varepsilon)C_n$  telle que pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , la distance  $d(f^t(a_t^n), f^t(a_{t+1}^n))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((1 + \varepsilon)C_n)$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C_n)$ .

L'idée naïve (qui ne marche pas) est de considérer des perturbations  $\varphi_t^n$  à support dans  $f^t(\mathcal{C})$  telles que  $\varphi_t^n(f^t(a_t^n)) = f^t(a_{t+1}^n)$  et de remplacer, sur ces supports,  $f$  par  $f \circ \varphi_t^n$ . Mais en général, les supports des perturbation  $\varphi_t^n$  s'intersectent. Remarquons que si les supports de  $\varphi_t^n$  et  $\varphi_t^{n'}$  avec  $n < n'$  s'intersectent, les points  $f^t(a_t^n)$  et  $f^t(a_{t+1}^{n'})$  sont proches. Dans ce cas, il semble avantageux de considérer une nouvelle perturbation à support dans  $f^t(\mathcal{C})$  envoyant  $f^t(a_t^n)$  sur  $f^t(a_{t+1}^{n'})$  et d'oublier les points intermédiaires entre  $a_t^n$  et  $a_{t+1}^{n'}$  dans la suite :

$$a_0^0 = a^0, \dots, a_t^0, \dots, a_N^0, a_0^1, \dots, a_N^1, \dots, a_0^m, \dots, a_N^m = b^m.$$

Le phénomène pouvant se répéter plusieurs fois, le lemme suivant produit une nouvelle suite plus courte pour laquelle les supports des perturbations sont deux à deux disjoints.

**Lemme A.8.** *Soit  $a_0^0 = a^0, \dots, a_t^0, \dots, a_N^0, a_0^1, \dots, a_N^1, \dots, a_0^m, \dots, a_N^m = b^m$  une suite telle que pour tout  $n \in \{0, \dots, m\}$ , les points  $a_0^n, \dots, a_N^n$  appartiennent à un même cube  $(1 + \varepsilon)C_n$ , les cubes  $C_n$  étant deux à deux distincts, et telle que pour tout  $n \in \{0, \dots, m\}$  et  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , la distance  $d(f^t(a_t^n), f^t(a_{t+1}^n))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((1 + \varepsilon)C_n)$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C_n)$ .*

*Alors, il existe  $s \in \{0, \dots, m\}$ , et une suite croissante (non-nécessairement strictement croissante)  $1 = \nu(0), \dots, \nu(s(N + 1) + N) = m$  telle que :*

1. *Pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$ , on a  $\nu(k(N + 1)) = \nu(k(N + 1) - 1) + 1$ .*
2. *Pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , les boules  $B_t^k$  centrées aux points  $f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)})$ , de rayon  $\lambda d(f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}), f^t(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)}))$ , sont deux à deux disjointes, pour  $k \in \{0, \dots, s\}$ .*
3. *Pour tout  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , les boules  $B_t^k$  sont contenues dans  $f^t(\mathcal{C})$ .*

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 2.1. La démonstration du lemme A.8 est reportée à la section A.4. Elle utilise la proposition A.9 de la section A.3

**Démonstration du théorème 2.1 :** De la suite  $(x_i, y_i)_{i \in \{1, \dots, \ell\}}$ , le lemme A.7 a extrait deux sous-suites  $(a^n)_{n \in \{0, \dots, m\}}$  et  $(b^n)_{n \in \{0, \dots, m\}}$  qui nous ont permis d'obtenir la suite  $a_0^0 = a^0, \dots, a_t^0, \dots, a_N^0, a_0^1, \dots, a_N^1, \dots, a_0^m, \dots, a_N^m = b^\ell$ . Nous appliquons ensuite le lemme A.8 qui en extrait la suite

$$a_0^{\nu(0)} = a^0 = x_1, a_1^{\nu(1)}, \dots, a_N^{\nu(N)}, a_0^{\nu(N+1)}, \dots, a_N^{\nu(2N+1)}, \dots, a_0^{\nu(s(N+1))}, \dots, a_N^{\nu(s(N+1)+N)} = y_\ell.$$

L'item 3 du lemme A.8 et la remarque A.6 entraînent que les boules  $B_t^k$  sont de diamètre inférieur à  $\delta$ . Grâce au lemme A.4, il existe alors des difféomorphismes  $\psi_t^k$  avec  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$  et  $k \in \{0, \dots, s\}$ , appartenant à  $\mathcal{V}$  et à support dans la boule  $B_t^k$  définie au lemme A.8 tels que  $\psi_t^k(f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)})) = f^t(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)})$ . D'après le lemme A.8, les supports des  $\psi_t^k$  sont donc deux à deux disjoints. Notons  $g$  le difféomorphisme coïncidant avec  $f$  hors de l'union des supports des  $\psi_t^k$  et avec  $f \circ \psi_t^k$  sur chaque  $B_t^k$ . Par le choix de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{U}$ , le difféomorphisme  $g$  appartient à  $\mathcal{U}$ . Par construction, pour tout  $k \in \{0, \dots, s\}$  et  $t \in \{0, \dots, N - 1\}$ , on a  $g^t(a_0^{\nu(k(N+1))}) = f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)})$ .

