



**HAL**  
open science

## Automatique

Franck Luthon

► **To cite this version:**

| Franck Luthon. Automatique. Licence. France. 2018. cel-02275759

**HAL Id: cel-02275759**

**<https://hal.science/cel-02275759v1>**

Submitted on 1 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# AUTOMATIQUE

**Franck Luthon**

Email : [Franck.Luthon@univ-pau.fr](mailto:Franck.Luthon@univ-pau.fr)

**IUT Bayonne-Pays Basque, Dpt G.I.M, 2 Allée du Parc Montaury, 64600 Anglet**

[www.iutbayonne.univ-pau.fr/~luthon/auto0.pdf](http://www.iutbayonne.univ-pau.fr/~luthon/auto0.pdf)<sup>1</sup>

1. Ce document peut être reproduit sous réserve d'en citer la source.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>CM - Cours</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Asservissements linéaires</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction générale . . . . .	11
1.2	Position du problème et définitions . . . . .	11
1.2.1	Problème . . . . .	11
1.2.2	Structures de résolution . . . . .	11
1.2.2.1	Boucle ouverte . . . . .	12
1.2.2.2	Boucle fermée . . . . .	12
1.2.3	Deux aspects du problème . . . . .	12
1.2.3.1	Asservissement . . . . .	12
1.2.3.2	Régulation . . . . .	12
1.2.3.3	Résumé . . . . .	13
1.2.4	Performances des systèmes asservis . . . . .	13
1.2.4.1	Stabilité . . . . .	13
1.2.4.2	Précision . . . . .	13
1.2.4.3	Rapidité . . . . .	13
1.2.5	Nature du système à régler et de la commande . . . . .	14
1.3	Modélisation et identification . . . . .	15
1.3.1	Modélisation . . . . .	15
1.3.1.1	Modèle linéaire . . . . .	15
1.3.1.2	Exemple . . . . .	15
1.3.1.3	Modélisation de la boucle ouverte et de la boucle fermée . . . . .	16
1.3.2	Identification . . . . .	17
1.3.2.1	Objectifs . . . . .	17
1.3.2.2	Méthode de Strejc . . . . .	18
1.3.2.2.1	Rappel sur la notion de point d'inflexion d'une fonction $y(t)$ . . . . .	19
1.3.2.2.2	Détermination des paramètres du modèle . . . . .	19
1.3.2.2.3	Exemple . . . . .	19
1.3.2.3	Méthode de Ziegler-Nichols . . . . .	19
1.3.2.3.1	Exemple . . . . .	19
1.3.2.4	Méthode de Broïda . . . . .	20
1.4	Stabilité . . . . .	20
1.4.1	Condition générale de stabilité . . . . .	20
1.4.1.1	Cas général . . . . .	20
1.4.1.1.1	Définition . . . . .	20
1.4.1.1.2	Condition mathématique . . . . .	21
1.4.1.2	Cas du système bouclé . . . . .	21
1.4.2	Critère algébrique de Routh-Hurwitz . . . . .	21
1.4.2.1	Exemple . . . . .	22
1.4.2.2	Limitation . . . . .	22

1.4.3	Critère de stabilité de Nyquist . . . . .	22
1.4.3.1	Théorème de Nyquist . . . . .	23
1.4.3.2	Critère du revers . . . . .	23
1.4.4	Critère d'oscillation . . . . .	23
1.4.5	Marge de stabilité . . . . .	24
1.4.5.1	Définitions . . . . .	24
1.4.5.2	Signification physique . . . . .	24
1.4.5.3	Marge absolue de stabilité . . . . .	24
1.4.6	Détermination graphique de la stabilité à partir de la FTBO . . . . .	24
1.4.6.1	Critère de stabilité . . . . .	24
1.4.6.2	Marges de stabilité . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Réglage des Correcteurs</b>	<b>27</b>
2.1	Performances . . . . .	27
2.1.1	Introduction . . . . .	27
2.1.2	Réjection des perturbations par régulation . . . . .	28
2.1.2.1	Hypothèses . . . . .	28
2.1.2.2	Objectif . . . . .	28
2.1.2.3	Les différents cas . . . . .	28
2.1.2.4	Conclusion . . . . .	28
2.1.3	Précision des asservissements . . . . .	29
2.1.3.1	Calcul de l'erreur . . . . .	29
2.1.3.2	Hypothèse . . . . .	29
2.1.3.3	Objectif . . . . .	29
2.1.3.4	Différents cas . . . . .	29
2.1.3.5	Conclusion . . . . .	30
2.1.4	Critères de Rapidité . . . . .	30
2.1.4.1	Temps de réponse . . . . .	30
2.1.4.2	Bande passante . . . . .	30
2.1.5	Conclusion . . . . .	31
2.2	Le correcteur PID analogique . . . . .	31
2.2.1	La correction des systèmes asservis . . . . .	31
2.2.2	Correcteur proportionnel P . . . . .	31
2.2.2.1	Définition . . . . .	31
2.2.2.2	Action sur le système . . . . .	32
2.2.3	Correcteur proportionnel intégral PI . . . . .	32
2.2.3.1	Définition . . . . .	32
2.2.3.2	Action sur le système . . . . .	32
2.2.4	Correcteur proportionnel dérivé PD . . . . .	33
2.2.4.1	Définition . . . . .	33
2.2.4.2	Action sur le système . . . . .	33
2.2.5	Correcteur proportionnel intégral dérivé PID . . . . .	33
2.2.5.1	Définition . . . . .	33
2.2.5.2	Action sur le système . . . . .	33
2.2.6	Structure de quelques correcteurs . . . . .	33
2.2.6.1	Avance de phase . . . . .	34
2.2.6.2	Retard de phase . . . . .	35
2.3	Méthodes de réglage des PID . . . . .	35
2.3.1	Réglage expérimental . . . . .	35
2.3.1.1	Premier réglage : action proportionnelle P . . . . .	35
2.3.1.2	Second réglage : action intégrale I . . . . .	36

2.3.1.3	Troisième réglage : action dérivée D . . . . .	36
2.3.2	Méthode de Ziegler-Nichols . . . . .	36
2.3.2.1	Essai indiciel en boucle ouverte . . . . .	36
2.3.2.2	Essai de pompage . . . . .	36
2.3.2.3	Tableau des correcteurs . . . . .	37
2.3.3	Critère de Naslin . . . . .	37
2.3.4	Tableau récapitulatif . . . . .	38
2.3.5	Méthode des modèles . . . . .	38
2.3.5.1	Exemple 1 . . . . .	39
2.3.5.2	Exemple 2 . . . . .	39
2.3.6	Conclusion . . . . .	40
2.4	Régulation analogique pilotée par ordinateur . . . . .	40

## **II TD - Exercices 43**

### **3 TD AUTO1 45**

3.1	TD Aa1 Transformation de schéma . . . . .	45
3.1.1	Exercice 1 . . . . .	45
3.1.2	Exercice 2 . . . . .	45
3.1.3	Oscillateur HF . . . . .	45
3.2	TD Aa2 Effet du rebouclage unitaire . . . . .	46
3.2.1	Influence sur la BP . . . . .	46
3.2.2	Influence sur le temps de réponse . . . . .	46
3.3	TD Aa3 Etude de système du premier ordre . . . . .	46
3.4	TD Aa4 Stabilité . . . . .	47
3.4.1	Critère de Routh . . . . .	47
3.4.2	Lieu de Nyquist . . . . .	47
3.5	TD Aa5 Correcteur mécanique à avance de phase . . . . .	47
3.6	TD Aa6 Abaque de Black . . . . .	49
3.7	TD Aa7 Oscillateur . . . . .	49
3.7.1	Interrupteur ouvert . . . . .	49
3.7.2	Interrupteur fermé . . . . .	49

### **4 TD AUTO2 51**

4.1	TD Ab1 Asservissement de la position d'un arbre moteur . . . . .	51
4.2	TD Ab2 Moteur à courant continu . . . . .	52
4.2.1	Etude du moteur . . . . .	52
4.2.2	Etude de la boucle ouverte corrigée . . . . .	52
4.2.3	Etude de la boucle fermée . . . . .	52
4.3	TD Ab3 Abaque de Black . . . . .	53
4.3.1	Marges de gain et phase . . . . .	53
4.3.2	Réglage de gain . . . . .	53
4.4	TD Ab4 MSTAL No7 . . . . .	54
4.5	TD Ab5 Correcteurs de phase . . . . .	54
4.5.1	Correcteur à avance de phase . . . . .	54
4.5.2	Correcteur à retard de phase . . . . .	55
4.6	TD Ab6 Correction tachymétrique . . . . .	55
4.6.1	Système non corrigé . . . . .	55
4.6.2	Système avec correction . . . . .	56
4.6.2.1	Correction tachymétrique . . . . .	56

4.6.2.2	Correction tachymétrique filtrée . . . . .	56
4.7	TD Ab7 Correcteurs PI et PD . . . . .	57
4.7.1	Correcteur PI . . . . .	57
4.7.2	Correcteur PD . . . . .	57
4.7.2.1	Lieu de Nichols . . . . .	57
4.7.2.2	Correcteur PD (Proportionnel Dérivé) . . . . .	58
4.8	TD Ab9 Réglage d'un PID . . . . .	58
4.9	Contrôle AUTOa 7/12/2011 (2h) . . . . .	59
4.10	Contrôle AUTOb 24/1/2012 (2h) . . . . .	60
4.11	Contrôle AUTOa 5/12/2012 (2h) . . . . .	62
4.12	Contrôle AUTOb 21/1/2013 (2h) . . . . .	65
4.13	Contrôle AUTOa 2/12/2013 (2h) . . . . .	67
4.14	Contrôle AUTOb 20/1/2014 (2h) . . . . .	68
4.15	Contrôle AUTO1 28/11/2014 (2h) . . . . .	70
4.16	Contrôle AUTO2 19/1/2015 (2h) . . . . .	72
4.17	Contrôle AUTO1 30/11/2015 (2h) . . . . .	75
4.18	Contrôle AUTO2 12/1/2016 (2h) . . . . .	76
4.19	Contrôle AUTO1 09/12/2016 (2h) . . . . .	77
4.20	Contrôle AUTO2 18/01/2017 (2h) . . . . .	80
4.21	Contrôle AUTO1 05/12/2017 (2h) . . . . .	82
4.22	Contrôle AUTO2 17/01/2018 (2h) . . . . .	85

### III TP - Pratique 87

<b>5</b>	<b>TP Aa1 Système du 2nd ordre. Etude harmonique et indicielle</b>	<b>89</b>
5.1	But de la manipulation . . . . .	89
5.2	Cours à revoir . . . . .	89
5.3	Rappels théoriques . . . . .	89
5.3.1	Fonction de transfert . . . . .	89
5.3.2	Réponse indicielle . . . . .	90
5.3.2.1	Régime apériodique : cas $\zeta > 1$ . . . . .	91
5.3.2.2	Régime critique : $\zeta = 1$ . . . . .	91
5.3.2.3	Régime pseudo-périodique : cas $\zeta < 1$ . . . . .	91
5.3.2.3.1	Remarques pratiques : . . . . .	92
5.3.3	Temps de réponse d'un circuit du second ordre . . . . .	93
5.3.3.1	Réponse à une entrée en échelon . . . . .	93
5.3.3.2	Réponse à une impulsion de Dirac . . . . .	93
5.3.3.3	Réponse à une rampe . . . . .	94
5.3.4	Réponse harmonique . . . . .	94
5.3.4.1	Représentations graphiques . . . . .	95
5.3.4.1.1	Diagramme de Bode : . . . . .	95
5.3.4.1.2	Représentation de Nyquist : . . . . .	95
5.3.4.1.3	Diagramme de Nichols-Black : . . . . .	95
5.3.5	Caractéristiques fréquentielles . . . . .	95
5.3.5.1	Fréquences de coupure . . . . .	95
5.3.5.2	Bande passante, largeur de bande . . . . .	96
5.3.5.3	Différents types de pulsations . . . . .	96
5.4	Préparation . . . . .	97
5.5	Manipulation . . . . .	97
5.5.1	Analyse fréquentielle . . . . .	97

5.5.1.1	Représentations graphiques . . . . .	97
5.5.1.2	Paramètres du circuit du second ordre . . . . .	98
5.5.1.2.1	Pour $R = 100\Omega$ . . . . .	98
5.5.1.2.2	Pour $R = 1k\Omega$ . . . . .	98
5.5.1.2.3	Pour $R = 10k\Omega$ . . . . .	98
5.5.2	Analyse indicielle . . . . .	98
5.5.2.1	Régime oscillatoire . . . . .	98
5.5.2.2	Régime pseudo-oscillatoire . . . . .	98
5.5.2.3	Régime apériodique . . . . .	99
5.5.3	Conclusion . . . . .	99
<b>6</b>	<b>TP Aa2 Identification</b>	<b>101</b>
<b>7</b>	<b>TP Aa3 Asservissement analogique de position - Etude en boucle ouverte</b>	<b>103</b>
7.1	But de la manipulation . . . . .	103
7.2	Présentation du matériel . . . . .	103
7.2.1	Structure de la chaîne asservie . . . . .	104
7.2.2	Description de la platine AP . . . . .	104
7.3	Manipulation . . . . .	106
7.3.1	Etude qualitative du système en boucle fermée . . . . .	106
7.3.2	Etude en boucle ouverte de l'ensemble Ampli-Moteur-Capteur de position	107
7.3.2.1	Capteur de position . . . . .	107
7.3.2.2	Ensemble Amplificateur-Moteur . . . . .	108
7.3.2.2.1	Détermination de la constante de temps $T_m$ . . . . .	108
7.3.2.2.2	Détermination du gain $K_m$ . . . . .	109
7.4	Annexes . . . . .	110
7.4.1	Annexe 1 : Méthode de mesure en XY ou méthode de Lissajous . . . . .	110
7.4.2	Protocole de Mesure de la pulsation de coupure $\omega_c$ . . . . .	111
7.4.3	Mesure du gain $K_m$ . . . . .	111
7.4.4	Expression de la FTBF $H(p)$ connaissant la FTBO $G(p)$ . . . . .	112
<b>8</b>	<b>TP Aa3(suite) Asservissement de position - Etude en boucle fermée</b>	<b>113</b>
8.1	But de la manipulation . . . . .	113
8.2	Présentation de la platine d'étude . . . . .	113
8.3	Manipulation . . . . .	113
8.3.1	Etude en régime indiciel . . . . .	113
8.3.1.1	Etude qualitative . . . . .	113
8.3.1.2	Etude du régime pseudo-oscillatoire . . . . .	115
8.3.2	Etude en régime harmonique . . . . .	115
8.3.2.1	Remarque . . . . .	115
8.3.2.2	Influence de la génératrice tachymétrique . . . . .	115
8.3.2.3	Expérience inverse . . . . .	115
8.3.3	Synthèse de correcteur . . . . .	116
<b>9</b>	<b>TP Ab0 Synthèse fréquentielle des asservissements. Etude des correcteurs en cascade</b>	<b>117</b>
9.1	But de la manipulation . . . . .	117
9.2	Correction par action pure . . . . .	118
9.2.1	Correction par action proportionnelle P . . . . .	118
9.2.2	Correction par action proportionnelle et intégrale I . . . . .	118
9.2.3	Correction par action proportionnelle et dérivée D . . . . .	119

9.3	Correction par action approchée . . . . .	120
<b>10</b>	<b>TP Ab1 Régulation de vitesse</b>	<b>123</b>
10.1	Présentation du matériel . . . . .	123
10.2	Boucle ouverte . . . . .	124
10.3	Boucle fermée non corrigée . . . . .	124
10.4	Boucle fermée corrigée . . . . .	124
<b>11</b>	<b>TP Ab2 Régulation de position</b>	<b>127</b>
11.1	Présentation du matériel . . . . .	127
11.2	Boucle ouverte . . . . .	127
11.3	Boucle fermée non corrigée . . . . .	128
11.4	Boucle fermée corrigée . . . . .	128
<b>12</b>	<b>TP Ab3 Régulation de puissance</b>	<b>131</b>
12.1	Présentation . . . . .	131
12.1.1	Objectifs du TP . . . . .	131
12.1.2	Liste des équipements . . . . .	132
12.1.3	Câblage . . . . .	132
12.1.4	Logiciel . . . . .	132
12.1.5	Configuration du système . . . . .	132
12.2	Caractérisation du système en boucle ouverte . . . . .	132
12.2.1	Réponse à un échelon constant . . . . .	132
12.2.2	Exploitation des résultats . . . . .	134
12.3	Boucle fermée . . . . .	134
12.3.1	Réponse à un échelon constant . . . . .	135
12.3.2	Boucle fermée non corrigée . . . . .	135
12.3.3	Boucle fermée corrigée . . . . .	135
12.4	Conclusion . . . . .	136
<b>IV</b>	<b>ANNEXE TECHNIQUE</b>	<b>137</b>
<b>13</b>	<b>ANNEXES</b>	<b>139</b>
13.1	Annexe 1 : Courbes Canoniques du 2eme Ordre . . . . .	139
13.2	Annexe 2 : Abaques pour le calcul du correcteur à avance de phase . . . . .	141
13.3	Annexe 3 : Notice d'utilisation du programme Black dans Matlab . . . . .	142
13.4	Annexe 4 : Listing du fichier Matlab black.m . . . . .	143
13.5	Annexe 5 : Abaques Papiers . . . . .	145

# Première partie

## CM - Cours



# Chapitre 1

## Asservissements linéaires

### 1.1 Introduction générale

La **Cybernétique** est la science des systèmes. Elle englobe notamment l'Automatique qui porte spécifiquement sur les systèmes mécaniques et électriques conçus par l'homme [1], mais elle est beaucoup plus générale puisqu'elle concerne aussi bien les systèmes biologiques et du vivant, les systèmes socio-économiques, les systèmes d'information etc. Les notions de régulation, de système bouclé, de compromis stabilité/précision/vitesse, de modélisation linéaire, d'identification, de correcteurs que l'on y aborde ont un niveau de généralité qui dépasse largement l'automatique analogique ou numérique, et s'appliquent dans beaucoup de sciences de l'ingénieur ou de sciences humaines.

### 1.2 Position du problème et définitions

#### 1.2.1 Problème

L'objectif de l'Automatique est d'asservir une grandeur à une autre, c'est-à-dire de fixer une grandeur en agissant sur une autre [2]. Le **processus (ou procédé)** est le système à régler (Fig. 1.1).

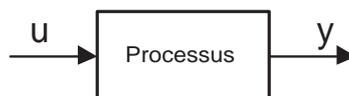


FIGURE 1.1 – Système en boucle ouverte

Ex : cuve où l'on veut régler le niveau d'eau, pièce dont on veut choisir la température, moteur dont on veut commander la vitesse.

$u$  est la **grandeur de commande**,

$y$  est la **grandeur réglée** que l'on va observer : on va régler  $y$  en agissant sur l'entrée  $u$ .

Exemples :

- Système ABS de freinage : le processus est la voiture, la grandeur de commande est la position de la pédale de frein et la grandeur commandée est la vitesse de la roue.
- Niveau dans une cuve : le processus est la cuve, la grandeur de commande est l'ouverture de la vanne et la grandeur commandée est le niveau de liquide.

#### 1.2.2 Structures de résolution

Pour atteindre l'objectif fixé, on a à sa disposition deux types principaux de structure.

### 1.2.2.1 Boucle ouverte

Le système, tel que décrit Fig. 1.1, est dit en boucle ouverte car on ne vérifie pas que  $y$  suive effectivement les variations de  $u$ , il n'y a pas de contrôle ni de rétroaction (la valeur de  $u$  ne dépend pas de la valeur de  $y$  observée, mais seulement de ce que l'on suppose *a priori* qu'elle va être).

### 1.2.2.2 Boucle fermée

Pour avoir un système plus précis où l'on veut être sûr du résultat obtenu, on utilise une boucle fermée, ou réaction de la sortie sur l'entrée (rétroaction cf. Fig. 1.2.a) : on élabore le signal de commande  $u$  à partir de la grandeur réglée  $y$  obtenue en sortie du système et d'un signal  $y_c$  dit **consigne** représentant la valeur désirée de  $y$ .

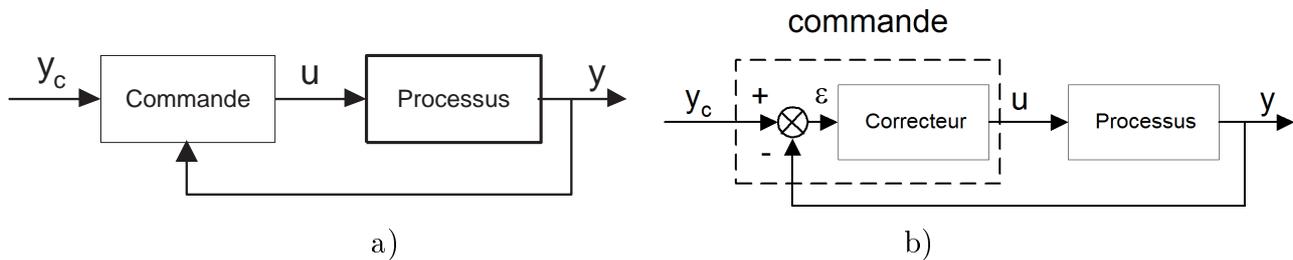


FIGURE 1.2 – a) Boucle fermée (rétroaction) ; b) Principe de la partie commande

La plupart du temps, pour élaborer le signal de commande, on calcule l'**erreur** (Fig. 1.2.b), écart entre la consigne et le signal obtenu :  $\varepsilon = y_c - y$ .

Le système élaborant la commande  $u$  à partir de l'erreur  $\varepsilon$  est appelé **correcteur** ou **régulateur**. L'objectif est que la sortie  $y$  soit égale à la consigne  $y_c$  donc que :  $\varepsilon = y_c - y = 0$ . La relation liant  $u$  à  $\varepsilon$  est appelée **loi de commande** :  $u = f(\varepsilon)$ .

## 1.2.3 Deux aspects du problème

### 1.2.3.1 Asservissement

Lorsque la **consigne varie** et que l'on veut que  $y$  suive ses variations, on parle de la réalisation d'un asservissement. L'objectif est toujours que :  $\varepsilon = y_c - y = 0$ , mais ceci alors que  $y_c$  varie.

Ex : une cuve dont on veut augmenter le niveau donc on augmente le débit  $u$ .

### 1.2.3.2 Régulation

Pour une consigne fixée ( $y_c$  constante), on considère que le système subit des **perturbations** : ce sont des éléments qui agissent sur la sortie indépendamment de la commande (bruit, variation du milieu ambiant). En boucle fermée, pour une consigne fixe, si l'on obtient  $\varepsilon = y_c - y = 0$  malgré les perturbations, on parle de régulation.

– Boucle ouverte (BO) : cf. Fig. 1.3.a

Ex : une cuve avec une fuite qui s'agrandit donc le niveau  $y$  descend malgré un débit de remplissage  $u$  constant.

– Boucle fermée (BF) : cf. Fig. 1.3.b

Ex : une cuve avec une fuite qui s'agrandit donc le niveau  $y$  descend donc  $\varepsilon$  augmente donc le débit  $u$  augmente (cas où  $u = f(\varepsilon)$  est une fonction croissante) et le niveau devient stable.

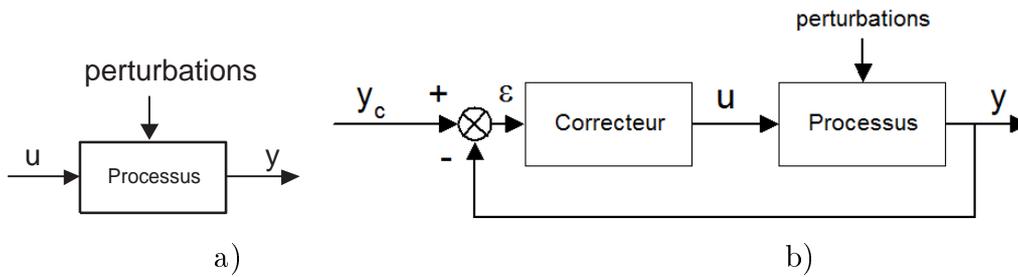


FIGURE 1.3 – a) BO perturbée ; b) BF perturbée et corrigée.

### 1.2.3.3 Résumé

Dans le cas d'un asservissement, on néglige l'effet des perturbations mais la consigne varie.

Dans le cas d'une régulation, la consigne est fixe mais il y a des perturbations.

Dans les deux cas, l'objectif est toujours que :  $\boxed{\varepsilon = y_c - y = 0}$ .

Dans la pratique, on cherche à atteindre cet objectif lorsque la consigne varie et malgré des perturbations. Pour cela, on choisira un régulateur ou **correcteur** approprié dont le but est de remplacer la surveillance humaine et de rendre le système asservi suffisamment performant.

### 1.2.4 Performances des systèmes asservis

Il y a trois critères de performance (Fig. 1.4) :

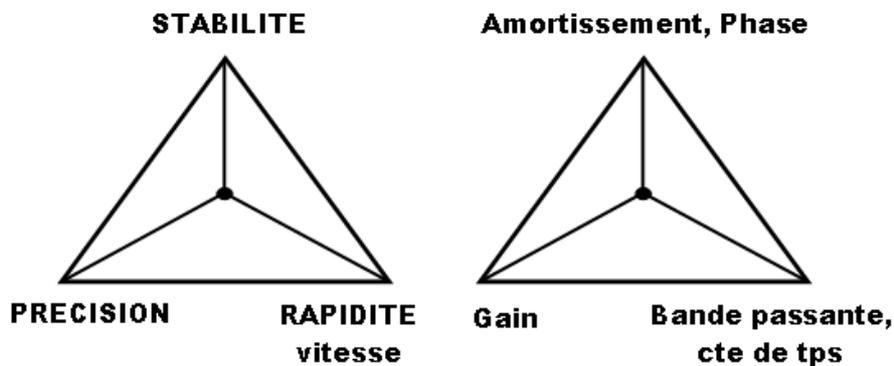


FIGURE 1.4 – Triangles des performances.

#### 1.2.4.1 Stabilité

Le système est stable si, pour une entrée constante, la sortie du système tend vers une autre constante.

#### 1.2.4.2 Précision

Le système est précis si la sortie suit l'entrée.

#### 1.2.4.3 Rapidité

Le système est rapide si sa sortie se stabilise en un temps jugé suffisamment court.

### 1.2.5 Nature du système à régler et de la commande

Nous considérerons uniquement des systèmes **monovariables**, c'est-à-dire à une entrée et une sortie. Le système peut être :

- **analogique** : les grandeurs le régissant sont fonction de la variable temps continu  $t$  donc la représentation par la transformée de Laplace  $H(p)$  est possible.
- **numérique** : les grandeurs le régissant sont fonction de la variable temps discret  $k$  donc la représentation se fait par la transformée en  $Z$ , notée  $H(z)$ .

Pour un système analogique, la commande peut être :

- analogique (Fig. 1.5) : les correcteurs seront analogiques (p. ex. circuits électroniques, en particulier à base d'AOP)

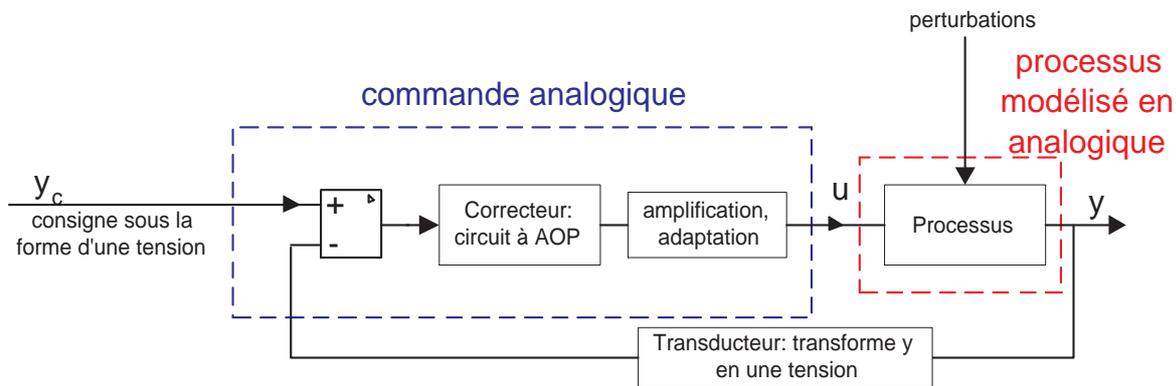


FIGURE 1.5 – Commande analogique

Remarque : l'étage d'amplification et d'adaptation ainsi que le transducteur sont souvent modélisés comme faisant partie du processus.

- numérique : le procédé est traité par un système numérique (CAN, PC, CNA). L'étude sera alors :
  - soit analogique : à partir de  $H(p)$ , les résultats sont adaptés au numérique (passage de  $H(p)$  à  $H(z)$  comme pour le filtrage numérique). On parle de commande analogique par ordinateur par discrétisation de la loi de commande (Fig. 1.6).

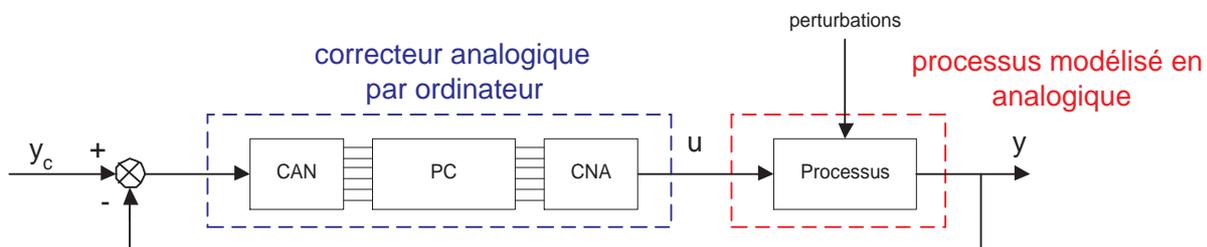


FIGURE 1.6 – Discrétisation de la loi de commande

La consigne peut être une donnée du PC et dans ce cas, le calcul de l'erreur se fait dans le PC (Fig. 1.7).

- soit numérique (Fig. 1.8) : on définit directement  $H(z)$  et on pourra utiliser des techniques spécifiques de commande numérique.

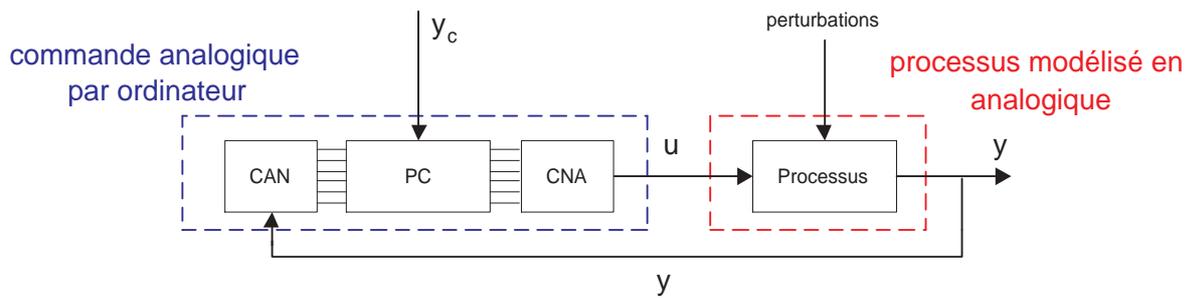


FIGURE 1.7 – Calcul d'erreur dans le PC

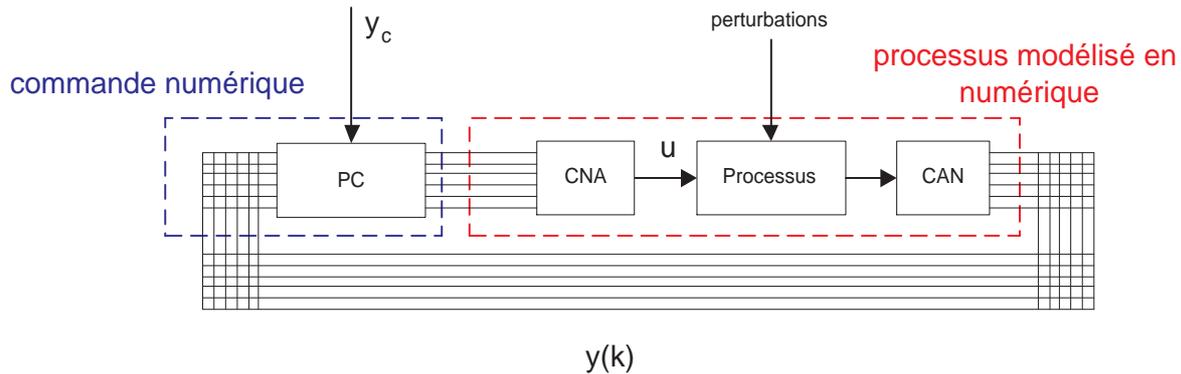


FIGURE 1.8 – Commande numérique

## 1.3 Modélisation et identification

### 1.3.1 Modélisation

Pour déterminer la loi de commande et le type de correcteur, on a besoin de modéliser le processus. On établit un modèle mathématique c'est-à-dire une loi choisie pour prédire au mieux le comportement du système dans un certain domaine de validité. En effet le lien entre  $u$  et  $y$  est souvent compliqué, donc on choisit de le représenter par une relation qui ne sera valable que dans un domaine restreint.

La relation entre  $u$  et  $y$  est très souvent une équation différentielle linéaire représentable par une fonction de transfert en transformée de Laplace. Celle-ci a un ordre élevé mais en première approximation, on se ramène à un ordre plus bas, voire à un premier ordre.

#### 1.3.1.1 Modèle linéaire

Si par nature le système n'est pas géré par une équation différentielle linéaire, on peut souvent le **linéariser** : proposer un modèle linéaire, une équation différentielle linéaire traduisant son évolution lorsque l'on reste dans un domaine de validité autour d'un point de repos. On se limitera à l'étude des **processus linéaires ou linéarisés autour d'un point de repos**. Ils se traduisent donc par une **équation différentielle linéaire**. Les modèles obtenus seront du premier ordre, du second ordre, ou des produits des deux.

#### 1.3.1.2 Exemple

La vitesse  $y$  d'un moteur en fonction de la tension  $u$  à ses bornes n'est pas linéaire mais, autour de sa valeur nominale  $y_0$  (vitesse pour laquelle le moteur a été construit), on peut définir un petit domaine en tension et en vitesse où son comportement reste linéaire (Fig. 1.9).

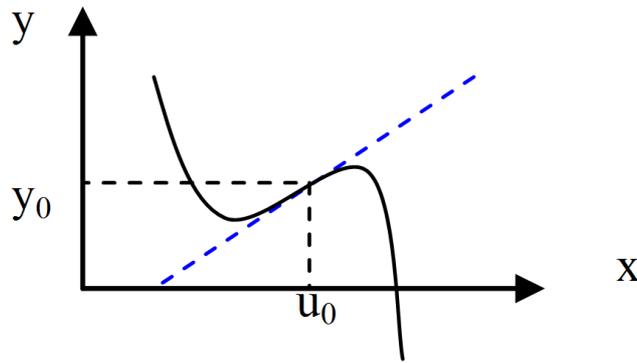


FIGURE 1.9 – Linéarisation autour d’un point de repos.

On ne va plus étudier la vitesse absolue  $y$  mais la vitesse relative (petites variations) par rapport au point de repos  $y_0$ , donc on définit  $Y = y - y_0$  et  $X = u - u_0$ . On étudiera le système Fig. 1.10.

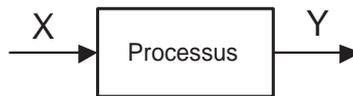


FIGURE 1.10 – Système autour du point de repos.

La réponse indicielle sera donc la réponse à un échelon sur  $X$  entre 0 et 1 donc le passage de la tension de  $u_0$  à  $u_0 + 1$ .

### 1.3.1.3 Modélisation de la boucle ouverte et de la boucle fermée

– On suppose que la boucle fermée (Fig. 1.11.a) est modélisée par une fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$$

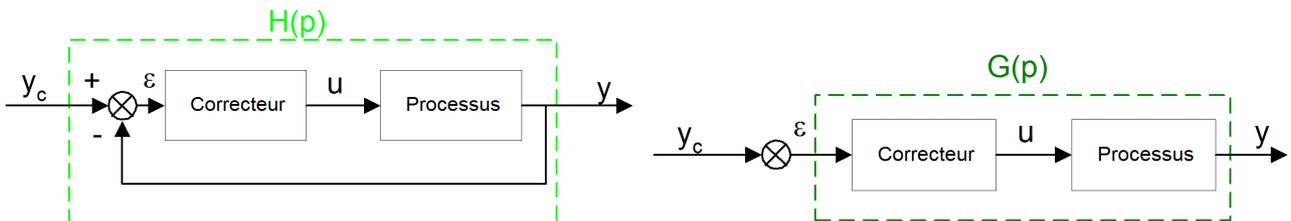


FIGURE 1.11 – a) Boucle fermée  $H(p)$  ; b) Boucle ouverte  $G(p)$

Lorsque le retour est supprimé (Fig. 1.11.b), on suppose que la boucle ouverte a une fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$$

où  $E(p)$  est la transformée de Laplace de l’entrée du correcteur  $\varepsilon(t)$ .

On cherche à exprimer la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF  $H(p)$ ) en fonction de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO  $G(p)$ ), Fig. 1.12.

On a :  $Y(p) = G(p).E(p)$  or  $E(p) = Y_c(p) - Y(p)$  donc :  $Y(p) = G(p) [Y_c(p) - Y(p)]$

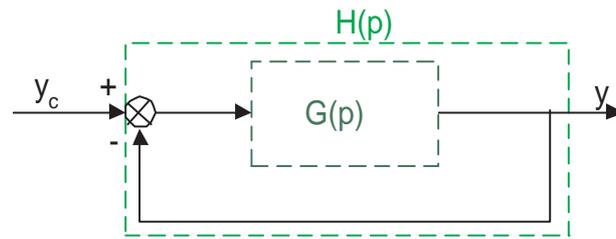


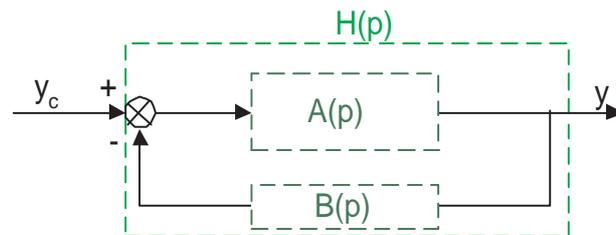
FIGURE 1.12 – Retour unitaire

d'où :  $Y(p) [1 + G(p)] = G(p)Y_c(p)$ , et finalement :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Lorsque le dénominateur de  $G(p)$  est un polynôme d'ordre  $n$ , on parle de **système d'ordre  $n$** .

