



**HAL**  
open science

## Analyse harmonique sur le graphe de Pascal

Jean-François Quint

► **To cite this version:**

| Jean-François Quint. Analyse harmonique sur le graphe de Pascal. 2003. hal-00169377

**HAL Id: hal-00169377**

**<https://hal.science/hal-00169377v1>**

Preprint submitted on 3 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse harmonique sur le graphe de Pascal

J.-F. Quint

## 1 Introduction

Dans tout cet article, nous appellerons graphe de Pascal, et nous noterons  $\Gamma$ , le graphe infini, connexe et régulier de valence 3 représenté par la figure 1. Ce graphe peut se construire de la façon suivante. On écrit le triangle de Pascal et on en efface les valeurs paires des coefficients du binôme. Dans ce dessin, on joint chaque point à ceux de ses voisins les plus proches qui n'ont pas été effacés. On obtient ainsi un graphe dans lequel tout point a trois voisins, sauf le sommet du triangle, qui en a deux. On prend alors deux copies de ce graphe, qu'on joint par leurs sommets : on obtient bien un graphe régulier de valence 3. C'est le graphe  $\Gamma$ .

Soit  $\varphi$  une fonction de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $p$  dans  $\Gamma$ , on pose  $\Delta\varphi(p) = \sum_{q \sim p} \varphi(q)$ . Alors, comme tout point de  $\Gamma$  a exactement trois voisins, l'opérateur linéaire  $\Delta$  est auto-adjoint pour la mesure de comptage sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire que, pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  à support fini, on a  $\sum_{p \in \Gamma} \varphi(p)(\Delta\psi(p)) = \sum_{p \in \Gamma} (\Delta\varphi(p))\psi(p)$ . Dans cet article, nous allons complètement déterminer les invariants spectraux de l'opérateur  $\Delta$  dans l'espace  $\ell^2(\Gamma)$  des fonctions de carré intégrable sur  $\Gamma$ .

Pour énoncer nos résultats, notons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x - 3$ . Soit  $\Lambda$  l'ensemble de Julia de  $f$ , c'est-à-dire, dans ce cas, l'ensemble des  $x$  dans  $\mathbb{R}$  pour lesquels la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  reste bornée. C'est un ensemble de Cantor contenu dans l'intervalle  $[-2, 3]$ . Plus précisément, si on pose  $I_{-2} = \left[-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$  et  $I_3 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\right]$ , pour tout  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\{-2, 3\}^{\mathbb{N}}$ , il existe un unique  $x$  dans  $\Lambda$  tel que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on ait  $f^n(x) \in I_{\varepsilon_n}$  et l'application  $\{-2, 3\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \Lambda$  ainsi définie est un homéomorphisme bi-höldérien qui conjugue  $f$  et l'application de décalage dans  $\{-2, 3\}^{\mathbb{N}}$ . Pour  $x$  dans  $\Lambda$ , posons  $\rho(x) = \frac{x}{2x-1}$  et, si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $\Lambda$ ,  $L_\rho\varphi(x) = \sum_{f(y)=x} \rho(y)\varphi(y)$ . On vérifie aisément qu'on a  $L_\rho(1) = 1$ . Alors, d'après le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius (voir [1, § 2.2]), il existe une

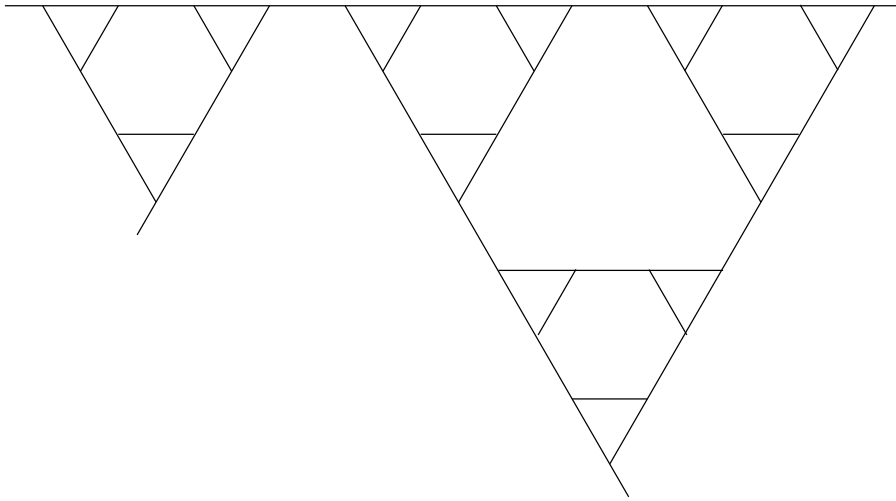


FIG. 1 – Le graphe de Pascal

unique mesure borélienne de probabilité  $\nu_\rho$  sur  $\Lambda$  telle que  $L_\rho^* \nu_\rho = \nu_\rho$ . La mesure  $\nu_\rho$  est diffuse et  $f$ -invariante. Enfin, on remarque que, si  $h$  désigne la fonction  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 - x$ , on a  $L_\rho h = 2$  et, donc,  $\int_\Lambda h d\nu_\rho = 2$ .

Notons  $p_0$  et  $p_0^\vee$  les deux sommets des triangles infinis qu'on a recollés pour construire le graphe  $\Gamma$ . Soit  $\varphi_0$  la fonction sur  $\Gamma$  qui vaut 1 en  $p_0$ ,  $-1$  en  $p_0^\vee$  et 0 partout ailleurs. Nous avons le

**Théorème 1.1.** *Le spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  est constitué de la réunion de  $\Lambda$  et de l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . La mesure spectrale de  $\varphi_0$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  est la mesure  $h\nu_\rho$ , les valeurs propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  sont les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  et de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$  et les sous-espaces propres associés sont engendrés par des fonctions à support fini. Enfin, l'orthogonal de la somme des sous-espaces propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  est le sous-espace cyclique engendré par  $\varphi_0$ .*

Un problème semblable a été abordé par A. Teplyaev dans [3], qui a étudié le graphe de Sierpiński, représenté par la figure 2. Le graphe de Sierpiński peut être vu comme le graphe des arêtes du graphe de Pascal, où l'on joint deux arêtes quand elles ont un point commun. En particulier, notre description du spectre de  $\Delta$  découle des travaux de Teplyaev. En revanche, la description exacte des composantes cycliques de  $\Delta$  et de son spectre continu sont nouvelles et répondent à la question posée par Teplyaev dans [3, § 6.6]. À la section 14, nous expliquerons précisément comment faire le lien entre

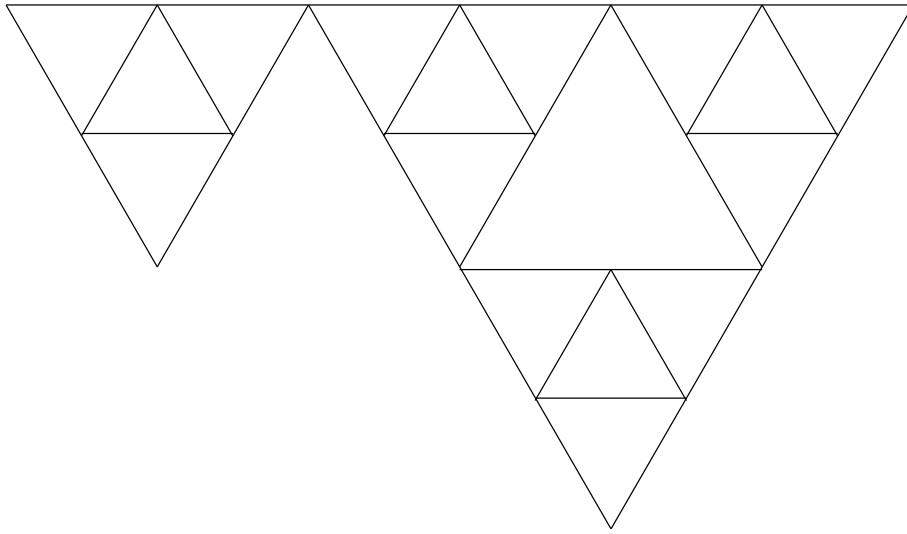


FIG. 2 – Le graphe de Sierpiński

l'étude spectrale du graphe de Sierpiński et celle du graphe de Pascal

Les méthodes développées dans cet article permettent de décrire la théorie spectrale d'autres opérateurs, liés au graphe  $\Gamma$ . Notons  $\Gamma_0$  le graphe complet à quatre sommets  $a, b, c$  et  $d$ . Le graphe  $\Gamma$  est un revêtement du graphe  $\Gamma_0$ , ainsi que le montre la figure 3. Construisons, pour tout entier  $n$  un graphe fini de la façon suivante : si le graphe  $\Gamma_n$  a été construit, le graphe  $\Gamma_{n+1}$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque point de  $\Gamma_n$  par un triangle (ce procédé est détaillé plus formellement à la section 2). On note toujours  $\Delta$  l'opérateur de somme sur les voisins, agissant sur les fonctions définies sur  $\Gamma_n$ . Posons, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $k(x) = x + 2$ ,  $l(x) = x$  et  $m(x) = x - 2$ . Nous montrerons le

**Théorème 1.2.** *Pour tous entiers naturels  $m \geq n$ , il existe des revêtements  $\Gamma_m \rightarrow \Gamma_n$  et  $\Gamma \rightarrow \Gamma_n$ . Le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_n)$  est*

$$(X - 3)(X + 1)^3 \prod_{p=0}^{n-1} (m \circ f^p(X))^3 (l \circ f^p(X))^{2 \cdot 3^{n-1-p}} (k \circ f^p(X))^{1+2 \cdot 3^{n-1-p}}.$$

Venons-en à la motivation initiale de cet article, qui était l'étude d'un phénomène de systèmes dynamiques. Soit  $X \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^2}$  le système à trois points, c'est-à-dire l'ensemble des familles  $(p_{k,l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$  d'éléments de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  telles que, pour tous entiers relatifs  $k$  et  $l$ , on ait  $p_{k,l} + p_{k+1,l} + p_{k,l+1} = 0$  (dans

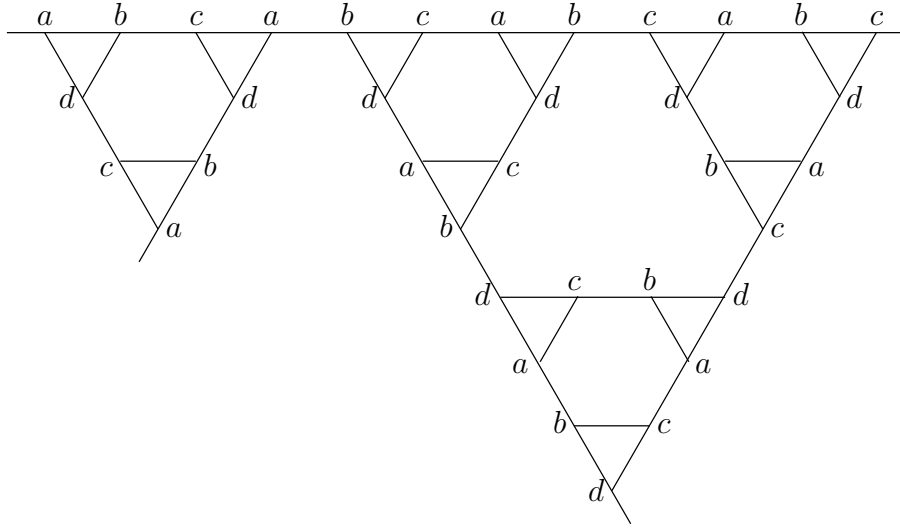


FIG. 3 – Un revêtement  $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). On munit  $X$  de l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^2$ , engendrée par les applications  $T : (x_{k,l}) \mapsto (x_{k+1,l})$  et  $S : (x_{k,l}) \mapsto (x_{k,l+1})$ . Ce système est un analogue de l'extension naturelle de l'action du doublement et du triplement de l'angle sur le cercle et, comme dans la conjecture de Fürstenberg, le problème de la classification des probabilités boréliennes sur  $X$  qui sont  $\mathbb{Z}^2$ -invariantes est ouvert. On note  $Y$  l'ensemble des  $p$  dans  $X$  tels que  $p_{0,0} = 1$ . Alors, si  $p$  est un point de  $Y$ , il existe exactement trois éléments  $(k, l)$  de l'ensemble  $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, -1)\}$  tels que  $T^k S^l p$  appartienne à  $Y$ . Cette relation munit l'espace  $Y$  d'une structure de graphe régulier de valence 3 (avec des arêtes multiples). Si  $p$  est un point de  $Y$ , sa composante connexe  $Y_p$  dans cette structure de graphe est exactement l'ensemble des points de l'orbite de  $p$  sous l'action de  $\mathbb{Z}^2$  qui appartiennent à  $Y$ , c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $p$  dans la relation d'équivalence induite sur  $Y$  par l'action de  $\mathbb{Z}^2$ . Pour toute fonction continue  $\varphi$  sur  $Y$ , on pose, pour tout  $p$  dans  $Y$ ,

$$\bar{\Delta}\varphi(p) = \sum_{\substack{(k,l) \in \{(1,0), (0,1), (-1,1), (-1,0), (0,-1), (1,-1)\} \\ T^k S^l p \in Y}} \varphi(T^k S^l p).$$

Si  $\lambda$  est une probabilité borélienne invariante par l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $X$  telle que  $\lambda(Y) > 0$  (c'est-à-dire telle que  $\lambda$  ne soit pas la masse de Dirac en la

famille nulle), la restriction  $\mu$  de  $\lambda$  à  $Y$  vérifie  $\bar{\Delta}^*\mu = 3\mu$  et  $\bar{\Delta}$  est un opérateur auto-adjoint de  $L^2(Y, \mu)$ .

À l'origine de ce travail, nous souhaitions nous intéresser aux phénomènes d'intersection homocline de  $X$ . Rappelons que, si  $\phi$  est un difféomorphisme d'une variété compacte  $M$  et si  $p$  est un point fixe hyperbolique de  $f$ , une intersection homocline est un point d'intersection  $q$  de la feuille stable de  $p$  et de sa feuille instable. Pour un tel point, on a en particulier  $\phi^n(q) \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} p$ . Cette notion possède un analogue en dynamique symbolique. Notons  $M$  l'espace  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ ,  $\phi$  l'application de décalage et  $p$  le point de  $M$  dont toutes les composantes sont nulles. Si  $q$  est un élément de  $M$  dont toutes les coordonnées sauf un nombre fini sont nulles, on a  $\phi^n(q) \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} p$ . En particulier, le point  $q$  tel que  $q_0 = 1$  et dont toutes les autres composantes sont nulles possède cette propriété. Dans notre situation, on vérifie qu'il existe un unique élément  $q$  de  $X$  tel qu'on ait  $q_{0,0} = 1$ , que, pour tous  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $l \geq 1$ , on ait  $q_{k,l} = 0$  et que, pour tous  $k \geq 1$  et  $l \leq -1 - k$ , on ait  $q_{k,l} = 0$ . Alors, il existe un isomorphisme du graphe  $\Gamma$  dans  $Y_q$  envoyant  $p_0$  sur  $q$  : c'est l'origine de la représentation plane de  $\Gamma$  donnée à la figure 1. Dorénavant, on identifiera  $q$  à  $p_0$  et  $Y_q$  à  $\Gamma$ . Notons que, si  $p$  désigne l'élément de  $X$  dont toutes les composantes sont nulles, pour tous entiers  $l > k > 0$ , on a  $(T^{-k}S^l)^n(p_0) \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} p$ . Soit  $\bar{\Gamma}$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $Y$  : on peut voir  $\bar{\Gamma}$  comme un ensemble de graphes pointés plans. Notre objectif est de déterminer les structures induites sur  $\bar{\Gamma}$  par l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $X$ . Pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on notera  $\Gamma_p$  pour  $Y_p$ . Notons qu'alors, si  $\Theta_p$  désigne le graphe des arêtes de  $\Gamma_p$ , les graphes  $\Theta_p$  sont exactement les graphes étudiés par Teplyaev dans [3]. En particulier, d'après [3, § 5.4], si  $\Gamma_p$  ne contient pas  $p_0$  où l'une de ses six images par l'action naturelle du groupe diédral d'ordre 6 sur l'espace  $X$ , le spectre de l'opérateur  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_p)$  est discret.

Tout point  $p$  de  $\bar{\Gamma}$  appartient à un unique triangle dans  $\Gamma_p$ . Notons  $a$  l'ensemble des éléments  $p$  de  $\bar{\Gamma}$  pour lesquels ce triangle est  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ ,  $b$  celui des points  $p$  pour lesquels il est de la forme  $\{p, Tp, TS^{-1}p\}$  et  $c$  l'ensemble des points  $p$  pour lesquels ce triangle est  $\{p, Sp, T^{-1}Sp\}$ . L'ensemble  $\bar{\Gamma}$  est la réunion disjointe de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Notons  $\theta_1 : \bar{\Gamma} \rightarrow \{a, b, c\}$  l'application naturelle associée à cette partition. Nous dirons qu'une fonction  $\varphi$  de  $\bar{\Gamma}$  dans  $\mathbb{C}$  est 1-triangulaire si elle factorise à travers  $\theta_1$ . Nous noterons  $E_1$  l'espace des fonctions 1-triangulaires  $\varphi$  telles que  $\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) = 0$  : il s'identifie naturellement à  $\mathbb{C}_0^3 = \{(s, t, u) \in \mathbb{C}^3 \mid s + t + u = 0\}$ . On munira  $\mathbb{C}_0^3$  du produit scalaire égal à un tiers du produit canonique.

Notons  $\zeta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto \frac{1}{3} \frac{(x+3)(x-1)}{2x-1}$  et, comme ci-dessus, désignons par  $L_\zeta$  l'opérateur de transfert associé à  $\zeta$  pour la dynamique du polynôme  $f$ . Comme on a  $L_\zeta(1) = 1$ , il existe une unique mesure borélienne de probabilité  $\nu_\zeta$  sur  $\Lambda$  telle que  $L_\zeta^* \nu_\zeta = \nu_\zeta$ . Alors, si  $j$  désigne la fonction  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{3} \frac{3-x}{x+3}$ , on a  $L_\zeta(j) = 1$  et, donc,  $\int_\Lambda j d\nu_\zeta = 1$ .

**Théorème 1.3.** *Pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , l'ensemble  $\Gamma_p$  est dense dans  $\bar{\Gamma}$ . Il existe une unique probabilité borélienne  $\mu$  sur  $\bar{\Gamma}$  telle que  $\bar{\Delta}^* \mu = 3\mu$  et l'opérateur  $\bar{\Delta}$  est auto-adjoint dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Le spectre de l'opérateur  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est le même que celui de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $E_1$ , la mesure spectrale de  $\varphi$  pour  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est  $\|\varphi\|_2^2 j \nu_\zeta$  et la somme des sous-espaces cycliques engendrés par les éléments de  $E_1$  est isométrique à  $L^2(j \nu_\zeta, \mathbb{C}_0^3)$ . Le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans l'orthogonal de ce sous-espace est discret et ses valeurs propres sont 3, qui est simple, et les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$ .*

Le plan de l'article est le suivant.

Les sections 2, 3, 4, 5 et 6 sont consacrées à l'étude du graphe  $\Gamma$ . Dans la section 2, nous construisons précisément  $\Gamma$  et établissons des propriétés élémentaires de sa géométrie. Dans la section 3, nous déterminons le spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  et, dans la section 4, nous démontrons un résultat essentiel en vue du calcul des mesures spectrales des éléments de cet espace. Dans la section 5, nous décrivons la structure des espaces propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . Enfin, à la section 6, nous appliquons l'ensembles de ces résultats préliminaires à la démonstration du théorème 1.1.

À la section 7, nous utilisons les techniques mises aux points précédemment pour démontrer le théorème 1.2.

Dans les sections 8, 9, 10, 11, 12 et 13, nous étudions l'espace  $\bar{\Gamma}$ . À la section 8, nous décrivons en détail la géométrie de l'espace  $\bar{\Gamma}$  et, à la section 9, nous introduisons des espaces de fonctions localement constantes remarquables sur cet espace. La section 10 est consacrée à la définition de l'opérateur  $\bar{\Delta}$  et à la démonstration de l'unicité de sa mesure harmonique. La section 11 étend à  $\bar{\Gamma}$  les propriétés démontrées pour  $\Gamma$  dans les sections 3 et 4. Dans la section 12, nous étudions les espaces propres de  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Enfin, dans la section 13, nous achevons la démonstration du théorème 1.3.

Dans la section 14, nous expliquons rapidement comment transférer nos résultats du graphe de Pascal au graphe de Sierpiński.

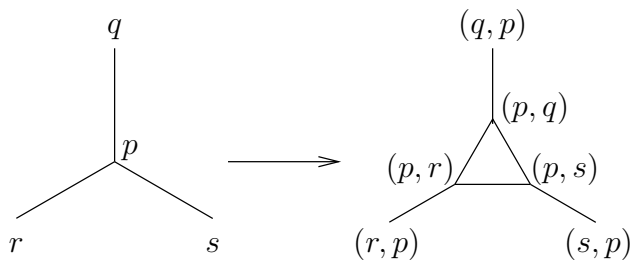


FIG. 4 – Construction du graphe  $\hat{\Phi}$

## 2 Préliminaires géométriques

Dans toute la suite, nous appellerons graphe un ensemble  $\Phi$  muni d'une relation symétrique  $\sim$  telle que, pour tout  $p$  dans  $\Phi$ , on n'ait pas  $p \sim p$ . Pour  $p$  dans  $\Phi$ , nous appellerons voisins de  $p$  l'ensemble des éléments  $q$  de  $\Phi$  tels que  $p \sim q$ . Nous dirons que  $\Phi$  est régulier si tous ses éléments ont le même nombre (fini) de voisins. Dans ce cas, nous appellerons ce nombre la valence de  $\Phi$ . Nous dirons que  $\Phi$  est connexe si, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\Phi$ , il existe une suite de points  $r_0 = p, r_1, \dots, r_n = q$  de  $\Phi$  telle que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on ait  $r_{i-1} \sim r_i$ . Nous appellerons une telle suite un chemin de  $p$  à  $q$  et l'entier  $n$  la longueur de ce chemin. Si  $\Phi$  est connexe et si  $\varphi$  est une fonction sur  $\Phi$  telle que, pour tous points  $p$  et  $q$  de  $\Phi$  avec  $p \sim q$  on ait  $\varphi(p) = \varphi(q)$ ,  $\varphi$  est constante.

Nous dirons qu'une partie  $\mathcal{T}$  d'un graphe  $\Phi$  est un triangle si  $\mathcal{T}$  est constituée d'exactly trois points  $p, q$  et  $r$  et qu'on a  $p \sim q, q \sim r$  et  $r \sim p$ .

Soit  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3. On note  $\hat{\Phi}$  l'ensemble des couples  $(p, q)$  d'éléments de  $\Phi$  avec  $p \sim q$  et on le munit de la structure de graphe pour laquelle, si  $p$  est un point de  $\Phi$ , de voisins  $q, r$  et  $s$ , les voisins de  $(p, q)$  sont  $(q, p), (p, r)$  et  $(p, s)$ . Si  $\Phi$  est connexe,  $\hat{\Phi}$  est connexe. Géométriquement,  $\hat{\Phi}$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque point de  $\Phi$  par un triangle. Ce procédé est représenté à la figure 4. On note  $\Pi$  l'application  $\hat{\Phi} \rightarrow \Phi, (p, q) \mapsto p$ .

Notons  $\ell^2(\Phi)$  l'espace des fonctions  $\varphi : \Phi \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\sum_{p \in \Phi} |\varphi(p)|^2 < \infty$ , muni de sa structure naturelle d'espace de Hilbert  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si  $\Phi$  est régulier de valence 3, l'application  $\Pi$  induit une application linéaire bornée de norme 3,  $\Pi^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \Pi, \ell^2(\Phi) \rightarrow \ell^2(\hat{\Phi})$ . Par abus de langage, on note encore  $\Pi$  l'adjoint de  $\Pi^* : c'est l'opérateur linéaire borné  $\ell^2(\hat{\Phi}) \rightarrow \ell^2(\Phi)$  qui, à une$



fonction  $\varphi$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$ , associe la fonction dont la valeur en un point  $p$  de  $\Phi$  est  $\sum_{q \sim p} \varphi(p, q)$ . On a  $\text{III}^* = 3$ .

Étendons la définition du graphe des triangles à des graphes plus généraux. Nous dirons qu'un graphe  $\Phi$  est régulier de valence 3 à bord si tous les points de  $\Phi$  ont deux ou trois voisins. Dans ce cas, nous appellerons bord de  $\Phi$  et nous noterons  $\partial\Phi$  l'ensemble des points de  $\Phi$  qui ont deux voisins. Si  $\Phi$  est un graphe régulier de valence 3 à bord, nous noterons  $\hat{\Phi}$  l'ensemble formé de la réunion de  $\partial\Phi$  et de l'ensemble des couples  $(p, q)$  d'éléments de  $\Phi$  avec  $p \sim q$ . Nous munirons  $\hat{\Phi}$  de la structure de graphe pour laquelle, si  $p$  est un point de  $\Phi - \partial\Phi$ , de voisins  $q, r$  et  $s$ , les voisins de  $(p, q)$  sont  $(q, p)$ ,  $(p, r)$  et  $(p, s)$  et, si  $p$  est un point de  $\partial\Phi$ , de voisins  $q$  et  $r$ , les voisins de  $p$  dans  $\hat{\Phi}$  sont  $(p, q)$  et  $(p, r)$  et les voisins de  $(p, q)$  sont  $(q, p)$ ,  $p$  et  $(p, r)$ . Ainsi,  $\hat{\Phi}$  est à nouveau un graphe régulier de valence 3 à bord et le bord de  $\hat{\Phi}$  est en bijection naturelle avec celui de  $\Phi$ . À nouveau, si  $\Phi$  est connexe,  $\hat{\Phi}$  est connexe. On note encore  $\Pi$  l'application naturelle  $\hat{\Phi} \rightarrow \Phi$  et  $\Pi^*$  et  $\Pi$  les opérateurs bornés associés  $\ell^2(\Phi) \rightarrow \ell^2(\hat{\Phi})$  et  $\ell^2(\hat{\Phi}) \rightarrow \ell^2(\Phi)$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 à bord. Alors, les triangles de  $\hat{\Phi}$  sont exactement les parties de la forme  $\Pi^{-1}(p)$  où  $p$  est un point de  $\Phi$ . En particulier, tout point de  $\hat{\Phi}$  appartient à un unique triangle.*

*Démonstration.* Si  $p$  est un point de  $\Phi$ , l'ensemble  $\Pi^{-1}(p)$  constitue clairement un triangle. Réciproquement, donnons-nous un point  $p$  de  $\Phi - \partial\Phi$ , de voisins  $q, r$  et  $s$ . Alors, les voisins de  $(p, q)$  sont  $(q, p)$ ,  $(p, r)$  et  $(p, s)$ . Par définition, comme  $p \neq q$ , le point  $(q, p)$  ne peut pas être voisin de  $(p, r)$  ou de  $(p, s)$ . Par conséquent, le seul triangle contenant  $(q, p)$  est  $\Pi^{-1}(p)$ . De même, si  $p$  appartient à  $\partial\Phi$ , et si les voisins de  $p$  sont  $q$  et  $r$ , comme  $p$  n'a que deux voisins dans  $\hat{\Phi}$ ,  $p$  n'appartient qu'à un seul triangle et, comme  $p \neq q$ , aucun des voisins de  $(q, p)$  n'est voisin de  $(p, q)$ , donc  $(p, q)$  n'appartient qu'à un seul triangle.  $\square$

Si  $\Phi$  est un graphe, nous dirons qu'une bijection  $\sigma : \Phi \rightarrow \Phi$  est un automorphisme du graphe  $\Phi$  si, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\Phi$  avec  $p \sim q$ , on a  $\sigma(p) \sim \sigma(q)$ . L'ensemble des automorphismes de  $\Phi$  constitue un sous-groupe du groupe des bijections de  $\Phi$ , qu'on note  $\text{Aut } \Phi$ . Si  $\Phi$  est régulier de valence 3 à bord et si  $\sigma$  est un automorphisme de  $\Phi$ , on a  $\sigma(\partial\Phi) = \partial\Phi$  et il existe un unique automorphisme  $\hat{\sigma}$  de  $\hat{\Phi}$  tel que  $\Pi\hat{\sigma} = \sigma\Pi$ .

**Lemme 2.2.** *Soit  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 à bord. L'application  $\sigma \mapsto \hat{\sigma}, \text{Aut } \Phi \rightarrow \text{Aut } \hat{\Phi}$  est un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* Cette application étant clairement un morphisme injectif, il suffit de démontrer qu'elle est surjective. Soit donc  $\tau$  un automorphisme de  $\hat{\Phi}$ . Comme  $\tau$  permute les triangles de  $\hat{\Phi}$ , d'après le lemme 2.1, il existe une unique bijection  $\sigma : \Phi \rightarrow \Phi$  telle que  $\Pi\tau = \sigma\Pi$ . Soient  $p$  et  $q$  des points de  $\Phi$  tels que  $p \sim q$ . Alors, on a  $(p, q) \sim (q, p)$ , donc  $\tau(p, q) \sim \tau(q, p)$  et, comme ces deux points de  $\hat{\Phi}$  n'appartiennent pas à un même triangle,  $\sigma(p) = \Pi\tau(p, q) \sim \Pi\tau(q, p) = \sigma(q)$ . Donc  $\sigma$  est un automorphisme de  $\Phi$  et  $\tau = \hat{\sigma}$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Nous allons à présent définir une famille importante de graphes réguliers de valence 3 à bord. Si  $a, b$  et  $c$  sont trois éléments distincts, on note  $\mathcal{T}(a, b, c) = \mathcal{T}_1(a, b, c)$  l'ensemble  $\{a, b, c\}$  muni de la structure de graphe pour laquelle on a  $a \sim b, b \sim c$  et  $c \sim a$  et on dit que  $\mathcal{T}(a, b, c)$  est le triangle ou le 1-triangle de sommets  $a, b$  et  $c$ . On le considère comme un graphe régulier de valence 3 à bord. On définit alors par récurrence une famille de graphes réguliers à bord en posant, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{T}_{n+1}(a, b, c) = \widehat{\mathcal{T}_n(a, b, c)}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on appelle  $\mathcal{T}_n(a, b, c)$  le  $n$ -triangle de sommets  $a, b$  et  $c$ .

On note  $\mathfrak{S}(a, b, c)$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{a, b, c\}$ . Par définition et d'après le lemme 2.2, on a le

**Lemme 2.3.** *Soit  $a, b$  et  $c$ , trois éléments distincts. Alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{T}_n(a, b, c)$  est un graphe connexe régulier de valence 3 à bord et  $\partial\mathcal{T}_n(a, b, c) = \{a, b, c\}$ . L'application qui, à un automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{T}_n(a, b, c)$ , associe sa restriction à  $\{a, b, c\}$  induit un isomorphisme de groupes de  $\text{Aut } \mathcal{T}_n(a, b, c)$  dans  $\mathfrak{S}(a, b, c)$ .*

Si  $\Phi$  est un graphe et  $n$  un entier  $\geq 1$ , nous dirons qu'une partie  $\mathcal{T}$  de  $\Phi$  est un  $n$ -triangle s'il existe des points  $p, q$  et  $r$  de  $\mathcal{T}$  tels que la partie  $\mathcal{T}$ , munie de la restriction de la relation  $\sim$ , soit isomorphe au graphe  $\mathcal{T}_n(p, q, r)$ . Par abus de langage, nous appellerons 0-triangles les points de  $\Phi$ .

Soit  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 à bord. Notons  $\hat{\Phi}^{(0)} = \Phi, \hat{\Phi}^{(1)} = \hat{\Phi}$  et, pour tout entier  $n, \hat{\Phi}^{(n+1)} = \widehat{\hat{\Phi}^{(n)}}$ . Par récurrence, pour tout entier  $n$ , tout automorphisme  $\sigma$  de  $\Phi$  induit un unique automorphisme  $\hat{\sigma}^{(n)}$  de  $\hat{\Phi}^{(n)}$  tel que  $\Pi^n \hat{\sigma}^{(n)} = \sigma \Pi^n$ .

Des lemmes 2.1 et 2.2, on déduit immédiatement, par récurrence, le

**Lemme 2.4.** *Soient  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 à bord et  $n$  un entier naturel. Les  $n$ -triangles de  $\hat{\Phi}^{(n)}$  sont exactement les parties de la forme  $\Pi^{-n}(p)$  où  $p$  est un point de  $\Phi$ . En particulier, tout point de  $\hat{\Phi}^{(n)}$  appartient à un unique  $n$ -triangle. L'application  $\sigma \mapsto \hat{\sigma}^{(n)}, \text{Aut } \Phi \rightarrow \text{Aut } \hat{\Phi}^{(n)}$  est un*

isomorphisme de groupes.