Voyons que  $g$  est la perturbation annoncée : on rappelle que  $a_0^{\nu(k(N+1))} = a^{\nu(k(N+1))} = x_{i_{n_k}}$  et  $a_N^{\nu(k(N+1)+N)} = b^{\nu(k(N+1)+N)} = y_{i_{m_k}}$  avec  $n_k = i_{\nu(k(N+1))}$  et  $m_k = i_{\nu(k(N+1)+N)+1} - 1$ .  
Montrons  $n_{k+1} = m_k + 1$  : d'après l'item 1 du lemme A.8,

$$n_{k+1} = i_{\nu((k+1)(N+1))} = i_{\nu((k+1)(N+1)-1)+1} = i_{\nu(k(N+1)+N)+1} = m_k + 1.$$

Les couples  $(x_{n_k}, y_{m_k})_{k \in \{0, \dots, s\}}$  et la suite  $n_0 = 1 < n_1 < \dots < n_s \leq \ell$  vérifient donc :

1.  $x_{n_0} = x_1$  et  $y_{m_s} = y_\ell$ .
2.  $g^N(x_{n_r}) = f^N(y_{m_r}) = f^N(y_{n_{r+1}-1})$  pour  $r \neq s$  et  $g^N(x_{n_s}) = f^N(y_\ell)$ .

Ceci montre que  $\mathcal{C}$  est une boîte de perturbation. □

### A.3 Regroupement de points proximaux

Nous énonçons un résultat général de regroupement de points qui sera utilisé pour la démonstration du lemme A.8.

**Proposition A.9.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $\{x_i\}_{i \in I}$  un ensemble de points et pour chaque  $i \in I$  un réel  $r_i > 0$ . On suppose qu'il existe des constantes  $K > 0$ ,  $\lambda > 1$  et un entier  $N^*$  tels que*

- pour tout  $i \in I$ , le cardinal de l'ensemble  $\{i' \in I, B(x_i, Kr_i) \cap B(x_{i'}, Kr_{i'}) \neq \emptyset\}$  est majoré par  $N^*$ .
- $(6\lambda N^*)^{N^*+1} < K$

Alors, il existe une partition de  $I$  en classes  $\mathcal{E} = \{E_j, j \in J\}$ , telle que l'on ait la propriété suivante :

Pour tout  $j \in J$ , notons  $\delta_{1,j}$  le diamètre de l'ensemble  $\{x_i, i \in E_j\}$ , et  $\delta_{2,j} = \sup\{r_i, i \in E_j\}$ . Finalement notons  $\delta_j = \delta_{1,j} + \delta_{2,j}$ . Soit  $B_j$  l'union des boules  $B(x_i, \lambda\delta_j)$ , pour  $i \in E_j$ . Alors les  $B_j$  sont deux à deux disjoints.

De plus pour tout  $j \in J$ , il existe  $i_0 \in E_j$  tel que l'ensemble  $B_j$  est contenu dans la boule  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ .

**Démonstration :** Nous allons définir par récurrence sur  $k$  des partitions  $\mathcal{E}^k = \{E_j^k, j \in J^k\}$  de  $I$ . Ceci nous permet d'introduire, pour tout  $j \in J^k$ , le diamètre  $\delta_{1,j}^k$  de l'ensemble  $\{x_i, i \in E_j^k\}$ . On notera aussi  $\delta_{2,j}^k = \sup\{r_i, i \in E_j^k\}$  et  $\delta_j^k = \delta_{1,j}^k + \delta_{2,j}^k$ . Finalement on notera  $B_j^k$  l'union des boules  $B(x_i, \lambda\delta_j^k)$ , pour  $i \in E_j^k$ .

La partition  $\mathcal{E}^0$  est la partition en singleton  $\{\{j\}, j \in I\}$ , c'est-à-dire que  $J^0 = I$ . On a donc  $\delta_j^0 = r_j$ , pour tout  $j \in J^0 = I$ .

Supposons la partition  $\mathcal{E}^k$  construite. Nous dirons que  $x_{i_1}$  et  $x_{i_2}$  sont  $k+1$ -adjacents s'il existe une suite finie  $j_1, \dots, j_\ell \in J^k$  telle que  $x_{i_1} \in E_{j_1}^k$ ,  $x_{i_2} \in E_{j_\ell}^k$  et, pour tout  $s \in \{1, \dots, \ell-1\}$ , on ait  $B_{j_s}^k \cap B_{j_{s+1}}^k \neq \emptyset$ . La relation de  $k+1$ -adjacence est une relation d'équivalence, qui est clairement plus grossière que la  $k$ -adjacence : tout classe de  $k$ -adjacence est incluse dans une classe de  $k+1$ -adjacence.