- On prend parfois/souvent en compte la fonction de transfert liée au transducteur et aux interfaces (Fig. 1.5) qui se traduit par un retour non unitaire  $B(p)$  (Fig. 1.13).

FIGURE 1.13 – Retour non unitaire  $B(p)$ 

On a alors :  $Y(p) = A(p).E(p)$ , or :  $E(p) = Y_c(p) - B(p).Y(p)$

donc :  $Y(p) = A(p) [Y_c(p) - B(p).Y(p)] \Rightarrow Y(p) [1 + A(p).B(p)] = A(p).Y_c(p)$ , et finalement :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad (1.1)$$

Lorsque  $B(p) = 1$ , on parle de boucle à **retour unitaire**.

$A(p)B(p) = G(p)$  est alors la **fonction de transfert en boucle ouverte**.

$A(p)$  est la fonction de transfert de la **chaîne directe**.

## 1.3.2 Identification

### 1.3.2.1 Objectifs

Le but de l'automatique est que la sortie  $y$  suive la consigne  $y_c$ , donc de maintenir dans la mesure du possible l'égalité :  $y = y_c$ . Pour cela, on va étudier quelles propriétés mathématiques doit posséder la fonction de transfert  $H(p)$  du système final, dit système corrigé, pour que la sortie suive le mieux possible la consigne malgré les perturbations. On en déduira les caractéristiques de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$ . La chaîne directe de la Fig. 1.14 a pour transfert :  $G(p) = C(p).Pr(p)$ , donc si l'on sait quelles propriétés mathématiques doit avoir  $G(p)$ , on pourra définir la fonction de transfert  $C(p)$  du correcteur connaissant la fonction de transfert  $Pr(p)$  du processus.

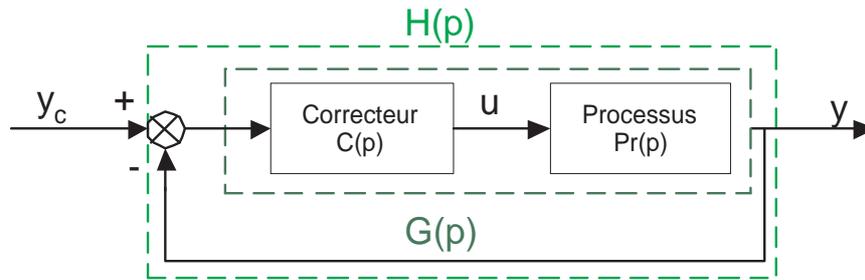


FIGURE 1.14 – Système à identifier.

L'**identification** a pour but de trouver la fonction de transfert  $Pr(p)$  (structure et coefficients) et donc le modèle mathématique qui représentera le comportement du processus afin de prédire celui-ci et donc de déterminer le correcteur qui assurera l'asservissement et la régulation du système.

### 1.3.2.2 Méthode de Strejc

Cette méthode est utilisable si le processus a une réponse indicielle sans dépassement. Le modèle proposé est le suivant :

$$P_r(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K.e^{-\theta p}}{(1 + \tau.p)^n}$$

L'ordre du système  $n$  et les coefficients de la fonction de transfert ( $K$ ,  $\theta$  et  $\tau$ ) sont déterminés à partir de la réponse indicielle et en particulier à partir de la détermination du point d'inflexion  $I$  de cette réponse (Fig. 1.15).

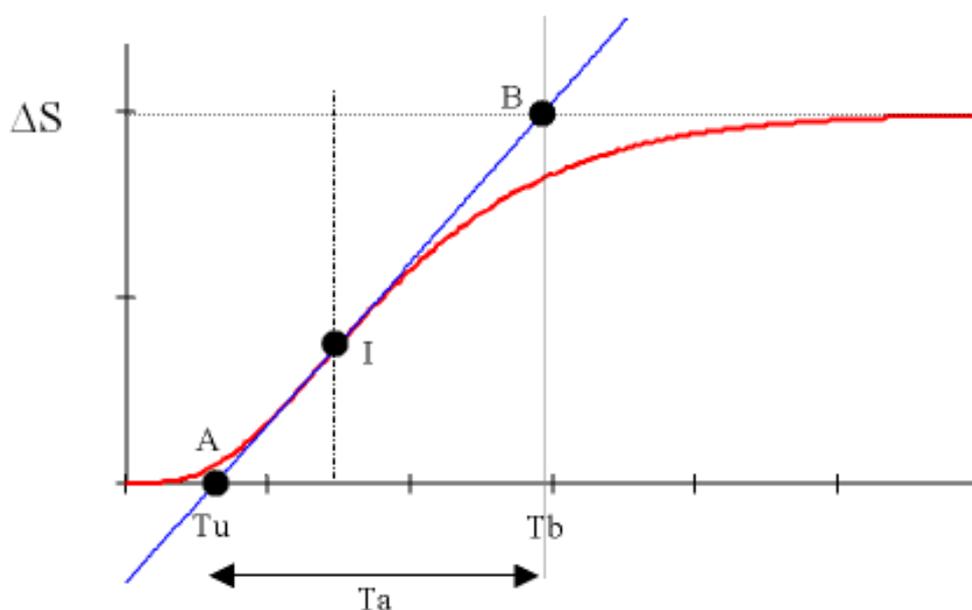


FIGURE 1.15 – Méthode de Strejc : réponse indicielle

**1.3.2.2.1 Rappel sur la notion de point d'inflexion d'une fonction  $y(t)$**  C'est le point où la dérivée seconde s'annule :  $d^2y/dt^2 = 0$  (correspondant au maximum de la dérivée première  $dy/dt > 0$ )

**1.3.2.2.2 Détermination des paramètres du modèle** La tangente  $AB$  au point d'inflexion permet de déterminer un temps  $T_u$  (abscisse du point  $A$ ) et un temps  $T_b$  (abscisse du point  $B$ ), instant où la tangente atteint la valeur finale  $\Delta S$ , et on pose :  $T_a = T_b - T_u$ .

Le rapport  $\left(\frac{T_u}{T_a}\right)_{\text{réel}}$  permet de déterminer l'ordre  $n$  du modèle en cherchant la valeur de ce rapport dans le Tab. 1.1 ou la valeur immédiatement inférieure notée  $\left(\frac{T_u}{T_a}\right)_{\text{tableau}}$ .

TABLE 1.1 – Tableau de Strejc

$n$	$T_u/T_a$	$T_u/\tau$	$T_a/\tau$
1	0	0	1
2	0.104	0.282	2.718
3	0.218	0.805	3.695
4	0.319	1.425	4.463
5	0.410	2.100	5.119
6	0.493	2.811	5.699
7	0.570	3.549	6.226
8	0.642	4.307	6.711
9	0.709	5.081	7.164
10	0.773	5.869	7.590

L'ordre  $n$  étant déterminé, la constante de temps  $\tau$  se déduit des colonnes No. 3 ou 4 de la ligne.

Le retard pur  $\theta$  est donné par :  $\theta = \Delta.T_a$  avec  $\Delta = \left(\frac{T_u}{T_a}\right)_{\text{réel}} - \left(\frac{T_u}{T_a}\right)_{\text{tableau}} \geq 0$ .

Le gain statique  $K$  est donné par :  $K = \frac{\Delta S}{\Delta E}$  où  $\Delta S$  est la valeur atteinte en régime permanent pour un échelon d'amplitude  $\Delta E$  en entrée.

**1.3.2.2.3 Exemple** Si l'on a :  $T_u/T_a = 0.5$ ;  $T_b = 10^{-2}s$ ;  $\Delta S = 8$ ;  $\Delta E = 4$ .

$\Rightarrow n = 6$ ;  $\tau = 1,17.10^{-3}$ ;  $\theta = 4.6.10^{-5}$ ;  $K = 2$ .

D'où la fonction de transfert :

$$P_r(p) = \frac{2.e^{-4,6.10^{-5}p}}{(1 + 1,17.10^{-3}p)^6}$$

(car :  $T_u = 3,3.10^{-3}$ ;  $T_a = 6,6.10^{-3}$  et  $\Delta = 0,007$ ).

**1.3.2.3 Méthode de Ziegler-Nichols**

On approxime le système par un premier ordre de constante de temps  $\tau = T_a$  associé à un retard pur de valeur  $\theta = T_u$  (voir Fig. 1.15) avec un gain statique :  $K = \frac{\Delta S}{\Delta E}$

La transmittance du modèle est alors :  $P_r(p) = \frac{K.e^{-T_u.p}}{1+T_a.p}$

**1.3.2.3.1 Exemple** Dans le cas de l'exemple précédent (§ 1.3.2.2.3) la fonction de transfert vaut :

$$P_r(p) = \frac{2.e^{-0,33.10^{-2}p}}{1 + 0,66.10^{-2}p}$$

### 1.3.2.4 Méthode de Broïda

On approxime le système par un premier ordre associé à un retard pur, mais on impose à la réponse de passer par deux points tels que la sortie prend les valeurs :  $S_1 = 0.28S_{max}$  et  $S_2 = 0.40S_{max}$  pour des instants  $t_1$  et  $t_2$  déterminés sur le relevé indiciel.

Le modèle du processus est défini par la fonction de transfert :  $P_r(p) = \frac{K.e^{-\theta.p}}{1+\tau.p}$

avec les paramètres suivants :  $\tau = 5.5(t_2 - t_1)$  ;  $\theta = 2.8t_1 - 1.8t_2$  ; et  $K = \frac{\Delta S}{\Delta E}$ .

## 1.4 Stabilité

L'objectif de la régulation est que la sortie suive l'entrée donc qu'au moins le système soit stable, c'est-à-dire que pour une entrée  $x$  donnée (qui est forcément bornée car c'est un signal réel) la sortie  $y$  ne tende jamais vers l'infini. Autrement le système s'autodétruit (ex. engins explosifs).

### 1.4.1 Condition générale de stabilité

#### 1.4.1.1 Cas général

**1.4.1.1.1 Définition** Un système est stable si, **excité par une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , il revient à sa position de repos.**

Soit  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  la fonction de transfert de ce système.

N.B : quand l'entrée  $x(t)$  est un pic de Dirac :  $x(t) = \delta(t)$ , on a alors :  $X(p) = TL[\delta(t)] = 1$  et donc  $Y(p) = H(p)$ .

Si le système est régi par une équation différentielle linéaire, on a :

$$a_n \frac{dy^n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{dx^m(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dx^{m-1}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

On suppose le signal  $x(t)$  causal et le système causal et relaxé :  $x(0^-) = 0$  et  $y(0^-) = 0 \dots$  i.e. toutes les conditions initiales sont nulles. Alors, la transformation de Laplace donne :

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \dots + b_1 p X(p) + b_0 X(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

En général  $n > m$ , et la décomposition de la fraction  $H(p)$  en éléments simples est du type :

$$H(p) = \sum_i \sum_{k=1}^{K_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(p - p_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{L_j} \frac{u_{j,l} p + v_{j,l}}{(p^2 + b_j p + c_j)^l}$$

On détermine les caractéristiques de la réponse impulsionnelle :

- les termes du premier ordre pour  $k = 1$ , du type  $\frac{\lambda_i}{p - p_i}$ , ont pour transformée de Laplace inverse  $e^{p_i t}$  avec  $p_i$  réel.
- Les termes du second ordre pour  $l = 1$ , du type  $\frac{u_j p + v_j}{p^2 + b_j p + c_j}$ , se décomposent en termes du premier ordre et donc donnent des termes en  $e^{p_i t}$  avec  $p_i$  imaginaire ou réel.

Or les termes  $e^{p_i t}$  imaginaires ou réels ne tendent vers l'infini que si  $Re(p_i) > 0$  (la partie imaginaire donnant une sinusoïde). On démontre sur ce principe la condition de stabilité :

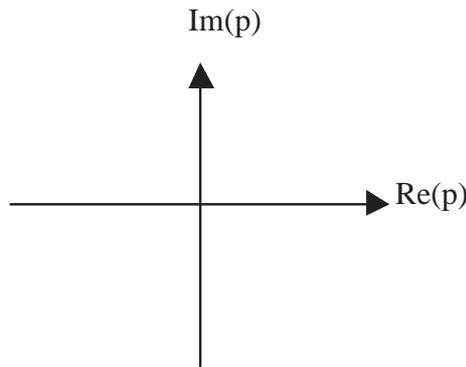


FIGURE 1.16 – Plan complexe en  $p$

**1.4.1.1.2 Condition mathématique** Un système est stable si **tous les pôles de sa fonction de transfert sont strictement à gauche de l’axe imaginaire** dans le plan complexe dédié à  $p$ , c’est-à-dire qu’ils sont tous à **partie réelle strictement négative** (Fig. 1.16).

**1.4.1.2 Cas du système bouclé**

On a établi l’expression de la FTBF (Eq. 1.1) d’un système bouclé à retour non unitaire (cf. Fig. 1.13) :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ce système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert  $H(p)$  sont à partie réelle strictement négative. Il faut donc déterminer les pôles de  $H(p)$ , c’est-à-dire les racines de son dénominateur  $D(p)$ .

Or  $D(p) = 0 \Leftrightarrow A(p)B(p) = -1$ . La détermination des valeurs de  $p$  pour lesquelles  $A(p)B(p) = -1$  nous indiquera la stabilité du système. Pour cela, il existe différentes méthodes.

**1.4.2 Critère algébrique de Routh-Hurwitz**

On suppose que  $H(p)$  est une fraction polynomiale :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec le polynôme du dénominateur :  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$ , et  $a_n > 0$ .

Pour étudier ce système, on construit un tableau dit de Routh (Tab. 1.2),

TABLE 1.2 – Tableau de Routh

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$p^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\dots$	$\dots$
$p^{n-3}$	$B_1$	$B_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p^0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

avec les coefficients :

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad A_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} \quad B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$$

NB : Les lignes incomplètes sont complétées par des 0.

Le critère de stabilité est le suivant :

- si certains  $a_i$  sont  $\leq 0$ ,  $D(p)$  a des racines à droite dans le plan complexe donc le système est instable
- **si tous les  $a_i$  sont  $> 0$  et si tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont de même signe (donc  $> 0$ ), le système est stable.**

Le nombre de changements de signe dans la première colonne du tableau est égal au nombre de pôles à partie réelle positive.

Une ligne de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures : on considère le polynôme ayant les coefficients de la ligne précédente, on le dérive et on remplace les zéros par les coefficients obtenus après dérivation.

Si l'on est amené à diviser par un coefficient égal à 0, on le considère égal à un  $\varepsilon$  très petit.

#### 1.4.2.1 Exemple

Soit le système :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 6p + 2p^2 + 3p^3 + p^4}$$

On obtient le Tab. 1.3. Ce système est instable car le coefficient  $\frac{6\varepsilon-3}{\varepsilon}$  est négatif.

TABLE 1.3 – Tableau de Routh sur un exemple

$p^4$	1	2	1
$p^3$	3	6	0
$p^2$	$0 = \varepsilon$	1	0
$p^1$	$\frac{6\varepsilon-3}{\varepsilon}$	0	0
$p^0$	1	0	0

#### 1.4.2.2 Limitation

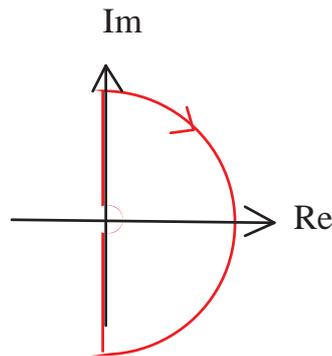
Cette méthode ne peut pas toujours être utilisée car elle nécessite la connaissance **algébrique** de la FTBF  $H(p)$  pour connaître la stabilité en BF (et la FTBO pour connaître la stabilité en BO). Or la FTBF est difficile à obtenir.

#### 1.4.3 Critère de stabilité de Nyquist

L'intérêt de ce critère est qu'il donne la stabilité en BF à partir d'une étude en BO.

On définit le **contour de Bromwich**  $\gamma$  : c'est le demi-cercle de rayon infini englobant le demi-plan droit du plan complexe  $p$  délimité par l'axe complexe en évitant les pôles placés sur l'axe (Fig. 1.17).

Quand  $p$  décrit  $\gamma$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  décrit  $\Gamma$ , appelé **lieu de Nyquist**.

FIGURE 1.17 – Contour de Bromwich  $\gamma$ 

Il existe un lien entre le nombre de pôles et de zéros de  $G(p)$  entourés par  $\gamma$  et la position et l'évolution de  $\Gamma$  par rapport au point  $-1$  appelé **point critique**.

Dans le cas où  $H(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$ , les pôles de  $H(p)$  sont les zéros de :  $D(p) = 1 + A(p)B(p)$ .

Pour que le système soit stable, ces zéros doivent être à partie réelle négative donc ils ne doivent pas être contenus dans  $\gamma$ . On doit donc comparer le lieu de Nyquist du dénominateur de  $H(p)$  avec le point 0, et le lieu de Nyquist,  $\Gamma$ , de  $G(p) = A(p)B(p)$  avec le point -1.

#### 1.4.3.1 Théorème de Nyquist

**Un système de FTBO  $A(p)B(p)$  qui n'a pas de pôle à droite dans le plan complexe est stable en BF si son lieu de Nyquist n'entoure pas le point -1.**

En général,  $\Gamma$  est symétrique par rapport à l'axe des réels lorsque le degré du dénominateur de la FTBO  $G(p)$  est  $>$  au degré du numérateur et  $G(p)$  stable en BO.

#### 1.4.3.2 Critère du revers

**Un système stable en boucle ouverte est stable en BF si le lieu de Nyquist de sa FTBO passe à droite du point critique -1 quand on le trace pour les  $p = j\omega$  croissants et positifs.**

Sur le diagramme de Nyquist, on indique par une flèche le sens des  $\omega$  croissants.

#### 1.4.4 Critère d'oscillation

Le système Fig. 1.13 oscillera si, pour une entrée nulle, la sortie est non nulle et bornée. Or :

$$Y(p) = A(p).\varepsilon(p) = A(p)[Y_c(p) - B(p).Y(p)]$$

Si  $Y_c(p) = 0$ , alors :  $Y(p) = -A(p).B(p).Y(p)$  donc :  $Y(p)[1 + A(p).B(p)] = 0$

Il y a alors deux cas :

- soit  $Y(p) = 0$  et il n'y a pas d'oscillation
- soit  $Y(p) \neq 0$  et il faut alors que  $1 + A(p).B(p) = 0$  soit  $A(p)B(p) = -1$  (donc  $D(p) = 0$ ).

C'est la condition d'oscillation :  $A(p)B(p) = -1$ .

Les deux **conditions d'oscillation** dites conditions **de Barkhausen** sont donc :

- $|A(p)|.|B(p)| = 1$  qui constitue la condition d'amplification
- $Arg[A(p)] + Arg[B(p)] = \pi$  qui permet de déterminer la fréquence d'oscillation.

Ces deux conditions ne sont respectées que pour la pulsation des oscillations obtenues en sortie.

## 1.4.5 Marge de stabilité

### 1.4.5.1 Définitions

Si pour certaines pulsations le gain augmente, le lieu de Nyquist peut passer de l'autre côté de  $-1$  et donc le gain peut déstabiliser le système. L'asservissement sera d'autant plus stable que  $\Gamma$  passe loin de  $-1$ , cette distance à  $-1$  définit la marge de stabilité.

- On définit le **point critique** tel que son module vaut 1 et son argument  $-180^\circ$ .
- **Marge de phase** :  $M_\phi = \text{Arg}[G(\omega_1)] + 180^\circ$  avec  $\omega_1$  telle que  $|G(\omega_1)| = 1$  (soit 0 dB)
- **Marge de gain** :  $M_g = -20 \log_{10} |G(\omega_\pi)|$  avec  $\omega_\pi$  telle que  $\text{Arg}[G(\omega_\pi)] = -180^\circ$  (soit  $-\pi$ )
- En général, on recherche les valeurs optimales :  $M_\phi = 45^\circ$  à  $60^\circ$  et  $M_g = 10\text{dB}$  à  $15\text{dB}$ .
- Pour un second ordre, un amortissement de  $\xi = 0.707$  donne une marge de phase de  $45^\circ$ .
- Ces marges de phase et de gain sont notées aussi :  $\Delta\Phi$  et  $\Delta G$ .

### 1.4.5.2 Signification physique

Ces marges représentent des marges de sécurité par rapport à l'état instable :

- la **marge de phase** permet de préserver la stabilité en dépit de la présence de retards parasites (par exemple dans la transmission des signaux) dont on n'aurait pas tenu compte dans l'étude de la stabilité : la phase du retard pur  $(-\omega\theta)$  provoque une réduction de la marge de phase.
- la **marge de gain** permet de préserver la stabilité en dépit des fluctuations de gain qui affectent en particulier les amplificateurs de la chaîne de puissance.

### 1.4.5.3 Marge absolue de stabilité

On parle de marge absolue de stabilité  $m_a (> 0)$  lorsqu'on impose aux parties réelles des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$  d'être inférieures à  $-m_a$ , ce qui revient à appliquer le critère de Routh à  $D(p - m_a)$  avec  $D(p)$  dénominateur de  $H(p)$ .

## 1.4.6 Détermination graphique de la stabilité à partir de la FTBO

### 1.4.6.1 Critère de stabilité

- Diagramme de Nyquist : lieu de  $G(j\omega)$  dans le plan complexe (Fig. 1.18)

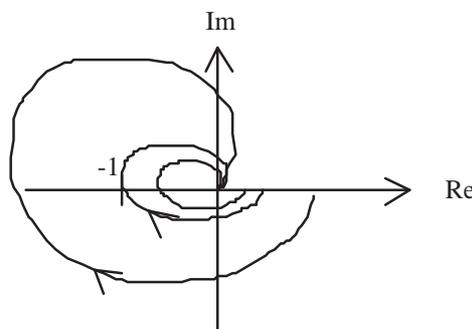


FIGURE 1.18 – Lieu de Nyquist d'un système : a) stable ; b) juste instable ; c) instable.

Un système stable en boucle ouverte est stable en BF si le lieu de Nyquist de sa FTBO passe à droite du point critique  $-1$  quand on le trace pour les  $p = j\omega$  croissants et positifs.

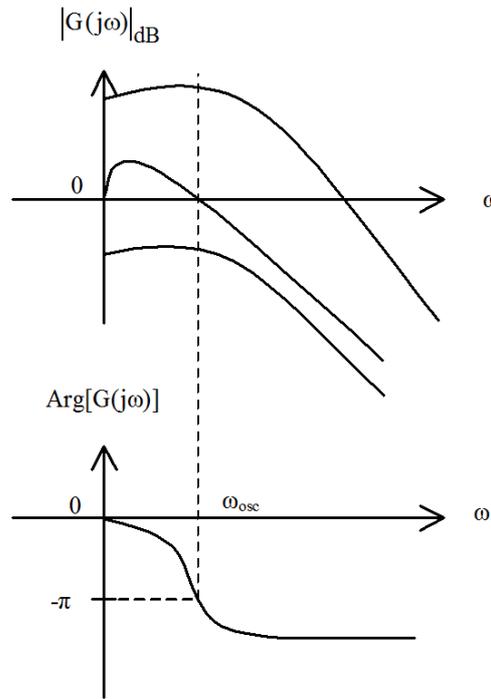


FIGURE 1.19 – Courbes de Bode d’un système : a) stable ; b) juste instable ; c) instable.

- Diagrammes de Bode : tracés de  $|G(j\omega)|_{dB}$  et de  $Arg[G(j\omega)]$  en fonction de  $\omega$  avec une échelle logarithmique en  $\omega$  (Fig. 1.19).  
 $\omega_{osc} = \omega_{\pi}$  est définie par  $Arg[G(j\omega_{osc})] = -\pi$ .  
 Le système est stable si  $|G(j\omega_{osc})|_{dB} < 0dB$  c’est-à-dire que la courbe d’amplitude passe en dessous de  $0dB$  pour  $\omega_{osc} = \omega_{\pi}$ .
- Diagramme de Black : lieu de Nichols tracé sur une abaque de Black (Fig. 1.20) (tracés de  $|G(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $Arg[G(j\omega)]$  en degrés)

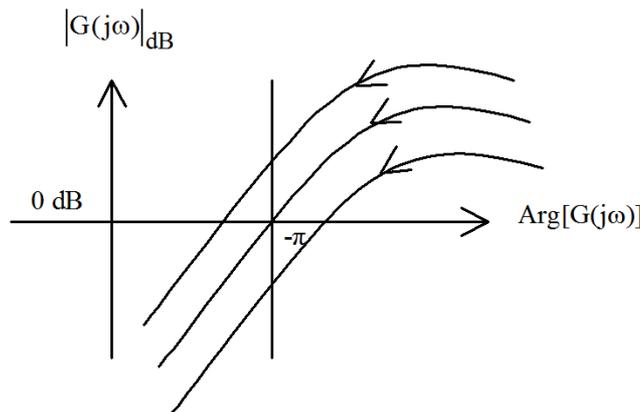


FIGURE 1.20 – Abaque de Black-Nichols : lieu d’un système : a) stable ; b) juste instable ; c) instable

Le système est stable si, en parcourant le lieu de  $|G(j\omega)|_{dB}$  dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique à droite.

N.B : L’abaque permet de lire, pour chaque point de la courbe de la fonction en BO, les valeurs correspondantes du gain et de la phase de la FTBF à retour unitaire (Fig. 13.3).

### 1.4.6.2 Marges de stabilité

Elles sont toutes définies graphiquement sur la Fig. 1.21.

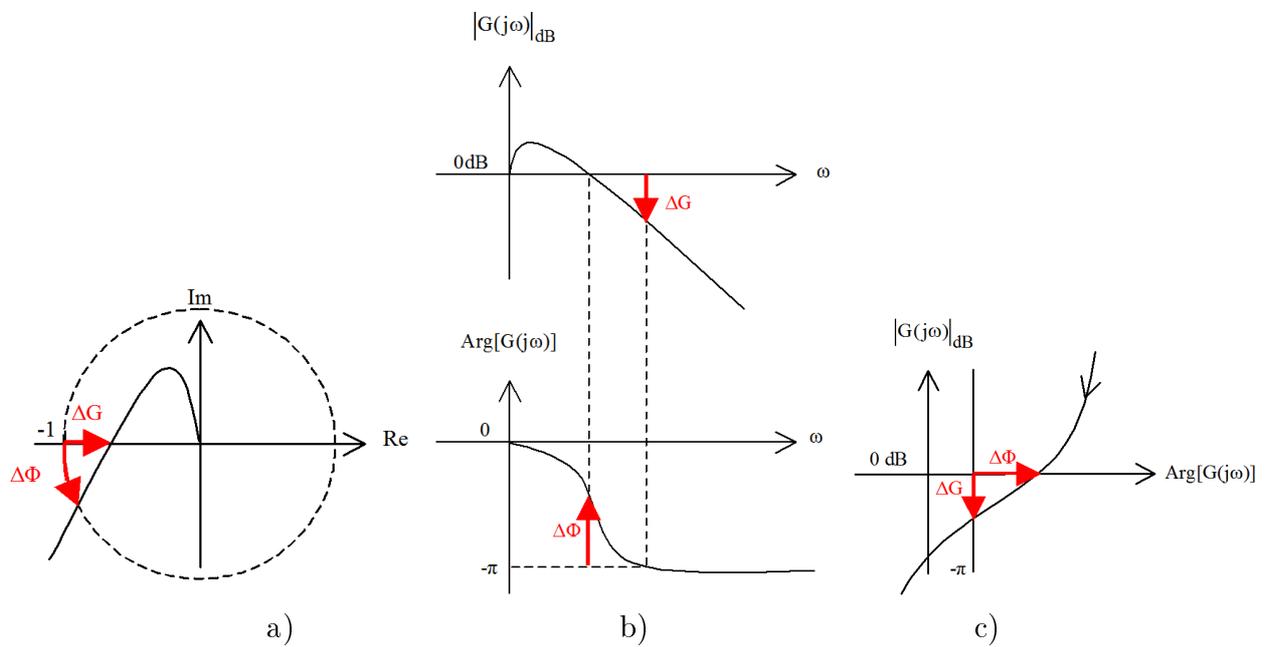


FIGURE 1.21 – Marges de stabilité sur diagrammes de : a) Nyquist ; b) Bode ; c) Black-Nichols.

# Chapitre 2

## Réglage des Correcteurs

### 2.1 Performances

#### 2.1.1 Introduction

On étudie la boucle de régulation/asservissement de la Fig. 2.1. Le système est à retour unitaire [3].

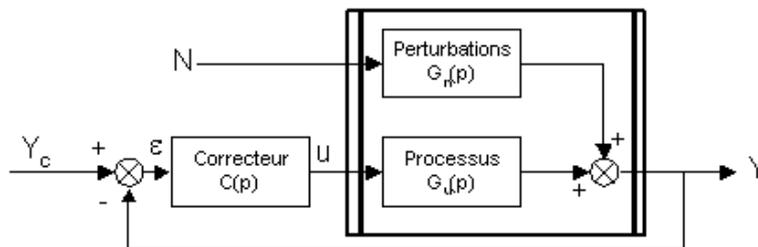


FIGURE 2.1 – Système bruité.

- $N(p) = TL[n(t)]$  (bruit ou *noise*) représente les perturbations qui agissent sur la grandeur de sortie  $Y(p) = TL[y(t)]$  au travers d'une fonction de transfert  $G_n(p)$ , gain des perturbations
- $G_u(p)$  représente le processus (gain utile)
- $C(p)$  est le correcteur qui aura pour but de réduire l'erreur.

$$Y(p) = G_u(p)C(p)[Y_c(p) - Y(p)] + G_n(p)N(p)$$

$$Y(p) = \frac{C(p)G_u(p)}{1 + C(p)G_u(p)}Y_c(p) + \frac{G_n(p)}{1 + C(p)G_u(p)}N(p)$$

L'étude du système d'un point de vue **régulation** se fait en considérant que la consigne  $y_c(t)$  est constante. Les variations de  $y(t)$  ne seront alors dues qu'aux perturbations  $n(t)$ . L'objectif est de réduire l'erreur et d'obtenir ainsi la **réjection des perturbations**.

L'étude du système d'un point de vue **asservissement** se fait en considérant que la consigne  $y_c(t)$  est variable mais que les perturbations sont nulles.  $y(t)$  devra alors suivre les variations de  $y_c(t)$ . L'objectif est toujours de réduire l'erreur.

La fonction de transfert en boucle ouverte vaut :  $G(p) = C(p)G_u(p)$ .

Pour la régulation ou l'asservissement, on va étudier la fonction de transfert en boucle fermée.

## 2.1.2 Réjection des perturbations par régulation

En régulation, comme  $Y_c(p) = 0$ , la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$Y(p) = \frac{G_n(p)}{1 + C(p)G_u(p)} N(p).$$

### 2.1.2.1 Hypothèses

- $N(p) = \frac{N_0}{p^r}$  N.B :  $r = 1$  pour l'échelon  $\leftrightarrow \frac{1}{p}$  ;  $r = 2$  pour la rampe  $\leftrightarrow \frac{1}{p^2}$
- $G_n(p) = \frac{K_n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}$
- $1 + C(p)G_u(p) = \frac{K_c K_u}{(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) p^n}$  où  $n$  est le nombre d'intégrations de la boucle ouverte.

On obtient donc :

$$Y(p) = \frac{K_n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \times \frac{(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) p^n}{K_c K_u} \times \frac{N_0}{p^r}$$

### 2.1.2.2 Objectif

L'objectif est que  $y = y_c$  or  $y_c(t) = 0$  (consigne **constante** donc **nulle en valeur relative** par rapport au point de repos choisi égal à cette constante). Donc on veut que :  $y(t) = 0$  pour  $t > t_0$  (i.e. au bout d'un temps minimal  $t_0$ ) donc en particulier que :  $y(\infty) = 0$ . Or le théorème de la valeur finale stipule que :

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$$

donc

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \times \frac{K_n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \cdot \frac{(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) p^n}{K_c K_u} \cdot \frac{N_0}{p^r} \right) \Rightarrow y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{K_n N_0}{K_c K_u} p^{n+1-r} \right)$$

### 2.1.2.3 Les différents cas

Trois cas se présentent (on pose  $\alpha = n + 1 - r$ ) :

- $n > r - 1$  :

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{K_n N_0}{K_c K_u} p^\alpha \right) \quad \text{avec : } \alpha \geq 1$$

donc  $y(\infty) = 0$ . La réjection des perturbations est complète au bout d'un certain temps.

- $n = r - 1$  :

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{K_n N_0}{K_c K_u} \right) = \frac{K_n N_0}{K_c K_u}.$$

La réjection des perturbations est incomplète mais elle sera d'autant meilleure que le gain en boucle ouverte  $K_c K_u$  sera grand.

- $n < r - 1$  :

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{K_n N_0}{K_c K_u} p^\alpha \right) \quad \text{avec : } \alpha < 0$$

donc  $y(\infty) = \infty$ . Il n'y a pas de réjection et les perturbations déstabilisent le système.

### 2.1.2.4 Conclusion

La réjection est d'autant meilleure que le **gain en boucle ouverte est grand** ( $K = K_c K_u$ ) et elle est complète si la boucle ouverte contient un **nombre suffisant d'intégrateurs** ( $n$ ).

N.B : La précision ne dépend que du système considéré.

### 2.1.3 Précision des asservissements

En asservissement, comme  $N(p) = 0$ , la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$Y(p) = \frac{C(p)G_u(p)}{1 + C(p)G_u(p)} Y_c(p)$$

#### 2.1.3.1 Calcul de l'erreur

$\varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p)$  et  $Y(p) = C(p)G_u(p)\varepsilon(p)$ , d'où :  $\varepsilon(p) = Y_c(p) - C(p)G_u(p)\varepsilon(p)$

Donc finalement :  $\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1+C(p)G_u(p)}$

#### 2.1.3.2 Hypothèse

$$C(p)G_u(p) = \frac{K}{p^n} \times \frac{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots}{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}$$

avec  $K = K_c K_u$  le gain en boucle ouverte. Donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1 + \frac{K}{p^n} \cdot \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots}{1+a_1p+a_2p^2+\dots}}$$

#### 2.1.3.3 Objectif

L'objectif est que  $y = y_c$  donc que la FTBF  $H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{C(p)G_u(p)}{1+C(p)G_u(p)}$  vaille :  $H(p) = 1$ .

Or vu sa forme,  $H(p) \neq 1$  donc on va se limiter à obtenir :

$\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = 1$  soit  $y(t) = y_c$  pour  $t \rightarrow \infty$  soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ .

Or  $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$  donc l'objectif se résume à :  $\lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0$  soit :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{Y_c(p)}{1 + \frac{K}{p^n} \frac{1+b_1p+b_2p^2+\dots}{1+a_1p+a_2p^2+\dots}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{Y_c(p)}{1 + \frac{K}{p^n}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^{n+1} \frac{Y_c(p)}{p^n + K} \right]$$

Et finalement l'objectif s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^{n+1} \frac{Y_c(p)}{p^n + K} \right] = 0$$

#### 2.1.3.4 Différents cas

Différents cas peuvent être étudiés :

- la réponse à un **échelon** en entrée :  $y_c(t) = E_0 \Rightarrow Y_c(p) = \frac{E_0}{p}$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^{n+1} \frac{E_0}{(p^n + K) \cdot p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^n \frac{E_0}{(p^n + K)} \right]$$

$\Rightarrow$  si  $n = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{E_0}{1+K}$  donc l'erreur est d'autant plus petite que le gain en boucle ouverte  $K = K_c K_u$  est grand

$\Rightarrow$  si  $n \geq 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$  donc l'erreur est nulle

- la réponse à une **rampe** comme consigne en entrée :  $y_c(t) = a.t \Rightarrow Y_c(p) = \frac{a}{p^2}$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^{n+1} \frac{a}{(p^n + K) p^2} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p^{n-1} \frac{a}{(p^n + K)} \right]$$

- ⇒ si  $n \geq 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$  donc l'erreur est nulle
- ⇒ si  $n = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{a}{K}$  donc l'erreur est d'autant plus petite que le gain en boucle ouverte  $K = K_c K_u$  est grand
- ⇒ si  $n = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$  donc l'erreur tend vers l'infini, le système est instable

### 2.1.3.5 Conclusion

Ces résultats sont résumés dans le Tab. 2.1.

TABLE 2.1 – Classes d'erreur

	$y_c(t) = E_0.U(t)$	$y_c(t) = a.t$	$y_c(t) = \frac{1}{2}.b.t^2$
$n = 0$	$\epsilon_0 = \frac{E_0}{1+K}$	$\epsilon_1 = \infty$	$\epsilon_2 = \infty$
$n = 1$	$\epsilon_0 = 0$	$\epsilon_1 = \frac{a}{K}$	$\epsilon_2 = \infty$
$n = 2$	$\epsilon_0 = 0$	$\epsilon_1 = 0$	$\epsilon_2 = \frac{b}{K}$

Le système étudié étant défini sur la Fig. 2.2 où la FTBO est du type :

$$G(p) = \frac{K}{p^n (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)}$$

avec  $n$  le nombre d'intégrations de la boucle ouverte appelé **classe** du système.

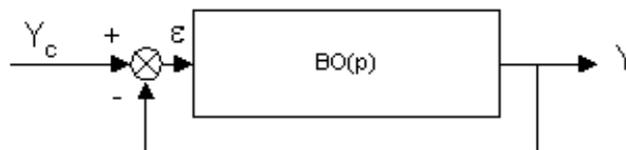


FIGURE 2.2 – Système bouclé à retour unitaire, cf. Fig. 1.12.

N.B : La précision dépend du système considéré et du signal appliqué en entrée.

- On appelle **erreur de position** l'erreur  $\epsilon_0$  en réponse à un échelon.
- On appelle erreur de **traînage** ou **erreur de vitesse** l'erreur  $\epsilon_1$  en réponse à une rampe.

## 2.1.4 Critères de Rapidité

### 2.1.4.1 Temps de réponse

Pour étudier la rapidité, on définit la notion de temps de réponse : c'est le temps que met le système pour atteindre  $x\%$  de la valeur finale sans s'en écarter de plus de  $(100 - x)\%$ . Typiquement, on prend  $x = 95$  : d'où les taux de 95% et 5%.

### 2.1.4.2 Bande passante

Quand une fonction de transfert  $H(p)$  ne contient pas d'intégrateur, on a :  $H(0) = K$  (gain statique).

