



HAL
open science

Logistique et fractions dans le monde hellénistique

Bernard Vitrac

► **To cite this version:**

Bernard Vitrac. Logistique et fractions dans le monde hellénistique. P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter. *Histoires des Fractions, Fractions d'histoire*, Birkhäuser, pp.149-172, 1992, *Science Networks - Historical Studies* - volume 10. hal-00175153

HAL Id: hal-00175153

<https://hal.science/hal-00175153>

Submitted on 26 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LOGISTIQUE ET FRACTIONS DANS LE MONDE HELLÉNISTIQUE

Bernard Vitrac

Dans le domaine grec, l'enquête sur le concept et l'usage des fractions paraît possible dans trois types de documents :

1° dans les traités théoriques et démonstratifs, propres à la tradition grecque, du moins dans l'Antiquité;

2° dans des textes mathématiques que l'on peut qualifier de « calculatoires », assez semblables à une partie de ce que nous livrent les mathématiques égyptiennes, babyloniennes ou chinoises. Par rapport à cette démarche calculatoire, l'approche démonstrative, qui nous est devenue familière au point d'avoir été longtemps considérée comme la seule véritablement mathématique, semble être l'exception plutôt que la règle.

3° A côté de cette double tradition mathématique¹, on peut aussi interroger les documents de la pratique tels que : déclarations de propriété foncière, calculs et enregistrements de changes monétaires, taxes, documents liés aux réalisations architecturales...

1. Nombres et rapports

On ne peut, en effet, se contenter d'une enquête au niveau des traités démonstratifs :

- d'une part les auteurs classiques n'explicitent pas les calculs qu'ils effectuent, qu'il s'agisse d'une particularité du style d'exposition mathématique, ou — et ce n'est pas contradictoire — que ces calculs aient été réalisés avec un accessoire, de type abaque, et non notés au fur et à mesure.
- D'autre part, les ouvrages fondamentaux comme les *Éléments* d'Euclide, ne développent pas une théorie des fractions, au sens d'un type particulier de nombres, comparables à nos nombres rationnels.

Dans ce traité, *nombre* signifie *entier positif*, peut-être parce que l'arithmétique théorique a pris racine dans ce que l'on appelle l'*arithmo-géométrie* des Pythagoriciens, laquelle représentait les nombres à l'aide de jetons (ou de points) disposés selon des arrangements géométriques particuliers². Si, pour paraphraser Platon, ces unités-là sont bien évidemment insécables, les mathématiciens grecs ne pouvaient cependant pas ignorer la tradition calculatoire et métrologique dans laquelle ce que *nous* appelons des fractions jouait un rôle important. Pour prendre tous ces éléments en compte, *ils* développèrent une théorie dans laquelle les concepts fondamentaux sont ceux de mesure, de rapport et de proportion.

¹ Les Anciens ont eux-mêmes thématiquement partiellement cette opposition par le biais de classifications des sciences mathématiques, en particulier dans celle dite de Géméus, qui oppose les mathématiques qui traitent des intelligibles et celles qui traitent du sensible. Le calcul est rattaché à ces dernières. Sur la place de la logistique (au sens de calcul) dans ces classifications, v. *infra*, III.

² Il existe en effet une arithmétique figurée rattachée au pythagorisme du V^e siècle et à des considérations arithmologiques. Cette représentation des nombres avait le mérite d'exhiber des propriétés indépendantes de toute base de numération.

Euclide expose une telle théorie des rapports et des proportions. Sous l'effet de l'opposition :

discret / continu
nombres / grandeurs
Arithmétique / Géométrie³,

cette théorie est dédoublée en :

- une théorie des rapports et des proportions entre grandeurs, au Livre V.
- une théorie des rapports et des proportions entre nombres entiers, au Livre VII.

Étant donné un rapport de deux nombres, Euclide établit certains résultats concernant l'expression minimale — nous disons irréductible — de ce rapport. On a toutefois noté depuis longtemps qu'il n'énonce pas explicitement de définition du rapport entre deux nombres. En tout état de cause, ce qui est important ici, c'est que ces rapports sont envisagés comme des *relations* plutôt que comme des *objets*, et en conséquence Euclide n'*opère* pas sur ces rapports comme il opère avec les entiers, ou *a fortiori* comme nous opérons avec nos nombres rationnels. Ce qui l'intéresse, c'est :

- a) la conservation des rapports : trouver les manipulations qui conservent un certain rapport, autrement dit qui établissent une proportion,
- b) la production de nouveaux rapports par *composition*, que la terminologie désigne additivement⁴ et qui, en aucun cas, ne peut être confondue avec *notre* multiplication des fractions.

D'une manière générale il est à peu près certain qu'il ne faut pas dire que deux rapports sont égaux, mais bien qu'ils sont identiques, autrement dit la proportion n'est pas une égalité mais une identité de rapports. Comme pour l'angle, la question se pose de savoir si l'on peut dire que le rapport participe de la relation, de la quantité ou de la qualité. Elle se pose apparemment surtout pour les philosophes, tels Aristote ou Nicomaque de Gérase ; mais cela indique peut-être qu'ils ne pouvaient pas trouver une opinion très tranchée chez les mathématiciens.

2. Partie et parties

Parmi les différents rapports qui peuvent exister entre des nombres, Euclide va en privilégier certains dans lesquels nous pourrions reconnaître ce que nous appelons "fraction". Il utilise en particulier le mot τὸ μέρος [partie] et son pluriel μέρη et énonce⁵ :

³ On trouve ces oppositions élaborées au niveau philosophique dans les traités d'inspiration néoplatonicienne, par exemple *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase. Il faut toutefois remarquer qu'elles sous-tendent la structure du corpus euclidien — du moins dans la forme sous laquelle il nous est parvenu — et que ces distinctions sont sous-jacentes aux analyses aristotéliennes sur la quantité et le continu (voir par ex. Arstt. *Met.* Δ, 13,1020 a5-14).

⁴ Ainsi on dira que (16:9) est le rapport doublé du rapport (4:3). Déjà Tannery [1902, 73] voyait là un indice de l'origine musicale de la théorie des rapports. D'autres auteurs ont considérablement développé ce point de vue (Voir [Szabo, 1977], 2e partie, [Burkert, 1972]. V. la critique dans [Caveing, 1982], par ex. p.1399 n. 119).

⁵ Euclide, *Éléments*, Définitions VII. 3, 4, 5.

« Un nombre est une partie⁶ d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand.

Des parties, quand il ne le mesure pas.

Multiple, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit ».

« Etre partie de » est donc la relation inverse de « être multiple de », toutes deux définies à partir du concept de mesure, et pour les nombres. A est donc une partie de B si B peut s'écrire comme la réunion de nombres $C_1 + C_2 + \dots + C_n$, tous égaux à A⁷. On remarquera la forme purement négative de la Définition 4. "Partie" n'est donc pas pris au sens géométrique de "sous-ensemble"; il ne désigne pas non plus une quantité fractionnaire, même si l'origine de cette terminologie est peut-être à chercher dans les expressions que l'on trouve chez les orateurs comme : "les deux parts" (τὰ δύο μέρη), "les trois parts" (τὰ τρία μέρη), qui signifient "les deux tiers", "les trois quarts", et qui, dans l'*interprétation moderne*, correspondent à des *nombres* plus petits que l'unité.