**Corollaire 2.5.** *Soient  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 à bord,  $n \geq m \geq 1$  des entiers naturels,  $p$  un point de  $\hat{\Phi}^{(n)}$ ,  $\mathcal{T}$  le  $n$ -triangle contenant  $p$  et  $\mathcal{S}$  le  $m$ -triangle contenant  $p$ . On a  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ . Si  $p$  est un sommet de  $\mathcal{T}$  et si  $p$  n'appartient pas à  $\partial\hat{\Phi}^{(n)}$ , l'unique voisin de  $p$  dans  $\hat{\Phi}^{(n)}$  qui n'appartient pas au 1-triangle contenant  $p$  est lui-même le sommet d'un  $n$ -triangle de  $\hat{\Phi}^{(n)}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.4, on a  $\mathcal{T} = \Pi^{-n}(\Pi^n p)$  et  $\mathcal{S} = \Pi^{-m}(\Pi^m p)$ , donc  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ . Supposons que  $p$  appartient à  $\partial\mathcal{T} = \partial\hat{\Phi}^{(n)}$ . Alors,  $p$  possède un unique voisin dans  $\hat{\Phi}^{(n)}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{T}$ . Soient  $q$  un voisin de  $p$  et  $\mathcal{R}$  le  $n$ -triangle contenant  $q$ . Si  $q$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{R}$ , tous les voisins de  $q$  appartiennent à  $\mathcal{R}$  et, donc, on a  $p \in \mathcal{R}$ . Comme, d'après le lemme 2.4,  $p$  appartient à un unique  $n$ -triangle de  $\hat{\Phi}^{(n)}$ , on a  $\mathcal{T} = \mathcal{R}$ , et, donc,  $q$  appartient à  $\mathcal{T}$ , si bien que le voisin de  $p$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{T}$  est un sommet du  $n$ -triangle qui le contient.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Soient  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $a, b$  et  $c$  des éléments distincts. Alors, il existe des éléments uniques  $ab, ba, ac, ca, bc$  et  $cb$  de  $\mathcal{T}_n(a, b, c)$  tels que  $\mathcal{T}_n(a, b, c)$  soit la réunion des trois  $(n-1)$ -triangles  $\mathcal{T}_{n-1}(a, ab, ac)$ ,  $\mathcal{T}_{n-1}(b, ba, bc)$  et  $\mathcal{T}_{n-1}(c, ca, cb)$  et que l'on ait  $ab \sim ba, ac \sim ca$  et  $bc \sim cb$ .*

*Démonstration.* Pour  $n = 2$ , le corollaire se démontre directement. On en déduit le cas général en appliquant le lemme 2.4.  $\square$

Donnons-nous à présent un élément  $a$  et deux suites d'éléments distincts  $(b_n)_{n \geq 1}$  et  $(c_n)_{n \geq 1}$  telles que, pour tous  $n \geq 1$ , on ait  $b_n \neq a, c_n \neq a$  et  $b_n \neq c_n$ . D'après le corollaire 2.6, pour tout  $n \geq 1$ , on peut identifier  $\mathcal{T}_n(a, b_n, c_n)$  à une partie de  $\mathcal{T}_{n+1}(a, b_{n+1}, c_{n+1})$  grâce à l'unique isomorphisme de graphes envoyant  $a$  sur  $a, b_n$  sur  $ab_{n+1}$  et  $c_n$  sur  $ac_{n+1}$ . On appelle alors triangle infini issu de  $a$  et on note  $\mathcal{T}_\infty(a)$  l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{T}_n(a, b_n, c_n)$  muni de la structure de graphe qui induit sur chacun des  $\mathcal{T}_n(a, b_n, c_n)$ ,  $n \geq 1$ , sa structure de  $n$ -triangle. Des études précédentes, on déduit le

**Lemme 2.7.** *Soit  $a$  un élément. Le graphe  $\mathcal{T}_\infty(a)$  est connexe, régulier de valence 3 à bord et  $\partial\mathcal{T}_\infty(a) = \{a\}$ . Si  $b$  et  $c$  sont les deux voisins de  $a$  dans  $\mathcal{T}_\infty(a)$ , il existe un unique isomorphisme de  $\mathcal{T}_\infty(a)$  dans  $\widehat{\mathcal{T}_\infty(a)}$  qui envoie  $a$  sur  $a, b$  sur  $(a, b)$  et  $c$  sur  $(a, c)$ . Pour tout entier naturel  $n$ , cet isomorphisme induit une bijection naturelle entre les points de  $\mathcal{T}_\infty(a)$  et les  $n$ -triangles de  $\mathcal{T}_\infty(a)$  et tout point de  $\mathcal{T}_\infty(a)$  appartient à un unique  $n$ -triangle. Enfin,  $\mathcal{T}_\infty(a)$  possède un unique automorphisme non-trivial; cet automorphisme est une*

involution qui fixe  $a$  et qui, pour tout  $n \geq 1$ , échange les deux sommets différents de  $a$  du  $n$ -triangle contenant  $a$ .

Dans tout cet article, on fixe deux éléments distincts  $p_0$  et  $p_0^\vee$ . On appelle graphe de Pascal et on note  $\Gamma$  l'ensemble  $\mathcal{T}_\infty(p_0) \cup \mathcal{T}_\infty(p_0^\vee)$  muni de la structure de graphe qui induit la structure de triangle infini sur  $\mathcal{T}_\infty(p_0)$  et sur  $\mathcal{T}_\infty(p_0^\vee)$  et pour laquelle on a  $p_0 \sim p_0^\vee$ . Du lemme 2.7, on déduit la

**Proposition 2.8.** *Le graphe de Pascal est un graphe infini, connexe et régulier de valence 3. Si  $q_0$  et  $r_0$  sont les deux voisins de  $p_0$  dans  $\mathcal{T}_\infty(p_0)$  et  $q_0^\vee$  et  $r_0^\vee$  les deux voisins de  $p_0^\vee$  dans  $\mathcal{T}_\infty(p_0^\vee)$ , il existe un unique isomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\hat{\Gamma}$  qui envoie  $p_0$  sur  $(p_0, p_0^\vee)$ ,  $p_0^\vee$  sur  $(p_0^\vee, p_0)$ ,  $q_0$  sur  $(p_0, q_0)$ ,  $r_0$  sur  $(p_0, r_0)$ ,  $q_0^\vee$  sur  $(p_0^\vee, q_0^\vee)$  et  $r_0^\vee$  sur  $(p_0^\vee, r_0^\vee)$ . Pour tout entier naturel  $n$ , cet isomorphisme induit une bijection naturelle entre les points de  $\Gamma$  et les  $n$ -triangles de  $\Gamma$  et tout point de  $\Gamma$  appartient à un unique  $n$ -triangle.*

Une représentation plane du graphe de Pascal est donnée à la figure 1.

On identifiera dorénavant  $\Gamma$  et  $\hat{\Gamma}$  par l'isomorphisme décrit dans la proposition 2.8. En particulier, on considérera donc désormais que  $\Pi^*$  et  $\Pi$  sont des endomorphismes bornés de  $\ell^2(\Gamma)$ .

On notera  $\Theta$  le graphe des arêtes de  $\Gamma$ . Plus précisément,  $\Theta$  sera constitué de l'ensemble des paires  $\{p, q\}$  d'éléments de  $\Gamma$  avec  $p \sim q$ , muni de la relation pour laquelle, si  $p$  et  $q$  sont deux points voisins de  $\Gamma$ , si  $r$  et  $s$  sont les deux autres voisins de  $p$  et  $t$  et  $u$  les deux autres voisins de  $q$ , les voisins de  $\{p, q\}$  sont  $\{p, r\}$ ,  $\{p, s\}$ ,  $\{q, t\}$  et  $\{q, u\}$ . On appellera  $\Theta$  le graphe de Sierpiński. C'est un graphe infini, connexe et régulier de valence 4. Une représentation plane en est donnée à la figure 2.

Si  $\Phi$  est un graphe régulier de valence  $k$ , pour toute fonction  $\varphi$  de  $\Phi$  dans  $\mathbb{C}$ , on notera  $\Delta\varphi$  la fonction  $p \mapsto \sum_{q \sim p} \varphi(q)$ . Alors,  $\Delta$  induit un opérateur auto-adjoint de norme  $\leq k$  de l'espace  $\ell^2(\Phi)$ . On appellera spectre de  $\Phi$  le spectre de cet opérateur.

### 3 Le spectre de $\Gamma$

Soit  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3. Dans cette section, nous allons étudier le lien entre les propriétés spectrales de  $\Phi$  et celle de  $\hat{\Phi}$ . Notre étude est fondée sur le

**Lemme 3.1.** *On a  $(\Delta^2 - \Delta - 3)\Pi^* = \Pi^*\Delta$  et  $\Pi(\Delta^2 - \Delta - 3) = \Delta\Pi$ .*

*Démonstration.* Soient  $\varphi$  une fonction sur  $\Phi$ ,  $p$  un point de  $\Phi$  et  $q, r, s$  les trois voisins de  $p$ . Supposons que  $\varphi(p) = a$ ,  $\varphi(q) = b$ ,  $\varphi(r) = c$  et  $\varphi(s) = d$ . Alors, on a  $\Pi^*\varphi(p, q) = a$ ,  $\Delta\Pi^*\varphi(p, q) = 2a + b$  et  $\Delta^2\Pi^*\varphi(p, q) = (2b + a) + (2a + c) + (2a + d) = 5a + 2b + c + d$ . Il vient bien  $(\Delta^2 - \Delta - 3)\Pi^*\varphi(p, q) = b + c + d = \Pi^*\Delta\varphi(p, q)$ . La seconde relation s'obtient en passant aux opérateurs adjoints dans la première.  $\square$

Nous allons utiliser le lemme 3.1 pour déterminer le spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$ . Nous aurons recours à des résultats élémentaires d'analyse fonctionnelle.

**Lemme 3.2.** *Soient  $E$  un espace de Banach et  $T$  un opérateur borné de  $E$ . On suppose que tous les éléments du spectre de  $T$  ont une partie réelle strictement positive. Alors, si  $F \subset E$  est un sous-espace fermé stable par  $T^2$ ,  $F$  est stable par  $T$ .*

*Démonstration.* Soient  $0 < \alpha < \beta$  et  $\gamma > 0$  tels que le spectre  $S$  de  $T$  soit contenu dans l'intérieur du rectangle  $R = [\alpha, \beta] + [-\gamma, \gamma]i$  et  $U \supset R$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{C}$  tels que l'application  $\lambda \mapsto \lambda^2$  induise un bi-holomorphisme de  $U$  dans  $V$ . Il existe une fonction holomorphe  $r$  sur  $V$  telle que, pour tout  $\lambda$  dans  $U$ , on ait  $r(\lambda^2) = \lambda$ . Comme  $R$  est simplement connexe, d'après le théorème de Runge, il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes dans  $\mathbb{C}[X]$  qui converge uniformément vers  $r$  sur  $R^2$ . Alors, comme le spectre de  $T^2$  est  $S^2$ , qui est contenu dans l'intérieur de  $R^2$ , la suite  $r_n(T^2)$  converge vers  $T$  dans l'espace des endomorphismes de  $E$ . Pour tout entier  $n$ ,  $r_n(T^2)$  laisse stable  $F$ , donc  $T$  laisse stable  $F$ .  $\square$

**Lemme 3.3.** *Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $T$  un endomorphisme auto-adjoint borné de  $H$  et  $\pi$  un polynôme du second degré à coefficients réels. On suppose qu'il existe un sous-espace fermé  $K$  de  $H$  tel que  $\pi(T)K \subset K$  et que  $K$  et  $TK$  engendrent  $H$ . Alors, l'image par  $\pi$  du spectre de  $T$  dans  $H$  est égale au spectre de  $\pi(T)$  dans  $K$  et, si on a en outre  $T^{-1}K \cap K = \{0\}$ , le spectre de  $T$  dans  $H$  est exactement l'ensemble des  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\pi(\lambda)$  appartienne au spectre de  $\pi(T)$  dans  $K$ .*

*Démonstration.* Après avoir écrit  $\pi$  sous sa forme canonique, on peut supposer qu'on a  $\pi(X) = X^2$ . Notons  $E$  la résolution spectrale de  $T$  : pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ ,  $E(B)$  est un projecteur de  $H$  qui commute à  $T$ . Soit  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}$  tel que  $B = -B$ . Alors, pour toute mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ , dans  $L^2(\mu)$ , la fonction caractéristique de  $B$  est la limite d'une suite de polynômes pairs. On a donc  $E(B)K \subset K$ .

Le spectre de  $T^2$  dans  $H$  est exactement l'ensemble des carrés des éléments du spectre de  $T$  dans  $H$ . Comme  $T^2$  est auto-adjoint et que  $K$  est stable par  $T^2$ , le spectre de  $T^2$  dans  $K$  est contenu dans son spectre dans  $H$ , et donc, dans l'ensemble des carrés des éléments du spectre de  $T$ . Réciproquement, supposons qu'il existe des éléments du spectre de  $T$  dont le carré n'appartient pas au spectre de  $T^2$  dans  $K$ . Alors, il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}$ , symétrique et tel que  $V$  contienne des éléments du spectre de  $T$ , mais que  $V^2$  ne contienne pas d'éléments de celui de  $T^2$  dans  $K$ . On a  $E(V)K \subset K$ , mais, comme  $V^2$  ne contient pas d'éléments du spectre de  $T^2$  dans  $K$ ,  $E(V)K = 0$ . Or, puisque  $K$  et  $TK$  engendrent  $H$ ,  $E(V)K$  et  $TE(V)K = E(V)TK$  engendrent  $E(V)H$ . Il vient  $E(V)H = 0$ , ce qui contredit le fait que  $V$  contient des valeurs spectrales de  $T$ . Le spectre de  $T^2$  dans  $K$  est donc exactement l'ensemble des carrés des éléments du spectre de  $T$  dans  $H$ .

Supposons à présent qu'on a  $T^{-1}K \cap K = \{0\}$ . Pour conclure, il nous reste à prouver que le spectre de  $T$  est symétrique. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, on peut, quitte à remplacer  $T$  par  $-T$ , trouver des réels  $0 < \alpha < \beta$  tel que  $U = ]\alpha, \beta[$  contienne des éléments du spectre de  $T$  et que  $-U$  n'en contienne pas. Mais alors, on a  $E(U) = E(U \cup (-U))$  et, donc,  $E(U)K \subset K$ . Si  $L$  désigne l'image de  $E(U)$  dans  $H$ , on a donc  $T^2(K \cap L) \subset K \cap L$ . Comme le spectre de la restriction de  $T$  à  $L$  est contenu dans  $\mathbb{R}_+^*$ , on a, d'après le lemme 3.2,  $T(K \cap L) \subset K \cap L$  et, donc, par hypothèse,  $K \cap L = 0$ . Comme  $E(U)K \subset K$ , il vient  $E(U) = 0$  sur  $K$ . Comme  $K$  et  $TK$  engendrent  $H$ , on a  $E(U) = 0$ , ce qui contredit le fait que  $U$  contient des éléments du spectre de  $T$ . Le spectre de  $T$  est donc symétrique. Le lemme en découle.  $\square$

Pour appliquer ces résultats dans des espaces de fonctions de carré intégrable sur des graphes, nous aurons besoin de résultats de géométrie des graphes. Soient  $\Phi$  un graphe connexe et  $P$  et  $Q$  deux sous-ensembles disjoints de  $\Phi$  tels que  $\Phi = P \cup Q$ . Nous dirons que  $\Phi$  est partagé par la partition  $\{P, Q\}$  si tout voisin d'un élément de  $P$  appartient à  $Q$  et tout voisin d'un élément de  $Q$  appartient à  $P$ . Nous dirons que  $\Phi$  est partageable s'il existe une partition de  $\Phi$  en deux sous-ensembles qui le partage. On vérifie aisément que  $\Phi$  est partageable si et seulement si, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\Phi$ , les chemins joignant  $p$  à  $q$  sont soit tous de longueur paire, soit tous de longueur impaire. En particulier, si  $\Phi$  est partageable, la partition  $\{P, Q\}$  qui le partage est unique, deux points  $p$  et  $q$  appartenant au même atome si et seulement s'ils peuvent être joints par un chemin de longueur paire.

**Lemme 3.4.** *Soit  $\Phi$  un graphe connexe et soit  $L$  l'espace des fonctions  $\varphi$  sur*

$\Phi$  telles que, pour tout  $p$  dans  $\Phi$ ,  $\varphi$  est constante sur les voisins de  $p$ . Alors, si  $\Phi$  n'est pas partageable,  $L$  est égal à l'espace des fonctions constantes. Si  $\Phi$  est partagé par la partition  $\{P, Q\}$ ,  $L$  est engendré par les fonctions constantes et par la fonction  $1_P - 1_Q$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  dans  $L$ ,  $p$  et  $q$  des points de  $\Phi$  et  $r_0 = p, r_1, \dots, r_n = q$  un chemin de  $p$  à  $q$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ , on a  $r_{i-1} \sim r_i \sim r_{i+1}$ , donc  $\varphi(r_{i-1}) = \varphi(r_{i+1})$  et, si  $n$  est pair,  $\varphi(p) = \varphi(q)$ . Par conséquent, si  $\varphi(p) \neq \varphi(q)$  et si  $P = \{r \in \Phi | \varphi(r) = \varphi(p)\}$  et  $Q = \{r \in \Phi | \varphi(r) = \varphi(q)\}$ , la partition  $\{P, Q\}$  partage  $\Phi$ . Le lemme s'en déduit facilement.  $\square$

Nous utiliserons le principe du maximum sous la forme du

**Lemme 3.5.** *Soit  $\Phi$  un graphe connexe régulier de valence 3. Soit  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Phi)$  telle que  $\Delta\varphi = 3\varphi$ . Si  $\Phi$  est infini, on a  $\varphi = 0$  et si  $\Phi$  est fini,  $\varphi$  est constante. Soit  $\psi$  dans  $\ell^2(\Phi)$  telle que  $\Delta\psi = -3\psi$ . Si  $\Phi$  est infini ou non partageable, on a  $\psi = 0$  et, si  $\Phi$  est fini et partagé par la partition  $\{P, Q\}$ ,  $\psi$  est proportionnelle à  $1_P - 1_Q$ .*

*Démonstration.* Comme  $\varphi$  est dans  $\ell^2(\Phi)$ , l'ensemble  $M = \{p \in \Phi | \varphi(p) = \max_{\Phi} \varphi\}$  n'est pas vide. Comme  $\Delta\varphi = 3\varphi$ , pour tout  $p$  dans  $M$ , les voisins de  $p$  appartiennent tous à  $M$  et, donc, comme  $\Phi$  est connexe,  $M = \Phi$  et  $\varphi$  est constante. Si  $\Phi$  est infini, comme  $\varphi$  est dans  $\ell^2(\Phi)$ , elle est nulle. De même, supposons  $\psi \neq 0$  et posons  $P = \{p \in \Phi | \psi(p) = \max_{\Phi} \psi\}$  et  $Q = \{q \in \Phi | \psi(q) = \min_{\Phi} \psi\}$ . Comme  $\Delta\psi = -3\psi$ , on a  $\min_{\Phi} \psi = -\max_{\Phi} \psi$  et les voisins des points de  $P$  appartiennent à  $Q$  tandis que les voisins des points de  $Q$  appartiennent à  $P$ . Par connexité, on a  $P \cup Q = \Phi$ , le graphe  $\Phi$  est partageable et  $\psi$  est proportionnelle à  $1_P - 1_Q$ . Enfin, comme  $\psi$  est dans  $\ell^2(\Phi)$ , le graphe  $\Phi$  est fini.  $\square$

Rappelons qu'on a noté  $f$  le polynôme  $x^2 - x - 3$ . Du lemme 3.1, on déduit le

**Corollaire 3.6.** *Soient  $\Phi$  un graphe connexe régulier de valence 3 et  $H$  le sous-espace fermé de  $\ell^2(\hat{\Phi})$  engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par l'image de  $\Delta\Pi^*$ . Alors  $H$  est stable par  $\Delta$  et le spectre de la restriction de  $\Delta$  à  $H$  est,*

- (i) *si  $\Phi$  est infini, l'image inverse par  $f$  du spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ .*
- (ii) *si  $\Phi$  est fini, mais non partageable, l'image inverse par  $f$  du spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$  privée de  $-2$ .*
- (iii) *si  $\Phi$  est fini et partageable, l'image inverse par  $f$  du spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$  privée de  $-2$  et de  $0$ .*

*Démonstration.* Notons  $K$  l'image de  $\Pi^*$ . Comme  $\frac{1}{\sqrt{3}}\Pi^*$  induit une isométrie de  $\ell^2(\Phi)$  dans  $K$ , d'après le lemme 3.1, le spectre de  $f(\Delta)$  dans  $K$  est égal au spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ . Nous allons appliquer le lemme 3.3 à l'espace  $H$  et à l'opérateur  $\Delta$ . Pour cela, étudions l'espace  $\Delta^{-1}K \cap K$ . Soit  $L$  l'espace des  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Phi)$  tels que  $\Delta\Pi^*\varphi$  appartienne à  $K$  et soit  $\varphi$  dans  $L$ . Si  $p$  est un point de  $\Phi$ , dont les voisins sont  $q$ ,  $r$  et  $s$ , posons  $\varphi(p) = a$ ,  $\varphi(q) = b$ ,  $\varphi(r) = c$  et  $\varphi(s) = d$ . Alors, on a  $\Delta\Pi^*\varphi(p, q) = 2a + b$ ,  $\Delta\Pi^*\varphi(p, r) = 2a + c$  et  $\Delta\Pi^*\varphi(p, s) = 2a + d$ . Comme  $\Delta\Pi^*\varphi$  appartient à  $K$ , il vient  $b = c = d$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est un élément de  $\ell^2(\Phi)$  qui, pour tout point  $p$  de  $\Phi$ , est constant sur l'ensemble des voisins de  $p$ , alors  $\varphi$  appartient à  $L$ .

Si  $\Phi$  est infini, d'après le lemme 3.4, on a  $L = \{0\}$ , et l'on peut appliquer le lemme 3.3 à  $H$ . Le spectre de  $\Delta$  dans  $H$  est alors bien l'image réciproque par  $f$  de celui de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ . Si  $\Phi$  est fini, mais non partageable, d'après le lemme 3.4,  $L$  est la droite des fonctions constantes et l'on peut appliquer le lemme 3.3 à l'orthogonal des fonctions constantes dans  $H$ . On obtient le résultat puisque  $f(-2) = f(3) = 3$  et que, d'après le lemme 3.5, les fonctions constantes sont les seules fonctions propres de valeur propre 3 pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ . Enfin, si  $\Phi$  est fini et partagé par la partition  $\{P, Q\}$ , d'après le lemme 3.4,  $L$  est engendré par les fonctions constantes et par la fonction  $1_P - 1_Q$ . Alors,  $\Pi^*(1_P - 1_Q)$  est un vecteur propre de valeur propre 1 dans  $H$ . On applique le lemme 3.3 à l'orthogonal du sous-espace de  $H$  engendré par les fonctions constantes et par  $\Pi^*(1_P - 1_Q)$ . Le résultat en découle puisque  $f(0) = f(1) = -3$  et que, toujours d'après le lemme 3.5, les fonctions propres de valeur propre  $-3$  dans  $\ell^2(\Phi)$  sont les multiples de  $1_P - 1_Q$ .  $\square$

Il nous reste à déterminer le spectre de  $\Delta$  dans l'orthogonal de  $H$ . C'est l'objet du

**Lemme 3.7.** *Soient  $\Phi$  un graphe connexe régulier de valence 3 et  $H$  le sous-espace fermé de  $\ell^2(\hat{\Phi})$  engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par l'image de  $\Delta\Pi^*$ . Le spectre de  $\Delta$  dans l'orthogonal de  $H$  est égal à  $\{0, -2\}$ . L'espace propre associé à la valeur propre 0 dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$  est l'espace des fonctions  $\varphi$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$  telles que  $\Pi\varphi = 0$  et que, pour tous  $p$  et  $q$  voisins dans  $\Phi$ , on ait  $\varphi(p, q) = \varphi(q, p)$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $-2$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$  est l'espace des fonctions  $\varphi$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$  telles que  $\Pi\varphi = 0$  et que, pour tous  $p$  et  $q$  voisins dans  $\Phi$ , on ait  $\varphi(p, q) = -\varphi(q, p)$ .*



*Démonstration.* Soit  $\varphi$  dans l'orthogonal de  $H$  et soit  $p$  un point de  $\Phi$ , de voisins  $q, r, s$ . Posons  $a = \varphi(p, q)$ ,  $b = \varphi(p, r)$ ,  $c = \varphi(q, p)$  et  $d = \varphi(r, p)$ . Enfin, notons  $\psi$  la fonction indicatrice de  $\{p\}$  sur  $\Phi$ . Comme  $\varphi$  est orthogonale à  $\Pi^*\psi$  et à  $\Delta\Pi^*\psi$ , on a  $\varphi(p, s) = -a - b$  et  $\varphi(s, p) = -c - d$ . Il vient  $\Delta\varphi(p, q) = c - a$  et  $\Delta^2\varphi(p, q) = (a - c) + (d - b) + (-c - d + a + b) = 2a - 2c$ . On a donc, dans l'orthogonal de  $H$ ,  $\Delta^2 + 2\Delta = 0$ , et, pour  $\varphi$  dans cet espace, on a  $\Delta\varphi = 0$  si et seulement si, pour tous  $p$  et  $q$  voisins dans  $\Phi$ ,  $\varphi(p, q) = \varphi(q, p)$  et  $\Delta\varphi = -2\varphi$  si et seulement si, pour tous  $p$  et  $q$  voisins dans  $\Phi$ ,  $\varphi(p, q) = -\varphi(q, p)$ .

Pour terminer la démonstration du lemme, il nous reste à montrer que  $\Pi$  n'a pas de vecteur propre de valeur propre 0 ou  $-2$  dans  $H$ . Pour cela, donnons-nous donc  $\varphi$  dans  $H$  tel que  $\Delta\varphi = -2\varphi$ . On a alors, d'après le lemme 3.1,  $\Delta\Pi\varphi = \Pi(\Delta^2 - \Delta - 3)\varphi = 3\varphi$ . Si  $\Phi$  est infini, d'après le lemme 3.5,  $\Pi\varphi$  est nulle. On a donc  $\Pi\varphi = 0$  et  $\Pi\Delta\varphi = -2\Pi\varphi = 0$ . Donc, comme  $\varphi$  appartient à  $H$  qui est engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par l'image de  $\Delta\Pi^*$ , on a  $\varphi = 0$ . Si  $\Phi$  est fini, toujours d'après le lemme 3.5,  $\Pi\varphi$  est constante. Comme  $\varphi$  est orthogonale aux fonctions constantes, on a donc, à nouveau,  $\Pi\varphi = 0$  et  $\Pi\Delta\varphi = 0$ , ce qui implique  $\varphi = 0$ .

Si, à présent,  $\varphi$  est un élément de  $H$  tel que  $\Delta\varphi = 0$ , on a  $\Delta\Pi\varphi = -3\Pi\varphi$ . À nouveau, d'après le lemme 3.5, si  $\Phi$  est infini ou non partageable, on a  $\Pi\varphi = 0$  et, donc,  $\varphi = 0$ , tandis que, si  $\Phi$  est partagé par la partition  $\{P, Q\}$ ,  $\Pi\varphi$  est proportionnelle à  $1_P - 1_Q$ . Or,  $\Pi^*(1_P - 1_Q)$  est un vecteur propre de valeur propre 1 pour  $\Delta$ , donc  $\langle \Pi\varphi, 1_P - 1_Q \rangle = \langle \varphi, \Pi^*(1_P - 1_Q) \rangle = 0$  et  $\Pi\varphi = 0$ , si bien que  $\varphi = 0$ .  $\square$

Rappelons que, pour tout entier  $n$ , on a noté  $\hat{\Phi}^{(n)}$  le graphe obtenu en remplaçant chaque point de  $\Phi$  par un  $n$ -triangle. L'espace  $\ell^2(\hat{\Phi}^{(2)})$  contient des fonctions propres à support fini de valeur propre  $-2$  et  $0$ , comme on peut le voir sur la figure 5, où l'on n'a représenté que les valeurs non nulles des fonctions.

Nous avons donc le

**Lemme 3.8.** *Pour tout  $n \geq 2$ , l'espace  $\ell^2(\hat{\Phi}^{(n)})$  contient des fonctions propres de valeur propre  $-2$  et  $0$ .*

Rappelons qu'on a noté  $\Lambda$  l'ensemble de Julia de  $f$ . En appliquant le corollaire 3.6 et le lemme 3.7 à  $\Gamma$ , on obtient le

**Corollaire 3.9.** *Le spectre de  $\Gamma$  est constitué de la réunion de  $\Lambda$  et de l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

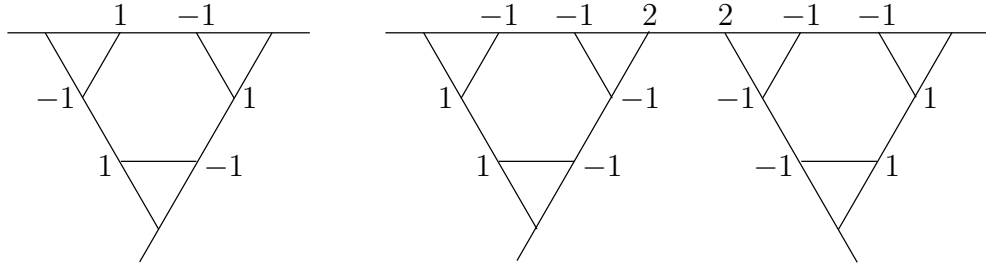


FIG. 5 – Fonctions propres sur  $\hat{\Phi}^{(2)}$

*Démonstration.* D'après la proposition 2.8,  $\hat{\Gamma}$  est isomorphe à  $\Gamma$ . Par conséquent, d'après le lemme 3.8 et le corollaire 3.6, le spectre de  $\Gamma$  contient  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  et, donc, l'adhérence de cet ensemble, qui est précisément la réunion de  $\Lambda$  et de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Or, comme  $-2$  appartient à  $\Lambda$ , si  $x$  est un point du spectre de  $\Gamma$  qui n'appartient pas à  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , d'après le corollaire 3.6, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , le réel  $f^n(x)$  appartient au spectre de  $\Gamma$  et, donc, la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, si bien que  $x$  appartient à  $\Lambda$ .  $\square$

## 4 Les mesures spectrales de $\Gamma$

Soit toujours  $\Phi$  un graphe connexe régulier de valence 3. Dans cette section, nous allons expliquer comment calculer les mesures spectrales de certains éléments de  $\ell^2(\hat{\Phi})$ . Pour cela nous utiliserons le

**Lemme 4.1.** *On a  $\Pi\Delta\Pi^* = 6 + \Delta$  et, donc, pour tous  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\ell^2(\Phi)$ ,*

$$\langle \Delta\Pi^*\varphi, \Pi^*\psi \rangle = 6\langle \varphi, \psi \rangle + \langle \Delta\varphi, \psi \rangle = 2\langle \Pi^*\varphi, \Pi^*\psi \rangle + \frac{1}{3}\langle (\Delta^2 - \Delta - 3)\Pi^*\varphi, \Pi^*\psi \rangle.$$

*Démonstration.* Soient  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Phi)$  et  $p$  un point de  $\Phi$ , de voisins  $q, r, s$ . Posons  $a = \varphi(p)$ ,  $b = \varphi(q)$ ,  $c = \varphi(r)$  et  $d = \varphi(s)$ . Alors, on a  $\Delta\Pi^*\varphi(p, q) = 2a + b$  et, donc,  $\Pi\Delta\Pi^*\varphi(p) = (2a + b) + (2a + c) + (2a + d) = 6a + (b + c + d)$ , d'où la première identité. La deuxième en découle, en appliquant le lemme 3.1 et la relation  $\Pi\Pi^* = 3$ .  $\square$

Étudions à présent les conséquences abstraites de ce type d'identité.

**Lemme 4.2.** *Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $T$  un endomorphisme auto-adjoint borné de  $H$ ,  $K$  un sous-espace fermé de  $H$  et  $\pi(x) = (x - u)^2 + m$  un*

polynôme unitaire à coefficients réels du second degré. On suppose qu'on a  $\pi(T)K \subset K$ , que  $K$  et  $TK$  engendrent  $H$  et qu'il existe des nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tous  $v$  et  $w$  dans  $K$ , on ait  $\langle Tv, w \rangle = a\langle v, w \rangle + b\langle \pi(T)v, w \rangle$ . Alors, pour tout  $x \neq u$  dans le spectre de  $T$ , on a

$$1 + \frac{a - u + b\pi(x)}{x - u} \geq 0.$$

*Démonstration.* Après avoir mis  $\pi$  sous forme canonique, on peut supposer qu'on a  $\pi(x) = x^2$ . Soit  $v$  un vecteur unitaire de  $K$ . Alors, pour tout nombre réel  $s$ , on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Tv + sv, Tv + sv \rangle &= \langle Tv, Tv \rangle + 2s\langle Tv, v \rangle + s^2 \\ &= \langle T^2v, v \rangle + 2s(a + b\langle T^2v, v \rangle) + s^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3, les carrés des éléments du spectre de  $T$  dans  $H$  appartiennent au spectre de  $T^2$  dans  $K$ . Si  $x$  est un élément du spectre de  $T$ , il existe donc des vecteurs unitaires  $v$  de  $K$  tels que  $\langle T^2v, v \rangle$  soit aussi proche que l'on veut de  $x^2$ . Alors, par la remarque ci-dessus, pour tout nombre réel  $s$ , on a  $x^2 + 2s(a + bx^2) + s^2 \geq 0$ . Le discriminant de ce polynôme du second degré est donc négatif, c'est-à-dire qu'on a  $x^2 - (a + bx^2)^2 \geq 0$ . Le lemme en découle.  $\square$

Soient  $\pi(x) = (x - u)^2 + m$  un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels. Donnons-nous une fonction borélienne  $\theta$  sur  $\mathbb{R} - \{u\}$ . Alors, si  $\alpha$  est une fonction borélienne sur  $\mathbb{R} - \{u\}$ , on note, pour tout  $y$  dans  $]m, \infty[$ ,  $L_{\pi, \theta} \alpha(y) = \sum_{\pi(x)=y} \theta(x)\alpha(x)$ . Soit  $\mu$  une mesure borélienne positive sur  $]m, \infty[$ . Si, pour  $\mu$ -presque tout  $y$  dans  $]m, \infty[$ ,  $\theta$  est positive sur les deux images inverses de  $y$  par  $\pi$ , on note  $L_{\pi, \theta}^* \mu$  la mesure borélienne  $\nu$  sur  $\mathbb{R} - \{u\}$  telle que, pour toute fonction borélienne positive  $\alpha$  sur  $\mathbb{R} - \{u\}$ , on ait  $\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \alpha d\nu = \int_{]m, \infty[} L_{\pi, \theta} \alpha d\mu$ .