La bande passante à  $X$  dB est la bande de pulsations pour lesquelles  $\left| \frac{H(j\omega)}{H(0)} \right|_{dB} \geq X$  dB.

A l'intérieur de cette bande, le signal n'est atténué que d'une valeur plus faible que  $X$ .

On définit en général :

- la bande passante à -3 dB :  $\left| \frac{H(j\omega)}{H(0)} \right|_{dB} \geq -3$  dB donc  $\left| \frac{H(j\omega)}{H(0)} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

- la bande passante à -6 dB :  $\left| \frac{H(j\omega)}{H(0)} \right|_{dB} \geq -6$  dB donc  $\left| \frac{H(j\omega)}{H(0)} \right| \geq \frac{1}{2}$

On démontre que l'amélioration de la rapidité passe par l'élargissement de la bande passante qui peut être obtenu par rebouclage (cf. exemple avec un premier ordre  $G(p) = 1/(1 + \tau p)$ ).

### 2.1.5 Conclusion

- Stabilité et rapidité ont des traductions dans le domaine fréquentiel ; le choix du correcteur va permettre de placer  $G(j\omega)$  au mieux dans le diagramme de Nyquist.
- Pour la stabilité, le lieu de Nyquist va s'écartier du point  $-1$  ; et pour la précision il va falloir placer des intégrateurs dans la boucle ouverte, on a donc un **dilemme entre stabilité et précision**.

## 2.2 Le correcteur PID analogique

### 2.2.1 La correction des systèmes asservis

Soit un système dont la fonction de transfert  $G_u(p)$  est connue grâce, par exemple, à une identification (Fig. 2.3). On en déduit sa stabilité et ses performances. Celles-ci sont plus ou moins satisfaisantes pour un usage donné. La correction du système permet d'améliorer les performances en fonction d'un cahier des charges déterminé.

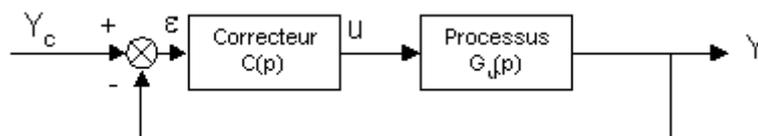


FIGURE 2.3 – Système avec correcteur, cf Fig. 1.14.

- Pour augmenter la précision (et la rapidité), on peut augmenter le gain  $K$  en BO donc on va choisir un correcteur réalisant cette action, dit **correcteur proportionnel** :

$$C(p) = K_c$$

Il faudra choisir le correcteur de manière à ne pas rendre le système instable.

- Pour augmenter la précision, on peut aussi ajouter un intégrateur dans la BO donc on va choisir un correcteur réalisant cette action, dit **correcteur proportionnel intégral** :

$$C(p) = \frac{K'_c}{p}$$

- Pour augmenter la rapidité, on peut ajouter un dérivateur dans la BO donc on va choisir un correcteur réalisant cette action, dit **correcteur proportionnel dérivé** :

$$C(p) = K''_c p$$

⇒ on va donc faire agir trois facteurs PID

Le gain en boucle ouverte est noté  $K = K_c K_u$  produit du gain du processus et du gain du correcteur.

### 2.2.2 Correcteur proportionnel P

#### 2.2.2.1 Définition

Sa fonction de transfert vaut :  $C(p) = K_c$  avec  $K_c > 0$ , d'où ses courbes de Bode Fig. 2.4.

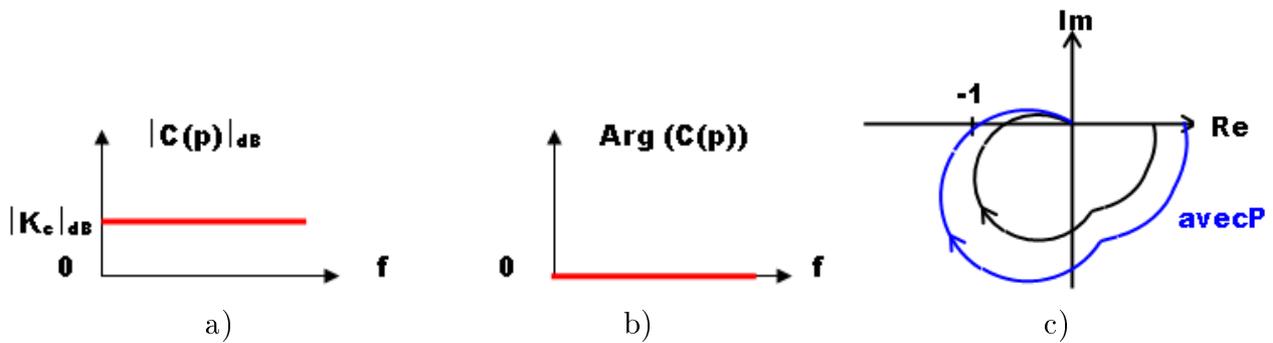


FIGURE 2.4 – Correcteur proportionnel : a) gain ; b) phase ; c) effet.

### 2.2.2.2 Action sur le système

Pour un système de classe 0, l'erreur lors d'un essai indiciel d'amplitude  $E_0$  vaut :  $\varepsilon_0 = \frac{E_0}{1+K}$  donc si l'on augmente  $K_c$  on réduit l'erreur. Le système est **plus précis mais il est moins stable**, et il peut même être destabilisé (cf. Fig. 2.4c).

## 2.2.3 Correcteur proportionnel intégral PI

### 2.2.3.1 Définition

Sa fonction de transfert vaut :  $C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$  avec :  $K_c > 0, \tau_i > 0 \iff$

$$C(p) = K_c \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}\right) = \frac{K_c}{\tau_i} \left(\frac{1 + \tau_i p}{p}\right)$$

On parle de correcteur à **retard de phase** (cf. courbes de Bode Fig. 2.5).

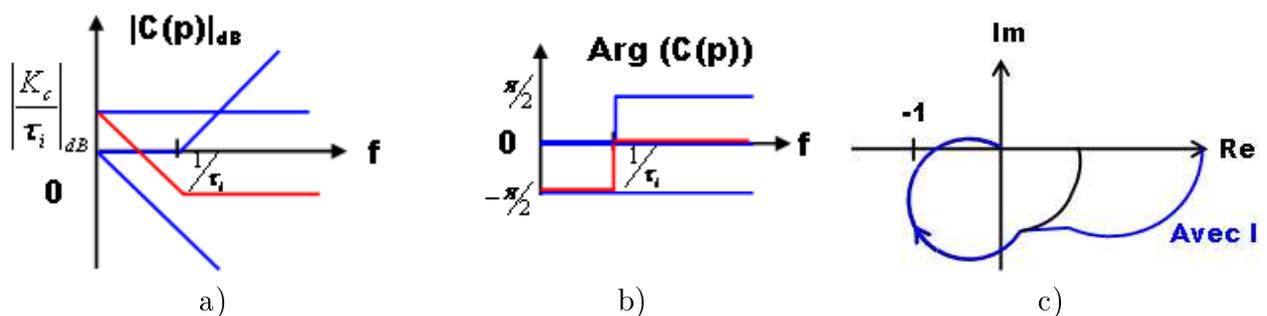


FIGURE 2.5 – Correcteur proportionnel intégral : a) gain ; b) phase ; c) effet.

### 2.2.3.2 Action sur le système

Il **améliore la précision**. Suivant la marge de phase du système, on place son action à une décade avant la pulsation critique ou plus près (à  $\omega_c/4$ ).

Dans le cas d'une seule action intégrale, le lieu du système est modifié comme indiqué Fig. 2.5c. Le gain n'est augmenté qu'aux basses fréquences : le système est plus précis et sa stabilité n'est pas modifiée.

## 2.2.4 Correcteur proportionnel dérivé PD

### 2.2.4.1 Définition

Sa fonction de transfert vaut :  $C(p) = K_c(1 + \tau_d p)$ .

On parle de correcteur à **avance de phase** (Fig. 2.6).

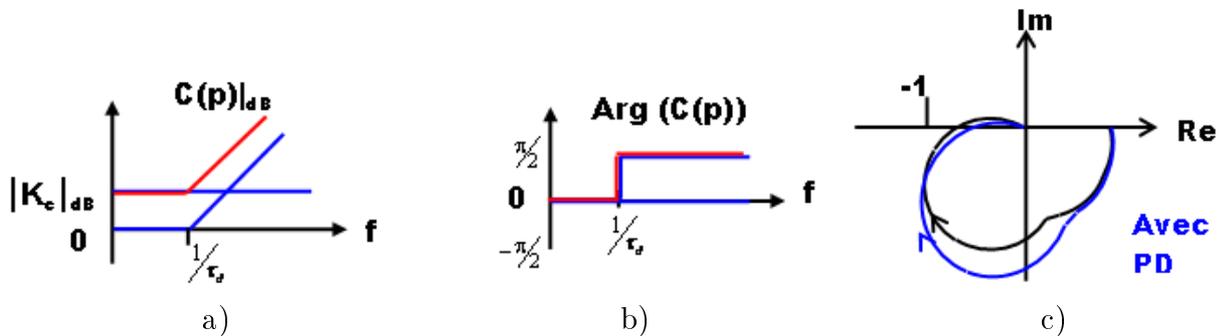


FIGURE 2.6 – Correcteur proportionnel dérivé : a) gain ; b) phase ; c) effet.

### 2.2.4.2 Action sur le système

Il **améliore la stabilité**.

En général, on place son action aux alentours de la pulsation critique (telle que le gain est de 1) :

- il augmente la marge de phase et donc stabilise le système
- il augmente le gain et donc améliore la rapidité.

Dans le cas d'une seule action dérivée, le lieu du système est modifié comme sur la Fig. 2.6c. Le système est stabilisé.

## 2.2.5 Correcteur proportionnel intégral dérivé PID

### 2.2.5.1 Définition

Sa fonction de transfert vaut :

$$C(p) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right) = K_c \left( \frac{1 + \tau_i p + \tau_i \tau_d p^2}{\tau_i p} \right) = \frac{K_c}{\tau_i} \frac{1}{p} (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

Cela suppose que le trinôme a un discriminant positif :  $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow \tau_i > 4\tau_d$ . Les deux racines donnent deux constantes de temps :  $\tau_1 = \frac{2\tau_d}{1 - \sqrt{1 - 4\tau_d/\tau_i}}$  et  $\tau_2 = \frac{2\tau_d}{1 + \sqrt{1 - 4\tau_d/\tau_i}}$ .

Ses courbes de Bode sont présentées Fig. 2.7 (où  $\tau_1 > \tau_2$ ).

### 2.2.5.2 Action sur le système

- Pour les hautes fréquences, le correcteur à une action amplificatrice et avance de phase.
- Pour les basses fréquences, le correcteur à une action amplificatrice et retard de phase.
- Pour les moyennes fréquences, le correcteur affecte peu le système.

## 2.2.6 Structure de quelques correcteurs

Un régulateur PID peut se réaliser avec des circuits à AOP [4]. Remarques :

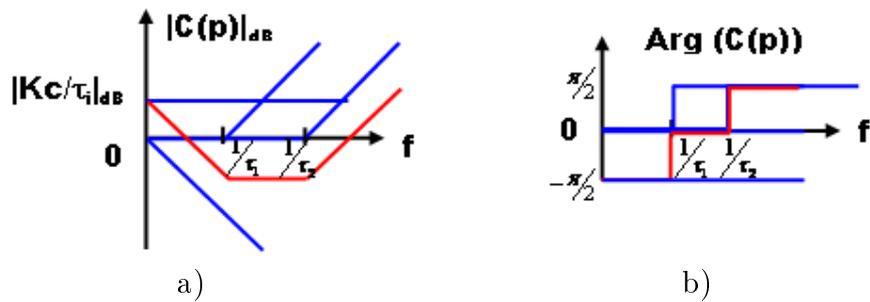


FIGURE 2.7 – Correcteur PID : a) Gain ; b) Phase.

- Il est impossible de réaliser un intégrateur pur avec des AOP (le bruit suffit à faire saturer l'AOP)
- L'amplification en haute fréquence amplifie aussi le bruit.

⇒ on propose donc les structures suivantes pour réaliser les correcteurs.

### 2.2.6.1 Avance de phase

Sa fonction de transfert est définie par (voir abaque Fig. 13.2) :

$$C(p) = K_c \left( \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} \right) \quad \text{avec : } a > 1$$

Il peut être réalisé par le circuit de la Fig. 2.8a).

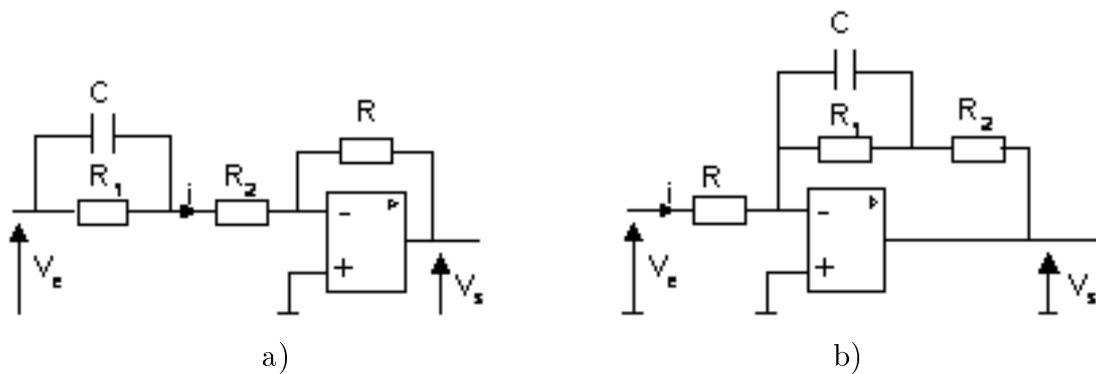


FIGURE 2.8 – a) Filtre à avance de phase ; b) Filtre à retard de phase

$$\begin{cases} V_s(p) = -R \cdot I(p) \\ V_e(p) = [R_2 + (R_1 // C)] I(p) \end{cases}$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -R \frac{1}{R_2 + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{Cp}}{R_1 + \frac{1}{Cp}}} = -R \frac{1}{R_2 + \frac{R_1}{R_1 Cp + 1}} = -R \frac{1 + R_1 Cp}{(1 + R_1 Cp) R_2 + R_1} = -R \frac{1 + R_1 Cp}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cp}$$

$$\Rightarrow \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = - \left( \frac{R}{R_1 + R_2} \right) \frac{1 + R_1 Cp}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \\ a = \frac{R_1 C}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ K_c = -\frac{R}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

### 2.2.6.2 Retard de phase

Il est défini par :

$$C(p) = K_c \left( \frac{1 + \tau p}{1 + b\tau p} \right) \quad \text{avec : } b > 1$$

Il peut être réalisé par le circuit de la Fig. 2.8b).

$$\begin{cases} V_e(p) = R.I(p) \\ V_s(p) = -[R_2 + (R_1//C)].I(p) \end{cases}$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = - \left( R_2 + \frac{R_1}{R_1 C p + 1} \right) \frac{1}{R} = - \frac{1}{R} \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C p}{1 + R_1 C p} \Rightarrow \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = - \frac{R_1 + R_2}{R} \frac{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C p}{1 + R_1 C p}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \\ b = \frac{R_1 C}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ K_c = - \frac{R_1 + R_2}{R} \end{cases}$$

## 2.3 Méthodes de réglage des PID

- Action proportionnelle : si  $K_p \uparrow$  alors  $\varepsilon_{statique} \downarrow$
- Action intégrale : permet d'annuler l'erreur de position
- Action dérivée : permet d'anticiper (prend en compte la vitesse d'évolution) donc augmente la **rapidité**

### 2.3.1 Réglage expérimental

On règle les actions l'une après l'autre. On étudie le système suivant pour  $y_c = 0$  (Fig. 2.9).

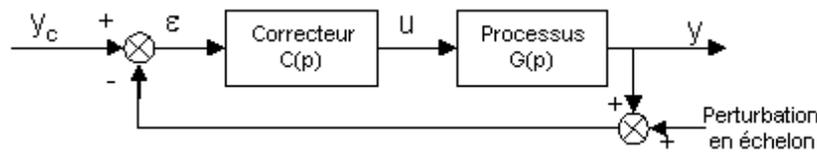


FIGURE 2.9 – Système perturbé avec correcteur à régler.

#### 2.3.1.1 Premier réglage : action proportionnelle P

$C(p) = K_p$ . Trois types de réponse peuvent être obtenus :

- L'action proportionnelle est trop faible, il faut augmenter  $K_p$  : Fig. 2.10a).

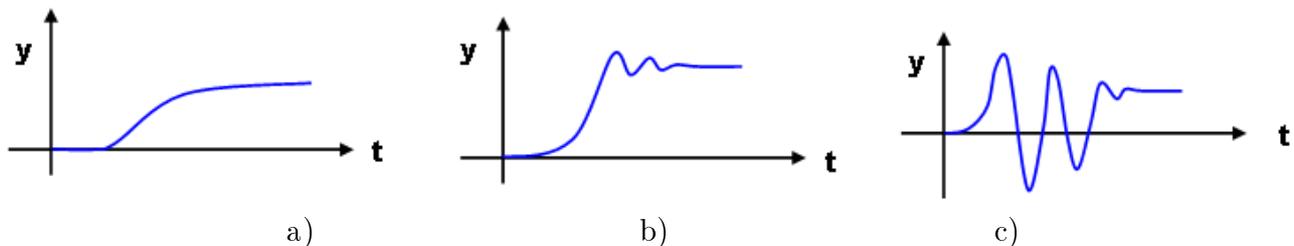


FIGURE 2.10 – Correction proportionnelle : a) trop faible ; b) correcte ; c) trop forte.

- L'action proportionnelle est correcte : Fig. 2.10b).
- L'action proportionnelle est trop forte, il faut diminuer  $K_p$  : Fig. 2.10c).

### 2.3.1.2 Second réglage : action intégrale I

$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$ . Trois types de réponse peuvent être obtenus :

- L'action intégrale est trop faible (l'erreur n'est pas nulle), il faut diminuer  $\tau_i$  : Fig. 2.11a).

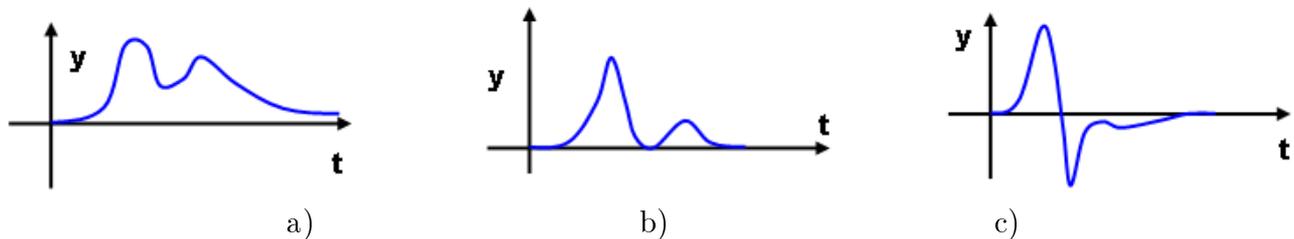


FIGURE 2.11 – Correction intégrale : a) trop faible ; b) correcte ; c) trop forte.

- L'action intégrale est correcte (l'erreur est nulle) : Fig. 2.11b).
- L'action intégrale est trop forte, il faut augmenter  $\tau_i$  (les oscillations sont trop importantes) : Fig. 2.11c).

### 2.3.1.3 Troisième réglage : action dérivée D

$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right) \cdot (1 + \tau_d p)$ . Deux types de réponse peuvent être obtenus :

- L'action dérivée est trop forte (les oscillations sont trop importantes), il faut diminuer  $\tau_d$  : (Fig. 2.12a).

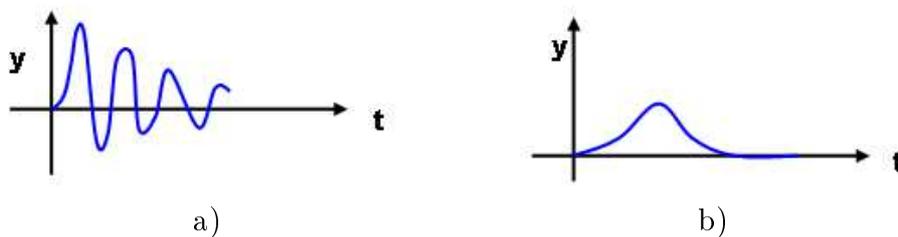


FIGURE 2.12 – Correction dérivée : a) trop forte ; b) correcte.

- L'action dérivée est correcte (Fig. 2.12b).

## 2.3.2 Méthode de Ziegler-Nichols

Deux essais peuvent permettre de déterminer le correcteur PID.

### 2.3.2.1 Essai indiciel en boucle ouverte

Soit  $(AB)$  la tangente au point d'inflexion. On appelle  $\theta = T_u$  son intersection avec l'axe des abscisses et  $a$  sa pente (Fig. 2.13).

### 2.3.2.2 Essai de pompage

Il s'agit d'une mise en oscillation en boucle fermée (Fig. 2.14). Cette méthode est utilisée quand le processus contient une intégration (donc est instable) ou qu'il est intrinsèquement instable en boucle ouverte : il est alors impossible d'ouvrir la boucle.

On note  $k_0$  la valeur du gain pour lequel apparaissent des oscillations dont on nomme  $T_0$  la période.

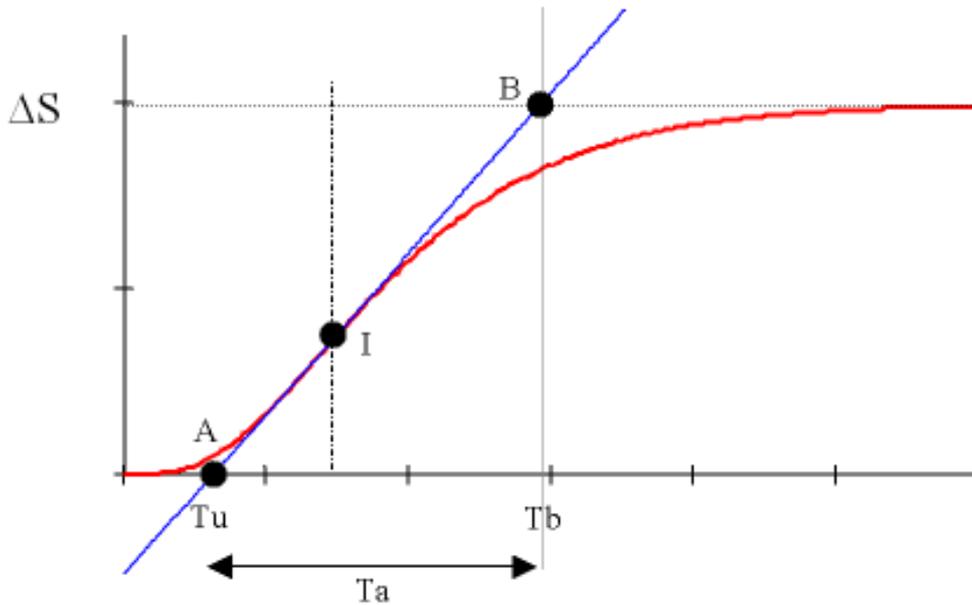


FIGURE 2.13 – Méthode de Ziegler-Nichols cf Fig. 1.15

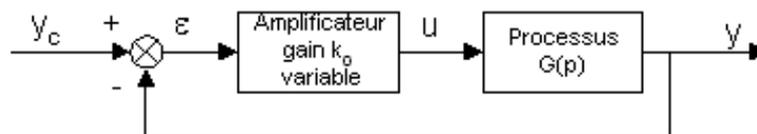


FIGURE 2.14 – Pompage.

**2.3.2.3 Tableau des correcteurs**

Pour le réglage des paramètres des PID suite à ces essais : cf. Tab. 2.2.

TABLE 2.2 – Réglage des paramètres PID

Régulateur : $C(p)$	Essai indiciel : $(a, \theta)$	Essai de pompage : $(k_0, T_0)$
$C(p) = k_p$	$k_p = \frac{1}{a \cdot \theta}$	$k_p = 0.5k_0$
$C(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$	$k_p = \frac{0.9}{a \cdot \theta}$ $\tau_i = 3.3\theta$	$k_p = 0.45k_0$ $\tau_i = 0.83T_0$
$C(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p\right)$	$k_p = \frac{1.2}{a \cdot \theta}$ $\tau_i = 2\theta$ $\tau_d = 0.5\theta$	$k_p = 0.6k_0$ $\tau_i = 0.5T_0$ $\tau_d = 0.125T_0$

**2.3.3 Critère de Naslin**

1. On considère un processus de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad \text{avec : } a_i > 0$$

On note les rapports caractéristiques :  $r_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1}a_{i-1}}$ .

Si l'on fait le choix  $b_0 = a_0$ , et  $r_i = \alpha$  avec :  $1.8 \leq \alpha \leq 2.4$ , alors la réponse indicielle présente un dépassement  $D$  en % à l'instant  $t_D$  tel que :

$$\begin{cases} \log_{10}(D\%) = 4.8 - 2\alpha \\ t_D = 2.2 \frac{a_1}{a_0} \end{cases}$$

On obtient un amortissement correct pour :  $r_i \geq 2$

2. On considère un processus de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad \text{avec : } a_i > 0 \text{ et } b_i > 0$$

Le réglage préconisé est tel que :  $r_1 = 1.5 + 4 \frac{a_0 b_1}{a_1 b_0} (\alpha - 1.5)$

### 2.3.4 Tableau récapitulatif

cf. Tab. 2.3

TABLE 2.3 – Tableau récapitulatif

Processus $G(p) = \dots$	Correcteur P $C(p) = k_p$	Correcteur PI $C(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$	Correcteur PD $C(p) = k_p (1 + \tau_d p)$	Correcteur PID $C(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p\right)$
$\frac{k}{p} e^{-\theta p}$	-	-	$k_p = \frac{\sqrt{2}}{2k}$ $\tau_d = 4 \frac{\theta}{3\pi}$	$k_p < \frac{0.8}{k \cdot \theta}$ $\tau_d = 0.4\theta$ $\tau_i \geq 4 \cdot \theta$
$\frac{k}{1 + \tau p}$	-	$k_p > \frac{1}{k}$ $\tau_i = \tau$	-	-
$\frac{k}{1 + \tau p} e^{-\theta p}$	$k_p = \frac{0.3\tau}{k \cdot \theta}$	$k_p = \frac{0.35\tau}{k \cdot \theta}$ $\tau_i = 1.2\tau$	-	$k_p = \frac{0.6\tau}{k \cdot \theta}$ $\tau_i = \tau$ $\tau_d = 0.5\theta$
$\frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ avec $\tau_1 > \tau_2$	-	$k_p > \frac{1}{k}$ $\tau_i = \tau_1$	-	(*)

(\*) dans ce cas, le PID utilisé est :  $C(p) = k_p \frac{(1 + \tau'_i p)(1 + \tau'_d p)}{\tau'_i p}$  avec  $\tau'_i = \tau_1$ ,  $\tau'_d = \tau_2$  et  $k_p \geq \frac{1}{k}$

### 2.3.5 Méthode des modèles

Soit le système bouclé (cf. Fig. 2.15) de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

La fonction de transfert idéale pour la boucle fermée serait  $H(p) = 1$ , mais on aurait alors :  $C(p)G(p) = 1 + C(p)G(p)$ , ce qui est évidemment impossible. On ne pourra donc pas trouver

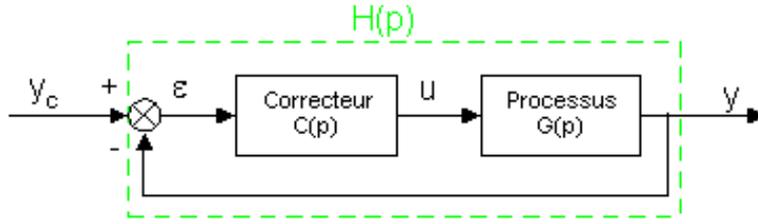


FIGURE 2.15 – Modèle de système bouclé, cf. Fig. 1.14.

un correcteur permettant d'obtenir  $H(p) = 1$ . On se restreint donc à trouver un correcteur tel que  $H(p)$  soit égale à un modèle  $H_m(p)$ . On choisit alors :

$$H_m(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

Donc la fonction de transfert du correcteur à utiliser est :  $C(p) = \frac{H_m(p)}{G(p)[1-H_m(p)]}$

La réalisabilité de  $C(p)$  n'est pas assurée mais il faut au moins que :

$$d^o [G(p) (1 - H_m(p))] \geq d^o [H_m(p)]$$

### 2.3.5.1 Exemple 1

$$\begin{cases} G(p) = \frac{K_0}{1+\tau_0 p} \\ H_m(p) = \frac{1}{1+\tau_1 p} \text{ avec } \tau_1 < \tau_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{\frac{1}{1+\tau_1 p}}{\frac{K_0}{1+\tau_0 p} \left(1 - \frac{1}{1+\tau_1 p}\right)} = \frac{1 + \tau_0 p}{K_0} \frac{1}{(1 + \tau_1 p - 1)}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1+\tau_0 p}{K_0 \tau_1 p} = \frac{1}{K_0 \tau_1 p} + \frac{\tau_0}{K_0 \tau_1} = \frac{\tau_0}{K_0 \tau_1} \left(1 + \frac{1}{\tau_0 p}\right) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right) \text{ avec } \begin{cases} K_c = \frac{\tau_0}{K_0 \tau_1} \\ \tau_i = \tau_0 \end{cases}$$

N.B : Ces résultats sont cohérents avec le tableau Tab. 2.3.

### 2.3.5.2 Exemple 2

$$\begin{cases} G(p) = \frac{K_0}{1+\tau_0 p} \cdot e^{-p\theta} \\ H_m(p) = \frac{1}{1+\tau_1 p} \cdot e^{-p\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{\frac{1}{1+\tau_1 p} e^{-p\theta}}{\frac{K_0}{1+\tau_0 p} e^{-p\theta} \left(1 - \frac{1}{1+\tau_1 p} e^{-p\theta}\right)} = \frac{1 + \tau_0 p}{K_0} \frac{1}{(1 + \tau_1 p - e^{-p\theta})}$$

On approxime :  $e^{-p\theta} = \frac{1-p\frac{\theta}{2}}{1+p\frac{\theta}{2}}$ .

donc

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{K_0} \frac{1}{\left(1 + \tau_1 p - \frac{1-p\frac{\theta}{2}}{1+p\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{K_0} \frac{1 + p\frac{\theta}{2}}{(1 + p\frac{\theta}{2})(1 + \tau_1 p) - (1 - p\frac{\theta}{2})} = \frac{1 + \tau_0 p}{K_0} \frac{1 + p\frac{\theta}{2}}{1 + p\frac{\theta}{2} + \tau_1 p + \tau_1 \frac{\theta}{2} p^2 - 1 + p\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1}{K_0 \cdot p} \frac{(1 + \tau_0 p) (1 + \frac{\theta}{2} p)}{\theta + \tau_1 + \tau_1 \frac{\theta}{2} p} = \frac{1}{K_0 (\theta + \tau_1) p} \frac{(1 + \tau_0 p) (1 + \frac{\theta}{2} p)}{1 + \frac{\tau_1 \frac{\theta}{2}}{\theta + \tau_1} p}$$

### 2.3.6 Conclusion

- **2 méthodes** basées directement sur des **essais** expérimentaux (réglage expérimental et Ziegler-Nichols)
- **3 méthodes** basées sur la fonction de transfert, donc dépendant de la précision de l'**identification** (Naslin, Tableau récapitulatif, Modèle)  $\Rightarrow$  attention au problème éventuel d'accumulation des erreurs dans ce cas.

## 2.4 Régulation analogique pilotée par ordinateur

Le correcteur analogique est remplacé par un ordinateur. Pour cela, on **discrétise la loi de commande** (cf. Fig. 2.16).

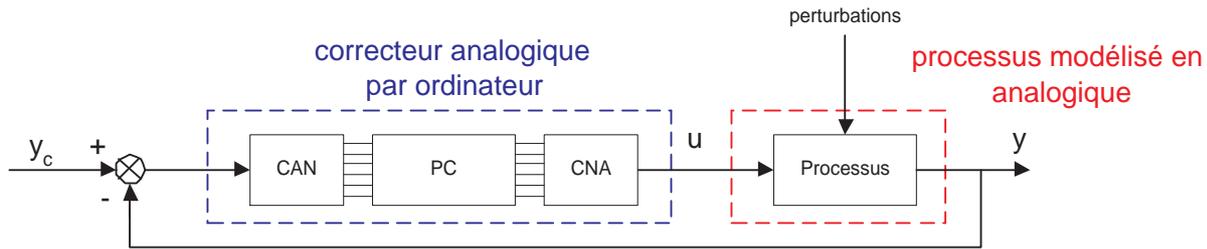


FIGURE 2.16 – Principe de la correction numérique, cf. Fig. 1.6.

Pour un PID de fonction de transfert :

$C(p) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$ , on obtient :

$$U(p) = K_c \left[ \varepsilon(p) + \frac{1}{\tau_i} \frac{\varepsilon(p)}{p} + \tau_d p \varepsilon(p) \right]$$

La loi de commande correspondante est donc :

$$u(t) = K_c \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \varepsilon(x) dx + \tau_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$$

On pose  $t = kT_e$  avec  $T_e$  la période d'échantillonnage. Le PC ne va calculer les valeurs de  $u(t)$  qu'aux instants d'échantillonnage donc  $u(kT_e) = K_c \left[ \varepsilon(kT_e) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^{kT_e} \varepsilon(x) dx + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt}(kT_e) \right]$

On approxime l'intégrale et la dérivée par les formules numériques équivalentes (somme et différence) et on représente les signaux numérisés (variable discrète) :

$$\begin{cases} \int_0^{kT_e} \varepsilon(x) dx \Leftrightarrow I(k) = \sum_{i=1}^k \varepsilon(i) T_e = T_e \sum_{i=1}^k \varepsilon(i) \\ \frac{d\varepsilon}{dt}(kT_e) \Leftrightarrow D(k) = \frac{\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)}{T_e} \end{cases}$$

d'où l'expression discrète de la loi de commande :

$$u(k) = K_c \left[ \varepsilon(k) + \frac{T_e}{\tau_i} \sum_{i=1}^k \varepsilon(i) + \frac{\tau_d}{T_e} [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)] \right]$$

$$u(k-1) = K_c \left[ \varepsilon(k-1) + \frac{T_e}{\tau_i} \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon(i) + \frac{\tau_d}{T_e} (\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2)) \right]$$

$$u(k) - u(k-1) = K_c \left[ \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) + \frac{T_e}{\tau_i} \varepsilon(k) + \frac{\tau_d}{T_e} (\varepsilon(k) - 2\varepsilon(k-1) + \varepsilon(k-2)) \right]$$

D'où l'équation aux différences du système numérique :

$$u(k) - u(k-1) = K_c \left[ \left( 1 + \frac{T_e}{\tau_i} + \frac{\tau_d}{T_e} \right) \varepsilon(k) - \left( 1 + 2\frac{\tau_d}{T_e} \right) \varepsilon(k-1) + \frac{\tau_d}{T_e} \varepsilon(k-2) \right]$$

Il reste à programmer ce calcul (équation de récurrence, usage de la fonction de transfert en  $Z...$ )



# Deuxième partie

## TD - Exercices



# Chapitre 3

## TD AUTO1

### 3.1 TD Aa1 Transformation de schéma

#### 3.1.1 Exercice 1

1. Ecrire la FTBF  $H(p) = S(p)/E(p)$  d'un système à retour unitaire qui a une transmittance en BO égale à  $KG(p)$ .
2. Préciser ce que représentent  $K$  et  $G(p)$ .
3. Ecrire la FTBF du système précédent, qui a une transmittance  $F(p)$  dans sa chaîne de retour au lieu de 1.
4. Transformer l'expression trouvée en 3 pour faire apparaître la forme de la FT d'un système à retour unitaire.
5. En déduire le schéma fonctionnel du système à retour unitaire équivalent au système précédent.

#### 3.1.2 Exercice 2

1. Donner le schéma fonctionnel du système à retour unitaire équivalent au système Fig. 3.1a, en exprimant  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{33}$ , puis  $H$  et  $G$ .

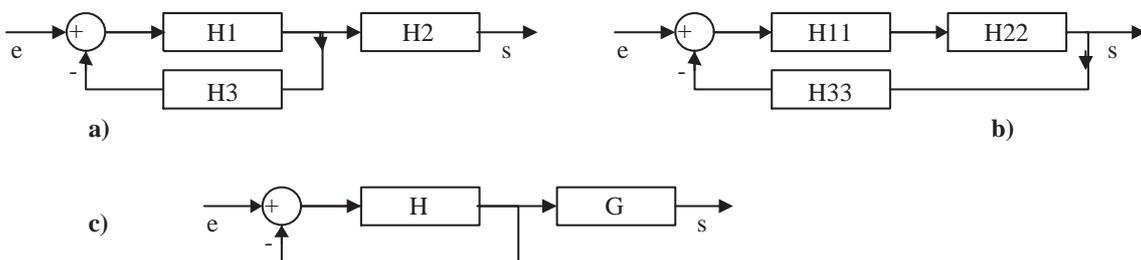


FIGURE 3.1 – a) Système initial ; b) équivalent 1 ; c) équivalent 2.

2. Transformer le schéma fonctionnel Fig. 3.2 en faisant apparaître un retour unitaire.
3. Etablir la FTBF du système.

#### 3.1.3 Oscillateur HF

voir sujet à la section ??

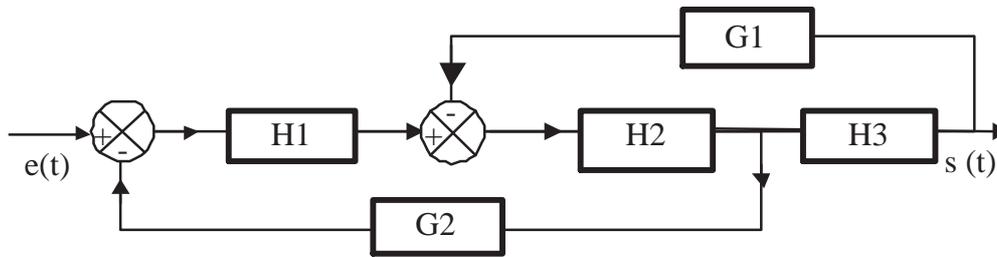


FIGURE 3.2 – Transformation de schéma

### 3.2 TD Aa2 Effet du rebouclage unitaire

Soit un système du premier ordre  $G(p) = \frac{1}{1+\tau p}$  rebouclé par un retour unitaire.