Les termes μέρος, μέρη, μόριον se retrouvent également dans des composés pour désigner les rapports (λόγοι) simples :

- ἐπιμόριος [épimore], rapport de la forme $[(m.n + n) : m.n]$, c'est-à-dire un nombre plus une partie rapportés au nombre, comme les rapports hémiole (3 : 2), épitríte (4 : 3); double (2 : 1)... Le plus petit représentant d'un tel rapport, ou pythmène, est de la forme $(n + 1 : n)$. Ainsi le rapport 8 : 6 est également épimore puisque c'est le même que 4 : 3, son pythmène.
- ἐπιμερής [épimère] ; selon Nicomaque, un nombre plus des parties rapportés au nombre; leur pythmène a la forme $(n + k : n)$ pour $1 < k < n$, et k ne divisant pas n)⁸.

Ces rapports et leurs inverses sont suffisamment importants pour mériter un nom; par la suite la terminologie s'est considérablement sophistiquée⁹. La notion de partie(s), cette nomenclature des rapports, ainsi que la procédure dite d'anthyphérèse¹⁰, procédure qui, étant

⁶ Pour éviter toute confusion entre les traitements qui excluent les fractions, tels les *Éléments*, et ceux qui "divisent l'unité", par exemple les textes scolaires, je traduis "μέρος" par "partie" dans le premier cas, et par "part" dans le second. D'autres auteurs utilisent des termes de la même famille (Cf. le verbe μερίζω = partager) : τὸ μόριον ou ἡ μοῖρα (quoique ce dernier terme désigne plutôt le degré du cercle). Les usages des auteurs anciens ne sont pas toujours systématiques : Euclide n'utilise que "μέρος" ; les papyrus varient à cet égard. Toutefois "μόριον" est plus fréquent, et est souvent rendu en français par fractions unitaires (i. e. de numérateur 1 : 1/n) ou quantités; dans ce contexte "fractionnaire" je le traduirai donc aussi "part". Rhabdas utilise parfois "μέρος" et "μόριον" comme synonymes.

⁷ Pour les Anciens, il n'y a pas de nombre 2 unique, mais des dyades. On admet que l'on dispose d'une multitude quelconque de nombres égaux à un nombre donné (V. p. ex. Eucl. *Él.* Df. VII. 16).

⁸ Dans sa définition — basée sur l'opposition singulier / pluriel —, Nicomaque considère que le nombre de parties peut être quelconque, à partir de 2. En fait, si l'on veut que la nomenclature des rapports soit non équivoque, il faut astreindre k à des conditions supplémentaires (que k ne divise pas n et soit inférieur à n) pour que le rapport ne soit ni épimore (comme 8 : 6 avec $8 = 6 + 2$), ni multiple (comme 12 : 6 avec $12 = 6 + 3 + 3$), ni multiépimore (comme 13 : 6 avec $13 = 6 + 6 + 1$). Cette nomenclature présuppose donc l'existence, pour chaque rapport, de cette unique expression irréductible appelée pythmène. V. Nicomaque, *Intr. arith.*, I, XIX, 6.

⁹ Voir Nicomaque, *Intr. arith.*, I, XX-XXIII.

¹⁰ En fait le substantif anthyphérèse pour désigner un algorithme est moderne : Euclide n'utilise que le verbe ἀνθυφαιρέω-ω (au passif) ; il marque la succession des soustractions réciproques (nuance que comporte peut-être le préverbe ἀνθυ-) par l'adverbe ἀεί (de manière répétée) et ne donne que le schéma de la procédure en indiquant les premières étapes. En notations modernisées : étant donnés deux nombres (ou deux grandeurs) x, y

donnés deux nombres (resp. deux grandeurs) permet de trouver leur plus grand diviseur commun (resp. leur plus grande commune mesure¹¹), apparaissent comme des élaborations conceptuelles dans le prolongement des pratiques métrologiques. A la fin de son premier Livre arithmétique (Prop. VII. 37-39), Euclide montre que si un nombre est mesuré par un nombre, il admet une partie homonyme à ce nombre mesurant. Ainsi 12 mesuré par 3, 4 fois, admet un tiers, partie homonyme de 3, à savoir 4. Grâce à ces différentes notions, les mathématiques "pures" peuvent assurer un fondement rigoureux à certaines pratiques calculatoires.

3. Arithmétique et logistique

Plusieurs classifications des sciences mathématiques ont été élaborées en Grèce. Nous les connaissons par la tradition philosophique, surtout platonicienne, et il n'est pas évident de voir ce qu'elles représentent par rapport à l'activité du mathématicien, du moins à partir du moment où une spécialisation du travail intellectuel existe et permet de parler de mathématiciens en tant que tels. Nous avons déjà mentionné que l'opposition nombres / grandeurs, qui est l'un des éléments commandant ces classifications, est bien à l'œuvre dans Euclide. Elle est déjà présente chez Platon, pour qui la science du nombre, à son tour, se subdivise en arithmétique, science des nombres pris en eux-mêmes, et en logistique, science des nombres dans leurs rapports mutuels¹².

Dans ses dialogues tardifs, il distingue également les sciences théorétiques, "pures", qui visent seulement à la connaissance, et les sciences pratiques qui visent une fin qui leur est extérieure ; le *Philèbe* articule ainsi quatre possibilités d'étude du nombre¹³. La notion de logistique théorique, sans doute l'étude des rapports et proportions, n'a pas été maintenue, et les classifications ultérieures réduisent les deux distinctions platoniciennes à une seule : d'un côté l'arithmétique, comme étude théorique des nombres, de l'autre la logistique, étude pratique des choses nombrées, laquelle leur applique les lois de l'Arithmétique. Le témoignage le plus complet sur cette classification dichotomique des sciences est transmis par Proclus¹⁴ qui cite Géminus¹⁵.

Si, comme je l'ai déjà dit, la pertinence de cette classification par rapport à l'activité mathématique contemporaine n'est pas évidente, il est toutefois possible que la distinction

$x > y$, on retranche y autant de fois qu'on peut dans x ; s'il ne reste rien, x est multiple de y ; sinon, on retranche le reste dans y autant de fois qu'on peut ; s'il ne reste rien le rapport $x : y$ est multi-épimore ; sinon on continue les soustractions alternatives.

¹¹ Dans les nombres entiers on fait ainsi apparaître une suite strictement décroissante d'entiers ; l'avant-dernier est le plus grand diviseur commun aux deux nombres. Dans les grandeurs la procédure ne s'arrête que si les grandeurs x, y sont commensurables. Elle fournit donc un critère de non-incommensurabilité (Eucl. *Él.*, Prop. X. 2 et son usage dans X. 3).

¹² Du moins dans certains textes, par ex., *Prot.* 356 e5- 357 a3 ; *Gorg.* 451 c1-5. Ailleurs il utilise ces deux étiquettes avec la même signification, la science des nombres.

¹³ Voir Plat., *Phil.* 56 e8-10 ; 57 d6-8.

¹⁴ Voir Proclus, *In Eucl. I.*, pp. 38-42 Friedlein.

¹⁵ Auteur d'un ouvrage encyclopédique sur les sciences mathématiques qui vivait sans doute au I^{er} siècle avant notre ère.

arithmétique / logistique faite par Platon renvoie à la distinction qu'on peut faire apparaître entre les verbes ἀριθμεῖν et λογίζεσθαι, souvent employés l'un pour l'autre, mais que l'on peut différencier : ἀριθμεῖν renvoyant plutôt à l'opération de dénombrement, de décompte, λογίζεσθαι à l'idée de calcul [λογισμός] et d'opération¹⁶; bien entendu la frontière entre ces deux significations n'est pas toujours évidente à tracer. En tant qu'elle règle les calculs, la logistique sera assimilée sans difficulté à une science pratique, alors que cette assimilation serait dépourvue de sens dans le cas de l'arithmétique, si on l'entend comme théorie des propriétés intrinsèques des nombres, parité, primarité....