On note  $\mathcal{E}^{k+1}$  la partition de  $I$  induite par la relation de  $k+1$ -adjacence. La proposition A.9 est une conséquence des lemmes suivants : le lemme A.14 montre que la partition  $\mathcal{E}^{N^*}$  produit des ensembles  $(B_j^{N^*})_{j \in J^{N^*}}$  disjoints. Les lemmes A.10 et A.12 entraînent, pour tout  $j \in J^{N^*}$ , l'existence d'un indice  $i_0 \in E_j^{N^*}$  tel que  $B_j^{N^*}$  est contenu dans  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ . □

**Lemme A.10.** Soient  $k \in \{0, \dots, N^*\}$  et  $j \in J^k$ . Supposons que l'on a

$$\delta_{1,j}^k \leq (6\lambda N^*)^k \delta_{2,j}^k,$$

et que le cardinal de  $E_j^k$  est fini. Soit  $i_0 \in E_j^k$  tel que  $r_{i_0} = \delta_{2,j}^k$  (ceci est possible puisque  $\delta_{2,j}^k$  est la borne supérieure d'un ensemble fini).

Alors, le diamètre de  $B_j^k$  est majoré par  $6\lambda (6\lambda N^*)^k r_{i_0}$ . En conséquence  $B_j^k$  est inclus dans la boule  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ .

**Démonstration :** En effet si  $i \in E_j^k$  on a  $d(x_i, x_{i_0}) \leq \delta_{1,j}^k$ .

La boule  $B(x_i, \lambda\delta_j^k)$  est donc incluse dans la boule  $B(x_{i_0}, \delta_{1,j}^k + \lambda\delta_j^k)$ . Or,

$$\delta_{1,j}^k + \lambda\delta_j^k = (1 + \lambda)\delta_{1,j}^k + \lambda\delta_{2,j}^k \leq \left[ (1 + \lambda) (6\lambda N^*)^k + \lambda \right] \delta_{2,j}^k \leq \left[ (1 + \lambda) (6\lambda N^*)^k + \lambda \right] r_{i_0}.$$

En particulier  $B_j^k$  est inclus dans la boule  $B\left(x_{i_0}, \left[ (1 + \lambda) (6\lambda N^*)^k + \lambda \right] r_{i_0}\right)$  et donc :

$$\text{diam}(B_j^k) \leq 2 \left[ (1 + \lambda) (6\lambda N^*)^k + \lambda \right] r_{i_0}.$$

En remarquant que  $1 < \lambda$  et que  $1 < (6\lambda N^*)^k$  on peut majorer  $2 \left[ (1 + \lambda) (6\lambda N^*)^k + \lambda \right] r_{i_0}$  par  $6\lambda (6\lambda N^*)^k r_{i_0}$ .

D'autre part notre choix de  $K$  implique  $K > 6\lambda (6\lambda N^*)^k$ . Par conséquent,  $\delta_{1,j}^k + \lambda\delta_j^k \leq Kr_{i_0}$  ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme A.11.** Soit  $k \in \{0, \dots, N^*\}$ . Supposons que pour tout  $j \in J^k$ , on a

$$\delta_{1,j}^k \leq (6\lambda N^*)^k \delta_{2,j}^k,$$

et que le cardinal de  $E_j^k$  est fini.

Alors, pour tout  $j \in J^{k+1}$ , le cardinal de  $E_j^{k+1}$  est majoré par  $N^*$ .

De plus, considérons  $i_0 \in E_j^{k+1}$  tel que  $\delta_{j,2}^{k+1} = r_{i_0}$ , alors pour tout  $i \in E_j^{k+1}$  on a :

$$x_i \in B(x_{i_0}, Kr_{i_0}).$$

**Démonstration :** Soit  $I'$  une partie finie de  $I$  contenue dans un  $E \in \mathcal{E}^{k+1}$ .

**Affirmation 2.** Il existe  $i_0 \in E$  tel que pour tout  $i \in I'$ , le point  $x_i$  est contenu dans  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$

**Démonstration :** Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer cette affirmation pour une partie finie de  $E$  contenant  $I'$ . Puisque les  $E_j^k$  sont des ensembles finis, quitte à rajouter à  $I'$  un nombre fini d'éléments de  $E$ , on peut supposer que :

- $I'$  est une réunion finie de classes  $(E_j^k)_{j \in J'}$  de  $\mathcal{E}^k$  ;
- pour tous  $i_1$  et  $i_2$  de  $I'$ , il existe une suite  $j_1, \dots, j_s$  de  $J'$  telle que, pour tout  $r \in \{1, \dots, s-1\}$ , on ait  $B_{j_r}^k \cap B_{j_{r+1}}^k \neq \emptyset$  et telle que  $i_1 \in E_{j_1}^k$  et  $i_2 \in E_{j_s}^k$ .

