



**HAL**  
open science

## Couches limites: un problème inverse.

Franck Sueur

► **To cite this version:**

| Franck Sueur. Couches limites: un problème inverse.. 2004. hal-00002137v1

**HAL Id: hal-00002137**

**<https://hal.science/hal-00002137v1>**

Preprint submitted on 20 Jun 2004 (v1), last revised 26 Aug 2005 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Couches limites: un problème inverse.

25 Mai 2004

Franck Sueur<sup>1</sup>

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités.

Centre de Mathématiques et d'Informatique.

Université de Provence. 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille. France

## Résumé

On s'intéresse à des problèmes mixtes pour des systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels quasilineaires avec des conditions aux limites maximales dissipatives portant sur un bord non caractéristique ou caractéristique de multiplicité constante. On suppose donnée une solution régulière d'un tel problème sur un intervalle de temps  $(0, T_0)$ , où  $T_0 > 0$ . On considère des perturbations paraboliques, introduisant dans l'équation une famille  $(\varepsilon\mathcal{E})_{0 < \varepsilon \leq 1}$  où  $\mathcal{E}$  est une viscosité uniformément elliptique. On prescrit des conditions aux limites très particulières de type mixte Dirichlet-Neumann. On montre, pour  $\varepsilon$  assez petit, l'existence de solutions régulières  $u^\varepsilon$  de ces problèmes sur l'intervalle de temps  $(0, T_0)$ . De plus, on montre que  $u^0$  est limite dans  $C(0, T_0; L^\infty \cap H^1)$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , des  $u^\varepsilon$ . L'existence et la convergence vers  $u^0$  des  $u^\varepsilon$  jusqu'au temps  $T_0$  proviennent d'une propriété originale de transparence. En fait, on donne une description asymptotique, pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , très précise des  $u^\varepsilon$  à l'aide de développements de type BKW mettant en évidence des couches limites de petite amplitude. La petitesse des couches est liée au choix des conditions aux limites pour les perturbations visqueuses.

## Abstract

We consider quasilinear symmetric hyperbolic boundary problems in several space dimensions, with maximal dissipative conditions on a boundary noncharacteristic or characteristic of constant multiplicity. We suppose that a regular solution of such a problem is given on the time interval  $(0, T_0)$ , where  $T_0 > 0$ . We consider parabolic perturbations, by introducing in the equation a family  $(\varepsilon\mathcal{E})_{\varepsilon \in ]0,1]}$  where  $\mathcal{E}$  is an uniformly elliptic viscosity. We

---

<sup>1</sup>Auteur correspondant.

Email: Franck.Sueur@cmi.univ-mrs.fr

Adresse postale: Franck Sueur. Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités.

Centre de Mathématiques et d'Informatique.

Université de Provence. 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille. France

prescribe some very particular boundary conditions of Dirichlet-Neumann type. We show, for small  $\varepsilon$ , the existence of regular solutions  $u^\varepsilon$  of these problems on the time interval  $(0, T_0)$ . Moreover, we show that  $u^0$  is the limit in  $C(0, T_0; L^\infty \cap H^1)$ , when  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , of the  $u^\varepsilon$ . The existence and the convergence to  $u^0$  of the  $u^\varepsilon$  until  $T_0$  are the result of an original property of transparency. Indeed, we give a very accurate asymptotic description, for  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , of the  $u^\varepsilon$  by using WKB expansions which reveal small amplitude boundary layers. The smallness of the boundary layers is linked to the choice of the boundary conditions for the viscous perturbations.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Exposé des résultats</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Preuve de la proposition 1.1</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Schéma de la preuve du théorème 2.1</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Preuve du théorème 5.1</b>	<b>23</b>
6.1	Composition non linéaire des profils . . . . .	23
6.2	Analyse spectrale du champ complémentaire . . . . .	25
6.3	Problème hyperbolique-parabolique . . . . .	26
6.4	CLNC . . . . .	27
6.5	L'ansatz de résolution . . . . .	27
6.6	L'ansatz de résolution des conditions aux limites . . . . .	28
6.7	Le tableau de la cascade . . . . .	29
6.8	$(S^0(T_0)) - (S_{cl}^0(T_0))$ . . . . .	30
6.9	$(S^j(T_0)) - (S_{cl}^j(T_0)); j \geq 1$ . . . . .	31
6.10	Conclusion . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Preuve du théorème 5.2</b>	<b>32</b>
7.1	Reformulation du problème . . . . .	32
7.2	Estimations conormales . . . . .	33
7.3	Convergence du schéma itératif . . . . .	36

# 1 Introduction

Dans cet article, on s'intéresse à des problèmes mixtes  $\mathbf{P}^0(T)$  :

$$\mathcal{H}(b, u, \partial)u = F(b, \partial b, u) \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \quad (1)$$

$$\Phi(b, u) = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \quad (3)$$

où l'opérateur

$$\mathcal{H}(b, u, \partial) := \sum_{0 \leq j \leq n} A_j(b, u) \partial_j + B(b, u),$$

est symétrique hyperbolique. La variable de l'espace-temps  $\mathbb{R}^{1+n}$  étant notée  $(t, x)$  et  $\partial := (\partial_0 := \partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n)$  avec  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ . La fonction inconnue est  $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , tandis que  $b : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$  est une fonction donnée jouant aussi bien le rôle, sur un compact de  $\mathbb{R}^{1+n}$ , de la variable de  $\mathbb{R}^{1+n}$ , que celui d'un paramètre ou de seconds membres éventuels.  $n, N$  et  $N'$  sont des entiers naturels non nuls quelconques fixés. On note  $\theta := (b, u)$  la variable de  $\mathbb{R}^{N'+N}$ . Les matrices  $(A_j)_{0 \leq j \leq n}$  et  $B$  sont de taille  $N \times N$ , et, comme  $F, b$  et  $\Phi$ ,  $C^\infty$  de leurs arguments. La fonction  $\Phi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ , où  $r$  est un entier fixé. On suppose que  $\Phi(0) = F(0) = 0$  et  $\text{rang} D_u \Phi(0) = r$ . On traite ici le cas modèle du demi-espace, mais les résultats s'étendent aux domaines situés d'un seul côté de leur bord  $C^\infty$ . On note  $x = (y, x_n)$ . Le domaine est une demi-bande d'espace-temps :  $\Omega_T^+ := (-1, T) \times \mathbb{R}_+^n$  où  $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  désigne le demi-espace. Le bord  $\Gamma_T := (-1, T) \times \mathbb{R}^{n-1}$  est supposé caractéristique de multiplicité constante ou non caractéristique et la condition aux limites maximale dissipative.

**Hypothèse 1.1** *Il existe un entier  $d_0$  tel que pour  $\theta$  voisin de 0, si  $\Phi(\theta) = 0$ , la dimension  $\ker A_n(\theta)$  est  $d_0$ .*

Insistons sur le fait que l'on n'exclut pas le cas où la multiplicité  $d_0$  est constante égale à 0, c'est à dire le cas non caractéristique.

**Hypothèse 1.2** *La condition aux limites est maximale dissipative ie pour  $\theta$  voisin de 0, si  $\Phi(\theta) = 0$ , la forme quadratique  $\langle A_n(\theta), \cdot \rangle$  est négative sur  $\ker D_u \Phi(\theta)$  et  $\ker D_u \Phi(\theta)$  est maximale pour cette propriété.*

Insistons sur le fait que dans l'hypothèse précédente, les conditions aux limites peuvent être conservatives c'est à dire vérifier

$$\langle A_n(\theta)u, u \rangle = 0 \quad \text{pour } \Phi(\theta) = 0, \quad D_u \Phi(\theta).u = 0.$$

Notons qu'une conséquence de l'hypothèse 1.2 est que si  $\Phi(\theta) = 0$  alors  $\ker A_n(\theta) \subset \ker D_u \Phi(\theta)$ . L'application  $\ker A_n(b, \cdot)$  définit une distribution de  $d_0$ -plans sur la variété  $\Lambda_b := \{u \in \mathbb{R}^N / \Phi(b, u) = 0\}$ . On fait l'hypothèse suivante, qui est automatiquement satisfaite si  $d_0 = 0$  (bord non caractéristique), si  $d_0 = 1$  ou si (1) est un système de lois de conservation (cf Exemple 1 de [10]).

**Hypothèse 1.3** Pour  $\theta$  voisin de 0, la distribution de  $d_0$ -plans  $\ker A_n(b, \cdot)$  sur  $\Lambda_b$  est involutive.

Rappelons qu'un théorème de Frobenius assure que faire l'hypothèse 1.3 équivaut à supposer que pour  $\theta$  voisin de 0, la distribution  $\ker A_n(b, \cdot)$  sur  $\Lambda_b$  est intégrable. Cette hypothèse rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initial en un problème pour lequel les conditions aux limites et, dans un certain sens, la matrice normale du système sont redressées. La proposition suivante précise ceci et établit même une équivalence. Elle est, à notre connaissance, nouvelle et joue un rôle essentiel dans nos résultats.

**Proposition 1.1 (Transparence)** On suppose que les hypothèses 1.1 et 1.2 sont vérifiées. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

(i) L'hypothèse 1.3 est vérifiée.

(ii) Il existe  $w_1$  voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $w_2, \tilde{w}_2$  voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbb{R}^N$  et un difféomorphisme  $C^\infty$

$$\begin{aligned} \chi : \quad \tilde{w} &\rightarrow w \\ (b, \tilde{u}) &\mapsto (b, u) = \mathcal{M}(b, \tilde{u}) \end{aligned}$$

où  $w := w_1 \times w_2$ ,  $w := w_1 \times \tilde{w}_2$  tels que

- pour tout  $b \in w_1$ ,  $\mathcal{M}^{-1}(b, \cdot)(\Lambda_b \cap w_2) = (\ker M) \cap \tilde{w}_2$  où  $M$  est la matrice constante, de taille  $r \times N$ ,  $M := [Id_r \quad 0_{N-r}]$ ,
- pour tout couple de vecteurs  $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times ((\ker M) \cap \tilde{w}_2) \times \ker M$ , on a l'inclusion suivante :

$$\ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker(D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \cdot \tilde{h}) \quad (4)$$

où  $\tilde{A}_n(b, \tilde{u})$  désigne la matrice carrée, de taille  $N \times N$ , symétrique

$$\tilde{A}_n(b, \tilde{u}) := {}^t \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, \tilde{u}) \cdot A_n(b, \mathcal{M}(\tilde{u})) \cdot \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, \tilde{u}).$$

(iii) Il existe  $w_1, w_2, \tilde{w}_2$  et  $\chi$  comme dans (ii) tels que

- pour tout  $b \in w_1$ ,  $\mathcal{M}^{-1}(b, \cdot)(\Lambda_b \cap w_2) = (\ker M) \cap \tilde{w}_2$ ,
- pour tout couple de vecteurs  $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times ((\ker M) \cap \tilde{w}_2) \times \ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u})$ , on a l'inclusion (4).

Dans le premier point des conditions (ii) et (iii), on redresse les conditions aux limites tandis que dans le second point, on redresse la matrice normale du système. La différence entre (ii) et (iii) est que dans le second point, la variable  $\tilde{h}$  parcourt  $\ker M$  dans (ii) et  $\ker \tilde{A}_n$  dans (iii). Une preuve de cette proposition est donnée dans la section 4.

On supposera, dans la suite, le changement de fonction inconnue du point (iii) effectué.

Sous ces hypothèses, et quitte à supposer que  $b|_{\Omega_0^+}$  est à valeurs dans un voisinage compact suffisamment petit de 0 (ce qui est toujours possible en introduisant une fonction de troncature dans  $b$ ), on dispose du résultat suivant :

**Théorème 1.1 (O.Guès [10])** *Il existe un temps  $T_0$  strictement positif et une unique solution régulière  $u^0 \in H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$  du problème  $\mathbf{P}^0(T_0)$ .*

On veut s'intéresser à des perturbations visqueuses du problème. Pour cela, on regarde l'effet de l'ajout dans le membre de gauche de (1) d'une famille  $(\varepsilon\mathcal{E})_{\varepsilon>0}$  où

$$\mathcal{E}(b, \partial) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i E_{i,j}(b) \partial_j$$

est un opérateur linéaire uniformément elliptique. On suppose que les matrices  $E_{i,j}$  sont symétriques de taille  $N \times N$ ,  $C^\infty$  et vérifient, pour tout  $b \in \mathbb{R}^{N'}$  et  $\zeta \in S^{n-1}$ ,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \zeta_i \zeta_j E_{i,j}(b) \geq Id_{\mathbb{R}^N}.$$

On a désigné par  $S^{n-1}$  la sphère euclidienne unité de  $\mathbb{R}^n$ . On regarde alors l'opérateur  $\mathcal{L}^\varepsilon$  défini par

$$\mathcal{L}^\varepsilon(b, u, \partial)u := \mathcal{H}(b, u, \partial)u - (F(b, \partial b, u) + \varepsilon\mathcal{E}(b, \partial)u).$$

Notons  $\Pi(b)$  un champ régulier ( $C^\infty$ ) de matrices  $N \times N$  tel que

$$\forall b \in \Gamma_{T_0}, \quad \ker \Pi(b) = (\ker M)^{\perp E_{n,n}(b)} \quad (5)$$

où  $(\ker M)^{\perp E_{n,n}}$  désigne l'orthogonal, pour le produit scalaire induit par la matrice symétrique définie positive  $E_{n,n}$ , de  $\ker M$ .

On donne un premier énoncé simplifié des résultats de l'article. Un exposé plus précis est fait dans la section 2. Des exemples d'application sont donnés à la section 3.