Les commentateurs modernes ont souvent identifié la logistique à une partie de ce que nous appelons démarche calculatoire, (l'autre grande partie étant la géodésie), bien qu'évidemment des calculs interviennent dans les mathématiques démonstratives. Pour préciser ce que certains Anciens — au moins à partir de Géminius — entendaient par "logistique", on peut citer un extrait du scholie au *Charmide* de Platon (165 c) :

λογιστική ἐστὶ θεωρία τῶν ἀριθμητῶν, οὐχὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν μεταχειριστική, οὐ τὸν ὄντως ἀριθμὸν λαμβάνουσα, ὑποτιθεμένη τὸ μὲν ἔν ὡς μονάδα, τὸ δὲ ἀριθμητὸν ὡς ἀριθμὸν, οἷον τὰ τρία τριάδα εἶναι καὶ τὰ δέκα δεκάδα· ἐφ' ᾧ ἐπάγει τὰ κατὰ ἀριθμητικὴν θεωρήματα.

θεωρεῖ οὖν τοῦτο μὲν τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοῖκὸν πρόβλημα, τοῦτο δὲ μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς, τοὺς μὲν ἐπὶ φιαλῶν, τοὺς δ' ἐπὶ ποίμνης·

καὶ ἐπ' ἄλλων δὲ γενῶν τὰ πλήθη τῶν αἰσθητῶν σωμάτων σκοποῦσα, ὡς περὶ τελείων ἀποφαίνεται.

ἕλη δὲ αὐτῆς πάντα τὰ ἀριθμητά·

μέρη δὲ αὐτῆς αἱ Ἑλληνικαὶ καὶ Αἰγυπτιακαὶ καλούμεναι μέθοδοι ἐν πολυπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, καὶ αἱ τῶν μορίων συγκεφαλαιώσεις καὶ διαιρέσεις, αἷς ἰχνεύει τὰ κατὰ τὴν ἕλην ἐφοδευόμενα τῶν προβλημάτων τῇ περὶ τοὺς τριγώνους καὶ πολυγώνους πραγματεία.

τέλος δὲ αὐτῆς τὸ κοινωνικὸν ἐν βίῳ καὶ χρησίμῳ ἐν συμβολαίοις, εἰ καὶ δοκεῖ περὶ τῶν αἰσθητῶν ὡς τελείων ἀποφαίνεσθαι.

La logistique est une étude des (choses) nombrables, non une manipulation des nombres, car elle ne porte pas son attention sur l'être du nombre, mais pose comme hypothèse d'une part l'unité comme monade, d'autre part le nombrable comme nombre, par exemple trois choses comme étant la triade et dix comme la décade, auxquels elle applique les théorèmes de l'Arithmétique.

Ainsi elle étudie d'une part ce qu'Archimède a appelé le Problème des bœufs, ce qui est dit "nombres de moutons" et "nombres de vases", les uns sur les vases, les autres sur les moutons.

Et dans d'autres genres encore, examinant la multitude des corps perceptibles par les sens, elle montre le résultat comme au sujet de choses parfaites.

Sa matière : toutes les choses nombrables;

ses parties : les méthodes appelées helléniques et égyptiennes pour les multiplications et les divisions, et les sommations et séparations de parts, par quoi elle recherche les choses cachées dans les problèmes, selon sa matière, par l'étude des (nombres) triangulaires et polygonaux.

Son but : les relations communes dans la vie et l'utilité dans les contrats, alors qu'elle semble montrer le résultat concernant les (choses) sensibles comme (pour des choses) parfaites.

A coté d'allusions aux petits problèmes de la tradition scolaire, de la mention des techniques de multiplication et de division selon la méthode grecque et la méthode égyptienne, du traitement des parts, on trouve aussi le fameux *Problème des bœufs* d'Archimède dont l'utilité sociale, évoquée à la fin du texte, n'est pas évidente. En revanche il n'est pas fait mention du calcul de ce que nous appelons racine carrée, que le grec peut désigner de diverses manières comme : « le côté non exprimable du carré » ou « le côté d'un carré qui n'est pas un vrai carré », ou « ce qui peut telle surface », ou encore « est égal en puissance à ... ».

¹⁶ Pour l'ensemble de cette discussion voir [Klein, 1968], 1^e partie ; [Caveing, 1982], II, ch. IV § 1.

On peut néanmoins noter que dans ses deux lettres dites arithmétiques¹⁷ (la seconde fut écrite en 1341), Nicolas Artavasde de Smyrne, dit le Rhabdas, après avoir expliqué la façon de réaliser les opérations (addition, soustraction, multiplication et division) expose la façon de découvrir le "côté du carré" et traite donc ce problème comme relevant des opérations.

4. Les sources concernant la logistique

Si nous sommes contraints, pour évoquer la logistique pratique, de citer un témoignage ou un auteur très tardif, c'est en raison d'un état documentaire plutôt défavorable. Contrairement à la géométrie, aucun traité complet correspondant à des *Éléments de logistique* n'est conservé ni même mentionné. Pourtant des ouvrages ont certainement été consacrés à la logistique¹⁸, mais il est vrai que le sujet se prêtait sans doute mal à une articulation du genre "Éléments". Quelles sont les sources disponibles ?

- Il y a d'abord des témoignages, essentiellement certains passages du corpus platonicien et les scholies qu'ils ont suscités ; Proclus et les traités pseudo-héroniens nous ont transmis des renseignements qui proviennent peut-être de Géminus.

- Pour ce qui est des textes, en dehors des papyrus scolaires sur lesquels je reviendrai, on rattachera à la logistique le fameux *Problème des bœufs* et la troisième partie de l'*Arénaire* d'Archimède, ainsi que le commentaire d'un traité d'Apollonius dans le livre II de la *Collection mathématique* de Pappus d'Alexandrie. Il s'agit dans les trois cas de pouvoir calculer et surtout nommer et écrire de très grands nombres¹⁹; la question est importante si l'on utilise le système alphabétique de notation ; contrairement à ce qui se passe dans un système positionnel, il faut être capable de nommer, et si possible de symboliser de manière différente chaque ordre selon les puissances successives de 10, et contourner ainsi la finitude du système alphabétique.

- A un tout autre niveau, on peut aussi mentionner les épigrammes mathématiques du livre XIV de l'*Anthologie Palatine* : 45 petits problèmes versifiés de date très incertaine et dont certaines affabulations se retrouvent dans les papyrus scolaires²⁰.

- Entre les deux, on peut intercaler les deux lettres du Rhabdas, très tardives mais assez bien organisées. La seconde lettre, dont la complexité est plus grande, après l'exposé des opérations, présente une série de problèmes, en distinguant les calculs utiles à la vie civile [πολιτικόν] et ceux intervenant dans l'une des quatre sciences mathématiques²¹.

¹⁷ Voir texte grec et traduction française dans [Tannery, 1886].

¹⁸ Voir [Tannery, 1886], p. 61.

¹⁹ Voir Archimède, *L'arénaire et le Problème des bœufs*; V. aussi [Heath, 1921], pp. 39-41.

²⁰ *Anth. Pal.*, Livre XIV, n°1-4, 6-7, 11-13, 48-51, 116-146.