Nous avons le

**Lemme 4.3.** *Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $T$  un endomorphisme auto-adjoint borné de  $H$ ,  $K$  un sous-espace fermé de  $H$  et  $\pi(x) = (x - u)^2 + m$  un polynôme unitaire à coefficients réels du second degré. On suppose qu'on a  $\pi(T)K \subset K$ , que  $K$  et  $TK$  engendrent  $H$  et qu'il existe des nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tous  $v$  et  $w$  dans  $K$ , on ait  $\langle Tv, w \rangle = a\langle v, w \rangle + b\langle \pi(T)v, w \rangle$ . Alors, pour tout  $v$  dans  $K$ , si  $\mu$  est la mesure spectrale de  $v$  pour  $\pi(T)$  et  $\nu$*

sa mesure spectrale pour  $T$ , si  $\mu(m) = 0$ , on a  $\nu(u) = 0$  et  $\nu = L_{\pi, \theta}^* \mu$  où, pour tout  $x \neq u$ , on a

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a - u + b\pi(x)}{x - u} \right).$$

*Démonstration.* Notons que, comme  $\mu(m) = 0$ , d'après le lemme 3.3, la mesure  $\mu$  est concentrée sur  $]m, \infty[$ . De plus, si  $w$  est un vecteur de  $H$  tel que  $Tw = uw$ , on a  $\pi(T)w = mw$  et, par hypothèse,  $\langle v, w \rangle = 0$ . On a donc  $\nu(u) = 0$ .

D'après le lemme 4.2, la fonction  $\theta$  est positive sur le spectre de  $T$  privé de  $u$ . Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . D'une part, on a

$$\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \pi(x)^n d\nu(x) = \langle \pi(T)^n v, v \rangle = \int_{]m, \infty[} y^n d\mu(y).$$

D'autre part, pour tout  $x \neq u$ , on a  $\theta(x) + \theta(2u - x) = 1$  et, donc, pour tout  $y$  dans  $]m, \infty[$ ,  $L_{\pi, \theta} \pi^n(y) = y^n$ . Il vient bien  $\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \pi^n d\nu = \int_{]m, \infty[} L_{\pi, \theta} \pi^n d\mu$ . De même, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , posons  $\alpha(x) = x\pi(x)^n$ . D'une part, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} - \{u\}} \alpha(x) d\nu(x) &= \langle T\pi(T)^n v, v \rangle \\ &= a \langle \pi(T)^n v, v \rangle + b \langle \pi(T)^{n+1} v, w \rangle = a \int_{]m, \infty[} y^n d\mu(y) + b \int_{]m, \infty[} y^{n+1} d\mu(y). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $x \neq u$ , comme  $(2u - x) - u = u - x$ , on a

$$\begin{aligned} &\theta(x)\alpha(x) + \theta(2u - x)\alpha(2u - x) \\ &= \left( \frac{1}{2} (x + (2u - x)) + \frac{1}{2} (x - (2u - x)) \left( \frac{a - u + b\pi(x)}{x - u} \right) \right) \pi(x)^n \\ &= a\pi(x)^n + b\pi(x)^{n+1} \end{aligned}$$

et, donc, pour tout  $y$  dans  $]m, \infty[$ ,  $L_{\pi, \theta} \alpha(y) = ay^n + by^{n+1}$ . Il vient à nouveau  $\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \alpha d\nu = \int_{]m, \infty[} L_{\pi, \theta} \alpha d\mu$ . Par conséquent, pour tout polynôme  $\alpha$ , on a  $\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \alpha d\nu = \int_{]m, \infty[} L_{\pi, \theta} \alpha d\mu$ . En particulier, la mesure positive  $L_{\pi, \theta}^* \mu$  est finie et, donc, pour toute fonction continue  $\alpha$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ , on a encore  $\int_{\mathbb{R} - \{u\}} \alpha d\nu = \int_{]m, \infty[} L_{\pi, \theta} \alpha d\mu$ , si bien que  $\nu = L_{\pi, \theta}^* \mu$ .  $\square$

Des lemmes 4.1 et 4.3, on déduit le

**Corollaire 4.4.** *Soient  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Phi)$ ,  $\mu$  la mesure spectrale de  $\varphi$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$  et  $\nu$  la mesure spectrale de  $\Pi^*\varphi$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\hat{\Phi})$ . Alors, on a  $\nu(\frac{1}{2}) = 0$  et, si, pour tout  $x \neq \frac{1}{2}$ , on pose  $\theta(x) = \frac{x(x+2)}{2x-1}$ , on a  $\nu = L_{f,\theta}^*\mu$ .*

*Démonstration.* La valeur minimale du polynôme  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4} < -3 \leq -\|\Delta\|_2$ . On a donc  $\mu(-\frac{13}{4}) = 0$  et le corollaire découle des lemmes 4.1 et 4.3 par un calcul élémentaire.  $\square$

## 5 Fonctions propres dans $\ell^2(\Gamma)$

Dans cette section, nous allons compléter les informations données par le lemme 3.7 en décrivant plus précisément les espaces propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  pour les valeurs propres  $-2$  et  $0$ . Nous étendrons ces résultats aux valeurs propres dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$  et dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  grâce au

**Lemme 5.1.** *Soient  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 et  $H$  le sous-espace fermé de  $\ell^2(\hat{\Phi})$  engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par celle de  $\Delta\Pi^*$ . Alors, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R} - \{0, -2\}$ ,  $x$  est valeur propre de  $\Delta$  dans  $H$  si et seulement si  $y = f(x)$  est valeur propre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ . Dans ce cas, l'application  $R_x$  qui, à une fonction propre  $\varphi$  de valeur propre  $y$  dans  $\ell^2(\Phi)$ , associe  $(x-1)\Pi^*\varphi + \Delta\Pi^*\varphi$  induit un isomorphisme entre l'espace propre de valeur propre  $y$  dans  $\ell^2(\Phi)$  et l'espace propre de valeur propre  $x$  dans  $H$  et, pour tout  $\varphi$ , on a  $\|R_x\varphi\|_2^2 = x(x+2)(2x-1)\|\varphi\|_2^2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\psi \neq 0$  dans  $H$  tel que  $\Delta\psi = x\psi$ . Puisque  $\psi$  est dans  $H$ , on a  $\Pi\psi \neq 0$  ou  $\Pi\Delta\psi \neq 0$ . Comme  $\Pi\Delta\psi = x\Pi\psi$ , on a  $\Pi\psi \neq 0$ . D'après le lemme 3.1, on a  $\Delta\Pi\psi = y\Pi\psi$ , donc  $y$  est valeur propre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Phi)$ . En particulier, comme  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4} < -3 \leq -\|\Delta\|_2$ , on a  $x \neq \frac{1}{2}$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est un élément de  $\ell^2(\Phi)$  tel que  $\Delta\varphi = y\varphi$ , on a, d'après le lemme 3.1,

$$\begin{aligned} \Delta R_x\varphi &= \Delta((x-1)\Pi^*\varphi + \Delta\Pi^*\varphi) \\ &= (x-1)\Delta\Pi^*\varphi + \Pi^*\Delta\varphi + (\Delta+3)\Pi^*\varphi \\ &= x\Delta\Pi^*\varphi + (x^2-x)\Pi^*\varphi = xR_x\varphi. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4.1, on a  $\Pi\Delta\Pi^* = 6 + \Delta$ , donc, si  $\Delta\varphi = y\varphi$ , on a, par un calcul immédiat,  $\Pi R_x\varphi = x(x+2)\varphi$  et, comme on a supposé

$x(x+2) \neq 0$ ,  $R_x$  est injectif et fermé. Il nous reste à montrer que  $R_x$  est surjectif. Pour cela, considérons  $\psi$  dans  $H$  tel que  $\Delta\psi = x\psi$  mais que  $\psi$  soit orthogonal à l'image de  $R_x$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Phi)$  tel que  $\Delta\varphi = y\varphi$ , on a  $\langle \psi, R_x\varphi \rangle = (x-1)\langle \Pi\psi, \varphi \rangle + \langle \Pi\Delta\psi, \varphi \rangle = (2x-1)\langle \Pi\psi, \varphi \rangle$  et donc, comme  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $\langle \Pi\psi, \varphi \rangle = 0$ . Comme  $\Delta\Pi\psi = y\Pi\psi$ , on a  $\Pi\psi = 0$ . Comme  $\psi$  est dans  $H$ , on a  $\psi = 0$ . L'opérateur  $R_x$  est donc un isomorphisme. Le calcul de norme est alors direct, en utilisant les lemmes 3.1 et 4.1.  $\square$

Commençons par nous intéresser aux valeurs propres dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Rappelons que, d'après le corollaire 2.5, si  $\mathcal{T}$  est un  $n$ -triangle de  $\Gamma$  et si  $p$  est un sommet de  $\mathcal{T}$ , le voisin de  $p$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{T}$  est le sommet d'un  $n$ -triangle. On appellera arêtes extérieures aux  $n$ -triangles les arêtes joignant deux points qui sont des sommets d'un  $n$ -triangle. On notera  $\Theta_n$  l'ensemble des arêtes extérieures aux  $n$ -triangles et on le munira de la structure de graphe pour laquelle deux arêtes différentes sont voisines si deux de leurs extrémités sont sommets d'un même  $n$ -triangle. On vérifie aisément qu'alors le graphe  $\Theta_n$  est naturellement isomorphe au graphe de Sierpiński  $\Theta$  introduit à la fin de la section 2. On identifiera désormais  $\Theta$  et  $\Theta_n$ . Si  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma$  qui est constante sur les arêtes extérieures aux  $n$ -triangles, on notera  $P_n\varphi$  la fonction sur  $\Theta$  dont la valeur en un point de  $\Theta$  est la valeur de  $\varphi$  sur l'arête extérieure aux  $n$ -triangles associée. Enfin, rappelons que, comme  $\Theta$  est régulier de valence 4, la norme de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$  est  $\leq 4$ .

D'après le lemme 3.7, les fonctions propres de valeur propre 0 sont constantes sur les arêtes extérieures aux 1-triangles. On a le

**Lemme 5.2.** *L'application  $P_2$  induit un isomorphisme d'espaces de Banach de l'espace propre de  $\ell^2(\Gamma)$  associé à la valeur propre 0 dans  $\ell^2(\Theta)$ . On note  $Q_0$  sa réciproque. Pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Theta)$ , on a  $\|Q_0\psi\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 = 3\|\psi\|_{\ell^2(\Theta)}^2 - \frac{1}{2}\langle \Delta\psi, \psi \rangle_{\ell^2(\Theta)}$ .*

*Démonstration.* En utilisant la caractérisation du lemme 3.7, on vérifie aisément qu'étant données trois valeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  aux sommets d'un 2-triangle, une fonction propre de valeur propre 0 prenant ces valeurs aux trois sommets doit avoir à l'intérieur du triangle les valeurs représentées sur la figure 6.

Rappelons qu'on a identifié les graphes  $\Theta$  et  $\Theta_2$ . Pour toute fonction  $\psi$  sur  $\Theta$ , notons  $Q_0\psi$  la fonction sur  $\Gamma$  qui, sur une arête extérieure à un 2-triangle de  $\Gamma$ , est constante, de valeur la valeur de  $\psi$  en le point de  $\Theta$  associé à cette arête, et dont les valeurs à l'intérieur des 2-triangles sont celles décrites par

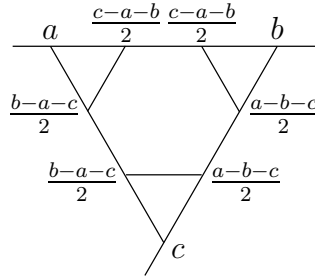


FIG. 6 – Les fonctions propres de valeur propre 0

la figure 6. Par un calcul élémentaire, pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , la somme des carrés des valeurs représentés sur la figure 6 est

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)-ab-ac-bc = \frac{1}{2}(3a^2-ab-ac) + \frac{1}{2}(3b^2-ab-bc) + \frac{1}{2}(3c^2-ac-bc),$$

si bien que, pour toute fonction  $\psi$  sur  $\Theta$ , on a  $\|Q_0\psi\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 = 3\|\psi\|_{\ell^2(\Theta)}^2 - \frac{1}{2}\langle\Delta\psi, \psi\rangle_{\ell^2(\Theta)}$ . Comme  $-4\|\psi\|_{\ell^2(\Theta)}^2 \leq \langle\Delta\psi, \psi\rangle_{\ell^2(\Theta)} \leq 4\|\psi\|_{\ell^2(\Theta)}^2$ , la fonction  $\psi$  appartient à  $\ell^2(\Theta)$  si et seulement si  $Q_0\psi$  appartient à  $\ell^2(\Gamma)$ . Le lemme en découle.  $\square$

Des lemmes 5.1 et 5.2, nous allons déduire une description des espaces propres associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Pour  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , notons  $n(x)$  l'entier  $n$  tel que  $f^n(x) = 0$  et

$$\kappa(x) = \prod_{k=0}^{n(x)-1} \frac{f^k(x)(2f^k(x) - 1)}{f^k(x) + 2}.$$

On a la

**Proposition 5.3.** *Soit  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Les fonctions propres de valeur propre  $x$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  sont constantes sur les arêtes extérieures aux  $(n(x) + 1)$ -triangles dans  $\Gamma$ . L'application  $P_{n(x)+2}$  induit un isomorphisme d'espaces de Banach de l'espace propre de  $\ell^2(\Gamma)$  associé à la valeur propre  $x$  dans  $\ell^2(\Theta)$ . On note  $Q_x$  sa réciproque. Alors, pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Theta)$ , on a  $\|Q_x\psi\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 = \kappa(x) \left( 3\|\psi\|_{\ell^2(\Theta)}^2 - \frac{1}{2}\langle\Delta\psi, \psi\rangle_{\ell^2(\Theta)} \right)$ .*

*Démonstration.* On démontre ce résultat par récurrence sur  $n(x)$ . Le cas  $n(x) = 0$  a fait l'objet du lemme 5.2. Supposons le lemme démontré pour

$n(y)$  avec  $y = f(x)$ . Et choisissons  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  tel que  $\Delta\varphi = x\varphi$ . Alors, comme  $n = n(x) \geq 1$ , on a  $x \notin \{-2, 0\}$  et, donc, d'après le lemme 3.7,  $\varphi$  appartient à  $H$ . D'après le lemme 5.1, on a donc  $\varphi = R_x\psi$ , pour une fonction  $\psi$  telle que  $\Delta\psi = y\psi$ . Par récurrence,  $\psi$  est constante sur les arêtes extérieures aux  $n$ -triangles. Soient donc  $p$  un sommet d'un  $(n+1)$ -triangle dans  $\Gamma$  et  $q$  son voisin extérieur. Les points  $\Pi p$  et  $\Pi q$  sont des sommets voisins de  $n$ -triangles de  $\Gamma$ . On a donc  $\Pi^*\psi(p) = \psi(\Pi p) = \psi(\Pi q) = \Pi^*\psi(q)$  et  $\Delta\Pi^*\psi(p) = 2\psi(\Pi p) + \psi(\Pi q) = 3\Pi^*\psi(p)$ . Il vient  $\varphi(p) = R_x\psi(p) = (x+2)\psi(p) = \varphi(q)$  : la fonction  $\varphi$  est constante sur les arêtes extérieures aux  $(n+1)$ -triangles et  $P_{n+2}\varphi = (x+2)P_{n+1}\psi$ . Comme, par récurrence,  $P_{n+1}$  induit un isomorphisme de l'espace propre de valeur propre  $y$  sur  $\ell^2(\Theta)$ , d'après le lemme 5.1,  $P_{n+2}$  induit un isomorphisme de l'espace propre de valeur propre  $x$  sur  $\ell^2(\Theta)$ . Le calcul de norme est alors une conséquence de la récurrence et de la formule  $P_{n+2}R_x = (x+2)P_{n+1}$ .  $\square$

**Corollaire 5.4.** *Pour tout  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , l'espace propre associé à  $x$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions à support fini.*

Pour les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$ , on ne dispose pas d'un analogue à la proposition 5.3. Cependant, nous allons étendre le corollaire 5.4. Commençons par traiter le cas de la valeur propre  $-2$ . Rappelons qu'on a noté  $p_0$  et  $p_0^\vee$  les sommets des deux triangles infinis de  $\Gamma$ .

**Lemme 5.5.** *Soit  $\varphi$  une fonction propre de valeur propre  $-2$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . Alors, pour tout  $n \geq 1$  la somme des valeurs de  $\varphi$  sur les sommets de chaque  $n$ -triangle de  $\Gamma$  est nulle et  $\varphi(p_0) = \varphi(p_0^\vee) = 0$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $-2$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions à support fini.*

*Démonstration.* Un calcul immédiat utilisant le lemme 3.7 montre que les valeurs de  $\varphi$  dans un 2-triangle vérifient les règles décrites par la figure 7. En particulier, la somme de leurs valeurs aux sommets de chaque 2-triangle est nulle. Par récurrence, en employant le corollaire 2.6, on en déduit que, pour tout  $n \geq 1$ , la somme de leurs valeurs aux sommets de chaque  $n$ -triangle est nulle. Notons alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $p_n$  et  $q_n$  les deux autres sommets du  $n$ -triangle issu de  $p_0$ , de façon à ce qu'on ait, avec les notations du corollaire 2.6,  $p_0 p_{n+1} = p_n$  et  $p_0 q_{n+1} = q_n$ . On a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi(p_0) = -\varphi(p_n) - \varphi(q_n)$ . Comme  $\varphi$  est de carré intégrable, on a  $\varphi(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $\varphi(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Il vient  $\varphi(p_0) = 0$  et, de même,  $\varphi(p_0^\vee) = 0$ . En particulier, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi(p_n) + \varphi(q_n) = 0$ .



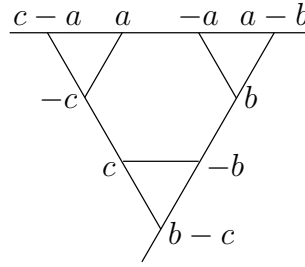


FIG. 7 – Les fonctions propres de valeur propre  $-2$

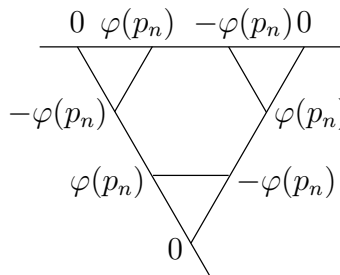


FIG. 8 – La fonction  $\varphi_n$

Montrons que  $\varphi$  est limite d'une suite de fonctions à support fini. Notons toujours, comme dans la section 2,  $\mathcal{T}_\infty(p_0)$  le triangle infini de  $\Gamma$  issu de  $p_0$ . Alors, comme  $\varphi(p_0) = 0$ ,  $\varphi 1_{\mathcal{T}_\infty(p_0)}$  est encore un vecteur propre de valeur propre  $-2$  et on peut supposer qu'on a  $\varphi = 0$  sur  $\mathcal{T}_\infty(p_0^\vee)$ . Pour tout entier  $n$ , notons  $\varphi_n$  la fonction sur  $\Gamma$  qui est nulle en dehors du  $(n+1)$ -triangle  $\mathcal{T}_{n+1}(p_0, p_{n+1}, q_{n+1})$ , qui est égale à  $\varphi_n$  sur le  $n$ -triangle  $\mathcal{T}_n(p_0, p_n, q_n)$  et qui est invariante par l'action des éléments de signature 1 du groupe  $\mathfrak{S}(p_0, p_{n+1}, q_{n+1})$  sur le  $(n+1)$ -triangle  $\mathcal{T}_{n+1}(p_0, p_{n+1}, q_{n+1})$ . Vu le corollaire 2.6, les valeurs de  $\varphi_n$  aux sommets des  $n$ -triangles sont celles représentées par la figure 8. Alors, d'après le lemme 3.7, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n$  est un vecteur propre de valeur propre  $-2$  et on a  $\|\varphi_n\|_2^2 \leq 3 \|\varphi\|_2^2$ . La suite  $(\varphi_n)$  tend faiblement vers  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . La fonction  $\varphi$  appartient à l'adhérence faible du sous-espace engendré par les fonctions propres de valeur propre  $-2$  à support fini, et, donc, à son adhérence forte.

Enfin, l'espace des fonctions propres de valeur propre  $-2$  est de dimension infinie puisque, d'après la figure 5, tout 2-triangle contient le support d'une fonction propre de valeur propre  $-2$ .  $\square$

Pour  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$ , notons  $n(x)$  l'entier  $n$  tel que  $f^{n(x)}(x) = -2$ . Un raisonnement par récurrence fondé sur le lemme 5.1 permet de déduire du lemme 5.5 le

**Corollaire 5.6.** *Soient  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$  et  $\varphi$  une fonction propre de valeur propre  $x$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . Alors, les valeurs de  $\varphi$  sur les arêtes extérieures aux  $(n(x) + 1)$ -triangles sont opposées, pour tout  $n \geq n(x) + 1$  la somme des valeurs de  $\varphi$  sur les sommets de chaque  $n$ -triangle est nulle et  $\varphi(p_0) = \varphi(p_0^\vee) = 0$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $x$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions à support fini.*

## 6 Décomposition spectrale de $\ell^2(\Gamma)$

Notons  $\varphi_0$  la fonction sur  $\Gamma$  qui vaut 1 en  $p_0$ ,  $-1$  en  $p_0^\vee$  et 0 partout ailleurs. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que  $\ell^2(\Gamma)$  est la somme directe orthogonale des espaces propres associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  et du sous-espace cyclique engendré par  $\varphi_0$ . Commençons par décrire ce dernier. Un calcul immédiat démontre le

**Lemme 6.1.** *On a  $\Pi^* \varphi_0 = (\Delta + 2)\varphi_0$ .*

Cette relation et le corollaire 4.4 vont nous permettre de déterminer la mesure spectrale de  $\varphi_0$ . Rappelons pour cela les propriétés des opérateurs de transfert que nous serons amenés à utiliser : elles découlent de la version du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius donnée dans [1, § 2.2]. Si  $\kappa$  est une fonction borélienne sur  $\Lambda$ , on notera  $L_\kappa$  pour  $L_{f,\kappa}$ .

**Lemme 6.2.** *Soit  $\kappa : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction höldérienne. Munissons l'espace  $\mathcal{C}^0(\Lambda)$  de la topologie de la convergence uniforme. Alors, si  $\lambda_\kappa > 0$  est le rayon spectral de l'opérateur  $L_\kappa$  dans  $\mathcal{C}^0(\Lambda)$ , il existe une unique probabilité borélienne  $\nu_\kappa$  sur  $\Lambda$  et une unique fonction continue strictement positive  $l_\kappa$  sur  $\Lambda$  telles qu'on ait  $L_\kappa l_\kappa = \lambda_\kappa l_\kappa$ ,  $L_\kappa^* \nu_\kappa = \lambda_\kappa \nu_\kappa$  et  $\int_\Lambda l_\kappa d\nu_\kappa = 1$ . Le rayon spectral de  $L_\kappa$  dans l'espace des fonctions d'intégrale nulle pour  $\nu_\kappa$  est  $< \lambda_\kappa$  et, en particulier, pour tout  $g$  dans  $\mathcal{C}^0(\Lambda)$ , la suite  $\left(\frac{1}{\lambda_\kappa^n} L_\kappa^n(g)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\int_\Lambda g d\nu_\kappa$ . La mesure  $\nu_\kappa$  est diffuse et son support est  $\Lambda$ .*

Posons, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $h(x) = 3 - x$ ,  $k(x) = x + 2$  et, pour  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $\rho(x) = \frac{x}{2x-1}$ . On a  $h \circ f = hk$ . Du lemme 6.1, nous déduisons, grâce au corollaire 4.4, le

**Corollaire 6.3.** *Soit  $\nu_\rho$  l'unique probabilité borélienne sur  $\Lambda$  telle que  $L_\rho^* \nu_\rho = \nu_\rho$ . La mesure spectrale de  $\varphi_0$  est  $h\nu_\rho$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  la mesure spectrale de  $\varphi_0$ . Pour  $x \neq \frac{1}{2}$ , posons  $\theta(x) = \frac{x(x+2)}{2x-1} = k(x)\rho(x)$ . La mesure spectrale de  $(\Delta + 2)\varphi_0$  est  $k^2\mu$ . Par conséquent, d'après le corollaire 4.4 et le lemme 6.1, on a  $\mu(\frac{1}{2}) = 0$  et  $k^2\mu = L_{\theta}^*\mu$ . Or, d'après le lemme 5.5, si  $\varphi$  est une fonction propre de valeur propre  $-2$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , on a  $\varphi(p_0) = \varphi(p_0^\vee) = 0$  et, donc,  $\langle \varphi, \varphi_0 \rangle = 0$ , si bien que  $\mu(-2) = 0$ . Par conséquent, on a  $L_{\frac{1}{k}\rho}^*\mu = \mu$ .

Par ailleurs, d'après le lemme 3.5, on a  $\mu(3) = 0$ . Par conséquent, comme  $h \circ f = hk$ , on a  $L_{\rho}^*(\frac{1}{h}\mu) = \frac{1}{h}L_{\frac{1}{k}\rho}^*(\mu) = \frac{1}{h}\mu$ .

La mesure borélienne  $\frac{1}{h}\mu$  sur  $\mathbb{R}$  est concentrée sur le spectre de  $\Delta$ . Or, d'après la proposition 5.3, pour tous  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  et  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  tel que  $\Delta\varphi = x\varphi$ , on a  $\varphi(p_0) = \varphi(p_0^\vee)$  et, donc,  $\langle \varphi, \varphi_0 \rangle = 0$ . Par conséquent, on a  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)) = 0$  et, d'après le corollaire 3.9,  $\mu$  est concentrée sur  $\Lambda$ .

La fonction  $\rho$  est höldérienne et strictement positive sur  $\Lambda$  et on a  $L_{\rho}(1) = 1$  sur  $\Lambda$ . D'après le lemme 6.2, il existe une unique mesure borélienne de probabilité  $\nu_{\rho}$  sur  $\Lambda$  telle que  $L_{\rho}^*(\nu_{\rho}) = \nu_{\rho}$  et, pour toute fonction continue  $g$  sur  $\Lambda$ , la suite  $(L_{\rho}^n(g))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction constante de valeur  $\int_{\Lambda} g d\nu_{\rho}$ . Montrons que la mesure borélienne positive  $\frac{1}{h}\mu$  est finie et, donc, proportionnelle à  $\nu_{\rho}$ . Donnons-nous une fonction continue positive  $g$  sur  $\Lambda$ , nulle au voisinage de 3, telle qu'on ait  $0 < \int_{\Lambda} \frac{1}{h}g d\mu < \infty$ . Il existe un entier  $n$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tels que, pour tout  $x$  dans  $\Lambda$ , on ait  $L_{\rho}^n(g)(x) \geq \varepsilon$ . Comme  $\int_{\Lambda} \frac{1}{h}g d\mu = \int_{\Lambda} \frac{1}{h}L_{\rho}^n(g) d\mu$ , il vient  $\int_{\Lambda} \frac{1}{h}d\mu < \infty$ . Par conséquent, la mesure  $\frac{1}{h}\mu$  est un multiple de  $\nu_{\rho}$ . Or, on a  $\mu(\Lambda) = \|\varphi_0\|_2^2 = 2$  et, par un calcul immédiat,  $L_{\rho}(h) = 2$ , si bien que  $\int_{\Lambda} h d\nu_{\rho} = 2$ . Il vient donc bien  $\mu = h\nu_{\rho}$ .  $\square$

Pour tout polynôme  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , notons  $\hat{p}$  la fonction  $p(\Delta)\varphi_0$  sur  $\Gamma$ . Par définition, l'application  $g \mapsto \hat{g}$  se prolonge en une isométrie de  $L^2(h\nu_{\rho})$  dans le sous-espace cyclique  $\Phi$  de  $\ell^2(\Gamma)$  engendré par  $\varphi_0$ . Notons  $l$  la fonction  $x \mapsto x$  sur  $\Lambda$ . On a la

**Proposition 6.4.** *Le sous-espace  $\Phi$  est stable par les opérateurs  $\Delta$ ,  $\Pi$  et  $\Pi^*$ . Pour tout  $g$  dans  $L^2(h\nu_{\rho})$ , on a*

$$\begin{aligned}\Delta\hat{g} &= \widehat{lg} \\ \Pi\hat{g} &= \widehat{L_{\rho}g} \\ \Pi^*\hat{g} &= \widehat{k(g \circ f)}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Par définition,  $\Phi$  est stable par  $\Delta$  et on a la formule concernant  $\Delta$ .

Par un calcul direct, on montre qu'on a  $L_\rho(l) = 1$ . Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . On a  $L_\rho(f^n) = l^n L_\rho(1) = l^n$  et  $L_\rho(f^n l) = l^n L_\rho(l) = l^n$ . Or, d'après le lemme 3.1, on a  $\Pi(f(\Delta)^n \varphi_0) = \Delta^n \Pi \varphi_0$  et  $\Pi(f(\Delta)^n \Delta \varphi_0) = \Delta^n \Pi \Delta \varphi_0$  et, donc, comme  $\Pi \varphi_0 = \Pi \Delta \varphi_0 = \varphi_0$ , l'espace  $\Phi$  est stable par  $\Pi$  et, pour tout  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\Pi \hat{p} = \widehat{L_\rho p}$ . Enfin, par convexité, pour toute fonction mesurable  $g$  sur  $\Lambda$ , on a  $|L_\rho(g)|^2 \leq L_\rho(|g|^2)$ , si bien que, pour  $g$  dans  $L^2(h\nu_\rho)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_\Lambda |L_\rho(g)|^2 h d\nu_\rho &\leq \int_\Lambda L_\rho(|g|^2) h d\nu_\rho = \int_\Lambda |g|^2 (h \circ f) d\nu_\rho \\ &= \int_\Lambda |g|^2 k h d\nu_\rho \leq 5 \int_\Lambda |g|^2 h d\nu_\rho, \end{aligned}$$

donc l'opérateur  $L_\rho$  est continu dans  $L^2(h\nu_\rho)$  et, par densité, pour tout  $g$  dans  $L^2(h\nu_\rho)$ ,  $\Pi \hat{g} = \widehat{L_\rho g}$ .

Enfin, d'après les lemmes 3.1 et 6.1, pour tout polynôme  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a  $\Pi^*(p(\Delta)\varphi_0) = p(f(\Delta))\Pi^*\varphi_0 = p(f(\Delta))(\Delta + 2)\varphi_0$ . Par conséquent, l'espace  $\Phi$  est stable par  $\Pi^*$  et, pour tout  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\Pi^* \hat{p} = \widehat{k(p \circ f)}$ . Or, pour tout  $g$  dans  $L^2(h\nu_\rho)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_\Lambda |k(g \circ f)|^2 h d\nu_\rho &= \int_\Lambda k |g \circ f|^2 (h \circ f) d\nu_\rho \\ &= \int_\Lambda L_\rho(k) |g|^2 h d\nu_\rho = 3 \int_\Lambda |g|^2 h d\nu_\rho \end{aligned}$$

et, donc, par densité, pour tout  $g$  dans  $L^2(h\nu_\rho)$ ,  $\Pi^* \hat{g} = \widehat{k(g \circ f)}$ .  $\square$

Pour déterminer la structure spectrale complète de  $\Delta$ , nous allons nous intéresser à d'autres éléments remarquables de  $\ell^2(\Gamma)$ . Commençons par noter  $\psi_0$  la fonction sur  $\Gamma$  qui vaut 1 en  $p_0$  et en  $p_0^\vee$  et 0 partout ailleurs. Nous avons le

**Lemme 6.5.** *On a  $\Pi^* \psi_0 = \Delta \psi_0$ .*

Nous en déduisons le

**Corollaire 6.6.** *La mesure spectrale de  $\psi_0$  est discrète. Plus précisément, la fonction  $\psi_0$  est contenue dans la somme directe des espaces propres de  $\Delta$  associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  la restriction de la mesure spectrale de  $\psi_0$  à  $\Lambda$ . D'après le corollaire 3.9, il s'agit de montrer qu'on a  $\mu = 0$ .