#### 3.2.1 Influence sur la BP

On pose  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ . La réponse harmonique du système en BO est donc :  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$ .

Déterminer la bande passante à -3dB en BO puis en BF.

Comparer et conclure sur l'élargissement de la BP.

#### 3.2.2 Influence sur le temps de réponse

On considère la réponse à un échelon :  $y_c(t) = H(t) \Leftrightarrow Y_c(p) = \frac{1}{p}$ .

Déterminer la sortie  $Y(p)$  puis l'original  $y(t)$  en BO.

Calculer le temps de réponse à 5%.

Mêmes questions en BF.

Comparer BO et BF et conclure sur l'augmentation de la rapidité.

### 3.3 TD Aa3 Etude de système du premier ordre

On considère le circuit  $RC$  suivant Fig. 3.3, avec  $R = 1k\Omega$  et  $C = 1\mu F$ .

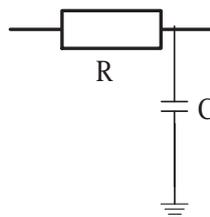


FIGURE 3.3 – Filtre RC

1. Donner l'équation différentielle caractérisant ce circuit.
2. Que vaut la constante de temps  $\tau$  ?
3. Quel est le rapport complexe  $\frac{V_s}{V_e}$  en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $\omega$
4. Déterminer la FT  $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$  (C.I. nulles).
5. Calculer les réponses à : un échelon  $v_e(t) = H(t)$  ; une rampe  $v_e(t) = tH(t)$ .
6. Tracer les diagrammes asymptotiques et théoriques de la courbe de gain et de la courbe de phase dans Bode.
7. On considère le circuit précédent en échangeant  $R$  et  $C$  : mêmes questions que précédemment pour le nouveau circuit.

## 3.4 TD Aa4 Stabilité

### 3.4.1 Critère de Routh

1. Etudier par la méthode de Routh-Hurwitz la stabilité du système décrit par sa fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 3}$$

On notera qu'une ligne de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures : on considère alors le polynôme ayant les coefficients de la ligne précédente, on le dérive et on remplace les zéros par les coefficients obtenus après dérivation.

2. Donner, grâce au critère de Routh Hurwitz, les conditions de stabilité d'un système du premier ordre (où  $b > 0$ ) :

$$H_1(p) = \frac{K}{a + b.p}$$

et du second ordre :

$$H_2(p) = \frac{K}{ap^2 + bp + c}$$

3. Les systèmes  $H(p) = \frac{5}{-2-p}$  et  $H(p) = \frac{5}{2-p}$  sont-ils stables ?

### 3.4.2 Lieu de Nyquist

1. Tracer le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre en boucle ouverte  $G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$ .  
NB : On montrera qu'il s'agit d'un demi-cercle de centre  $K/2$ .
2. Est-il stable en B.O ? en B.F ?
3. Tracer le lieu de Nyquist de  $G(p) = \frac{2}{p(p+1)}$ .  
NB : pour cela, on déterminera notamment les parties réelles et imaginaires pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ .
4. Le système est-il stable en B.O. ? en BF ?

## 3.5 TD Aa5 Correcteur mécanique à avance de phase

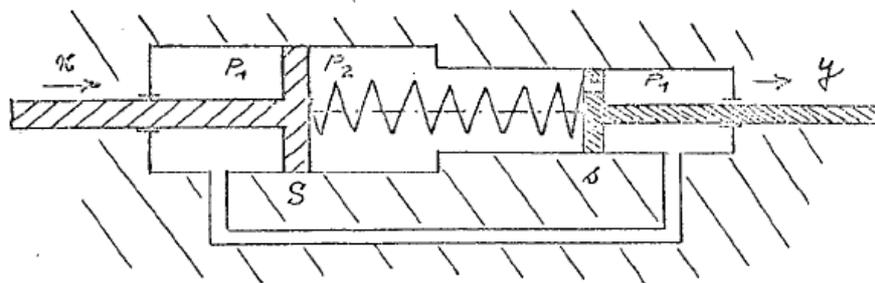


FIGURE 3.4 – Correcteur mécanique à avance de phase

Le cylindre représenté Fig. 3.4, rempli de fluide qu'on supposera incompressible (huile), comporte deux parties de sections différentes  $S$  et  $s$ , de rapport  $S/s = a$ . Les extrémités des cylindres sont reliées par une canalisation sans perte de charge, de sorte que la même pression  $P_1$  règne à chaque instant dans ces extrémités.

Les 2 pistons, de sections respectives  $S$  et  $s$  sont reliés entre eux par un ressort de raideur  $r$ . Les translations des pistons sont respectivement  $x$  et  $y$ . Le volume  $V$  de fluide compris entre

les 2 pistons est à la pression  $P_2$ . Entre les domaines  $P_2$  et  $P_1$  existe une fuite qu'on peut schématiser par un trou dans le piston  $s$ . On admettra que le débit de fluide à travers ce trou est régi par la loi de Poiseuille :

$$\text{débit volumétrique} = \frac{1}{B}(P_2 - P_1)$$

Au niveau du piston de plus faible section, l'équation qui traduit l'équilibre des forces de pression ( $\sum F_{ext} = 0$ ) est donnée par :

$$-r(y - x) + (P_2 - P_1)s = 0;$$

et celle du débit volumétrique à travers l'orifice est donnée par :

$$Q_v = \frac{1}{B}(P_2 - P_1) = -\frac{dV_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(sy - Sx).$$

1. Donner la relation entre l'entrée  $x$  et la sortie  $y$   
NB : on pourra poser :  $a = S/s$  et  $\tau = s^2B/r$ .
2. En déduire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  en supposant les C.I. nulles.
3. A.N. :  $a = 7$   
Ecrire la fonction de transfert sous la forme :  $H(\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega)$ .
4. Quelles sont les valeurs des termes réels et imaginaires pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$  ?
5. Que peut-on dire de la phase  $\varphi(\omega)$  d'un tel système ?
6. Diagrammes de Bode (échelles semi-logarithmiques) :  
Tracer la variation de gain :  $G_{dB} = 20\log_{10}|H| = f(\omega)$
7. Tracer la variation de la phase :  $\varphi(\omega) = g(\omega)$
8. Supposant une perturbation en échelon :  $x(t) = x_0u(t)$  (où  $u(t)$  dénote l'échelon unité et  $x_0$  son amplitude), quelle est l'allure de  $y(t)$  ? On pourra s'aider du calcul mais on tâchera aussi de raisonner physiquement.
9. Comparer  $H(p)$  avec la fonction de transfert

$$T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$$

du système électrique de la Fig. 3.5.

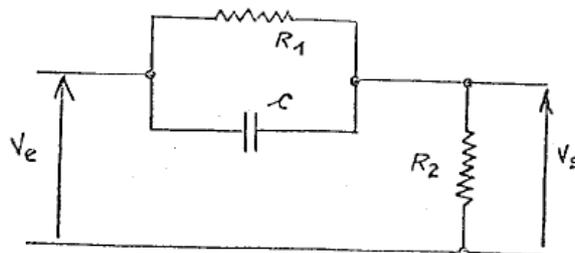


FIGURE 3.5 – Correcteur électronique à avance de phase

### 3.6 TD Aa6 Abaque de Black

Soit un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+p)(1+0.5p)}$$

1. Déterminer l'expression du module et de l'argument de  $G(j\omega)$ .
2. Tracer le lieu de Nichols de cette fonction sur l'abaque de Black fournie en utilisant la tableau de valeurs Tab. 3.1 qui aura été préalablement complété.

TABLE 3.1 – Tableau de mesures

$\omega$ (en rad/s)	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0	2.5
$ G $ (en dB)							-6.8	-11.7		
$Arg(G)$ (en °)							-171	-187		

3. Ce système est maintenant inclus dans une boucle à retour unitaire.  
Dessiner le schéma fonctionnel du système rebouclé.
4. Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase.
5. Tracer la courbe représentant la fonction de transfert de la boucle fermée.
6. On inclut maintenant un correcteur proportionnel de gain  $K$  dans la chaîne directe.  
Dessiner le schéma fonctionnel de la boucle fermée corrigée.
7. Pour quelle valeur de  $K$  le système devient-il instable ?
8. Quelle est alors la fréquence des oscillations ?
9. Retrouver le résultat de la question 7 grâce au critère de Routh.

### 3.7 TD Aa7 Oscillateur

Soit l'oscillateur représenté sur la Fig. 3.6.

N.B : Les A.O.P. considérés comme idéaux fonctionnent de manière **linéaire**.

#### 3.7.1 Interrupteur ouvert

Pour ces questions, l'interrupteur est considéré comme ouvert.

1. Déterminer  $A(p) = \frac{V_s(p)}{V_+(p)}$ .
2. Déterminer  $\frac{V_1(p)}{V_s(p)}$  et  $\frac{V_2(p)}{V_1(p)}$ .
3. Dédire  $B(p) = \frac{V_2(p)}{V_s(p)}$  des résultats de la question précédente.

#### 3.7.2 Interrupteur fermé

Pour ces questions, l'interrupteur est considéré comme fermé.

1. Exprimer  $B(p)$  en fonction de  $V_s(p)$  et  $V_+(p)$ .
2. Représenter le circuit étudié par un schéma fonctionnel faisant apparaître  $V_s(p)$ ,  $V_+(p)$ ,  $A(p)$  et  $B(p)$ .
3. Donner la condition d'oscillation en fonction de  $A(p)$  et  $B(p)$ , puis en fonction des composants  $R$ ,  $R'$ ,  $C$  et  $C'$ .
4. Déterminer pour quelle valeur de  $R'$  ces oscillations peuvent être obtenues et indiquer leur fréquence.

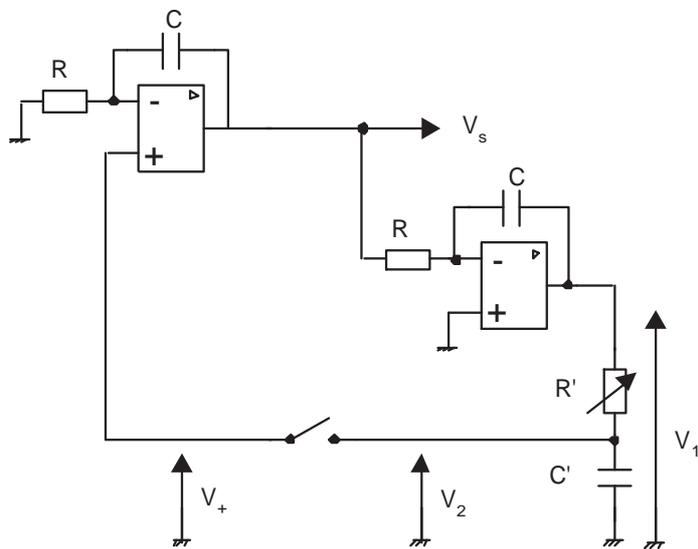


FIGURE 3.6 – Oscillateur à Ampli Op

# Chapitre 4

## TD AUTO2

### 4.1 TD Ab1 Asservissement de la position d'un arbre moteur

On se propose d'étudier le système bouclé de la Fig. 4.1.

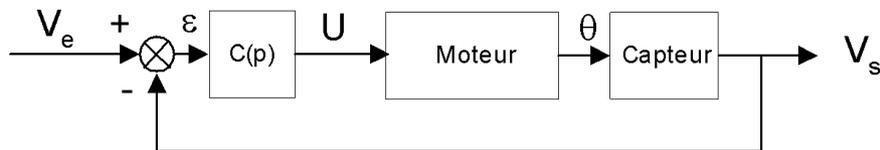


FIGURE 4.1 – Asservissement de position

La fonction de transfert entre la position angulaire  $\theta$  et la tension de commande  $U$  d'un moteur à courant continu vaut :

$$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{50}{p(p+1)}$$

La fonction de transfert du capteur de position vaut  $K = 0.02V.rd^{-1}$ .

$C(p)$  représente la fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on pose  $C(p) = k$  avec  $k > 0$ .

1. Ecrire la fonction de transfert du système bouclé.
2. A l'aide du critère de Routh, étudier la stabilité du système bouclé.
3. Etudier le régime permanent du système (i.e. calculer l'erreur statique  $\varepsilon_0$ ) en considérant que la variable d'entrée est un échelon unitaire.
4. Calculer l'erreur permanente  $\varepsilon_1$  du système en réponse à une entrée de type rampe.
5. Pouvait-on prévoir les résultats du 3 et du 4 à partir du tableau théorique des propriétés des classes de systèmes ?
6. Calculer la marge de phase du système pour  $k = 1$ .
7. Calculer la **marge de gain** du système pour  $k = 1$ .
8. Pour annuler l'erreur de traînage en réponse à une rampe, on choisit un régulateur à action proportionnelle intégrale de type :

$$C(p) = k_p + \frac{k_i}{p}$$

avec  $k_p$  gain de l'action proportionnelle et  $k_i$  gain de l'action intégrale.

A l'aide du critère de Routh, étudier la stabilité du système ainsi compensé.

9. Calculer l'erreur de traînage pour une entrée de type rampe.
10. Proposer un réglage de  $k_p$  et  $k_i$  assurant une **marge absolue de stabilité** supérieure ou égale à 0.2.

## 4.2 TD Ab2 Moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est modélisé par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p(1 + 10p)}$$

On souhaite régler ce système à l'aide d'un correcteur et d'un bouclage de l'ensemble de manière à ce que la marge de phase de la boucle ouverte corrigée soit de  $58^\circ$  et que la bande passante soit de  $1 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui donnera une réponse indicielle suffisamment rapide et performante.

### 4.2.1 Etude du moteur

1. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $G(p)$  et expliciter le raisonnement.
2. Le système est-il stable ou instable ?
3. Déterminer par le calcul la marge de phase  $M_\phi$  et la bande passante BP, définie comme la bande de fréquences où  $|G(p)|_{dB} \geq 0dB$ .

### 4.2.2 Etude de la boucle ouverte corrigée

Pour obtenir les performances souhaitées, un correcteur à avance de phase est intégré à la chaîne directe. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$C(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$

1. Montrer que l'avance de phase maximale qu'il procure  $\Phi_M = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$  est obtenue pour la pulsation  $\omega_M = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .
2. Faire le schéma fonctionnel de la boucle ouverte corrigée.
3. Déterminer l'apport de phase nécessaire au moteur pour obtenir les performances souhaitées.
4. Déterminer  $a$ .
5. Déterminer  $\tau$  de manière à ce que la marge de phase désirée soit obtenue pour la pulsation  $\omega_0$  valeur extrême de la bande passante déterminée au 4.2.1.
6. Déterminer  $K$ .

### 4.2.3 Etude de la boucle fermée

1. Dessiner le schéma fonctionnel de la boucle fermée corrigée
2. Donner la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$ .
3. Calculer l'erreur statique du système bouclé, erreur en réponse à un échelon unitaire.

### 4.3 TD Ab3 Abaque de Black

#### 4.3.1 Marges de gain et phase

Le tableau Tab. 4.1 donne la valeur de l'amplitude et de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $KG(p)$  d'un système à retour unitaire avec :  $K = 20dB$ . On a :  $K = K_1K_2$  avec  $K_1 = 6dB$ .

TABLE 4.1 – Tableau de valeurs

$\omega$ (rad/s)	0	5	7	8	10	13	15	20	$\infty$
$ KG(j\omega) $ (dB)	$\infty$	12.3	8.3	6.1	4	2	-2	-6	$-\infty$
$\varphi$ (°)	-90	-120	-137	-157	-180	-200	-220	-235	-270

1. Tracer sur l'abaque de Black le lieu de la FTBO
2. Donner les conditions de stabilité en fonction de  $K_2$
3. Pour  $K_2 = 2$ , donner la pulsation de résonance  $\omega_R$  et le facteur de surtension  $Q$
4. Donner la valeur de  $K_2$  pour avoir une marge de gain de 8 dB
5. Quelle est la marge de phase correspondante ?
6. Donner la valeur de  $K_2$  pour avoir  $Q = 1.3$  (soit 2.3dB)
7. Donner alors  $\omega_R$ , les marges de phase et de gain.

#### 4.3.2 Réglage de gain

Le lieu de transfert  $\frac{K}{j\omega}F(j\omega)$  d'un système en boucle ouverte est donné par le tableau Tab. 4.2.

TABLE 4.2 – Tableau de valeurs en B.O.

$\omega$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1	1.1	1.2	1.3
dB	-.05	-6.22	-10	-12.84	-15.17	-17.23	-19.07	-20.77	-22.36	-23.85	-25.27	-26.61	-27.81
(°)	-98	-106	-113.5	-120.8	-127.8	-134.8	-140.3	-145.9	-151.1	-155.9	-160.4	-164.5	-168.2

On réalise le système asservi suivant le schéma classique où  $A$  est un amplificateur de gain réglable.

1. Tracer le lieu de transfert en BO dans le plan de Black
2.  $F(p)$  ne présente ni pôle, ni zéro à partie réelle positive. Déterminer par le critère du revers les valeurs de  $A$  pour lesquelles le système asservi est stable.
3. Régler le gain  $A$  pour que la surtension du système bouclé soit de 2.3dB. Quelles sont alors la pulsation de résonance et la bande passante à -3dB ?
4. On donne  $K = 0.1$ . Avec la valeur de  $A$  déterminée précédemment, calculer l'erreur finale pour un échelon de consigne (amplitude unité), puis pour une consigne en rampe (pente unité).

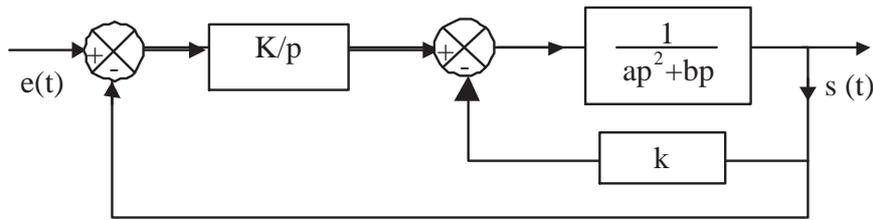


FIGURE 4.2 – Schéma-bloc

## 4.4 TD Ab4 MSTAL No7

On considère un système asservi dont le diagramme fonctionnel est donné Fig. 4.2.

$a = 0.1$ ,  $b = 1.2$ ,  $k = 2$ ,  $K$  variable

1. Exprimer la fonction de transfert en BO :  $G(p) = S(p)/E(p)$  (retour unitaire supprimé).  
Montrer que cette fonction peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{K'}{p(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}$$

Donner  $K'$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

2. Tracer le diagramme de Black de  $G(p)$  pour  $K' = 1$ . Pour cela, écrire  $G(p)$  sous la forme :

$$G'(p') = \frac{K''}{p'(1 + p')(1 + a'p')} = K''G(p')$$

Valeurs de  $K''$  et  $a'$ ? (N.B. :  $a' < 1$ ).

Puis tracer le diagramme de Black de  $G(p')$ .

3. Conditions générales de stabilité en fonction de  $K$ ?
4. Valeur de  $K'$  pour  $Q = 2.3dB$ ? Donner alors  $\omega_R$ , marge de gain et marge de phase.
5. Déterminer la valeur de  $K$  pour laquelle la marge de gain est de 10dB. Quelle est alors la marge de phase?
6. Pour  $K = 2$ , donner l'expression de la fonction de transfert en BF. Quelle est l'erreur de traînage du système en BF lorsque l'entrée est  $e(t) = 2t$ ?

## 4.5 TD Ab5 Correcteurs de phase

Un système est défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + 0.1p)(1 + 0.025p)}$$

### 4.5.1 Correcteur à avance de phase

On désire que l'erreur permanente du système en boucle fermée (Fig. 4.3), en réponse à une entrée en échelon unitaire, soit inférieure à 1%.

1. Calculer la valeur de l'élément proportionnel  $K$  permettant d'aboutir à ce résultat.
2. Quelle est alors la marge de phase, et pour quelle pulsation est-elle obtenue?
3. Déterminer les éléments du correcteur à avance de phase nécessaire pour assurer une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ .

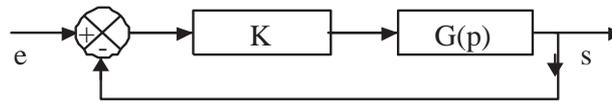


FIGURE 4.3 – Schéma-bloc

### 4.5.2 Correcteur à retard de phase

1. Déterminer  $K$  en imposant en premier lieu une marge de phase de  $45^\circ$ .
2. Que devient alors l'erreur statique ?
3. Déterminer les éléments du correcteur à retard de phase permettant de ramener cette erreur à  $1/100$ .

## 4.6 TD Ab6 Correction tachymétrique

On s'intéresse à l'asservissement de position dont le schéma fonctionnel, sans correction, est donné sur la Fig. 4.4 où  $W = 1V.rd^{-1}$ .

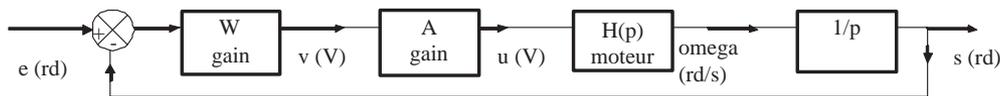


FIGURE 4.4 – Asservissement de position non corrigé

### 4.6.1 Système non corrigé

Le moteur est commandé par l'induit. On donne les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

- $J = 0.1kg.m^2$  le moment d'inertie total par rapport à l'axe de rotation
- $f = 0.1Nm.rd^{-1}s^{-1}$  le coefficient de frottement fluide
- $L = 1H$  l'inductance de l'induit
- $R = 200\Omega$  la résistance de l'induit
- $k = 0.3Nm.A^{-1}$  la constante de f.e.m.

1. Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$  du moteur sous la forme  $\frac{K}{\alpha p^2 + \beta p + 1}$ , en fonction de  $J, f, L, R$  et  $k$ .
2. Calculer les valeurs numériques de  $K, \alpha$  et  $\beta$ , puis celles des pôles  $-\frac{1}{\tau}$  et  $-\frac{1}{\tau'}$  (où  $\tau > \tau'$ ) de  $H(p)$ .
3. Etudier la stabilité du système bouclé de la Fig. 4.4 en fonction de  $A$ .

Dans la suite du problème, on néglige  $\tau'$  et on pose :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ avec : } K = 1.5 \cdot 10^{-2} rd.s^{-1}.V^{-1} \text{ et : } \tau = 1s$$

4. Calculer  $A$  en fonction de  $K, \tau$  et  $W$  pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$  quand  $\omega = 1$ . Calculer la valeur numérique correspondante.
5. Calculer l'erreur stationnaire du second ordre pour la valeur numérique de  $A$  obtenue à la question précédente.

## 4.6.2 Système avec correction

### 4.6.2.1 Correction tachymétrique

On introduit dans la chaîne d'action une correction tachymétrique. Le schéma fonctionnel de l'asservissement est donné sur la Fig. 4.5. Calculer la transmittance  $H_1(p)$  de la boucle

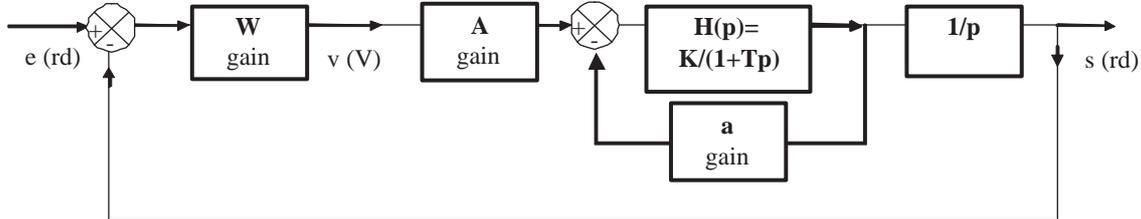


FIGURE 4.5 – Correction tachymétrique

secondaire. Montrer qu'elle se met sous la forme  $H_1(p) = \frac{K_1}{1+\tau_1 p}$ ; donner l'expression de  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $K$ ,  $\tau$  et  $a$ .

### 4.6.2.2 Correction tachymétrique filtrée

Le schéma fonctionnel du système corrigé est donné par la Fig. 4.6.

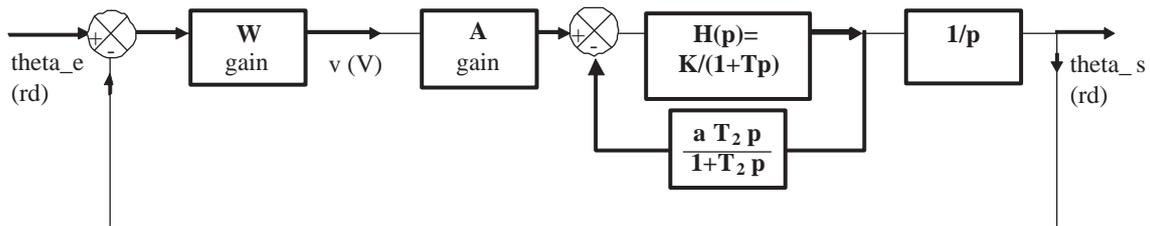


FIGURE 4.6 – Correction tachymétrique filtrée

1. Calculer la transmittance  $H_2(p)$  de la boucle secondaire. Montrer qu'elle peut s'écrire :  $H_2(p) = H(p).C(p)$ , où  $C(p)$  ne dépend que de  $\tau$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ .
2. A quel type de correction correspond la fonction de transfert  $C(p)$ ?  
On suppose par la suite que  $\tau_2 \gg \tau$ .
3. Montrer que  $C(p)$  peut se mettre sous la forme :

$$C(p) = \frac{(1 + \tau p)(1 + \tau_2 p)}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 \frac{\tau}{\tau_1} p)}$$

4. Donner en fonction de  $\tau$ ,  $\tau_1$ ,  $W$  et  $k$  l'expression de  $A$  pour que le système corrigé ait une marge de phase de  $45^\circ$ .
5. Calculer numériquement  $A$  pour  $\tau_1 = 0.2s$ .
6. Calculer, pour les valeurs numériques précédentes, l'erreur stationnaire du second ordre.
7. Tracer sur l'abaque de Black la transmittance en boucle ouverte du système corrigé pour les valeurs numériques de  $A$  et  $\tau_1$  de la question précédente et  $\tau_2 = 100s$ .
8. En déduire la valeur du coefficient de surtension et la pulsation de résonance.

## 4.7 TD Ab7 Correcteurs PI et PD

### 4.7.1 Correcteur PI

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement de position est de la forme  $G(p) = \frac{K}{p(1+\tau_m p)}$  où le gain global  $K$  est réglable grâce à un potentiomètre et où  $\tau_m = 15ms$ . La chaîne de retour est unitaire  $B(p) = 1$ .

1. Démontrer que la fonction de transfert en boucle fermée peut s'écrire sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{\tau_m p^2 + p + K}.$$

2. Déterminer une condition sur  $K$  pour que le système soit stable, en utilisant deux méthodes différentes.
3. Déterminer l'erreur de vitesse en réponse à une rampe.
4. Pour annuler l'erreur de vitesse en réponse à une rampe, on choisit un régulateur à action proportionnelle intégrale dont la fonction de transfert est  $C(p) = k_1 + \frac{k_2}{p}$ . A l'aide du critère de Routh, étudier la stabilité du système corrigé.
5. Dessiner le schéma-bloc de cet asservissement.
6. Déterminer l'erreur de vitesse du système corrigé.

### 4.7.2 Correcteur PD

On considère le système suivant :

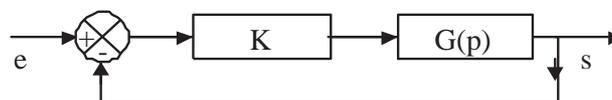


FIGURE 4.7 – Système en boucle fermée

Le système  $G$  est décrit par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+p)\left(1+\frac{2}{3}p\right)}$$

#### 4.7.2.1 Lieu de Nichols

Dans cette partie, on considère un correcteur proportionnel décrit par la fonction de transfert suivante :  $C(p) = k$ .

1. Déterminer l'expression du module et de l'argument de  $G(j\omega)$ .
2. Tracer le lieu de Nichols de cette fonction sur l'abaque de Black fournie. On choisira 10 points pour les  $\omega$  croissants allant de 0.015 à 8 rad/s. Les points ainsi calculés doivent être présentés sous la forme d'un tableau.
3. Mesurer la marge de gain  $M_G$  et la marge de phase  $M_\phi$ . Que peut-on déduire de ces mesures ?
4. Donner la valeur du gain  $k$  afin d'obtenir pour le système  $G$  des marges de stabilité suffisantes.

### 4.7.2.2 Correcteur PD (Proportionnel Dérivé)

On corrige le système à l'aide d'un correcteur proportionnel dérivé décrit par la fonction de transfert  $C(p) = k_c(1 + \tau_D p)$ .

1. Déterminer la valeur du gain  $k_c$  de manière à avoir une erreur de 5 % en réponse à une rampe unité.

## 4.8 TD Ab9 Réglage d'un PID

Soit le système de fonction de transfert (FTBO) :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + 5p)^2}$$

On impose le cahier des charges suivant :

$$\begin{aligned} M_\varphi &\geq 45 \text{ à } 50^\circ \\ BP &\geq 0.5 \text{ à } 0.8 \text{rd/s} \\ \varepsilon_{\text{position}} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Soit un correcteur PID de la forme :

$$C(p) = K_0 \frac{1 + T_1 p}{p} (1 + T_2 p)$$

avec  $T_1 > T_2$ .

- L'action intégrale provient du terme  $(1 + T_1 p)/p$  (action en basses fréquences).
- $T_1$  est donc la constante de temps de l'action I.
- L'action dérivée provient du terme  $(1 + T_2 p)$  (action en hautes fréquences).
- $T_2$  est donc la constante de temps de l'action D.
- L'action proportionnelle est réglée par le facteur de gain  $K_0$  (action à toutes les fréquences).

Proposer un réglage du PID pour répondre au cahier des charges.

## 4.9 Contrôle AUTOa 7/12/2011 (2h)

### I - Réglage expérimental de gain

Le lieu de transfert d'un système en boucle ouverte  $G(j\omega)$  comportant un intégrateur pur ( $\frac{1}{j\omega}$ ) est donné par le tableau Tab. 4.3.

TABLE 4.3 – Tableau de valeurs en B.O. en fonction de  $\omega$  (en rad/s).

$\omega$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1	1.1	1.2	1.4	1.6	1.7	
dB	-.05	-6	-10	-13	-15	-17	-19	-21	-22	-24	-25	-27	-29	-31	-33	-
(°)	-98	-106	-113	-121	-128	-135	-140	-146	-151	-156	-160	-165	-172	-178	-181	-1

On réalise le système asservi suivant le schéma classique, où l'on insère pour régler le système un amplificateur de gain réglable  $A$  ( $A > 0$ ) entre le comparateur et le système  $G(p)$ .

1. Faire le schéma-bloc du système bouclé.
2. Tracer le lieu de transfert en BO dans le plan de Black (pour  $A = 1$ ).
3. Mesurer marge de gain MG et marge de phase MP.
4. Déterminer la valeur de  $A$  pour laquelle le système devient instable (condition d'oscillation).
5. Trouver le réglage du gain  $A$  pour que la surtension du système en **boucle fermée**  $H(p)$  soit de 2.3dB (on raisonnera graphiquement dans le plan de Black pour trouver le gain adéquat). Dans la suite du problème, on gardera cette valeur pour  $A$ .
6. Quelles sont alors la pulsation de résonance  $\omega_r$  et la bande passante à -3dB de la fonction de transfert  $H(p)$  (toujours par raisonnement graphique)?
7. Tracer les courbes de Bode de la FTBF  $H(p)$ , par lecture directe des valeurs de  $H(p)$  sur l'abaque de Black.
8. Mesurer la pente (en dB/oct) sur la courbe de phase? Que vaut le déphasage maximal?
9. Peut-on en déduire l'ordre du système?
10. De quel type de filtre s'agit-il : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande?

### II - Etude théorique d'un asservissement

Soit le système de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + 0.15p)}$$

où  $K$  est un gain variable positif :  $K > 0$ .

On l'insère dans une boucle fermée à retour unitaire.

1. De l'expression de  $G(p)$ , déduire la valeur de la pulsation de transition  $\omega_0$  caractéristique du système initial en boucle ouverte.
2. Dessiner l'allure asymptotique des courbes de Bode de  $G(j\omega)$  pour  $K = 1$ .
3. Calculer  $H(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) à partir de la FTBO  $G(p)$  (pour  $K$  quelconque).

4. Montrer qu'elle peut se mettre sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

où  $\zeta$  est l'amortissement et  $\tau$  la constante de temps. Exprimer ces deux paramètres en fonction de  $K$ .

5. Exprimer sous forme harmonique la fonction de transfert :  $H(j\omega)$ , en faisant apparaître la pulsation caractéristique  $\omega_c$  du système.
6. A.N. : calculer  $\zeta$ ,  $\tau$  et  $\omega_c$  pour  $K = 1$  et  $K = 100$ .
7. En vous aidant des abaques des systèmes du deuxième ordre, prévoir quel sera le dépassement indiciel ( $D\%$ ) du système en boucle fermée pour  $K = 100$ .
8. Cette valeur de dépassement est-elle satisfaisante ? Sinon, comment l'améliorer ?
9. En prenant  $K = 10$ , on a obtenu la réponse ci-dessous. Est-ce cohérent avec les valeurs théoriques de  $\zeta$ ,  $\tau$  et  $\omega_c$  ? Justifier la réponse.
10. Ce système risque-t'il d'entrer en oscillations auto-entretenues ? Est-il précis ? Argumenter les réponses.

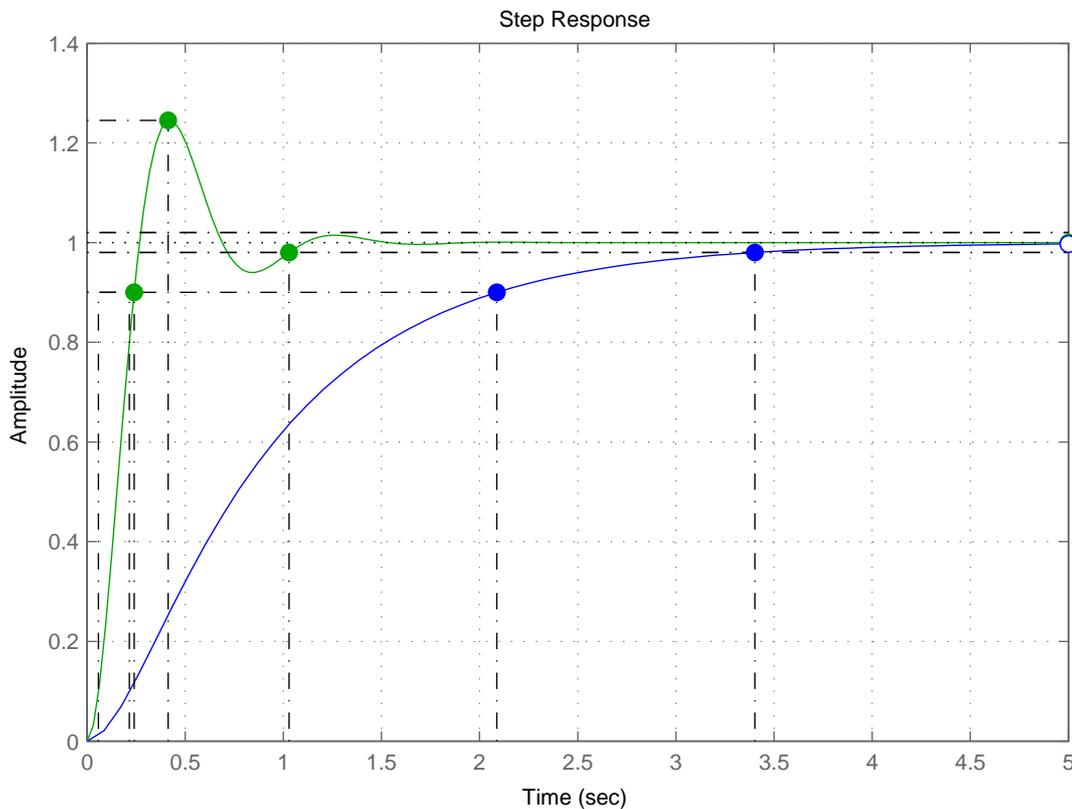


FIGURE 4.8 – Réponse indicelle (à un échelon unitaire) des FTBF pour :  $K = 1$  et  $K = 10$ .

## 4.10 Contrôle AUTOB 24/1/2012 (2h)

### Amplificateur HiFi

Soit un système amplificateur défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + \tau_0 p}$$

avec  $A_0 = 30000$  et  $\tau_0 = 0.001s$ .

1. Exprimer sa réponse harmonique  $A(j\omega)$  et tracer ses diagrammes asymptotiques de Bode (module et argument, *i.e.* gain en dB et phase en degrés ou rad, en fonction de la pulsation  $\omega$  en rad/s sur échelle semi-log).
2. Que vaut son gain statique? Que vaut sa fréquence de coupure  $f_0(Hz)$ ? En déduire sa bande passante (en boucle ouverte sans correction).
3. On veut amplifier des signaux audio de qualité HiFi : musique comportant des fréquences dans la bande  $22Hz \leq f \leq 22kHz$ .  
 Que penser de la bande passante de l'ampli en boucle ouverte? Est-elle satisfaisante pour l'application envisagée?  
 Que penser a priori de la valeur du gain de l'ampli en BO? Quel risque/avantage y a-t'il a priori avec une telle valeur de gain?
4. Que pourrait-on préconiser comme correcteur pour améliorer le système en boucle fermée?
5. On reboucle l'ampli avec une chaîne de retour  $B(p)$  selon le schéma classique du retour non unitaire (Fig. 4.9).

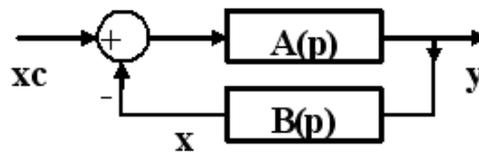


FIGURE 4.9 – FTBF avec correction en retour

Exprimer alors la FTBF  $H(p)$ .

6. La chaîne de retour est réalisée par le circuit électrique de la Fig. 4.10,

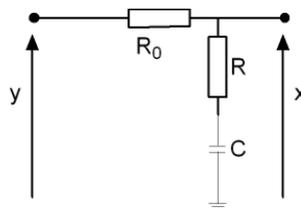


FIGURE 4.10 – Circuit de retour  $B(p)$

avec  $C = 2\mu F$ ;  $R = 5k\Omega$ ;  $R_0 = 150k\Omega$ .