²¹ Comme me l'a fait remarquer A. Allard, les références aux œuvres du Rhabdas doivent être circonspectes, ne serait-ce qu'à cause de son époque tardive et son usage extensif de sources multiples (al-Khwārizmī, Planude). En outre l'influence du "calcul hindou" pèse sur son traitement de la logistique : ainsi se dispense-t-il de vérifications qu'il estime trop longues et renvoie-t-il à son traité sous ce titre (qui, on le sait [Tannery 1886], est un simple démarquage de celui de Planude). Peut-être est-ce également à cette influence qu'il faut rapporter le traitement des "racines carrées" en terme d'opération. Mais il n'en reste pas moins qu'on a là un des rares exposés

Comme je l'ai déjà signalé, qu'il s'agisse de logistique comme étude des calculs, ou plus particulièrement des fractions, l'enquête peut être élargie dans deux directions :

- par l'étude des calculs attestés (ou supposés) dans les traités : les œuvres d'Archimède, les *Métriques* de Héron, les *Arithmétiques* de Diophante. J'ai déjà mentionné les limitations que l'on rencontre dans cette étude.
- à l'inverse, on peut examiner au niveau pratique l'usage effectif des fractions dans des documents "réels", inscriptions ou papyrus ; toutefois on ne peut concevoir les rapports entre documents pratiques et documents scolaires d'une manière simple²². Ces derniers comportent des développements autonomes qui dépassent de beaucoup les nécessités d'applications. En conservant une formulation concrète et sans utiliser la forme démonstrative, ils témoignent cependant d'une activité théorique au sens que Platon donne à ce terme dans le *Philèbe* : une connaissance qui n'a pas d'autre fin qu'elle-même.

Que constate t'on quant à l'usage des fractions dans les papyrus de l'Égypte hellénistique puis romaine ? Ils témoignent seulement de l'usage du système des *parts*. Dans les comptes monétaires on utilise le système acrophonique, en particulier le système des sous-unités de la drachme là où interviendraient des *parts* si l'on utilisait le système alphabétique²³.

Bien que cela nous conduise à anticiper sur la section qui suit, on peut citer un petit papyrus scolaire (*pSI* vii 763, Pack 2315) qui explicite la liaison entre fraction ou part et sous-unités monétaires :

« Examine d'abord le 4' de la drachme, combien est-ce ? C'est — C (1 obole et une demi-obole). Et le 12' c'est combien ? C'est C. Rassemble... — C et C lesquels produisent = (2 oboles). Examine quelle part (μέρος) de la drachme celles-ci sont : c'est le 3'. Voilà pourquoi le quart et le 12' rassemblés en une part seront 3' ».

Suit un second exemple sur "deux 5°"; on raisonne sur 30 drachmes :

« Examine d'abord le 5' de 30. Combien est-ce ? C'est 6. Deux cinquièmes étant disposés ensemble, faisant 6, rassemblés, deux fois sont 12. De ceux-là prends la plus grande [part] : les 10 et examine quelle part cela est de 30 ? C'est le 3' ; et les deux seront le 15'. Voilà pourquoi les 2 5' [τὰ β ε'], rassemblés en parts plus grandes (sont) 3' 15' ».

Au demeurant une raison autre que pédagogique peut expliquer cette utilisation des sous-unités de la drachme pour justifier les résultats présentés en terme de parts²⁴ : c'est l'usage d'abaques pour effectuer les calculs²⁵. Hérodote la mentionne et même l'utilise : on a

de logistique grecque, sinon le seul : système alphabétique de notation, table de parts comparables à celles des papyri et collection de problèmes du même type que ceux des papyri ou l'*Anthologie Palatine*.

²² Voir l'exemple de [Burkert 1962], pp. 438-440, qui explique l'origine des rapports épimores par la pratique monétaire des prêts à intérêts.

²³ Pour ces différents systèmes de notation, voir les tableaux dans le chapitre A.

²⁴ Il s'agit en quelque sorte de l'opération inverse de la séparation en parts ou χωρισμός, dont les tables de parts nous donnent le résultat. V. *infra*.

²⁵ Sur les abaques grecs (et romains), V. [Ifrah, 1981], pp. 115-120.

montré qu'une de ses erreurs de calcul supposait l'usage d'un abaque de type acrophonique²⁶ (bien qu'il s'agisse de calculer sur les durées) dans lequel la colonne des oboles sert à représenter les fractions comportant des tiers²⁷.

On a également noté que dans les tables de parts (voir §5, *infra*) la première entrée donne fréquemment la part correspondante de 6000; par exemple dans une table de tiers : $\hat{\gamma}$ ἀριθμῶ : /β [3' en nombre : 2000]. Tannery a expliqué l'importance de cette entrée à partir des données monétaires suivantes : 1 talent = 6000 drachmes; 1 sou d'or (nomisma) = 6000 deniers. En analysant les scholies à un épigramme (XIV,7) de l'*Anthologie Palatine*, il a montré comment le scribe utilisait cette donnée des tables pour se faire une idée des ordres de grandeur, un peu comme lorsque nous calculons en pourcentage²⁸. A cette interprétation on peut sans doute ajouter que l'habitude mentale que croit voir Tannery dans ce calcul par rapport à l'unité des 6000 a pu se développer avec le maniement de l'abaque acrophonique qui, si on assimile le talent à l'unité, permet de calculer ces résultats que nous donnent les tables.

Dans les inscriptions les fractions sont rares et presque toujours écrites en toutes lettres²⁹. Ainsi quelques documents épigraphiques relatifs à des réalisations architecturales nous sont parvenus ; les plus complets sont l'inscription dite du Προστώον d'Éleusis (356-352^a) et l'inscription relative à la construction de l'Arsenal du Pirée (v. 350^a)³⁰. Dans le premier cas, il s'agit vraisemblablement des instructions données aux responsables de l'approvisionnement en pierre pour l'adjonction d'un portique au sanctuaire d'Éleusis, les différentes "entrées" du texte suivent, non l'ordre de construction, mais celui de l'éloignement des sources d'approvisionnement des pierres et donnent des indications de taille. La seconde fournit la description générale du bâtiment à réaliser, sans doute destinée à l'architecte. Dans les deux cas, l'unité de longueur est le pied, mais pour les dimensions plus petites, le système des sous-unités : 1 pied = 2 demi-pieds ; 1 demi-pied = 2 paumes ; 1 paume = 4 doigts, permet d'éviter tout recours aux "fractions" et aux parts ; ainsi au lieu d'avoir à dire 3/8 de pieds, on dit six doigts ; pour 15/16 de pieds on dit trois paumes et trois doigts ; pour 1 3/8 de pied on dit cinq paumes et deux doigts ; pour 4 pieds 3/4 on dit cinq pieds manquant d'une paume... On évite même l'usage de tout symbole numérique.

Cet usage très limité des fractions dans les calculs pratiques soulève un problème : si les mathématiciens ont semble-t-il cherché à justifier les techniques calculatoires, les ont-ils aussi développées bien au-delà de ce qui était en usage chez les praticiens ? En particulier ont-ils mis au point un système de calcul avec des fractions générales ? Compte tenu de l'état lacunaire de notre documentation, aussi bien mathématique que pratique, il est difficile de trancher une telle question; mais contrairement à la majorité des commentateurs modernes, je

²⁶ Il s'agit de tables à jetons mobiles, sur lesquelles étaient portés des symboles empruntés au système acrophonique.

²⁷ V. [Lang, 1957], et [Wyatt, 1964].

²⁸ Voir [Tannery, 1894], pp. 285-287.

²⁹ Dans les comptes officiels, comme dans les papyrus, on utilise le système acrophonique, v. *supra*.

³⁰ Elles sont publiées par [Buisgaard 1957], pp. 100-132.

crois que l'existence d'un tel système n'est pas du tout évident. Pour justifier ce point de vue, je propose, avant de reprendre l'examen des traités mathématiques, d'aborder un autre type de sources : les documents qui procèdent de la tradition scolaire.