Pour  $x \notin \{0, \frac{1}{2}\}$ , posons  $\tau(x) = \frac{(x+2)}{x(2x-1)}$  et  $\sigma(x) = \frac{1}{x(2x-1)}$ . La fonction  $\sigma$  est höldérienne et strictement positive sur  $\Lambda$ . En raisonnant comme dans la démonstration du corollaire 6.3, on voit que, comme  $0 \notin \Lambda$ , on a, d'après le lemme 6.5,  $L_\tau^* \mu = \mu$ . Or, comme  $h \circ f = hk$ , pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , pour tout entier  $n$ , on a  $L_\tau^n(h) = hL_\sigma^n(1)$ . Notons  $\lambda_\sigma$  le rayon spectral de  $L_\sigma$  et  $\nu_\sigma$  sa mesure d'équilibre, comme dans le lemme 6.2. Par un calcul direct, on montre que, pour tout  $x$  dans  $\Lambda$ , on a  $L_\sigma(1)(x) = \frac{1}{x+3}$ . En particulier, pour  $x \neq -2$ , on a  $L_\sigma(1)(x) < 1$ , si bien que  $\lambda_\sigma = \int_\Lambda L_\sigma(1) d\nu_\sigma < 1$  et, donc, la suite  $(L_\sigma^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $\Lambda$ . Par conséquent, la suite  $(L_\tau^n(h))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $\Lambda$  et on a  $\int_\Lambda h d\mu = 0$ , si bien que  $\mu(\Lambda - \{3\}) = 0$ . D'après le lemme 3.5, on a  $\mu(3) = 0$ , et, donc,  $\mu = 0$ .  $\square$

Notons que, en utilisant le lemme 6.5, on pourrait établir une formule donnant, pour tout  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , la valeur de la norme de la projection de  $\psi_0$  sur l'espace des fonctions propres de valeur propre  $x$ .

Étudions les invariants spectraux d'un dernier élément de  $\ell^2(\Gamma)$ . Pour cela, notons  $q_0$  et  $r_0$  les deux voisins de  $p_0$  différents de  $p_0^\vee$  et  $\chi_0$  la fonction sur  $\Gamma$  qui vaut 1 en  $q_0$ ,  $-1$  en  $r_0$  et 0 partout ailleurs. De même, on note  $q_0^\vee$  et  $r_0^\vee$  les deux voisins de  $p_0^\vee$  différents de  $p_0$  et  $\chi_0^\vee$  la fonction sur  $\Gamma$  qui vaut 1 en  $q_0^\vee$ ,  $-1$  en  $r_0^\vee$  et 0 partout ailleurs. On pourrait à nouveau remarquer qu'on a  $\Pi^* \chi_0 = (\Delta^2 + 2\Delta)\chi_0$  et étudier la mesure spectrale de  $\chi_0$  en utilisant les mêmes méthodes que dans les corollaires 6.3 et 6.6. Nous allons utiliser une autre approche, plus géométrique, analogue à celle de la démonstration du lemme 5.5.

D'après le lemme 2.7, il existe un unique automorphisme  $\iota$  du graphe  $\Gamma$  tel que  $\iota(q_0) = r_0$  et que  $\iota(q_0^\vee) = r_0^\vee$  et  $\iota$  est une involution. Notons  $H$  l'espace des éléments  $\varphi$  de  $\ell^2(\Gamma)$  tels que  $\iota(\varphi) = -\varphi$  et  $K$  (resp.  $K^\vee$ ) le sous-espace de  $H$  formé des éléments de  $H$  qui sont nuls sur le triangle infini issu de  $p_0^\vee$  (resp. de  $p_0$ ). On a  $H = K \oplus K^\vee$ ,  $\chi_0 \in K$ ,  $\chi_0^\vee \in K^\vee$  et les sous-espaces  $K$  et  $K^\vee$  sont stables par les endomorphismes  $\Delta$ ,  $\Pi$  et  $\Pi^*$ . Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{T}_n$  le  $n$ -triangle issu de  $p_0$  et  $\mathcal{T}_n^\vee$  le  $n$ -triangle issu de  $p_0^\vee$ . Les groupe de permutations  $\mathfrak{S}(\partial\mathcal{T}_n)$  et  $\mathfrak{S}(\partial\mathcal{T}_n^\vee)$  agissent sur les triangles  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{T}_n^\vee$ . On note  $K_n$  (resp.  $K_n^\vee$ ) l'espace des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathcal{T}_n$  (resp.  $\mathcal{T}_n^\vee$ ) telles que, pour tout  $s$  dans  $\mathfrak{S}(\partial\mathcal{T}_n)$  (resp. dans  $\mathfrak{S}(\partial\mathcal{T}_n^\vee)$ ), on ait  $s\varphi = \varepsilon(s)\varphi$ , où  $\varepsilon$  est le morphisme de signature. On identifie  $K_n$  et  $K_n^\vee$  à des sous-espaces de dimension finie de  $K$  et  $K^\vee$ . On a alors  $\Delta K_n \subset K_n$ ,  $\Pi^* K_n \subset K_{n+1}$  et, si  $n \geq 2$ ,  $\Pi K_n \subset K_{n-1}$ , et les identités analogues dans  $K^\vee$ .

Nous avons le

**Lemme 6.7.** *Les espaces  $K$  et  $K^\vee$  sont topologiquement engendrés par les ensembles  $\bigcup_{n \geq 1} K_n$  et  $\bigcup_{n \geq 1} K_n^\vee$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  une fonction dans  $K$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $\varphi_n$  l'unique élément de  $K_n$  qui est égal à  $\varphi$  sur  $\mathcal{T}_{n-1}$ . On a  $\|\varphi_n\|_2 \leq \sqrt{3} \|\varphi\|_2$ . Alors, pour tout  $\varphi$ , la suite  $(\varphi_n)$  tend faiblement vers  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . Donc l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 1} K_n$  est faiblement dense dans  $H$  et l'espace vectoriel qu'il engendre est, par conséquent, fortement dense. Le résultat pour  $K^\vee$  s'en déduit par symétrie.  $\square$

**Corollaire 6.8.** *Le spectre de  $\Delta$  dans  $H$  est discret. Ses valeurs propres sont exactement les éléments de l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

*Démonstration.* Comme, pour tout  $n$ , les sous-espaces  $K_n$  et  $K_n^\vee$  sont stables par  $\Delta$  et de dimension finie, le caractère discret du spectre de  $\Delta$  dans  $H$  est une conséquence immédiate du lemme 6.7. La détermination exacte des valeurs propres s'obtient en raisonnant comme dans la section 3. Une formule pour le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans  $K_n$  est donnée à la proposition 13.6.  $\square$

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème 1.1 grâce à la

**Proposition 6.9.** *Soit  $\Phi^\perp$  l'orthogonal dans  $\ell^2(\Gamma)$  du sous-espace cyclique  $\Phi$  engendré par  $\varphi_0$ . Alors le spectre de  $\Delta$  dans  $\Phi^\perp$  est discret et l'ensemble de ses valeurs propres est exactement  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

Avant de démontrer cette proposition, établissons un résultat préliminaire. Pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , notons  $\mu_{\varphi, \psi}$  l'unique mesure complexe borélienne sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout polynôme  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , on ait  $\int_{\mathbb{R}} p d\mu_{\varphi, \psi} = \langle p(\Delta)\varphi, \psi \rangle$ . On a le

**Lemme 6.10.** *Pour tous  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , on a  $\mu_{\Pi\varphi, \psi} = f_*\mu_{\varphi, \Pi^*\psi}$ .*

*Démonstration.* Pour  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a, d'après le lemme 3.1,

$$\int_{\mathbb{R}} p d\mu_{\Pi\varphi, \psi} = \langle p(\Delta)\Pi\varphi, \psi \rangle = \langle p(f(\Delta))\varphi, \Pi^*\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (p \circ f) d\mu_{\varphi, \Pi^*\psi}.$$

$\square$

*Démonstration de la proposition 6.9.* D'après les corollaires 5.4 et 5.6, les espaces propres associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  sont

non-triviaux. Notons  $P$  le projecteur orthogonal sur  $\Phi^\perp$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ . D'après la proposition 6.4, l'opérateur  $P$  commute à  $\Delta$ ,  $\Pi$  et  $\Pi^*$ . Pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que, pour tout  $\varphi$  à support fini, pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , la mesure  $\mu_{P\varphi,\psi}$  est atomique et concentrée sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .

Soient toujours  $q_0, r_0, q_0^\vee$  et  $r_0^\vee$  les voisins de  $p_0$  et  $p_0^\vee$  et, pour tout entier  $n$ ,  $\mathcal{T}_n$  le  $n$ -triangle issu de  $p_0$  et  $\mathcal{T}_n^\vee$  le  $n$ -triangle issu de  $p_0^\vee$ . On note  $L_n$  l'espace des fonctions sur  $\Gamma$  dont le support est contenu dans la réunion de  $\mathcal{T}_n$ , de  $\mathcal{T}_n^\vee$ , et des voisins des sommets de  $\mathcal{T}_n$  et de  $\mathcal{T}_n^\vee$ . On a, pour  $n \geq 1$ ,  $\Pi L_n \subset L_{n-1}$  et  $\Pi \Delta L_n \subset L_{n-1}$ . Montrons, par récurrence sur  $n$ , que, pour toute fonction  $\varphi$  dans  $L_n$ , pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , la mesure  $\mu_{P\varphi,\psi}$  est atomique et concentrée sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .

Pour  $n = 0$ ,  $L_0$  est l'espace des fonctions qui sont nulles en dehors de l'ensemble  $\{p_0, q_0, r_0, p_0^\vee, q_0^\vee, r_0^\vee\}$ . On vérifie aisément que cet espace est engendré par les fonctions  $\varphi_0, \Delta\varphi_0, \psi_0, \Delta\psi_0, \chi_0$  et  $\chi_0^\vee$ . Dans ce cas, la description des mesures spectrales découle immédiatement des corollaires 6.3, 6.6 et 6.8.

Si le résultat est vrai pour un entier  $n$ , donnons-nous  $\varphi$  dans  $L_{n+1}$ . Alors, les fonctions  $\Pi\varphi$  et  $\Pi\Delta\varphi$  sont dans  $L_n$  et, par récurrence, pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , les mesures  $\mu_{\Pi P\varphi,\psi} = \mu_{P\Pi\varphi,\psi}$  et  $\mu_{\Pi\Delta P\varphi,\psi} = \mu_{P\Pi\Delta\varphi,\psi}$  sont atomiques et concentrées sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . D'après le lemme 6.10, les mesures  $\mu_{P\varphi,\Pi^*\psi}$  et  $\mu_{\Delta P\varphi,\Pi^*\psi} = \mu_{P\varphi,\Delta\Pi^*\psi}$  sont donc atomiques et concentrées sur l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(0)$ . Or, d'après le lemme 3.7, le spectre de  $\Delta$  dans l'orthogonal du sous-espace de  $\ell^2(\Gamma)$  engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par celle de  $\Delta\Pi^*$  est égal à  $\{-2, 0\}$ . Par conséquent, pour tout  $\psi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ , la mesure  $\mu_{P\varphi,\psi}$  est atomique et concentrée sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Le résultat en découle.  $\square$

## 7 Quotients finis de $\Gamma$

Dans ce paragraphe, nous appliquons les méthodes développées précédemment à la description du spectre de certains graphes finis fortement reliés à  $\Gamma$ .

Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  des graphes. Nous dirons qu'une application  $\varpi : \Phi \rightarrow \Psi$  est un revêtement si, pour tout  $p$  dans  $\Phi$ , l'application  $\varpi$  induit une bijection de l'ensemble des voisins de  $p$  dans celui des voisins de  $\varpi(p)$ . La composition de deux revêtements est un revêtement. Si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des graphes réguliers de

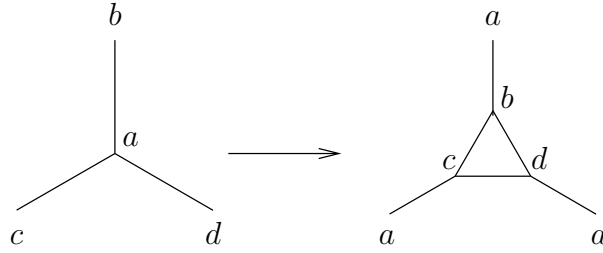


FIG. 9 – Construction du revêtement  $\tilde{\omega}$

valence 3 et si  $\varpi : \Phi \rightarrow \Psi$  est un revêtement, il existe un unique revêtement  $\tilde{\omega} : \hat{\Phi} \rightarrow \hat{\Psi}$  tel que  $\Pi\tilde{\omega} = \varpi\Pi$ . Réciproquement, en raisonnant comme dans le lemme 2.2, on montre que tout revêtement  $\hat{\Phi} \rightarrow \hat{\Psi}$  est de cette forme.

Fixons quatre éléments distincts,  $a, b, c$  et  $d$ . On note  $\Gamma_0$  le graphe obtenu en munissant l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$  de la relation qui lie tous les points distincts : c'est un graphe régulier de valence 3. Le groupe de ses automorphismes est égal au groupe  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$  des permutations de l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$ .

**Lemme 7.1.** *Soient  $\Phi$  un graphe régulier de valence 3 et  $\varpi : \Phi \rightarrow \Gamma_0$  un revêtement. Alors, l'application  $\tilde{\omega} : \hat{\Phi} \rightarrow \Gamma_0, (p, q) \mapsto \varpi(q)$  est un revêtement. L'application  $\varpi \mapsto \tilde{\omega}$  est une bijection  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$ -équivariante de l'ensemble des revêtements  $\Phi \rightarrow \Gamma_0$  dans l'ensemble des revêtements  $\hat{\Phi} \rightarrow \Gamma_0$ .*

La construction du revêtement  $\tilde{\omega}$  est représentée par la figure 9.

*Démonstration.* Soit  $p$  un point de  $\Phi$  et soient  $q, r$  et  $s$  les voisins de  $p$ . Quitte à permuter les éléments de  $\{a, b, c, d\}$ , supposons que l'on a  $\varpi(p) = a, \varpi(q) = b, \varpi(r) = c$  et  $\varpi(s) = d$ . Alors, on a  $\tilde{\omega}(p, q) = b, \tilde{\omega}(q, p) = a, \tilde{\omega}(p, r) = c$  et  $\tilde{\omega}(p, s) = d$  et, donc,  $\tilde{\omega}$  est bien un revêtement.

Réciproquement, soit  $\omega : \hat{\Phi} \rightarrow \Gamma_0$  un revêtement. Soit toujours  $p$  un point de  $\Phi$ , de voisins  $q, r$  et  $s$ . À nouveau, quitte à permuter, supposons qu'on a  $\omega(p, q) = b, \omega(p, r) = c$  et  $\omega(p, s) = d$ . Alors, comme  $\omega$  est un revêtement, on a nécessairement  $\omega(q, p) = \omega(r, p) = \omega(s, p) = a$ . Il existe donc une application  $\varpi : \Phi \rightarrow \Gamma_0$  telle que, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\Phi$  avec  $p \sim q$ , on ait  $\omega(q, p) = \varpi(p)$ . Par construction,  $\varpi$  est un revêtement et on a  $\tilde{\omega} = \omega$ .  $\square$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\Gamma_n = \hat{\Gamma}_0^{(n)}$  le graphe obtenu en remplaçant les points de  $\Gamma_0$  par des  $n$ -triangles. D'après le lemme 2.2, le groupe des automorphismes de  $\Gamma_n$  s'identifie naturellement à  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$ . Du lemme 7.1, on déduit le



**Corollaire 7.2.** *Pour tous entiers naturels  $n \leq m$ , il existe des revêtements  $\Gamma_m \rightarrow \Gamma_n$ . Le groupe  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$  agit simplement transitivement sur l'ensemble de ces revêtements.*

*Démonstration.* Les revêtements  $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$  sont exactement les bijections de  $\Gamma_0$  dans lui-même et le corollaire est donc vrai pour  $m = n = 0$ . Par récurrence, d'après le lemme 7.1, le corollaire est vrai pour tout entier  $m$  et pour  $n = 0$ . Enfin, comme, si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des graphes réguliers de valence 3, les revêtements  $\Phi \rightarrow \Psi$  et  $\hat{\Phi} \rightarrow \hat{\Psi}$  sont en bijection naturelle, à nouveau par récurrence, le corollaire est vrai pour tous entiers  $m \geq n$ .  $\square$

Revenons à présent à  $\Gamma$ . Notons  $q_0$  et  $r_0$  les deux voisins de  $p_0$  différents de  $p_0^\vee$  et  $q_0^\vee$  et  $r_0^\vee$  les deux voisins de  $p_0^\vee$  différents de  $p_0$ . Nous avons le

**Lemme 7.3.** *Il existe un unique revêtement  $\varpi : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$  tel que  $\varpi(p_0) = a$ ,  $\varpi(q_0) = c$ ,  $\varpi(r_0) = d$ ,  $\varpi(p_0^\vee) = b$ ,  $\varpi(q_0^\vee) = c$  et  $\varpi(r_0^\vee) = d$ .*

Ce revêtement est représenté par la figure 3.

*Démonstration.* Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  ou l'infini et  $\mathcal{T}$  un  $n$ -triangle. Soit  $\varpi : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma_0$ . Disons que  $\varpi$  est un quasi-revêtement si, pour tout point  $p$  de  $\mathcal{T} - \partial\mathcal{T}$ ,  $\varpi$  induit une bijection de l'ensemble des voisins de  $\mathcal{T}$  dans  $\Gamma_0 - \{\varpi(p)\}$  et si, pour tout point  $p$  de  $\partial\mathcal{T}$ , les valeurs de  $\varpi$  sur les voisins de  $p$  sont des éléments distincts de  $\Gamma_0 - \{\varpi(p)\}$ . Dans ce cas, on note encore  $\tilde{\varpi}$  l'application  $\hat{\mathcal{T}} \rightarrow \Gamma_0$  telle que, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\mathcal{T}$  avec  $p \sim q$ , on ait  $\tilde{\varpi}(p, q) = \varpi(q)$  et que, pour tout  $p$  dans  $\partial\mathcal{T} = \partial\hat{\mathcal{T}}$ , si les voisins de  $p$  dans  $\mathcal{T}$  sont  $q$  et  $r$ ,  $\tilde{\varpi}(p)$  soit l'unique élément de  $\Gamma_0 - \{\varpi(p), \varpi(q), \varpi(r)\}$ . En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 7.1, on vérifie aisément que l'application  $\varpi \mapsto \tilde{\varpi}$  est une bijection  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$ -équivariante de l'ensemble des quasi-revêtements  $\mathcal{T} \rightarrow \Gamma_0$  dans l'ensemble des quasi-revêtements  $\hat{\mathcal{T}} \rightarrow \Gamma_0$ .

Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ , si  $\mathcal{T}_n$  est le  $n$ -triangle de  $\Gamma$  contenant  $p_0$ , il existe un unique quasi-revêtement  $\varpi_n$  de  $\mathcal{T}_n$  dans  $\Gamma_0$  tel que  $\varpi_n(p_0) = a$ ,  $\varpi_n(q_0) = c$  et  $\varpi_n(r_0) = d$ . Par unicité,  $\varpi_n$  et  $\varpi_{n+1}$  sont égaux sur  $\mathcal{T}_n$ . Il existe donc un unique quasi-revêtement  $\varpi_\infty$  du triangle infini  $\mathcal{T}_\infty$  issu de  $p_0$  dans  $\Gamma_0$  tel que  $\varpi_\infty(p_0) = a$ ,  $\varpi_\infty(q_0) = c$  et  $\varpi_\infty(r_0) = d$ . De même, si  $\mathcal{T}_\infty^\vee$  désigne le triangle infini issu de  $p_0^\vee$ , il existe un unique quasi-revêtement  $\varpi_\infty^\vee$  de  $\mathcal{T}_\infty^\vee$  dans  $\Gamma_0$  tel que  $\varpi_\infty^\vee(p_0^\vee) = b$ ,  $\varpi_\infty^\vee(q_0^\vee) = c$  et  $\varpi_\infty^\vee(r_0^\vee) = d$ . L'application  $\varpi : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$  dont la restriction à  $\mathcal{T}_\infty$  est  $\varpi_\infty$  et la restriction à  $\mathcal{T}_\infty^\vee$  est  $\varpi_\infty^\vee$  est donc bien l'unique revêtement de  $\Gamma$  dans  $\Gamma_0$  ayant les propriétés demandées.  $\square$

À nouveau, des lemmes 7.1 et 7.3, on déduit le

**Corollaire 7.4.** *Pour tout entier naturel  $n$ , il existe des revêtements  $\Gamma \rightarrow \Gamma_n$ . Le groupe  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$  agit simplement sur l'ensemble de ces revêtements. Cette action possède deux orbites : d'une part, l'ensemble de revêtements  $\varpi$  tels que  $\varpi(q_0) = \varpi(q_0^\vee)$  et, d'autre part, l'ensemble de revêtements  $\varpi$  tels que  $\varpi(q_0) = \varpi(r_0^\vee)$ .*

Nous allons à présent décrire, pour tout entier  $n$ , la théorie spectrale du graphe  $\Gamma_n$ . Notons  $k$  le polynôme  $X + 2$ ,  $l$  le polynôme  $X$ ,  $m$  le polynôme  $X - 2$ , et, comme toujours,  $f$  le polynôme  $X^2 - X - 3$ . Les méthodes développées dans la section 3 et la section 5 nous permettent de démontrer la

**Proposition 7.5.** *Pour tout entier naturel  $n$ , le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_n)$  est*

$$(X - 3)(X + 1)^3 \prod_{p=0}^{n-1} (m \circ f^p(X))^3 (l \circ f^p(X))^{2 \cdot 3^{n-1-p}} (k \circ f^p(X))^{1+2 \cdot 3^{n-1-p}}.$$

Rappelons que, à la section 3, nous avons introduit la notion de graphe partageable. La démonstration utilise le

**Lemme 7.6.** *Soit  $\hat{\Phi}$  un graphe connexe régulier de valence 3. Le graphe  $\hat{\Phi}$  n'est pas partageable. En particulier, pour tout entier naturel  $n$ , le graphe  $\Gamma_n$  n'est pas partageable.*

*Démonstration.* Comme tout point de  $\hat{\Phi}$  est contenu dans un 1-triangle, tout point peut être joint à lui-même par un chemin de longueur impaire et, donc,  $\hat{\Phi}$  n'est pas partageable. De même, tout point de  $\Gamma_0$  peut être joint à lui-même par un chemin de longueur impaire. Le lemme en découle.  $\square$

*Démonstration de la proposition 7.5.* Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , l'espace  $\ell^2(\Gamma_0)$  est de dimension 4 et, pour l'action naturelle du groupe  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$ , il est la somme de deux sous-espaces irréductibles non isomorphes, l'espace des fonctions constantes et l'espace des fonctions  $\varphi$  telles que  $\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \varphi(d) = 0$ . L'opérateur  $\Delta$  commute à l'action de  $\mathfrak{S}(a, b, c, d)$  et laisse donc stables ces deux sous-espaces. Dans le premier, il agit par multiplication par 3 et, dans le deuxième, par multiplication par  $-1$ . Son polynôme caractéristique est donc  $(X - 3)(X + 1)^3$ .

Supposons le résultat démontré pour  $n$ . D'après le lemme 7.6,  $\Gamma_n$  n'est pas partageable. Par conséquent, si  $H$  est le sous-espace vectoriel de  $\ell^2(\Gamma_{n+1})$  engendré par l'image de  $\Pi^*$  et par celle de  $\Delta\Pi^*$ , d'après le corollaire 3.6 et le

lemme 5.1, le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans l'orthogonal dans  $H$  des fonctions constantes est

$$(f(X) + 1)^3 \prod_{p=0}^{n-1} (m \circ f^{p+1}(X))^3 (l \circ f^{p+1}(X))^{2 \cdot 3^{n-1-p}} (k \circ f^{p+1}(X))^{1+2 \cdot 3^{n-1-p}}$$

et, donc, comme  $f(X) + 1 = (X + 1)(X - 2)$ , le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans  $H$  s'écrit

$$(X - 3)(X + 1)^3 \prod_{p=0}^n (m \circ f^p(X))^3 \prod_{p=1}^n (l \circ f^p(X))^{2 \cdot 3^{n-p}} (k \circ f^p(X))^{1+2 \cdot 3^{n-p}}.$$

Il nous reste à déterminer les dimensions des espaces propres de valeur propre 0 et  $-2$  dans l'orthogonal de  $H$  dans  $\ell^2(\Gamma_{n+1})$ . Ceux-ci sont décrits par le lemme 3.7. Or, si  $n \geq 1$ , les 2-triangles de  $\Gamma_{n+1}$  sont les images inverses par  $\Pi^2$  des points de  $\Gamma_{n-1}$  et tout point de  $\Gamma_{n+1}$  appartient à un unique 2-triangle. En raisonnant comme dans le lemme 5.2, on voit alors que l'espace propre de valeur propre 0 de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_{n+1})$  est isomorphe à l'espace des fonctions sur les arêtes de  $\Gamma_{n-1}$ . Comme  $\Gamma_{n-1}$  est un graphe régulier de valence 3 et qu'il contient  $4 \cdot 3^{n-1}$  points, il contient  $2 \cdot 3^n$  arêtes et l'espace propre de valeur propre 0 de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_{n+1})$  est de dimension  $2 \cdot 3^n$ . Si  $n = 0$ , en utilisant la caractérisation du lemme 3.7, on vérifie par un calcul direct que la dimension de l'espace propre de valeur propre 0 dans  $\ell^2(\Gamma_1)$  est 2. Alors, comme, d'après le corollaire 3.6 et le lemme 5.1,  $H$  est de dimension  $2 \dim \ell^2(\Gamma_n) - 1 = 8 \cdot 3^n - 1$ , l'orthogonal de  $H$  et de l'espace propre de valeur propre 0 est de dimension  $4 \cdot 3^{n+1} - (8 \cdot 3^n - 1) - 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n + 1$ . D'après le lemme 3.7, cet espace est l'espace propre de valeur propre  $-2$  de  $\Delta$  et le polynôme caractéristique de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma_{n+1})$  a bien la forme donnée par l'énoncé.  $\square$

## 8 Le compactifié plan de $\Gamma$

Nous considérons désormais l'ensemble  $X$  des éléments  $(p_{k,l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$  de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^2}$  tels que, pour tous entiers  $k$  et  $l$ , on ait  $p_{k,l} + p_{k+1,l} + p_{k,l+1} = 0$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est un espace topologique compact pour la topologie induite par la topologie produit. On note  $T$  et  $S$  les deux applications de  $X$  dans  $X$  telles que, pour tout  $p$  dans  $X$ , on ait  $Tp = (p_{k+1,l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$  et  $S p = (p_{k,l+1})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$ . Les homéomorphismes  $T$  et  $S$  engendrent l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $X$ .

Pour  $p$  dans  $X$  et  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a  $p_{k,l} + p_{k-1,l+1} + p_{k-1,l} = 0$  et  $p_{k,l} + p_{k,l-1} + p_{k+1,l-1} = 0$ . Or, le sous-groupe fini  $\mathfrak{S}$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ , engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  permute les trois paires de vecteurs  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $\{(-1, 1), (-1, 0)\}$  et  $\{(0, -1), (1, -1)\}$  de  $\mathbb{Z}^2$ . En particulier, le groupe  $\mathfrak{S}$  agit naturellement sur  $X$  : pour tous  $p$  dans  $X$  et  $s$  dans  $\mathfrak{S}$ , pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , on a  $(sp)_{k,l} = p_{s^{-1}(k,l)}$ . L'action de  $\mathfrak{S}$  sur les trois paires de vecteurs  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $\{(-1, 1), (-1, 0)\}$  et  $\{(0, -1), (1, -1)\}$  identifie  $\mathfrak{S}$  et le groupe des permutations de cet ensemble à trois éléments.

Soit  $Y$  l'ensemble des points  $p$  de  $X$  tels que  $p_{0,0} = 1$ . L'ensemble  $Y$  est stable par l'action de  $\mathfrak{S}$ . Pour tout  $p$  dans  $Y$ , on note  $Y_p$  l'ensemble des points de l'orbite de  $p$  sous l'action de  $\mathbb{Z}^2$  qui appartiennent à  $Y$ . Si  $p$  est un point de  $Y$ , on a  $p_{1,0} + p_{0,1} = 1$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et, donc, un et un seul des points  $Tp$  et  $Sp$  appartient à  $Y$ . De même, un et un seul des points  $T^{-1}p$  et  $T^{-1}Sp$  appartient à  $Y$  et un et un seul des points  $S^{-1}p$  et  $TS^{-1}p$  appartient à  $Y$ . Pour  $p$  et  $q$  dans  $Y$ , notons  $p \sim q$  si  $q$  appartient à l'ensemble  $\{Tp, Sp, T^{-1}Sp, T^{-1}p, S^{-1}p, TS^{-1}p\}$ . Cette relation est symétrique et  $\mathfrak{S}$ -invariante.

De même, si  $p$  appartient à  $Y$ , on note  $\tilde{Y}_p$  l'ensemble des  $(k, l)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  tels que  $p_{k,l} = 1$  et, pour  $(i, j)$  et  $(k, l)$  dans  $\tilde{Y}_p$  on note  $(i, j) \sim (k, l)$  si  $(i-k, j-l)$  appartient à l'ensemble  $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, -1)\}$ . Alors,  $\tilde{Y}_p$  est un graphe régulier de valence 3. Si le stabilisateur dans  $\mathbb{Z}^2$  de  $p$  est trivial,  $Y_p$  est un graphe régulier de valence 3 et l'application naturelle  $\tilde{Y}_p \rightarrow Y_p$  est un isomorphisme de graphes.

Notons  $u$  l'unique élément de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^2}$  tel que  $u_{k,l} = 0$  si et seulement si  $k-l$  est congru à 0 modulo 3. L'élément  $u$  est périodique sous l'action de  $\mathbb{Z}^2$  et son stabilisateur est l'ensemble des  $(k, l)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  tels que  $k-l$  soit congru à 0 modulo 3. On vérifie que  $u$  appartient à  $X$ . Son orbite sous l'action de  $\mathbb{Z}^2$  est égale à  $\{u, Tu, Su\}$  et elle est stable par l'action de  $\mathfrak{S}$  : les éléments de signature 1 de  $\mathfrak{S}$  fixent  $u, Tu$  et  $Su$  et les éléments de signature  $-1$  fixent  $u$  et échangent  $Tu$  et  $Su$ . Nous avons le

**Lemme 8.1.** *Soit  $p$  dans  $Y$ . Le graphe  $\tilde{Y}_p$  est connexe. Si  $p$  est différent de  $Tu$  et de  $Su$ , l'ensemble  $Y_p$ , muni de la relation  $\sim$ , est un graphe connexe régulier de valence 3 et l'application naturelle  $\tilde{Y}_p \rightarrow Y_p$  est un revêtement.*

*Démonstration.* Montrons que  $\tilde{Y}_p$  est connexe. Soit  $(k, l)$  dans  $Y_p$ . Quitte à faire agir le groupe  $\mathfrak{S}$  et à échanger les rôles de  $(0, 0)$  et de  $(k, l)$ , on peut supposer  $k$  et  $l$  positifs. Montrons dans ce cas, par récurrence sur  $k+l$ , que

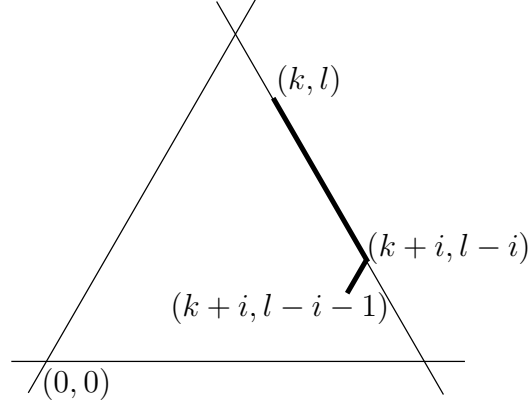


FIG. 10 – Connexité de  $\tilde{Y}_p$

$(k, l)$  appartient à la même composante connexe de  $\tilde{Y}_p$  que  $(0, 0)$ . Si  $k+l = 0$ , c'est immédiat. Supposons donc  $k+l > 0$  et considérons les  $p_{h, k+l-h}$  avec  $0 \leq h \leq k+l$ . Si tous ces éléments de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  étaient égaux à 1, on aurait, pour tous entiers positifs  $i$  et  $j$  avec  $i+j \leq k+l-1$ ,  $p_{i,j} = 0$ , ce qui est impossible, vu que  $p_{0,0} = 1$ . Quitte à encore faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut donc supposer qu'il existe un entier naturel  $0 \leq i \leq l-1$  tel que, pour tout  $0 \leq j \leq i$ , on ait  $p_{k+j, l-j} = 1$ , mais  $p_{k+i+1, l-i-1} = 0$ . Cette situation est représentée à la figure 10. Alors, les points  $(k+i, l-i)$  et  $(k, l)$  appartiennent à la même composante connexe de  $\tilde{Y}_p$  et, comme  $p_{k+i+1, l-i-1} = 0$ , on a  $p_{k+i, l-i-1} = 1$  et  $(k+i, l-i-1)$  appartient à  $\tilde{Y}_p$ . Comme  $(k+i) + (l-i-1) = k+l-1$ , le résultat en découle par récurrence.