Calculer la fonction de transfert  $B(p)$  correspondante. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$B(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + b\tau p}$$

avec  $b > 1$ .

7. Donner la valeur numérique de  $\tau$  et de  $b$ .
8. Donner les courbes asymptotiques de Bode de ce correcteur (gain et phase de  $B(j\omega)$ ), dit correcteur à retard de phase (cf. abaques).  
 Indiquer quelles sont ses pulsations caractéristiques  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Calculer numériquement les fréquences correspondantes en Hz.  
 Indiquer quelle est son action en HF (c'est-à-dire à une décade au delà de sa fréquence haute de transition)?

9. Vérifier qu'on a effectivement choisi les valeurs des composants  $R_0$ ,  $R$  et  $C$  de telle sorte que la fréquence de coupure associée à  $\tau$  soit un peu inférieure à la limite basse de la gamme de fréquences des signaux à amplifier ( $f \approx 22Hz$ ). Ainsi, l'effet HF du correcteur se fait sentir dès le début de la bande passante utile.
10. Montrer que  $H(p)$  peut finalement se mettre sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K_c(1 + b\tau p)}{1 + 2\zeta\tau_c p + \tau_c^2 p^2}$$

où l'on exprimera le gain corrigé  $K_c$ , la constante de temps corrigée  $\tau_c$  et l'amortissement  $\zeta$  en fonction des données du problème.

11. Exprimer  $H(j\omega)$  et exhiber ses pulsations caractéristiques. Quelle est sa fréquence de coupure haute  $f_H$ ? Comparer à  $f_0$ .
12. En faisant les approximations idoines en fonction des valeurs numériques utilisées<sup>1</sup>, montrer par l'application numérique que la bande passante est améliorée : donner la nouvelle bande passante  $[f_L; f_H]$ .
13. Montrer aussi que le gain est maîtrisé : donner sa nouvelle valeur en basses fréquences.
14. Calculer le gain en dB à  $f = 1kHz$ . Comparer à la valeur de  $A_0$  en dB.  
Calculer le déphasage à  $f = 1kHz$ . Commentaires ?
15. Conclusion sur l'intérêt du correcteur ?

**Questions bonus (en traiter une au choix) :**

16. Donner le schéma équivalent de la FTBF  $H(p)$  obtenu après transformation pour avoir un retour unitaire.
17. Tracer sommairement l'allure de la courbe de gain de la FTBF  $H(p)$ .
18. Tracer l'allure sommaire de la courbe de phase de l'ampli contre-réactionné  $Arg[H(p)]$ .
19. Calculer la marge de phase du système en boucle ouverte  $A(p)$ .

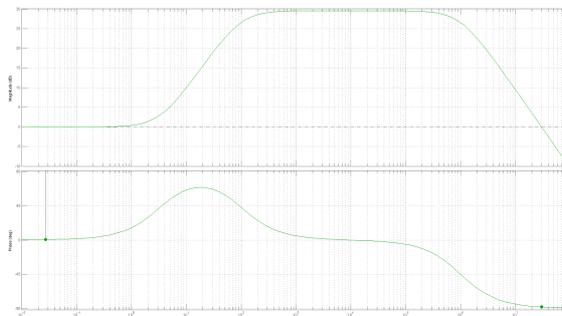


FIGURE 4.11 – Simulation Matlab de l'ampli contre-réactionné.

## Bibliographie

[5, 6]

## 4.11 Contrôle AUTOa 5/12/2012 (2h)

### I - Montage ampli op non-inverseur

On veut réaliser un amplificateur de gain 10, c'est-à-dire que l'on souhaite  $y(t) = 10x(t)$ . Pour cela on utilise le montage de la Fig.4.12-a.

1. qui sont inspirées de la datasheet du circuit intégré TDA2030.

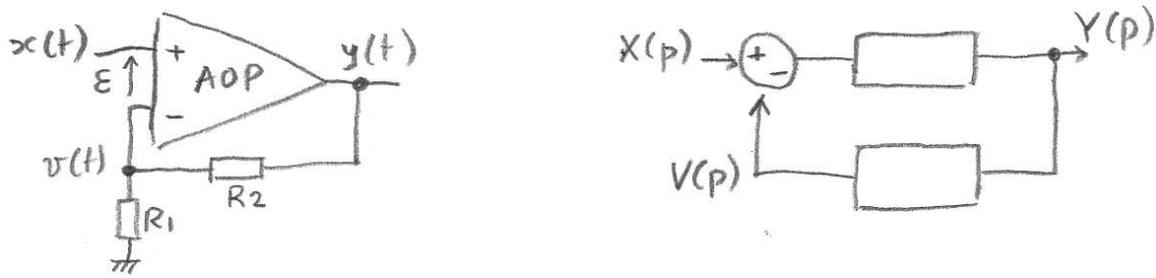


FIGURE 4.12 – a) Ampli op non-inverseur ; b) Schéma fonctionnel équivalent.

La chaîne d'action directe est un amplificateur opérationnel (AOP) non asservi, dont la fonction de transfert est du premier ordre, avec un gain statique très élevé  $A_0 = 10^5$  et une constante de temps  $\tau_0 = 0.1$  s :

$$A(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau_0 p}$$

N.B. Dans cette première partie, on néglige l'influence de l'impédance de sortie  $R_s$  de l'AOP.

1. Calculer la pulsation de coupure à -3dB de l'AOP : on la notera  $\omega_0$ .
2. Tracer les courbes de Bode de l'AOP non asservi : gain en dB et phase en degrés en fonction de la pulsation  $\omega$  en rad/s.  
Pour le tracé, on prendra un point par décade dans la bande de pulsations  $\omega \in [1; 10^6]$ .
3. Que vaut le gain en dB de  $A(p)$  en basses fréquences ?  
Que vaut son gain en dB à la coupure ?  
Que vaut la pente asymptotique en hautes fréquences (HF) ?
4. Tracer le lieu de Black de l'AOP non asservi (du moins la portion qui rentre dans l'abaque fourni). En déduire sa marge de phase.
5. On suppose l'AOP idéal. Rappeler les hypothèses de son fonctionnement.  
A partir du schéma du montage, exprimer alors l'entrée  $v(t)$  sur la borne négative de l'AOP en fonction de la sortie  $y(t)$  et des résistances du montage.
6. Quelle relation doit-on avoir entre  $R_1$  et  $R_2$  pour obtenir un ampli de gain 10 comme souhaité ?
7. Donner l'expression de l'entrée différentielle  $\varepsilon(t)$ .  
En déduire que l'AOP joue ici à la fois le rôle de chaîne directe ( $A(p)$ ) et de comparateur (grâce à ses 2 entrées différentielles + et -).
8. Exprimer la fonction de transfert  $B(p) = \frac{V(p)}{Y(p)}$  de la chaîne de retour (dite chaîne de réaction).
9. Dessiner le schéma fonctionnel équivalent de l'AOP asservi avec les résistances, en remplissant les deux boîtes noires de la Fig. 4.12-b avec les bonnes fonctions de transfert.
10. Exprimer la fonction de transfert équivalente en boucle ouverte  $G(p) = \frac{V(p)}{X(p)}$  (FTBO).  
Que vaut son gain statique  $G_0$  ?
11. A partir du schéma à retour non unitaire dessiné ci-dessus (question 9), exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  (FTBF).
12. Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$H(p) = \frac{A_1}{1 + \tau_1 p}$$

Préciser les valeurs de  $A_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A_0$ ,  $\tau_0$  et des résistances du montage.

13. Sachant que pour réaliser ce montage à AOP de gain 10, on a pris  $R_1 = 10k\Omega$  et  $R_2 = 90k\Omega$ , et que par ailleurs  $A_0 = 10^5$ , montrer qu'en faisant les approximations qui s'imposent, on trouve :

$$A_1 \approx 10 \quad \text{et} \quad \tau_1 \approx \frac{\tau_0}{10^4}$$

14. Calculer la pulsation de coupure  $\omega_1$  correspondant à  $H(p)$ , puis tracer les courbes de Bode de  $H(p)$  sur la même feuille semi-log que celle de  $A(p)$ . Comparer.
15. Exprimer le produit  $\omega_1 \times A_1$  et le comparer à celui de  $\omega_0$  et  $A_0$ .  
En conclure que l'on retrouve ici la propriété de "conservation du produit gain  $\times$  bande passante" (autrement dit, plus un système a une grande bande passante, plus son gain est faible).
16. Calcul de l'erreur statique en boucle fermée : exprimer la fonction de transfert de l'erreur définie par  $\varepsilon(p)/X(p)$  en fonction des composants du montage.
17. A.N. : Si l'entrée  $x(t)$  est une tension électrique en échelon unitaire d'amplitude 1V, calculer l'erreur statique en sortie  $\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ , ainsi que la valeur de la tension de sortie  $y(t)$ .

## II- Etude de l'instabilité de l'ampli non inverseur sur charge capacitive

On considère maintenant l'ampli ci-dessus attaquant un second étage constitué d'une charge capacitive RC parallèle (Fig. 4.13-a) avec  $R = 10k\Omega$  et  $C = 10\mu F$ . Le schéma équivalent de la sortie de l'ampli est modélisé par sa résistance interne de sortie  $R_s = 100\Omega$  en série avec la tension qu'il fournit à vide  $y(t)$  étudiée plus haut.

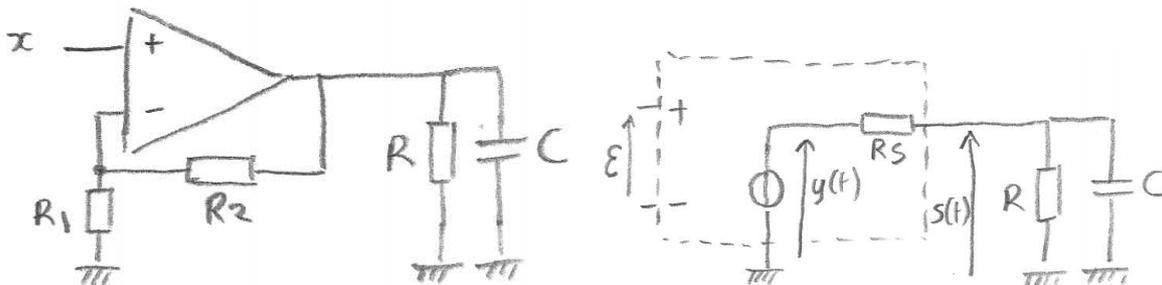


FIGURE 4.13 – a) Ampli sur charge capacitive ;      b) Schéma électrique équivalent en sortie.

- Calculer la fonction de transfert  $T(p) = \frac{S(p)}{Y(p)}$ , à partir du schéma de la Fig.4.13-b (qui est valable car l'influence de  $R_2 = 90k\Omega$  peut être négligée devant  $R = 10k\Omega$ ).
- En négligeant d'autre part  $R_s = 100\Omega$  devant  $R = 10k\Omega$ , montrer que l'on peut écrire :

$$T(p) \approx \frac{1}{1 + \tau_2 p}$$

où la constante de temps  $\tau_2$  s'exprime uniquement en fonction de  $R_s$  et de  $C$ .

Montrer que la pulsation associée à  $\tau_2$  vaut  $\omega_2 = 1000$  rad/s.

- En déduire le schéma fonctionnel complet de l'ampli avec sa charge capacitive en remplissant les boîtes noires de la Fig.4.14.
- Exprimer alors la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $G_2(p) = \frac{V(p)}{X(p)}$  de ce système complet.  
Préciser l'ordre de cette nouvelle fonction de transfert FTBO et son gain statique.
- Tracer sommairement l'allure des courbes de Bode de  $G_2(p)$ .
- Déterminer sa marge de phase et conclure sur la stabilité de ce système en charge.

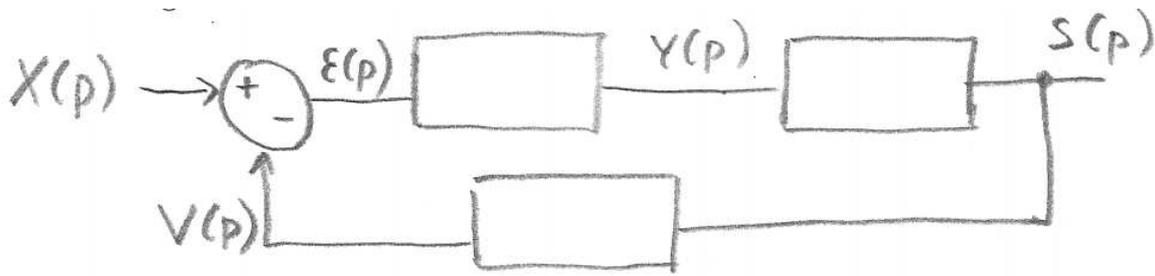


FIGURE 4.14 – Schéma complet équivalent.

## 4.12 Contrôle AUTOB 21/1/2013 (2h)

### Asservissement de la vitesse d'un moteur commandé par l'induit

Un moteur commandé par l'induit est régi par les 4 équations suivantes [6] :

$$\text{loi mécanique} : J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - f\Omega \quad (4.2)$$

$$\text{couple électromagnétique} : C_m = k_m I \quad (4.3)$$

$$\text{loi électrique} : U = L \frac{dI}{dt} + RI + E_m \quad (4.4)$$

$$\text{f.e.m.} : E_m = k_m \Omega \quad (4.5)$$

Les paramètres constants sont donnés ci-dessous :

- coefficient d'inertie  $J = 2 \cdot 10^{-3} \text{kg.m}^2$ ,
- constante de couple (et de f.e.m)  $k_m = 0.2 \text{N.m/A} = 0.2 \text{V/(rad/s)}$ ,
- coefficient de frottement visqueux :  $f = 4 \cdot 10^{-4} \text{N.m/(rad/s)}$ ,
- résistance et inductance d'induit :  $R = 2\Omega$ ,  $L = 2 \cdot 10^{-3} \text{H}$ .

Les grandeurs variables (fonctions du temps) sont listées ci-dessous :

- $U$  est la tension appliquée aux bornes de l'induit,
- $I$  est le courant d'induit,
- $\Omega$  est la vitesse de rotation du moteur (exprimée en  $\text{rad/s}$ ),
- $E_m$  est la f.e.m (en Volts) et  $C_m$  le couple électromagnétique (en N.m).

On note  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $\Omega(p)$ ,  $E_m(p)$  et  $C_m(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs variables fonctions du temps. On suppose les conditions initiales nulles.

1. Ecrire la transformée de Laplace du système d'équations, en éliminant  $C_m$  et  $E_m$  pour réduire le système à 2 équations couplées et ne garder que les relations entre  $U(p)$ ,  $I(p)$  et  $\Omega(p)$ .
2. En déduire que la fonction de transfert du moteur commandé en courant  $\frac{\Omega(p)}{I(p)}$  correspond à un système du 1er ordre du type  $\frac{\alpha_0}{1 + \tau_0 p}$ . Identifier  $\alpha_0$  et  $\tau_0$  en fonction des paramètres du moteur.
3. En éliminant  $I(p)$  des équations, exprimer la fonction de transfert du moteur commandé en tension  $\frac{\Omega(p)}{U(p)}$  et montrer qu'il s'agit d'un deuxième ordre, qu'on écrira sous forme canonique :

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \beta p + \alpha p^2}.$$

Identifier les expressions de  $K$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction des paramètres du moteur.

4. On se restreint maintenant à l'étude **sans frottement visqueux** ( $f = 0$ ). Donner l'expression simplifiée de  $G(p)$ . Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$G(p) = \frac{1/k_m}{1 + \tau_m p + \alpha p^2}$$

avec :  $\tau_m = JR/k_m^2$ . Calculer  $\tau_m$  qu'on appelle la constante de temps mécanique du moteur.

5. Montrer que le coefficient du terme en  $p^2$  peut s'écrire :  $\alpha = \tau_m \tau_e$ , où  $\tau_e = L/R$  représente la constante de temps électrique du moteur. Comparer numériquement  $\tau_e$  à  $\tau_m$ . Commentaire ?
6. Le dénominateur du 2ème ordre peut se factoriser sous la forme :

$$1 + \tau_m p + \alpha p^2 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

avec  $\tau_1 > \tau_2$ . Calculer les deux racines de ce polynôme ( $-1/\tau_1$  et  $-1/\tau_2$ ).

En déduire les valeurs des deux constantes de temps et montrer que numériquement, on a :  $\tau_1 \approx \tau_m \gg \tau_2 \approx \tau_e$ .

7. Tracer les courbes de Bode asymptotiques de

$$G(p) \approx \frac{1/k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)}.$$

Prendre des pulsations dans la gamme :  $\omega(\text{rad/s}) \in [1; 10000]$ .

8. Pour asservir la vitesse du moteur commandé en tension, on insère celui-ci dans une boucle de régulation comportant un comparateur de tension, un correcteur  $C(p)$  en série avec  $G(p)$  (approximé ci-dessus) et un capteur de vitesse tachymétrique dans la chaîne de réaction, celui-ci étant défini par sa fonction de transfert constante :  $B(p) = k_T = 1V/(\text{rad/s})$ . Dessiner le schéma synoptique de l'asservissement. On note  $H(p)$  la FTBF avec correcteur et capteur tachymétrique de retour. Exprimer  $H(p)$ .
9. Dans cette question, on suppose que le correcteur est du type intégrateur pur :

$$C(p) = \frac{A}{p}$$

où  $A$  est un gain réglable. A l'aide du critère de Routh, étudier la condition de stabilité de  $H(p)$  en fonction du réglage du gain  $A$  du correcteur. Commentaire ?

10. **Approximation : dans toute la suite du problème**, on néglige l'influence de  $\tau_2 \approx \tau_e$  qui n'intervient qu'en hautes fréquences. On considère donc que le moteur se modélise simplement par le système :

$$G(p) \approx \frac{G_0}{1 + \tau_m p}.$$

Montrer que dans cette approximation, on a :  $G_0 = 5$  et  $\tau_m = 0.1\text{s}$ .

11. On suppose maintenant qu'on prend un simple correcteur proportionnel :

$$C(p) = A.$$

Calculer la valeur de  $A$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$  du système en boucle ouverte corrigé  $AG(p)$

12. Quelle est la classe du système ?
13. Exprimer l'erreur statique  $\varepsilon_0$  du système corrigé en boucle fermée en réponse à un échelon unité. Calculer cette erreur pour la valeur numérique de  $A$  trouvée ci-dessus.
14. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée (passage de la FTBF par 0dB) ?
15. Afin d'optimiser l'asservissement, on remplace le correcteur proportionnel par un correcteur PI de fonction de transfert

$$C(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau_i p).$$

Exprimer  $G_2(p)$ , la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte FTBO du système avec correcteur PI.

16. Exprimer la nouvelle FTBF qu'on notera  $H_2(p)$  avec ce correcteur PI. L'écrire sous sa forme canonique.
17. Choisir  $\tau_i$  pour compenser la constante de temps du système.
18. Choisir  $A$  pour accélérer d'un facteur 2 le système.
19. Tracer la FTBO pour cette valeur de  $A$  sur l'abaque de Black.
20. Que vaut la marge de phase et la marge de gain dans ce cas. Conclure.

## 4.13 Contrôle AUTOa 2/12/2013 (2h)

### Asservissement de position

On considère un asservissement défini par sa FTBO  $G(p)$  insérée dans une boucle à retour unitaire et réglé par un amplificateur de gain variable  $A$  placé en série selon le schéma classique.

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

On donne :  $\tau = 16\text{ms}$  et  $K = 20$ . On prend au départ  $A = 1$  (aucune amplification).

1. Dessiner le schéma-bloc du système.
2. En considérant la position des pôles de  $G(p)$  dans le plan complexe, le système est-il stable en boucle ouverte ?
3. Donner l'expression littérale du gain (en dB) et de la phase (en degrés) de la FTBO en fonction de la pulsation  $\omega$  (en rad/s). Remplir un tableau de valeurs pour les pulsations  $\omega \in [1; 5; 10; 20; 30; 50; 100; 150]$ .
4. Tracer la fonction de transfert  $G(p)$  dans le plan de Black. En déduire la marge de phase.
5. Que vaut la marge de gain ? Conclure sur la stabilité prévisible en boucle fermée.
6. Pour optimiser le système, on règle désormais l'amplification à :  $A = 5$ .  
Sans calcul, tracer la nouvelle FTBO sur la même abaque de Black.
7. Mesurer la nouvelle marge de phase. Est-elle satisfaisante ? Pourquoi ?
8. Déterminer graphiquement quel sera le gain maximum en boucle fermée (pic de surtension  $Q$  en dB) et à quelle pulsation de résonance  $\omega_r$  on l'obtiendra approximativement.
9. Sachant qu'un bon réglage de FTBF correspond à une surtension  $Q$  de l'ordre 2 à 3dB, que penser du réglage réalisé ?
10. Exprimer la FTBF  $H(p)$  en fonction de  $A$  et de  $G(p)$ . La mettre sous forme canonique d'un système du deuxième ordre :  $H(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2}$
11. Donner l'expression littérale de la pulsation propre  $\omega_n$  et de l'amortissement  $\zeta$  en fonction des paramètres du système :  $A$ ,  $\tau$  et  $K$ .
12. Calculer les valeurs numériques de  $\omega_n$  et de  $\zeta$ .
13. Comparer  $\omega_n$  à la valeur de la pulsation de résonance  $\omega_r$  trouvée question 8. Interpréter par rapport à la théorie d'un système du 2e ordre.
14. A l'aide des abaques du 2e ordre, déduire de  $\zeta$  la valeur théorique du dépassement  $D$  (en %) qu'on obtiendra sur la réponse indicielle (réponse à un échelon-unité).
15. Est-ce en accord avec la courbe expérimentale obtenue pour  $A = 5$  (Fig. 4.15) ?
16. Déduire également des abaques du 2e ordre la valeur théorique de la surtension  $Q$ .
17. Est-ce en accord avec la valeur en dB obtenue à la question 8 ?

18. Un essai en boucle fermée a donné les courbes de Bode de la Fig. 4.16 (pour  $A = 1$  et pour  $A = 5$ ). Mesurer la valeur de  $QdB$  obtenue pour  $A = 5$  et comparer aux prévisions ci-dessus.
19. Comparer les pulsations  $\omega_c$  de coupure à -3dB lues sur la Fig.4.16 pour les 2 valeurs de gain et commenter l'intérêt du réglage du gain en boucle fermée.
20. Si l'on veut une réponse indicielle avec un dépassement de seulement  $D = 4\%$ , que doit valoir l'amortissement  $\zeta$ ? Comment faudrait-il régler la valeur du gain  $A$  dans ce cas?
21. Sur la réponse indicielle pour  $A = 1$  (Fig.4.15), mettre en œuvre la méthode d'identification de Strejc. Donner les valeurs mesurées et les paramètres obtenus et comparer votre résultat avec la FTBF théorique. Commenter.

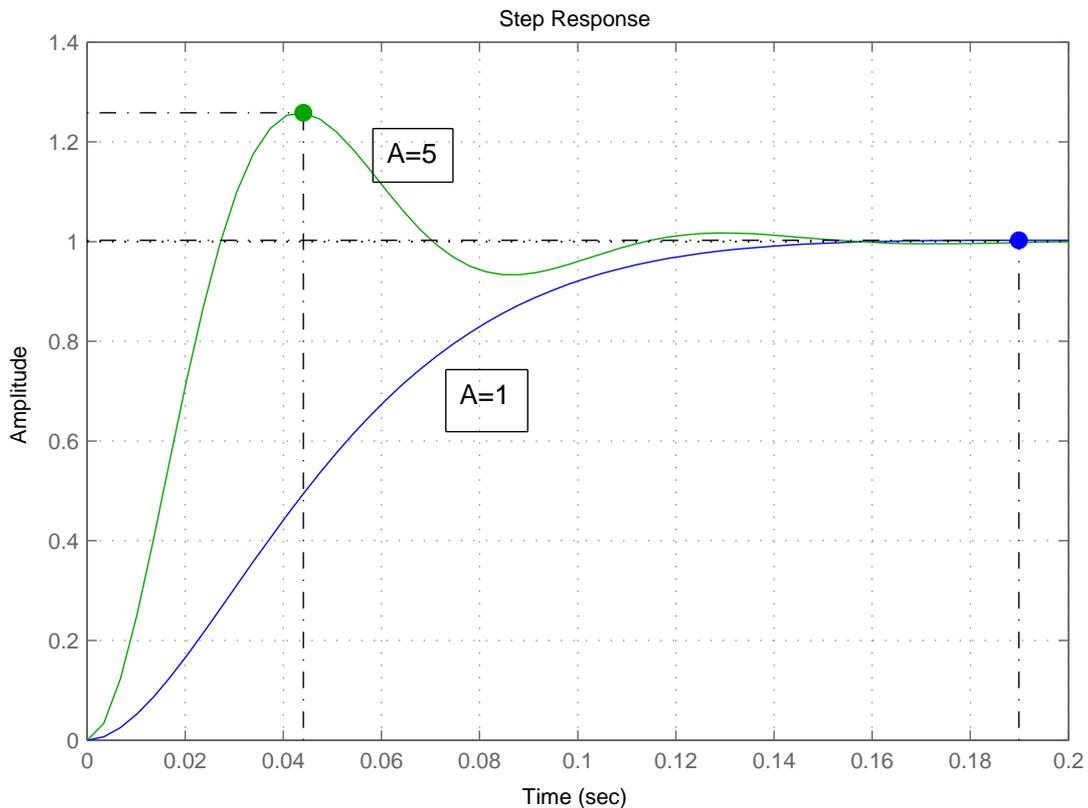


FIGURE 4.15 – Réponse à un échelon en boucle fermée

## 4.14 Contrôle AUTOB 20/1/2014 (2h)

### Correction tachymétrique

On considère le système de la Fig. 4.17 où les 2 paramètres réglables sont le retour  $\lambda$  correspondant à une correction tachymétrique (réinjection de la vitesse sur l'entrée du moteur) et l'amplification  $A$  correspondant à une correction proportionnelle. Le moteur est caractérisé par sa constante de temps mécanique :  $\tau_m = 28ms$  et par son gain  $K_m = 0.8$ .

1. Exprimer la fonction de transfert en **boucle ouverte**  $G(p)$  du système complet vu entre l'entrée et la sortie (points E et S).

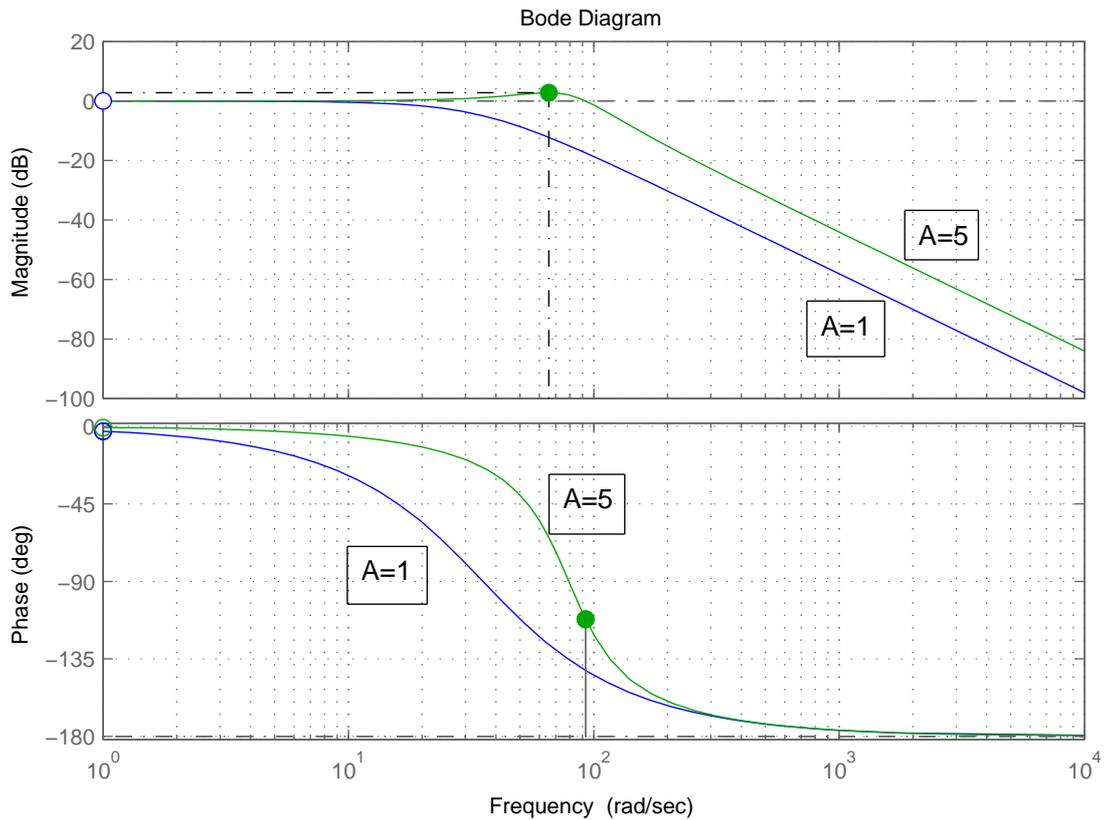


FIGURE 4.16 – Courbes de Bode de la FTBF

2. Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$G(p) = \frac{A}{p} \frac{K}{(1 + \tau p)}$$

et exprimer les valeurs de  $\tau$  et  $K$  en fonction de  $\tau_m$ ,  $K_m$  et  $\lambda$ .

3. Exprimer la fonction de transfert en **boucle fermée à retour unitaire**  $H(p)$  en fonction de  $G(p)$ .
4. Montrer qu'elle peut s'exprimer sous la forme canonique d'un système du 2ème ordre où  $\zeta$  est le facteur d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation caractéristique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

5. Exprimer  $\omega_0$  et  $\zeta$  en fonction de  $A$ ,  $K$  et  $\tau$ .
6. On se fixe le cahier des charges suivant pour l'asservissement en boucle fermée : temps de réponse à 5%  $t_R \approx 30ms$  ; dépassement sur la réponse indicielle  $D \approx 10\%$ .  
En utilisant les abaques du TPAa1 (2 courbes donnant respectivement  $D$  et  $\omega_0 t_R$  en fonction de  $\zeta$ ), déduire du cahier des charges les valeurs numériques de  $\zeta$  et de  $\omega_0$  à choisir.
7. On considère dans un premier temps le système **sans correction tachymétrique** :  $\lambda = 0$ . Vérifier alors que  $K = K_m$  et  $\tau = \tau_m$ .
8. Pour savoir si l'on peut remplir en même temps les 2 contraintes du cahier des charges avec le seul réglage du gain  $A$ , calculer d'une part la valeur numérique de  $A$  qui permettrait de remplir la contrainte qui porte sur  $\omega_0$ , en exprimant  $A$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $K$  et  $\tau$  uniquement.

9. Calculer d'autre part la valeur de  $A$  qui permettrait de remplir la deuxième contrainte qui porte sur  $\zeta$ .  
Peut-on satisfaire en même temps les 2 contraintes du cahier des charges ? Justifier.
10. On considère désormais le système **avec correction tachymétrique** ( $\lambda \neq 0$ ). On dispose donc de 2 paramètres de réglage :  $A$  et  $\lambda$ . Et l'on utilise les valeurs de  $K$  et  $\tau$  qui sont fonctions de  $\lambda$  comme déterminé à la question 2.  
Calculer alors la valeur numérique de  $A$  qui permet de répondre à la 1ère contrainte sur  $\omega_0$ . Est-elle est dépendante de  $\lambda$  ?
11. De la 2ème contrainte sur  $\zeta$ , déduire la valeur numérique adéquate de  $\lambda$ .
12. Peut-on alors remplir simultanément les 2 contraintes du cahier des charges ? Justifier la réponse.
13. Vérifier la valeur de la marge de phase de la FTBO corrigée avec ces réglages de  $A$  et  $\lambda$ . Est-elle satisfaisante ? Justifier.
14. La Fig. 4.18 donne la réponse indicielle obtenue en boucle fermée pour  $A = 972$  et  $\lambda = 5.75$ .  
Faire les mesures utiles sur ces courbes (dépassement et temps de réponse à 5%).  
Est-ce en accord avec vos résultats ? Justifier pourquoi l'erreur statique est nulle.
15. Conclure sur l'intérêt de la correction tachymétrique.

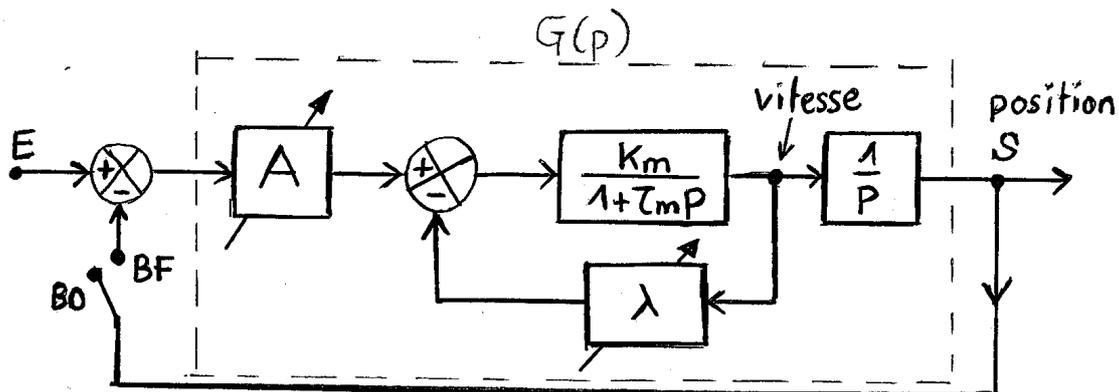


FIGURE 4.17 – Moteur avec correction tachymétrique

## 4.15 Contrôle AUTO1 28/11/2014 (2h)

### Etude de Bode

Soit un processus défini par une fonction de transfert  $G(j\omega)$  a priori inconnue. Une étude expérimentale a permis d'obtenir le tableau de mesures Tab. 4.4.

TABLE 4.4 – Tableau de valeurs

$\omega$ (rad/s)	0	0.5	1	2	3	4	5	10	20	50	200	$\infty$
$ G $ (dB)	20	19	16	8.4	1.2	-4.9	-10	-27	-45	-69	-105	$-\infty$
$\Phi$ (°)	0	-50	-93	-151	-183	-202	-215	-242	-256	-264	-269	-270

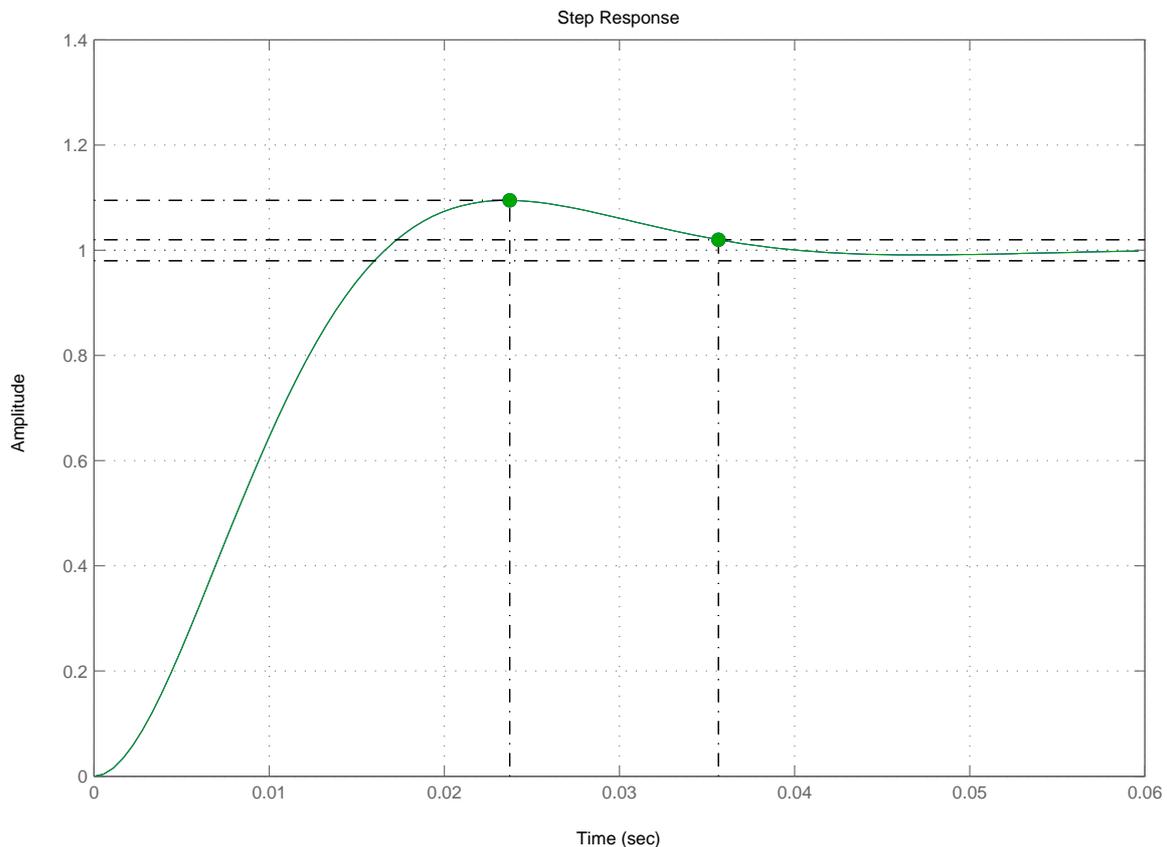


FIGURE 4.18 – Réponse à un échelon, du système en boucle fermée corrigée

1. Tracer les 2 courbes de Bode sur 1 seule feuille de papier semi-log (gain en dB et phase en degrés, en fonction de la pulsation).
2. A partir de la pente du gain aux HF (exprimée en dB/décade), déduire l'ordre du système.
3. La courbe de phase permet-elle de confirmer la valeur de l'ordre? Justifier.
4. Que vaut en dB le gain statique? Que vaut la fréquence de coupure à -3 dB?
5. On décide d'identifier ce système en le modélisant par une fonction de transfert de la forme :

$$G(p) = \frac{A}{(1 + \tau p)^n}$$

Montrer que  $A = 10$  et déterminer la valeur de  $n$ .

6. Sachant que pour ce type de système, on a, à la pulsation propre (ou nominale)  $\omega_n$ , une chute de  $-3n$  dB **par rapport au gain statique** (càd chute de -3 dB si  $n = 1$ , chute de -6 dB si  $n = 2$ , chute de -9 dB si  $n = 3$  etc.), déterminer sur la courbe de Bode la valeur de  $\omega_n$ .
7. En déduire la valeur de la constante de temps  $\tau$  (arrondir à la 1ère décimale).