On choisit maintenant l'indice  $i_0 \in I'$  de façon à ce que  $r_{i_0}$  soit maximal parmi les  $r_i$ , avec  $i \in I'$ . Nous allons montrer par l'absurde que l'affirmation est vraie avec ce choix de  $i_0$ . Supposons donc par l'absurde qu'il existe  $i \in I'$  tel que  $x_i$  n'appartienne pas à  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ . On fixe une suite  $j_1, \dots, j_s$  de  $J'$  telle que, pour tout  $r \in \{1, \dots, s-1\}$ , on ait  $B_{j_r}^k \cap B_{j_{r+1}}^k \neq \emptyset$  et telle que  $i_0 \in E_{j_1}^k$  et  $i \in E_{j_s}^k$ .

Alors il existe un plus petit entier  $r$  tel que  $B_{j_r}^k$  n'est pas inclus dans  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ . Par conséquent  $B_{j_r}^k \cap B(x_{i_0}, Kr_{i_0}) \neq \emptyset$  : en effet, si  $r = 1$  le point  $x_{i_0}$  appartient à  $B_{j_1}^k$  par définition, et si  $r > 1$  alors  $B_{j_{r-1}}^k \subset B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ , par définition de  $r$ , et  $B_{j_r}^k \cap B_{j_{r-1}}^k \neq \emptyset$ , par choix de la suite  $j_1, \dots, j_s$ .

Remarquons que  $r \leq N^*$  : en effet l'union des  $E_{j_t}^k$  pour  $t \leq r$  est de cardinal inférieur à  $N^*$ , car pour tout  $t$ , l'ensemble  $B_{j_t}^k$  intersecte la boule  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ ; d'après le lemme A.10, il existe donc un point  $x_{i'}$  avec  $i' \in E_{j_t}^k$  tel que les boules  $B(x_{i'}, Kr_{i'})$  et  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$  se rencontrent mais ceci ne peut arriver plus de  $N^*$  fois d'après les hypothèses de la proposition A.9.

De plus le diamètre de chaque  $B_{j_t}^k$ , pour  $t \leq r$  est majoré par  $6\lambda(6\lambda N^*)^k r_{i_0}$  d'après le lemme A.10 et par définition de  $i_0$ .

De l'hypothèse  $B_{j_r}^k \cap B_{j_{r+1}}^k \neq \emptyset$ , on déduit alors que le diamètre de l'union des  $B_{j_t}^k$ , pour  $t \leq r$ , est majoré par  $6\lambda N^* (6\lambda N^*)^k r_{i_0}$  et donc inférieur à  $Kr_{i_0}$ . Ceci montre  $B_{j_r}^k \subset B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$  contredisant la définition de  $r$ , et donc notre hypothèse par l'absurde.  $\square$

On en déduit finalement que le cardinal de  $I'$  est majoré par  $N^*$ . Ceci implique que  $E$  lui-même est fini et de cardinal majoré par  $N^*$ . On peut donc appliquer le raisonnement précédent à l'ensemble  $I' = E$  et à tout indice  $i_0$  tel que  $r_{i_0} = \sup\{r_i, i \in E\}$ . On montre ainsi que  $\{x_i, i \in E\}$  est contenu dans  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ , ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

**Lemme A.12.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, N^* + 1\}$  et tout  $j \in J^k$ , on a*

$$\delta_{1,j}^k \leq (6\lambda N^*)^k \delta_{2,j}^k,$$

et le cardinal de  $E_j^k$  est borné par  $N^*$ .

**Démonstration :** La preuve se fait par récurrence sur  $k$ , sachant qu'elle est vérifiée pour  $k = 0$ . Supposons donc la propriété montrée pour  $k \leq N^*$ .

Soit  $j \in J^{k+1}$ . D'après le lemme A.11, le cardinal de  $E_j^{k+1}$  est majoré par  $N^*$ . Soit  $i_0 \in E_j^{k+1}$  tel que  $\delta_{2,j}^{k+1} = r_{i_0}$ . Le lemme A.10 montre que pour tout ensemble  $E_{j'}^k \in \mathcal{E}^k$  contenu dans  $E_j^{k+1}$ , le diamètre de  $B_{j'}^k$  est majoré par

$$\text{diam}(B_{j'}^k) \leq 6\lambda (6\lambda N^*)^k \delta_{2,j'}^k \leq 6\lambda (6\lambda N^*)^k r_{i_0}.$$

L'ensemble  $E_j^{k+1}$  est une classe de  $k + 1$ -adjacence qui regroupe au plus  $N^*$  classes  $E_{j'}^k$  telles que les  $B_{j'}^k$  sont de diamètre majoré par  $6\lambda (6\lambda N^*)^k r_{i_0}$ . Par conséquent, la réunion des  $B_{j'}^k$ , et donc a fortiori  $\{x_i, i \in E_j^{k+1}\}$ , est de diamètre  $\delta_{1,j}^{k+1}$  majoré par

$$6\lambda N^* (6\lambda N^*)^k r_{i_0} = (6\lambda N^*)^{k+1} r_{i_0}.$$

On conclut en remarquant que  $r_{i_0} = \delta_{2,j}^{k+1}$ , par définition.  $\square$