Comme l'application naturelle  $\tilde{Y}_p \rightarrow Y_p$  est surjective, pour conclure, il nous reste à montrer que, pour  $p \notin \{Tu, Su\}$ , les points de l'ensemble  $\{p, Tp, Sp, T^{-1}Sp, T^{-1}p, S^{-1}p, TS^{-1}p\}$  sont deux à deux distincts. Posons  $V_p = \{Tp, Sp, T^{-1}Sp, T^{-1}p, S^{-1}p, TS^{-1}p\}$  et commençons par supposer que  $p$  appartient à  $V_p$ . Alors, quitte à faire agir le groupe  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer qu'on a  $p = Tp$  et  $p_{0,-1} = 1$  et, donc,  $p_{1,-1} = p_{0,-1} + p_{0,0} = 0$ , ce qui contredit le fait que  $Tp = p$ . On a donc  $p \notin V_p$ . Supposons à présent que deux des éléments de l'ensemble  $V_p$  sont égaux. Quitte à encore faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer qu'on a  $Tp = Sp$ ,  $Tp = T^{-1}p$  ou  $Tp = T^{-1}Sp$ . Si  $Tp = Sp$ , on a  $S^{-1}Tp = p$  et on vient de montrer que c'est impossible. Si  $Tp = T^{-1}p$ , on a  $T^2p = p$  et la famille  $q = (p_{2k, 2l})_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$  appartient à  $Y$  et vérifie  $Tq = q$  : à nouveau, on vient de montrer que c'est impossible. Enfin, si  $T^{-2}Sp = p$ , sup-

posons toujours, quitte à permuter, qu'on a  $p_{0,-1} = 1$ . Alors, on a  $p_{1,-1} = 0$ , et, donc, comme  $T^{-2}Sp = p$ ,  $p_{-1,0} = 0$ . De même, on a  $p_{-2,0} = p_{0,-1} = 1$  et  $p_{-1,-1} = p_{0,-1} + p_{-1,0} = 1$ . À nouveau, ceci implique  $p_{-3,0} = p_{-1,-1} = 1$ ,  $p_{-2,-1} = p_{-1,-1} + p_{-2,0} = 0$  et, enfin,  $p_{-3,-1} = p_{-2,-1} + p_{-3,0} = 1$ , si bien que le point  $q = T^{-3}p$  vérifie à nouveau  $T^{-2}Sq = q$  et  $q_{0,0} = q_{0,-1} = 1$ . Par récurrence, on en déduit que, pour tout entier  $k \leq 0$ , on a  $p_{k,0} = 1$  si  $k$  est congru à 0 ou 1 modulo 3 et que  $p_{k,0} = 0$  si  $k$  est congru à 2 modulo 3. En raisonnant de la même façon, on voit que  $p_{-1,1} = p_{-1,0} + p_{0,0} = 1$  et que, comme  $T^2S^{-1}p = p$ ,  $p_{1,0} = 1$ . Il vient  $p_{2,0} = p_{0,1} = p_{0,0} + p_{1,0} = 0$ , puis  $p_{3,0} = p_{1,1} = p_{1,0} + p_{2,0} = 1$  et  $p_{3,-1} = p_{1,0} = 1$ . Le point  $r = T^3p$  vérifie donc aussi  $T^{-2}Sr = r$  et  $r_{0,0} = r_{0,-1} = 1$ , si bien que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a  $p_{k,0} = 0$  si et seulement si  $k$  est congru à 2 modulo 3. En particulier, la suite  $(p_{k,0})_{k \in \mathbb{Z}}$  est 3-périodique. Comme  $T^{-2}Sp = p$ , pour tout  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , la suite  $(p_{k,l})_{k \in \mathbb{Z}}$  est 3-périodique et, donc,  $T^3p = p$ . Par conséquent, pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , si  $k - l$  est congru à 0 modulo 3, on a  $T^kS^l p = p$ . Comme on a  $p_{0,0} = u_{1,0}$ ,  $p_{-1,0} = u_{-1,1}$  et  $p_{-1,1} = u_{-1,2}$ , il vient  $p = Tu$ . Par conséquent, si  $p$  n'appartient pas à  $\{Tu, Su\}$ , la relation  $\sim$  munit bien l'ensemble  $Y_p$  d'une structure de graphe régulier de valence 3. Par définition, l'application naturelle  $\tilde{Y}_p \rightarrow Y_p$  est alors un revêtement. En particulier,  $Y_p$  est connexe.  $\square$

Soient  $\varepsilon$  et  $\eta$  dans  $\{0, 1\}$ . Notons  $X^{(\varepsilon, \eta)}$  l'ensemble des éléments  $p$  de  $X$  tels que, pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , si  $(k, l)$  est congru à  $(\varepsilon, \eta)$  dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , on a  $p_{k,l} = 0$ . Si  $p$  appartient à  $X^{(\varepsilon, \eta)}$ , pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a  $p_{2k+1+\varepsilon, 2l+1+\eta} = p_{2k+\varepsilon, 2l+1+\eta} = p_{2k+1+\varepsilon, 2l+\eta}$ . En particulier, pour  $(\varepsilon', \eta') \neq (\varepsilon, \eta)$ , on a  $X^{(\varepsilon', \eta')} \cap X^{(\varepsilon, \eta)} = \{0\}$  et, si  $p$  est un point de  $Y^{(\varepsilon, \eta)} = Y \cap X^{(\varepsilon, \eta)}$  (on a alors  $(\varepsilon, \eta) \neq (0, 0)$ ), le point  $p$  appartient à un triangle dans le graphe  $Y_p$ .

Le groupe  $\mathfrak{S}$  agit naturellement sur  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  et, pour tout  $s$  dans  $\mathfrak{S}$ , pour tout  $(\varepsilon, \eta)$  dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , on a  $X^{s(\varepsilon, \eta)} = sX^{(\varepsilon, \eta)}$ . Dorénavant, on notera  $a = (1, 1)$ ,  $b = (0, 1)$ ,  $c = (1, 0)$  et  $\mathcal{T}_1 = \{a, b, c\}$ . On considérera  $\mathcal{T}_1$  comme un 1-triangle. Le groupe  $\mathfrak{S}$  s'identifie au groupe de permutations  $\mathfrak{S}(a, b, c)$ . On pose  $\hat{Y} = Y^a \cup Y^b \cup Y^c$  : cette réunion est disjointe et l'ensemble  $\hat{Y}$  est invariant par l'action de  $\mathfrak{S}$ . Les éléments de  $Y^a$ ,  $Y^b$  et  $Y^c$  sont décrits par la figure 11.

Soit  $p$  un point de  $Y$ . Nous noterons  $\hat{p}^a$ ,  $\hat{p}^b$  et  $\hat{p}^c$  les points de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^2}$  tels que, pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$ , on ait,

- (i)  $\hat{p}_{2k, 2l}^a = \hat{p}_{2k-1, 2l}^a = \hat{p}_{2k, 2l-1}^a = p_{k, l}$  et  $\hat{p}_{2k-1, 2l-1}^a = 0$ .
- (ii)  $\hat{p}_{2k, 2l}^b = \hat{p}_{2k+1, 2l}^b = \hat{p}_{2k+1, 2l-1}^b = p_{k, l}$  et  $\hat{p}_{2k+2, 2l-1}^b = 0$ .
- (iii)  $\hat{p}_{2k, 2l}^c = \hat{p}_{2k, 2l+1}^c = \hat{p}_{2k-1, 2l+1}^c = p_{k, l}$  et  $\hat{p}_{2k-1, 2l+2}^c = 0$ .

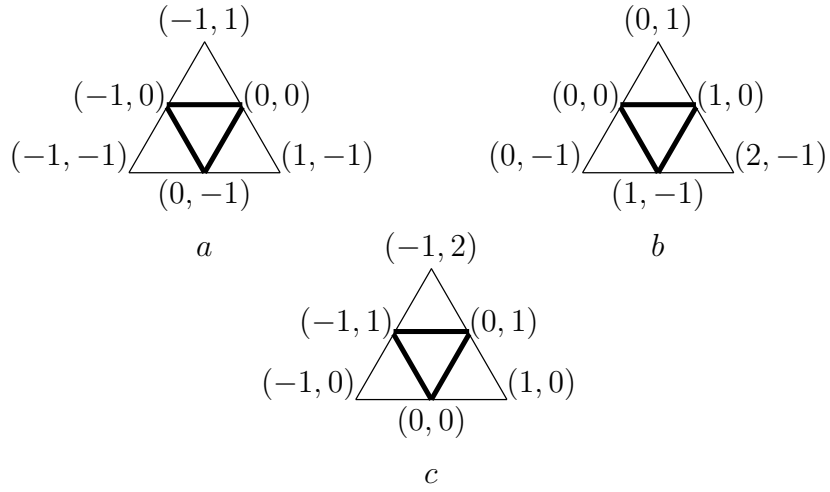


FIG. 11 – Les ensembles  $Y^a$ ,  $Y^b$  et  $Y^c$

On vérifie que, par construction, on a  $\hat{p}^a = T\hat{p}^b = S\hat{p}^c$  et que, pour tout  $s$  dans  $\mathfrak{S}$ , pour tout  $d$  dans  $\mathcal{T}_1$ , on a  $\hat{p}^{sd} = s(\hat{p}^d)$ .

**Lemme 8.2.** *Soit  $d$  dans  $\mathcal{T}_1$ . L'application  $p \mapsto \hat{p}^d$  induit un homéomorphisme de  $Y$  dans  $Y^d$ . Réciproquement, un point  $p$  de  $Y - \{Tu, Su\}$  appartient à  $\hat{Y}$  si et seulement si, pour tout  $q$  dans  $Y_p$ ,  $q$  appartient à un triangle contenu dans  $Y_p$ . Il existe alors un unique  $d$  dans  $\mathcal{T}_1$  et un unique point  $r$  de  $Y$  tel que  $p = \hat{r}^d$  et le triangle contenant  $p$  est  $\{\hat{r}^a, \hat{r}^b, \hat{r}^c\}$ .*

La démonstration utilise le

**Lemme 8.3.** *Soit  $p$  un point de  $Y - \{Tu, Su\}$  tel que chaque point de  $Y_p$  soit contenu dans un triangle. Alors, le triangle contenant  $p$  est soit  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ , soit  $\{p, Tp, TS^{-1}p\}$ , soit  $\{p, Sp, T^{-1}Sp\}$ . S'il est de la forme  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ , le troisième voisin  $q$  de  $p$  est soit  $Tp$ , soit  $Sp$ . Enfin, si  $q = Tp$ , le triangle contenant  $q$  est  $\{q, Tq, TS^{-1}q\}$  et si  $q = Sp$ , le triangle contenant  $q$  est  $\{q, Sq, T^{-1}Sq\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $p$  comme dans l'énoncé. Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer que le triangle contenant  $p$  contient le point  $T^{-1}p$ . Alors, par définition, les seuls voisins communs possibles pour  $p$  et  $T^{-1}p$  sont  $T^{-1}Sp$  et  $S^{-1}p$ . Or, comme  $T^{-1}p$  appartient à  $Y$ , on a  $p_{-1,0} = 1$ , donc  $p_{-1,1} = p_{0,0} + p_{-1,0} = 0$  et  $T^{-1}Sp \notin Y$ . Par conséquent, le triangle contenant  $p$  est  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ . Les autres cas s'en déduisent en faisant agir  $\mathfrak{S}$ .

Dans le cas où le triangle contenant  $p$  est  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ , le troisième voisin  $q$  de  $p$  est, par construction, nécessairement dans  $\{Tp, Sp\}$ . Supposons, quitte à encore faire agir  $\mathfrak{S}$ , qu'on a  $q = Tp$ . Alors, on a  $p_{0,1} = 0 = p_{1,-1}$  et, donc,  $T^{-1}Sq$  et  $S^{-1}q$  n'appartiennent pas à  $Y$ . Le triangle contenant  $q$  est donc  $\{q, Tq, TS^{-1}q\}$ . L'autre cas s'en déduit par symétrie.  $\square$

*Démonstration du lemme 8.2.* On vérifie aisément que, pour  $d$  dans  $\mathcal{T}_1$ , le point  $\hat{p}^d$  appartient à  $Y^d$  et que l'application ainsi définie induit un homéomorphisme de  $Y$  dans  $Y^d$ .

Réciproquement, soit  $p$  un point de  $Y - \{Tu, Su\}$ , tel que tout élément de  $Y_p$  soit contenu dans un triangle de  $Y_p$ . Alors, par définition et d'après le lemme 8.1, tout point de  $\tilde{Y}_p$  est contenu dans un triangle de  $\tilde{Y}_p$ . Soit  $(k, l)$ , un point de  $\tilde{Y}_p$ . D'après le lemme 8.3, le triangle contenant  $(k, l)$  est de la forme  $\{(k, l), (k-1, l), (k, l-1)\}$ ,  $\{(k, l), (k+1, l), (k+1, l-1)\}$  ou  $\{(k, l), (k, l+1), (k-1, l+1)\}$ . On note  $(\varepsilon(k, l), \eta(k, l))$  l'unique élément de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  qui n'est pas congru aux éléments de ce triangle.

Montrons que, pour tous  $(i, j)$  et  $(k, l)$  dans  $\tilde{Y}_p$  avec  $(i, j) \sim (k, l)$ , on a  $(\varepsilon(i, j), \eta(i, j)) = (\varepsilon(k, l), \eta(k, l))$ . Si  $(i, j)$  et  $(k, l)$  appartiennent au même triangle, c'est immédiat. Sinon, quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , d'après le lemme 8.3, on peut supposer que le triangle contenant  $(k, l)$  est  $\{(k, l), (k-1, l), (k, l-1)\}$ , que  $(i, j) = (k+1, l)$  et, donc, que le triangle contenant  $(i, j)$  est  $\{(k+1, l), (k+2, l), (k+2, l-1)\}$ . Alors, par définition, on a  $(\varepsilon(i, j), \eta(i, j)) = (\varepsilon(k, l), \eta(k, l))$ .

Comme, d'après le lemme 8.1, le graphe  $\tilde{Y}_p$  est connexe, la fonction  $(\varepsilon, \eta)$  y est constante. Par définition, pour tous entiers  $k$  et  $l$ , on a  $p_{2k+\varepsilon, 2l+\eta} = 0$ , donc  $p$  appartient à  $Y^{(\varepsilon, \eta)}$ . La propriété sur les triangles découle immédiatement de la définition des objets.  $\square$

Soit  $p$  un point de  $\hat{Y}$ . On note  $\bar{\Pi}p$  et  $\theta_1(p)$  les uniques éléments de  $Y$  et de  $\mathcal{T}_1$  pour lesquels on a  $\widehat{\bar{\Pi}p}^{\theta_1(p)} = p$ . Par construction, on a  $\theta_1(p) = a$  (resp.  $b$ , resp.  $c$ ) si et seulement si le triangle contenant  $p$  est  $\{p, T^{-1}p, S^{-1}p\}$  (resp.  $\{p, Tp, TS^{-1}p\}$ , resp.  $\{p, Sp, T^{-1}Sp\}$ ). Les applications  $\bar{\Pi}$  et  $\theta_1$  sont  $\mathfrak{S}$ -équivariantes. L'application  $\bar{\Pi}$  est continue et  $\theta_1$  est localement constante. Pour tout  $p$  dans  $\hat{Y}$ ,  $\theta_1$  induit une bijection du 1-triangle contenant  $p$  dans  $\mathcal{T}_1$ .

**Lemme 8.4.** *Soit  $p$  dans  $Y - \{Tu, Su\}$ . Il existe un unique isomorphisme de graphes  $\sigma : \hat{Y}_p \rightarrow \bar{\Pi}^{-1}(Y_p)$  tel que  $\bar{\Pi}\sigma = \sigma\Pi$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.2, un tel isomorphisme est nécessairement



unique. Montrons son existence. Soit  $q$  le voisin de  $p$  appartenant à  $\{Tp, Sp\}$ ,  $r$  son voisin dans  $\{T^{-1}p, T^{-1}Sp\}$  et  $s$  son voisin dans  $\{S^{-1}p, TS^{-1}p\}$ . On pose  $\sigma(p, q) = \hat{p}^a$ ,  $\sigma(p, r) = \hat{p}^b$  et  $\sigma(p, s) = \hat{p}^c$ . Alors, les trois points  $\sigma(p, q)$ ,  $\sigma(p, r)$  et  $\sigma(p, s)$  sont voisins dans  $Y_p$ . Vérifions, par exemple, que  $\sigma(p, q)$  est voisin de  $\sigma(q, p)$ . Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer qu'on a  $q = Tp$ . Alors, on a  $p = T^{-1}q$  et, donc,  $\sigma(q, p) = \hat{q}^b$ . Par construction, on a alors  $T\hat{p}^a = \hat{q}^b$ , donc  $\sigma(q, p) = T\sigma(p, q)$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Dorénavant, pour tout  $p$  dans  $\hat{Y}$ , on identifie les graphes  $\hat{Y}_p$  et  $\bar{\Pi}^{-1}(Y_p)$ .

Nous allons à présent construire un élément  $p$  de  $Y$  pour lequel le graphe  $Y_p$  est isomorphe au graphe de Pascal. Posons, pour tous  $k, l \geq 0$ ,  $p_{-k, -l} = p_{k+l+1, -l} = C_{l+k}^k$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et, pour tous  $k, l$  dans  $\mathbb{Z}$  avec soit  $l > 0$ , soit  $k \geq 1$  et  $k + l \geq 0$ ,  $p_{k, l} = 0$ . On vérifie aisément que  $p$  appartient à  $X$ , et donc à  $Y$  puisque  $p_{0,0} = 1$ . Nous avons la

**Proposition 8.5.** *Le point  $p$  appartient à  $\hat{Y}$  et on a  $\bar{\Pi}p = p$  et  $\theta_1(p) = a$ . Il existe un isomorphisme du graphe de Pascal  $\Gamma$  dans  $Y_p$  envoyant  $p_0$  sur  $p$  et  $p_0^\vee$  sur  $Tp$ .*

Cette représentation plane du graphe de pascal apparait dans la figure 1. La démonstration utilise le

**Lemme 8.6.** *Soient  $0 \leq k \leq n$  des entiers. Alors, les entiers  $C_n^k$ ,  $C_{2n}^{2k}$ ,  $C_{2n+1}^{2k}$  et  $C_{2n+1}^{2k+1}$  sont congrus modulo 2.*

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  des indéterminées. Dans l'anneau  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[A, B]$  de caractéristique 2, on a  $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k}$  et, donc,  $(A+B)^{2n} = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{2k} B^{2n-2k}$ . Par conséquent, par unicité, pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on a, dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $C_{2n}^{2k} = C_n^k$  et  $C_{2n}^{2k-1} = C_{2n}^{2k+1} = 0$ . Par l'identité classique, on a alors  $C_{2n+1}^{2k} = C_{2n}^{2k-1} + C_{2n}^{2k} = C_{2n}^{2k}$  et  $C_{2n+1}^{2k+1} = C_{2n}^{2k} + C_{2n}^{2k+1} = C_{2n}^{2k}$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 8.5.* En utilisant le lemme 8.6, on vérifie qu'on a  $p = \hat{p}^a$ . Par conséquent,  $p$  appartient à  $\hat{Y}$ ,  $\bar{\Pi}p = p$  et  $\theta_1(p) = a$ . Par récurrence, en utilisant le lemme 8.4, on en déduit que, pour tout entier  $n$ ,  $p$  est le sommet d'un  $n$ -triangle contenu dans  $Y_p$ . Donc  $p$  est le sommet d'un triangle infini contenu dans  $Y_p$ . De même, on a  $\bar{\Pi}(Tp) = Tp$ ,  $\theta_1(Tp) = b$  et  $Tp$  est le sommet d'un triangle infini contenu dans  $Y_p$ . D'après le lemme 8.1, le graphe  $Y_p$  est connexe et, donc, il est la réunion de ces deux triangles infinis. L'existence de l'isomorphisme demandé en découle.  $\square$

Dorénavant, on identifie  $p$  à  $p_0$ ,  $Tp$  à  $p_0^\vee$  et  $\Gamma$  à  $Y_p$ . On note  $\bar{\Gamma}$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $Y$  et, pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on pose  $\Gamma_p = Y_p$ . On a  $\bar{\Pi}\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}$ .

Nous allons décrire plus en détail l'ensemble  $\bar{\Gamma}$ . Pour cela, introduisons une partition de  $\hat{Y}$  en six sous-ensembles, qui raffine la partition  $\hat{Y} = Y^a \cup Y^b \cup Y^c$ . Soit  $p$  un point de  $\hat{Y}$ . Alors, d'après le lemme 8.3, l'ensemble des voisins de  $p$  est soit  $\{Tp, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ , soit  $\{Sp, T^{-1}p, S^{-1}p\}$ , soit  $\{T^{-1}p, Tp, TS^{-1}p\}$ , soit  $\{T^{-1}Sp, Tp, TS^{-1}p\}$ , soit  $\{S^{-1}p, Sp, T^{-1}Sp\}$  ou  $\{TS^{-1}p, Sp, T^{-1}Sp\}$ . Appelons bréchet de  $p$  l'ensemble des  $q$  dans  $\hat{Y}$  pour lesquels on a  $\{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 | T^k S^l p \sim q\} = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 | T^k S^l q \sim p\}$ . Les bréchets constituent six sous-ensembles fermés de  $\hat{Y}$  sur lesquels le groupe  $\mathfrak{S}$  agit simplement transitivement. On notera  $B_0$  le bréchet de  $p_0$ ,  $i$  l'élément  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathfrak{S}$  et  $r$  l'élément  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . L'élément  $i$  s'identifie à la transposition  $(ab)$  de  $\{a, b, c\}$  et  $r$  s'identifie au cycle  $(cba)$ .

Pour tout entier  $n$ , posons  $\hat{Y}^{(n)} = \bar{\Pi}^{-n}Y$ . Alors, par une récurrence immédiate, d'après les lemmes 8.2 et 8.4, pour tout entier  $n$ ,  $\hat{Y}^{(n)}$  est l'ensemble des éléments  $p$  de  $Y - \{Tu, Su\}$  pour lesquels tout point de  $Y_p$  appartient à un  $n$ -triangle dans  $Y_p$ . On a donc  $\Gamma \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{Y}^{(n)}$ .

**Lemme 8.7.** *Soient  $n$  un entier et  $p$  et  $q$  dans  $\hat{Y}^{(n+1)}$  tels que, pour tout  $0 \leq m \leq n$ ,  $\bar{\Pi}^m p$  et  $\bar{\Pi}^m q$  appartiennent au même bréchet. Alors, pour tous  $k$  et  $l$  dans  $\mathbb{Z}$  avec  $k \geq -2^n$ ,  $l \geq -2^n$  et  $k + l \leq 2^n$ , on a  $p_{k,l} = q_{k,l}$ .*

*Démonstration.* Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , supposons, quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , qu'on a  $p, q \in B_0$ . Alors, on a  $p_{-1,0} = p_{0,0} = p_{1,0} = p_{0,-1} = 1$ , si bien que  $p_{-1,-1} = p_{-1,0} + p_{0,-1} = 0$  et, de même,  $p_{1,-1} = p_{-1,1} = p_{0,1} = p_{-1,2} = 0$  et  $p_{2,-1} = 1$ . Comme ceci est aussi vrai pour  $q$ , le lemme est vrai pour  $n = 0$ .

Supposons donc  $n \geq 1$  et le lemme démontré pour  $n - 1$ . Donnons-nous  $p$  et  $q$  comme dans l'énoncé. Alors, comme  $p$  et  $q$  sont dans le même bréchet, on a  $\theta_1(p) = \theta_1(q)$ . Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer qu'on a  $\theta_1(p) = a$ , si bien que  $p = \widehat{\bar{\Pi}}_a p$  et que  $q = \widehat{\bar{\Pi}}_a q$ . Le résultat découle alors de la récurrence et de la définition de l'application  $r \mapsto \hat{r}^a$ .  $\square$

**Lemme 8.8.** *Soit  $p$  dans  $\hat{Y}$  tel que le bréchet de  $p$  soit  $B_0$ . Alors, le bréchet de  $\hat{p}^a$  est  $B_0$ , celui de  $\hat{p}^b$  est  $iB_0$  et celui de  $\hat{p}^c$  est  $rB_0$  et  $\hat{p}^a$  est le sommet d'un 2-triangle dans  $\bar{\Gamma}$ . Si  $q$  et  $r$  sont deux points de  $\hat{Y}^{(2)}$  tels que  $\bar{\Pi}q$  et  $\bar{\Pi}r$  appartiennent au même bréchet, il existe  $r'$  dans le 1-triangle contenant  $r$  dans  $Y_r$  tel que  $q$  et  $r'$  appartiennent au même bréchet.*

*Démonstration.* Le premier point découle immédiatement de la construction

des objets en question. Donnons-nous donc  $q$  et  $r$  comme dans l'énoncé. Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer que le bréchet de  $\bar{\Pi}q$  et de  $\bar{\Pi}r$  est  $B_0$ . La première partie du lemme implique alors clairement l'énoncé.  $\square$

Soit  $\Sigma$  l'ensemble des suites  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathfrak{S}$  telles que, pour tout entier  $n$ , on ait  $s_n \in \{s_{n+1}, s_{n+1}i, s_{n+1}r\}$ . On munit  $\Sigma$  de la topologie induite par la topologie produit et on note  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  l'application de décalage. On fait agir  $\mathfrak{S}$  sur  $\Sigma$  par multiplication à gauche sur tous les facteurs. L'ensemble  $\bar{\Gamma}$  est décrit par la

**Proposition 8.9.** *On a  $\bar{\Gamma} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{Y}^{(n)}$ . Pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , pour tout entier  $n$ , soit  $s_n(p)$  l'unique élément de  $\mathfrak{S}$  tel que le bréchet de  $\bar{\Pi}^n p$  soit  $s_n(p)B_0$ . L'application  $s$  ainsi définie induit un homéomorphisme  $\mathfrak{S}$ -équivariant de  $\bar{\Gamma}$  dans  $\Sigma$  et on a  $\sigma s = s\bar{\Pi}$ . L'image du point  $p_0$  par  $s$  est la suite constante de valeur  $e$  et les points fixes de  $\bar{\Pi}$  dans  $\bar{\Gamma}$  sont exactement les six images de  $p_0$  par l'action du groupe  $\mathfrak{S}$ . Enfin, pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , l'ensemble  $\Gamma_p$  est dense dans  $\bar{\Gamma}$ .*

*Démonstration.* Comme l'ensemble  $\Gamma$  est inclus dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{Y}^{(n)}$ , l'ensemble  $\bar{\Gamma}$  l'est aussi. Réciproquement, remarquons que chacun des six points  $T^{-1}p_0, T^{-2}p_0, T^{-2}S^{-1}p_0, T^{-1}S^{-2}p_0, S^{-2}p_0$  et  $S^{-1}p_0$  appartient à un bréchet différent. Par conséquent, si  $p$  est un point de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{Y}^{(n)}$ , il existe un point  $q$  de  $\Gamma$  tel que  $p$  et  $q$  appartiennent au même bréchet. Par récurrence, en utilisant le lemme 8.8, on en déduit que, pour tout entier  $n$ , il existe un point  $q_n$  de  $\Gamma$  tel que, pour tout  $0 \leq m \leq n$ ,  $\bar{\Pi}^m p$  et  $\bar{\Pi}^m q_n$  appartiennent au même bréchet. D'après le lemme 8.7, on a alors  $q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$  et  $p$  appartient à  $\bar{\Gamma}$ .

Soit  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ . Comme on vient de le voir, le point  $p$  est complètement déterminé par la suite  $s(p) = (s_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ . L'application  $s$  est clairement continue et  $\mathfrak{S}$ -équivariante et, par définition, on a  $s\bar{\Pi} = \sigma s$ . Par ailleurs, d'après le lemme 8.2, si  $p$  est un point de  $\bar{\Gamma}$ , il possède exactement trois antécédents par  $\bar{\Pi}$  et, d'après le lemme 8.8, les bréchets de ces trois antécédents sont  $s_0(p)B_0, s_0(p)iB_0$  et  $s_0(p)rB_0$ . On en déduit que l'application  $s$  prend ses valeurs dans  $\Sigma$  et qu'elle induit un homéomorphisme de  $\bar{\Gamma}$  dans  $\Sigma$ .

Par construction, on a  $s_0(p_0) = e$  et, comme, d'après la proposition 8.5,  $\bar{\Pi}p_0 = p_0$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $s_n(p_0) = e$ . En particulier, les autres points fixes de  $\bar{\Pi}$  sont les images de  $p_0$  par l'action de  $\mathfrak{S}$ .

Enfin, si  $p$  est un point de  $\bar{\Gamma}$ , d'après les lemmes 2.4 et 8.4, pour tout entier naturel  $n$ , le  $n$ -triangle contenant  $p$  dans  $\Gamma_p$  est l'ensemble  $\bar{\Pi}^{-n}(\bar{\Pi}^n p)$ . Comme  $r$  et  $i$  engendrent le groupe  $\mathfrak{S}$ , on vérifie aisément que le sous-décalage

de type fini  $(\Sigma, \sigma)$  est transitif, si bien que, pour tout  $t$  dans  $\Sigma$ , l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma^{-n}(\sigma^n t)$  est dense dans  $\Sigma$ . Par conséquent, pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ ,  $\Gamma_p$  est dense dans  $\bar{\Gamma}$ .  $\square$

## 9 Fonctions triangulaires et intégration sur $\bar{\Gamma}$

Dans cette section, nous étudions une classe particulière de fonctions localement constantes sur  $\bar{\Gamma}$ . Nous utilisons ces fonctions pour déterminer les propriétés d'une mesure de Radon remarquable sur  $\bar{\Gamma}$ . Pour  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on note toujours, comme à la section 8,  $(s_n(p)B_0)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de bréchetts associée.

Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  et  $\mathcal{T}$  un  $n$ -triangle dans  $\bar{\Gamma}$ . Alors, d'après le lemme 8.4, l'ensemble  $\bar{\Pi}^{n-1}\mathcal{T}$  est un 1-triangle de  $\bar{\Gamma}$ . Par conséquent, l'application  $\theta_1 \circ \bar{\Pi}^{n-1}$  induit une bijection de l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}_1 = \{a, b, c\}$ . On note  $a_n$  (resp.  $b_n$ , resp.  $c_n$ ) l'ensemble des sommets  $p$  de  $n$ -triangles de  $\bar{\Gamma}$  tels que  $\theta_1(\bar{\Pi}^{n-1}p) = a$  (resp.  $b$ , resp.  $c$ ) et  $\theta_n$  l'application qui, à un sommet  $p$  d'un  $n$ -triangle de  $\bar{\Gamma}$ , associe l'élément de  $\{a_n, b_n, c_n\}$  auquel il appartient. Soit  $\mathcal{T}_n$  le  $n$ -triangle  $\mathcal{T}_n(a_n, b_n, c_n)$ . D'après le lemme 2.3, l'application  $\theta_n$  se prolonge de manière unique en une application  $\bar{\Gamma} \rightarrow \mathcal{T}_n$ , encore notée  $\theta_n$ , qui, pour tout  $n$ -triangle  $\mathcal{T}$  de  $\bar{\Gamma}$ , induit un isomorphisme de graphes de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}_n$ . Cette application est localement constante. Pour  $n = 1$ , cette définition est cohérente avec les notations de la section 8, en identifiant  $a$  et  $a_1$ ,  $b$  et  $b_1$  et  $c$  et  $c_1$ . Par abus de langage, on considérera parfois que  $\mathcal{T}_0$  est un ensemble contenant un seul élément et que  $\theta_0$  est l'application constante  $\bar{\Gamma} \rightarrow \mathcal{T}_0$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , le groupe  $\mathfrak{S}$  agit sur  $\mathcal{T}_n$  en s'identifiant à  $\mathfrak{S}(a_n, b_n, c_n)$  et l'application  $\theta_n$  est  $\mathfrak{S}$ -équivariante. On identifiera  $\mathcal{T}_{n+1}$  et  $\hat{\mathcal{T}}_n$  à travers la bijection  $\mathfrak{S}$ -équivariante de  $\{a_n, b_n, c_n\}$  dans  $\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}\}$  qui envoie  $a_n$  sur  $a_{n+1}$ ,  $b_n$  sur  $b_{n+1}$  et  $c_n$  sur  $c_{n+1}$ . En particulier, on notera  $\Pi : \mathcal{T}_{n+1} \rightarrow \mathcal{T}_n$  l'application de contraction des triangles provenant de cette identification et  $\Pi^*$  et  $\Pi$  les opérateurs associés  $\ell^2(\mathcal{T}_n) \rightarrow \ell^2(\mathcal{T}_{n+1})$  et  $\ell^2(\mathcal{T}_{n+1}) \rightarrow \ell^2(\mathcal{T}_n)$ .