**Théorème 1.2** *Il existe un réel  $\varepsilon_0 \in ]0, 1]$  tel que pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , le problème mixte parabolique  $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$  suivant*

$$\mathcal{L}^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \quad (6)$$

$$Mu^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0} \quad (7)$$

$$\Pi(b)\partial_n u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0} \quad (8)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \quad (9)$$

admette une unique solution  $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$  et on a les estimations :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_{T_0}^+)} \leq c\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

où la constante  $c$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Dans le cas non caractéristique, ces estimations peuvent être améliorées :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} \leq c\varepsilon, \quad \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_{T_0}^+)} \leq c\varepsilon.$$

Notons que si l'existence d'une solution régulière  $u^\varepsilon$ , pour un  $\varepsilon \in ]0, 1]$  fixé, sur un intervalle de temps non trivial  $(0, T_\varepsilon)$  ( $T_\varepsilon > 0$ ) est signalée dans [15], le théorème 1.2 affirme, lui, l'existence des  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  sur un intervalle de temps non trivial commun et, qui plus est, égal à l'intervalle  $(0, T_0)$  d'existence de la solution  $u^0$  du problème hyperbolique.

Cependant, la convergence des  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  vers  $u^0$  n'a pas lieu dans tous les  $H^s$ , contrairement à ce qui se passe lorsque l'équation est posée dans tout l'espace (sans bord). Elle est aussi moins rapide, mesurée dans les espaces  $L^\infty$  et  $L^2$ . Cela provient de ce qu'il se forme au voisinage du bord des couches limites c'est à dire des variations rapides de  $u^\varepsilon$ . Dans la section 2, on établit un développement asymptotique, pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , de type BKW des  $u^\varepsilon$  où sont décrits ces termes de couches limites. Celles-ci sont, ici, à classer en deux catégories. Les premières sont les couches limites caractéristiques (CLC). Elles sont de taille  $\sqrt{\varepsilon}$  et sont décrites par une variable  $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Les secondes sont les couches limites non caractéristiques (CLNC) sont de taille  $\varepsilon$  et correspondent à une variable rapide  $\frac{x_n}{\varepsilon}$ . Lorsque leur amplitude est en  $O(1)$  (en norme  $L^\infty$ ), leur norme  $L^2$  est en  $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$  pour les CLC et  $\sqrt{\varepsilon}$  pour les CLNC. Mais l'intérêt des problèmes mixtes (et plus particulièrement des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann (7) – (8)) considéré(e)s ici est justement que les couches limites sont de petites amplitudes.

En effet, le choix des conditions aux limites force le problème parabolique à suivre un régime que l'on peut qualifier de faiblement non linéaire, par analogie avec l'optique géométrique. Les termes de CLC (resp CLNC) apparaissent à l'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  (resp  $\varepsilon$ ).

De plus, l'hypothèse 1.3 peut se voir comme une version affaiblie de la propriété de dégénérescence linéaire bien connue en optique géométrique pour assurer des propriétés de transparence. Un point clé de l'article est ainsi que le comportement des couches limites est linéaire. La propriété 1.1 joue un rôle crucial dans ce fait et, par conséquent, dans l'existence et la convergence vers  $u^0$  des  $u^\varepsilon$  jusqu'au temps  $T_0$ . Nous reviendrons sur ce point après le théorème 2.1, qui constitue le résultat central de l'article.

Il est intéressant de comparer la situation au cas où l'on prescrit une condition de Dirichlet  $u^\varepsilon = 0$  pour les problèmes paraboliques. Rappelons, à cet égard, les résultats dont on dispose concernant le cas de conditions de Dirichlet.

- Dans le cas non caractéristique, signalons les travaux de [7], [9], [23] et récemment de [19] qui élucide la question de la stabilité.

- Dans le cas caractéristique, on ne dispose pas, à ma connaissance, de résultat général. [12] et [28] traitent le cas semilinéaire, [8] le cas quasilinéaire totalement caractéristique.

Dans les deux cas, il se forme des couches limites d'amplitude  $O(1)$  qui font obstruction à la convergence dans  $L^\infty$  et  $H^{\frac{1}{2}}$ , limitent le temps de convergence et ralentissent la convergence dans  $L^2$ . Au contraire, la suite  $(u^\varepsilon)$  du théorème 1.2 converge sur  $(0, T_0)$  et il n'y a pas de condition de stabilité supplémentaire à imposer. La solution hyperbolique  $u^0$  est limite dans  $L^\infty$  et dans  $L^2$  des  $u^\varepsilon$ . On verra dans la section suivante que  $u^0$  est aussi limite des  $u^\varepsilon$  dans  $H^s$  pour  $s < \frac{3}{2}$ .

Notons aussi que l'on atteint avec les conditions aux limites (7) et (8) des problèmes mixtes symétriques hyperboliques qui ne sont pas limite des problèmes mixtes symétriques paraboliques avec condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ u^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \end{cases} \quad (10)$$

En effet, dans le cas semilinéaire, [28] montre que la limite des problèmes (10) est un problème hyperbolique strictement dissipatif. De plus, même dans le cas où l'on dispose d'un problème mixte hyperbolique strictement dissipatif  $\mathbf{P}^0(T)$ , la convergence des problèmes (10) vers  $\mathbf{P}^0(T)$  requiert une condition non triviale sur la matrice normale  $E_{n,n}$  du tenseur de viscosité ([20]). Au contraire, le théorème 1.2 est valide pour toute viscosité linéaire uniformément elliptique. L'obtention des problèmes mixtes hyperboliques conservatifs comme limite de problèmes mixtes paraboliques avec conditions de Dirichlet est une question ouverte (cf [20]). L'exemple des équations d'Euler suggère notamment que l'on peut obtenir des problèmes mixtes symétriques hyperboliques conservatifs comme limite de problèmes mixtes symétriques paraboliques dégénérés.

Une motivation importante pour ce travail est liée à l'approximation discrète des problèmes aux limites hyperboliques. La discrétisation introduit un effet comparable à celui d'un terme de diffusion. On parle de viscosité numérique. Aussi, en présence d'un bord apparaît un phénomène de couches limites numériques qui limite la convergence du schéma considéré. De telles couches limites ont été étudiées par M.Gisclon et D.Serre dans [7] (schéma de Godunov) et par C.Chesnais-Hillairet et E.Grenier dans [2] (schéma de Lax Friedrichs). Citons également les travaux de K.T.Joseph et P.G.LeFloch ([13]). Dans tous les cas, il s'agit de CLNC en une dimension d'espace avec conditions de Dirichlet.

Dans l'approximation numérique, le pas d'espace  $\Delta x$  joue le rôle de l'échelle de viscosité  $\varepsilon$ . Aussi, on ne s'attend pas, en présence respectivement d'une CLC (CLNC) d'ordre 0, à un ordre de convergence meilleure que  $\frac{1}{4}$  ( $\frac{1}{2}$ ).

Cependant, si le but recherché est la simulation du problème hyperbolique, on peut espérer que des choix particuliers de conditions aux limites "tuent" la couche à l'ordre 0. Ainsi le théorème 1.2 suscite l'espoir d'une convergence d'ordre  $\frac{3}{4}$ .

Signalons également l'article de [5] qui donne un résultat de convergence en  $O(\Delta x^{\frac{1}{2}})$  de schémas de volumes finis explicites pour des systèmes linéaires dans



un domaine borné par un bord non caractéristique en plusieurs dimensions d'espace.

Notons que l'on considère l'adjonction d'une viscosité linéaire pour le problème redressé, c'est à dire une fois le changement de fonction inconnue du point (iii) de la proposition 1.1 effectué. Il n'y a aucune raison pour que revenant au système initial, cela corresponde à l'ajout d'une viscosité linéaire. En général, on obtient bien ainsi une viscosité, mais non linéaire. L'auteur ignore s'il est possible d'étendre les résultats exposés ici à des conditions aux limites non linéaires et à des viscosités non linéaires. Plus précisément, une question intéressante consiste à se donner un problème mixte hyperbolique avec une condition non linéaire et une viscosité non linéaire

$$\mathcal{E}(b, u) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i E_{i,j}(b, u) \partial_j$$

et à se demander quelles conditions aux limites prescrire. Cette question pourrait se révéler pertinente en vue de l'étude numérique évoquée plus haut. En effet, on constate que si l'on considère un schéma de type Lax-Friedrichs pour un système de lois de conservation en une dimension d'espace, il apparaît, sur la forme symétrique, une viscosité non linéaire.

Le théorème 1.1, montré dans [10], constitue une extension au cadre quasilinéaire des travaux de J.Rauch ([21]) pour le problème linéaire. Signalons également que l'on dispose dans le cas non caractéristique de résultats de [22], [14] et dans le cas caractéristique de [16] ou de S.Schochet [24] pour le système d'Euler. L'hypothèse 1.3 joue un rôle majeur dans [10] et révèle un aspect géométrique du problème qui n'apparaît pas dans les cas semilinéaires ou non caractéristiques. Cette hypothèse est naturelle : elle est notamment valide pour les systèmes de lois de conservations. Cette hypothèse rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initiale en un problème pour lequel la matrice normale du système est diagonale par blocs sur  $\ker M$ . L'intérêt de cette diagonalisation est le "bon comportement" des commutations de l'opérateur aux dérivations conormales. En l'absence d'une telle hypothèse, l'analyse du problème linéarisé conduit à des inégalités d'énergie avec perte d'une dérivée, des coefficients vers la solution. Une question intéressante est de savoir s'il est possible d'utiliser une stratégie de type Nash-Moser pour obtenir l'existence de solutions régulières sans l'hypothèse 1.3. Si tel est le cas, signalons que l'étude menée dans cet article est encore possible, à la différence près que le comportement de la couche limite caractéristique d'amplitude  $\sqrt{\varepsilon}$  fait intervenir un terme non linéaire de type Burgers qui dans le cas général provoque une limitation du temps de convergence des  $(u^\varepsilon)$  vers  $u^0$ .

On a choisi un cadre simplifié. Les résultats s'étendent aux cas de domaines situés localement du même côté de leur bord  $C^\infty$ , à des solutions de régularité finie et à des conditions initiales (ou dans le passé) plus générales ([28]).

Dans cet article, on ne se pose pas la question de savoir quel est l'ensemble des champs  $\Pi$  pour lequel le théorème 1.2 est valide. Le champ  $\Pi$  utilisé ici relève tout au moins d'un choix canonique effectué en vue d'utiliser une méthode d'énergie. Notons cependant que comme le signale [15], la méthode d'énergie se révèle souvent beaucoup moins générale que la méthode de Fourier-Laplace dans le cadre de problèmes mixtes paraboliques avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann. Une question intéressante est de savoir s'il est possible d'adapter la méthode de [19] à des conditions mixtes. Notons toutefois que cette dernière concerne des problèmes hyperboliques limites non caractéristiques vérifiant la condition de Lopatinski uniforme.

## 2 Exposé des résultats

Dans cette section, nous allons donner le résultat principal de l'article à travers un théorème plus précis que le théorème 1.2 donné en introduction et qui s'obtient par une analyse du type BKW.

Considérons un temps  $T$  positif quelconque et introduisons les espace  $\mathcal{N}_\theta(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta^+))$ ,  $\mathcal{N}_z(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z^+))$ , où  $\mathcal{S}$  désigne l'espace de Schwartz des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide, et l'espace de profils

$$\mathcal{P}(\Omega_T^+) := \{\mathcal{U}(t, x, z, \theta) = \mathcal{U}_a(t, x) + \mathcal{U}_b(t, x, \theta) + \mathcal{U}_c(t, x, z) \quad \text{où} \\ \mathcal{U}_a \in H^\infty(\Omega_T^+), \mathcal{U}_b \in \mathcal{N}_\theta(T) \text{ et } \mathcal{U}_c \in \mathcal{N}_z(T)\}$$

On abrège en

$$\mathcal{P}(\Omega_T^+) := H^\infty(\Omega_T^+) \oplus \mathcal{N}_\theta(T) \oplus \mathcal{N}_z(T).$$

$\mathcal{U}_a$  est la partie régulière ou intérieur du profil,  $\mathcal{U}_b$  est un terme de couche limite caractéristique et  $\mathcal{U}_c$  un terme de couche limite non caractéristique.

On définit pour  $s \in \mathbb{N}$ , les normes

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{co}^s(0, T)} := \sum_{j \leq s} \|Z^j u\|_{L^2(\Omega_T^+)}$$

et les ensembles

$$\Lambda^s(T) := \{(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1]} \in (\mathcal{H}_{co}^s(0, T))^{]0, 1]} / \exists \varepsilon' \in ]0, 1] / \\ \sup_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon']} (\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_{co}^s(0, T)} + \sum_{k=1}^s \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} \|\partial_n^k u^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_{co}^{s-k}(0, T)}) < \infty\}.$$

Remarquons que  $\Lambda^s$  est un ensemble de familles de fonctions (à un paramètre) adapté au problème puisque si  $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$  alors la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1]}$  définie par

$$u^\varepsilon(t, x) := \mathcal{U}(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \quad (11)$$

est pour tout  $s \in \mathbb{N}$  dans  $\Lambda^s(T)$ . Insistons notamment sur le fait qu'un profil de CLNC est un  $O(\sqrt{\varepsilon})$  dans  $L^2$  alors qu'un profil de CLC est un  $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ . Ainsi si l'on dispose d'un développement

$$w^\varepsilon(t, x) := \sum_{j=0}^k \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \quad (12)$$

on peut écrire, pour  $0 \leq k' \leq k$ ,

$$w^\varepsilon(t, x) := \sum_{j=0}^{k'} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k'+1} r_\varepsilon(t, x) \quad (13)$$

avec  $r_\varepsilon \in \Lambda^s(T)$ , pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

De tels développements à trois échelles, pour des problèmes où apparaissent à la fois des CLC et des CLNC, ont été introduit par O.Guès dans [12]. L'article [28] introduit pour ce type de problème l'espace de profil  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  et les ensembles  $\Lambda^s(T)$ . Signalons aussi que des outils similaires sont utilisés dans [29].

Le résultat central de l'article est donné par le théorème suivant.