**Lemme A.13.** *Supposons que pour un entier  $k$  il existe une classe  $E_j^k$  qui n'appartienne pas à la partition  $\mathcal{E}^{k-1}$ . Alors le cardinal de  $E_j^k$  est strictement supérieur à  $k$ .*

**Démonstration :** La classe  $E_j^k$  est partitionnée par les classes de  $\mathcal{E}^{k-1}$  qui sont adjacentes entre elles, par définition. Si toutes ces classes étaient déjà des classes de  $\mathcal{E}^{k-2}$ , la définition de l'adjacence montrerait que tous les points de  $E_j^k$  seraient  $k - 1$ -adjacents, et donc  $E_j^k$  appartiendrait à  $\mathcal{E}^{k-1}$ . Ceci montre que l'une des classes de  $\mathcal{E}^{k-1}$  incluse dans  $E_j^k$  n'appartient pas à  $\mathcal{E}^{k-2}$ .

L'affirmations se montre à présent par une récurrence facile sur  $k$ .  $\square$

**Lemme A.14.** *Les partitions  $\mathcal{E}^{N^*}$  et  $\mathcal{E}^{N^*+1}$  sont égales.*

**Démonstration :** Supposons, par l'absurde, que ces partitions sont différentes. D'après le lemme A.13, il existe alors dans  $\mathcal{E}^{N^*+1}$  une classe de cardinal strictement supérieur à  $N^*$ , ce qui contredit le lemme A.12.  $\square$

#### A.4 Preuve du lemme A.8

Afin de montrer le lemme A.8 on considère une suite

$$a_0^0 = a^0, \dots, a_t^0, \dots, a_N^0, a_0^1, \dots, a_N^1, \dots, a_0^m, \dots, a_N^m = b^m$$

vérifiant :

- pour tout  $n \in \{0, \dots, m\}$ , les points  $a_0^n, \dots, a_N^n$  appartiennent à un même cube  $(1 + \varepsilon)C_n$ , les cubes  $C_n$  étant deux à deux distincts,
- pour tout  $n \in \{0, \dots, m\}$  et  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ , la distance  $d(f^t(a_t^n), f^t(a_{t+1}^n))$  est inférieure à  $\eta$  fois la distance entre  $f^t((1 + \varepsilon)C_n)$  et le complémentaire de  $f^t((1 + 2\varepsilon)C_n)$ .

Les points de la forme  $f^N(a_N^n)$  ont un rôle particulier. De ce fait nous considérons la suite des  $f^t(a_t^n)$  pour  $0 \leq t \leq N-1$  ordonnée de la façon suivante :

$$a_0^0, \dots, f^t(a_t^0), \dots, f^{N-1}(a_{N-1}^0), a_0^1, \dots, f^{N-1}(a_{N-1}^1), \dots, a_0^m, \dots, f^{N-1}(a_{N-1}^m).$$

Afin de simplifier les notations, nous notons cette suite ordonnée  $\{x_i\}_{i \in I}$ , indexée de façon croissante, où  $I = \{1, \dots, (m+1)N\}$ .

Nous allons appliquer la proposition A.9 à l'ensemble des points  $x_i$ . Pour cela, l'espace métrique  $(X, d)$  de cette proposition sera la variété  $M$  munie de sa distance. Les constantes  $\lambda$  et  $N^*$  de cette proposition sont celles fixées au début de la section A.2. La constante  $K$  est choisie égale à  $\frac{1}{\eta}$ , où  $\eta$  à été fixée au début de la section A.2.

Pour tout point  $x_i = f^t(a_t^n)$  on définit  $r_i$  comme  $d(f^t(a_t^n), f^t(a_{t+1}^n))$ .

Ces choix nous donnent la majoration  $K > (6\lambda N^*)^{N^*+1}$ . L'item (1) du lemme ci-dessous montre alors que les hypothèses de la proposition A.9 sont vérifiées.

**Lemme A.15.** *Avec les notations ci-dessus on a :*

1. *pour tout  $i \in I$ , le cardinal de l'ensemble  $\{i' \in I, B(x_i, Kr_i) \cap B(x_{i'}, Kr_{i'}) \neq \emptyset\}$  est majoré par  $N^*$  ;*
2. *si  $x_i = f^t(a_t^n)$ , la boule  $B(x_i, Kr_i)$  est contenue dans l'image  $f^t(\mathcal{C})$  du cube quadrillé.*

**Démonstration :** Par définition de  $r_i$  et de  $K$ , si  $x_i = f^t(a_t^n)$ , la boule  $B(x_i, Kr_i)$  est contenue dans l'image  $f^t((1 + 2\varepsilon)C_n)$  où  $C_n$  est le carreau associé à  $a_t^n$  (en particulier cette boule est incluse dans  $f^t(\mathcal{C})$  ce qui montre l'item (2).