## Etude de Black

Ce système de FTBO  $G(p)$  va être inclus dans une boucle à retour unitaire, selon le schéma de la Fig. 4.19, où  $K$  représente un potentiomètre réglable pour ajuster le gain de la boucle ( $0 < K \leq 1$ ).

8. On considère d'abord le cas où  $K = 1$ . Tracer le lieu de la FTBO  $G(p)$  sur l'abaque de Black (on reprendra les mêmes points de mesures que ceux fournis dans le Tab. 4.4).

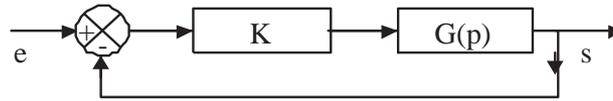


FIGURE 4.19 – Système en boucle fermée avec atténuateur  $0 < K \leq 1$

9. D'après la courbe de Black, ce système tel quel (càd avec  $K = 1$ ) mis en boucle fermée à retour unitaire sera-t'il stable? Justifier la réponse.
10. Désormais, on suppose que le potentiomètre réglable intervient ( $K \neq 1$ ).  
Pour avoir une stabilité relativement acceptable (dépassement indiciel d'environ 20%), sans perdre trop de précision (erreur  $\varepsilon_0$  inférieure à 20%), on veut choisir  $K$  pour avoir une marge de phase  $M_\phi \approx 27^\circ$ .  
Déterminer graphiquement la valeur de  $K$  en dB (et en linéaire) à appliquer pour cela.
11. Tracer la nouvelle courbe de Black tenant compte de ce nouveau gain  $K$  ajouté dans la boucle.
12. Que vaudra alors la marge de gain  $M_G$ ? Commentaires?

### Etude de la FTBF

13. Exprimer la FTBF  $H(p)$  du système en boucle fermée dans le cas général, avec  $K$  quelconque et  $G(p)$  dans la chaîne directe (selon le schéma de la Fig. 4.19).  
Mettre  $H(p)$  sous forme d'une fraction. Expliciter le polynôme  $D(p)$  du dénominateur.
14. Appliquer alors le critère de Routh-Hurwitz pour trouver à quelle condition (portant sur  $K$ ) le système en boucle fermée restera mathématiquement stable (limite du cas oscillateur pur).
15. Ce résultat est-il en cohérence avec celui trouvé à la question 10?
16. Pour la valeur de  $K$  trouvée à la question 10, prévoir quel sera le gain maxi  $H_{max}$  en boucle fermée (càd de la FTBF  $H(p)$ ), ceci en raisonnant graphiquement sur l'abaque de Black.
17. Pour quelle pulsation  $\omega_R$  et avec quelle valeur de phase  $\varphi_R$  obtient-on cette résonance de  $H(p)$ ? (valeurs approximatives, toujours obtenues graphiquement).
18. Finalement, un essai du système en boucle fermée avec une valeur de  $K = 0.4$  a donné les courbes de Bode de la Fig. 4.20 (gain et phase de la FTBF). Est-ce cohérent avec les prévisions obtenues aux 2 questions précédentes? Justifier quantitativement.
19. Que vaut la fréquence de coupure à  $\pm 3$  dB? Que vaut le gain statique de la FTBF  $H(p)$ ?
20. Conclure sur la qualité de ce système asservi.

## 4.16 Contrôle AUTO2 19/1/2015 (2h)

### Enoncé et données du problème

La fonction de transfert du processus à asservir est modélisée par sa FTBO (fonction de transfert en boucle ouverte) sans correcteur :

$$G(p) = \frac{1}{25p^2 + 10p + 1}$$

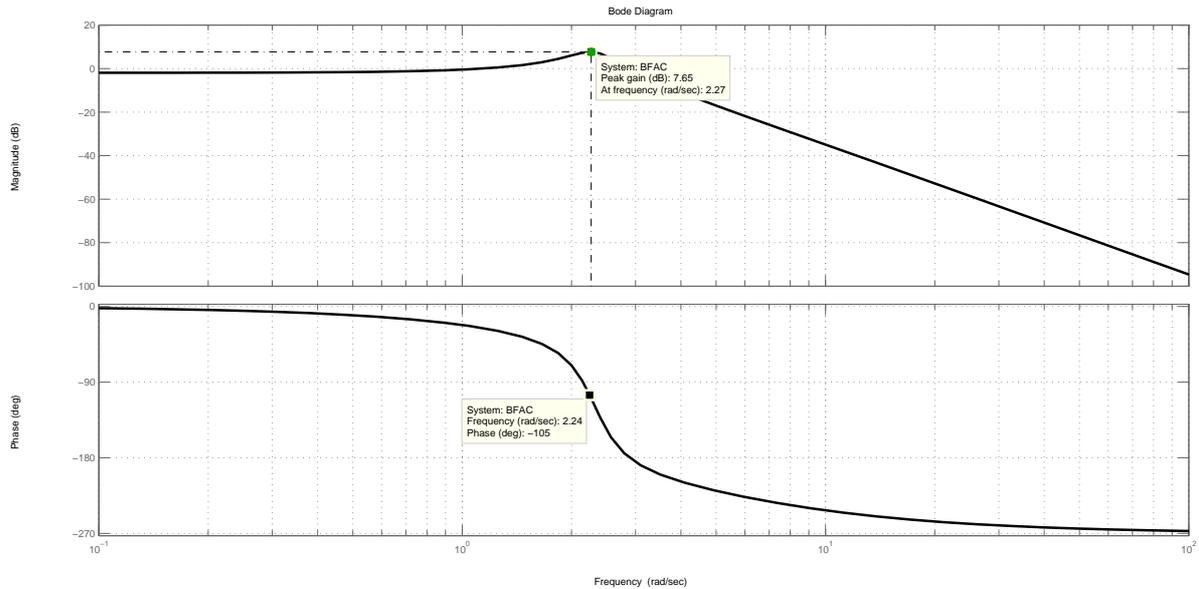


FIGURE 4.20 – Courbes de Bode de la FTBF  $H(p)$

L'objectif est d'étudier les caractéristiques du système brut (stabilité, précision, vitesse), avant de déterminer un correcteur PID qui optimisera la régulation.

La fonction de transfert du correcteur PID sera modélisée par :

$$C(p) = K \left( \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right) (1 + \tau_d p)$$

avec  $\tau_i > \tau_d$ .

**Protocole de réglage :** On réglera successivement l'action dérivée (choix de  $\tau_d$ ), puis l'action intégrale (choix de  $\tau_i$ ) et enfin l'action proportionnelle (choix de  $K$ ) pour remplir le cahier des charges suivant :

- CdC1- *Stabilité* : marge de phase  $M\Phi = 45^\circ$
- CdC2- *Précision* : erreur statique nulle  $\varepsilon_0 = 0$
- CdC3- *Vitesse* : BP asymptotique (coupure avec la droite à 0dB) :  $\omega_c = 1\text{rad/s}$

## Résolution du problème

### Etude du système

1. Déterminer les pôles de  $G(p)$ , pour ensuite vérifier sa stabilité du point de vue mathématique. Commentaire sur la stabilité ?
2. Simplifier l'écriture de  $G(p)$  par factorisation du dénominateur.  
Déterminer l'ordre  $d$  du système, la constante de temps  $\tau_0$ , la pulsation propre  $\omega_0$ .  
Quelle est la classe  $n$  du système ? Peut-on prévoir quelle sera l'erreur statique  $\varepsilon_0$  en boucle fermée ? Commentaire sur la précision ?
3. Tracer les courbes de Bode asymptotiques du système (gain en dB  $G_{dB}$  en fonction de la pulsation  $\omega$  en rad/s).  
Déterminer la bande passante  $BP$ . Commentaire sur le lien entre rapidité et BP.
4. Exprimer l'argument de  $G(p)$  à l'aide d'une fonction arctangente de la variable  $\omega$ . Calculer la valeur de la phase du système non corrigé  $Arg[G(p)]$  à la pulsation  $\omega = \omega_c$ .

Quelle serait la marge de phase du système si le gain valait 0dB à  $\omega = \omega_c$  (qui est la limite de bande passante souhaitée CdC3) ?

Conclure : que faudra-il faire pour régler la condition CdC1 ?

### Etude du correcteur

5. On inclut désormais le correcteur  $C(p)$  dans la boucle fermée à retour unitaire.  
Dessiner le schéma-bloc du système bouclé avec le correcteur  $C(p)$  en série.  
Tracer les courbes de Bode asymptotiques du correcteur PID seul  $C(p)$ . On pourra utiliser les notations :  $\omega_i = 1/\tau_i$  et  $\omega_d = 1/\tau_d$ .
6. Préciser l'action du correcteur (c.à-d son influence sur un système) dans la bande HF, dans la bande BF, en milieu de gamme.  
Situer les 2 pulsations en jeu :  $\omega_i$  et  $\omega_d$  par rapport à la pulsation propre du système  $\omega_0$ .  
Quel est l'intérêt d'un ajout de phase sur un système ?

### Etude du système corrigé

On étudie maintenant la FTBO avec correcteur :  $C(p)G(p)$  pour répondre au cahier des charges. Les courbes de Bode de la FTBO s'obtiennent par simple addition :

$$|FTBO| = |C|_{dB} + |G|_{dB} \text{ et } Arg[FTBO] = Arg[C] + Arg[G].$$

7. Supposons que dans un 1er temps, on prend **uniquement** la partie dérivateur :

$$C(p) = (1 + \tau_d p).$$

Combien doit-on ajouter/retrancher de phase au système  $G(p)$  pour respecter la condition CdC1 ? Que doit donc valoir l'argument du correcteur  $Arg[1 + \tau_d p]$  ? En déduire la valeur du 1er paramètre (dérivateur) du correcteur :  $\tau_d$ .

8. On va maintenant ajouter une action intégrale. On prend ici

$$C(p) = \left( \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right).$$

Quel est la classe du système corrigé avec  $C(p) = \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  ?

Justifier pourquoi on est sûr de respecter la condition CdC2 avec le correcteur PID : quelle est l'action essentielle pour cela ?

Pour ne pas influencer sur le réglage de  $\tau_d$  ci-dessus, on place l'action intégrale une décade en deçà de l'action dérivée, i.e.  $\omega_i = \omega_d/10$ . Justifier pourquoi en évaluant gain et phase du correcteur  $C(p) = \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  en HF pour  $\omega \rightarrow \infty$ . En déduire le réglage du 2e paramètre (intégral) :  $\tau_i$ .

9. Exprimer la FTBO avec correcteur complet  $C(p)G(p)$  en substituant les 2 paramètres  $\tau_i$  et  $\tau_d$  par les valeurs trouvées ci-dessus et en prenant  $K = 1$  (action proportionnelle inactive).

Calculer le module  $|FTBO|$  (et le gain correspondant en dB) à la pulsation  $\omega = \omega_c$  sans correction proportionnelle ( $K = 1$ ).

10. On veut que  $\omega = \omega_c$  soit la limite de bande passante (CdC3), c.à-d corresponde à une valeur de gain de 0dB (amplitude de 1). Exprimer la condition du module unitaire à la pulsation de coupure :  $|FTBO| = 0dB \Leftrightarrow |C(p) \times G(p)| = 1$  pour  $\omega = \omega_c$ .

Pour que ce gain vaille 0dB (amplitude 1), en déduire le réglage adéquat du 3ème paramètre (proportionnel) :

$$C(p) = K$$

pour respecter la condition CdC3 (c-à-d que le gain chute sous 0dB uniquement à partir de  $\omega = \omega_c$ ). Donner la valeur de  $K$  en dB.

Vérifier la performance du correcteur en calculant la marge de phase exacte obtenue avec les valeurs proposées de  $K, \tau_i, \tau_d$ . Conclure sur l'intérêt d'un PID.

## 4.17 Contrôle AUTO1 30/11/2015 (2h)

### Asservissement de position d'un moteur à courant continu

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO :

$$G(p) = \frac{10}{p(1 + 2p)}$$

On souhaite régler ce système grâce à un atténuateur variable  $K$  mis en série, et d'un rebouclage unitaire de l'ensemble, pour que le système en boucle fermée présente de bonnes performances. Les valeurs mesurées des courbes de Bode de  $G(j\omega)$  sont reportées Tab. 4.5.

TABLE 4.5 – Tableau de gain et phase

$\omega$ (rad/s)	0.1	0.2	0.4	1	2	$\omega_1$	4	10	15
$ G $ en dB	40	33	26	13	1.7		-10	-26	-33
$Arg(G)$ en °	-101	-112	-129	-153	-166		-173	-177	-178
$ H $ en dB									
$Arg(H)$ en °									

- Tracer le lieu de  $G(p)$  sur l'abaque de Black pour  $\omega \in [0.1; 0.2; 0.4; 1; 2; 4; 10; 15]$ .
- Estimer la marge de phase  $M_\Phi$  et la marge de gain  $M_G$  du système en boucle ouverte. Sont-elles satisfaisantes? Justifier la réponse.  
Approximativement, pour quelle pulsation obtient-on la marge de phase?
- Exprimer la fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  et calculer son gain (en dB) et sa phase (en degrés) pour une valeur particulière de la pulsation :  $\omega_1 = 2.2rad/s$ .  
Déterminer les pôles de la fraction  $G(p)$ . En déduire si  $G(p)$  est stable ou non en boucle ouverte. Justifier par rapport à un critère mathématique.
- Pour améliorer les performances, on souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ . Quelle valeur de  $K = K_0$  doit-on choisir pour cela (on pourra raisonner graphiquement)? Exprimer cette valeur de gain en dB et en linéaire.
- Tracer alors la nouvelle FTBO  $G_c(p)$  corrigée avec cette valeur de  $K$ .
- A partir de ce diagramme de Black, et sans effectuer de calcul, déduire les valeurs de gain et phase de la FTBF à retour unitaire  $H(p)$  corrigée avec  $K = K_0$ . Compléter le Tab. 4.5.
- Tracer sommairement les courbes de Bode de  $H(p)$  pour  $K = K_0$ .  
En déduire la bande passante  $BP_{-3dB}$ . Commentaire?
- Dessiner le schéma donnant la fonction de transfert en boucle fermée FTBF  $H(p)$ .  
Exprimer la FTBF  $H(p)$  sous forme d'une fraction rationnelle.
- Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2}$$

Identifier les expressions de la pulsation caractéristique  $\omega_n$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$  en fonction de  $K$ .

A.N. Pour  $K = K_0$ , calculer numériquement  $\zeta$  et la fréquence caractéristique  $f_n$  (en Hz).

10. Prévoir quelle sera la valeur du 1er dépassement indiciel  $D(\%)$  (d'après les abaques théoriques des réponses à un échelon d'un système du 2ème ordre).

Conclure en donnant l'allure qu'aura la réponse indicielle du système en boucle fermée.

## 4.18 Contrôle AUTO2 12/1/2016 (2h)

On considère le système dont la FTBO vaut  $G(p)$ , où  $K = 50$  et  $\tau = 0.1s$  :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)(1 + \frac{1}{10}\tau p)}$$

On veut le corriger en boucle fermée avec un correcteur  $C(p)$  en série :

$$C(p) = K_2 \left( 1 + \frac{1}{\tau_i p} \right)$$

1. Quels sont l'ordre et la classe du système en BO  $G(p)$  ?
2. Tracer les courbes asymptotiques de  $G(p)$  (gain et phase en fonction de la pulsation  $\omega \in [1; 1000]$ ).
3. Evaluer sa marge de phase par calcul ou graphiquement. Commenter.
4. Quels sont les pôles de  $G(p)$  ? Les positionner dans le plan complexe.
5. Quel est le pôle le plus dangereux pour la stabilité en cas de bruit ?
6. Le système en boucle fermée sans correcteur présente-t-il une erreur statique  $\varepsilon_0$  ? Si oui, que vaut-elle ?
7. Quel est le type du correcteur  $C(p)$  ? A quoi sert-il ?
8. Tracer les courbes de Bode asymptotiques de  $C(p)$ .
9. Donner la valeur de  $\tau_i$  qui permet de compenser le pôle le plus gênant.
10. Avec cette valeur de  $\tau_i$ , exprimer la FTBO corrigée.
11. Puis exprimer la FTBF corrigée.
12. Montrer que la FTBF peut se mettre sous la forme d'un 2e ordre :

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2}$$

13. Identifier les deux paramètres  $\zeta$  et  $\omega_n$ . Les exprimer en fonction de  $K$ ,  $K_2$  et  $\tau$ .
14. On veut une réponse indicielle en boucle fermée ayant un dépassement faible (compris entre 1 et 2%, typ.  $D = 1.5\%$ ). En vous aidant des abaques des systèmes du 2nd ordre (cf. TP1 AUTO1 Fig.5.3 du polycopié), en déduire la valeur de  $\zeta$  à choisir.
15. Pour obtenir cette valeur de  $\zeta$ , calculer le bon réglage de  $K_2$ .
16. On prenant  $\tau_i = 0.1s$  et  $K_2 = 0.08$ , on a obtenu la réponse indicielle de la Fig.4.21. Commentaire : est-ce cohérent avec vos calculs ?
17. Est-ce un bon ou mauvais réglage du correcteur ? Justifier la réponse.
18. Si l'on voulait rendre le système plus rapide en boucle fermée, que faudrait-il proposer comme correction supplémentaire ?

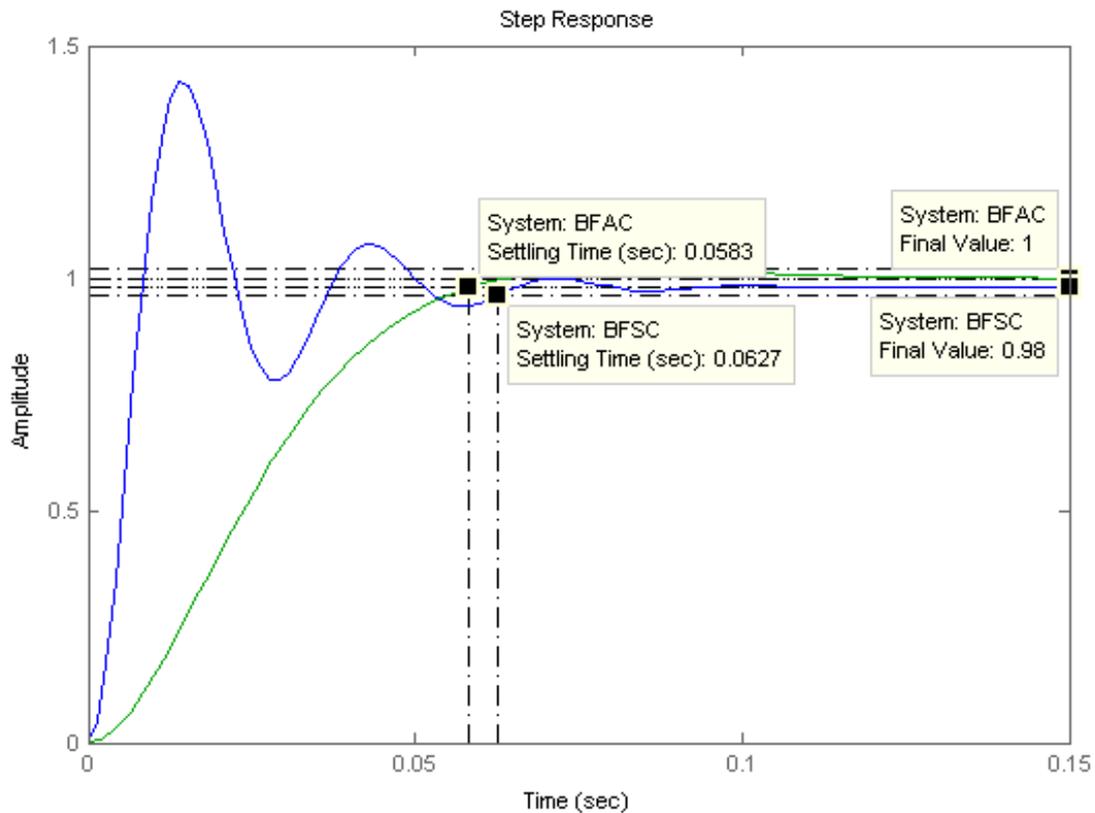


FIGURE 4.21 – Réponse indicielle en boucle fermée : BFSC=sans correcteur (courbe supérieure) ; BFAC=avec correcteur (courbe inférieure).

## 4.19 Contrôle AUTO1 09/12/2016 (2h)

### Etude d'un radar de poursuite

Un radar de poursuite est un appareil qui permet de connaître avec précision la position et la vitesse d'un mobile évoluant dans l'espace.

#### Principe de fonctionnement

Une antenne parabolique émet dans une direction précise une suite d'impulsions. Son orientation est repérée par rapport au plan horizontal de référence grâce à des capteurs de position relevant la position de l'antenne radar. En présence d'obstacles réfléchissants, l'antenne détecte et analyse un écho formé d'une suite d'impulsions réfléchies. Le niveau de l'écho dépend fortement de l'écart entre la direction d'émission et la direction de l'obstacle. Le récepteur d'antenne délivre alors deux tensions continues proportionnelles à cet écart. La mesure du temps écoulé entre l'instant d'émission d'une impulsion et l'instant de réception de l'impulsion réfléchi permet de connaître la distance entre le point d'émission et le mobile. La poursuite ne peut être réalisée que si l'écart entre la direction d'émission et la direction de l'obstacle est faible. Cette poursuite est réalisée en grande partie grâce à l'asservissement présenté ci-après.

#### Motorisation de l'antenne (13 points)

Le positionnement de l'antenne est obtenu par l'action de deux moteurs à courant continu identiques. La dépendance entre la tension d'alimentation des moteurs  $U_m$  et la vitesse de

rotation de l'antenne  $\Omega_s$  est décrite par le schéma-bloc de la Fig. 4.22.

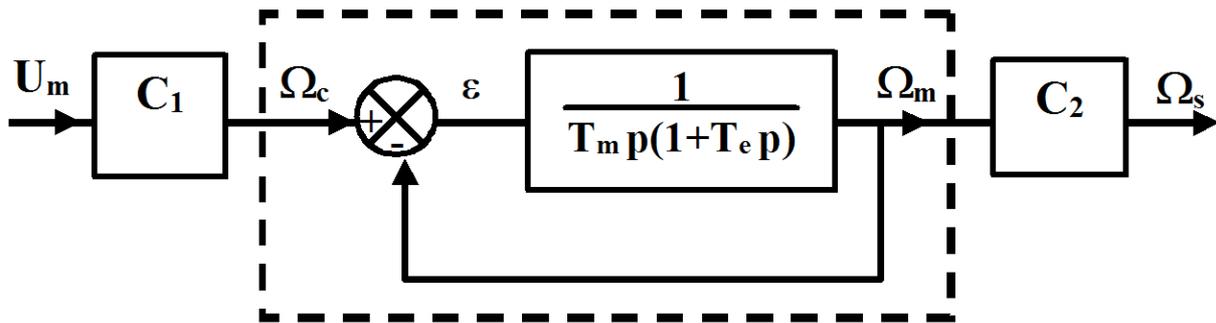


FIGURE 4.22 – Schéma de la motorisation

$\Omega_m$  est la vitesse de rotation des moteurs.  $\Omega_c$  est la vitesse de consigne liée à la force électromotrice en l'absence de pertes.  $\varepsilon$  correspond à la grandeur d'erreur.  $C_2$  est un réducteur.

$C_1 = 1/0.433 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$  et  $C_2 = 1/1000$ .

$T_m = 73.3\text{ms}$  et  $T_e = 4.5\text{ms}$  sont des constantes de temps dépendant des caractéristiques mécaniques et électriques des moteurs et du système.

On s'intéresse tout d'abord uniquement à la **partie centrale** du système (entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_m$ ).

1. On note  $G(p)$  la fonction de transfert en **boucle ouverte** du système central décrit en pointillés sur la Fig. 4.22. Exprimer  $G(p)$ .
2. Tracer le lieu de Black de  $G(p)$  après avoir rempli les 2 premières lignes du Tab. 4.6 (rappel :  $p = j\omega$ ).

TABLE 4.6 – Tableau de gain et phase

$\omega$ (rad/s)	1	5	10	50	100	200
$ G $ en dB						
$Arg(G)$ en $^\circ$						
$ H $ en dB						
$Arg(H)$ en $^\circ$						

3. A partir de ce diagramme de Black, sans effectuer de calcul, dire si le système sera stable en boucle fermée. Justifier la réponse (marge de phase).
4. Donner la définition de  $H(p)$ , fonction de transfert en **boucle fermée** du système central : exprimer  $H(p)$  en fonction de  $G(p)$ .
5. Exprimer  $H(p)$  en fonction des caractéristiques du moteur ( $T_m$  et  $T_e$ ).
6. Donner les valeurs du module et de l'argument de  $H(p)$  pour  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  et  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  et compléter le tableau.
7. A l'aide du schéma de la Fig. 4.22, déterminer maintenant l'expression de la fonction de transfert complète en boucle fermée  $H_0(p) = \frac{\Omega_s(p)}{U_m(p)}$  en fonction de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $H(p)$ .
8. Donner l'expression littérale de  $H_0(p)$  en fonction des caractéristiques du système.
9. Donner son gain statique  $K_0$ , sa fréquence caractéristique  $f_0$  (en Hz) et son coefficient d'amortissement  $\zeta$ .
10. Quel est l'ordre du système  $H_0(p)$  ?
11. Tracer sommairement ses courbes de Bode (asymptotes).
12. Quelle est la bande passante du système ?
13. Connaissant l'amortissement  $\zeta$ , peut-on prévoir l'allure de la réponse indicielle ? Si oui, la dessiner sommairement.

## Alimentation des moteurs (7 points)

Les moteurs sont alimentés par des groupes électriques appelés Ward-Léonard commandés en tension. L'ensemble du système antenne-moteur-alimentation peut alors être représenté par le schéma de la Fig. 4.23.

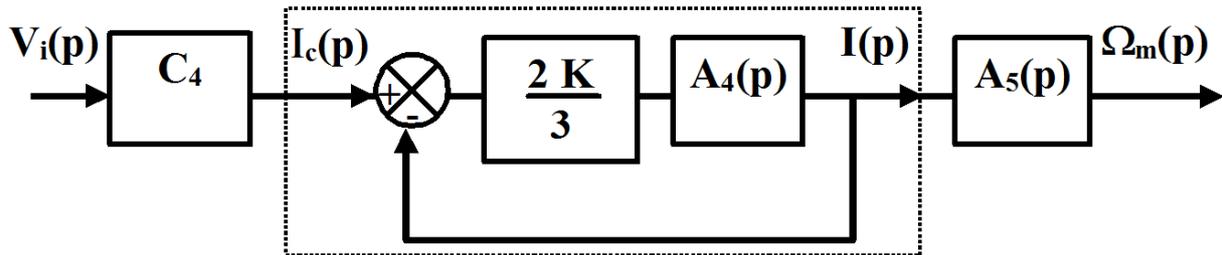


FIGURE 4.23 – Schéma global de l'asservissement de position

$$C_4 = 10 \text{ A/V} ;$$

$K$  est la valeur d'un amplificateur de gain utilisé dans le groupe Ward-Léonard.

$$A_4(p) = \frac{0.1p}{\left(1 + \frac{p}{10}\right) \left(1 + \frac{p}{20}\right) \left(1 + \frac{p}{300}\right)}$$

$$A_5(p) = \frac{17.32}{p}$$

On étudie tout d'abord la FTBF de la partie centrale (en pointillés) :

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}.$$

14. Déterminer l'expression de  $H_1(p)$  en fonction de  $A_4(p)$  et  $K$ .
15. Développer l'expression fractionnaire de  $H_1(p)$  en fonction des caractéristiques du système et exprimer son dénominateur sous forme d'un polynôme  $D(p)$ .
16. A l'aide du critère de Routh, déterminer les conditions à imposer à  $K$  pour que ce système soit stable.
17. Exprimer finalement la fonction de transfert total du système :

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{V_i(p)}.$$

18. Quel est l'ordre du système ?
19. Sera-t'il stable ? Justifier.

## Commentaire

On notera que les arbres moteurs sont asservis en vitesse grâce à des génératrices tachymétriques représentées par des systèmes du troisième ordre. La modélisation de ce radar est donc plus complexe que ne le montre ce problème. De plus, apparaissent des résonances mécaniques dégradant la stabilité du système et qui sont éliminées par filtrage. Les radars et les projectiles guidés sont donc très difficiles à mettre au point et donc pas toujours efficaces...

## 4.20 Contrôle AUTO2 18/01/2017 (2h)

### Etude à partir d'un diagramme de Bode

Un relevé expérimental d'un système en boucle ouverte a donné le diagramme de Bode Fig. 4.24, où l'on a superposé en gras le tracé asymptotique du gain.

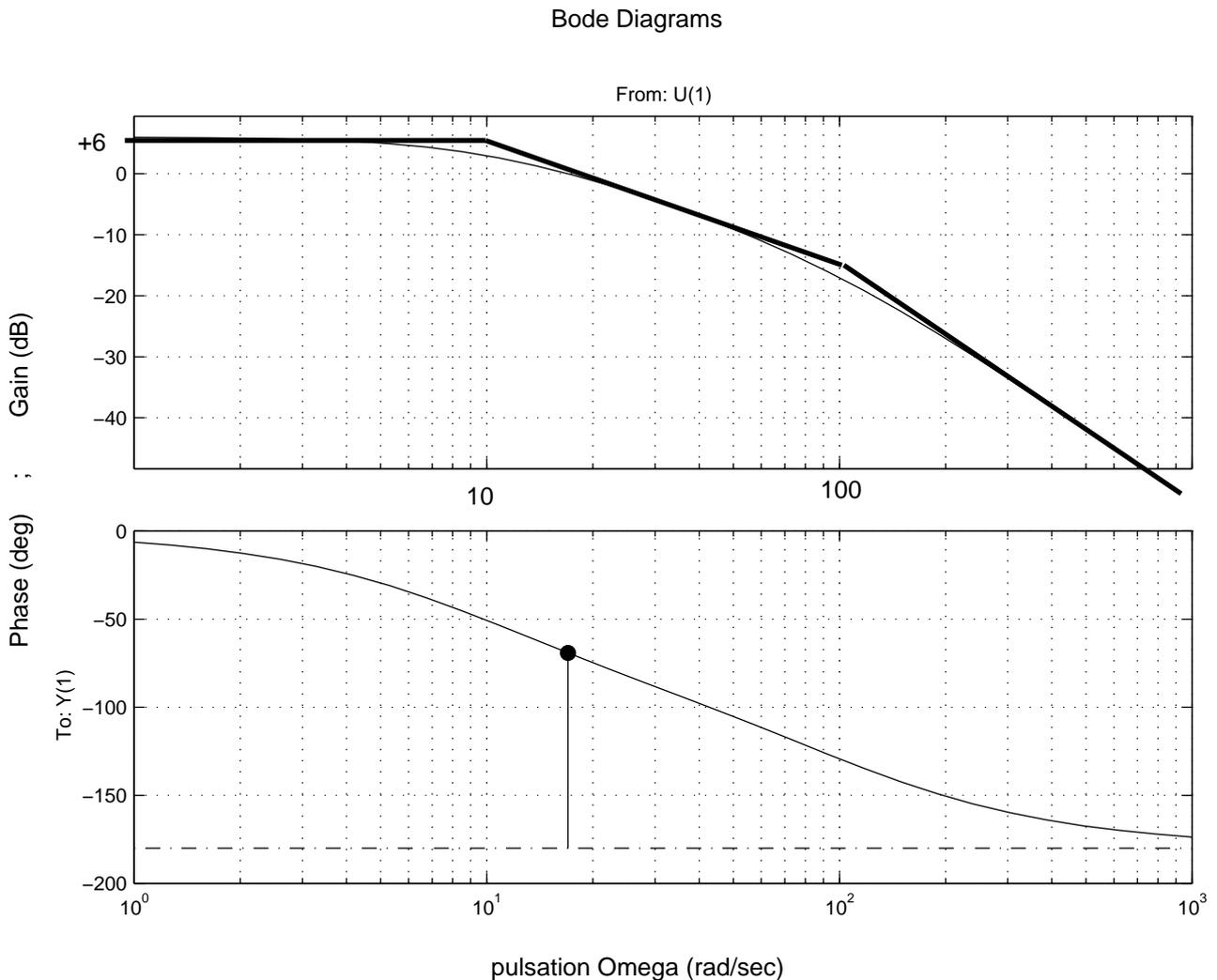


FIGURE 4.24 – Courbe de Bode en boucle ouverte :  $G_0(p)$

1. Sachant que la fonction de transfert en boucle ouverte est de la forme :

$$G_0(p) = \frac{K_0}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

déterminer **graphiquement** les constantes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_0$  (en dB et en linéaire).

2. Déterminer **graphiquement** la marge de phase du système :  $M_\varphi$  (sachant qu'elle se mesure quand le gain vaut 1, soit 0dB).
3. On veut obtenir un système possédant une marge de phase de  $45^\circ$ . Par quel gain  $K$  faut-il multiplier le gain  $K_0$  (raisonner graphiquement) ?  
Donner la valeur de  $K$  en échelle dB, puis en échelle linéaire.
4. Confirmer par le calcul la valeur de  $K$ .
5. Exprimer la bande passante à -3dB du système  $G(p) = K.G_0(p)$  de gain statique  $KK_0$ .

6. Tracer le diagramme de Black de la FTBO  $G(p)$ . Choisir 7 pulsations dans la gamme  $\omega \in [1; 1000]$ , par exemple  $[1; 3; 10; 30; 100; 300; 1000]$ .
7. Confirmer la marge de phase de  $45^\circ$ , la bande passante et la fréquence de coupure par lecture directe sur le diagramme de Black de  $G(p)$ .
8. Toujours par lecture directe sur l'abaque de Black, indiquer la valeur du gain maxi qu'on obtiendra pour la FTBF  $H(p)$  (c'est-à-dire quand  $G(p)$  est mis en boucle fermée avec retour unitaire).
9. A quelle pulsation ce gain maxi est-il obtenu (on donnera une valeur approximative) ?
10. Tracer sommairement l'allure de la courbe de gain de cette FTBF. Qu'en penser ?  
NB : Pour ce tracé, on peut soit calculer gain et phase de la FTBF pour les mêmes pulsations que ci-dessus, soit exploiter directement l'abaque de Black.
11. Déterminer l'erreur statique en boucle fermée de ce système  $H(p)$ . Justifier la réponse.
12. Avec le simple correcteur proportionnel ci-dessus, pour une valeur de gain  $K_{dB} = +20dB$ , on a obtenu la réponse indicielle de la Fig. 4.25 en boucle fermée, qui est comparée à celle qui aurait été obtenue sans ce correcteur de gain. Commenter la figure en comparant

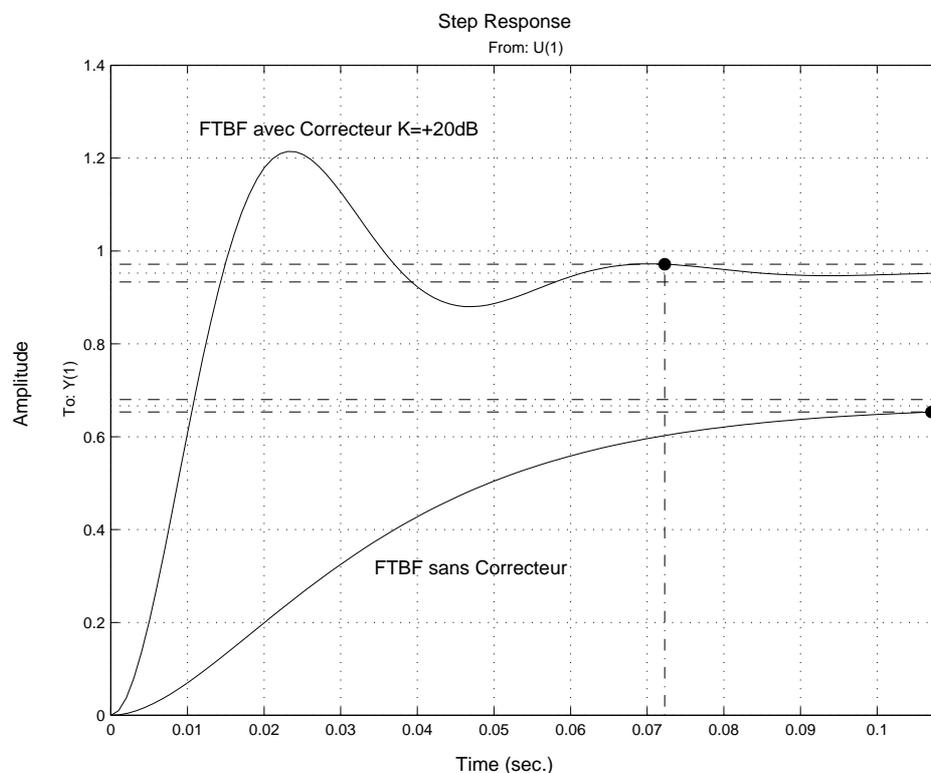


FIGURE 4.25 – Réponse indicielle en boucle fermée avec correcteur proportionnel  $K_{dB} = 20dB$

**quantitativement** les performances des 2 courbes (mesures liées à vitesse, précision, stabilité).

13. Proposer un autre correcteur de la famille des P.I.D. (PI ou PID au choix) pour optimiser le système en boucle fermée. Justifier le choix du correcteur.
14. Calculer les paramètres du correcteur proposé (en s'inspirant du tableau récapitulatif Tab.2.3 du polycopié de cours).
15. Confirmer les performances attendues par le calcul. Notamment en exprimant la FTBF corrigée et en exhibant ses paramètres caractéristiques (valeur du gain statique, constante de temps, amortissement éventuel, pulsation propre etc.)
16. Conclure sur l'intérêt d'un correcteur PID.

## 4.21 Contrôle AUTO1 05/12/2017 (2h)

### Sensibilité (40 mn)

On considère les deux structures de correction de la Fig. 4.26 [7].

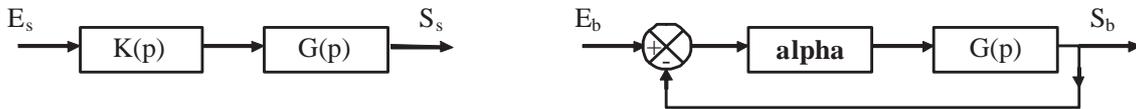


FIGURE 4.26 – a) correction série : b) correction avec bouclage.