**Théorème 2.1** *Il existe un réel  $\varepsilon_0 \in ]0, 1]$  tel que pour tout entier naturel  $k \geq 2$ , pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , le problème  $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$  admette une et une seule solution  $u^\varepsilon$  et*

$$u^\varepsilon(t, x) = u^0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} \mathcal{U}_b^1(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sum_{j=2}^k \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_\varepsilon(t, x)$$

où  $\mathcal{U}_b^1 \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ , les  $(\mathcal{U}^j)_{2 \leq j \leq k}$  sont dans  $\mathcal{P}(\Omega_{T_0}^+)$  et  $R_\varepsilon \in \Lambda^s(T_0)$ , pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

La preuve du théorème 2.1 s'articule autour de deux étapes clés. La première consiste à chercher une famille de solutions approchées sous la forme d'un développement BKW. On résoud pour cela une succession de problèmes pour les profils du développement. Signalons ici que si l'on utilise des profils similaires à ceux de [28] et [29], et que les équations de profils sont de même type, les conditions aux limites diffèrent. L'ordre de résolution des problèmes pour les profils change aussi en conséquence. En particulier, nous réalisons, dans la section 7.2, une analyse spectrale du champ complémentaire  $\Pi$ , défini en (5), qui joue un rôle crucial dans la résolution et qui explique la présence de couches limites de petite amplitude. La seconde prouve l'existence d'une famille de solutions exactes des problèmes mixtes paraboliques ayant pour partie principale la famille de solutions approchées de la première étape. La différence est une famille de restes que l'on obtient comme solutions de problèmes mixtes paraboliques quasilineaires et pour lesquels on établit des estimations uniformes en  $\varepsilon$ . La section 5 résume les résultats obtenus lors de ces deux étapes et les combine de façon à en déduire le théorème 2.1. Les sections

6 et 7 correspondent respectivement aux deux étapes successives de la méthode.

Notons ici l'analogie avec l'optique géométrique : pour la propagation d'oscillations monophasées pour un système hyperbolique quasilinéaire, on a, en général, des résultats positifs que dans le régime dit faiblement non linéaire, c'est-à-dire lorsqu'on regarde des oscillations d'amplitude  $\varepsilon$  où la fréquence est de l'ordre de  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Les oscillations sont transportées par un champ caractéristique de l'opérateur hyperbolique. En général, l'équation des paquets d'onde contient un terme non linéaire de type Burgers, précédé d'un coefficient d'interaction  $\gamma$ . Lorsque le champ caractéristique est linéairement dégénérée, ce coefficient s'annule. C'est le phénomène de transparence. Dans le cas des couches limites caractéristiques avec une viscosité d'ordre  $\varepsilon$ , l'équivalent du régime faiblement non linéaire est le cas de couches caractéristiques en  $O(\sqrt{\varepsilon})$ . Nous verrons dans la section 7 que les profils  $\mathcal{U}_b^j$  vérifient des problèmes de type hyperbolique-parabolique. L'équation de profil pour  $\mathcal{U}_b^1$  fait, à priori, intervenir un terme non linéaire de type Burgers. L'hypothèse 1.3, via la proposition 1.1, assure que ce terme est nul, caractérisant ainsi un phénomène de transparence.

Notons également que dans le cas d'un champ caractéristique linéairement dégénérée, on peut augmenter la force des oscillations. Aussi, dispose t'on aujourd'hui de résultats positifs concernant la propagation d'oscillations de grandes amplitudes ie d'amplitudes en  $O(1)$  en dimension un d'espace. Si l'amplitude ne peut pas être autant poussée, en général, en plusieurs dimension d'espace, comme le montre le travail de D.Serre ([25]), l'article de [4] donne des résultats positifs pour ce que les auteurs appellent des oscillations fortes c'est-à-dire d'amplitude en  $O(\sqrt{\varepsilon})$ , et [3] montre qu'il est même possible de propager des solutions de grande amplitude polarisée sur l'entropie pour le système d'Euler. Il serait intéressant de chercher des résultats analogues pour les couches limites.

Le théorème 1.2 donné en introduction est une conséquence du théorème 2.1. En fait, on peut même déduire du théorème 2.1 des estimations plus précises de  $u^\varepsilon - u^0$  dans des espaces de type Sobolev. Nous allons présenter ces estimations plus bas dans cette section. Avant cela, nous donnons des propriétés de polarisation des profils de couches limites intervenant dans le théorème 2.1. Celles-ci sont montrées au cours de sa démonstration. Ces propriétés de polarisation permettent de donner des estimations plus précises de  $u^\varepsilon - u^0$  pour certaines coordonnées.

Lorsqu'on dispose d'une fonction régulière  $u$  (à valeurs vectorielles ou matricielles) sur  $\Omega_T^+$ , on note  $\hat{u}$  sa trace sur  $\Gamma_T$ . On définit également, pour tout  $(t, y) \in \Gamma_T$ ,

$$\hat{A}_n(t, y) := A_n(\hat{b}(t, y), \hat{u}^0(t, y)).$$

On introduit les champs d'espaces vectoriels :

$$E_+(t, y) := \sum_{\lambda > 0} \ker(\mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n(t, y) - \lambda Id), \quad E_0(t, y) := \ker \mathring{A}_n(t, y),$$

$$E_-(t, y) := \sum_{\lambda < 0} \ker(\mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n(t, y) - \lambda Id).$$

A ces trois sous-espaces on associe, pour tout  $(t, y)$ , leur dimension respective  $d_+$ ,  $d_0$  et  $d_-$  et les projecteurs  $\Pi_+$ ,  $\Pi_0$  et  $\Pi_-$  associés à la décomposition de  $\mathbb{R}^N$  en  $\mathbb{R}^N = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$ . Par exemple,  $\Pi_+$  est le projecteur sur  $E_+$  parallèlement à  $E_- \oplus E_0$ . En général, ces projecteurs ne sont donc pas orthogonaux. Une conséquence de l'hypothèse 1.1 est que les valeurs  $d_+$ ,  $d_-$  et  $d_0$  sont indépendantes de  $(t, y)$ . Une conséquence de l'hypothèse 1.2 est que  $r = d_+$ . Au niveau de la CLC, on a l'équation de polarisation :

$$(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1 = 0. \quad (14)$$

et la relation de polarisation suivante pour les deux premiers profils de CLNC :

$$(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2 = (Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^3 = 0. \quad (15)$$

En fait, ces propriétés (14) et (15) sont vérifiées respectivement par le premier profil non nul de CLC et par les deux premiers profils non nuls de CLNC. C'est en tenant compte des propriétés (14) et (15) que l'on déduit du théorème 2.1 les estimations qui suivent.

On note, pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $Z_i := \partial_i$  et  $Z_n := h(x_n)\partial_n$  où  $h$  est une fonction  $C^\infty$  à valeurs strictement positives et bornée sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $h(x_n) = x_n$  quand  $0 \leq x_n \leq 1$ .  $Z := (Z_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de l'algèbre des champs de vecteurs  $C^\infty$  tangents à  $\{x_n = 0\}$ .

On introduit les normes

$$\|u\|_{H^{m,s}(\Omega_T)} := \sum_{i+j \leq m; i \leq s} \|Z^j \partial_n^i u\|_{L^2(\Omega_T^+)}$$

qui différentient régularités normale et conormale.

On définit les quantités

$$U_+^\varepsilon := \Pi_+(u^\varepsilon - u^0), \quad U_-^\varepsilon := \Pi_-(u^\varepsilon - u^0), \quad U_0^\varepsilon := \Pi_0(u^\varepsilon - u^0). \quad (16)$$

Elles vérifient, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , les estimations suivantes :

- dans la norme  $L^\infty$

$$\|U_+^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\varepsilon), \quad \|U_-^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\varepsilon), \quad \|U_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

- dans les normes  $H^{m,s}$ ,

$$\begin{aligned} \|U_+^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} &= O(\varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}})) \quad \forall s \in [0, \frac{5}{2}], \\ \|U_-^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} &= O(\varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}-s} + \varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}})) \quad \forall s \in [0, \frac{3}{2}], \\ \|U_0^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} &= O(\varepsilon^{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}}) \quad \forall s \in [0, \frac{3}{2}]. \end{aligned}$$

Dans le cas où le bord est non caractéristique, du fait que les couches limites non caractéristiques sont plus petites que les couches limites caractéristiques, on peut améliorer les estimations en

$$\begin{aligned} \|U_+^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} &= O(\varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}-s})) \quad \forall s \in [0, \frac{5}{2}], \\ \|U_-^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} &= O(\varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}-s})) \quad \forall s \in [0, \frac{3}{2}]. \end{aligned}$$

On notera donc que la limitation de la convergence des  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$  provient des différentiations normales et de certaines composantes. Ceci est du à la présence de couches limites de faibles amplitudes.

Dans la section suivante, nous donnons des exemples d'applications. La section 4 est consacrée à la preuve de la proposition 1.1 et les sections suivantes à la démonstration du théorème 2.1.

### 3 Applications

**Exemple 1** *Le cas unidimensionnel.*

Un système hyperbolique linéaire en dimension  $n = 1$  avec une condition aux limites portant sur un bord non caractéristique et satisfaisant la condition de Lopatinski peut se mettre sous une forme symétrique pour laquelle la condition aux limites est strictement dissipative. ([27])

**Exemple 2** *Le système de Maxwell avec condition d'onde entrante.*

Dans le vide, le système de Maxwell peut s'écrire :

$$\partial_t E - c. \operatorname{rot} B = 0, \quad \partial_t B + c. \operatorname{rot} E = 0.$$

On considère la condition aux limites dite d'"onde entrante" ([6])

$$(E - cB \wedge \nu) \wedge \nu = 0$$

où  $\nu$  est la normale sortante au milieu. Le problème vérifie les hypothèses 1.1 ( $d_0 = 2$ ), 1.2 (il est même strictement dissipatif) et 1.3 (le problème est linéaire). Prenant pour viscosité le Laplacien, on introduit le problème parabolique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E^\varepsilon - c. \operatorname{rot} B^\varepsilon = \varepsilon \Delta E^\varepsilon \\ \partial_t B^\varepsilon + c. \operatorname{rot} E^\varepsilon = \varepsilon \Delta B^\varepsilon \\ (E^\varepsilon - cB^\varepsilon \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \\ (\partial_\nu E^\varepsilon + c\partial_\nu B^\varepsilon \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \\ \partial_\nu E^\varepsilon \wedge \nu = \partial_\nu B^\varepsilon \wedge \nu = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \\ \\ \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \end{array} \quad (17)$$

où  $\partial_\nu$  désigne la dérivée normale.

Notons que dans cette application, on considère des systèmes linéaires si bien que l'existence de solutions régulières aux problèmes (17) sur l'intervalle de temps  $(0, T_0)$  est dans ce cas-là assurée. Le théorème 2.1 donne cependant d'autres informations pertinentes sur les solutions  $u^\varepsilon$ . Il donne une description asymptotique, pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , des solutions  $u^\varepsilon$  à travers un développement de type BKW. De plus, une conséquence de ce développement est la convergence des solutions  $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$  vers la solution  $(E^0, B^0)$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E^0 - c. \operatorname{rot} B^0 = 0 \\ \partial_t B^0 + c. \operatorname{rot} E^0 = 0 \\ (E^0 - cB^0 \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \\ \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \end{array}$$

Les quantités  $U_+$ ,  $U_-$  et  $U_0$  correspondent ici à

$$U_+ := (E - cB \wedge \nu) \wedge \nu, \quad U_- := (E + cB \wedge \nu) \wedge \nu, \quad U_0 := \begin{bmatrix} (E \cdot \nu) \nu \\ (B \cdot \nu) \nu \end{bmatrix}.$$

**Exemple 3** *Solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires.*

On considère un opérateur

$$\mathcal{H} = A_0(t, x) \partial_t + \sum_{1 \leq j \leq n} A_j(t, x) \partial_j + B(t, x)$$

symétrique hyperbolique linéaire et on s'intéresse à des solutions particulières du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}u = F(t, x, u) + f(t, x) \\ u = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{quand } (t, x) \in \Omega_T, \\ \text{quand } (t, x) \in \Omega_0, \end{array} \quad (18)$$

où  $\Omega_T := (0, T) \times \mathbb{R}^n$ , sous forme de fonctions régulières de part et d'autre d'une hypersurface  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Les singularités envisagées sont des sauts de  $u$  ou de ses dérivées, l'hypersurface  $\Gamma$  étant supposée lisse et caractéristique. Comme on s'intéresse à des résultats locaux, on peut, quitte à la redresser, supposer sans perte de généralité que  $\Gamma = \{x_n = 0\}$ .

On note  $p - H^\infty(\Omega_T)$  l'espace des fonctions  $H^\infty$  de part et d'autre de  $\Gamma_T$  et on suppose que  $f \in p - H^\infty(\Omega_T)$ . Le fait que  $\Gamma$  soit une surface caractéristique se traduit par  $\text{Ker}A_n \neq \{0\}$ . Le saut n'est possible que sur la projection orthogonale sur  $\text{Ker}A_n$  (condition de Rankine-Hugoniot [27]). On suppose

**Hypothèse 3.1** *Le fibré  $\text{Ker}A_n$  est de dimension constante sur  $\Gamma$ .*

C'est en particulier le cas lorsque l'opérateur est strictement hyperbolique. On dispose du résultat suivant ([18], [29]) :

**Théorème 3.1** *Il existe un temps  $T_0$  et une unique solution régulière  $u^0 \in p - H^\infty(\Omega_T)$  du problème*

$$\begin{cases} \mathcal{H}u = F(t, x, u) + f(t, x) & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}, \\ u = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_0, \end{cases} \quad (19)$$

On va montrer que l'on peut obtenir ces solutions comme limites de solutions sur  $\Omega_T^+$  et  $\Omega_T^- := (0, T) \times \mathbb{R}_-^n$  de l'équation perturbée par une petite viscosité. Par souci de simplicité, on choisira le Laplacien mais les résultats sont les mêmes pour toute viscosité uniformément elliptique. On considère l'équation

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad (20)$$

où

$$\mathcal{L}^\varepsilon u := \mathcal{H}u - (F(t, x, u) + f(t, x) + \varepsilon \Delta u). \quad (21)$$

Montrons en quoi ceci est un exemple d'application des résultats de la section 2. On ramène, pour cela, le problème à un problème dans le demi-espace doublant le nombre d'inconnues.