Donc si  $B(x_{i_1}, Kr_{i_1}) \cap B(x_{i_2}, Kr_{i_2}) \neq \emptyset$  alors les cubes  $f^{t_1}((1 + 2\varepsilon)C_{n_1})$  et  $f^{t_2}((1 + 2\varepsilon)C_{n_2})$  s'intersectent, ce qui implique que  $t_1 = t_2$  (les  $N$  premiers itérés de  $\mathcal{C}$  sont disjoints) et, par le choix de  $\varepsilon$ , que les carreaux  $C_{n_1}$  et  $C_{n_2}$  sont adjacents. Par définition de  $N^*$ , ceci montre l'item (1).  $\square$

La proposition A.9 nous donne donc une partition  $\mathcal{E} = \{E_j, j \in J\}$  de  $I$  vérifiant :

- Pour tout  $j \in J$ , notons  $\delta_{1,j}$  le diamètre de l'ensemble  $\{x_i, i \in E_j\}$ , et  $\delta_{2,j} = \sup\{r_i, i \in E_j\}$ . Finalement notons  $\delta_j = \delta_{1,j} + \delta_{2,j}$ . Soit  $B_j$  l'union des boules  $B(x_i, \lambda\delta_j)$ , pour  $i \in E_j$ . Alors les  $B_j$  sont deux à deux disjoints.

- Pour tout  $j \in J$ , il existe  $i_0 \in E_j$  tel que l'ensemble  $B_j$  est contenu dans la boule  $B(x_{i_0}, Kr_{i_0})$ .

L'item (2) du lemme A.15 implique donc que, pour tout  $j \in J$ , il existe  $t$  tel que  $B_j \subset f^t(\mathcal{C})$ . Notons  $P_j$  l'ensemble des points  $x_i$  avec  $i \in E_j$ . En particulier  $P_j \subset f^t(\mathcal{C})$  et tous les points  $x_i \in P_j$  sont de la forme  $f^t(a_t^n)$ .

Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble  $\mathcal{P} = \{P_j, j \in J\}$ ; c'est une partition de  $\{x_i, i \in I\}$ . Pour tout  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ , la famille des  $P_j \in \mathcal{P}$  inclus dans  $f^t(\mathcal{C})$  induit donc une partition  $\mathcal{P}_t$  de l'ensemble  $\{a_t^n, n \in \{0, \dots, m\}\}$  (en effet cet ensemble est  $f^{-t}(f^t(\mathcal{C}) \cap \{x_i, i \in I\})$ ). Ainsi, si  $P$  est un élément de la partition  $\mathcal{P}_t$ , alors  $f^t(P)$  est un élément de  $\mathcal{P}$ .

On définit par récurrence une suite  $\nu(0), \nu(1), \dots, \nu(s(N+1) + N)$  d'entier de  $\{0, \dots, m\}$  de la façon suivante : on pose  $\nu(0) = 0$ . On suppose à présent que la suite est construite jusqu'à un nombre de la forme  $k(N+1) + t$ , avec  $t \in \{0, \dots, N\}$ .

1. Si  $t < N$ , on considère le point  $a_t^{\nu(k(N+1)+t)}$ . Il appartient à un unique élément  $P$  de la partition  $\mathcal{P}_t$ . Alors  $\nu(k(N+1) + t + 1)$  est le plus grand entier  $r \in \{0, \dots, m\}$  tel que  $a_t^r$  appartient à  $P$ .
2. Si  $t = N$ , et si  $\nu(k(N+1) + N)$  est strictement inférieur à  $m$ , on pose  $\nu((k+1)(N+1)) = \nu(k(N+1) + N) + 1$ ; c'est bien un entier de  $\{0, \dots, m\}$ .
3. Si  $t = N$  et  $\nu(k(N+1) + N) = m$ , la suite s'arrête et on pose  $s = k$ .

Remarquons que la suite  $\nu$  est croissante (non nécessairement strictement). De plus la sous-suite  $\nu(k(N+1))$  est strictement croissante ce qui assure que cette suite est finie :  $s$  est inférieur à  $m$ .

Le lemme suivant conclut la preuve du lemme A.8.

**Lemme A.16.** *La suite  $\nu(0), \dots, \nu(s(N+1) + N)$  satisfait les conclusions du lemme A.8.*

**Démonstration :** Nous avons vu par construction que la suite est croissante. De plus l'item (2) de la construction de  $\nu$  donne l'item (1) du lemme A.8 : pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$ , on a  $\nu(k(N+1) + 1) = \nu(k(N+1) - 1) + 1$ .

Montrons d'abord que, pour tout  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ , tout ensemble  $P$  de la partition  $\mathcal{P}_t$  contient au plus un point de la forme  $a_t^{\nu(k(N+1)+t)}$  : en effet, soit  $k \in \{0, \dots, s\}$  le plus petit entier tel que  $a_t^{\nu(k(N+1)+t)} \in P$ . D'après l'item (1) de la construction de  $\nu$ , l'indice  $\nu(k(N+1) + t + 1)$  est le plus grand entier  $r$  tel que  $a_t^r$  appartient à  $P$ . La suite  $\nu$  étant croissante,  $\nu(k(N+1) + N)$  est supérieur ou égal à  $\nu(k(N+1) + t + 1)$ . L'item (2) de la construction de  $\nu$  (et la croissance de  $\nu$ ) montre  $\nu((k+1)(N+1) + t) > \nu(k(N+1) + t + 1)$ . La suite  $\nu$  étant croissante, pour tout  $k' > k$  le point  $a_t^{\nu(k'(N+1)+t)}$  n'appartient pas à  $P$ , ce qui montre notre affirmation.