On a

$$G(p) = \frac{k}{1 + 0.2p} \quad K(p) = \frac{1 + 0.2p}{1 + 0.1p}$$

où  $k > 0$  et  $\alpha > 0$  sont des paramètres de gain variable que peut régler l'utilisateur.

La première structure correspond à une correction **série** en boucle ouverte. La seconde est une correction série avec **bouclage** unitaire.

1. Calculer les fonctions de transfert entrée/sortie des 2 montages, notées respectivement :

$$F(p) = \frac{S_s(p)}{E_s(p)} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{S_b(p)}{E_b(p)}$$

2. Mettre  $F(p)$  et  $H(p)$  sous forme de fraction canonique. Comparer les dénominateurs et indiquer l'ordre des 2 systèmes. Comparer les numérateurs et indiquer quelle est la différence.
3. Montrer qu'en imposant une condition sur  $\alpha$ , on peut obtenir les mêmes pôles (valeurs de  $p$  qui annulent le dénominateur), et donc la même stabilité pour les deux structures.  
A.N. : Donner, en fonction de  $k$ , la valeur correspondante  $\alpha = \alpha_0$ .
4. La sensibilité d'une fonction  $f$  par rapport aux variations d'un paramètre  $a$  étant définie par :

$$s_a^f = \frac{\text{variation relative de } f}{\text{variation relative de } a} = \frac{\frac{\partial f}{f}}{\frac{\partial a}{a}} = \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right) \frac{a}{f}$$

calculer la sensibilité des 2 fonctions  $F(p)$  et  $H(p)$  aux variations du paramètre  $k$ , qu'on notera respectivement  $s_k^F(p)$  et  $s_k^H(p)$ . On conservera pour ce calcul le paramètre  $\alpha$  sous sa forme littérale.

5. Tracer la courbe de gain (en dB) de la sensibilité  $s_k^H(p)$ . Pour cela, exprimer  $s_k^H(j\omega)$  sous forme d'une fraction canonique simple, fonction de la pulsation  $\omega$ . Pour simplifier l'écriture, on pourra utiliser les notations :  $A_0 = \frac{1}{1+\alpha k}$  ;  $\omega_1 = 5$  rd/s et  $\omega_2 = 5(1 + \alpha k)$  rd/s. Pour le tracé, utiliser la valeur  $\alpha = \alpha_0$ .
6. Quelle est la meilleure structure du point de vue de la sensibilité ? Justifier en comparant les 2 courbes de sensibilité fonction de  $\omega$ , dans le cas particulier où  $\alpha = 1/k$ . On pourra notamment comparer les sensibilités en basses fréquences ( $p \rightarrow 0$ ), c-à-d dans la bande passante du système :  $\omega \in [0; \omega_1]$ .

### Stabilité conditionnelle (20 mn)

Soit un système en boucle ouverte de fonction de transfert (FTBO) :

$$G(p) = \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)}$$

On l'inclut dans une boucle fermée à retour unitaire et on insère entre le comparateur et le système un correcteur de gain  $K$  variable.

1. Prouver d'abord la stabilité de ce système en boucle ouverte : FTBO  $G(p)$ .
2. Dessiner le schéma-bloc du système bouclé.
3. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée : FTBF  $H(p)$ .
4. On prend d'abord  $K = 1$ . En appliquant le critère de Routh-Hurwitz, dire si la FTBF est stable.
5. On suppose maintenant que  $K$  est un gain réglable par l'utilisateur. On veut savoir si le système en BF restera stable quelle que soit la valeur de  $K$ . Appliquer le critère de Routh et indiquer à quelle condition portant sur  $K$  on aura la stabilité de la FTBF.

## Commande en position d'un moteur à courant continu (1h)

Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{1}{p(1 + 5p)}$$

Elle est représentative d'un moteur à courant continu commandé en angle. On souhaite régler ce système à l'aide d'un correcteur de gain  $K$  mis en série et d'un bouclage (unitaire) de l'ensemble pour que le système en boucle fermée présente les performances suivantes :

- premier dépassement  $D_1 \leq 25\%$
  - temps de réponse  $T_r \leq 35s$
1. Exprimer la fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  et calculer son gain (en dB) et sa phase (en degrés) pour 5 valeurs de la pulsation  $\omega$  en rd/s :  $\omega \in [0.05 ; 0.1 ; 0.4 ; 0.8 ; 2]$
  2. Tracer le lieu de  $G(j\omega)$  sur l'abaque de Black.
  3. En déduire la marge de phase  $M_\Phi$  et la marge de gain  $M_G$  du système en boucle ouverte. Sont-elles satisfaisantes ?
  4. Pour obtenir les performances souhaitées, on vise une marge de phase de l'ordre de 40 à 45°. Quelle valeur de gain  $K = K_0$  doit-on choisir pour cela (on pourra raisonner graphiquement) ? Exprimer cette valeur en dB puis en linéaire.
  5. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée : FTBF  $H(p)$
  6. Montrer qu'elle se peut se mettre sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

7. Exprimer  $\tau$  et  $\zeta$  en fonction de  $K$ .  
A.N. : donner leur valeur numérique pour  $K = K_0$ .
8. **Question piège (bonus)** : Donner, en le justifiant par le critère théorique de stabilité de votre choix, la valeur limite du gain  $K = K_L$  qui est permise pour conserver la stabilité du système en Boucle Fermée. Vérifier que la valeur  $K_0$  trouvée ci-dessus respecte bien cette condition.
9. Pour  $K = K_0$ , et en utilisant l'abaque Fig. 4.27, vérifier qu'on obtient bien le dépassement  $D_1$  souhaité.
10. Comparer  $\tau$  avec la constante de temps du système en BO, puis avec le temps de réponse  $T_r$  souhaité en BF. Commentaires ?
11. Calculer la pulsation  $\omega_0$  caractéristique du système en boucle fermée (FTBF).
12. A l'aide de l'abaque Fig. 4.28, déduire de  $\zeta$  et  $\omega_0$  la valeur théorique du temps de réponse  $T_r$ . Conclure.

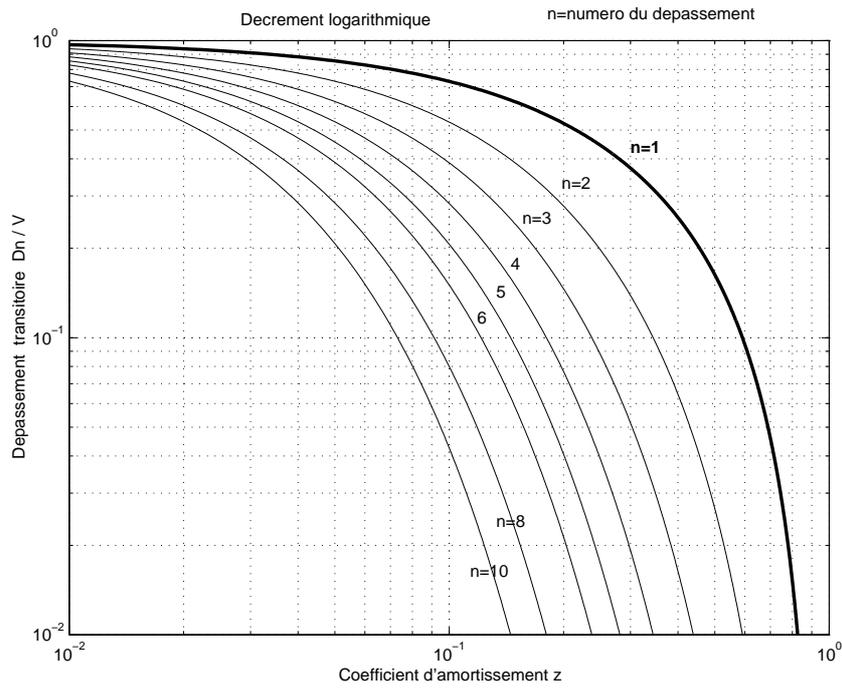


FIGURE 4.27 – Abaque caractéristique des systèmes du 2e ordre : Dépassements indicels  $D$  en fonction de l'amortissement  $\zeta$  (la courbe en gras correspond au 1er dépassement  $D_1$ ).

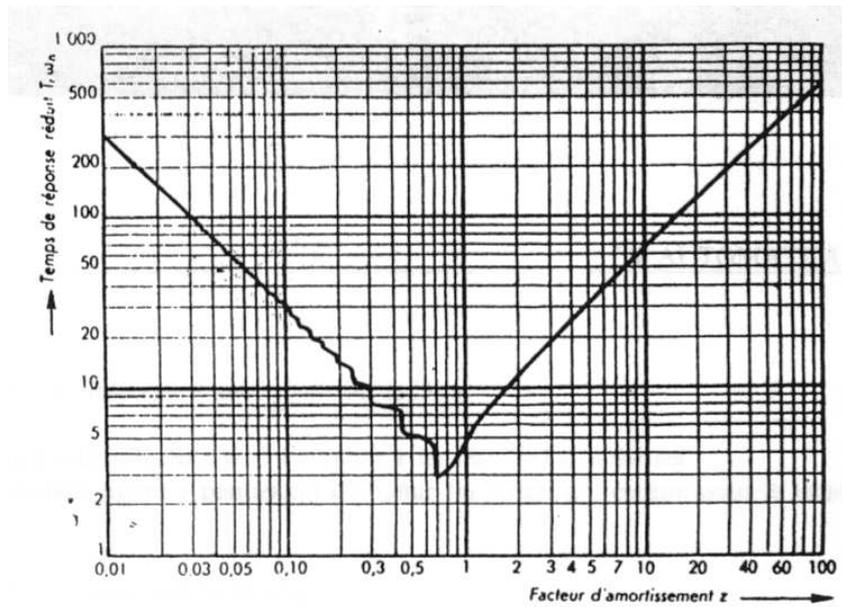


FIGURE 4.28 – Abaque caractéristique des systèmes du 2e ordre : Temps de réponse réduit  $T_r \omega_0$  en fonction de l'amortissement  $\zeta$ .

## 4.22 Contrôle AUTO2 17/01/2018 (2h)

### Four tubulaire

Un four tubulaire permet de chauffer du pétrole. On souhaite régler la température  $\theta_s(t)$  dans le four en fonction de la pression du gaz servant de combustible. Une vanne permet de régler le débit de gaz combustible grâce à un signal de commande  $u(t)$ . La fonction de transfert du processus est :

$$G(p) = \frac{\Theta_s(p)}{U(p)} = \frac{150}{(1 + 16.5p)(1 + 0.6p)}$$

où  $\Theta_s(p)$  et  $U(p)$  sont les transformées de Laplace de  $\theta_s(t)$  et  $u(t)$ .

L'objectif est d'étudier les caractéristiques (stabilité etc.) du système brut, puis de déterminer le correcteur PID qui optimisera la régulation. La fonction de transfert du correcteur PID mis en série est modélisée par :

$$C(p) = K \left( \frac{1 + \tau p}{p} \right) (1 + \tau_d p)$$

avec  $\tau > \tau_d$ .

On réglera successivement l'action intégrale (choix de  $\tau$ ), puis l'action dérivée ( $\tau_d$ ) et enfin l'action proportionnelle  $K$ .

### Etude du four

1. Calculer le gain statique en dB, et les pulsations caractéristiques du système  $G(p)$ .
2. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $G(p)$  sur papier semilog (+1 décade).
3. Donner l'expression du module et de l'argument de  $G(p)$  (pour  $p = j\omega$ ) et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

TABLE 4.7 – Tableau à compléter

$\omega$ (rad/s)	$2 \cdot 10^{-3}$	0.02	0.06	0.1	0.3	1	2	3	4	7	20	70
$ G $ (dB)	43.5	43	40.5	37.8	29.3		9.3	3.4		-10.4	-28.5	-50.2
$Arg(G)$ (°)	-2	-19	-46.8	-62.2	-88.8	-117.5	-138.5		-156.5		-175	-178.6

4. Tracer les diagrammes de Bode réels sur le même papier semi-log. Faire toute mesure utile.
5. Tracer le lieu de Nichols sur l'abaque de Black.
6. Déterminer la marge de phase de la FTBO. Pour quelle pulsation  $\omega_0$  est-elle obtenue ? Ceci définit la bande passante initiale du système :  $BP_{0dB} = [0; \omega_0]$ .
7. Déterminer la marge de gain.
8. Commentaire sur la stabilité du système ? Donner la classe et l'ordre du système.
9. Le système est désormais inclus dans une boucle fermée à retour unitaire, mais sans correcteur dans un premier temps. Calculer l'erreur statique de la FTBF en réponse à un échelon unitaire.
10. Commentaire sur la valeur de l'erreur. Comment peut-on la réduire ? Comment peut-on l'annuler ?

## Etude du correcteur

On veut une erreur statique nulle, une marge de phase correcte et une bande passante suffisante. Pour cela, on va insérer le PID en série et le régler au mieux.

11. Faire le schéma fonctionnel de la boucle fermée corrigée sachant que le retour est unitaire, et exprimer la FTBO corrigée  $C(p) \times G(p)$ .
12. Tracer les diagrammes asymptotiques du correcteur.
13. On règle d'abord l'action I pour compenser le pôle le plus critique de  $G(p)$ . Quel est-il ? En déduire la valeur de  $\tau$  pour le compenser.
14. On règle ensuite l'action D pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$  à la pulsation de  $\omega_0 \approx 4 \text{ rad/s}$ . Connaissant la marge de phase sans correcteur, indiquer quel apport de phase il faut ajouter pour atteindre la valeur souhaitée, ceci à  $\omega_0$ .
15. Sachant que cet apport de phase sera fourni par le terme dérivateur  $(1 + \tau_d p)$  du correcteur PID, calculer  $\tau_d$ .
16. Il faut finalement ajuster le gain proportionnel  $K$ . Pour cela, calculer d'abord à la fréquence  $\omega_0$  quelle est la valeur du gain global de  $C(p)G(p)$  avec les réglages ci-dessus de  $\tau_d$  et  $\tau$ . L'exprimer en linéaire et en dB.
17. Sachant qu'on souhaite que la Bande Passante soit conservée à  $\omega_0$ , c'est-à-dire que le gain global en BO avec correcteur soit de 1 (i.e.  $0 \text{ dB}$ ) à cette fréquence, calculer la valeur de  $K$  à choisir pour compenser le gain constaté.
18. Vérifier par le calcul que ces valeurs du PID conduisent bien à une marge de phase de  $45^\circ$  à la fréquence souhaitée.
19. Un essai avec les paramètres  $\tau = 20$ ;  $\tau_d = 0.1$  et  $K = 0.05$  a donné la réponse indicielle Fig. 4.29a. Commenter le résultat (dépassement, temps de réponse, erreur statique...).

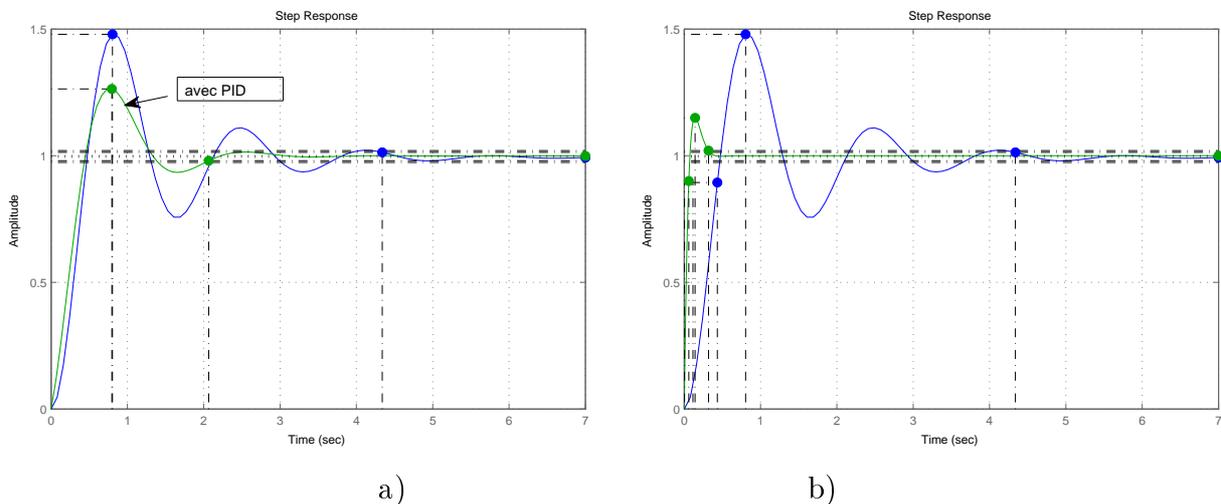


FIGURE 4.29 – Réponses indicielles en Boucle fermée : a) avec PID No.1; b) avec PID No.2. N.B. : Sur chacun des 2 graphes, est également superposée la réponse qu'on obtiendrait sans le correcteur PID.

20. Un autre essai avec  $K = 1$ ;  $\tau = 16.5$  et  $\tau_d = 0.095$  a donné le résultat Fig. 4.29b. Commenter et comparer (faire toute mesure utile). Conclure sur l'intérêt d'un correcteur. Qu'est-ce qui a agi sur la vitesse du système ?
21. Exprimer ce système (FTBF corrigée avec PID No.2) sous une forme canonique.
22. Pouvait-on prévoir la valeur du dépassement et le temps de réponse à partir des abaques classiques d'un système du deuxième ordre ? Si oui, estimer et comparer les valeurs.

# Troisième partie

## TP - Pratique



# Chapitre 5

## TP Aa1 Système du 2nd ordre. Etude harmonique et indicielle

### 5.1 But de la manipulation

L'intérêt de l'étude du système du second ordre réside dans le fait que de nombreux systèmes physiques ont soit des fonctions de transfert du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre, soit d'ordre supérieur se ramenant, par décomposition en éléments simples, à des superpositions de régimes du 1er et du 2nd ordre.

Pour l'étude d'un système, les excitations par un échelon et par une sinusoïde présentent un intérêt prépondérant.

On étudiera donc dans cette manipulation la réponse d'un circuit électrique du second ordre à ces deux types d'excitations. On en définira les principaux paramètres et on apprendra à caractériser la fonction de transfert de façon la plus complète possible.

### 5.2 Cours à revoir

Décomposition des fractions rationnelles, calcul opérationnel (T.L.), représentation de Bode, Nyquist et Black, étude des circuits du 1er et du 2nd ordre.

### 5.3 Rappels théoriques

#### 5.3.1 Fonction de transfert

Considérons le circuit représenté Fig. 5.1. L'équation de ce circuit peut s'écrire pour  $R \gg r$  :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + V_c(t) \quad (5.1)$$

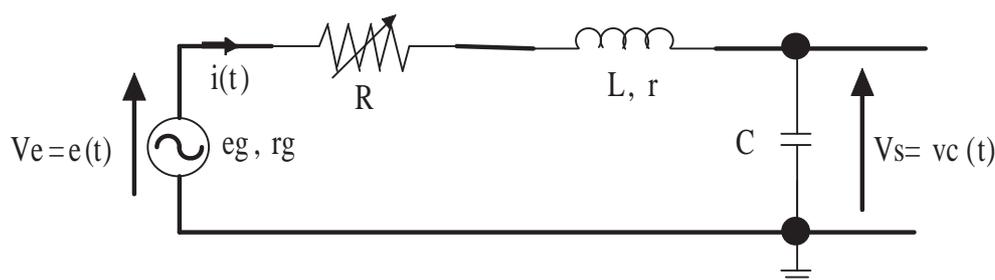


FIGURE 5.1 – Circuit RLC série

avec

$$V_c(t) = V_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (5.2)$$

$V_c(0)$  étant la tension aux bornes de  $C$  à l'instant  $t = 0$ .

En utilisant la transformée de Laplace, l'équation 5.1 devient :

$$E(p) = R.I(p) + Lp.I(p) - Li(0) + \frac{V_c(0)}{p} + \frac{1}{Cp}I(p)$$

ou encore dans le cas d'un système au repos à  $t = 0$  :

$$E(p) = \left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I(p)$$

De l'équation 5.2, on tire :  $V_c(p) = \frac{1}{Cp}I(p)$  ce qui donne pour la fonction de transfert  $T(p)$  :

$$T(p) = \frac{V_c(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} \quad (5.3)$$

On pose habituellement :

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5.4)$$

$\zeta$  est appelé le facteur d'amortissement et  $\omega_n$  la pulsation propre (en anglais *natural frequency*).

Sous ces conditions, la fonction de transfert s'écrit :

$$T(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2} \quad (5.5)$$

Cette fonction de transfert possède deux pôles qui sont réels ou imaginaires suivant que  $\zeta$  est supérieur ou inférieur à l'unité.

### 5.3.2 Réponse indicielle

Le circuit représenté Fig. 5.1 est soumis à un échelon de tension  $e(t)$  :

$$e(t) = Vu(t) \rightarrow E(p) = \frac{V}{p}$$

L'équation (5.5) devient :

$$V_c(p) = \frac{V\omega_n^2}{p(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (5.6)$$

Pour obtenir l'original  $v_c(t)$ , on décompose la fraction en éléments simples et on passe aux transformées de Laplace inverses. Le trinôme en  $p$  pouvant avoir 0, 1 ou 2 racines réelles, suivant le signe du discriminant réduit  $\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$ , trois cas sont à considérer :

### 5.3.2.1 Régime apériodique : cas $\zeta > 1$

Soit ici :  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Dans ce cas,  $D(p)$  s'annule pour 2 valeurs  $p_1$  et  $p_2$  de  $p$ . Ce sont les pôles de la fonction de transfert. Ils sont réels et négatifs. L'équation (5.6) peut s'écrire :

$$V_c(p) = \frac{V\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p-p_1} + \frac{C_1}{p-p_2} \quad (5.7)$$

avec  $p_i = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

La détermination de  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  permet d'écrire (5.7) sous la forme :

$$V_c(p) = \frac{V}{p} + \frac{V\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{1}{p_1(p-p_1)} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} \right]$$

dont l'original est :

$$v_c(t) = V + \frac{V\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{\exp(p_1 t)}{p_1} - \frac{\exp(p_2 t)}{p_2} \right] \quad (5.8)$$

Cette équation (5.8) comporte deux termes :

- le premier,  $V$ , est indépendant du temps, il représente le régime permanent
- le second est composé de deux exponentielles décroissantes au cours du temps. Les constantes de temps en sont :  $\tau_1 = -\left(\frac{1}{p_1}\right)$  et  $\tau_2 = -\left(\frac{1}{p_2}\right)$ . La constante de temps la plus grande, c'est-à-dire le pôle le plus petit, est considérée comme dominante.

Des exemples de réponses transitoires d'un système du second ordre sont représentés Fig. 5.2. On remarque que pour  $\zeta > 1$  la réponse a la même allure que le régime transitoire d'un système du premier ordre.

### 5.3.2.2 Régime critique : $\zeta = 1$

Soit ici  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Cette fois, les 2 pôles sont confondus et le facteur d'amortissement est égal à l'unité.  $p_1 = p_2 = p_0 = -\omega_n$ .

L'équation (5.6) s'écrit :

$$V_c(p) = \frac{V\omega_n^2}{p(p-p_0)^2} = \frac{A_2}{p} + \frac{B_2}{p-p_0} + \frac{C_2}{(p-p_0)^2} \quad (5.9)$$

c'est-à-dire que :

$$v_c(t) = V - V(1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t). \quad (5.10)$$

Cette équation (5.10) comporte également deux termes :

- l'un indépendant du temps ( $V$ ) représente le régime permanent
- l'autre représente un régime transitoire apériodique appelé régime critique (représenté Fig. 5.2a par la courbe  $\zeta = 1$ ).

### 5.3.2.3 Régime pseudo-périodique : cas $\zeta < 1$

Soit ici  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Les pôles  $p_1$  et  $p_2$  sont imaginaires conjugués :  $p_i = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . Et l'équation (5.6) devient :

$$V_c(p) = \frac{V\omega_n^2}{p[(p + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)]} = \frac{A_3}{p} + \frac{B_3 p + C_3}{(p + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

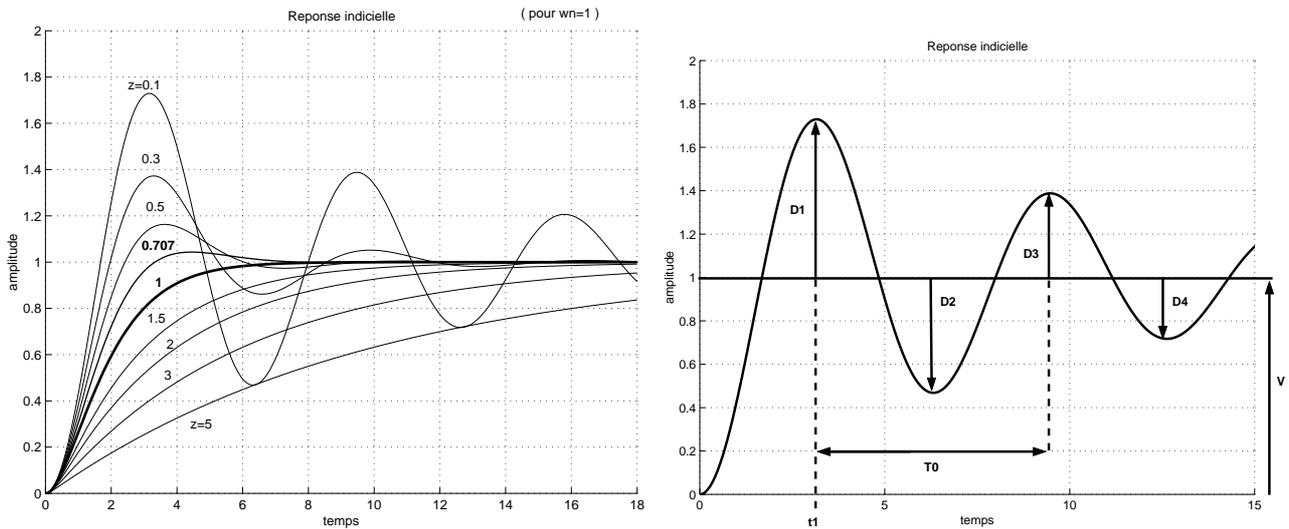


FIGURE 5.2 – a) Réponse indicielle d'un 2e ordre ; b) Décrément logarithmique

qui donne comme variation temporelle :

$$v_c(t) = V - \frac{V}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \cdot \exp(-\zeta \omega_n t)$$

avec :  $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ .

Là encore nous observons :

- un régime permanent défini par le terme  $V$
- un régime transitoire oscillatoire, composé d'oscillations de pulsation  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  amorties par l'exponentielle  $\exp(-\zeta \omega_n t)$ .

La signification physique du terme  $\omega_p$  apparaît clairement ici : il représente la pseudo-pulsation non amortie du système.

La Fig. 5.2 donne l'allure de quelques régimes transitoires pour diverses valeurs de  $\zeta$ .

**5.3.2.3.1 Remarques pratiques :** dans ce cas de régime pseudo-périodique, on peut aisément caractériser la fonction de transfert à l'aide de la pseudo-période et du décrément logarithmique.

Considérons pour cela la Fig. 5.2b qui représente ce régime pseudo-périodique tel qu'il apparaît sur l'écran de l'oscilloscope.

- Le décrément logarithmique est défini comme étant le rapport entre l'amplitude  $D_1$  de la 1<sup>ère</sup> oscillation du régime transitoire à celle  $D_n$  de la  $n^{\text{ième}}$  oscillation de même sens. On montre que :

$$\frac{D_1}{D_n} = \exp \left[ 2\pi(n-1) \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right]$$

En fait, du point de vue pratique, on se sert simplement du 1<sup>er</sup> dépassement pour déterminer le coefficient d'amortissement  $\zeta$ . On montre que :

$$\frac{D_1}{V} = \exp \left( -\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

Un abaque représenté Fig. 5.3 permet d'obtenir directement  $\zeta$  lorsqu'on a mesuré expérimentalement  $D_1$  et  $V$ .

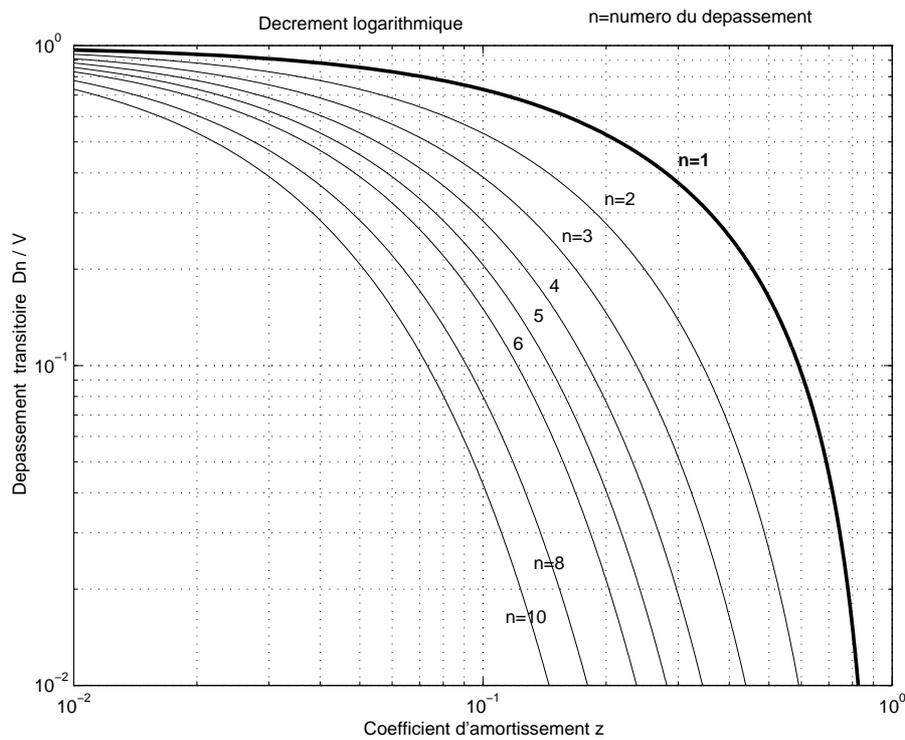


FIGURE 5.3 – Dépassement en fonction de  $\zeta$

- La pseudo-période  $T_p$  se mesure directement. Quant à l’abscisse  $t_1$  du 1er dépassement  $D_1$ , elle est liée à  $\zeta$  et  $\omega_n$  par la relation :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$\zeta$  étant connu par la méthode du décrement logarithmique, on obtient ainsi  $\omega_n$ .

### 5.3.3 Temps de réponse d’un circuit du second ordre

On définit le temps de réponse  $T_r$  d’un circuit du second ordre à un échelon de tension comme le temps au bout duquel le système a atteint la valeur du régime permanent à 5% près et reste ensuite compris entre les limites 95% et 105% de ce dernier. L’utilisation des équations représentant les réponses du circuit n’est plus possible ; on se sert essentiellement de graphiques.

#### 5.3.3.1 Réponse à une entrée en échelon

Dans le cas de la fonction de transfert  $T(p)$  étudiée, la Fig. 5.4 présente les courbes donnant le temps de réponse de 0 à 95% de la valeur finale.

$T_r$ , pris en valeurs réduites ( $T_r \cdot \omega_n / 2\pi$ ), est fonction de  $\zeta$ .

$T_r$  est minimum pour  $\zeta = 0.7$  qui présente un bon compromis entre une montée rapide et une oscillation de faible amplitude. On a par exemple :

- pour  $\zeta = 0.7 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \rightarrow L \approx \frac{1}{2} R^2 C$
- pour  $\zeta = 1 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  (régime critique)  $\rightarrow L = \frac{1}{4} R^2 C$

#### 5.3.3.2 Réponse à une impulsion de Dirac

Une étude analogue à celle effectuée au 5.3.1 conduit à des résultats semblables. Les courbes représentées Fig. 5.4 permettent d’obtenir les temps de réponse pour la tension  $v_c(t)$ .

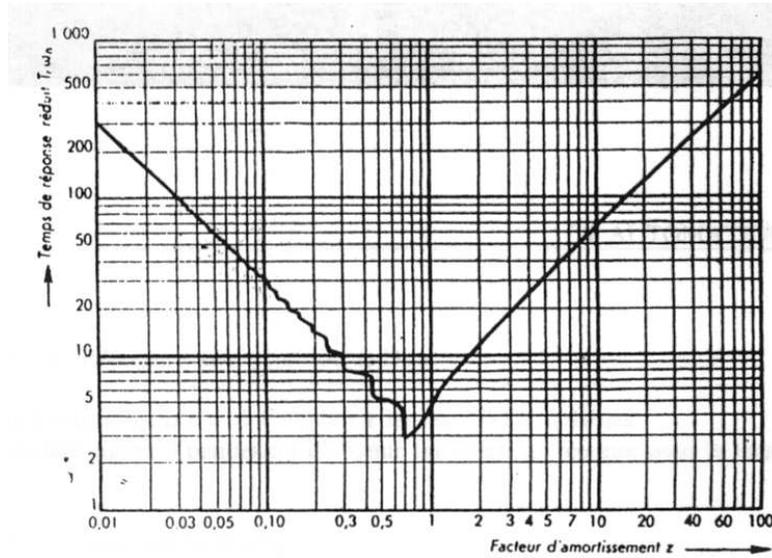


FIGURE 5.4 – Temps de réponse réduit  $T_r\omega_n$  fonction de l'amortissement  $\zeta$

5.3.3.3 Réponse à une rampe

Le principe d'étude est toujours le même avec maintenant :  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .

On obtient des courbes ayant l'allure de celles représentées Fig. 5.5. La réponse s'établit avec un retard égal à  $2\zeta/\omega_n$  en oscillant ou non suivant le régime, autour de la rampe retardée.

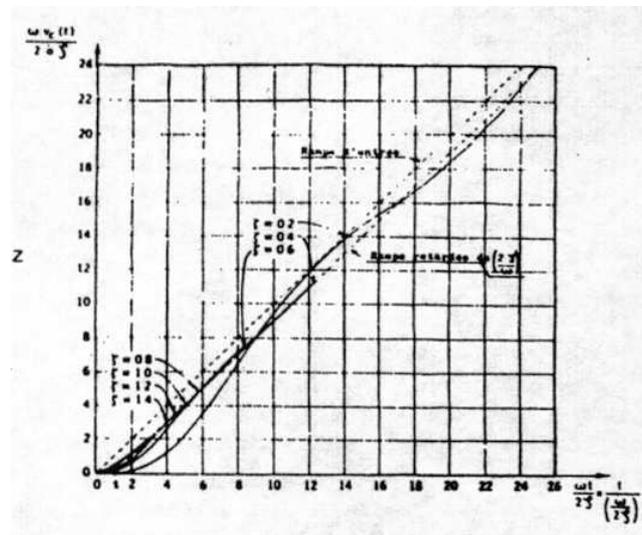


FIGURE 5.5 – Réponse à une rampe

5.3.4 Réponse harmonique

La fonction de transfert se déduit de l'équation (5.5) en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  :

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} \tag{5.11}$$

de module  $A$  et d'argument  $\Phi$  tels que :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (5.12)$$

$$\Phi = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (5.13)$$

### 5.3.4.1 Représentations graphiques

**5.3.4.1.1 Diagramme de Bode :** Pour simplifier l'étude, on travaille en pulsation réduite :  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ . En étude asymptotique, nous voyons que :

- pour  $u \ll 1 \rightarrow A \approx 1$  et  $\Phi \approx 0 \rightarrow$  asymptote horizontale à 0dB.
- pour  $u \gg 1 \rightarrow A \approx \frac{1}{u^2}$  et  $\Phi$  tend vers  $-\pi \rightarrow$  asymptote oblique de pente (-2) ou -12dB/oct (ou -40dB/décade).
- L'intersection des deux asymptotes est le point  $G(1,0)$ . La pulsation correspondante  $\omega = \omega_0$  est une approximation de la pulsation de coupure.

L'allure des variations de  $A$  et de  $\Phi$  pour les fréquences intermédiaires dépend de la valeur de  $\zeta$  (Fig. 13.1) :

1.  $\zeta > 1$  : La fonction  $A$  est monotone décroissante
2.  $\zeta = 1$  : on a alors :  $A = \frac{1}{1+u^2}$  et  $\Phi = -\arctan \frac{2u}{1-u^2}$   
Pour  $u = 1$ , c'est-à-dire  $\omega = \omega_n$  :  $A = 1/2$  ;  $G = -6dB$  ;  $\Phi = -\pi/2$
3.  $\zeta < 1$  :

La dérivée du dénominateur de (5.12) s'écrit :  $D' = 4u [u^2 - (1 - 2\zeta^2)]$

- si  $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$  : cette dérivée s'annule pour  $\omega = 0$  et pour  $\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ .

$A$  présente donc un maximum pour cette valeur  $\omega = \omega_r$  appelée pulsation de résonance.

On définit alors un coefficient de surtension ou facteur de résonance  $Q$  qui caractérise l'amplitude de ce maximum :

$$Q = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Une abaque représentée Fig. 5.6 permet de déterminer graphiquement  $\zeta$  lorsque l'on connaît  $Q$ .

- si  $1 < 2\zeta^2 < 2$  (ou encore  $0.7 = \frac{\sqrt{2}}{2} < \zeta < 1$ ) :

$A$  ne présente plus de maximum mais sa variation au voisinage de  $u = 1$  est plus rapide que dans le cas où  $\zeta > 1$  (Fig. 13.1a).

Quant à la phase, quelle que soit la valeur de  $\zeta$ , elle vaut  $-\pi/2$  pour  $u = 1$ . Sa variation, représentée Fig. 13.1b, est d'autant plus rapide au voisinage de  $\omega_r$  que  $\zeta$  est petit.