5. Les documents scolaires

On peut penser qu'une partie des questions enseignées a effectivement une visée pratique, mais ce n'est certainement pas leur forme externe de mathématiques "appliquées", souvent artificielle, qui peut nous guider pour les différencier des autres. Il est également difficile de se fier à ce que nous en dit le Rhabdas quand il distingue calculs de la vie civile et calculs appartenant aux mathématiques.

Sont considérés par lui comme calcul « politikos » :

- l'exposé de « la règle de trois » et ses espèces pour trouver un nombre qui soit quatrième proportionnel, trois autres étant donnés.
- une brève présentation de relations métrologiques.
- l'application des deux points précédents à des problèmes monétaires.

Il expose ensuite 18 problèmes qu'il considère comme relevant des mathématiques : il s'agit essentiellement de manipulations de parts, dont une bonne proportion d'affabulations commerciales ou monétaires (14 sur 18). Ils sont très proches des précédents et tout à fait du même type que ceux que l'on rencontre dans les papyrus scolaires auxquels il nous fait donc venir.

On y trouve des tables et des problèmes, et parmi les tables, celles de parts sont de loin les plus nombreuses³¹. Certaines³², à côté du résultat, comportent une suite de nombres qu'on peut interpréter, soit comme une vérification, soit comme le calcul du résultat proposé. Plutôt que des tables de référence, il s'agit donc vraisemblablement d'exercices. D'autres collections de tables sont plus systématiques : ainsi les deux papyrus de la collection de l'Université du Michigan (iii 134 = Pack 2309, daté du II^e siècle³³ et iii 146 = Pack 2310, daté du IV^e siècle³⁴), et le papyrus d'Akhmîm (pCaire 10758, daté par son éditeur, J. Baillet, des VII-VIII^e siècles de notre ère), comportent des tables (ou des fragments de tables) tout à fait similaires. Le dernier document mentionné, bien que tardif, est le plus complet : il comporte des tables de parts pour deux tiers et un tiers, un quart, jusqu'à un vingtième. Donnons par exemple la table des onzièmes :

³¹ V. [Fowler 1987], pp. 234-238 et pp. 271-276, en particulier la liste des tables publiées, complétée par le même auteur dans [Fowler 1988].

³² Voir Tablette Louvre Inv. 1196 dans [Boyaval 1973], pp. 253-256 et 1977, pp. 215-230 et [Brashear 1984], à propos d'une nouvelle tablette de ce type et d'une réinterprétation d'un exercice du Wiener Papyrus.

³³ Outre des tables, pMich iii 134 comporte en plus une série de problèmes dont certains pourraient être rangés dans la catégorie des calculs *politikoi* (conversion de monnaie d'argent en monnaie de cuivre et l'inverse; calcul du montant du fret ou de la taxe de transport du blé en fonction de la quantité, voire de la distance parcourue. Calcul de taux et d'intérêt. Problèmes de conversion d'unités). Restent aussi deux ou trois problèmes qui ont une forme beaucoup plus artificielle, caractéristique d'une volonté évidemment pédagogique ... Dans les problèmes où interviennent des fractions on se ramène aux entiers; tous les résultats non entiers sont exprimés comme somme de parts.

³⁴ pMich iii 146 ne comporte qu'un fragment de tables qui coïncide en grande partie avec le papyrus d'Akhmîm.

Le 11° en nombre	: 545 3' 11' 33'	Des 6 :	2' 22'
De 1 le 11°	: 11'	Des 7 :	2' 11' [2]2'
Des 2	: 6' 66'	Des 8 :	3' 22' 66'
Des 3	: 4' 44'	Des 9 :	2' 4' 22' 44'
Des 4	: 3' 33'	Des 10 :	2' 3' 22' 33'
Des 5	: 3' 11' 33'	Des 11 :	1

Elles sont suivies d'une cinquantaine de problèmes qui, selon l'éditeur J. Baillet, sont écrits par une autre main et « roule sur le calcul des fractions »³⁵. Il faut donc y regarder de plus près. On peut distinguer deux types d'énoncés en nombre à peu près identique :

- les problèmes de technique calculatoire, posés en nombres sans signification concrète.
- les problèmes "non techniques" avec une affabulation pédagogique et donc des choses nombrées plutôt que des nombres !

On peut ranger les problèmes du premier type en 3 groupes (voir Document 1). Bien entendu les intitulés généraux (et *a fortiori* tout symbolisme algébrique) qui figurent dans le document n'y sont introduits que par commodité. Quant aux problèmes comportant une présentation concrète, on a 3 problèmes géométriques, 7 partages proportionnels, 2 problèmes de prélèvements successifs, et 11 calculs d'intérêts et de taux.

On y trouve, d'autre part, quatre expressions différentes de ce qu'un moderne peut reconnaître comme une division :

- a) m παρά n (donne³⁶) p. c) Le y° des x.
b) Des x le y°. d) x μερ. εἰς y.

La forme a) ne se trouve que dans les problèmes dits "techniques", elle est l'abréviation de m (mesuré) par n (donne) p. On ne la trouve que dans la méthode de décomposition en parts, qui elle-même, repose sur la décomposition d'un entier en produit de deux facteurs (15 mentions).

Les formes b) et c) ont été assimilées à une fraction générale $\frac{x}{y}$. On peut croire qu'elles ont la même signification. On les rencontre dans les deux types de problèmes; dans les problèmes non techniques, elles sont parfois utilisées avec la signification d'un changement d'unité. Il y a une petite nuance formelle ou syntaxique entre b) et c). Celle-ci exprime le résultat d'un calcul à peu près immédiat ou de la consultation d'une table.

La forme b) est utilisée soit comme conclusion d'une étape intermédiaire qui appelle une suite, soit aussi comme énoncé de problèmes (groupe 2). On la trouve aussi comme "entrée gauche" des tables et donc, dans les problèmes, comme réponse à la question « dans quel calcul... ceci ? », même quand le résultat proposé n'est pas celui donné par la table. Deux

³⁵ Je traduis le problème 14 dans lequel l'utilisation de la table des onzièmes est évidente :

« A partir de 1, retranche 3' 11' 33'. Dans quel calcul 3' 11' 33' ? Des 5 le 11°; à partir des 11, retranche 5; reste 6 et des 6 le 11°. Lequel est 2' 22' ».

³⁶ Le résultat est parfois introduit par "γτ", abréviation de "γτγνέται", parfois simplement juxtaposé. Nous introduisons "donne" pour éviter toute ambiguïté.

problèmes donnent apparemment le résultat final sous cette forme ; ils paraissent donc inachevés car, contrairement à la pratique générale dans les autres problèmes, les résultats ne sont pas alors introduits par l'expression « ὡς εἶναι » [« de sorte qu'il est ... » ou « pour être ... »].

La forme d), abréviation de « $x \mu\epsilon\rho\acute{\iota}\sigma\omicron\nu \epsilon\acute{\iota}\varsigma y$ » = « x à partager en y », n'apparaît que dans les problèmes non techniques : x et y sont toujours des entiers, mais le résultat peut être "fractionnaire"; de nouveau cinq problèmes laissent ce partage en suspens et paraissent inachevés.

L'examen détaillé du papyrus montre que, dans la plupart des cas, l'expression normale des quantités plus petites que l'unité est bien la somme de parts. Pour calculer on se ramène aux entiers en deux étapes : de la somme de parts on passe à l'expression en terme "d'opérateur" : Des x le y° ; puis on calcule avec les entiers x et y. Normalement on réexprime le résultat en somme de parts. La seule opération à laquelle on consent dans ce cadre sur les expressions du type « Des x le y° » est la simplification, c'est-à-dire, une "conservation du rapport" : si on a « Des x le y° » et que $x = kz$ et $y = kt$, on peut lui substituer « des z le t° » car il revient au même de prendre la kt° partie de kz , que la t° partie de z.