Notons, pour tout  $n \geq 2$ ,  $a_n b_n$ ,  $a_n c_n$ ,  $b_n a_n$ ,  $b_n c_n$ ,  $c_n a_n$  et  $c_n b_n$  les points de  $\mathcal{T}_n$  définis par le corollaire 2.6. Les principales propriétés des applications  $\theta_n$ ,  $n \geq 1$ , que nous utiliserons par la suite sont décrites par le

**Lemme 9.1.** *Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On a  $\Pi\theta_{n+1} = \theta_n\bar{\Pi}$ . Si  $p$  et  $q$  sont des points de  $\bar{\Gamma}$  tels que  $\theta_{n+1}(p) = \theta_{n+1}(q)$ , on a  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$ . En particulier, on a  $\theta_n(p) = a_n$  si et seulement si  $\theta_{n+1}(p)$  est  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}a_{n+1}$  ou  $c_{n+1}a_{n+1}$ . Soient  $p$  et  $q$  dans  $\bar{\Gamma}$ , tels que  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$ . Pour tout  $0 \leq m \leq n$ , si  $\theta_m(p)$  n'est pas*

contenu dans le  $m$ -triangle issu d'un des sommets de  $\mathcal{T}_n$ , on a  $s_m(p) = s_m(q)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T}$  un  $(n+1)$ -triangle de  $\bar{\Gamma}$ . L'application  $\theta_{n+1}$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}_{n+1}$  et l'application  $\theta_n$  induit un isomorphisme du  $n$ -triangle  $\bar{\Pi}\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}_n$ . Comme, par définition, les applications  $\theta_n\bar{\Pi}$  et  $\Pi\theta_{n+1}$  coïncident sur l'ensemble  $\partial\mathcal{T}_n$ , on a, d'après le lemme 2.2,  $\Pi\theta_{n+1} = \theta_n\bar{\Pi}$ .

Soient  $p, q$  et  $r$  les sommets de  $\mathcal{T}$ , de sorte que  $\theta_{n+1}(p) = a_{n+1}$ ,  $\theta_{n+1}(q) = b_{n+1}$  et  $\theta_{n+1}(r) = c_{n+1}$ . Par définition, on a  $\theta_n(p) = a_n$ . Montrons qu'on a  $\theta_n(qp) = \theta_n(rp) = a_n$ . Cela revient à montrer qu'on a  $\theta_1(\bar{\Pi}^{n-1}qp) = \theta_1(\bar{\Pi}^{n-1}rp) = a_1$ . Or, par le raisonnement ci-dessus, on a  $\theta_2(\bar{\Pi}^{n-1}qp) = \Pi^{n-1}\theta_{n+1}(qp) = b_2a_2$  et  $\theta_2(\bar{\Pi}^{n-1}rp) = \Pi^{n-1}\theta_{n+1}(rp) = c_2a_2$ , si bien qu'on est ramené au cas où  $n = 1$ . Alors, avec les notations de la section 8, si  $s = \bar{\Pi}^2p$ , on vérifie qu'on a  $qp = \hat{s}^b$  et  $rp = \hat{s}^c$ , d'où le résultat.

En particulier, si  $\mathcal{S}$  est un  $n$ -triangle de  $\bar{\Gamma}$ , la restriction de  $\theta_n$  à  $\partial\mathcal{S}$  est complètement déterminée par la restriction de  $\theta_{n+1}$  à  $\partial\mathcal{S}$ . Par définition, les valeurs de  $\theta_{n+1}$  sont donc déterminées par celles de  $\theta_n$ .

Soient enfin  $p$  et  $q$  tels que  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$  et montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  la propriété du lemme. Si  $n = 1$ , cette propriété est vide. Supposons  $n \geq 2$  et la propriété établie pour  $n - 1$ . Alors, on a  $\theta_{n-1}(\bar{\Pi}p) = \Pi\theta_n(p) = \Pi\theta_n(q) = \theta_{n-1}(\bar{\Pi}q)$  et, pour tout entier  $m$  avec  $1 \leq m \leq n$ , si  $\theta_n(p)$  n'appartient pas au  $m$ -triangle issu d'un des sommets de  $\mathcal{T}_n$ ,  $\theta_{n-1}(\bar{\Pi}p)$  n'appartient pas au  $(m-1)$ -triangle issu d'un des sommets de  $\mathcal{T}_{n-1}$  et, donc, par récurrence,  $s_m(p) = s_{m-1}(\bar{\Pi}p) = s_{m-1}(\bar{\Pi}q) = s_m(q)$ . Il nous reste à traiter le cas où  $m = 0$ . Supposons donc que  $\theta_n(p)$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{T}_n$  et montrons que  $s_0(p) = s_0(q)$ . Remarquons, que, par la première partie de la preuve, on a  $\theta_1(p) = \theta_1(q)$ . Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , supposons que  $\theta_1(p) = a_1$ . Alors, soient  $\mathcal{T}$  le  $n$ -triangle de  $\bar{\Gamma}$  contenant  $p$  et  $p'$  le voisin de  $p$  qui n'appartient pas au 1-triangle contenant  $p$ . Comme  $p$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{T}$ ,  $p'$  appartient à  $\mathcal{T}$  et, d'après le lemme 8.3,  $s_0(p)$  est  $B_0$  ou  $riB_0$ , suivant que  $\theta_1(p')$  est  $b_1$  ou  $c_1$ . Or, comme  $\theta_n$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{T}_n$ ,  $\theta_n(p')$  ne dépend que de  $\theta_n(p)$  et, donc, toujours par la première partie du lemme, la valeur de  $\theta_1$  en  $p'$  est complètement déterminée par la valeur de  $\theta_n$  en  $p$ . Par conséquent, la valeur de  $s_0$  en  $p$  est déterminée par la valeur de  $\theta_n$  en  $p$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , d'après la proposition 8.5, on a  $\theta_n(p_0) = a_n = \theta_n(rip_0)$ , si bien que le codage de  $\bar{\Gamma}$  par les applications  $\theta_n$ ,  $n \geq 1$ , possède des ambiguïtés. Elles sont décrites par le

**Corollaire 9.2.** *Soient  $p$  et  $q$  dans  $\bar{\Gamma}$  tels que, pour tout entier  $n$ , on ait  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$ . Alors, si  $p \neq q$ , il existe  $s$  dans  $\mathfrak{S}$  tel que  $p$  appartienne au triangle infini issu de  $sp_0$  dans  $s\Gamma$  et que  $q$  appartienne au triangle infini issu de  $srip_0$  dans  $sri\Gamma$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'on a  $p \neq q$ . Alors, d'après la proposition 8.9, il existe un entier  $m$  tel que  $s_m(p) \neq s_m(q)$ . D'après le lemme 9.1, pour tout  $n \geq m$ , le point  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$  appartient au  $m$ -triangle issu de l'origine de  $\mathcal{T}_n$ . Posons  $p' = \bar{\Pi}^m p$  et  $q' = \bar{\Pi}^m q$ . D'après le lemme 9.1, pour tout entier  $n$ , on a  $\theta_n(p') = \Pi^m \theta^{n+m}(p) = \Pi^m \theta^{n+m}(q) = \theta_n(q')$  et ce point est un des sommets de  $\mathcal{T}_n$ . Comme, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $\theta_n(a_{n+1}) = a_n$ ,  $\theta_n(b_{n+1}) = b_n$  et  $\theta_n(c_{n+1}) = c_n$ , on peut supposer, quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , qu'on a, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\theta_n(p') = \theta_n(q') = a_n$ . Comme  $\theta_1(p') = a_1$ , le bréchet de  $p'$  est  $B_0$  ou  $riB_0$ . Quitte à faire agir  $\mathfrak{S}$ , supposons que ce bréchet soit  $B_0$ . Alors, d'après le lemme 8.8, le bréchet de  $\bar{\Pi}p'$  est  $B_0$ ,  $iB_0$  ou  $r^{-1}B_0$ . Comme  $\theta_1(\bar{\Pi}p') = \Pi\theta_1(p) = a_1$ , le bréchet de  $\bar{\Pi}p'$  est  $B_0$  et, par récurrence, pour tout entier  $n$ , on a  $s_n(p') = e$ , si bien que, d'après la proposition 8.9,  $p' = p_0$  et que  $p$  appartient au triangle infini  $\mathcal{T}_\infty(p_0)$  issu de  $p_0$  dans  $\Gamma$ . De même, on a  $q' = p_0$  ou  $q' = rip_0$  et  $q$  appartient au triangle infini issu de  $p_0$  dans  $\Gamma$  ou au triangle infini issu de  $rip_0$  dans  $ri\Gamma$ . Pour tout entier  $n$ , l'application  $\theta_n$  induit une bijection du  $n$ -triangle de  $\Gamma$  issu de  $p_0$  dans  $\mathcal{T}_n$ . Par conséquent, si  $p''$  est un point de  $\mathcal{T}_\infty(p_0)$  tel que, pour tout entier  $n$ , on ait  $\theta_n(p'') = \theta_n(p)$ , on a  $p'' = p$ . Comme on a supposé  $p \neq q$ ,  $q$  appartient au triangle infini issu de  $rip_0$  dans  $ri\Gamma$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Soit  $n$  un entier. Nous dirons qu'une fonction  $\varphi : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $n$ -triangulaire si elle s'écrit  $\psi \circ \theta_n$ , pour une certaine fonction  $\psi$  sur  $\mathcal{T}_n$ . Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, pour alléger les notations, on identifiera  $\varphi$  et  $\psi$ . D'après le lemme 9.1, une fonction  $n$ -triangulaire est  $(n+1)$ -triangulaire. En particulier, les fonctions triangulaires constituent une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions localement constantes sur  $\bar{\Gamma}$ . Comme, pour toute fonction triangulaire  $\varphi$ , on a  $\varphi(p_0) = \varphi(rip_0)$ , cette algèbre n'est pas dense dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Gamma})$  pour la topologie de la convergence uniforme.

Dorénavant, on notera  $\mu$  la probabilité borélienne sur  $\bar{\Gamma}$  dont l'image par l'application de codage de la proposition 8.9 est la mesure d'entropie maximale pour  $\sigma$  sur  $\Sigma$ . En d'autres termes,  $\mu$  est l'unique mesure telle que, pour toute suite  $t_0, \dots, t_n$  d'éléments de  $\mathfrak{S}$ , si, pour tout  $0 \leq m \leq n-1$ , on a  $t_m \in \{t_{m+1}, t_{m+1}i, t_{m+1}r\}$ , alors  $\mu(t_0B_0 \cap \bar{\Pi}^{-1}t_1B_0 \cap \dots \cap \bar{\Pi}^{-n}t_nB_0) = \frac{1}{6.3^n}$ . Par définition, la mesure  $\mu$  est  $\bar{\Pi}$ -invariante et  $\mathfrak{S}$ -invariante.

Pour toute fonction borélienne  $\varphi$  sur  $\bar{\Gamma}$ , on note  $\bar{\Pi}^*\varphi = \varphi \circ \bar{\Pi}$ . Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , l'opérateur  $\bar{\Pi}^*$  préserve la norme dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ . On note  $\bar{\Pi}$  son adjoint, c'est-à-dire que, pour toute fonction borélienne  $\varphi$  sur  $\bar{\Gamma}$ , pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on a  $\bar{\Pi}\varphi(p) = \frac{1}{3} \sum_{\bar{\Pi}(q)=p} \varphi(q)$ . On a  $\bar{\Pi}1 = 1$  et, pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , l'opérateur  $\bar{\Pi}$  est de norme 1 dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Enfin, on a  $\bar{\Pi}\bar{\Pi}^* = 1$ .

L'intégrale des fonctions triangulaires pour la mesure  $\mu$  se calcule naturellement :

**Lemme 9.3.** *Soient  $n$  un entier naturel et  $\varphi$  une fonction  $n$ -triangulaire. On a  $\int_{\bar{\Gamma}} \varphi d\mu = \frac{1}{3^n} \sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi(p)$ .*

En d'autres termes, la mesure image de  $\mu$  par  $\theta_n$  est la mesure de comptage normalisée de  $\mathcal{T}_n$ .

*Démonstration.* Démontrons le résultat par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ ,  $\varphi$  est constante et le lemme est évident. Si  $n \geq 1$ , comme, d'après le lemme 9.1, on a  $\Pi\theta_n = \theta_{n-1}\bar{\Pi}$ , la fonction  $\bar{\Pi}\varphi$  est  $(n-1)$ -triangulaire et on a, par récurrence,  $\int_{\bar{\Gamma}} \varphi d\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \bar{\Pi}\varphi d\mu = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{p \in \mathcal{T}_{n-1}} \frac{1}{3} \sum_{\Pi(q)=p} \varphi(q) = \frac{1}{3^n} \sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi(p)$ , d'où le résultat.  $\square$

Dorénavant, pour tout entier  $n$ , on identifiera  $\theta_n$  et la partition associée de l'espace mesuré  $(\bar{\Gamma}, \mu)$ . D'après le lemme 9.1, cette suite de partitions est croissante. Comme  $\mu$  n'a pas d'atomes, on a  $\mu(\bigcup_{s \in \mathcal{S}} s\Gamma) = 0$  et, d'après le lemme 9.2, pour tous  $p$  et  $q$  dans l'ensemble de mesure totale  $\bar{\Gamma} - \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s\Gamma$ , si, pour tout entier  $n$ ,  $\theta_n(p) = \theta_n(q)$ , on a  $p = q$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$ , pour tout entier  $n$ , on note  $\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)$  l'espérance conditionnelle de  $\varphi$  sachant  $\theta_n$ , c'est-à-dire que, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ , on a  $\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p) = \frac{1}{\mu(\theta_n^{-1}(p))} \int_{\theta_n^{-1}(p)} \varphi d\mu$ .

**Lemme 9.4.** *Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , pour tout  $\varphi$  dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ , on a  $\mathbb{E}(\varphi|\theta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ . En particulier, l'espace des fonctions triangulaires est dense dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ . De même, l'espace des fonctions triangulaires qui sont nulles aux sommets de leur triangle de définition est dense dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Enfin, pour tout entier  $n$ , pour tout  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$ , on a  $\mathbb{E}(\bar{\Pi}^*\varphi|\theta_{n+1}) = \Pi^*\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)$ ,  $\mathbb{E}(\bar{\Pi}\varphi|\theta_n) = \frac{1}{3}\Pi\mathbb{E}(\varphi|\theta_{n+1})$  et, pour  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ ,*

$$\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{q \in \mathcal{T}_{n+1} \\ \theta_n(q)=p}} \mathbb{E}(\varphi|\theta_{n+1})(q).$$

*Démonstration.* La convergence dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  résulte de la discussion précédente et de propriétés générales des partitions des espaces de probabilité.

La densité des fonctions triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition en découle, vu que, d'après le lemme 9.4, pour tout  $n \geq 1$ , la mesure de l'ensemble des éléments de  $\bar{\Gamma}$  qui sont sommet d'un  $n$ -triangle est  $3^{n-1}$ . Enfin, les formules liant les espérances conditionnelles sachant  $\theta_{n+1}$  et  $\theta_n$  découlent du lemme 9.1 et du fait que, d'après le lemme 9.3, la mesure image de  $\mu$  par  $\theta_n$  est la mesure de comptage normalisée de  $\mathcal{T}_n$ .  $\square$

Décrivons enfin un homéomorphisme  $\bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma}$  qui nous sera utile pour la suite. Pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on note  $\alpha(p)$  l'unique voisin de  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$  qui n'appartient pas au triangle contenant  $p$ . L'application  $\alpha : \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma}$  est une involution sans points fixes. D'après le corollaire 2.5, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\alpha$  laisse stable l'ensemble des points de  $\bar{\Gamma}$  qui sont sommet d'un  $n$ -triangle. Pour  $p$  dans  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$ , on note encore  $\alpha_n(p)$  l'unique voisin de  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$  qui n'appartient pas au triangle contenant  $p$ .

**Lemme 9.5.** *Pour tout entier  $n$ , pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , si  $p$  n'est pas le sommet d'un  $n$ -triangle de  $\bar{\Gamma}$ , on a  $\theta_n(\alpha(p)) = \alpha_n(\theta_n(p))$ . L'application  $\alpha$  préserve la mesure  $\mu$  et, pour tous  $n \geq 1$ ,  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $p$  dans  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$ , on a  $\mathbb{E}(\varphi \circ \alpha | \theta_n)(p) = \mathbb{E}(\varphi | \theta_n)(\alpha_n(p))$ .*

Comme les fonctions triangulaires ne sont pas denses dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Gamma})$ , pour vérifier que  $\alpha$  préserve la mesure  $\mu$ , nous aurons recours au

**Lemme 9.6.** *Soit  $X$  un espace métrique compact et soit  $A$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}^0(X)$  stable par conjugaison complexe et fermée pour la topologie de la convergence uniforme. Soit  $Y$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $X$  pour lesquels il existe  $y \neq x$  dans  $X$  tel que, pour tout  $\varphi$  dans  $A$ ,  $\varphi(y) = \varphi(x)$ . L'ensemble  $Y$  est borélien et, si  $\lambda$  est une mesure complexe borélienne sur  $X$  telle que  $\lambda|_Y = 0$  et que, pour tout  $\varphi$  dans  $A$ ,  $\int_X \varphi d\lambda = 0$ , on a  $\lambda = 0$ .*

*Démonstration.* Soient  $S$  le spectre de la  $C^*$ -algèbre commutative  $A$  et  $\pi : X \rightarrow S$  la surjection continue duale de l'injection naturelle de  $A$  dans  $\mathcal{C}^0(X)$ . Par hypothèse, la mesure complexe  $\pi_*\lambda$  est nulle sur  $S$ . Notons  $p$  la projection sur la première composante  $X \times X \rightarrow X$  et posons  $D = \{(x, x) | x \in X\} \subset X \times X$  et  $E = \{(x, y) \in X \times X | \pi(x) = \pi(y)\}$ . On a  $Y = p(E - D)$ . Comme  $E$  et  $D$  sont des fermés de l'espace compact métrisable  $X$ , l'ensemble  $E - D$  est une réunion dénombrable de compacts, donc  $Y$  et  $\pi(Y)$  le sont aussi. En particulier, ces ensembles sont boréliens et  $\pi$  induit un isomorphisme borélien de  $X - Y$  dans  $S - \pi(Y)$ . Par conséquent, la restriction de  $\lambda$  à  $X - Y$  est nulle. Comme sa restriction à  $Y$  est nulle, on a  $\lambda = 0$ .  $\square$



*Démonstration du lemme 9.5.* La première partie du lemme résulte de la définition de  $\alpha$  et du fait que  $\theta_n$  induit un morphisme de graphes du  $n$ -triangle contenant  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ .

Soit  $n \geq 1$ . Comme,  $\alpha$  permute les points de  $\bar{\Gamma}$  qui sont sommet d'un  $n$ -triangle, si  $\varphi$  est une fonction  $n$ -triangulaire nulle aux sommets de  $\mathcal{T}_n$ , on a, d'après le lemme 9.3,  $\int_{\bar{\Gamma}} \varphi \circ \alpha d\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \varphi d\mu$ . Comme, à nouveau d'après le lemme 9.3, pour tout entier  $n \geq 1$ , la mesure de l'ensemble des points de  $\bar{\Gamma}$  qui sont sommet d'un  $n$ -triangle est  $3^{n-1}$ , on en déduit que, pour toute fonction triangulaire  $\varphi$ , on a  $\int_{\bar{\Gamma}} \varphi \circ \alpha d\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \varphi d\mu$ .

Soit  $A \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Gamma})$  l'adhérence de l'algèbre des fonctions triangulaires pour la topologie de la convergence uniforme. D'après le corollaire 9.2, l'ensemble des éléments  $p$  de  $\bar{\Gamma}$  pour lesquels il existe  $q \neq p$  tel que, pour tout  $\varphi$  dans  $A$ , on ait  $\varphi(p) = \varphi(q)$  est  $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} s\Gamma$ . Comme  $\mu$  n'a pas d'atomes, cet ensemble est de mesure nulle pour  $\mu$  et pour  $\alpha_*\mu$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $A$ , on a  $\int_{\bar{\Gamma}} \varphi \circ \alpha d\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \varphi d\mu$ . D'après le lemme 9.6, on a donc  $\alpha_*\mu = \mu$ .  $\square$

Notons enfin  $\bar{\Theta}$  le quotient de  $\bar{\Gamma}$  par l'application  $\alpha$  et munissons-le de la mesure  $\lambda$ , image de  $\mu$  par la projection naturelle. L'espace  $\bar{\Theta}$  peut se voir naturellement comme l'espace des arêtes de  $\bar{\Gamma}$  et il peut-être muni d'une structure de graphe régulier de valence 4. L'image de  $\Gamma$  dans  $\bar{\Theta}$  s'identifie alors de manière naturelle au graphe de Sierpiński  $\Theta$  et forme une partie dense de  $\bar{\Theta}$ . On appelle fonctions triangulaires sur  $\bar{\Theta}$  les fonctions qui proviennent de fonctions triangulaires nulles aux sommets de leurs triangles de définition et  $\alpha$ -invariantes sur  $\bar{\Gamma}$ . Alors, les résultats de cette section se transportent en des résultats analogues sur  $\bar{\Theta}$ .

## 10 L'opérateur $\bar{\Delta}$ et ses mesures harmoniques

Nous allons à présent étudier un opérateur sur  $\bar{\Gamma}$  qui est un analogue de l'opérateur  $\Delta$  sur  $\Gamma$ .

Soit  $\varphi$  une fonction borélienne sur  $\bar{\Gamma}$ . Pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , on pose  $\bar{\Delta}\varphi(p) = \sum_{q \sim p} \varphi(q)$ . Pour étudier les propriétés de cet opérateur sur les fonctions triangulaires, notons encore, pour tout entier naturel  $n$ , pour toute fonction  $\varphi$  sur  $\mathcal{T}_n$ , pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$ ,  $\Delta\varphi(p) = \sum_{q \sim p} \varphi(q)$  et, pour tout  $p$  dans  $\partial\mathcal{T}_n$ ,  $\Delta\varphi(p) = \varphi(p) + \sum_{q \sim p} \varphi(q)$ .

**Lemme 10.1.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'opérateur  $\Delta$  est auto-adjoint dans  $\ell^2(\mathcal{T}_n)$ . Si  $\varphi$  est une fonction  $n$ -triangulaire constante sur  $\partial\mathcal{T}_n$ , on a  $\Delta\varphi = \bar{\Delta}\varphi$ .*

*Démonstration.* Le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $\Delta$  dans  $\mathcal{T}_n$  se vérifie aisément. Par ailleurs, comme  $\theta_n$  induit des isomorphismes de graphes des  $n$ -triangles de  $\bar{\Gamma}$  dans  $\mathcal{T}_n$ , pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$ , on a

$$\bar{\Delta}1_{\theta_n^{-1}(p)} = \sum_{q \sim p} 1_{\theta_n^{-1}(q)} = \Delta 1_{\theta_n^{-1}(p)}.$$

De même, comme pour tout point  $p$  de  $\bar{\Gamma}$  qui est le sommet d'un  $n$ -triangle, l'unique voisin de  $p$  n'appartenant pas à ce  $n$ -triangle est lui-même le sommet d'un  $n$ -triangle, on a  $\bar{\Delta} \sum_{p \in \partial\mathcal{T}_n} 1_{\theta_n^{-1}(p)} = \Delta \sum_{p \in \partial\mathcal{T}_n} 1_{\theta_n^{-1}(p)}$  et, donc, pour toute fonction  $n$ -triangulaire  $\varphi$  constante sur  $\partial\mathcal{T}_n$ ,  $\bar{\Delta}\varphi = \Delta\varphi$ .  $\square$

Nous pouvons alors énoncer les propriétés principales de  $\bar{\Delta}$  dans la

**Proposition 10.2.** *L'opérateur  $\bar{\Delta}$  commute à l'action de  $\mathfrak{S}$ . Il est continu de norme 3 dans l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Gamma}$  et on a  $\bar{\Delta}^*\mu = 3\mu$ . Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , l'opérateur  $\bar{\Delta}$  est continu de norme 3 dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  et, pour  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , pour tous  $\varphi$  dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $\psi$  dans  $L^q(\bar{\Gamma}, \mu)$ , on a  $\langle \bar{\Delta}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{\Delta}\psi \rangle$ .*

*Démonstration.* La première assertion est évidente. Comme  $\bar{\Delta}$  est positif et que  $\bar{\Delta}1 = 3$ ,  $\bar{\Delta}$  est de norme 3 dans l'espace des fonctions continues.

Rappelons qu'on a noté  $\alpha$  l'application  $\bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma}$  qui, à un point  $p$ , associe son unique voisin qui n'appartient pas au triangle contenant  $p$ . Pour  $\varphi$  dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Gamma})$ , on a  $\bar{\Delta}\varphi = 3\bar{\Pi}^*\bar{\Pi}\varphi + \varphi \circ \alpha - \varphi$ . Comme les opérateurs  $\bar{\Pi}$  et  $\bar{\Pi}^*$  préservent  $\mu$  et que, d'après le lemme 9.5, l'homéomorphisme  $\alpha$  préserve  $\mu$ , on a  $\bar{\Delta}^*\mu = 3\mu$ .

Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , l'opérateur positif  $\bar{\Delta}$  agit donc bien dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  et il y est borné et de norme 3. Soient  $1 < p, q < \infty$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . D'après le lemme 9.4, les fonctions triangulaires nulles aux sommets de leurs triangles de définition sont denses dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  et dans  $L^q(\bar{\Gamma}, \mu)$ . D'après le lemme 10.1, on a donc, pour tous  $\varphi$  dans  $L^p(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $\psi$  dans  $L^q(\bar{\Gamma}, \mu)$ ,  $\langle \bar{\Delta}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{\Delta}\psi \rangle$ . Comme les opérateurs apparaissant dans cette identité sont continus dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$  et dans  $L^\infty(\bar{\Gamma}, \mu)$ , elle est encore vraie pour  $p = 1$  et  $q = \infty$ .  $\square$

Nous allons à présent montrer que la mesure  $\mu$  est, à multiplication par un scalaire près, la seule mesure complexe borélienne  $\lambda$  sur  $\bar{\Gamma}$  telle que  $\bar{\Delta}^*\lambda = 3\lambda$ . Commençons par nous intéresser aux mesures de ce type qui sont  $\mathfrak{S}$ -invariantes :

**Lemme 10.3.** *Soit  $\lambda$  une mesure complexe borélienne  $\mathfrak{S}$ -invariante sur  $\bar{\Gamma}$  telle que  $\bar{\Delta}^*\lambda = 3\lambda$ . On a  $\lambda = \lambda(\bar{\Gamma})\mu$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : p \mapsto \lambda(p), \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $\varphi$  appartient à  $\ell^1(\Gamma)$  et on a  $\Delta\varphi = 3\varphi$ . D'après le principe du maximum, on a donc  $\varphi = 0$ . Par conséquent, la restriction de  $\lambda$  à  $\bigcup_{s \in \mathfrak{S}} s\Gamma$  est nulle. D'après le corollaire 9.2 et le lemme 9.6, il suffit donc de vérifier que  $\lambda$  est proportionnelle à  $\mu$  sur l'espace des fonctions triangulaires. Soit  $n$  un entier  $\geq 1$  et, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ , soit  $\varphi_n(p) = \lambda(\theta_n^{-1}(p)) = \int_{\bar{\Gamma}} 1_{\theta_n^{-1}(p)} d\lambda$ . D'après le lemme 10.1, si  $p$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{T}_n$ , on a  $\bar{\Delta}1_{\theta_n^{-1}(p)} = \Delta 1_{\theta_n^{-1}(p)}$  et, donc, comme  $\bar{\Delta}^*\lambda = 3\lambda$ ,  $\Delta\varphi_n(p) = 3\varphi_n(p)$ . De plus, comme  $\lambda$  est  $\mathfrak{S}$ -invariante,  $\varphi_n$  est constante sur  $\partial\mathcal{T}_n$ . Par le principe du maximum,  $\varphi_n$  est constante. Comme  $\sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi_n(p) = \lambda(\bar{\Gamma})$ , on a, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ ,  $\varphi_n(p) = \frac{1}{3^n} \lambda(\bar{\Gamma})$ , d'où le résultat, d'après le lemme 9.3.  $\square$

Étudions maintenant l'espace propre de valeur propre 3 pour l'action de  $\bar{\Delta}$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Nous aurons à utiliser le

**Lemme 10.4.** *Soient  $n$  un entier  $\geq 1$ ,  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $p$  dans  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$ . On a  $\Delta\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p) = \mathbb{E}(\bar{\Delta}\varphi|\theta_n)(p)$ .*

*Démonstration.* Notons toujours  $\alpha$  et  $\alpha_n$  comme dans le lemme 9.5. On a  $\bar{\Delta}\varphi = 3\bar{\Pi}^*\bar{\Pi}\varphi + \varphi \circ \alpha - \varphi$  et, donc, d'après les lemmes 9.4 et 9.5,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{\Delta}\varphi|\theta_n)(p) &= \Pi^*\Pi\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p) + \mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(\alpha_n(p)) - \mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p) \\ &= \Delta\mathbb{E}(\varphi|\theta_n)(p), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $H_n$  l'espace des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathcal{T}_n$  telles que, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$  qui ne soit pas un sommet, on ait  $\Delta\varphi(p) = 3\varphi(p)$ . D'après le lemme 10.4, pour tout  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$ , si  $\bar{\Delta}\varphi = 3\varphi$ , on a  $\mathbb{E}(\varphi|\theta_n) \in H_n$ . On identifie  $\mathbb{C}^3$  et l'espace des fonctions à valeurs complexes sur  $\mathcal{T}_1$  en considérant  $(1, 0, 0)$  (resp.  $(0, 1, 0)$ , resp.  $(0, 0, 1)$ ) comme la fonction caractéristique du singleton  $\{a_1\}$  (resp.  $\{b_1\}$ , resp.  $\{c_1\}$ ) et on note  $\eta_n$  l'application linéaire  $\mathfrak{S}$ -équivariante  $H_n \rightarrow \mathbb{C}^3, \varphi \mapsto (\varphi(a_n), \varphi(b_n), \varphi(c_n))$ . Par ailleurs, on note  $(s_n)_{n \geq 1}$  la suite de nombres réels telle que  $s_1 = 1$  et que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $s_{n+1} = \frac{3s_n}{3s_n+5}$ . On montre facilement qu'on a  $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Soit  $\mathbb{C}_0^3$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{C}^3$  dont la somme des coordonnées est nulle. Nous avons le

**Lemme 10.5.** Soit  $n \geq 1$ . Pour tous  $\varphi$  dans  $H_n$  et  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ , on a  $|\varphi(p)| \leq \max\{|\varphi(a_n)|, |\varphi(b_n)|, |\varphi(c_n)|\}$ . En particulier, l'application  $\eta_n$  est un isomorphisme. Supposons  $n \geq 2$ . Soient  $\varphi$  dans  $H_n$  tel que  $\eta_n(\varphi)$  appartienne à  $\mathbb{C}_0^3$  et  $\psi = \mathbb{E}(\varphi|\theta_{n-1})$ . Alors  $\psi$  appartient à  $H_{n-1}$  et on a  $\eta_{n-1}(\psi) = \frac{2}{3s_{n-1}+5}\eta_n(\varphi)$ .

*Démonstration.* La majoration découle du principe du maximum appliqué à l'opérateur  $\frac{1}{3}\Delta$ . Elle implique que, pour tout  $n \geq 1$ , l'opérateur  $\eta_n$  est injectif. Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\mathcal{T}_n$  et, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_n$ , posons  $\delta_n\varphi(p) = \Delta\varphi(p) - 3\varphi(p)$  si  $p$  n'est pas un sommet et  $\delta_n\varphi(p) = \varphi(p)$  si  $p$  est un sommet. Comme  $\eta_n$  est injectif,  $\delta_n$  l'est aussi et est donc un isomorphisme; en particulier,  $\eta_n$  est surjectif et, donc, c'est un isomorphisme.

Pour tout  $n \geq 2$ , posons  $t_n = \frac{3s_{n-1}+2}{3s_{n-1}+5}$  et  $u_n = \frac{1}{3s_{n-1}+5}$ . Rappelons que, comme dans le corollaire 2.6, si  $\mathcal{S}$  est un  $n$ -triangle et si  $p$  et  $q$  sont deux sommets de  $\mathcal{S}$ , on note  $pq$  l'unique point de  $\mathcal{S}$  appartenant au  $(n-1)$ -triangle contenant  $p$  et dont un voisin appartient au  $(n-1)$ -triangle contenant  $q$ . Soient  $d_n$  et  $e_n$  les deux voisins de  $a_n$  dans  $\mathcal{T}_n$ . Montrons par récurrence sur  $n \geq 2$  que, pour tout  $\varphi$  dans  $H_n$ , on a  $\varphi(d_n) + \varphi(e_n) = s_n(\varphi(b_n) + \varphi(c_n)) + 2(1-s_n)\varphi(a_n)$  et  $\varphi(a_nb_n) = t_n\varphi(a_n) + u_n(2\varphi(b_n) + \varphi(c_n))$ . Pour  $n = 2$ , c'est un calcul immédiat. Si  $n \geq 3$  et si la formule est vraie pour  $n-1$ , donnons-nous une fonction  $\varphi$  dans  $H_n$ . Alors, comme  $\Delta\varphi(a_nb_n) = 3\varphi(a_nb_n)$ , en appliquant la récurrence à la restriction de  $\varphi$  au  $(n-1)$ -triangle contenant  $a_n$ , on a

$$s_{n-1}(\varphi(a_n) + \varphi(a_nc_n)) + 2(1-s_{n-1})\varphi(a_nb_n) + \varphi(b_na_n) = 3\varphi(a_nb_n).$$

Comme  $\eta_n$  est un isomorphisme, il existe un unique  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{C}^3$  tel que, pour tout  $\varphi$  dans  $H_n$ , on ait  $\varphi(a_nb_n) = x\varphi(a_n) + y\varphi(b_n) + z\varphi(c_n)$ . Comme  $\eta_n$  est  $\mathfrak{S}$ -équivariant, on a, pour tout  $\varphi$  dans  $H_n$ ,  $\varphi(b_na_n) = x\varphi(b_n) + y\varphi(a_n) + z\varphi(c_n)$  et  $\varphi(a_nc_n) = x\varphi(a_n) + y\varphi(c_n) + z\varphi(b_n)$ . Il vient

$$\begin{aligned} s_{n-1}(1+x) + 2(1-s_{n-1})x + y &= 3x \\ s_{n-1}z + 2(1-s_{n-1})y + x &= 3y \\ s_{n-1}y + 2(1-s_{n-1})z + z &= 3z. \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on obtient  $x = t_n$ ,  $y = 2u_n$  et  $z = u_n$ . Enfin, par récurrence, on a

$$\begin{aligned} \varphi(d_n) + \varphi(e_n) &= s_{n-1}(\varphi(a_nb_n) + \varphi(a_nc_n)) + 2(1-s_{n-1})\varphi(a_n) \\ &= 3s_{n-1}u_n(\varphi(b_n) + \varphi(c_n)) + 2(1-s_{n-1} + s_{n-1}t_n)\varphi(a_n), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque  $3s_{n-1}u_n = s_n = s_{n-1}(1-t_n)$ .