- En ce qui concerne le problème hyperbolique, les conditions de transmission imposées par l'équation (conditions de Rankine-Hugoniot) se traduisent par des conditions aux limites maximales dissipatives (en fait même conservatives).

A  $u$  défini sur  $\Omega_T^+$ , on associe  $u_+$  sa restriction à  $\Omega_T^+$ ,  $u_-$  par  $u_-(t, x) := u(t, y, -x_n)$ , pour tout  $(t, x) \in \Omega_T^+$  et  $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix}$ . Pour tout  $(t, y)$ , on note  $\Pi_0(t, y)$  le projecteur orthogonal sur  $\ker \hat{A}_n(t, y)$ . On a alors que  $u$  vérifie (19) si et seulement si  $\mathbf{u}$  vérifie le problème mixte hyperbolique

$$\begin{cases} \mathcal{H}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t, x, \mathbf{u}) + \mathbf{f}(t, x) & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ M\mathbf{u} = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{u} = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \quad (22)$$



où

$$M := [(Id - \Pi_0) \quad -(Id - \Pi_0)], \quad \mathcal{H} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_- \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_+ := \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_- := A_{0,-}(t,x)\partial_t + \sum_{1 \leq j \leq n-1} A_{j,-}(t,x)\partial_j - A_{n,-}(t,x)\partial_n + B_-(t,x),$$

$$\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) := \begin{bmatrix} F(t,x,u_+) \\ F(t,y,-x_n,u_-) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}.$$

Le problème (22) rentre ainsi dans le cadre des théorèmes 1.1 et 2.1. La matrice normale du système est

$$\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & -A_n \end{bmatrix}.$$

L'hypothèse 3.1 assure que  $\mathbf{A}_n$  vérifie l'hypothèse 1.1. Le lemme suivant assure l'hypothèse 1.2 :

**Lemme 3.1** *La condition aux limites est maximale dissipative ie la forme quadratique  $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$  est négative sur le sous-espace  $\ker M$  et  $\ker M$  est maximale pour cette propriété.*

*Preuve.* Soit  $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix} \in \ker M$ . On a donc  $(Id - \Pi_0)u_+ = (Id - \Pi_0)u_-$ . Or,

$$\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathring{A}_n u_+, u_+ \rangle - \langle \mathring{A}_n u_-, u_- \rangle.$$

Utilisant l'identité  $\mathring{A}_n \Pi_0 = 0$  et la symétrie de  $\mathring{A}_n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathring{A}_n (Id - \Pi_0)u_+, (Id - \Pi_0)u_+ \rangle \\ &\quad - \langle \mathring{A}_n (Id - \Pi_0)u_-, (Id - \Pi_0)u_- \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la forme quadratique  $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$  est négative sur le sous-espace  $\ker M$ .

De plus,  $\mathring{\mathbf{A}}_n$  possède  $N + d_0$  valeurs propres négatives ou nulles et la somme des sous-espaces spectraux associés constitue un sous-espace maximal sur lequel la forme quadratique  $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$  est négative.

Comme tous les sous-espaces maximaux pour cette propriété ont la même dimension  $N + d_0 = \dim \ker M$ , le lemme est prouvé.  $\square$

L'hypothèse 1.3 est trivialement satisfaite car l'opérateur  $\mathcal{H}$  est linéaire.

On note  $\mathbf{\Pi}_0$  le projecteur orthogonal sur  $\ker \mathring{\mathbf{A}}_n$ .

• Intéressons nous maintenant aux perturbations paraboliques. La condition aux limites  $\mathbf{\Pi}_0 \partial_n \mathbf{u} = \mathbf{0}$  équivaut à

$$(Id - \Pi_0)\partial_n u_+ = -(Id - \Pi_0)\partial_n u_- \quad \text{et} \quad \Pi_0 \partial_n u_+ = \Pi_0 \partial_n u_- = 0.$$

On associe à la fonction  $u^\varepsilon$ , une fonction  $\mathbf{u}^\varepsilon$  définie sur  $\Omega_T^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2N}$  par  $\mathbf{u}^\varepsilon := \begin{bmatrix} u_+^\varepsilon \\ u_-^\varepsilon \end{bmatrix}$ , où  $u_+^\varepsilon$  est la restriction de  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_T^+$  et  $u_-^\varepsilon$  est définie par

$$u_-^\varepsilon(t, x) := u^\varepsilon(t, y, -x_n) \quad \text{pour } (t, x) \in \Omega_T^+.$$

On a alors l'équivalence suivante :  $u^\varepsilon$  vérifie (20) si et seulement si  $\mathbf{u}^\varepsilon$  vérifie

$$\mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Omega_T^+$$

où

$$\mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{u} := \mathcal{H}\mathbf{u} - \varepsilon \Delta \mathbf{u} - \mathbf{F}(t, x, \mathbf{u}) - \mathbf{f}$$

avec  $\Delta := \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$ .

On considère donc les problèmes mixtes paraboliques :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 & \text{pour } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ M\mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \\ \Pi \partial_n \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } (t, x) \in \Gamma_T$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in \Omega_0^+$$

On insiste sur le fait que les approximations  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  que l'on considère ici ne sont pas solutions de (6) sur  $\Omega_T$ . Les conditions aux limites que l'on prescrit pour le problème réduit (à un demi-espace) diffèrent des conditions de raccord considérées dans [29]. Précisément, ce sont les conditions aux limites portant sur  $\Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon$  qui sont modifiées. On définit  $\Pi_+$  (resp  $\Pi_-$ ) le projecteur orthogonal associé à la somme directe des sous-espaces propres correspondants à des valeurs propres strictement positives (resp strictement négatives). Les estimations de la section 2. tiennent pour

$$U_+^\varepsilon := \Pi_+(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0), \quad U_-^\varepsilon := \Pi_-(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0), \quad U_0^\varepsilon := \Pi_0(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0).$$

On notera le gain de régularité par rapports aux estimations de [29]. Essentiellement, l'espace critique pour la convergence est  $H^{\frac{1}{2}}$  dans [29] et  $H^{\frac{3}{2}}$  ici. Le gain s'exprime aussi en vitesse de convergence dans  $L^2$  : celle-ci est de  $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$  dans [29] et de  $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$  ici.

Dans [29], on constate que l'on peut affiner les estimations dans le cas où la discontinuité n'affecte qu'une dérivée de la fonction. Plus précisément, on montre que la convergence des  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$  tient dans des espaces de Sobolev  $H^s$  avec  $s$  d'autant plus élevé que la singularité est faible, c'est à dire plus la discontinuité affecte une dérivée d'ordre élevée. Dans le cas d'un saut de dérivée, les conditions de raccord de [29] peut donc conduire à une meilleure estimation que celle obtenue ici avec le champ complémentaire  $\Pi$ .

**Exemple 4** *Le système d'Euler.*

On note respectivement  $p$ ,  $v$  et  $s$  la pression, la vitesse et l'entropie,  $\rho(p, s)$  la densité volumique, supposée strictement positive, et  $\alpha(p, s) := \frac{\partial_p \rho(p, s)}{\rho(p, s)}$ , le système d'Euler peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_v s &= 0 \\ \rho \mathbb{X}_v v + \nabla p &= 0 \\ \alpha \mathbb{X}_v p + \nabla \cdot v &= 0\end{aligned}$$

où l'on a noté  $\mathbb{X}_v$  la dérivée particulaire  $\mathbb{X}_v := \partial_t + v \cdot \nabla$ , soit encore

$$(A_0 \partial_t + \sum_{i=1}^n A_i \partial_i) \begin{bmatrix} s \\ v \\ p \end{bmatrix} = 0$$

où  $A_0 := \text{diag}(1, \rho I_n, \alpha)$  et, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i = \begin{bmatrix} v_i & 0 & 0 \\ 0 & \rho v_i I_n & e_i \\ 0 & {}^t e_i & \alpha v_i \end{bmatrix}$ , où les

$(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Notons que dans cet exemple, on a  $N = n + 2$ . On supposera que  $\alpha$  est strictement positif. En particulier, notant  $v = (w, v_n)$  les vitesses tangentielle et normale, on a

$$A_n = v_n A_0 + \begin{bmatrix} 0_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On va a considérer, pour condition au limites, la condition naturelle  $v_n = 0$ . Le problème :

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{X}_{v^0} s^0 &= 0 \\ \rho(p^0, s^0) \mathbb{X}_{v^0} v^0 + \nabla p^0 &= 0 \\ \alpha(p^0, s^0) \mathbb{X}_{v^0} p^0 + \nabla \cdot v^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ v^0 \cdot \nu = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T$$

est alors conservatif. Le bord est caractéristique de multiplicité constante égale à  $n$ . [10] assure que l'hypothèse 1.3 est vérifiée. On introduit le problème mixte parabolique :

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{X}_{v^\varepsilon} s^\varepsilon &= \varepsilon \Delta s^\varepsilon \\ \rho(p^\varepsilon, s^\varepsilon) \mathbb{X}_{v^\varepsilon} v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon &= \varepsilon \Delta v^\varepsilon \\ \alpha(p^\varepsilon, s^\varepsilon) \mathbb{X}_{v^\varepsilon} p^\varepsilon + \nabla \cdot v^\varepsilon &= \varepsilon \Delta p^\varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \left. \begin{aligned} v^\varepsilon \cdot \nu &= 0 \\ \partial_\nu p^\varepsilon = \partial_\nu w^\varepsilon = \partial_\nu s^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Gamma_T$$

Le théorème 1.2 assure alors la convergence des solutions  $(s^\varepsilon, v^\varepsilon, p^\varepsilon)$  vers  $(s^0, v^0, p^0)$ . Les quantités  $U_+$ ,  $U_-$  et  $U_0$  définies en (16) correspondent ici à

$$U_+ := v_n + p, \quad U_- := v_n - p, \quad U_0 := \begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix}.$$

## 4 Preuve de la proposition 1.1

• Supposons l'assertion (i) vérifiée et montrons l'assertion (ii). Il existe  $w_1$  voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^{N'}$ ,  $w_2$ ,  $\tilde{w}_2$  voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbb{R}^N$  et un difféomorphisme  $C^\infty$

$$\begin{aligned} \chi : \quad \tilde{w} &\rightarrow w \\ (b, \tilde{u}) &\mapsto (b, u) = \mathcal{M}(b, \tilde{u}) \end{aligned}$$

où  $w := w_1 \times w_2$ ,  $w := w_1 \times \tilde{w}_2$  tel que

★ pour tout  $b \in w_1$ ,  $\mathcal{M}^{-1}(b, \cdot)(\Lambda_b \cap w_2) = (\ker M) \cap \tilde{w}_2$  où  $M$  est la matrice constante, de taille  $r \times N$ ,  $M := \begin{bmatrix} Id_r & 0_{N-r} \end{bmatrix}$ ,

★ la matrice

$$\tilde{A}_n(b, \tilde{u}) := {}^t \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, u) \cdot A_n(b, \mathcal{M}(\tilde{u})) \cdot \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, u)$$

est, pour  $(b, \tilde{u}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$ , de la forme

$$\tilde{A}_n(b, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H(b, \tilde{u}) \end{bmatrix},$$

où  $H$  est une matrice carrée de taille  $N - d_0$  inversible.

On a ainsi pour tout couple de vecteurs  $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2) \times \ker M$ ,

$$\ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker(D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \cdot \tilde{h}). \quad (23)$$

En effet, si l'on note  $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ , on a, pour  $(b, \tilde{u})$  dans  $w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$ ,

$$\ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) = \text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq d_0}$$

et, pour  $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2) \times \ker M$ ,

$$D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \cdot \tilde{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\tilde{u}} H(b, \tilde{u}) \cdot \tilde{h} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour  $1 \leq i \leq d_0$ , on a  $D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \cdot \tilde{h} \cdot e_i = 0$ , ce qui prouve (23).

• Montrons l'implication “(ii) donne (iii)”. L'observation de départ est que l'on a, pour  $\theta$  dans  $w$ , l'implication :

$$\phi(\theta) = 0 \Rightarrow \ker A_n(\theta) \subset \ker D_u \Phi(\theta). \quad (24)$$

Rappelons que ceci est une conséquence de l'hypothèse 1.2. Or, pour tout  $\tilde{\theta} := (b, \tilde{u}) \in \tilde{w}$ , on a, par définition de  $\tilde{A}_n$ ,

$$(\partial_{\tilde{u}} \mathcal{M})^{-1}(\tilde{\theta}).(\ker A_n(b, \mathcal{M}(\tilde{\theta}))) = \ker \tilde{A}_n(\tilde{\theta}).$$

De plus, on a par hypothèse que, pour tout  $b \in w_1$ ,

$$\mathcal{M}^{-1}(b, \cdot)(\Lambda_b \cap w_2) = \ker M \cap \tilde{w}_2.$$

En conséquence, on a, pour  $\tilde{\theta} := (b, \tilde{u}) \in \tilde{w}$ ,

$$(\partial_{\tilde{u}} \mathcal{M})^{-1}(\tilde{\theta}).(\ker D_u \Phi(b, \mathcal{M}(\tilde{\theta}))) = \ker M.$$

Appliquant  $(\partial_{\tilde{u}} \mathcal{M})^{-1}$  à l'inclusion (24), on a  $\ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker M$ . L'implication “(iii) donne (iv)” est alors claire.

• Supposons maintenant l'assertion (iii) vérifiée. Soit  $(r_1(\tilde{\theta}), \dots, r_{d_0}(\tilde{\theta}))$  une base de  $\ker \tilde{A}_n(\tilde{\theta})$ , dépendant de façon  $C^\infty$  de  $\tilde{\theta}$  parcourant  $w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$ . Considérons un couple  $p, q$  d'entiers compris entre 1 et  $d$ .