Quant aux décompositions en sommes de parts, elles ne sont pas réalisées à partir de trois "formules", faisant intervenir des opérations sur les fractions comme l'écrit J. Baillet, mais à partir de considérations simples et astucieuses sur les entiers et leurs expressions comme somme de diviseurs. L'étude de la tradition scolaire — si l'on admet que nos sources fragmentaires sont représentatives — confirme donc ce qu'indiquaient les documents pratiques : les seules fractions qu'on y trouve sont des parts ; certains exercices sur ces parts paraissent relever d'une virtuosité gratuite, mais cela n'étonne guère. Il suffit de regarder un manuel contemporain de mathématiques pour constater que les choses n'ont guère changé depuis. Ces calculs "virtuosos" sont menés sur les rapports d'entiers et sur les entiers eux-mêmes. Mais on doit remarquer aussi que si l'expression "normale" d'un résultat fractionnaire est l'expression comme somme de parts, les problèmes ne sont pas toujours terminés, comme si l'on se contentait de ce qui n'était en principe qu'un résultat intermédiaire. On peut expliquer ce phénomène par la diversité des emplois de la formule « Des x le y° » ; lorsqu'au cours d'une résolution on obtient une telle expression, l'intérêt pédagogique de l'exercice est épuisé puisque l'on est ramené soit à la consultation d'une table, soit à une catégorie de problèmes déjà traitée.

6. Les fractions dans les *Métriques* de Héron

L'examen des documents pratiques et des textes scolaires nous amène à douter de l'existence d'un système de calcul utilisant les fractions générales. Mais il nous reste à examiner les traités dans lesquels certains pensent repérer ce système. Pour l'essentiel, ce sont

les *Arithmétiques* de Diophante³⁷ et le corpus héronien qui sont invoqués à l'appui de cette thèse. Les exemples "anciens" (Aristarque de Samos, Archimède...) sont rarissimes.

Pour ma part j'ai limité mon enquête aux *Métriques* de Héron : on sait que c'est le seul ouvrage du corpus héronien qui puisse être considéré comme authentique, du moins parmi les écrits géométriques³⁸. Tout le problème est de savoir si les formes écrites en question constituent une notation fractionnaire ou simplement des abréviations ou des calculs suspendus avant leur effectuation complète. Il faut d'abord noter que si les variantes dans le système de notation des nombres sont assez faibles, les commentateurs modernes ont été frappés de la variété des procédés de notation de ces "fractions générales", procédés qui varient non seulement entre les différents auteurs, mais aussi à l'intérieur d'un même ouvrage³⁹.

La question du calcul fractionnaire dans les *Métriques* de Héron a été traitée dans un article assez récent (1982) par W. Knorr⁴⁰. Il oppose l'usage des parts, purement notationnel, à celui des fractions générales, calculatoire⁴¹. Il remarque aussi que l'usage des parts est plus fréquent dans le livre I que dans les deux autres (et inversement pour ce qu'il considère comme un système de notation de fractions "générales").

L'examen du fac-similé du Codex montre que ce que Knorr appelle une notation de fractions générales⁴² recouvre trois notations différentes (voir Document 2). En fait, dans l'ouvrage de Héron, la situation, quant aux calculs, ne diffère pas substantiellement de ce que l'on trouve chez Archimède : aucun n'est véritablement explicite. Il est donc difficile de soutenir comme le fait Knorr que les "fractions unitaires n'interviennent effectivement pas dans la procédure de calcul⁴³ car celle-ci ne nous est pas vraiment accessible. Par exemple dans la section II. 9 Héron doit prendre les 11 14° d'un nombre. Il indique l'opération par :

$$\iota\delta' \qquad 14^\circ$$

« τούτων τὸ ια. γίγνεται σε γ̂ » : « De ceux-ci le[s] 11. Il est produit 205 3' ».

³⁷ Je ne puis me prononcer sur le traitement des fractions dans le traité de Diophante, car je n'ai pas pu examiner les différents manuscrits. Voir cependant les réserves que P. Tannery émettait, dans l'introduction à son édition des *Arithmétiques*, 1893-1895 sur le fait qu'on puisse y trouver la notion de fraction générale.

³⁸ Voir [Heath, 1921], II, pp. 316-344.

³⁹ Pour des exemples variés de notation voir [Heath, 1921], I, pp. 42-44. Pour les plus anciens d'entre eux (Archimède, Aristarque de Samos...), voir [Fowler, 1987], pp. 240-248.

⁴⁰ L'étude de W. Knorr déborde largement le cadre du calcul fractionnaire dans les *Métriques* de Héron. Il se propose de montrer l'homogénéité et la stabilité d'une tradition calculatoire commune aux civilisations égyptienne et grecque. S'il porte son intérêt plutôt sur les techniques de calcul — en particulier dans l'établissement des tables — que sur la question des notations, il est clair que les deux questions ne sont pas indépendantes et il fait quelques remarques incidentes à ce propos.

⁴¹ « But these (les parts) appear to be of only notational, rather than computational, significance », [Knorr 1982], p. 151. Voir aussi la citation dans la note suivante.

⁴² « Nevertheless, Hero possesses a general notation for fractions and makes frequent use of it in his computations ». Le contexte montre qu'il s'agit bien de ce que nous appelons fractions "générales" par opposition aux parts. [Knorr 1982], p. 152.

⁴³ « Thus, the unit-fractions do not actually enter into the computational procedure in these instances » [Knorr 1982], p. 151.

On remarquera que les 11 14° sont traités comme un "opérateur" introduit par l'article neutre singulier "τó" (et non par le pluriel "τά"), comme nous l'avons vu dans le papyrus d'Akhmîm. Quoi qu'il en soit, la manière de mener le calcul n'apparaît pas. Ceci constitue une différence avec les documents de la tradition égyptienne comme le papyrus Rhind où certains calculs sont explicités. De fait, dans les *Métriques*, la notation des fractions "générales" n'apparaît que dans l'expression de résultats terminaux ou intermédiaires⁴⁴ et peut donc n'être que la notation d'une opération "suspendue" effectuée sur un abaque ou un support provisoire, ce qui justifierait cette disposition parfois sur deux lignes; les calculs s'effectuent peut-être sur des entiers et leurs rapports et non sur ces abréviations. Il y a toutefois trois exceptions à cette règle qui montrent des calculs opérant directement sur ces "fractions générales". Elles se trouvent dans les sections I. 16 ; III. 2 et III. 8; si l'on transcrit de manière moderne les "règles de calcul" implicites dans ces trois exemples, on obtient :

$$\text{I. 16 : (R1) : } 1 - \frac{n}{p} = \frac{p-n}{p} ; \quad \text{(R2) : } \frac{n}{p} \cdot p = n ;$$

$$\text{III. 2 : (R3) : } \frac{n}{p} \cdot k = \frac{kn}{p}, \text{ avec } k = 2 \text{ (voir document 2);}$$

$$\text{III. 8}^{45} \text{ : (R4) : } \left[A + \frac{n}{p} \right] + B = [A + B] + \frac{n}{p}.$$

Je ne crois pas que les "règles" **R1-3**, justifiables en terme de conservation de rapports, affaiblissent beaucoup l'idée que la différence entre le système des parts et les différentes notations assimilées à des fractions générales n'est pas celle qu'il y aurait entre un mode de notation et un mode de calcul, mais celles de deux (voire quatre) modes de notation parmi lesquels celui des parts paraît plus "fini" que les autres. En particulier nous ne trouvons rien qui corresponde à l'addition de telles "fractions générales" par réduction au même dénominateur. Les calculs, dès qu'ils ne sont plus tout à fait évidents, sont menés sur les entiers. Knorr remarque d'ailleurs que "pour faciliter les calculs avec les fractions, ou même pour les éviter, Héron a souvent recours aux proportions"⁴⁶. Pour conclure je ne crois pas que l'examen des *Métriques* de Héron révèle une technique de calcul fractionnaire plus sophistiquée que celle dont témoignent les textes de la tradition scolaire tel le papyrus d'Akhmîm.