Alors, si  $\psi = \mathbb{E}(\varphi|\theta_{n-1})$ , on a, d'après le lemme 9.4, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_{n-1}$ ,  $\psi(p) = \frac{1}{3} \sum_{\theta_{n-1}(q)=p} \varphi(q)$ . Comme  $\theta_{n-1}$  induit un isomorphisme de graphes de chacun des  $(n-1)$ -triangles de  $\mathcal{T}_n$  dans  $\mathcal{T}_{n-1}$ , on en déduit que  $\psi$  appartient à  $H_{n-1}$  et que, en particulier, d'après le lemme 9.1, si  $\eta_n(\varphi)$  est dans  $\mathbb{C}_0^3$ , on a

$$\begin{aligned} \psi(a_n) &= \frac{1}{3}(\varphi(a_n) + \varphi(b_n a_n) + \varphi(c_n a_n)) \\ &= \frac{1}{3}((1 + 4u_n)\varphi(a_n) + (t_n + u_n)(\varphi(b_n) + \varphi(c_n))) \\ &= \frac{1 + 4u_n - t_n - u_n}{3}\varphi(a_n) = \frac{2}{3s_{n-1} + 5}\varphi(a_n), \end{aligned}$$

où, pour l'avant-dernière égalité, on a utilisé la relation  $\varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) = 0$ . Par  $\mathfrak{S}$ -équivariance, on a la formule analogue aux autres sommets de  $\mathcal{T}_n$  et, donc,  $\eta_{n-1}(\psi) = \frac{2}{3s_{n-1} + 5}\eta_n(\varphi)$ .  $\square$

**Corollaire 10.6.** *Soit  $\varphi$  dans  $L^\infty(\bar{\Gamma}, \mu)$  tel que  $\bar{\Delta}\varphi = 3\varphi$  et que  $\sum_{s \in \mathfrak{S}} \varphi \circ s = 0$ . On a  $\varphi = 0$ .*

*Démonstration.* Pour tout entier  $n \geq 1$ , posons  $\varphi_n = \mathbb{E}(\varphi|\theta_n)$ . D'après le lemme 10.4, on a  $\varphi_n \in H_n$ . Comme  $\sum_{s \in \mathfrak{S}} \varphi \circ s = 0$ , on a  $\eta_n(\varphi_n) \in \mathbb{C}_0^3$ . Par conséquent, si  $n \geq 2$ , d'après le lemme 10.5, comme  $\varphi_{n-1} = \mathbb{E}(\varphi_n|\theta_{n-1})$ , on a  $\eta_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \frac{2}{3s_{n-1} + 5}\eta_n(\varphi_n)$ . Or, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\|\varphi_n\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$  et, comme  $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $\prod_{n=1}^\infty \frac{2}{3s_n + 5} = 0$ . Par conséquent, on a nécessairement, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\eta_n(\varphi_n) = 0$ , donc, d'après le lemme 10.5,  $\varphi_n = 0$ , et, d'après le lemme 9.4,  $\varphi = 0$ .  $\square$

Nous pouvons alors décrire les vecteurs propres de valeur propre 3 dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$  :

**Lemme 10.7.** *Soit  $\varphi$  dans  $L^1(\bar{\Gamma}, \mu)$  tel que  $\bar{\Delta}\varphi = 3\varphi$ . La fonction  $\varphi$  est constante  $\mu$ -presque partout.*

*Démonstration.* On peut supposer que  $\varphi$  est à valeurs réelles. Ramenons-nous alors au cas où  $\varphi$  est positive. Comme  $\bar{\Delta}$  est positif, on a  $\bar{\Delta}|\varphi| \geq |\bar{\Delta}\varphi| = 3|\varphi|$  et, donc, comme  $\bar{\Delta}$  est de norme  $\leq 3$ ,  $\bar{\Delta}|\varphi| = 3|\varphi|$ . Quitte à étudier les fonctions  $|\varphi| - \varphi$  et  $|\varphi| + \varphi$ , on peut donc supposer qu'on a  $\varphi \geq 0$ . Posons  $\psi = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \varphi \circ s$ . La mesure  $\lambda = \psi\mu$  est  $\mathfrak{S}$ -invariante et on a  $\bar{\Delta}^*\lambda = 3\lambda$ . D'après le lemme 10.3,  $\lambda$  est proportionnelle à  $\mu$ , c'est-à-dire que  $\psi$  est constante  $\mu$ -presque partout. En particulier,  $\psi$  est dans  $L^\infty(\bar{\Gamma}, \mu)$ .

Comme on a  $0 \leq \varphi \leq \psi$ ,  $\varphi$  est dans  $L^\infty(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Alors, d'après le corollaire 10.6, on a  $\varphi - \frac{1}{6}\psi = 0$ .  $\square$

Pour étendre ce résultat à toutes les mesures complexes sur  $\bar{\Gamma}$ , nous utiliserons un lemme général sans doute classique. Soit  $X$  un espace métrique compact. On munit l'espace  $\mathcal{C}^0(X)$  de la topologie de la convergence uniforme. Si  $\lambda$  est une mesure complexe borélienne sur  $X$ , rappelons que la variation totale  $|\lambda|$  de  $\lambda$  est la mesure borélienne positive et finie sur  $X$  telle que, pour toute fonction continue positive  $g$  sur  $X$ , on ait

$$\int_X g d|\lambda| = \sup_{\substack{h \in \mathcal{C}^0(X) \\ \|h\|_\infty \leq 1}} \left| \int_X gh d\lambda \right|$$

(on pourra se référer à [2, Chapter 6]). En particulier,  $|\lambda|$  est la plus petite mesure de Radon positive telle que, pour toute fonction continue positive  $g$  sur  $X$ , on ait  $|\int_X g d\lambda| \leq \int_X g d|\lambda|$ .

**Lemme 10.8.** *Soient  $X$  un espace métrique compact et  $P$  un opérateur positif de norme  $\leq 1$  sur l'espace des fonctions continues sur  $X$ . Pour toute mesure complexe borélienne  $\lambda$  sur  $X$ , on a  $|P^*\lambda| \leq P^*|\lambda|$ . En particulier, si  $P^*\lambda = \lambda$ , on a  $P^*|\lambda| = |\lambda|$ .*

*Démonstration.* Pour toute fonction continue positive  $g$  sur  $X$ , on a  $Pg \geq 0$ , donc  $|\int_X Pg d\lambda| \leq \int_X Pg d|\lambda|$ . Comme la mesure  $P^*|\lambda|$  est positive, il vient  $|P^*\lambda| \leq P^*|\lambda|$ . Si  $P^*\lambda = \lambda$ , on a  $|\lambda| \leq P^*|\lambda|$ , d'où l'égalité, puisque  $P$  est de norme 1.  $\square$

Nous en déduisons enfin la

**Proposition 10.9.** *Soit  $\lambda$  une mesure complexe borélienne sur  $\bar{\Gamma}$  telle que  $\bar{\Delta}^*\lambda = 3\lambda$ . On a  $\lambda = \lambda(\bar{\Gamma})\mu$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $\lambda$  est à valeurs réelles. D'après le lemme 10.8, appliqué à l'opérateur  $\frac{1}{3}\bar{\Delta}$ , on a  $\bar{\Delta}^*|\lambda| = 3|\lambda|$  et, donc, quitte à étudier les mesures  $|\lambda| - \lambda$  et  $|\lambda| + \lambda$ , on peut supposer que  $\lambda$  est positive. Alors, d'après le lemme 10.3, la mesure  $\sum_{s \in \mathfrak{S}} s_*\lambda$  est proportionnelle à  $\mu$ . Comme on a  $0 \leq \lambda \leq \sum_{s \in \mathfrak{S}} s_*\lambda$ ,  $\lambda$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ . D'après le lemme 10.7,  $\lambda$  est donc proportionnelle à  $\mu$ .  $\square$

## 11 Spectre et mesures spectrales de $\bar{\Gamma}$

Nous allons à présent aborder l'étude spectrale de l'opérateur  $\bar{\Gamma}$ . Commençons par remarquer que, comme dans le lemme 3.1, on a le

**Lemme 11.1.** *On a  $(\bar{\Delta}^2 - \bar{\Delta} - 3)\bar{\Pi}^* = \bar{\Pi}^*\bar{\Delta}$  et  $\bar{\Pi}(\bar{\Delta}^2 - \bar{\Delta} - 3) = \bar{\Delta}\bar{\Pi}$ .*

Rappelons que nous avons noté  $\alpha$  l'application qui, à un point  $p$  de  $\bar{\Gamma}$  associe le voisin de  $p$  qui n'appartient pas au 1-triangle contenant  $p$ . Comme dans la section 3, on déduit du lemme 11.1 le

**Corollaire 11.2.** *Le spectre de  $\bar{\Delta}$  est la réunion de  $\Lambda$  et de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $-2$  est l'espace des fonctions  $\varphi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  telles que  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et que  $\varphi \circ \alpha = -\varphi$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $0$  est l'espace des fonctions  $\varphi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  telles que  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et que  $\varphi \circ \alpha = \varphi$ .*

*Démonstration.* Soient, comme dans le corollaire 3.6,  $K = \bar{\Pi}^*L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $H$  le sous-espace fermé de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  engendré par  $K$  et par  $\bar{\Delta}K$ . D'après le lemme 11.1, on a  $f(\bar{\Delta})K \subset K$  et, comme  $\bar{\Pi}^*$  est une isométrie de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  dans  $K$ , le spectre de  $f(\bar{\Delta})$  dans  $K$  est égal au spectre de  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Nous allons chercher à appliquer le lemme 3.3 à l'opérateur  $\bar{\Delta}$  dans  $H$ . Pour cela, montrons que  $\bar{\Delta}^{-1}K \cap K$  est réduit aux fonctions constantes. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  telles que  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi = \bar{\Pi}^*\psi$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , posons  $\varphi_n = \mathbb{E}(\varphi|\theta_n)$  et  $\psi_n = \mathbb{E}(\psi|\theta_n)$ . D'après les lemmes 9.4 et 10.4, pour tout  $p$  dans  $\mathcal{T}_{n+1} - \partial\mathcal{T}_{n+1}$ , on a  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi_n(p) = \bar{\Pi}^*\psi_n(p)$ . En raisonnant comme dans la démonstration du corollaire 3.6, on en déduit que, pour tout  $q$  dans  $\mathcal{T}_n$ ,  $\varphi_n$  est constante sur les voisins de  $q$ . Comme tout point de  $\mathcal{T}_n$  est contenu dans un triangle et que  $\mathcal{T}_n$  est connexe,  $\varphi_n$  est constante. Comme, d'après le lemme 9.4, on a  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ ,  $\varphi$  est constante. L'espace  $\bar{\Delta}^{-1}K \cap K$  est donc égal à la droite des fonctions constantes. D'après les lemmes 3.3 et 11.1, le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans  $H$  est donc égal à la réunion de  $\{3\}$  et de l'image inverse par  $f$  du spectre de  $\bar{\Delta}$  dans l'espace des fonctions d'intégrale nulle dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ .

Par ailleurs, en raisonnant comme dans le lemme 3.7, on voit que l'orthogonal  $L$  de  $H$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est la somme directe de l'espace  $L_{-2}$  des éléments  $\varphi$  de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  tels que  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et que  $\varphi \circ \alpha = -\varphi$  et de l'espace  $L_0$  des éléments  $\varphi$  de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  tels que  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et que  $\varphi \circ \alpha = \varphi$ . On a  $\bar{\Delta} = -2$  sur  $L_{-2}$  et  $\bar{\Delta} = 0$  sur  $L_0$ . En raisonnant comme dans le lemme 3.8 et en utilisant le lemme 10.1, on voit que ces deux espaces ne sont pas réduits à  $\{0\}$ , puisqu'ils

contiennent des fonctions triangulaires. Comme dans la démonstration du corollaire 3.9, on en déduit que le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est égal à la réunion de  $\Lambda$  et de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .

Enfin, comme dans la démonstration du lemme 3.7, il nous reste à montrer que  $L_{-2}$  et  $L_0$  sont exactement les espaces propres de  $\bar{\Delta}$  associés aux valeurs propres  $-2$  et  $0$ , c'est-à-dire que  $\bar{\Delta}$  ne possède pas de vecteur propre de valeur propre  $-2$  ou  $0$  dans  $H$ . Soit  $\varphi$  dans  $H$  tel que  $\bar{\Delta}\varphi = -2\varphi$ . D'après le lemme 11.1, on a  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}\varphi = 3\bar{\Pi}\varphi$  et, donc, d'après le lemme 10.7,  $\bar{\Pi}\varphi$  est constante. Comme  $\varphi$  est orthogonale aux fonctions constantes, on a  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi = -2\bar{\Pi}\varphi = 0$ . Comme  $\varphi$  est dans  $H$ , il vient  $\varphi = 0$ . De même, si  $\varphi$  est dans  $H$  et si  $\bar{\Delta}\varphi = 0$ , on a  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}\varphi = -3\bar{\Pi}\varphi$ . Or, par un calcul immédiat,  $-3$  n'appartient pas au spectre de  $\bar{\Delta}$ . Il vient  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et, donc,  $\varphi = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Nous avons aussi un analogue du lemme 4.1 :

**Lemme 11.3.** *On a  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\bar{\Pi}^* = 2 + \frac{1}{3}\bar{\Delta}$  et, donc, pour tous  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ ,*

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi, \bar{\Pi}^*\psi \rangle &= 2 \langle \varphi, \psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \bar{\Delta}\varphi, \psi \rangle \\ &= 2 \langle \bar{\Pi}^*\varphi, \bar{\Pi}^*\psi \rangle + \frac{1}{3} \langle (\bar{\Delta}^2 - \bar{\Delta} - 3) \bar{\Pi}^*\varphi, \bar{\Pi}^*\psi \rangle. \end{aligned}$$

Comme dans la section 4, on en déduit le

**Corollaire 11.4.** *Soient  $\varphi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ ,  $\mu$  la mesure spectrale de  $\varphi$  pour  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  et  $\nu$  la mesure spectrale de  $\bar{\Pi}^*\varphi$  pour  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Alors, on a  $\nu(\frac{1}{2}) = 0$  et, si, pour tout  $x \neq \frac{1}{2}$ , on pose  $\tau(x) = \frac{x(x+2)}{3(2x-1)}$ , on a  $\nu = L_{f, \tau}^*\mu$ .*

## 12 Fonctions propres dans $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$

Dans cette section, nous allons reprendre le plan de la section 5, pour décrire les espaces propres de  $\bar{\Delta}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Comme dans la section 5, en utilisant les lemmes 11.1 et 11.3, on montre l'analogue suivant du lemme 5.1 :

**Lemme 12.1.** *Soit  $H$  le sous-espace fermé de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  engendré par l'image de  $\bar{\Pi}^*$  et par celle de  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*$ . Alors, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R} - \{0, -2\}$ ,  $x$  est valeur propre de  $\bar{\Delta}$  dans  $H$  si et seulement si  $y = f(x)$  est valeur propre de  $\bar{\Delta}$  dans*



$L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Dans ce cas, l'application  $\bar{R}_x$  qui, à une fonction propre  $\varphi$  de valeur propre  $y$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , associe  $(x-1)\bar{\Pi}^*\varphi + \bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi$  induit un isomorphisme entre l'espace propre de valeur propre  $y$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  et l'espace propre de valeur propre  $x$  dans  $H$  et, pour tout  $\varphi$ , on a  $\|\bar{R}_x\varphi\|_2^2 = \frac{1}{3}x(x+2)(2x-1)\|\varphi\|_2^2$ .

Pour décrire les fonctions propres de valeur propre dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , nous allons raisonner comme dans la section 5. Pour cela, remarquons à nouveau que, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'espace des arêtes extérieures aux  $n$ -triangles de  $\bar{\Gamma}$  s'identifie de manière naturelle à  $\bar{\Theta}$ . Si  $\varphi$  est une fonction sur  $\bar{\Gamma}$  qui est constante sur les arêtes extérieures aux  $n$ -triangles, on note  $\bar{P}_n(\varphi)$  la fonction qui, en tout point de  $\bar{\Theta}$ , a pour valeur la valeur de  $\varphi$  sur l'arête extérieure aux  $n$ -triangles de  $\bar{\Gamma}$  associée. Par ailleurs, on note encore  $\bar{\Delta}$  l'opérateur qui, à une fonction  $\psi$  sur  $\bar{\Theta}$ , associe la fonction dont la valeur en un point  $p$  de  $\bar{\Theta}$  est  $\sum_{q \sim p} \psi(q)$ . Cet opérateur vérifie  $\bar{\Delta}^*\lambda = 4\lambda$  et il est auto-adjoint de norme 4 dans  $L^2(\bar{\Theta}, \lambda)$ , où  $\lambda$  est la mesure sur  $\bar{\Theta}$  introduite à la fin de la section 9.

**Lemme 12.2.** *L'application  $\bar{P}_2$  induit un isomorphisme d'espaces de Banach de l'espace propre de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  associé à la valeur propre 0 dans  $L^2(\bar{\Theta}, \lambda)$ . On note  $\bar{Q}_0$  sa réciproque. Pour tout  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Theta}, \lambda)$ , on a  $\|\bar{Q}_0\psi\|_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}^2 = \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2(\bar{\Theta}, \lambda)}^2 - \frac{1}{12}\langle \bar{\Delta}\psi, \psi \rangle_{L^2(\bar{\Theta}, \lambda)}$ .*

*Démonstration.* On raisonne comme dans le lemme 5.2 en utilisant la caractérisation des fonctions propres de valeur propre 0 donnée dans le corollaire 11.2. La formule se vérifie aisément sur les fonctions triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition et le cas général s'en déduit par densité.  $\square$

Rappelons que, pour  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , on a noté  $n(x)$  l'entier  $n$  tel que  $f^n(x) = 0$  et

$$\kappa(x) = \prod_{k=0}^{n(x)-1} \frac{f^k(x)(2f^k(x) - 1)}{f^k(x) + 2}.$$

Des lemmes 12.1 et 12.2, on déduit l'analogie suivant de la proposition 5.3 :

**Proposition 12.3.** *Soit  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Les fonctions propres de valeur propre  $x$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  sont constantes sur les arêtes extérieures aux  $(n(x)+2)$ -triangles dans  $\bar{\Gamma}$ . L'application  $\bar{P}_{n(x)+2}$  induit un isomorphisme d'espaces de Banach de l'espace propre de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  associé à la valeur propre  $x$  dans*

$L^2(\bar{\Theta}, \lambda)$ . On note  $\bar{Q}_x$  sa réciproque. Alors, pour tout  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Theta}, \lambda)$ , on a

$$\|\bar{Q}_x \psi\|_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}^2 = \frac{\kappa(x)}{3^{n(x)}} \left( \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\bar{\Theta}, \lambda)}^2 - \frac{1}{12} \langle \bar{\Delta} \psi, \psi \rangle_{L^2(\bar{\Theta}, \lambda)} \right).$$

**Corollaire 12.4.** *Pour tout  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ , l'espace propre associé à  $x$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition.*

Comme dans la section 5, la description des espaces propres associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$  est moins précise.

Commençons par le cas de la valeur propre  $-2$ . Nous allons avoir besoin de renseignements supplémentaires sur les fonctions triangulaires qui sont vecteurs propres de valeur propre  $-2$ . Pour cela, donnons-nous un entier  $n \geq 1$  et un  $n$ -triangle  $\mathcal{S}$  et notons, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $E_{\mathcal{S}}$  l'espace des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathcal{S}$  telles que  $\Pi\varphi = 0$  et que, pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$  qui ne soit pas un sommet, si  $q$  est le voisin de  $p$  n'appartenant pas au triangle contenant  $p$ , on a  $\varphi(q) = -\varphi(p)$ . Si  $\mathcal{S}$  est  $\mathcal{T}_n$ , on note  $E_n$  pour  $E_{\mathcal{T}_n}$ . D'après les lemmes 9.4 et 9.5 et le corollaire 11.2, si  $\varphi$  est un élément de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  tel que  $\bar{\Delta}\varphi = -2\varphi$ , pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $\mathbb{E}(\varphi|\theta_n) \in E_n$ . En raisonnant comme dans le lemme 5.5, on montre le

**Lemme 12.5.** *Soient  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{S}$  un  $n$ -triangle de sommets  $p, q$  et  $r$ , et  $\varphi$  dans  $E_{\mathcal{S}}$ . On a  $\varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(r) = 0$ .*

L'espace  $\mathbb{C}_0^3 = \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3 | s + t + u = 0\}$  est stable par l'action de  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathbb{C}^3$ . On le munit de la norme hermitienne  $\mathfrak{S}$ -invariante  $\|\cdot\|_0$  telle que, pour tout  $(s, t, u)$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , on ait  $\|(s, t, u)\|_0^2 = \frac{1}{3}(|s|^2 + |t|^2 + |u|^2)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\rho_n$  l'application linéaire  $\mathfrak{S}$ -équivariante  $E_n \rightarrow \mathbb{C}_0^3$ ,  $\varphi \mapsto (\varphi(a_n), \varphi(b_n), \varphi(c_n))$ ,  $F_n$  le noyau de  $\rho_n$  et  $G_n$  l'orthogonal de  $F_n$  dans  $E_n$  pour la norme de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . D'après le lemme 10.1, les éléments de  $F_n$  sont des vecteurs propres de valeur propre  $-2$  de  $\bar{\Delta}$ .

**Lemme 12.6.** *Soit  $n \geq 1$ . On a  $\dim F_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$ . L'application  $\rho_n$  est surjective et, pour tout  $\varphi$  dans  $G_n$ , on a  $\|\varphi\|_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \|\rho_n(\varphi)\|_0^2$ . Enfin, si  $n \geq 2$  et si  $\psi = \mathbb{E}(\varphi|\theta_{n-1})$ ,  $\psi$  appartient à  $G_{n-1}$  et  $\rho_{n-1}(\psi) = \frac{2}{3}\rho_n(\varphi)$ .*

*Démonstration.* Soient  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{S}$  un  $n$ -triangle et  $p$  et  $q$  des sommets distincts de  $\mathcal{S}$ . Définissons une fonction  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}$  sur  $\mathcal{S}$  de la façon suivante. Si  $n = 1$ , on pose  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}(p) = 1$  et  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}(q) = -1$  et on dit que  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}$  est nulle au troisième point de  $\mathcal{S}$ . Si  $n \geq 2$ , notons toujours  $pq$  et  $qp$  les points décrits dans le corollaire 2.6 : le point  $pq$  appartient au  $(n-1)$ -triangle  $\mathcal{P}$  de sommet  $p$

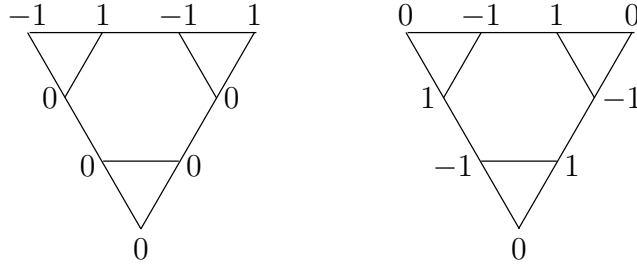


FIG. 12 – Les fonctions  $\varphi_2^{a_2, b_2}$  et  $\psi_2$

dans  $\mathcal{S}$ , le point  $qp$  appartient au  $(n-1)$ -triangle  $\mathcal{Q}$  de sommet  $q$  dans  $\mathcal{S}$  et les points  $pq$  et  $qp$  sont voisins. On définit alors  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}$  comme la fonction dont la restriction à  $\mathcal{P}$  est  $\varphi_{\mathcal{P}}^{p,pq}$ , dont la restriction à  $\mathcal{Q}$  est  $\varphi_{\mathcal{Q}}^{qp,q}$  et dont la restriction au troisième  $(n-1)$ -triangle de  $\mathcal{S}$  est nulle. On vérifie aisément par récurrence que  $\varphi_{\mathcal{S}}^{p,q}$  appartient à  $E_{\mathcal{S}}$ . Si  $\mathcal{S} = \mathcal{T}_n$ , on note  $\varphi_n^{p,q}$  pour  $\varphi_{\mathcal{T}_n}^{p,q}$ . Comme on a  $\rho_n(\varphi_n^{a_n, b_n}) = (1, -1, 0)$  et  $\rho_n(\varphi_n^{a_n, c_n}) = (1, 0, -1)$ , l'application  $\rho_n$  est surjective.

Pour  $n \geq 2$ , notons  $\psi_n$  la fonction sur  $\mathcal{T}_n$  dont la restriction au  $(n-1)$ -triangle  $\mathcal{A}_n$  (resp.  $\mathcal{B}_n$ , resp.  $\mathcal{C}_n$ ) de sommet  $a_n$  (resp.  $b_n$ , resp.  $c_n$ ) est égale à  $\varphi_{\mathcal{A}_n}^{a_n b_n, a_n c_n}$  (resp.  $\varphi_{\mathcal{B}_n}^{b_n c_n, b_n a_n}$ , resp.  $\varphi_{\mathcal{C}_n}^{c_n a_n, c_n b_n}$ ). Alors, on vérifie aisément que  $\psi_n$  appartient à  $F_n$ .

Ces fonctions sont représentées à la figure 12.

Établissons par récurrence sur  $n \geq 1$  les formules du lemme sur la dimension de  $F_n$  et la norme des éléments de  $G_n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $F_1 = \{0\}$  et l'application  $\rho_1$  est un isomorphisme, si bien que la formule sur les normes découle du lemme 9.3. Supposons donc  $n \geq 2$  et les formules démontrées pour  $n-1$ . Nous allons construire explicitement l'inverse de  $\rho_n$  en fonction de celui de  $\rho_{n-1}$ . Pour tout triangle  $\mathcal{S}$ , on désigne par  $F_{\mathcal{S}}$  l'ensemble des éléments de  $E_{\mathcal{S}}$  nuls aux sommets de  $\mathcal{S}$  et par  $G_{\mathcal{S}}$  l'orthogonal de  $F_{\mathcal{S}}$  dans  $E_{\mathcal{S}}$  pour le produit scalaire de  $\ell^2(\mathcal{S})$ . Pour tout  $(s, t, u)$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , notons  $\tau(s, t, u)$  l'unique fonction sur  $\mathcal{T}_n$  qui vaut  $s$  en  $a_n$ ,  $t$  en  $b_n$ ,  $u$  en  $c_n$ ,  $\frac{t-s}{3}$  en  $a_n b_n$ ,  $\frac{u-s}{3}$  en  $a_n c_n$ ,  $\frac{s-t}{3}$  en  $b_n a_n$ ,  $\frac{u-t}{3}$  en  $b_n c_n$ ,  $\frac{s-u}{3}$  en  $c_n a_n$  et  $\frac{t-u}{3}$  en  $c_n b_n$  et dont la restriction à  $\mathcal{A}_n$  (resp.  $\mathcal{B}_n$ , resp.  $\mathcal{C}_n$ ) est dans  $G_{\mathcal{A}_n}$  (resp.  $G_{\mathcal{B}_n}$ , resp.  $G_{\mathcal{C}_n}$ ). Alors, clairement,  $\tau(s, t, u)$  appartient à  $E_n$  et  $\rho_n(\tau(s, t, u)) = (s, t, u)$ . Par ailleurs, on a,

d'après le lemme 9.3 et par récurrence,

$$\begin{aligned}
\langle \tau(s, t, u), \psi_n \rangle_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)} &= \frac{1}{3^n} \left( \left\langle \tau(s, t, u), \varphi_{\mathcal{A}_n}^{a_n b_n, a_n c_n} \right\rangle_{\ell^2(\mathcal{A}_n)} \right. \\
&\quad + \left\langle \tau(s, t, u), \varphi_{\mathcal{B}_n}^{b_n c_n, b_n a_n} \right\rangle_{\ell^2(\mathcal{B}_n)} \\
&\quad \left. + \left\langle \tau(s, t, u), \varphi_{\mathcal{C}_n}^{c_n a_n, c_n b_n} \right\rangle_{\ell^2(\mathcal{C}_n)} \right) \\
&= \frac{1}{3} \frac{5^{n-2}}{9^{n-1}} ((t-s) - (u-s) + (u-t) - (s-t) \\
&\quad + (s-u) - (t-u)) = 0
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie aisément, grâce à un calcul de produit scalaire analogue que, si  $\varphi$  est un élément de  $E_n$  orthogonal à  $\psi_n$  dont la restriction à  $\mathcal{A}_n$  (resp.  $\mathcal{B}_n$ , resp.  $\mathcal{C}_n$ ) est dans  $G_{\mathcal{A}_n}$  (resp.  $G_{\mathcal{B}_n}$ , resp.  $G_{\mathcal{C}_n}$ ), alors  $\varphi$  appartient à l'image de  $\tau$ . En particulier, l'espace  $G_n$  est contenu dans l'image de  $\tau$ . Comme ces deux espaces sont de dimension 2, ils coïncident et  $\tau$  est l'inverse de  $\rho_n$ . En particulier,  $F_n$  est engendré par  $\psi_n$  et des éléments nuls aux sommets des  $(n-1)$ -triangles, si bien que  $\dim F_n = 3 \dim F_{n-1} + 1$ , d'où le calcul de la dimension, par récurrence. Par ailleurs, à nouveau d'après le lemme 9.3 et par récurrence, pour tout  $\varphi$  dans  $G_n$ , si  $\rho_n(\varphi) = (s, t, u)$ , on a, vue la définition de  $\tau$ ,

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}^2 &= \frac{5^{n-2}}{9^{n-1}} \left( |s|^2 + |t|^2 + |u|^2 + 2 \left| \frac{s-t}{3} \right|^2 + 2 \left| \frac{t-u}{3} \right|^2 + 2 \left| \frac{s-u}{3} \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{3} \frac{5^{n-1}}{9^{n-1}} (|s|^2 + |t|^2 + |u|^2)
\end{aligned}$$

(sans oublier, pour la dernière égalité, que  $s+t+u=0$ ). La formule concernant les normes en découle par récurrence.

Enfin, pour  $n \geq 2$ , donnons-nous  $\varphi$  dans  $G_n$  et posons  $\psi = \mathbb{E}(\varphi | \theta_{n-1})$ . Comme dans la démonstration du lemme 10.5, on déduit du lemme 9.4 et du fait que  $\theta_{n-1}$  induit des isomorphismes entre les  $(n-1)$ -triangles de  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{T}_{n-1}$  que, comme  $\varphi$  appartient à  $E_n$ ,  $\psi$  appartient à  $E_{n-1}$ . Comme les éléments de  $F_{n-1}$  sont nuls aux sommets des  $(n-1)$ -triangles, ils appartiennent aussi à  $F_n$ , donc ils sont orthogonaux à  $\varphi$ , si bien que  $\psi$  appartient à  $G_{n-1}$ . D'après les lemmes 9.1 et 9.4, on a  $\psi(a_n) = \frac{1}{3}(\varphi(a_n) + \varphi(b_n a_n) + \varphi(c_n a_n))$  et, donc, d'après les formules ci-dessus, si  $\rho_n(\varphi) = (s, t, u)$ , on a  $\psi(a_n) = \frac{1}{3}(s + \frac{s-t}{3} + \frac{s-u}{3}) = \frac{2}{3}s$  et  $\rho_{n-1}(\psi) = \frac{2}{3}\rho_n(\varphi)$ .  $\square$

Nous pouvons alors décrire l'espace propre de valeur propre  $-2$  de  $\bar{\Delta}$  :

**Lemme 12.7.** *L'espace propre associé à la valeur propre  $-2$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition.*

*Démonstration.* Comme, d'après le lemme 12.7, pour tout  $n \geq 1$ , l'espace  $F_n$  est de dimension  $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$  et que, d'après le lemme 10.1, ses éléments sont des fonctions propres de valeur propre  $-2$ , l'espace propre associé à la valeur propre  $-2$  est de dimension infinie.