Comme l'identité  $(\tilde{A}_n r_p)(\tilde{\theta}) = 0$  tient pour tout  $\tilde{\theta} \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$  et que  $\ker \tilde{A}_n(\tilde{\theta}) \subset \ker M$ , on peut appliquer le champ de vecteurs  $r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}$ , d'où

$$\{(r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) \tilde{A}_n\} r_p + \tilde{A}_n \{(r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) r_p\} = 0. \quad (25)$$

Comme, pour tout couple de vecteurs  $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times ((\ker M) \cap \tilde{w}_2) \times \ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u})$ , on a, par hypothèse, l'inclusion suivante :

$$\ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker (D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}).\tilde{h}),$$

il vient

$$r_p(b, \tilde{u}) \in \ker \tilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker D_{\tilde{u}} \tilde{A}_n(b, \tilde{u}). r_q(b, \tilde{u}) = \ker (r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) \tilde{A}_n(b, \tilde{u}),$$

c'est à dire  $\{(r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) \tilde{A}_n\} r_p = 0$ .

De (25), on tire alors  $\tilde{A}_n \{(r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) r_p\} = 0$  c'est à dire  $(r_q \cdot \nabla_{\tilde{u}}) r_p \in \ker \tilde{A}_n$ .

En échangeant  $p$  et  $q$ , on a de même  $(r_p \cdot \nabla_{\tilde{u}}) r_q \in \ker \tilde{A}_n$ . Par soustraction, on obtient que le crochet de Lie  $[r_p(b, \cdot), r_q(b, \cdot)]$  appartient à  $\ker \tilde{A}_n(b, \cdot)$ . On a ainsi montré que, pour  $\tilde{\theta}$  voisin de  $\theta$ , la distribution  $\ker \tilde{A}_n(b, \cdot)$  sur  $\ker M$  est involutive. Comme cette notion est préservée par difféomorphisme, on en déduit (i).  $\square$

## 5 Schéma de la preuve du théorème 2.1

On prouve le théorème 2.1 avec la stratégie de [28] et [29] : on commence par prouver l'existence de solutions approchées sous la forme de développements BKW, puis on utilise un théorème d'approximation.

On va effectuer un changement d'inconnue qui permet de redresser les conditions aux limites. Ceci permet d'éviter des problèmes de commutateurs lors des estimations conormales.

**Proposition 5.1** *Ils existent des matrices  $G(b)$ ,  $C^\infty$ , telles que pour tout  $u \in \mathbb{R}^N$ , pour tout  $b \in \mathbb{R}^{N'}$ ,*

$$\begin{aligned} Mu = 0 &\Leftrightarrow M\tilde{u} = 0 \\ \Pi(b)u = 0 &\Leftrightarrow \underline{\Pi}\tilde{u} = 0 \end{aligned}$$

où  $u := G(b)\tilde{u}$  et  $\underline{\Pi}$  est une matrice de taille  $N - d_+ \times N$  égale à

$$\underline{\Pi} := \begin{bmatrix} O_{N-d_+,N} & Id_{N-d_+} \end{bmatrix}.$$

**Preuve.** Notons  $(e_i(b))_{1 \leq i \leq N-d_+}$  une base  $C^\infty$  de  $(\ker M)^{\perp E_{n,n}(b)}$  et  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On définit alors  $G(b) := \begin{bmatrix} Id_{N-d_+} & G(b)^b \end{bmatrix}$  où

$$G(b)^b := \begin{bmatrix} e_1(b) & \dots & e_{N-d_+}(b) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ce changement d'inconnue étant effectué, il suffit alors de multiplier à gauche par la matrice  ${}^tG(b)^{-1}$  pour obtenir un système symétrique qui vérifient les mêmes hypothèses que le système initial. Pour ne pas alourdir le papier, on conservera dans la suite, pour le système réduit, les mêmes notations que pour le système initial. Plus précisément, on notera  $\Pi \partial_n u = 0$  la condition aux limites de type Neumann,  $\Pi$  étant une matrice constante, indépendante du paramètre  $b$  et en particulier des variables  $(t, x)$ .

Le théorème suivant prouve l'existence de solutions approchées de la forme (12) de tout ordre. Par commodité, compte-tenu de la méthode de démonstration, on préfère introduire un profil de CLC et deux profils de CLNC supplémentaires. On introduit aussi, pour tout  $T \geq 0$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , les espaces

$$\mathcal{B}^s(T) := \{(v_\varepsilon)_\varepsilon \in (H^s(\Gamma_T))^{[0,1]} / \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|v^\varepsilon\|_{H^s(\Gamma_T)} < \infty\}.$$

**Théorème 5.1** *Pour tout entier naturel  $k \geq 2$ , il existe des profils  $\mathcal{U}_b^1 \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ ,  $(\mathcal{U}^j)_{2 \leq j \leq k} \in \mathcal{P}(\Omega_{T_0}^+)$ ,  $\mathcal{U}_b^{k+1} \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ ,  $\mathcal{U}_c^{k+1}$ ,  $\mathcal{U}_c^{k+2} \in \mathcal{N}_z(T_0)$  tel que la famille  $(a^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  définie par*

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(t, x) &= u^0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} \mathcal{U}_b^1(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sum_{j=2}^k \sqrt{\varepsilon^j} \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \\ &+ \sqrt{\varepsilon}^{k+1} \left\{ \mathcal{U}_b^{k+1}(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \mathcal{U}_c^{k+1}(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}) \right\} + \sqrt{\varepsilon}^{-k+2} \mathcal{U}_c^{k+2}(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (26)$$

vérifie

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial)a^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_\varepsilon & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ Ma^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_{1,\varepsilon} \\ \Pi \partial_n a^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_{2,\varepsilon} \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}$$

où  $R_\varepsilon \in \Lambda^s(T_0)$ ;  $R_{1,\varepsilon}$  et  $R_{2,\varepsilon}$  sont dans  $\mathcal{B}^s(T_0)$ , pour tout  $s$  entier naturel.

La preuve du théorème 5.1 fait l'objet de la section suivante.

Le théorème suivant prouve l'existence d'une famille de solutions exactes de la famille de problèmes  $\mathbf{P}^\varepsilon$  admettant un développement asymptotique dont la partie principale est une famille de solutions approchées des problèmes  $\mathbf{P}^\varepsilon$ .

Soient, pour  $T$  positif et  $m \in \mathbb{N}$ , les ensembles

$$\mathcal{A}^m(T) := \{(a_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in W^{m,\infty}(\Omega_T^+) / \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 / j + k \leq m \\ \sup_{\varepsilon \in ]0,1]} \|(\varepsilon \partial_n)^k Z^j u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_T^+)} < \infty\}.$$

Notons que si  $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$  alors la famille  $(a^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  définie par

$$a^\varepsilon(t, x) := \mathcal{U}\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

est dans  $\mathcal{A}^m(T)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 5.2** *Soit  $M > 1$  et  $m \geq \frac{n}{2} + 1$ . Alors si  $(a^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in \mathcal{A}^{m+1}(T_0)$  est une famille de solutions approchées de  $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$  au sens où*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial) &= \varepsilon^M g_\varepsilon & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ Ma^\varepsilon &= 0 \\ \Pi \partial_n a^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}$$

avec  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in \Lambda^m(T_0)$  alors il existe un réel  $\varepsilon_0 \in ]0, 1]$  et une famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  de solutions exactes des problèmes  $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$  telle que

$$\left(\frac{u^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon^M}\right)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in \Lambda^m(T_0).$$

Ce théorème, démontré à la section 7, est une variante des théorèmes d'approximations utilisés dans [28] et [29]. Les différences essentielles résident dans les conditions aux limites et dans le caractère quasilinéaire. Si dans le cas semilinéaire, le contrôle des semilinéarités peut se faire par une norme  $L^\infty$ , on utilise ici une norme Lipschitz. C'est pourquoi, on est ici amené à faire l'hypothèse  $M > 1$  alors que dans le cas semilinéaire, on ne supposait que  $M > \frac{1}{4}$ . On renvoie à [28] pour plus de détails quant à la philosophie de ces théorèmes.

Le théorème 2.1 s'obtient en appliquant le théorème 5.2 avec, pour famille de solutions approchées  $(a^\varepsilon)$  un relèvement du développement donné par le théorème 5.1, pour  $k \geq 2$ . La forme du développement et l'appartenance des restes  $R_{1,\varepsilon}$  et  $R_{2,\varepsilon}$ , dans les conditions aux limites du théorème 5.1, aux espaces  $\mathcal{B}^s(T)$  assure que le relèvement est bien dans  $\mathcal{A}^{m+1}(T)$ .

## 6 Preuve du théorème 5.1

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 5.1. On commence par énoncer une propriété des développements de couches limites considérés qui est démontrée dans [28]. Dans la section 7.2, nous réalisons une analyse spectrale du champ complémentaire  $\Pi$  qui est sous-jacente à la présence de couches limites de petite amplitude. En particulier, nous montrons qu'il existe des matrices  $K(t, y)$  telles que

$$\Pi u = 0 \Leftrightarrow \Pi_0 u = 0 \quad \text{et} \quad (\Pi_- + K\Pi_+)u = 0.$$

Dans les sections 7.3 et 7.4, nous énonçons des résultats sur les équations de profils correspondantes respectivement aux CLC et aux CLNC. Le choix de conditions aux limites différentes induisent des variations mineures par rapport à [12], [28], [29]. Dans la section 7.5, nous substituons le développement

$$u^0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} \mathcal{U}_b^1(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sum_{j \geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \quad (27)$$

à la place de  $u^\varepsilon$  dans (6). La proposition 6.1 assure que l'on obtient un développement de la même nature et nous détaillons ce développement. Dans la section 7.6, nous faisons une étude similaire pour les conditions aux limites. Dans les sections 7.7 à 7.10, nous montrons comment l'obtention d'une solution approchée sous la forme d'un développement de la forme (27) équivaut à une succession de problèmes pour les profils et nous résolvons "en cascade" ces problèmes.

Considérons un temps  $T$  positif quelconque.

### 6.1 Composition non linéaire des profils

**Définition 6.1** *On dira qu'une famille de fonctions régulières  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  satisfait*

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

*pour une suite donnée de profils  $\mathcal{U}^j$  de  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  si pour tout  $k$  entier naturel, la famille  $(r_k^\varepsilon)_\varepsilon$  définie par*

$$r_k^\varepsilon := u^\varepsilon - \sum_{j=0}^k \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$



est dans  $\Lambda^m(T)$ .

$\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  est un espace de Fréchet, ce n'est pas une algèbre mais est préservé par composition non linéaire au sens suivant :

**Proposition 6.1** Soit  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une famille de fonctions de  $H^\infty(\Omega_T^+)$  satisfaisant

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

pour une suite donnée de profils  $\mathcal{U}^j := \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0 + \mathcal{U}_c^0$  de  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  et  $F(t, x, u)$  une fonction de  $C^\infty(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  telle que  $F(t, x, 0) = 0$ . Alors

1. La fonction  $F(t, x, u^\varepsilon(t, x))$  est dans  $H^\infty(\Omega_T^+)$  et il existe  $(\mathcal{V}^j)_{j \geq 0}$  dans  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  tels que

$$F(t, x, u^\varepsilon(t, x)) \sim \sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

2. Le profil  $\mathcal{V}^0$  se décompose en  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_a^0 + \mathcal{V}_b^0 + \mathcal{V}_c^0$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a^0 &:= F(t, x, \mathcal{U}_a^0), \\ \mathcal{V}_b^0 &:= F(t, x, \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0) - F(t, x, \mathcal{U}_a^0), \\ \mathcal{V}_c^0 &:= F(t, x, \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0 + \mathcal{U}_c^0) - F(t, x, \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0). \end{aligned}$$

Lorsque  $u \in \mathcal{N}_\theta(T)$ ,  $\hat{u}$  désigne la trace de  $u$  en  $\theta = 0$ .

3. Pour tout  $j \geq 1$ , il existe  $(Q_a^j, Q_b^j, Q_c^j)_{j \in \mathbb{N}}$   $C^\infty$  de leurs arguments tels que  $\mathcal{V}^j$  se décompose en  $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}_a^j + \mathcal{V}_b^j + \mathcal{V}_c^j$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a^j &:= F'_u(t, x, \mathcal{U}_a^0) \mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k \leq j-1}), \\ \mathcal{V}_b^j &:= F'_u(t, x, \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0) \cdot (\mathcal{U}_a^j + \mathcal{U}_b^j) - F'_u(t, x, \mathcal{U}_a^0) \mathcal{U}_a^j \\ &\quad + Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k \leq j-1}), \\ \mathcal{V}_c^j &:= Q_c^j(t, x, z, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leq j}, (\partial_\theta^i \mathcal{U}_b^k)_{i+k \leq j}). \end{aligned}$$

De plus  $Q_a^1 = Q_b^1 = 0$ .

L'esprit de la proposition est le suivant : notre analyse fait intervenir des développements avec des profils et un reste. Aussi, la propriété d'algèbre n'est pas essentielle si l'erreur commise peut être incluse dans le reste. La stratégie de la démonstration se résume ainsi : on introduit une algèbre de profils plus vaste contenant  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  où sont autorisés des profils dépendants à la fois de  $\frac{x_n}{\varepsilon}$  et de  $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$ . C'est un développement avec de tels profils que l'on obtient a priori par composition non linéaire. On redéveloppe les profils couplés en un développement de CLNC en contrôlant l'erreur à tout ordre.

## 6.2 Analyse spectrale du champ complémentaire

Comme le suggère les relations de polarisation (14) et (15), on ne s'attend pas à pouvoir prescrire les valeurs de  $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1$  et  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2$  au bord (ni de leur dérivée). Aussi, on prend soin d'analyser les conditions aux limites (7) – (8) au moyen des projecteurs spectraux  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  et  $\Pi_0$ .