En conséquence, tout ensemble  $P_j \in \mathcal{P}$  contient au plus un point de la forme  $f^t(a^{\nu(k(N+1)+t)})$ , avec  $k \in \{0, \dots, s\}$  et  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, s\}$  et tout  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ , notons  $B_t^k$  la boule centrée au point  $f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)})$  et de rayon  $\lambda d(f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}), f^t(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)}))$ . Afin de conclure la preuve du lemme A.8, il reste à montrer les items (2) et (3) c'est-à-dire que les boules  $B_t^k$  sont deux à deux disjointes et que, pour tout  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ , chaque boule  $B_t^k$  est contenue dans  $f^t(\mathcal{C})$ .

Soient  $k \in \{0, \dots, s\}$  et  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ . Le point  $f^t(a_t^{\nu(k(N+1)+t)})$  appartient à un ensemble  $P_j \in \mathcal{P}$  associé à une classe  $E_j \in \mathcal{E}$ . Nous allons montrer :



**Affirmation 3.** Avec ces notations, la boule  $B_t^k$  est incluse dans l'ensemble  $B_j$  associé à la classe  $E_j$ .

Voyons d'abord que cette affirmation conclut la preuve du lemme A.8. En effet, nous avons vu que l'ensemble  $B_j$  est contenu dans  $f^t(\mathcal{C})$ ; il en est donc de même pour  $B_t^k$  (ceci montre l'item (3)).

Pour montrer l'item (2), rappelons que les  $B_j$  sont deux à deux disjoints, et que  $B_j$  contient l'ensemble  $P_j$ . L'ensemble  $B_j$  est donc disjoint de  $P_{j'}$  pour  $j' \neq j$ . Comme chaque  $P_j$  contient au plus un point de la forme  $f^t(a^{\nu(k(N+1)+t)})$ , il en est de même pour les ensembles  $B_j$ . Utilisant l'affirmation 3 et à nouveau que les  $B_j$  sont deux à deux disjoints, un ensemble  $B_j$  rencontre au plus un ensemble  $B_t^k$ . Les ensembles  $B_t^k$  sont donc deux à deux disjoints.

**Preuve de l'affirmation 3 :** Estimons le rayon de la boule  $B_t^k$ . Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} d\left(f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}\right), f^t\left(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)\right) &\leq \\ &\leq d\left(f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}\right), f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)\right) + d\left(f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right), f^t\left(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Le premier terme de la somme est une distance entre deux points de  $P_j$ ; en effet, le point  $f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}\right)$  appartient à  $P_j$  par définition de  $j$  et  $f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)$  appartient à  $P_j$  par définition de  $\nu(k(N+1)+t+1)$ , voir l'item (1) de la construction de  $\nu$ . Ce premier terme est donc inférieur au diamètre  $\delta_{1,j}$  de  $P_j$ .

Le point  $f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)$  est un point  $x_{i_0}$ ,  $i_0 \in I$ , de la suite considérée au début de cette section. Le second terme de la somme dans (2) est le rayon  $r_{i_0}$  correspondant à  $x_{i_0}$ . Puisque  $x_{i_0}$  appartient à  $P_j$ , ce second terme est donc inférieur à  $\delta_{2,j}$  (qui est le plus grand des rayons associés aux points de  $P_j$ ).

On en déduit :

$$\lambda d\left(f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}\right), f^t\left(a_{t+1}^{\nu(k(N+1)+t+1)}\right)\right) \leq \lambda(\delta_{1,j} + \delta_{2,j}) \leq \lambda\delta_j.$$

Puisque  $B_j$  est la réunion des boules  $B(x_i, \lambda\delta_j)$ , pour  $i \in E_j$ , et que  $f^t\left(a_t^{\nu(k(N+1)+t)}\right)$  peut s'écrire de la forme  $x_i$ ,  $i \in E_j$ , on obtient que  $B_t^k$  est contenu dans  $B_j$ . □

Ceci termine la preuve du lemme A.8, et complète donc la preuve du théorème 2.1. □

## Références

- [Ab] F. Abdenur, *Generic robustness of a spectral decompositions*, prépublication IMPA, (2001).
- [Ar<sub>1</sub>] M.-C. Arnaud, *Création de connexions en topologie  $C^1$* , Ergod. Th. & Dynam. Syst., **21**, 339–381, (2001).
- [Ar<sub>2</sub>] M.-C. Arnaud, *Le “closing lemma” en topologie  $C^1$* , Mém. Soc. Math. Fr. **74**, (1998).
- [Bi<sub>1</sub>] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol **9**, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1927).