⁴⁴ C'est le cas des sections I. 17, 24. II. 1, 2, 11, 13, 18. III. 4, 7, 9, 20, 21, 22.

⁴⁵ Au demeurant ce calcul trivial n'est pas explicité : on a LA = 5 4/7 d'après III. 7 et AH = 2; d'où LH = 7 4/7.

⁴⁶ [Knorr 1982], p. 152.

Conclusion

J'ai voulu pointer quelques difficultés relatives à l'étude des fractions dans la tradition mathématique grecque. Il m'est donc difficile de proposer des conclusions assurées. Une certaine cohérence globale et une continuité chronologique me paraît pourtant perceptible :

1. En logistique l'usage des parts pour exprimer les résultats non entiers paraît être la règle.
2. Jusqu'à plus ample information je crois pouvoir noter *l'absence de fractions dites générales au sens d'un objet de calcul*.

Bien entendu Archimède peut écrire en toutes lettres :

« ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις — sous-entendu μερῶν »,

« d'une part, plus petit que la septième partie du diamètre, d'autre part plus grand que dix des soixante et onzièmes (parties du diamètre) »,

repris par δέκα οα' ou ι οα'⁴⁷. Déjà Thucydide affirme que Sparte administre du Péloponnèse « τῶν πέντε τὰς δύο μοίρας » [les deux des cinquièmes parts (I. X, 2)]. Cela dit on ne parlera pas de fractions générales au sens où elles seraient traitées comme des nombres, alors que l'on n'opère pas sur l'abréviation qui les désigne. A cet égard, le calcul reste donc en retrait des possibilités d'expression grammaticale de la langue naturelle. Simplement une division en parts étant effectuée ou imaginée, on peut prendre plusieurs de ces parts; les deux nombres qui apparaissent alors ne sont pas de "même nature" (comme le sont numérateur et dénominateur d'une fraction générale) : l'un indique l'unité de mesure choisie (le dénominateur), l'autre le nombre de fois que cette sous-unité entre dans la grandeur initiale. Cette dualité est comparable à celle qu'Euclide utilise dans ses Livres arithmétiques lorsqu'il considère une multitude [πληθὸς] de nombres [ἀριθμός], dualité bien marquée dans le vocabulaire.

La démarche suivie dans le calcul consiste à prendre comme point de départ des expressions en quantités, à exprimer le problème en rapports de nombres entiers, et à revenir, après avoir effectué les calculs sur ces entiers, aux quantités dans l'expression des résultats. Cela est possible dans le cadre conceptuel aristotélicien de l'unité comme unité de mesure⁴⁸, donc, potentiellement infiniment divisible. En fait, on calcule aussi sur des nombres fractionnaires très simples, comme un entier plus $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$... Le calcul a donc une certaine autonomie par rapport aux justifications fournies par l'arithmétique, pour les manipulations de rapports d'entiers par exemple. Une justification des calculs sur les rationnels était d'ailleurs possible grâce au traitement géométrique des grandeurs commensurables. Mais de tels calculs n'apparaissent pas, du moins sous cette forme.

Bien sûr on peut voir dans cette pratique une simple contrainte du système de notation, sans signification notable pour la façon de "penser les calculs". On peut aussi — au moins

⁴⁷ Voir Archimède, *Mesure du cercle*, p. 140, l. 10-11 — p. 143, l. 15, 17, 18, 20.

⁴⁸ Voir Arstt., *Met.*, Δ, 6 1016 a30-b30.

dans le cas des traités de haut niveau — évoquer tout ce que les critères d'exposition mathématique ont fait disparaître, d'une part, on le sait bien, une grande partie de la démarche heuristique, d'autre part des calculs éventuellement tétralogiques. D'où, d'ailleurs, les multiples tentatives faites par les modernes pour restituer cet échafaudage calculatoire disparu des traités d'Archimède par exemple. On court ainsi le risque d'introduire des présupposés, évidents aux yeux des modernes, mais qui ne correspondent pas forcément au traitement ancien.

Je propose donc une interprétation "minimaliste" du calcul fractionnaire en Grèce ancienne. Je ne crois pas que celle-ci soit équivalente aux reconstructions plus ambitieuses qui sont proposées en arguant du caractère lacunaire des sources que j'ai mentionné moi aussi. Les textes démonstratifs, nous l'avons dit, se prêtent mal à cette enquête sur le calcul, mais il faut répéter qu'ils ne proposent pas un traitement théorique des fractions. En particulier, je ne crois pas que l'objet du Livre VII des *Éléments*, soit de "construire" l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs ($\frac{m}{n}$), à partir des entiers, comme on le dit parfois⁴⁹, même si certains résultats ont certainement un rôle "fondationnel" par rapport au calcul.

3. En revanche il ne paraît pas inutile d'inverser l'approche et de tenter d'éclairer ces textes démonstratifs par les textes logistiques de la tradition scolaire, même s'ils sont tardifs. En tout état de cause Archimède a bien dû apprendre à compter un jour. De fait il semble bien qu'il y ait adéquation entre d'un côté les pratiques calculatoires des textes logistiques, entre autres l'opération qui consiste à prendre une part (le x°) de quelque chose, le système alphabétique de notation et la notion de partie (singulier / pluriel) définie par Euclide au Livre VII, de l'autre. Tant dans les textes théoriques élaborés que dans les textes dits logistiques, l'arrière-plan métrologique n'est jamais très loin, même s'il n'est évidemment pas explicite, au moins comme paradigme⁵⁰, ou comme exemple pédagogique à propos de conversions d'unités. C'est à peine forcer les choses que de dire cela de la définition des rapports de grandeurs énoncée au début du Livre V des *Éléments*, surtout quand on la compare avec la technique — partiellement mathématiquement équivalente, mais très différente dans l'esprit — des coupures de Dedekind. Toutefois il est clair qu'avec le système des équimultiples, on s'est bien éloigné du système encore "concret" des parties. On ne s'est pas pour autant rapproché d'une théorie des fractions générales puisqu'il s'agit maintenant de traiter simultanément le cas des grandeurs commensurables et/ou incommensurables.

Et c'est peut-être seulement quand diminuent les exigences relatives à certaines formulations des résultats que l'on se permet de ne plus résoudre toutes les quantités inférieures à l'unité en sommes de parts; mais alors certainement un autre système de notation, positionnel, le "calcul hindou", est utilisé concurremment avec le système alphabétique et c'est une autre histoire...

⁴⁹ Voir [Zeuthen 1910], en particulier le commentaire à la définition VII. 4, pp. 409-411. V. aussi [Gardies 1989], pp. 46-47.

⁵⁰ Voir Aristote, *Met.*, I, 1, 1052 b 15 - 1053 a 2.

Annexe

Document 1 : Type de problèmes « techniques » dans le Papyrus d'Akhmîm.

Groupe I (13 problèmes) : « A partir de x, retrancher y ».

(x est 1 ou 3" ou une somme de parts, y est une part ou une somme de parts).