**Proposition 6.2** *Il existe un champ régulier ( $C^\infty$ ) de matrices  $S(t, y)$ , de taille  $N \times N$ , tel que l'on ait, pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^N$ , pour tout  $(t, y)$ , l'équivalence suivante :*

$$Mu = 0 \Leftrightarrow \Pi_+(t, y)u = S(t, y)\Pi_-(t, y)u$$

*Preuve :* Pour rester concis, on omettra au cours de la preuve les variables  $(t, y)$ . On introduit la racine carrée de  $\mathring{E}_{n,n} : R := \mathring{E}_{n,n}^{\frac{1}{2}}$ , qui est symétrique définie positive. On définit la matrice symétrique  $\Lambda := R^{-1}\mathring{A}_n R^{-1}$ . Le sous-espace d'équation  $MR^{-1}u = 0$  est maximal dissipatif pour  $\Lambda$ . On introduit les champs d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_+ &:= \sum_{\lambda > 0} \ker(\Lambda - \lambda Id), & \tilde{E}_0 &:= \ker \Lambda, \\ \tilde{E}_- &:= \sum_{\lambda < 0} \ker(\Lambda - \lambda Id). \end{aligned}$$

A ces trois sous-espaces on associe les projecteurs orthogonaux respectifs  $P_+$ ,  $P_0$  et  $P_-$ . Pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^N$ , on a la propriété suivante :

$$P_+u \neq 0 \quad \text{et} \quad MR^{-1}u = 0 \quad \text{implique} \quad P_-u \neq 0. \quad (28)$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait que le produit scalaire  $\langle \Lambda u, u \rangle$  est strictement positif, ce qui est absurde. Utilisant (28), on a que l'application  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \ker MR^{-1} &\rightarrow \tilde{E}_- \oplus \tilde{E}_0 \\ u &\rightarrow (P_-u, P_0u) \end{aligned}$$

est injective. Comptant les dimensions, on a même que  $\Phi$  est un isomorphisme. On a ainsi l'existence de matrices carrées, de tailles  $N \times N$ ,  $S'$  et  $T'$  telles que

$$Mu = 0 \Leftrightarrow P_+Ru = S'P_-Ru + T'P_0Ru.$$

Montrons que  $T'P_0 = 0$ . Dans le cas contraire, on pourrait considérer un vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $T'P_0Ru \neq 0$ ,  $P_-Ru = 0$  et  $P_+Ru = S'P_-Ru$ . Ceci contredirait (28).

Remarquons que  $P_\delta R = R\Pi_\delta$  où  $\delta$  est une notation commune pour les indices  $+$ ,  $-$  et  $0$ , le résultat suit avec  $S = R^{-1}S'R$ .  $\square$

Remarquons que, quitte à substituer  $\Pi_+ S \Pi_-$  à  $S$ , on peut supposer que

$$\text{Im} S = E_+ \quad \text{et} \quad \ker S = E_0 \oplus E_- . \quad (29)$$

Notons qu'avec ces conditions supplémentaires,  $S$  est uniquement déterminée.

On définit alors le champ complémentaire, pour tout  $(t, y) \in \Gamma_T$ , par

$$\Pi := \Pi_0 + \Pi_- + \mathring{E}_{n,n}^{-1}({}^t S) \mathring{E}_{n,n} \Pi_+$$

Notons que compte-tenu de (29), on a, pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^N$ , l'équivalence :

$$\Pi u = 0 \Leftrightarrow \Pi_0 u = 0 \quad \text{et} \quad (\Pi_- + \mathring{E}_{n,n}^{-1}({}^t S) \mathring{E}_{n,n} \Pi_+) u = 0 .$$

Montrons que le champ  $\Pi$ , ainsi défini, vérifie (5). Pour cela, on montre que pour tout couple de vecteurs  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  vérifiant les conditions  $Ma = 0$  et  $\Pi b = 0$ , on a  $\langle a, \mathring{E}_{n,n} b \rangle = 0$ .

En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle a, \mathring{E}_{n,n} b \rangle &= \langle Ra, Rb \rangle \\ &= \langle P_+ Ra, P_+ Rb \rangle + \langle P_- Ra, P_- Rb \rangle + \langle P_0 Ra, P_0 Rb \rangle , \end{aligned}$$

en utilisant l'orthogonalité des projecteurs.

Or la condition  $Ma = 0$  se réexprime par  $P_+ Ra = S' P_- Ra$  et la condition  $\Pi b = 0$  par  $P_- Rb = -{}^t S' P_+ Rb$  et  $P_0 Rb = 0$ . On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} \langle P_- Ra, P_- Rb \rangle &= \langle P_- Ra, -{}^t S' P_+ Rb \rangle \\ &= - \langle S' P_- Ra, P_+ Rb \rangle \\ &= - \langle P_+ Ra, P_+ Rb \rangle . \end{aligned}$$

### 6.3 Problème hyperbolique-parabolique

On donne ici un résultat qui nous sera utile dans la construction des CLC. Il existe des matrices  $A_n^b(t, x)$ , de régularité  $C^\infty$ , telles que  $A_n(b(t, x), u^0(t, x)) = \mathring{A}_n(t, y) + x_n A_n^b(t, x)$ . Notons  $\mathcal{H}_0$  le linéarisé de  $\mathcal{H}$  en  $u^0$ , ie  $\mathcal{H}_0(b, \partial) := \mathcal{H}(b, u^0, \partial)$ .

$$K := {}^t \Pi_0 A_n^b \Pi_0, \quad \mathbb{H} := {}^t \Pi_0 \mathcal{H}_0 \Pi_0 + K \theta \partial_\theta .$$

$\mathbb{H}$  est un opérateur symétrique hyperbolique pour lequel le bord  $\{x_n = 0\}$  est totalement caractéristique. Introduisons l'opérateur

$$\Xi := \mathbb{H} - {}^t \Pi_0 \mathring{E}_{n,n} \partial_\theta^2 .$$

On définit le problème hyperbolique-parabolique linéaire :

$$\begin{cases} (Id - \Pi_0)W = 0, & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \Xi W = f & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \partial_\theta W|_{\theta=0} = d & \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ W = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \quad (30)$$

où  $f$  est dans  $\mathcal{N}_\theta(T_0)$  et  $d$  dans  $H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$ , vérifie  $(Id - \Pi_0)d = 0$  et  $d|_{t \leq 0} = 0$ .  
On a alors le théorème suivant :

**Théorème 6.1** *Il existe un unique  $W$  dans  $\mathcal{N}_\theta(T_0)$  solution de (30).*

Ce théorème est une variante facile des théorèmes, semilinéaires, montrés dans [28] et [29]. La condition aux limites est ici un peu différente mais les techniques de démonstration s'adaptent sans difficulté.

## 6.4 CLNC

L'étude des CLNC fait intervenir des équations de la forme

$$(-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n \partial_z) \mathcal{U} = \Phi \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+, \quad (31)$$

où  $\Phi \in \mathcal{N}_z(T_0)$  et des conditions aux limites de la forme :

$$\Pi_- \partial_z \mathcal{U} = L \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \{0\} \quad (32)$$

où  $L$  est dans  $H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$ . Il s'agit d'une EDO linéaire en  $z$  paramétrée par  $(t, x)$ .  
On a la proposition suivante, très classique ([28], [29]) :

- Proposition 6.3** 1. Si  $\Phi = 0$  et  $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$  est solution de (31) alors on a  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U} = 0$ .  
2. Si  $\Pi_- \Phi = 0$  alors (31) admet une et une seule solution  $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$  telle que  $\Pi_- \mathcal{U} = 0$ .  
3. Si  $(Id - \Pi_-)\Phi = 0$  et si  $(Id - \Pi_-)L = 0$  alors (31) – (32) admet une et une seule solution  $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$  telle que  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U} = 0$ .

## 6.5 L'ansatz de résolution

Un développement de Taylor au premier ordre assure l'existence de matrices  $E_{n,n}^b(t, x)$ , dépendantes de façon  $C^\infty$  de  $(t, x)$ , tels que  $E_{n,n}(b(t, x)) = \mathring{E}_{n,n}(t, y) + x_n \cdot E_{n,n}^b(t, x)$ .

La substitution du développement (27) à la place de  $u^\varepsilon$  dans (6) donne, par la proposition précédente un développement (l'ansatz de résolution)

$$\sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

où les profils  $\mathcal{F}^j$  sont dans  $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$  et se décomposent de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_a^0 = \mathcal{H}(b, u^0, \partial)u^0 - F(b, \partial b, u^0) - f$$

et, pour  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a^j &= \mathcal{H}_0 \mathcal{U}_a^j - F'_u(b, \partial b, \mathcal{U}_a^0) \mathcal{U}_a^j + q_a^j, \\ \mathcal{F}_b^j &= \mathring{A}_n \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + (\mathcal{H}_0 + A_n^2 \theta \partial_\theta + D_u A_n(b, u^0) \mathcal{U}_b^1 \partial_\theta) \mathcal{U}_b^j - \mathring{E}_{n,n} \partial_{\theta\theta} \mathcal{U}_b^j \\ &\quad - F'_u(b, \partial b, u^0) \mathcal{U}_b^j + q_b^j, \\ \mathcal{F}_c^j &= \mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2} - \mathring{E}_{n,n} \partial_{zz} \mathcal{U}_c^{j+2} + q_c^j, \end{aligned}$$

où l'on a regroupé un certain nombre de termes de la façon suivante :

$$q_a^1 = q_b^1 = q_c^1 = 0,$$

et, pour  $j \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} q_a^j &:= -\mathcal{E} \mathcal{U}_a^{j-2} - Q_a^j(b, \partial b, (\mathcal{U}_a^k)_{k \leq j-1}), \\ q_b^j &:= -\mathcal{E}_b \mathcal{U}_b^{j-1} - \mathcal{E} \mathcal{U}_b^{j-2} - Q_b^j(b, \partial b, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k \leq j-1}), \\ q_c^j &:= (\mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_c) \mathcal{U}_c^j - \mathcal{E} \mathcal{U}_c^{j-2} - Q_c^j(b, \partial b, z, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k \leq j}). \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{E}_b$  et  $\mathcal{E}_c$  les opérateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_b &:= \sum_{i=1}^n \partial_i (E_{in} \partial_\theta \cdot) + \partial_\theta (E_{ni} \partial_i \cdot), \\ \mathcal{E}_c &:= \sum_{i=1}^n \partial_i (E_{in} \partial_z \cdot) + \partial_z (E_{ni} \partial_i \cdot). \end{aligned}$$

Noter que si l'on a choisi ici, pour la clarté de l'exposé, de chercher directement un développement de la forme (27), le lecteur curieux pourra introduire un développement plus complet

$$\sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

et constater que les profils d'ordre 0 et 1 sont nécessairement  $u^0$  et un profil de CLC.

## 6.6 L'ansatz de résolution des conditions aux limites

La substitution du développement (27) à la place de  $u^\varepsilon$  dans (7) et (8) donnent les ansatz de résolution

$$\sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}_{d0}^j(t, y), \quad \sum_{j \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}_{d1}^j(t, y)$$

où  $\mathcal{F}_{cl0}^0 = Mu^0|_{x_n=0}$  et, pour  $j \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_{cl0}^j = MU^j|_{x_n=0}$  et

$$\mathcal{F}_{cl1}^0 = \Pi(\partial_n u^0|_{x_n=0} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1|_{x_n=\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}_c^2|_{x_n=z=0})$$

et, pour  $j \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}_{cl1}^j = \Pi(\partial_n \mathcal{U}^j|_{x_n=\theta=z=0} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1}|_{x_n=\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}|_{x_n=z=0}).$$

On considère alors le problème

$$(S_{cl}^0(T_0)) : \begin{cases} Mu^0|_{x_n=0} = 0 \\ \Pi(\partial_n u^0|_{\theta=z=0} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}_c^2|_{z=0}) = 0 \end{cases},$$

et, pour  $j \geq 1$ , les problèmes

$$(S_{cl}^j(T_0)) : \begin{cases} MU^j|_{x_n=0} = 0 \\ \Pi(\partial_n \mathcal{U}^j|_{\theta=z=0} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0}) = 0 \end{cases}.$$

## 6.7 Le tableau de la cascade

On considère, pour  $j \geq 0$ , les problèmes

$$(S^j(T_0)) : \begin{cases} \mathcal{F}_a^j = {}^t (Id - \Pi_0) \mathcal{F}_b^j = \mathcal{F}_c^j = {}^t \Pi_0 \mathcal{F}_b^{j+1} = 0 \\ \text{quand } (t, x, \theta, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_z^+ \end{cases},$$

et on illustre notre stratégie de résolution en cascade par le tableau suivant :

$(S^0)$	$(S^1)$	$(S^2)$
$\mathcal{F}^0$	$\mathcal{F}_a^0, (Id - {}^t \Pi_0) \mathcal{F}_b^0, \mathcal{F}_c^0$	
$\mathcal{F}^1$	${}^t \Pi_0 \mathcal{F}_b^1$	$\mathcal{F}_a^1, (Id - {}^t \Pi_0) \mathcal{F}_b^1, \mathcal{F}_c^1$
$\mathcal{F}^2$	${}^t \Pi_0 \mathcal{F}_b^2$	$\mathcal{F}_a^2, (Id - {}^t \Pi_0) \mathcal{F}_b^2, \mathcal{F}_c^2$

Chaque terme de la première colonne est la somme de la ligne correspondante. Lors de la résolution du problème  $(S^j)$ , les profils inconnus sont  $\mathcal{U}_a^j, \mathcal{U}_b^{j+1}$  et  $\mathcal{U}_c^{j+2}$ .

Dans le cas où l'opérateur est semilinéaire, on dispose des résultats de [12] et [28] pour le cas où on prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet au problème parabolique et des résultats de [29] pour l'approximation d'une discontinuité. Aussi, il est possible de faire une analyse comparée. Dans [29], on montre qu'il est possible de ramener le problème de l'approximation d'une discontinuité le long d'une hypersurface caractéristique à un problème dans le demi-espace. Selon une propriété dite de Rankine-Hugoniot, la discontinuité est polarisée sur le noyau de la matrice normale. Les conditions aux limites pour les perturbations visqueuses sont la retranscription des conditions de raccord portant sur la fonction et sa dérivée. Au niveau de la cascade, passer de Dirichlet à ces conditions revenait à décaler d'un cran vers la gauche les profils de CLNC. Passer au champ  $\Pi$

exhibé dans cet article revient alors à décaler à leur tour d'un cran vers la gauche les profils de CLC, et d'un cran de plus les CLNC. Ce dernier point provient du couplage induit par la partie "Neumann" des conditions aux limites.