- [Bi<sub>2</sub>] G. D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, **93**, 85–216, (1935).
- [BC] Ch. Bonatti et S. Crovisier, *Recurrence and genericity*, à paraître aux C.R.A.S.
- [BD<sub>1</sub>] Ch. Bonatti et L.J. Díaz, *Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits ou de sources*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **32**, 135–150, (1999).
- [BD<sub>2</sub>] Ch. Bonatti et L.J. Díaz, *On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms*, à paraître aux Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.
- [BDP] Ch. Bonatti, L.J. Díaz et E.R. Pujals, *A  $C^1$ -generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources*, à paraître à Ann. Math.
- [Boc] J. Bochi, *Genericity of zero Lyapunov exponents*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **22**, 1667–1696, (2002).
- [BV] J. Bochi et M. Viana, *Uniform (projective) hyperbolicity or no hyperbolicity : a dichotomy for generic conservative maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19**, 113–123, (2002).
- [Bo] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Axiom A diffeomorphisms*, Lect. Notes in Mathematics, **470**, Springer-Verlag (1975).
- [CM] C. Carballo et C. Morales, *Homoclinic classes and finitude of attractors for vector fields on  $n$ -manifolds*, Bull. London Math. Soc., **35**, 85–91 (2003).
- [CMP] C. Carballo, C. Morales et M.J. Pacifico, *Homoclinic classes for  $C^1$ -generic vector fields*, Ergodic Th. & Dynam. Sys. **23**, 1–13, (2003).
- [Co] C. Conley, *Isolated invariant sets and Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **38**, AMS Providence, R.I., (1978).
- [Cr] S. Crovisier, *Weakly transitive sets and periodic orbits of  $C^1$ -generic diffeomorphisms*, en préparation.
- [F] J. Franks, *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **158**, 301–308, (1971).
- [GW] G. Gan et L. Wen, *Heteroclinic cycles and homoclinic closures for generic diffeomorphisms*, prépublication de Peking University.
- [Ha] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$ -stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows*, Ann. of Math., **145**, 81–137, (1997) et Ann. of Math., **150**, 353–356, (1999).
- [He<sub>1</sub>] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, **103–104**, (1983).
- [He<sub>2</sub>] M. Herman, *Some open problems in dynamical systems*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 797–808 (electronic).
- [Hu] M. Hurley, *Attractors : persistence, and density of their basins*, Trans. Amer. Math. Soc., **269**, 271–247, (1982).
- [Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, **156**, Springer-Verlag, New York, (1995).

- [MP] C. Morales et M. J. Pacífico, *Lyapunov stability of  $\omega$ -limit sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **8**, 671–674, (2002).
- [M] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of mathematics studies **77**, Princeton university Press, (1973).
- [N<sub>1</sub>] S. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology, **13**, 9–18, (1974).
- [N<sub>2</sub>] S. Newhouse, *Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems*, Amer. J. Math., **99**, 1061–1087, (1977).
- [N<sub>3</sub>] S. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **50**, 101–151, (1979).
- [OU] J. C. Oxtoby et S. M. Ulam, *Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Ann. of Math., **42**, 874–920, (1941).
- [Pa] J. Palis, *A note on  $\Omega$ -stability*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., **14**, A.M.S. Providence R. I., (1970).
- [PP] J. Palis et C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, Lect. Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, 345–353, (1975).
- [Po] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, (1899), réédité par Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard, Paris, (1987).
- [Pu] C. Pugh, *The closing lemma*, Amer. J. Math., **89**, 956–1009, (1967).
- [PR] C. Pugh et C. Robinson, *The  $C^1$ -closing lemma, including Hamiltonians*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **3**, 261–314, (1983).
- [R<sub>1</sub>] C. Robinson, *Generic properties of conservative systems I & II*, Amer. J. Math., **92**, 562–603 et 897–906, (1970).
- [R<sub>2</sub>] C. Robinson, *Dynamical systems : stability, symbolic dynamics, and chaos*, Study in advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, (1999).
- [Sh] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, **56**, (1978).
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S., **73**, 747–817, (1967).
- [T] F. Takens, *Homoclinic points in conservative systems*, Invent. Math., **18**, 267–292, (1972).
- [W<sub>1</sub>] L. Wen, *A uniform  $C^1$  connecting lemma*, Discrete Cont. Dyn. Syst. **8**, 257–265, (2002).
- [W<sub>2</sub>] L. Wen, *Homoclinic tangencies and dominated splittings*, Nonlinearity, **15**, 1445–1469, (2002).
- [WX] L. Wen et Z. Xia,  *$C^1$ -connecting lemmas*, Trans. Amer. Math. Soc., **352**, 5213–5230, (2000).
- [Z] E. Zehnder, *Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math., **597**, Springer-Verlag, 828–854, (1977).

**Christian Bonatti** (bonatti@u-bourgogne.fr)  
 Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584 du CNRS  
 BP 47 870  
 21078 Dijon Cedex  
 France

**Sylvain Crovisier** (sylvain.crovisier@u-bourgogne.fr)  
Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584 du CNRS  
BP 47 870  
21078 Dijon Cedex  
France