Exemple : Problème 6

« de 2' 3' retrancher 9' 11'.

9 sur 11 produit 99. Le 2' 3' des 99 produit 82 2'; retrancher 20 : reste 62 2'.

Et des 62 2' le 99^e ».

Groupe II (7 problèmes) : « De(s) x, le y^e ».

(x est un nombre plus une ou des parts, y est un entier, en général "assez grand").

Exemple : Problème 22

« Des 7 2' 10' 20' le 323^e.

Dans quel calcul ceux-ci ? Des 13 le 20^e. Semblablement 20 sur 7 produit 140 ; avec les 13, 153. 20 sur 323 produit 6460 et des 153 le 6460^e. Quoi sur quoi 6460 ? 85 des 76; autrement : 68 des 95. Des 153 retrancher 85, le 76^e, reste 68; et retrancher 68, le 95^e.

Pour être 76' 95' ».

Groupe III (4 problèmes) : « Séparer une part ou une somme de parts en plusieurs parts » (χωρισμός).

Exemple : Problème 16

« De 1 le 22^e. Séparer 22' en trois parts.

Quintupler 1 : il produit 5. Quintupler 22 : il produit 110. Et des 5 le 110^e. Quoi sur quoi 110 ? 2 des 55; autrement : 10 des 11. Semblablement, à partir des 5 retrancher 2, le 55^e, reste 3. Semblablement 10 et 11 produit 21; par 3 il produit 7. 7 sur 10 produit 70; 7 sur 11 produit 77.

Pour être 55' 70' 77' ».

Document 2 : Notations de "fractions générales" dans le Codex Constantinopolitanus

1) Notation "linéaire". Problème I. 16 :

« ... il est produit 21 316 ; par les 164 il est produit 129 et 160 164^e

(ρ ξ ρξΔ' sur une seule ligne) ... » [I, f^o 76r^o]

2) Notation "exposant". Problème II. 1 :

« ... le volume du cône sera, en unités, 209 1 1²^{le} (*ia^{ka}*)... » [I, f^o 88r^o]

Au problème II. 11, on trouve :

« ... de sorte qu'il sera nécessaire de cuber les 10; soit 1000 (*απ*);

de ceux-ci prendre les 1 1²^{le} (*ia^{ka}*) ... » [I, f^o 94v^o]

3) Notation "inverse de la nôtre". Problème II. 9 :

« ... il est produit 231 3'.

De ceux-ci le $\frac{14^e}{11}$ (τὸ $\frac{\delta'}{\alpha}$) : il est produit 205 3'...» [I, f° 93v°]

Le type 1) est utilisé dans les trois Livres (I. 16, 17, 26; II. 8, 13, 18; III. 2, 8, 20, 21). Les deux autres se trouvent dans les Livres II et III (surtout ce dernier) : le sujet de III est la division de figures dans un rapport donné ; les calculs y sont donc plus complexes que dans le premier Livre, consacré aux figures planes, et pour lequel (comme le pense Knorr) Héron disposait peut-être de sources plus nombreuses et anciennes. On trouve 3) quand il s'agit de calculer des « parts de parts », et 2) quand il s'agit de proportions. Au demeurant il est assez difficile, voire artificiel, d'essayer de distinguer 2) et 3) dans certains cas.

Le problème III. 3 est intéressant : on y trouve une des "exceptions" au fait de calculer seulement sur les entiers, mais aussi une grande variété de notations.

« ... Et DH sera, en unités : 10 et $22^{6^{\mathcal{E}}}$ ($\kappa\beta^{\xi\mathcal{E}}$)... et le triangle ADE sera en unités : 50 et 2^{5^e} ($\beta^{\mathcal{E}'}$)... donc le produit sur AE, DH sera, en unités : 100 et 4^{5^e} ($\Delta^{\mathcal{E}'}$), et DH est, en unités : 10 et $22^{6^{\mathcal{E}}}$ ($\kappa\beta^{\xi\mathcal{E}}$). Donc AE sera en unités : 9 2' 4' ($\theta < \delta'$) ... il est produit 252.

Partage ceux-ci en 5^e, il est produit 50 2 5^e ($\beta \mathcal{E}'$).Ceux-ci deux fois : il est produit 100 et des 5^e 4 ($\mathcal{E} \Delta$) (*sic*). Divise ceci par le(s) 10 $22^{6^{\mathcal{E}}}$ ($\kappa\beta^{\xi\mathcal{E}}$); il est produit, en unités : 9 2' 4' ($\theta < \delta'$) ». [I, f° 100v° — 101r°]

L'autre "exception" se trouve au Problème III. 8 (on y additionne directement 5 unités et 4^{7e} avec 2 unités).

Références

- J. Baillet, Le papyrus mathématique d'Akhmîn (*P. Cair. inv. 10758 ; Pack, 2306*), *Mémoires publiés par les membres de la Mission Archéologique Française au Caire* 9,1. Paris, Ernest Leroux, Éditeur 1892, pp. 1-89.
- B. Boyaval, Tablettes mathématiques du Musée du Louvre. *Revue Archéologique* (1973), pp. 243-260.
- B. Boyaval, Le cahier de Papnouthion et les autres cahiers scolaires du Louvre. *Revue archéologique* (1977), pp. 215-230.
- W. Brashear, Neue griechische Bruchzahlentabellen. *Enchoria* 12 (1984), pp. 1-6.
- J. Buisgaard, *Mnesicles, a Greek Architect at Work*. Copenhagen, Ejnar Munksgaard, 1957.
- W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press 1972 (traduction anglaise de *Wisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaus und Platon*. Nürnberg, Verlag Hans Carl 1962).

- M. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse soutenue le 29/10/77. (3 vol.). Atelier national de reproduction des thèses de Lille. 1982.
- D.H. Fowler, Ratio in Early Greek Mathematics, *Bullettin of the American Mathematical Society* (New Series) 1 (1979), pp. 807-846.
- D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press 1987.
- D.H. Fowler, A Catalogue of Tables, *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik* 75 (1988), pp. 273-280.
- J.-L. Gardies, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1988.
- T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*. 2 vols. Oxford, Oxford University Press 1921 (reprint ed.: New York, Dover 1981).
- G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*. Paris, Seghers, 1981.
- J. Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge (Mass.), MIT Press 1968 (traduction anglaise de Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik* B3 (1934-1936), pp. 18-105; 122-235.)
- W.R. Knorr, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, *Historia Mathematica* 9 (1982), pp. 133-171.
- M. Lang, Herodotus and the Abacus, *Hesperia* 26 (1957), pp. 271-287.
- A. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*. Budapest, Akadémiai Kiado, 1969. Traduction *Les débuts des mathématiques grecques* par M. Federspiel. Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1972.
- P. Tannery, Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhodas, *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale* 32 (1886), pp. 121-252, reproduit in Id., *Mémoires Scientifiques*, tome IV (1920), n°4, pp. 61-198.
- P. Tannery, Le calcul des parties proportionnelle chez les Byzantins, *Revue des Études Grecques* 7 (1894), pp. 204-208, reproduit in Id., *Mémoires Scientifiques*, tome IV (1920), n°12, pp. 282-287.
- P. Tannery, Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure, *Bibliotheca Mathematica*, 3 Folge, 3 (1902), pp. 161-175, reproduit in Id., *Mémoires Scientifiques*, tome III (1915), n° 71, pp. 68-89.
- W. Wyatt, Fractionnal quantity on the abacus. *Classical Journal* (1964), pp. 268-271.
- H.G. Zeuthen, Sur la constitution des livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité, *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandling* (1910), pp. 395-435.