En optique géométrique, où pour des oscillations à la fréquence  $\frac{1}{\varepsilon}$ , [4] ont défini la terminologie suivante : les oscillations d'amplitudes  $O(\varepsilon)$  sont dites de faibles amplitudes, les oscillations d'amplitudes  $O(\sqrt{\varepsilon})$  sont dites de fortes amplitudes, et les oscillations d'amplitudes  $O(1)$  de grandes amplitudes. Par analogie, une CLNC (resp CLC) d'amplitude  $O(\varepsilon)$  (resp  $O(\sqrt{\varepsilon})$ ) est dite de faible amplitude, une CLNC ou une CLC d'amplitude  $O(1)$  de grande amplitude, une CLNC (resp CLC) d'amplitude  $O(\sqrt{\varepsilon})$  (resp  $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ ) de forte amplitude.

Passer, pour les perturbations paraboliques, de conditions aux limites de type Dirichlet aux conditions exposées ici, c'est passer de couches limites de grande amplitude à des couches limites de faibles amplitudes.

Voyons comment se résolvent successivement les problèmes  $(S^j(T_0)) - (S_{cl}^j(T_0))$  pour  $j \geq 0$ . Nous commençons par détailler le cas  $j = 0$ , qui est un peu particulier.

### 6.8 $(S^0(T_0)) - (S_{cl}^0(T_0))$

On définit l'opérateur  $\Xi^{[1]}$  par

$$\Xi^{[1]}W := \Xi W + K^{[1]}W \partial_\theta W$$

où

$$K^{[1]} := {}^t \Pi_0 D_u A_n(b, u^0) \cdot \Pi_0$$

et on considère le problème

$$\left. \begin{aligned} (Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1 &= 0 \\ \Xi^{[1]}\mathcal{U}_b^1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

$$\partial_\theta \mathcal{U}_b^1|_{\theta=0} = \Pi_0 \partial_n u^0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+,$$

$$\mathcal{U}_b^1 = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+.$$

Rappelons, pour le confort du lecteur, que l'opérateur  $\Xi$  est défini à la section 7.3. A priori, ce problème est non linéaire en raison du terme  $K^{[1]}\mathcal{U}_b^1 \partial_\theta \mathcal{U}_b^1$ . Cependant, la proposition 1.1 assure que ce terme est nul et le théorème 6.1 assure alors l'existence d'une solution régulière  $\mathcal{U}_b^1 \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ .

A l'aide de la proposition 31, on construit  $\mathcal{U}_c^2$  comme solution dans  $\mathcal{N}_z(T_0)$  de l'EDO en  $z$  paramétré en  $(t, x)$  :

$$(-\mathring{E}_{n,n} \partial_z^2 + \mathring{A}_n \partial_z) \mathcal{U}_c^2 = 0 \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+,$$

$$\partial_z \mathcal{U}_c^2|_{z=0} = -(\Pi_- + \mathring{E}_{n,n}^{-1}({}^t S) \mathring{E}_{n,n} \Pi_+) \partial_n u^0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+$$

Avec ces choix de  $\mathcal{U}_b^1$  et  $\mathcal{U}_c^2$ , les problèmes  $(S^0(T_0)) - (S_{cl}^0(T_0))$  sont vérifiées.

Notons que les deux problèmes sont découplés. Cela provient essentiellement des relations de polarisation  $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1 = 0$  et  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2 = 0$  (cf point 1 de la proposition 6.3). Aux ordres supérieurs, il en est autrement. Les différents types de termes (partie régulière, CLC et CLNC) sont couplés par les conditions aux limites.

### 6.9 $(S^j(T_0)) - (S_{cl}^j(T_0)); j \geq 1$

On va se servir, là encore, des résultats des sections 6.3 et 6.4.

On prend pour  $\mathcal{U}_a^j$  la solution du problème mixte symétrique hyperbolique linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \mathcal{U}_a^j &= F'_u(b, \partial b, u^0) \mathcal{U}_a^j + q_a^j \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ M \mathcal{U}_a^j &= -M(\mathcal{U}_b^j|_{\theta=0} + \mathcal{U}_c^j|_{z=0}) \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0} \\ \mathcal{U}_a^j &= 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

On détermine ensuite, dans l'ordre que l'on veut,  $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1}$  et  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^{j+2}$  comme suit. On prend  $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1}$  comme l'unique solution dans  $\mathcal{N}_\theta(T_0)$  de

$$\mathring{A}_n \partial_\theta (Id - \Pi_0) \mathcal{U}_b^{j+1} = \phi_b^{j+1} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

où

$$\phi_b^{j+1} := -(Id - {}^t \Pi_0)[(\mathcal{H}_0 + A_n^b \theta \partial_\theta - F'_u(b, \partial b, u^0) - \mathring{E}_{n,n} \partial_\theta^2) \mathcal{U}_b^j - q_b^j].$$

L'unicité provient de ce que l'opérateur  $\partial_\theta$  réalise un automorphisme de  $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ .

On construit  $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^{j+2}$  comme solution dans  $\mathcal{N}_z(T_0)$  de l'EDO en  $z$  paramétrée par  $(t, x)$  :

$$(-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n \partial_z)(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^{j+2} = (Id - \Pi_-)\mathring{E}_{n,n}^{-1} q_c^j \quad (33)$$

où  $(t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+$ .

Reste à déterminer  $\Pi_0 \mathcal{U}_b^{j+1}$  et  $\Pi_- \mathcal{U}_c^{j+2}$ . Cela se fait, encore une fois, dans l'ordre que l'on veut, comme suit : on construit  $\Pi_0 \mathcal{U}_b^{j+1}$  comme l'unique solution dans  $\mathcal{N}_\theta(T_0)$  de

$$\begin{aligned} \Xi \mathcal{U}_b^{j+1} &= {}^t \Pi_0 q_b^j \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \Pi_0 \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} &= -\Pi_0(\partial_n \mathcal{U}^j + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0}) \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ \Pi_0 \mathcal{U}_b^{j+1} &= 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$



On construit  $\Pi_- \mathcal{U}_c^{j+2}$  comme solution dans  $\mathcal{N}_z(T_0)$  de l'EDO en  $z$  paramétrée en  $(t, x)$  :

$$\begin{aligned} (-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n \partial_z) \Pi_- \mathcal{U}_c^{j+2} &= \Pi_- \mathring{E}_{n,n}^{-1} q_c^j \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ \Pi_- \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0} &= -\Pi_- (\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} + \partial_n \mathcal{U}^j) \\ -\mathring{E}_{n,n}^{-1} \cdot ({}^t S) \cdot \mathring{E}_{n,n} \Pi_+ (\partial_n \mathcal{U}^j|_{\theta=z=0} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0}) &\quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \end{aligned}$$

## 6.10 Conclusion

Avec la stratégie précédente, on obtient que le développement (26) satisfait les problèmes  $(S^j(T_0))_{0 \leq j \leq k}$  et  $(S_{cl}^j(T_0))_{0 \leq j \leq k}$ . Or, se référant au tableau de la section 6.7, on remarque lorsque les problèmes  $(S^j(T_0))_{0 \leq j \leq k}$  sont vérifiés, les premiers termes non nuls de l'ansatz de résolution sont

$$\sqrt{\varepsilon}^{k+1} (\mathcal{F}_a^{k+1} + (Id - {}^t \Pi_0) \mathcal{F}_b^{k+1} + \mathcal{F}_c^{k+1}).$$

On a ainsi un reste de la forme  $\sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_\varepsilon$ , avec  $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \Lambda^m(T_0)$ , pour tout entier naturel  $m$ . Ainsi se conclut la preuve du théorème 5.1.

Pour être complet, signalons comment obtenir la deuxième moitié des propriétés de polarisation (15). Il suffit de se rappeler que  $q_c^1 = 0$  (cf section 6.5) et qu'ainsi le second membre dans l'équation (33) est nul. La proposition 6.3 permet de conclure.

## 7 Preuve du théorème 5.2

Pour ne pas accabler le lecteur, on omet le paramètre  $b$  dans les lignes qui suivent.

### 7.1 Reformulation du problème

On va reformuler le problème de manière à jauger la force des non linéarités en fonction du petit paramètre  $\varepsilon$ . On cherche une famille de solutions exactes de  $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$  (au moins pour une gamme de  $\varepsilon$  petits) sous la forme  $u^\varepsilon = a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon$ . Pour cela, on écrit

$$\mathcal{H}(u^\varepsilon, \partial) u^\varepsilon = \mathcal{H}(u^\varepsilon, \partial) a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathcal{H}(u^\varepsilon, \partial) w^\varepsilon.$$

Par un développement de Taylor, on obtient l'existence d'un opérateur  $\mathcal{H}^b$  tel que

$$\mathcal{H}(u + v, \partial) = \mathcal{H}(u, \partial) + v \cdot \mathcal{H}^b(u, v, \partial)$$

et d'une fonction  $F^b$  telle que

$$F(t, x, u + v) = F(t, x, u) + v F^b(t, x, u, v).$$

Définissons  $B_R(\varepsilon, t, x, v)v := -v.F^b(t, x, u, \varepsilon^M v) + v.\mathcal{H}^b(a^\varepsilon, \varepsilon^M v, \partial)a^\varepsilon$ .

Soit  $T$  un réel positif. On a alors l'équivalence :  $u^\varepsilon$  vérifie le problème  $\mathbf{P}^\varepsilon(T)$  si et seulement si  $w^\varepsilon$  vérifie le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(u^\varepsilon, \partial)w^\varepsilon + B_R(\varepsilon, t, x, w^\varepsilon)w^\varepsilon - \varepsilon\mathcal{E}w^\varepsilon = -g^\varepsilon \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ Mw_\varepsilon = 0 \\ \Pi\partial_n w_\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \quad (34)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+.$$

On va montrer la convergence, uniformément en  $\varepsilon$ , sur  $(0, T_0)$ , d'un schéma itératif.

Effectuant une fois encore un développement de Taylor, on obtient l'existence de matrices  $(A_n^{b,i})_{i=1,2}$  telles que

$$A_n(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n = \mathring{A}_n\partial_n + A_n^{b,1}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)Z_n + \sqrt{\varepsilon}A_n^{b,2}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n.$$

On note  $\mathring{\mathcal{H}}(u^\varepsilon, \partial)w^\varepsilon$  l'opérateur obtenu en substituant  $\mathring{A}_n\partial_n + A_n^{b,1}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)Z_n$  à  $A_n(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n$ .

On va utiliser le schéma itératif par  $w^0 = 0$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\nu, \partial)w^{\nu+1} + \sqrt{\varepsilon}A_n^{b,2}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\nu)\partial_n w^\nu + B_R(\varepsilon, t, x, w^\nu)w^\nu \\ -\varepsilon\mathcal{E}w^{\nu+1} = -g^\varepsilon \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ Mw^{\nu+1} = 0 \\ \Pi\partial_n w^{\nu+1} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \quad (35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ w^{\nu+1} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+$$

Par souci de concision, on ne détaillera pas au cours de la preuve le traitement du terme  $a^\varepsilon$  qui joue ici le rôle de paramètre, et qu'on contrôle par des estimations de type  $L^\infty$ . ([11])

## 7.2 Estimations conormales

On commence par établir des estimations conormales pour le problème linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}^\varepsilon, \partial)w^\varepsilon - \varepsilon\mathcal{E}w^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ Mw_\varepsilon = 0 \\ \Pi\partial_n w_\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \quad (36)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+$$

On notera pour  $\lambda \geq 1$ ,

$$\|u\|_{0,\lambda,T} := \|e^{-\lambda t}u\|_{L^2(\Omega_T^+)} \quad \|u\|_{m,\lambda,T} := \sum_{k \leq m} \lambda^{m-k} \|Z^k u\|_{0,\lambda,T}.$$

On omettra volontairement l'indice  $\varepsilon$  de  $\mathbf{w}^\varepsilon$  et  $w^\varepsilon$ . Cela ne doit pas entraîner de confusion.

**Proposition 7.1** *Soit  $m$  un entier et  $\mu$  un réel strictement positif. Il existe  $\lambda_m \geq 1$  tel que si  $w, \mathbf{w} \in H^m(\Omega_T^+)$  vérifient le problème (36) et  $\varepsilon^M \|\mathbf{w}\|_{Lip(\Omega_T^+)} \leq \mu$ , alors pour  $\lambda \geq \lambda_m$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  :*

$$\varepsilon \|\nabla_x w\|_{m,\lambda,T}^2 + \lambda \|w\|_{m,\lambda,T}^2 \leq \lambda^{-1} \lambda_m \|f\|_{m,\lambda,T}^2. \quad (37)$$

*Preuve.* Pour  $m = 0$ , il s'agit d'établir une estimation  $L^2$ . On procède classiquement en multipliant l'équation à gauche par  ${}^t w$  et on intègre par parties en remarquant que

- pour vecteur  $w$  tel que  $Mw = 0$ , on a  ${}^t w \mathring{A}_n w = 0 \leq 0$  (d'après l'hypothèse 1.2),
- pour tout couple de vecteurs  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  vérifiant les conditions  $Ma = 0$  et  $\Pi b = 0$ , on a  $\langle a, \mathring{E}_{n,n} b \rangle = 0$  (par construction de  $\Pi$ ). En particulier,

$$\langle w, \mathring{E}_{n,n} \partial_n w \rangle|_{x_n=0} = 0.$$

Ainsi

$$\varepsilon \|\nabla_x w\|_{0,\lambda,T}^2 + \lambda \|w\|_{0,\lambda,T}^2 \leq \lambda_0 \langle f, w \rangle_{0,\lambda,T}. \quad (38)$$

On raisonne ensuite par récurrence forte supposant l'estimation (37) établie avec  $0, 1, \dots, m-1$  en lieu et place de  $m$ . On applique alors l'opérateur de dérivation  $Z^m$ , qui commute exactement avec les conditions aux limites sur  $\Gamma_T$ . On a ainsi que  $Z^m w$  vérifie

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial) Z^m w - \varepsilon \mathcal{E} Z^m w &= \tilde{f} & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \left. \begin{aligned} M Z^m w &= 0 \\ \Pi \partial_n Z^m w &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ Z^m w &= 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

où  $\tilde{f} := Z^m f + [\mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial), Z^m] w + [-\varepsilon \mathcal{E}, Z^m] w$ . Notons que l'on s'est servi de ce que, grâce à la réduction de la proposition 5.1, les commutateurs  $[M, Z^m]$ ,  $[\Pi, Z^m]$  sont nuls.