Soit  $\varphi$  une fonction propre de valeur propre  $-2$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  qui soit orthogonale à toutes les fonctions propres triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition. Montrons que  $\varphi$  est nulle. Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $\varphi_n = \mathbb{E}(\varphi | \theta_n)$ . D'après le corollaire 11.2, on a  $\bar{\Pi}\varphi = 0$  et  $\varphi \circ \alpha = -\varphi$  et, donc, d'après les lemmes 9.4 et 9.5, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n$  appartient à  $E_n$ . Comme  $\varphi$  est orthogonale aux éléments de  $F_n$ ,  $\varphi_n$  appartient à  $G_n$ . Si  $n \geq 2$ , comme  $\varphi_{n-1} = \mathbb{E}(\varphi_n | \theta_{n-1})$ , d'après le lemme 12.7, on a  $\rho_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \frac{2}{3}\rho_n(\varphi_n)$ . Il existe donc  $v$  dans  $\mathbb{C}_0^3$  tel que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $\rho_n(\varphi_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} v$ , si bien que, toujours d'après le lemme 12.7,

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \|\rho_n(\varphi_n)\|_0^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \|v\|_0^2.$$

Comme, d'après le lemme 9.4, on a  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , il vient nécessairement  $v = 0$ , donc, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n = 0$  et  $\varphi = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Des lemmes 12.1 et 12.7, on déduit par récurrence le

**Corollaire 12.8.** *Pour tout  $x$  dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2)$ , l'espace propre associé à la valeur propre  $x$  est de dimension infinie et engendré par des fonctions triangulaires nulles aux sommets de leur triangle de définition.*

## 13 Décomposition spectrale de $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est la somme directe orthogonale de l'espace des fonctions constantes, des espaces propres associés aux éléments de l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  et des espaces cycliques engendrés par les fonctions 1-triangulaires  $\varphi$  telles que  $\bar{\Pi}\varphi = 0$ .

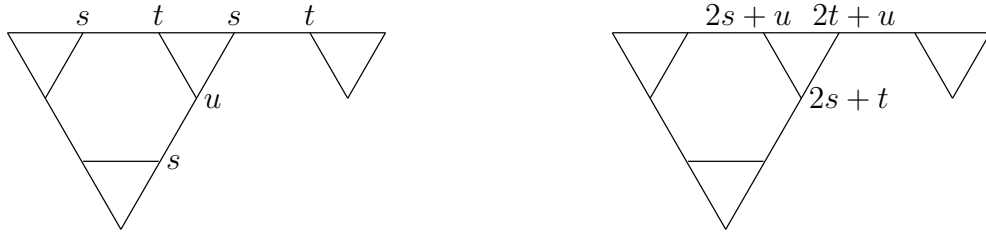


FIG. 13 – Valeurs de  $\varphi$  et de  $\bar{\Delta}\varphi$

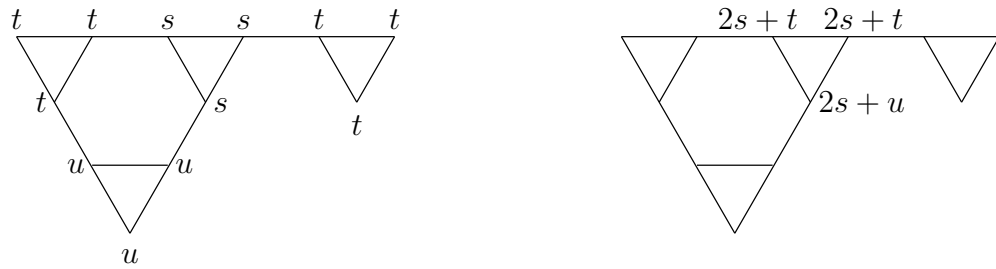


FIG. 14 – Valeurs de  $\bar{\Pi}^*\varphi$  et de  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi$

Comme à la section 12, on note  $E_1$  l'espace de ces fonctions. Commençons par décrire leurs espaces cycliques.

**Lemme 13.1.** *Soit  $\varphi$  dans  $E_1$ . On a  $(\bar{\Delta} + 2)\varphi = (\bar{\Delta} - 1)\bar{\Pi}^*\varphi$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi = (1 + \frac{1}{3}\bar{\Delta})\varphi$ .*

*Démonstration.* Soit  $(s, t, u) = (\varphi(a_1), \varphi(b_1), \varphi(c_1))$ . On a, par définition,  $s + t + u = 0$ . Soit  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ . Quitte à faire agir le groupe  $\mathfrak{S}$ , on peut supposer que  $\bar{\Pi}p$  appartient au bréchet  $B_0$  de la section 8. Alors, les valeurs de  $\varphi$  et de  $\bar{\Delta}\varphi$  sur le 1-triangle contenant  $p$  et sur ses voisins sont décrites par la figure 13. De même, les valeurs de  $\bar{\Pi}^*\varphi$  et  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi$  sur le 1-triangle contenant  $p$  et sur ses voisins sont représentées par la figure 14. Si  $\theta_1(p) = a_1$  ou  $\theta_1(p) = b_1$ , on a donc  $(\bar{\Delta} + 2)\varphi(p) = 2s + 2t + u = s + t = (\bar{\Delta} - 1)\bar{\Pi}^*\varphi(p)$ ; si  $\theta_1(p) = c_1$ , on a  $(\bar{\Delta} + 2)\varphi(p) = 2s + t + 2u = s + u = (\bar{\Delta} - 1)\bar{\Pi}^*\varphi(p)$ . Il vient bien  $(\bar{\Delta} + 2)\varphi = (\bar{\Delta} - 1)\bar{\Pi}^*\varphi$ .

Par définition, on a  $\bar{\Pi}\varphi = 0$ , si bien que, en appliquant  $\bar{\Pi}$  à l'identité précédente, il vient  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi = \bar{\Pi}(\bar{\Delta} + 2)\varphi = \bar{\Pi}\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\varphi - \varphi = (1 + \frac{1}{3}\bar{\Delta})\varphi$ , où, pour la dernière égalité, on a utilisé le lemme 11.3.  $\square$

Grâce au lemme 13.1, nous allons procéder comme dans la section 6 pour déterminer les mesures spectrales des éléments de  $E_1$ . Commençons par montrer que ces mesures ne chargent pas les points  $-2$  et  $0$ .

**Lemme 13.2.** *Soient  $\varphi$  dans  $E_1$  et  $\psi$  une fonction propre de valeur  $-2$  ou  $0$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . On a  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\psi$  est un vecteur propre de valeur propre  $0$ . D'après le corollaire 11.2, on a  $\bar{\Pi}\psi = 0$  et  $\psi \circ \alpha = \psi$  et, d'après le corollaire 12.4, on peut supposer que, pour un certain entier  $n \geq 2$ ,  $\psi$  est  $n$ -triangulaire, de valeur nulle aux sommets de  $\mathcal{T}_n$ . Soient  $p, q$  et  $r$  les sommets d'un 2-triangle  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}_n$  et soient  $pq, qp, pr, rp, qr$  et  $rq$  les autres points de  $\mathcal{S}$ , avec la convention du corollaire 2.6. Alors, on a  $\psi(qp) = \psi(pq)$  et  $\psi(rp) = \psi(pr)$ , donc  $\psi(p) + \psi(qp) + \psi(rp) = 0$  et, en utilisant les identités analogues sur les autres 1-triangles de  $\mathcal{S}$ , d'après le lemme 9.1, comme  $\varphi$  est 1-triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}} \overline{\varphi(s)} \psi(s) &= \overline{\varphi(p)} (\psi(p) + \psi(qp) + \psi(rp)) \\ &+ \overline{\varphi(q)} (\psi(q) + \psi(pq) + \psi(rq)) + \overline{\varphi(r)} (\psi(r) + \psi(pr) + \psi(qr)) = 0 \end{aligned}$$

et, donc, d'après le lemme 9.3,  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ .

Intéressons-nous à présent au cas de la valeur propre  $-2$ . Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $E_n$  et  $F_n$  comme à la section 12. Soit  $(s, t, u) = (\varphi(a_1), \varphi(b_1), \varphi(c_1))$ . Montrons par récurrence sur  $n$  que, si  $\psi$  appartient à  $E_n$ , on a

$$\sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi(p) \psi(p) = 2^{n-1} (s\psi(a_n) + t\psi(b_n) + u\psi(c_n)).$$

Pour  $n = 1$ , le résultat est trivial. Supposons  $n \geq 2$  et le résultat établi pour  $n$ . Alors, en appliquant la récurrence à la restriction de  $\psi$  au  $(n-1)$ -triangles de  $\mathcal{T}_n$ , on obtient, comme  $\varphi$  est 1-triangulaire, d'après le lemme 9.1,

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi(p) \psi(p) &= 2^{n-2} (\psi(a_n)s + \psi(a_nb_n)t + \psi(a_nc_n)u \\ &+ \psi(b_n)t + \psi(b_na_n)s + \psi(b_nc_n)u + \psi(c_n)u + \psi(c_na_n)s + \psi(c_nb_n)t). \end{aligned}$$

Or, on a  $\psi(a_nb_n) + \psi(b_na_n) = 0$  et, d'après le lemme 12.5,  $\psi(a_n) + \psi(a_nb_n) + \psi(a_nc_n) = 0$ , si bien que  $\psi(b_na_n) + \psi(c_na_n) = \psi(a_n)$ . En utilisant cette identité et les formules analogues aux autres sommets de  $\mathcal{T}_n$ , il vient

$$\sum_{p \in \mathcal{T}_n} \varphi(p) \psi(p) = 2^{n-1} (s\psi(a_n) + t\psi(b_n) + u\psi(c_n)),$$

ce qu'il fallait démontrer. En particulier, pour  $\psi$  dans  $F_n$ , on a, d'après le lemme 9.3,  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$  et, donc, d'après le lemme 12.7, ceci est encore vrai pour tout vecteur propre  $\psi$  de valeur propre  $-2$ .  $\square$

**Corollaire 13.3.** *Soient  $\varphi$  dans  $E_1$  et  $\psi$  une fonction propre associée à une valeur propre dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . On a  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 11.2 et les lemmes 12.1 et 13.2, il suffit de montrer que, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , si  $\psi$  est un vecteur propre de valeur propre  $x$  et si  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ , on a  $\langle \varphi, \bar{\Pi}^* \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{\Delta} \bar{\Pi}^* \psi \rangle = 0$ . Or, d'une part, par définition, on a  $\bar{\Pi} \varphi = 0$ , donc  $\langle \varphi, \bar{\Pi}^* \psi \rangle = 0$ . D'autre part, d'après le lemme 13.1, on a

$$\langle \varphi, \bar{\Delta} \bar{\Pi}^* \psi \rangle = \langle \bar{\Pi} \bar{\Delta} \varphi, \psi \rangle = \left\langle \varphi, \left(1 + \frac{1}{3} \bar{\Delta}\right) \psi \right\rangle = \left(1 + \frac{x}{3}\right) \langle \varphi, \psi \rangle = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Posons, pour tout  $x \neq -3$ ,  $j(x) = \frac{1}{3} \frac{3-x}{x+3}$  et, pour  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $\zeta(x) = \frac{1}{3} \frac{(x+3)(x-1)}{2x-1}$ . Comme pour le corollaire 6.3, nous déduisons du lemme 13.1 et du corollaire 11.4 le

**Corollaire 13.4.** *Soit  $\nu_\zeta$  l'unique probabilité borélienne sur  $\Lambda$  telle qu'on ait  $L_\zeta^* \nu_\zeta = \nu_\zeta$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $E_1$ , la mesure spectrale de  $\varphi$  est  $\|\varphi\|_2^2 j \nu_\zeta$ .*

*Démonstration.* Comme la démonstration de ce résultat est analogue à celle du corollaire 6.3, nous en reprenons seulement les grandes lignes. Soit  $\lambda$  la mesure spectrale de  $\varphi$ . D'après le lemme 13.2, on a  $\lambda(-2) = 0$ . Posons, pour  $x \notin \{-2, \frac{1}{2}\}$ ,  $\theta(x) = \frac{x(x-1)^2}{3(x+2)(2x-1)}$ . On a  $\theta = \frac{j}{j \circ f} \zeta$  et, d'après le corollaire 11.4 et le lemme 13.1,  $\lambda = L_\theta^* \lambda$ . D'après le lemme 9.3,  $\varphi$  est orthogonale aux fonctions constantes. Par conséquent, d'après le lemme 10.7, on a  $\lambda(3) = 0$ . De plus, d'après les corollaires 11.2 et 13.3, la mesure  $\lambda$  est concentrée sur  $\Lambda$ .

La fonction  $\zeta$  est strictement positive sur  $\Lambda$  et  $L_\zeta(1) = 1$ . D'après le lemme 6.2, il existe une unique probabilité borélienne  $\nu_\zeta$  sur  $\Lambda$  telle que  $L_\zeta^* \nu_\zeta = \nu_\zeta$ . En raisonnant comme dans la démonstration du corollaire 6.3, on montre que les mesures  $\lambda$  et  $j \nu_\zeta$  sont proportionnelles. Comme on a  $L_\zeta j = 1$ , il vient  $\lambda = \|\varphi\|_2^2 j \nu_\zeta$ .  $\square$

Notons toujours  $l$  la fonction  $x \mapsto x$  sur  $\Lambda$  et posons, pour  $x \neq 1$ ,  $m(x) = \frac{x+2}{x-1}$  et, pour  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $\xi(x) = \frac{1}{3} \frac{x(x-1)}{2x-1}$ . Notons  $\bar{\Phi}$  le sous-espace fermé de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  engendré par les éléments de  $E_1$  et par leurs images par les puissances de  $\bar{\Delta}$  et, comme à la section 12, désignons par  $\rho_1$  l'isomorphisme  $\mathfrak{S}$ -équivariant



de  $E_1$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ . Munissons toujours  $\mathbb{C}_0^3$  de la norme hermitienne  $\|\cdot\|_0$  égale à un tiers de la norme canonique et notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  le produit scalaire associé. D'après le lemme 9.3, l'application  $\rho_1$  est une isométrie. Identifions les espaces de Hilbert  $L^2(j\nu_\zeta, \mathbb{C}_0^3)$  et  $L^2(j\nu_\zeta) \otimes \mathbb{C}_0^3$  et, pour tout polynôme  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et pour tout  $v$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , posons  $\widehat{p \otimes v} = p(\bar{\Delta}) \rho_1^{-1}(v)$ . Nous avons un analogue de la proposition 6.4 :

**Proposition 13.5.** *L'application  $g \mapsto \hat{g}$  induit une isométrie  $\mathfrak{S}$ -équivariante de  $L^2(j\nu_\zeta, \mathbb{C}_0^3)$  dans  $\bar{\Phi}$ . Le sous-espace  $\bar{\Phi}$  est stable par les opérateurs  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{\Pi}$  et  $\bar{\Pi}^*$ . Pour tout  $g$  dans  $L^2(j\nu_\zeta, \mathbb{C}_0^3)$ , on a*

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}\hat{g} &= \widehat{lg} \\ \bar{\Pi}\hat{g} &= \widehat{L_\xi g} \\ \bar{\Pi}^*\hat{g} &= \widehat{m(g \circ f)}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ . L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_0^3 \times \mathbb{C}_0^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto \langle p(\bar{\Delta}) \rho_1^{-1}(v), \rho_1^{-1}(w) \rangle_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)}\end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire  $\mathfrak{S}$ -invariante. Comme la représentation de  $\mathfrak{S}$  dans  $\mathbb{C}_0^3$  est irréductible, cette forme sesquilinéaire est proportionnelle au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ . D'après le lemme 9.3 et le corollaire 13.4, pour  $v$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , on a

$$\langle p(\bar{\Delta}) \rho_1^{-1}(v), \rho_1^{-1}(v) \rangle_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)} = \|v\|_0^2 \int_{\bar{\Gamma}} p j d\nu_\zeta,$$

par conséquent, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , pour tous  $v$  et  $w$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , on a

$$\left\langle \widehat{p \otimes v}, \widehat{q \otimes w} \right\rangle_{L^2(\bar{\Gamma}, \mu)} = \langle v, w \rangle_0 \langle p, q \rangle_{L^2(j\nu_\zeta)}$$

et, donc, l'application  $g \mapsto \hat{g}$  induit une isométrie de  $L^2(j\nu_\zeta, \mathbb{C}_0^3)$  dans un sous-espace fermé de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Comme ce sous-espace est engendré par les éléments de  $E_1$  et leurs images par les puissances de  $\bar{\Delta}$ , il est, par définition, égal à  $\bar{\Phi}$ .

La suite de la démonstration est analogue à celle de la proposition 6.4.

La stabilité de  $\bar{\Phi}$  par  $\bar{\Delta}$  et la formule pour  $\bar{\Delta}$  résultent de la définition même des objets concernés.

Un calcul direct montre que  $L_\xi(1) = 0$  et que  $L_\xi(l) = 1 + \frac{1}{3}l$ , si bien que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $L_\xi(f^n) = 0$  et  $L_\xi(f^n l) = l^n (1 + \frac{1}{3}l)$ . Or, d'après les lemmes 11.1 et 13.1, pour tout  $\varphi$  dans  $E_1$ , on a  $\bar{\Pi} (f(\bar{\Delta})^n \varphi) = 0$  et  $\bar{\Pi} (f(\bar{\Delta})^n \bar{\Delta} \varphi) = \bar{\Delta}^n (1 + \frac{1}{3}\bar{\Delta}) \varphi$ . L'espace  $\bar{\Phi}$  est donc stable par  $\bar{\Pi}$  et, pour tous  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $v$  dans  $\mathbb{C}_0^3$ , on a  $\bar{\Pi} \widehat{p \otimes v} = \widehat{L_\xi(p) \otimes v}$ . Comme  $\zeta$  est partout  $> 0$  sur  $\Lambda$ , il existe un réel  $c > 0$  tel que, pour tout  $x$  de  $\Lambda$ , on ait  $|\xi(x)| \leq c\zeta(x)$ , si bien que, pour toute fonction borélienne  $g$  sur  $\Lambda$ , on a  $|L_\xi(g)| \leq cL_\zeta(|g|)$ . En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 6.4, on montre que  $L_\zeta$  est borné dans  $L^2(j\nu_\zeta)$ . On en déduit que  $L_\xi$  est borné et l'identité concernant  $\bar{\Pi}$  en découle, par densité.

Enfin, d'après les lemmes 11.1 et 13.1, pour tous  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\varphi$  dans  $E_1$ , on a  $(\bar{\Delta} - 1) \bar{\Pi}^* (p(\bar{\Delta}) \varphi) = p(f(\bar{\Delta})) (\bar{\Delta} + 2) \varphi$ . D'après le corollaire 11.2, 1 n'appartient pas au spectre de  $\bar{\Delta}$ , si bien que, par densité, pour toute fonction rationnelle  $p$  dont les pôles n'appartiennent pas au spectre de  $\bar{\Delta}$ , on a  $\bar{\Pi}^* (p(\bar{\Delta}) \varphi) = (m(p \circ f)) (\bar{\Delta}) \varphi$  et, donc, l'espace  $\bar{\Phi}$  est stable par  $\bar{\Pi}^*$ . De plus, comme, pour tout  $x$  dans  $\Lambda$ , on a  $m(x)^2 \frac{j(x)}{j(f(x))} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+3)}$ , il vient, par un calcul élémentaire,  $L_\zeta \left( m^2 \frac{j}{j \circ f} \right) = 1$  et, pour tout  $g$  dans  $L^2(j\nu_\zeta)$ ,

$$\int_\Lambda |m(g \circ f)|^2 j d\nu_\zeta = \int_\Lambda \left( m^2 \frac{j}{j \circ f} \right) |g \circ f|^2 (j \circ f) d\nu_\zeta = \int_\Lambda |g|^2 j d\nu_\zeta.$$

La formule pour  $\bar{\Pi}^*$  en découle, par densité.  $\square$

Intéressons-nous à présent aux autres composantes  $\mathfrak{S}$ -isotypiques de l'espace  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Notons  $\varepsilon : \mathfrak{S} \rightarrow \{-1, 1\}$  le morphisme de signature. Nous dirons qu'une fonction  $\varphi$  sur  $\bar{\Gamma}$  est  $(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ -semi-invariante si, pour tout  $s$  dans  $\mathfrak{S}$ , on a  $\varphi \circ s = \varepsilon(s)\varphi$ . Notons toujours  $k$  et  $l$  les fonctions  $x \mapsto x + 2$  et  $x \mapsto x$ .

**Proposition 13.6.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'espace des fonctions  $n$ -triangulaires  $\mathfrak{S}$ -invariantes sur  $\bar{\Gamma}$  est stable par  $\bar{\Delta}$  et le polynôme caractéristique de  $\bar{\Delta}$  y est*

$$(X - 3) \prod_{p=0}^{n-2} (l \circ f^p(X))^{\frac{3^{n-2-p} + 2n - 2p - 1}{4}} (k \circ f^p(X))^{\frac{3^{n-2-p} - 2n + 2p + 3}{4}}.$$

*Pour tout entier  $n \geq 2$ , l'espace des fonctions  $n$ -triangulaires  $(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ -semi-*

invariantes sur  $\bar{\Gamma}$  est stable par  $\bar{\Delta}$  et le polynôme caractéristique de  $\bar{\Delta}$  y est

$$\prod_{p=0}^{n-2} (l \circ f^p(X))^{\frac{3^{n-2-p}-2n+2p+3}{4}} (k \circ f^p(X))^{\frac{3^{n-2-p}+2n-2p-1}{4}}.$$

*Démonstration.* Ces espaces sont stables d'après le lemme 10.1. Le calcul des polynômes caractéristiques s'obtient en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 7.5.  $\square$

De cette proposition on déduit, grâce au lemme 9.4, le

**Corollaire 13.7.** *Le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans l'espace des éléments  $\mathfrak{S}$ -invariants de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est discret. Les valeurs propres de  $\bar{\Delta}$  y sont 3, qui est simple, et les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans l'espace des éléments  $(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ -semi-invariants de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  est discret. Les valeurs propres de  $\bar{\Delta}$  y sont les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

La démonstration du théorème 1.3 s'achève avec la

**Proposition 13.8.** *Soit  $\bar{\Phi}^\perp$  l'orthogonal de  $\bar{\Phi}$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ . Le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans  $\bar{\Phi}^\perp$  est discret. Ses valeurs propres y sont 3, qui est simple, et les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ .*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition 6.9. Elle exige que nous introduisions des objets qui joueront un rôle semblable à celui des espaces  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de cette démonstration.

Reprenons les notations de la section 8 et rappelons que, par construction, si  $p$  est un point de  $\bar{\Gamma}$  tel que  $\theta_1(p) = a_1$ , le bréchet de  $p$  est  $B_0$  ou  $riB_0$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble constitué de la réunion de  $\mathcal{T}_n - \partial\mathcal{T}_n$  et de l'ensemble des six couples de la forme  $(d, B)$  où  $d$  est un élément de  $\partial\mathcal{T}_n$  et  $B$  un des deux bréchets pour lesquels il existe des points  $p$  de  $B$  tels que  $\theta_n(p) = d$ . Notons  $\tau_n$  l'application localement constante  $\bar{\Gamma} \rightarrow \mathcal{B}_n$  telle que, pour tout  $p$  dans  $\bar{\Gamma}$ , si  $p$  n'est pas le sommet d'un  $n$ -triangle, on a  $\tau_n(p) = \theta_n(p)$  et, si  $p$  est le sommet d'un  $n$ -triangle,  $\tau_n(p)$  est le couple formé de  $\theta_n(p)$  et du bréchet qui contient  $p$ . Enfin, disons qu'une fonction  $\varphi$  sur  $\bar{\Gamma}$  est  $\tau_n$ -mesurable si on a  $\varphi = \psi \circ \tau_n$ , où  $\psi$  est une fonction définie sur  $\mathcal{B}_n$ . L'intérêt de cette définition provient du

**Lemme 13.9.** *Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  et  $\varphi$  une fonction  $\tau_{n+1}$ -mesurable sur  $\bar{\Gamma}$ . Alors les fonctions  $\bar{\Pi}\varphi$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi$  sont  $\tau_n$ -mesurables.*

*Démonstration.* Soit  $p$  un point de  $\bar{\Gamma}$ . Si  $p$  n'est pas le sommet d'un  $n$ -triangle, le triangle  $\bar{\Pi}^{-1}p$  ne contient pas de sommet d'un  $(n+1)$ -triangle. De même,

aucun des voisins des points de  $\bar{\Pi}^{-1}p$  n'est le sommet d'un  $(n+1)$ -triangle. Pour tous les points  $q$  en question dans le calcul de  $\bar{\Pi}\varphi(p)$  et de  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi(p)$ , on a donc  $\tau_n(q) = \theta_n(q)$ . Par conséquent, par définition de  $\theta_n$  et d'après le lemme 9.1,  $\bar{\Pi}\varphi(p)$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi(p)$  ne dépendent que de  $\theta_n(p)$ .

Si, à présent,  $p$  est le sommet d'un  $n$ -triangle, le voisin  $q$  de  $p$  qui n'appartient pas à ce  $n$ -triangle est lui-même le sommet d'un  $n$ -triangle, et, d'après le lemme 8.3, le bréchet de  $q$  est déterminé par le bréchet de  $p$ . En particulier,  $\tau_n(q)$  est déterminé par  $\tau_n(p)$ . Un seul des trois antécédents du point  $p$  par l'application  $\bar{\Pi}$  est le sommet d'un  $(n+1)$ -triangle. D'après le lemme 8.8, il s'agit de celui dont le bréchet est égal à celui de  $p$ . En particulier, l'image par  $\tau_{n+1}$  de ce point  $r$  est déterminée par  $\tau_n(p)$ . De même, l'image par  $\tau_{n+1}$  de l'unique antécédent  $s$  de  $q$  qui est le sommet d'un  $(n+1)$ -triangle ne dépend que de  $\tau_n(q)$ , et donc de  $\tau_n(p)$ . Le point  $s$  est le voisin de  $r$  qui n'appartient pas à  $\bar{\Pi}^{-1}p$ . Enfin, les deux autres points de  $\bar{\Pi}^{-1}p$  et leurs voisins qui n'appartiennent pas à  $\bar{\Pi}^{-1}p$  ne sont pas des sommets d'un  $(n+1)$ -triangle et, donc, leur image par  $\tau_{n+1}$  est leur image par  $\theta_{n+1}$  qui ne dépend que de  $\theta_n(p)$ . À nouveau,  $\bar{\Pi}\varphi(p)$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi(p)$  ne dépendent que de  $\tau_n(p)$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 13.8.* D'après le lemme 10.7, la valeur propre 3 de  $\bar{\Delta}$  est simple. D'après les corollaires 12.4 et 12.8, les espaces propres associés aux éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$  sont non-triviaux. Notons  $\bar{P}$  le projecteur orthogonal de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  dans  $\bar{\Phi}^\perp$  et, pour tous  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , notons  $\lambda_{\varphi, \psi}$  l'unique mesure complexe borélienne sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout polynôme  $p$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , on ait  $\int_{\mathbb{R}} p d\lambda_{\varphi, \psi} = \langle p(\bar{\Delta})\varphi, \psi \rangle$ . D'après la proposition 13.5, l'opérateur  $\bar{P}$  commute à  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{\Pi}$  et  $\bar{\Pi}^*$ . D'après le lemme 9.4, pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que, pour tout entier  $n \geq 1$ , pour toute fonction  $\tau_n$ -mesurable  $\varphi$ , pour tout  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , la mesure  $\lambda_{\bar{P}\varphi, \psi}$  est atomique et concentrée sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(3) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , les fonctions  $\tau_1$ -mesurables sont les fonctions qui ne dépendent que du bréchet. On vérifie aisément que cet espace est engendré par les fonctions constantes, une droite de fonctions  $(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ -semi-invariantes, les éléments de  $E_1$  et leurs images par  $\bar{\Delta}$ . Dans ce cas, la description des mesures spectrales découle immédiatement des corollaires 13.4 et 13.7.

Si le résultat est vrai pour un entier  $n \geq 1$ , donnons-nous une fonction  $\tau_{n+1}$ -mesurable  $\varphi$ . Alors, d'après le lemme 13.9, les fonctions  $\bar{\Pi}\varphi$  et  $\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi$  sont  $\tau_n$ -mesurables et, par récurrence, pour tout  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , les mesures  $\lambda_{\bar{\Pi}\bar{P}\varphi, \psi} = \lambda_{\bar{P}\bar{\Pi}\varphi, \psi}$  et  $\lambda_{\bar{\Pi}\bar{\Delta}\bar{P}\varphi, \psi} = \lambda_{\bar{P}\bar{\Pi}\bar{\Delta}\varphi, \psi}$  sont atomiques et concentrées sur

l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(3) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . En raisonnant comme dans le lemme 6.10, on en déduit que les mesures  $\lambda_{\bar{P}\varphi, \bar{\Pi}^*\psi}$  et  $\lambda_{\bar{\Delta}\bar{P}\varphi, \bar{\Pi}^*\psi} = \lambda_{\bar{P}\varphi, \bar{\Delta}\bar{\Pi}^*\psi}$  sont atomiques et concentrées sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(3) \cup \bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(0)$ . Or, d'après le corollaire 11.2, le spectre de  $\bar{\Delta}$  dans l'orthogonal du sous-espace de  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$  engendré par l'image de  $\bar{\Pi}^*$  et par celle de  $\bar{\Delta}\bar{\Pi}^*$  est égal à  $\{-2, 0\}$ . Par conséquent, pour tout  $\psi$  dans  $L^2(\bar{\Gamma}, \mu)$ , la mesure  $\lambda_{\bar{P}\varphi, \psi}$  est atomique et concentrée sur l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(3) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ . Le résultat en découle.  $\square$

## 14 Le graphe de Sierpiński

Dans cette section, nous expliquons rapidement comment les résultats obtenus dans cet article pour le triangle de Pascal  $\Gamma$  se transportent au graphe de Sierpiński  $\Theta$  représenté à la figure 2. Comme on l'a vu à la section 2, le graphe  $\Theta$  s'identifie au graphe des arêtes de  $\Gamma$ . Si  $\varphi$  est une fonction sur  $\Gamma$ , on note  $\Xi^*\varphi$  la fonction sur  $\Theta$  telle que, pour tous points voisins  $p$  et  $q$  de  $\Gamma$ , la valeur de  $\Xi^*\varphi$  sur l'arête associée à  $p$  et  $q$  soit  $\varphi(p) + \varphi(q)$ . On note  $\Xi$  l'adjoint de  $\Xi^*$  et on vérifie immédiatement le

**Lemme 14.1.** *On a  $(\Delta - 1)\Xi^* = \Xi^*\Delta$  et  $\Xi\Xi^* = 3 + \Delta$ . La restriction de  $\Delta$  à l'orthogonal de l'image de  $\Xi^*$  dans  $\ell^2(\Theta)$  est une homothétie de rapport  $-2$ .*

À travers ce lemme, l'ensemble des résultats de cet article se transportent du graphe de Pascal au graphe de Sierpiński. Ils pourraient d'ailleurs s'obtenir directement dans le graphe de Sierpiński, en considérant les opérateurs adéquats dans  $\ell^2(\Theta)$ . Nous nous contenterons ici de décrire le spectre continu de  $\Theta$  et de traduire le théorème 1.1 : ceci répond à la question posée par Teplyaev dans [3, § 6.6].

Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , posons  $k(x) = x + 2$  et  $t(x) = x + 1$ . Du lemme 14.1, on déduit le

**Lemme 14.2.** *Soient  $\varphi$  dans  $\ell^2(\Gamma)$ ,  $\mu$  la mesure spectrale de  $\varphi$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Gamma)$  et  $\lambda$  la mesure spectrale de  $\Xi^*\varphi$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$ . Alors, on a  $\lambda = k(t_*\mu)$ .*

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = x^2 - 3x = f(x - 1) + 1$ . On note  $\Sigma = t(\Lambda)$  l'ensemble de Julia de  $g$ . Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , soit  $c(x) = (x + 2)(4 - x) = k(x)h(x - 1)$  et, pour  $x \neq \frac{3}{2}$ ,  $\gamma(x) = \frac{x-1}{2x-3} = \rho(x - 1)$ . On note  $\nu_\gamma = t_*\nu_\rho$  l'unique mesure de probabilité  $L_{g,\gamma}$ -invariante sur  $\Sigma$ .

Notons toujours  $\varphi_0$  la fonction sur  $\Gamma$  apparaissant à la section 6 et posons  $\theta_0 = \Xi^*\varphi_0$  (c'est la fonction notée  $1_{\partial\partial V}$  dans [3, § 6]). Du théorème 1.1 et des lemmes 14.1 et 14.2, on déduit le théorème suivant, qui complète la description du spectre de  $\Theta$  effectuée par Teplyaev dans [3] :

**Théorème 14.3.** *Le spectre de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$  est constitué de la réunion de  $\Sigma$  et de l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(-2)$ . La mesure spectrale de  $\theta_0$  pour  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$  est  $c\nu_\gamma$ , les valeurs propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$  sont les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(-2) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(-1)$  et les sous-espaces propres associés sont engendrés par des fonctions à support fini. Enfin, l'orthogonal de la somme des sous-espaces propres de  $\Delta$  dans  $\ell^2(\Theta)$  est le sous-espace cyclique engendré par  $\theta_0$ .*

## Références

- [1] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure for hyperbolic dynamics*, Astérisque 187-188, Société Mathématique de France, Paris, 1990.
- [2] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1974.
- [3] A. Teplyaev, Spectral analysis on infinite Sierpiński gaskets, *Journal of functional analysis* **159** (1998), 537-567.

Jean-François Quint  
LAGA  
Université Paris 13  
99, avenue Jean-Baptiste Clément  
93430 Villetaneuse  
France  
quint@math.univ-paris13.fr