Appliquant (38), et multipliant par  $\lambda^{2(m-|\alpha|)}$ , on obtient

$$\varepsilon (\lambda^{(m-|\alpha|)} \|\nabla_x w\|_{0,\lambda,T}) + \lambda (\lambda^{(m-|\alpha|)} \|w\|_{m,\lambda,T})^2 \leq \lambda_0 \lambda^{2(m-|\alpha|)} \langle \tilde{f}, w \rangle_{0,\lambda,T}.$$

Pour contrôler le membre de gauche, il nous faut majorer les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} \langle f, w \rangle_{0,\lambda,T}, \quad (39)$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} \langle [\mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial), Z^m] w, w \rangle_{0,\lambda,T}, \quad (40)$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} \langle [-\varepsilon \mathcal{E}, Z^m] w, w \rangle_{0,\lambda,T}. \quad (41)$$

Le terme (39) se majore par

$$(\lambda^{(m-|\alpha|)} \|f\|_{0,\lambda,T}) (\lambda^{(m-|\alpha|)} \|w\|_{0,\lambda,T})$$

puis par

$$\lambda^{-1}c_\delta(\lambda^{m-|\alpha|}\|Z^\alpha f\|_{0,\lambda,T})^2 + \lambda\delta(\lambda^{m-|\alpha|}\|Z^\alpha w\|_{0,\lambda,T}^2),$$

pour un  $\delta$  assez petit de façon à ce que le terme en  $w$  soit absorbé dans le membre de gauche.

Considérons maintenant le terme (41). Pour le majorer, il suffit de majorer une somme de termes dont les “plus mauvais” contiennent deux dérivées normales  $\partial_n$  et sont de la forme :

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} | \langle [\varepsilon A \partial_n B \partial_n C, Z^\alpha] w, Z^\alpha w \rangle_{0,\lambda,T} |.$$

On effectue une intégration par parties. Remarquons que pour  $0 \leq x_n \leq 1$ , le commutateur  $[\partial_n^2, Z_n^k]$  est de la forme  $\sum_{i \in I_k} \partial_n^2 Z_n^{k_i}$ , et tirant parti de la condition aux limites, on a que le terme de bord est nul. On est ainsi ramené à contrôler

$$\varepsilon \lambda^{2(m-|\alpha|)} \|\partial_n Z^\beta w\|_{0,\lambda}^2 \|\partial_n Z^\alpha w\|_{0,\lambda}^2$$

que l'on majore par

$$\delta \varepsilon \|\partial_n w\|_{m,\lambda}^2 + c_\delta \varepsilon \|\partial_n w\|_{m-1,\lambda}^2$$

où  $\delta$  est choisi suffisamment petit pour absorber le terme  $\delta \varepsilon \|\partial_n w\|_{m,\lambda}^2$  dans le membre de gauche. Le terme  $\varepsilon \|\partial_n w\|_{m-1,\lambda}^2$  est majoré par le membre de droite de l'estimation (37) d'après l'hypothèse de récurrence.

Il reste à contrôler le terme (40). Pour cela, on doit contrôler des termes de la forme

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} | \langle [A_i(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}) Z_i, Z^\alpha] w, Z^\alpha w \rangle_{L_\lambda^2} | \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1, \quad (42)$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} | \langle [A_n^b(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}) Z_n, Z^\alpha] w, Z^\alpha w \rangle_{L_\lambda^2} |, \quad (43)$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} | \langle [\dot{A}_n(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}) \partial_n, \partial_n] w, Z^\alpha w \rangle_{L_\lambda^2} |. \quad (44)$$

Les termes (42) et (43) se majorent par  $cte \|w\|_{m,\lambda}^2$  et sont absorbés dans le membre de gauche de (37). Pour le terme (44), on remarque que l'on a, par l'équation,

$$\dot{A}_n \partial_n w = -\mathcal{H}^b(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial) w + \varepsilon \mathcal{E} w + f,$$

où

$$\mathcal{H}^b(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial) := \mathring{\mathcal{H}}(a^\varepsilon + \varepsilon^M \mathbf{w}, \partial) - \dot{A}_n \partial_n$$

ce qui nous ramène à des cas précédents.  $\square$

Notons qu'il résulte de [15] que le problème (36) est bien posé. Le schéma itératif est donc bien défini.

### 7.3 Convergence du schéma itératif

On va maintenant utiliser ce résultat au schéma itératif (35).

**Proposition 7.2** *Soit  $\mu > 0$  fixé. Il existe  $\lambda_1 > 0$  tel que si  $\varepsilon^M \|w^\nu\|_{Lip(\Omega_T^+)} \leq \mu$  alors, pour  $\lambda \geq \lambda_1$ ,*

$$\varepsilon \|\nabla_x w^{\nu+1}\|_{m,\lambda,T}^2 + \lambda \|w^{\nu+1}\|_{m,\lambda,T}^2 \leq \lambda^{-1} \lambda_1 (\|g_\varepsilon\|_{m,\lambda,T}^2 + \|w^\nu\|_{m,\lambda,T}^2 + \varepsilon \|\partial_n w^\nu\|_{m,\lambda,T}^2).$$

*Preuve :* on utilise les inégalités de Moser suivantes ([12]) :

**Lemme 7.1** *Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_l \in H^m(\Omega_T^+)$  et  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{N}^l$ ,  $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_l| \leq m$ . Alors, pour tout  $\lambda \geq 1$ , on a*

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z_1^{\alpha_1} a_1 \dots Z_l^{\alpha_l} a_l|_{0,\lambda,T} \leq c \sum_j (\prod_{i \neq j} \|a_i\|_\infty) |a_j|_{m,\lambda,T}.$$

La constante  $c$  étant indépendante des  $a_i$ .

Ces inégalités permettent notamment de majorer les non linéarités

$$\sqrt{\varepsilon} |A_n^{b,2}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\mu) \partial_n w^\mu|_{m,\lambda,T} \quad \text{et} \quad |B_R(\varepsilon, t, x, w^\nu) w^\nu|_{m,\lambda,T}$$

respectivement par

$$cte \sqrt{\varepsilon} (\|\partial_n w^\mu\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M \|\partial_n w^\mu\|_\infty \|w^\mu\|_{m,\lambda,T})$$

et

$$cte (\|w^\mu\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M \|w^\mu\|_\infty \|w^\mu\|_{m,\lambda,T}). \square$$

Les estimations précédentes utilisent des normes Lipschitz pour contrôler les non-linéarités lors des estimations conormales. Nous allons maintenant voir que l'on peut contrôler les normes Lipschitz par des plongements de Sobolev. Le point essentiel est que l'on désire être économe en  $\varepsilon$ , et donc en dérivée normale. C'est pourquoi, à l'instar de [28], [29], on se tourne vers des plongements de Sobolev anisotropes. Le plongement Sobolev qui suit est démontré dans [12].

**Proposition 7.3** *Il existe un réel  $\rho$  strictement positif tel que, pour tout  $w \in H^m(\Omega_T^+)$ ,*

$$\|w\|_\infty \leq \rho T e^{\lambda T} (\|w\|_{m,\lambda,T} + \|\partial_n w\|_{m,\lambda,T})$$

On en déduit par un simple changement de variable

**Proposition 7.4** *Il existe un réel  $\rho$  strictement positif tel que, pour tout  $w \in H^m(\Omega_T^+)$ , pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|w\|_{L^\infty(\Omega_T^+)} \leq \rho T e^{\lambda T} (\|w\|_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon} \|\partial_n w\|_{m,\lambda,T}).$$

On déduit de ce lemme un contrôle de la norme  $\|\cdot\|_{lip}$ .

**Corollaire 7.1** *Il existe un réel  $\rho$  strictement positif tel que, pour tout  $w \in H^m(\Omega_T^+)$ , pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,*

$$\varepsilon \|w\|_{Lip(\Omega_T^+)} \leq \rho T e^{\lambda T} (|w|_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon} |\partial_n w|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_n^2 w|_{m,\lambda,T}).$$

Fixons un réel  $\mu > 1$  arbitraire, un réel  $\lambda_1$  donné par la proposition 7.2,  $\lambda \geq 3\lambda_1$  et  $h := \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} (|g_\varepsilon|_{m,\lambda,T_0} + |w^0|_{m,\lambda,T_0})$ .

Le corollaire 7.1 montre la nécessité de disposer d'estimations conormales pour les dérivés normales d'ordre inférieur ou égal à deux. La proposition suivante, laissée au lecteur, comble cette lacune.

**Proposition 7.5** *Il existe  $C$  tel que si*

$$\varepsilon^M \|w^\nu\|_{Lip(\Omega_{T_0}^+)} \leq \mu, \quad |w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0} \leq h, \quad \sqrt{\varepsilon} |\partial_n w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0} \leq h,$$

alors

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_n^2 w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0} \leq C.$$

On choisit alors  $0 < \varepsilon < 1$  assez petit pour que  $\varepsilon^{M-1} (2h + C) \rho T_0 e^{\lambda T_0} \leq \mu$ .

**Proposition 7.6** *La suite  $(w^\nu)_\nu$  satisfait*

$$\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \varepsilon^M \|w^\nu\|_{Lip(\Omega_{T_0}^+)} \leq \mu, \quad |w^\nu|_{m,\lambda,T_0} \leq h \quad \text{et} \quad \sqrt{\varepsilon} |\partial_n w^\nu|_{m,\lambda,T_0} \leq h.$$

*Preuve :* On raisonne par récurrence sur  $\nu$ . La proposition est vraie pour  $\nu = 0$ . Supposons la vraie pour  $\nu$  quelconque. Alors par la proposition 7.2 et le corollaire 7.1, on a

$$\varepsilon |\nabla_x w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0}^2 + \lambda |w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0}^2 \leq \lambda^{-1} \lambda_1 3h^2.$$

On en déduit  $|w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0} \leq h$ ,  $\sqrt{\varepsilon} |\partial_n w^{\nu+1}|_{m,\lambda,T_0} \leq h$ . Par la proposition 7.5, on a

$$\varepsilon^M \|w^{\nu+1}\|_{Lip} \leq \varepsilon^{M-1} (C + 2h) \rho T_0 e^{\lambda T_0} h \leq \mu \quad \square$$

On obtient alors classiquement une solution régulière de (34) qui vérifie par passage à la limite  $\varepsilon^M \|w^\nu\|_{Lip} = O(1)$  et  $|w^\nu|_{m,\lambda,T_0} = O(1)$ . Les dérivées normales itérées sont estimées ensuite, par récurrence, grâce à l'équation.  $\square$

## Références

- [1] Gilles Carbou, Pierre Fabrie, and Olivier Guès. Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(7-8) :1467–1495, 2002.
- [2] Claire Chainais-Hillairet and Emmanuel Grenier. Numerical boundary layers for hyperbolic systems in 1-D. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(1) :91–106, 2001.
- [3] Christophe Cheverry, Olivier Guès, and Guy Métivier. Large amplitude high frequency waves for quasilinear hyperbolic systems. Preprint.
- [4] Christophe Cheverry, Olivier Guès, and Guy Métivier. Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré. Preprint.
- [5] Yves Coudière, Jean-Paul Vila, and Philippe Villedieu. Convergence d’un schéma volumes finis explicite en temps pour les systèmes hyperboliques linéaires symétriques en domaines bornés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(1) :95–100, 2000.
- [6] Phillipe Donnat. *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994.
- [7] Marguerite Gislou and Denis Serre. Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(3) :359–380, 1997.
- [8] Emmanuel Grenier. Couches limites de systèmes paraboliques nonlinéaires caractéristiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(9) :1013–1017, 1996.
- [9] Emmanuel Grenier and Olivier Guès. Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems. *J. Differential Equations*, 143(1) :110–146, 1998.
- [10] Olivier Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(5) :595–645, 1990.
- [11] Olivier Guès. Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilineaires. *Asymptotic Anal.*, 6(3) :241–269, 1993.
- [12] Olivier Guès. Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(4) :973–1006, 1995.
- [13] K. T. Joseph and P. G. LeFloch. Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 147(1) :47–88, 1999.
- [14] Heinz-Otto Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :277–298, 1970.
- [15] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 136 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

- [16] Andrew Majda and Stanley Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :607–675, 1975.
- [17] Guy Métivier. Stability of small viscosity noncharacteristic boundary layers. Cours de DEA.
- [18] Guy Métivier. The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data. *Duke Math. J.*, 53(4) :983–1011, 1986.
- [19] Guy Métivier and Zumbrun Kevin. Large viscous boundary layers for non-characteristic nonlinear hyperbolic problems. Preprint.
- [20] J. Rauch. Boundary value problems as limits of problems in all space. In *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, pages Exp. No. 3, 17. École Polytech., Palaiseau, 1979.
- [21] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1) :167–187, 1985.
- [22] Jeffrey B. Rauch and Frank J. Massey, III. Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 189 :303–318, 1974.
- [23] Frédéric Rousset. Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers. *Asymptot. Anal.*, 26(3-4) :285–306, 2001.
- [24] Steve Schochet. The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :49–75, 1986.
- [25] D. Serre. Oscillations non-linéaires hyperboliques de grande amplitude ;  $\dim \geq 2$ . In *Nonlinear variational problems and partial differential equations (Isola d’Elba, 1990)*, volume 320 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 245–294. Longman Sci. Tech., Harlow, 1995.
- [26] Denis Serre. Couches limites non caractéristiques pour les systèmes de lois de conservation ; un guide pour utilisateurs.
- [27] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation. I*. Fondations. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].
- [28] Franck Sueur. Couches limites semilinéaires. Preprint.
- [29] Franck Sueur. Perturbations visqueuses de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires. Preprint.
- [30] Franck Sueur. Remarks about a J.Rauch’s theorem. Preprint.