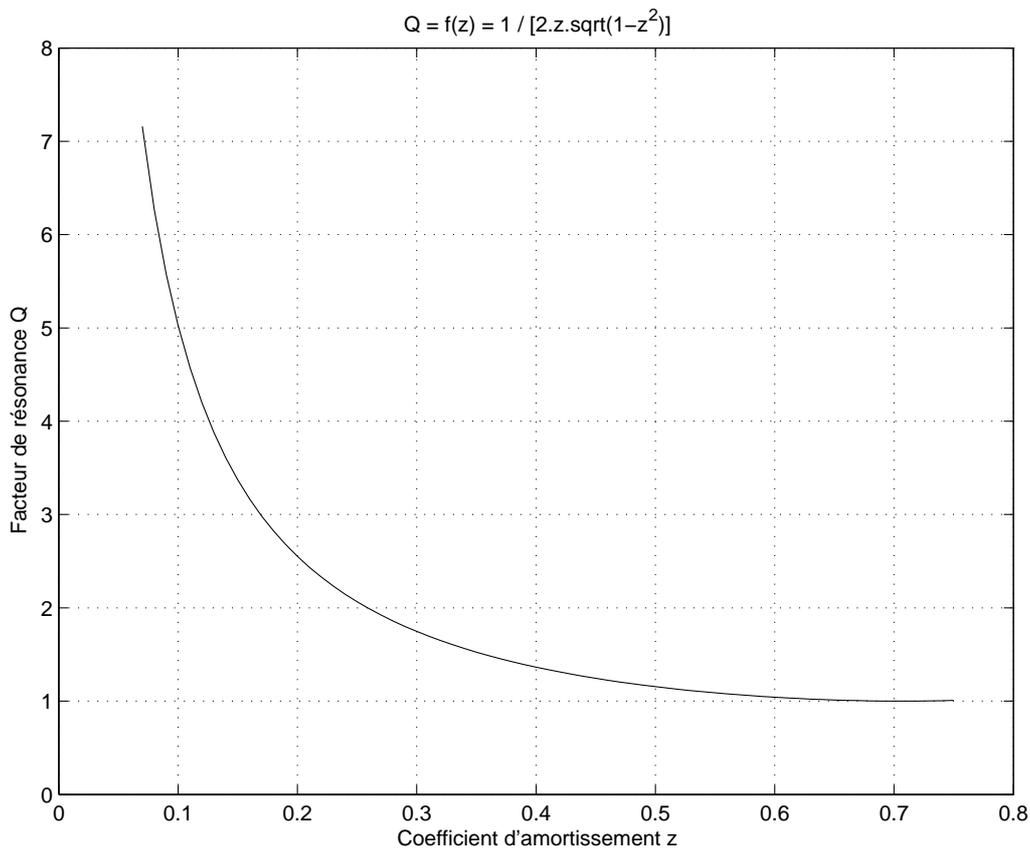
**5.3.4.1.2 Représentation de Nyquist :** Son principe a été décrit en cours.

**5.3.4.1.3 Diagramme de Nichols-Black :** C'est une représentation qui présente un intérêt certain dans l'étude de la stabilité et de la correction des systèmes asservis. On porte le module du gain en décibels en ordonnée et l'argument (i.e. la phase) en abscisse.

## 5.3.5 Caractéristiques fréquentielles

### 5.3.5.1 Fréquences de coupure

Elles se définissent généralement à 3 ou 6 décibels et correspondent aux fréquences  $f_c$  pour lesquelles le module de la transmittance est égal au gain maximal atténué de 3 ou 6 décibels.

FIGURE 5.6 – Courbe  $Q = f(\zeta)$ 

Dans le cas particulier des circuits du second ordre, du fait que la surtension n'existe pas systématiquement, on trouve dans la littérature cette notion de fréquence de coupure appliquée non pas par rapport au gain maximal mais par rapport au gain statique ( $\omega = 2\pi f = 0$ ) comme indiqué Fig. 5.7.

### 5.3.5.2 Bande passante, largeur de bande

Toujours dans le cas particulier du 2nd ordre et du fait de la surtension, on appellera bande passante l'intervalle de fréquence correspondant aux pulsations comprises entre  $\omega = 0$  et  $\omega = \omega_c$ . Quant à la largeur de bande, ce sera la largeur de la bande passante relative à la pulsation  $\omega_r$  lorsqu'elle existe (voir Fig. 5.7).

Attention donc à cette terminologie qui est ambiguë. On rappellera enfin la relation :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{1}{Q}$$

### 5.3.5.3 Différents types de pulsations

D'après le schéma de la Fig. 5.7, nous pouvons définir 3 pulsations :

- $\omega_r$  : pulsation de résonance
- $\omega_n$  : pulsation nominale (normale) pour laquelle la courbe coupe l'axe des abscisses avec  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- $\omega_c$  : pulsation de coupure à -3dB

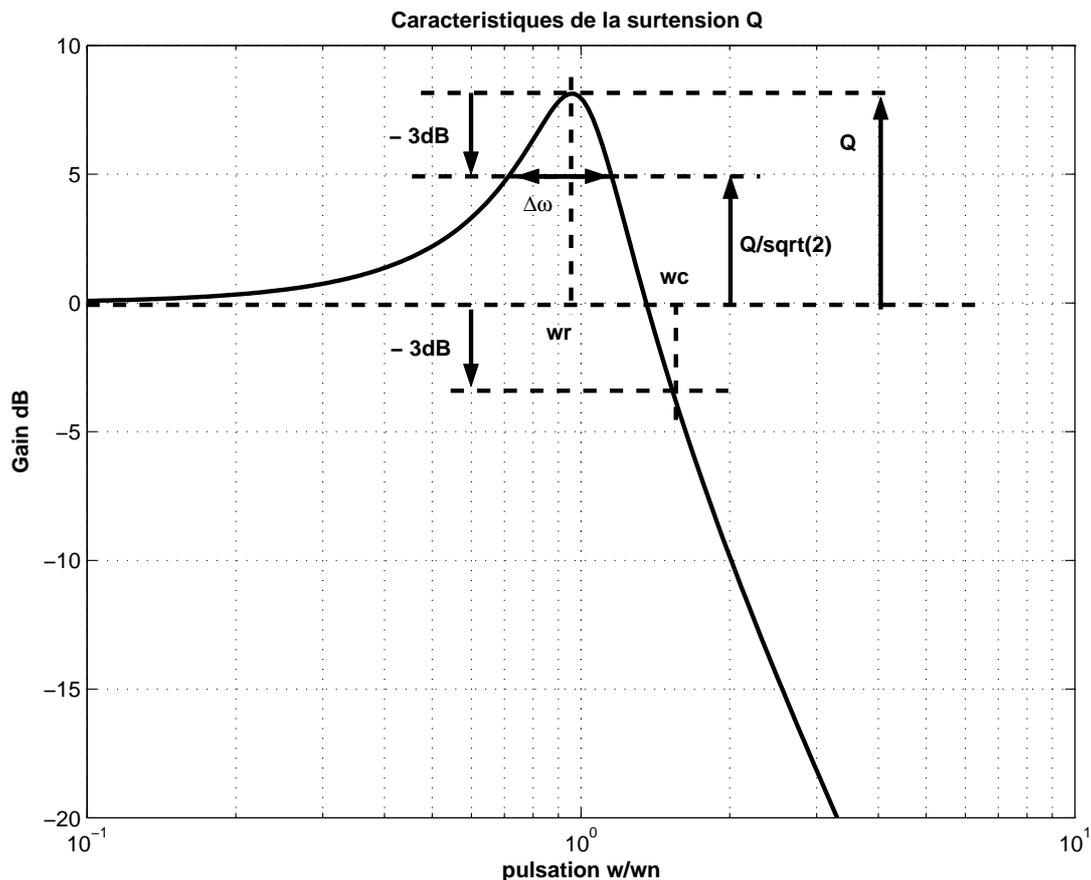


FIGURE 5.7 – Pulsations caractéristiques

## 5.4 Préparation

Revoir de façon très approfondie le cours correspondant à l'étude des circuits du second ordre et les rappels théoriques.

Regrouper les relations qui permettront de répondre aux questions posées.

## 5.5 Manipulation

Le montage utilisé est représenté Fig. 5.1 : on prendra  $C = 100nF$ . La self de la bobine est ajustable par son noyau mobile. La self présente une résistance ohmique  $r$  (qu'on pourra mesurer au préalable).

Le générateur de fonctions  $e_g, r_g$  possède une résistance interne de  $50\Omega$ .

### 5.5.1 Analyse fréquentielle

Le générateur de fonctions délivre des signaux sinusoïdaux.

#### 5.5.1.1 Représentations graphiques

Pour  $R = 100\Omega, 1k\Omega$  et  $10k\Omega$ , tracer les courbes de réponse en fréquence du circuit,  $f$  variant de  $50Hz$  à  $10kHz$  :

- en représentation de Bode (gain  $G = 20 \log \frac{V_s}{V_e}$  et phase  $\Phi$  en fonction de  $f$ ).

NB : Après les mesures manuelles, on pourra utiliser un programme de tracé automatique de courbe de gain sous LabVIEW (Gain\_IUT8FI4.vi utilisant le multimètre) pour confir-

mer le tracé manuel. On pourra aussi utiliser le simulateur LabVIEW pour comparer à la théorie.

- en représentation de Black (gain en fonction de l'argument)
- en déduire la marge de phase dans les 3 cas.

### 5.5.1.2 Paramètres du circuit du second ordre

#### 5.5.1.2.1 Pour $R = 100\Omega$

- Déterminer la valeur de la fréquence de résonance  $f_r$  et en déduire la valeur de la self  $L$
- Mesurer le coefficient de surtension  $Q$  et en déduire la valeur du facteur d'amortissement  $\zeta$  (en faisant une petite approximation). Comparer au  $\zeta$  théorique lié à  $R$ .
- Connaissant  $\zeta$ , déterminer la valeur de la fréquence  $f_n$
- Déterminer la largeur de la bande passante à  $-3dB$  et en déduire la valeur du facteur de surtension  $Q$ . Comparer cette valeur à la valeur mesurée précédemment.

#### 5.5.1.2.2 Pour $R = 1k\Omega$

- Mesurer la fréquence de résonance  $f_r$  et le facteur de surtension  $Q$
- Comparer avec la valeur de  $Q$  trouvée au 5.5.1.2.1
- En utilisant l'abaque donnée Fig. 5.6, déterminer la valeur du facteur d'amortissement  $\zeta$
- En déduire la valeur de l'inductance  $L$  et comparer avec celle trouvée au 5.5.1.2.1

#### 5.5.1.2.3 Pour $R = 10k\Omega$

- Y a-t'il un phénomène de surtension ?
- Déterminer la pulsation de coupure à  $-3dB$  et la pente de l'asymptote oblique. La valeur de la pente correspond-elle à la valeur théorique ?
- En déduire l'influence de la résistance  $R$  sur le comportement d'un circuit série du 2<sup>ème</sup> ordre.

## 5.5.2 Analyse indicielle

Le générateur délivre maintenant des signaux carrés de fréquence 50Hz (voire plus basse 20Hz).

Le circuit est donc excité par des échelons de tension.

### 5.5.2.1 Régime oscillatoire

- Pour  $R = 100\Omega$ , observer et représenter les signaux d'entrée et de sortie.
- Mesurer la fréquence des oscillations. En imaginant que cette réponse soit celle d'un asservissement de position, que peut-on dire sur la stabilité du système ?
- Mesurer la valeur du dépassement  $D_1$ , en déduire la valeur du facteur d'amortissement  $\zeta$  et comparer avec la valeur mesurée dans l'analyse fréquentielle.
- Quelle est la valeur du temps de réponse à 5% ?

### 5.5.2.2 Régime pseudo-oscillatoire

- Pour  $R = 1k\Omega$ , observer et représenter les signaux  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$ . Mesurer la période  $T_p$  des pseudo-oscillations et en déduire leur fréquence  $F_p$ .
- Mesurer la valeur du dépassement  $D_1$ , en déduire la valeur du facteur d'amortissement  $\zeta$  et comparer cette valeur à celle mesurée dans l'analyse fréquentielle.
- Mesurer le temps de réponse à 5%.

### 5.5.2.3 Régime apériodique

Pour  $R = 10k\Omega$ , observer les signaux d'entrée et de sortie et les représenter (copie d'écran d'oscilloscope).

Mesurer automatiquement grâce à l'oscilloscope le temps de montée  $t_m$  du circuit.

Peut-on estimer ou mesurer la constante de temps  $\tau$  de ce circuit ? Si oui, expliquer comment et donner la valeur de  $\tau$ .

### 5.5.3 Conclusion

En déduire l'influence de la valeur de la résistance sur les différents paramètres du circuit et sur les conditions de stabilité.



# Chapitre 6

## TP Aa2 Identification

L'objectif de ce TP est d'identifier le module PT-3 de la plaque PID Board (réf. H5120 de chez hps), module situé en bas à gauche sur la Fig. 6.1.

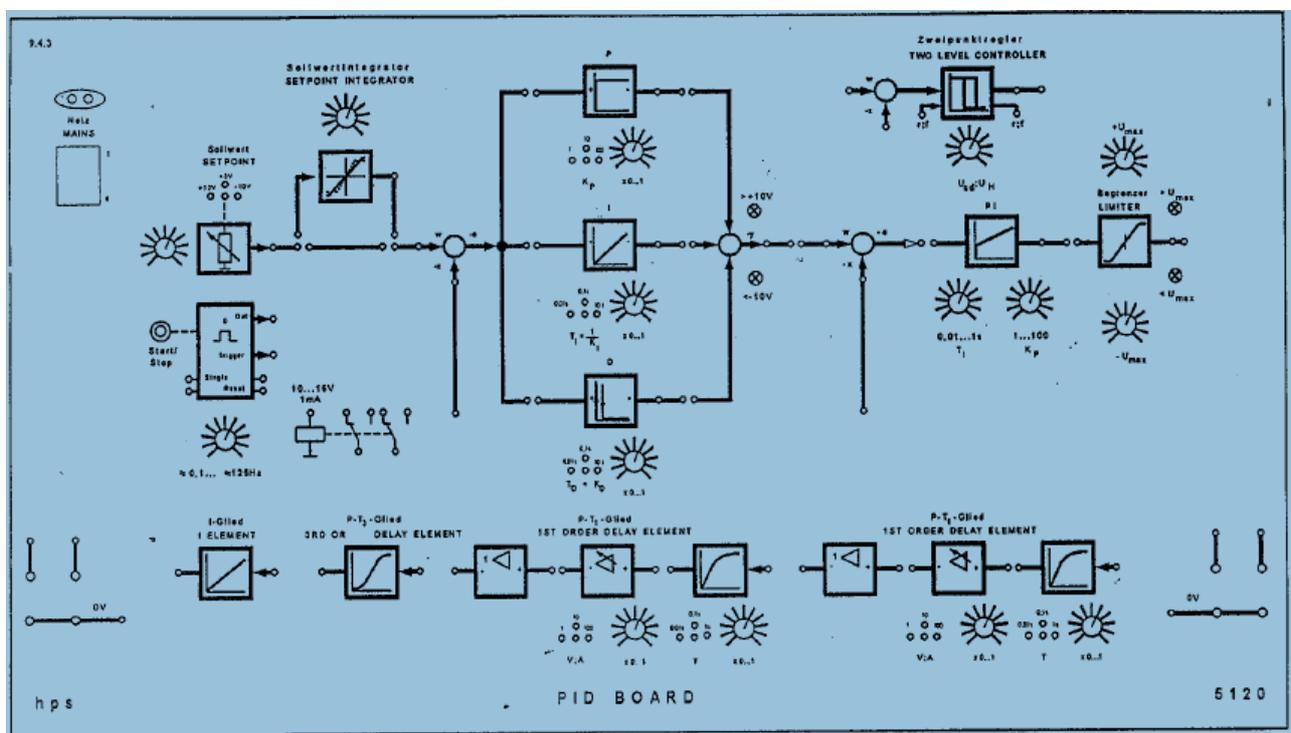


FIGURE 6.1 – Plaque H5120

1. Réaliser un essai indiciel du procédé PT-3. Faire une copie d'écran d'oscillo.  
**N.B. :** Conditions expérimentales
  - **Attention :** l'entrée du module P-T3 est à droite
  - **Générateur :** Pour simuler une suite d'échelons en entrée, on prendra un **signal carré** :  $f = 50\text{Hz}$ ,  $V_e = 5\text{V}$ . On pourra utiliser **au choix** le générateur externe ou celui intégré sur la platine.
  - **Oscilloscope :** Utiliser le mode de déclenchement **externe** de l'oscilloscope. On évitera d'utiliser le mode SINGLE de déclenchement !
2. Mesurer le temps de réponse, l'erreur statique, ainsi que le retard pur (mesure imprécise).
3. Grâce à une des méthodes d'identification présentées en cours, déduire de l'allure temporelle des signaux d'entrée et de sortie observés à l'oscilloscope, l'expression  $H(p)$  de la fonction de transfert de ce module.

4. Indiquer l'ordre du système, sa constante de temps et son retard pur.
5. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de cette fonction de transfert. Placer quelques points de la courbe exacte sur ce diagramme.
6. NB : On pourra simuler sous LabVIEW (ou sous Matlab) la fonction de transfert identifiée pour tracer ses courbes de Bode théoriques exactes (programmes TP2AUTOa.vi ou Black.m).
7. Mesures : Tracer les diagrammes de Bode expérimentaux de ce procédé.  
NB : On fera d'abord 5 mesures manuelles entre  $10Hz$  et  $2000Hz$  ( $V_e = 5V$ ).
8. Mesures automatisées : Puis on utilisera l'application LabVIEW d'instrumentation programmée par bus GPIB pour le tracé automatique des courbes de Bode expérimentales (programmes Gain\_IUT8FI4.vi utilisant le multimètre, ou projetfinal8FI.vi utilisant l'oscilloscope). NB : Avant de démarrer, vérifier avec MaxExplorer la connexion des appareils.
9. Comparer les 4 diagrammes de Bode obtenus (asymptotique théorique, simulation, manuel et automatisé).
10. Le système est un filtre de quel type (passe-bas, passe-bande, passe-haut ...)?
11. Mesurer fréquence de coupure, pente, gain statique, déphasage mini et maxi.
12. Comparer la fréquence de coupure à la valeur de  $1/\tau$  et interpréter.
13. A partir de la pente, déduire l'ordre du système. Comparer à 4.
14. Peut-on confirmer l'ordre du système à partir du déphasage?
15. En conclusion, valider la méthode d'identification utilisée.
16. Proposer des améliorations si nécessaire (notamment pour améliorer le temps de réponse). Essayer en boucle fermée sans correcteur (ou avec différents correcteurs P, I, D disponibles sur la platine).

# Chapitre 7

## TP Aa3 Asservissement analogique de position - Etude en boucle ouverte

### 7.1 But de la manipulation

Cette manipulation a pour but de se familiariser avec les éléments constitutifs d'un asservissement de position (AP en abrégé). Cet AP rectiligne utilise un moteur à courant continu à commande d'induit et à aimant permanent. Le mouvement de rotation est transformé en déplacement rectiligne.

Au cours de la manipulation, on devra d'abord identifier les paramètres des différents blocs fonctionnels constituant la maquette, vérifier leur comportement dynamique en boucle ouverte afin de prévoir le fonctionnement correct de l'asservissement en boucle fermée.

### 7.2 Présentation du matériel

L'étude concerne un AP comprenant (Fig. 7.1) :

- une alimentation générale de puissance
- un support vertical du système électromécanique
- un tableau horizontal de commande et de test

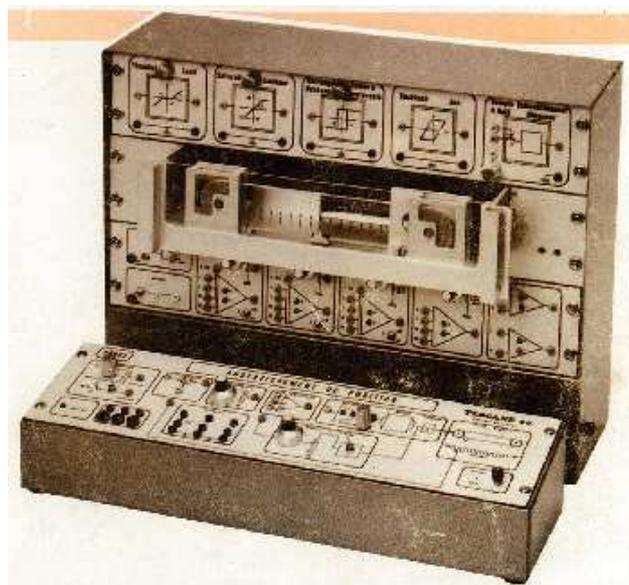


FIGURE 7.1 – Système asservi de base

### 7.2.1 Structure de la chaîne asservie

L'AP est présenté par son schéma bloc sur la Fig. 7.2.

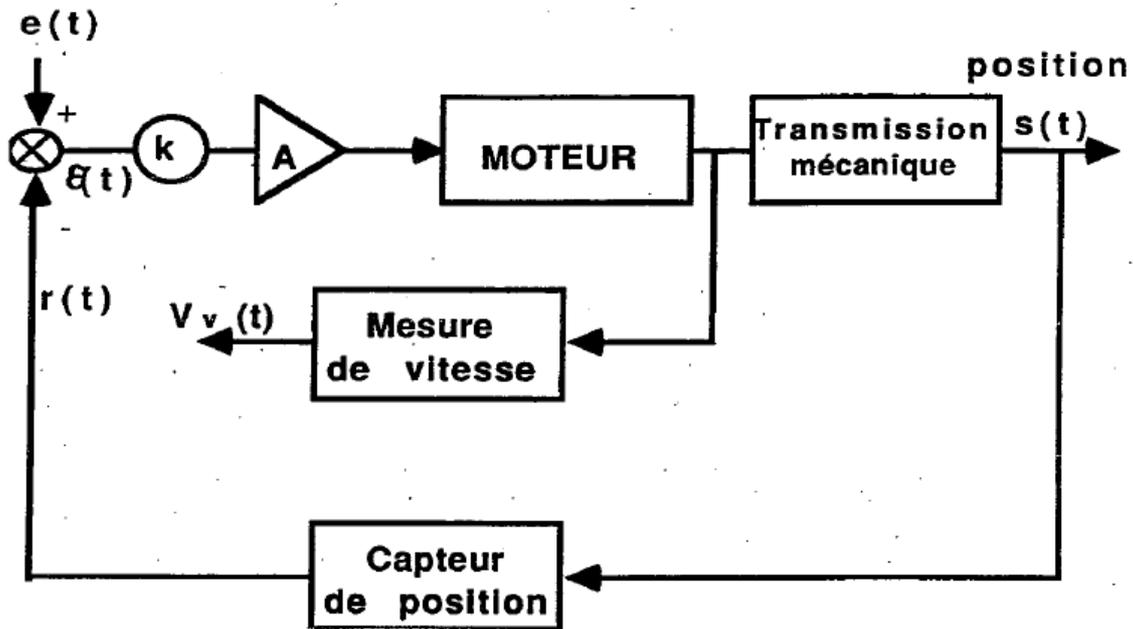


FIGURE 7.2 – Schéma bloc de l'AP

avec :

- $e(t)$  : signal d'entrée (tension électrique)
- $r(t)$  : signal de sortie en tension représentant l'image de la position  $s(t)$
- $\varepsilon(t) = e(t) - r(t)$  : erreur de position

### 7.2.2 Description de la platine AP

Les éléments constitutifs de la chaîne de cet asservissement sont retranscrits sur une platine de commande divisée en blocs fonctionnels numérotés de 1 à 10 (Fig. 7.3).

1. Bloc Entrée : définit le signal électrique d'entrée qui peut être une tension continue réglable ou un échelon
2. Bloc Recopie ou Sortie Position : génère un signal électrique  $r(t)$  image de la position réelle de la charge
3. Bloc Comparateur : délivre le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$ . Ceci est réalisé par un amplificateur opérationnel monté en soustracteur (Fig. 7.4a)
4. Bloc Atténuateur : permet de régler l'atténuation de l'erreur et par conséquent le gain en boucle ouverte. Il est constitué d'un potentiomètre placé entre deux amplificateurs opérationnels montés en suiveurs, réalisant ainsi une bonne adaptation des impédances d'entrée et de sortie (Fig. 7.4b).
5. Bloc Préamplificateur : est constitué d'un amplificateur opérationnel à 3 entrées de gains 10, 10 et 100.
6. Bloc Moteur : comprend un amplificateur de puissance avec ses témoins de saturation, un moteur à courant continu et aimant permanent et un réducteur. L'amplificateur de puissance de gain égal à 1 fournit le courant nécessaire à l'alimentation de l'induit. La composante continue du signal de sortie de cet amplificateur est contrôlée par le potentiomètre de décalage (Fig. 7.5).

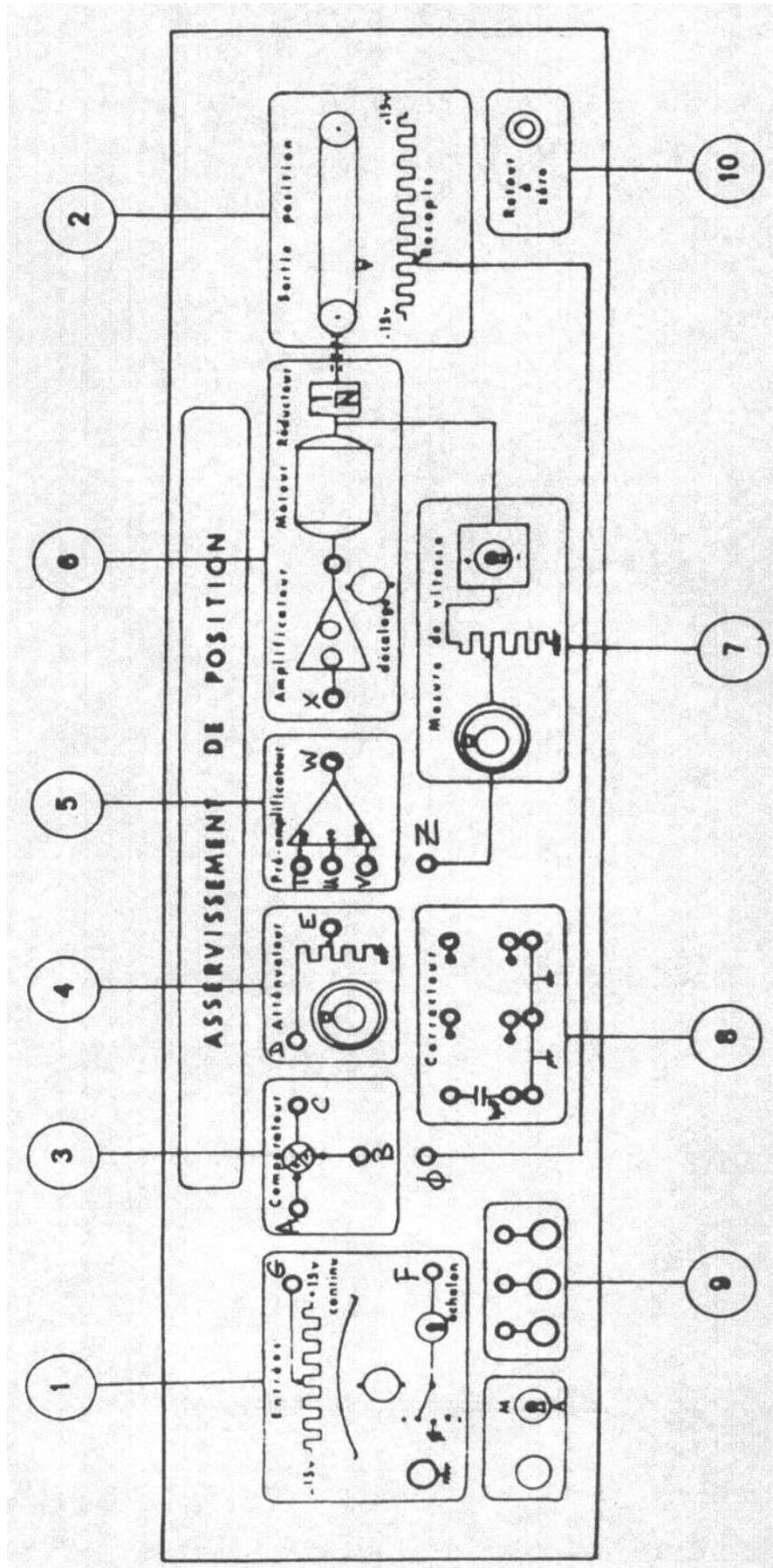


FIGURE 7.3 – Platine : Face avant de la Maquette

7. Bloc Mesure de vitesse : fournit un signal électrique proportionnel à la vitesse de rotation du moteur par mesure électrique de la différence  $u(t) - Ri(t)$  où  $u(t)$  est la tension aux bornes de l'induit,  $R$  la résistance et  $i(t)$  le courant dans l'induit.
8. Bloc Correcteur : permet d'insérer des composants électriques (résistances, condensateurs etc.) dans le but de réaliser un correcteur.
9. Bloc Bornes de relais : permet de brancher les appareils externes. **NB : il faut penser à réaliser la connexion de la masse sur une des bornes.**
10. Bloc Retour à zéro : un bouton poussoir permet de recentrer le chariot. **NB. Cette action n'est efficace que lorsque la liaison entre le préamplificateur et l'amplificateur de puissance est réalisée.**

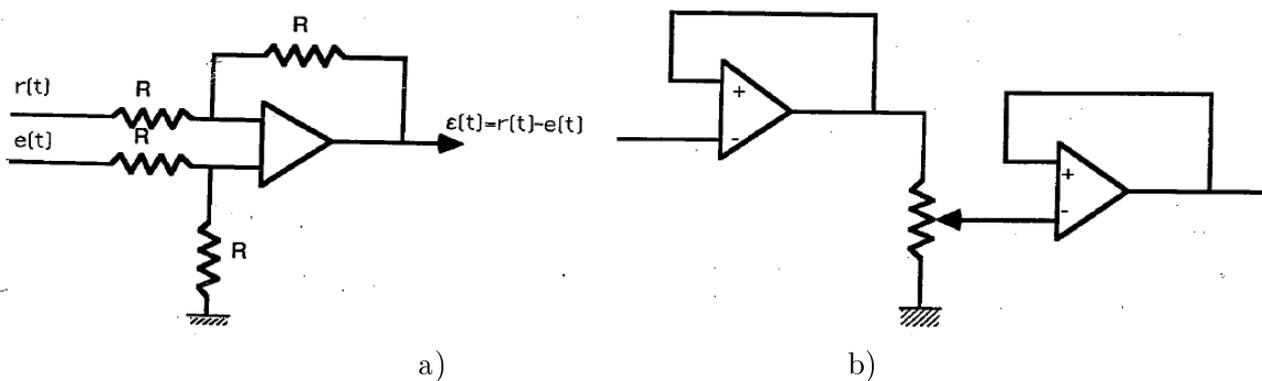


FIGURE 7.4 – a) Comparateur ; b) Atténuateur

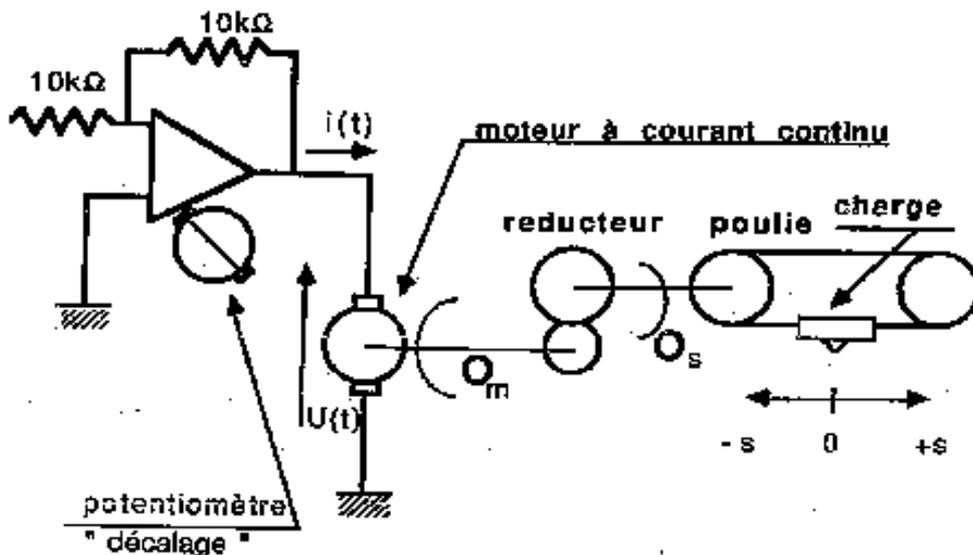


FIGURE 7.5 – Bloc moteur

## 7.3 Manipulation

### 7.3.1 Etude qualitative du système en boucle fermée

Après avoir pris connaissance de tous les éléments de l'AP à étudier, réaliser le câblage du système asservi fonctionnant en boucle fermée (voir schéma Fig. 7.2).

On utilisera comme signal d'entrée un signal carré issu du générateur basses fréquences (GBF). L'amplitude (qq V) et la fréquence (environ 1 Hz) seront choisies de façon à visualiser de manière répétitive la réponse à un échelon sans saturation des amplificateurs. **NB. A cette fin, on prendra le temps de bien faire et comprendre tous les réglages de l'oscilloscope.**

1. Observer la réponse indicielle du système asservi pour quatre valeurs de  $kA$  : typ. 1, 5, 10 et 20.

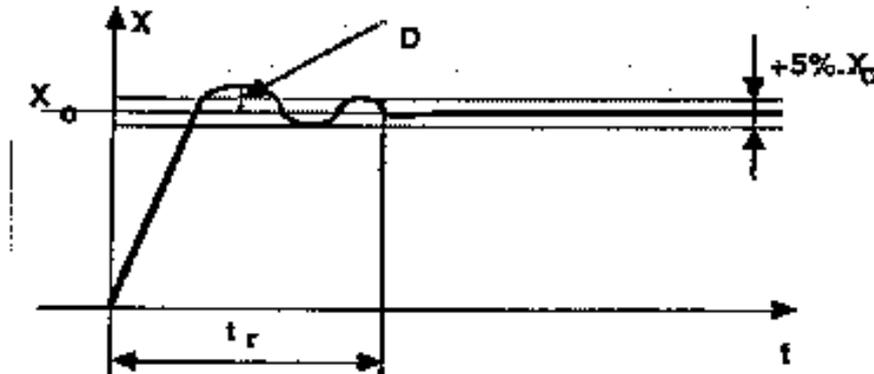


FIGURE 7.6 – Réponse indicielle

Evaluer les caractéristiques de ces réponses (cf. Fig. 7.6) :

- temps de réponse  $t_r$  en secondes
  - dépassement  $D$  en %
  - erreur statique  $\epsilon$  en %
2. A partir des résultats obtenus ci-dessus, en déduire l'évolution des caractéristiques en fonction de la valeur de  $kA$ .
  3. Pour les différentes valeurs de  $kA$ , que peut-on dire sur la stabilité du système ?
  4. Déterminer la valeur de  $kA$  à partir de laquelle le système devient instable.

### 7.3.2 Etude en boucle ouverte de l'ensemble Ampli-Moteur-Capteur de position

Après avoir observé le fonctionnement du système asservi en boucle fermée, il est indispensable de déterminer les caractéristiques de chaque bloc partiel. On va donc procéder à une identification des paramètres de la chaîne asservie à partir d'un schéma bloc en boucle ouverte (Fig. 7.7).

Le système est considéré comme étant linéaire et l'on détermine les paramètres relatifs à chaque bloc élémentaire. Regardons successivement les 3 blocs constituant le système :

#### 7.3.2.1 Capteur de position

Le capteur de position est ici constitué d'un potentiomètre qui transforme le signal de sortie position  $s(t)$  en tension correspondante  $r(t)$  considérée proportionnelle à  $s(t)$ .

Déterminer le gain  $K_{pot}$  du potentiomètre qui sera exprimé en  $V.cm^{-1}$  :

$$K_{pot} = \frac{r(t)}{s(t)}$$

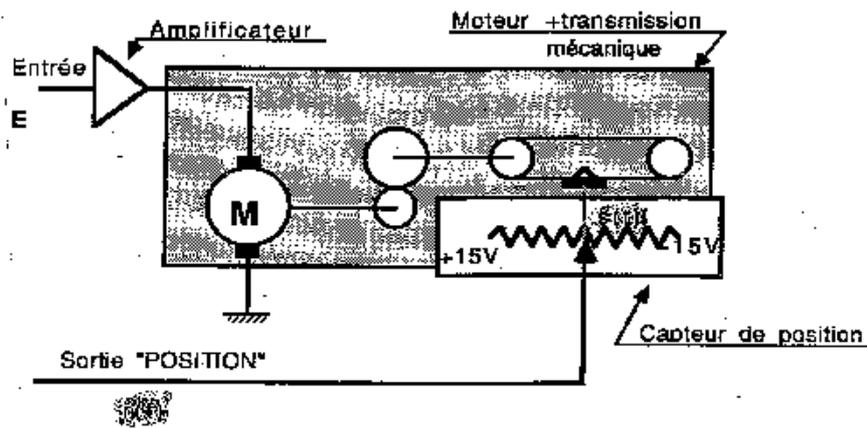


FIGURE 7.7 – Ampli-Moteur-Capteur en Boucle Ouverte

### 7.3.2.2 Ensemble Amplificateur-Moteur

En considérant l'ensemble Ampli-Moteur comme un système linéaire (valable pour les petites variations autour d'un point de fonctionnement), il est possible de trouver sa fonction de transfert. Dans la mesure où les constantes de temps électriques sont négligeables devant la constante de temps mécanique, on montre que cette fonction de transfert devient :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_m}{p(1 + T_m p)}$$

avec :

- $S(p)$  : transformée de Lapalce de  $s(t)$ , sortie position en  $cm$
- $E(p)$  : transformée de Laplace de  $e(t)$ , entrée position en  $V$
- $K_m$  : gain de la chaîne en boucle ouverte exprimé en  $cm.V^{-1}$
- $T_m$  : constante de temps mécanique en  $s$

**7.3.2.2.1 Détermination de la constante de temps  $T_m$**  On va comparer trois méthodes de détermination de la constante de temps mécanique  $T_m$ .

1. Analyse harmonique :

La connaissance de la pulsation de coupure  $\omega_c$  permet de trouver directement la constante de temps :  $T_m = \frac{1}{\omega_c}$ .

2. Réponse indicielle (en vitesse) :

Cette méthode donne la possibilité de vérifier la mesure précédente. Elle sera effectuée à la sortie Vitesse  $v(t)$  sachant que :

$$\frac{V(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + T_m p}$$

La réponse à une entrée échelon de position  $e(t) = E_0.H(t)$  est :  $v(t) = KE_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_m}\right)\right)$ .

Un relevé de  $v(t)$  à l'oscilloscope permet de mesurer  $T_m$  en déterminant le temps au bout duquel  $v(t) = 0.632.K.E_0$  (Fig. 7.8)

3. Mesure de  $T_m$  par déphasage (en vitesse) :

En utilisant la méthode de Lissajoux décrite en annexe, déterminer la fréquence pour laquelle le rapport  $c/b$  correspond à un déphasage de  $-45^\circ$  (le signal obtenu n'étant pas très exploitable, les mesures seront donc approximatives).

NB : La méthode de Lissajoux permettant d'obtenir le gain et la phase est décrite en annexe.

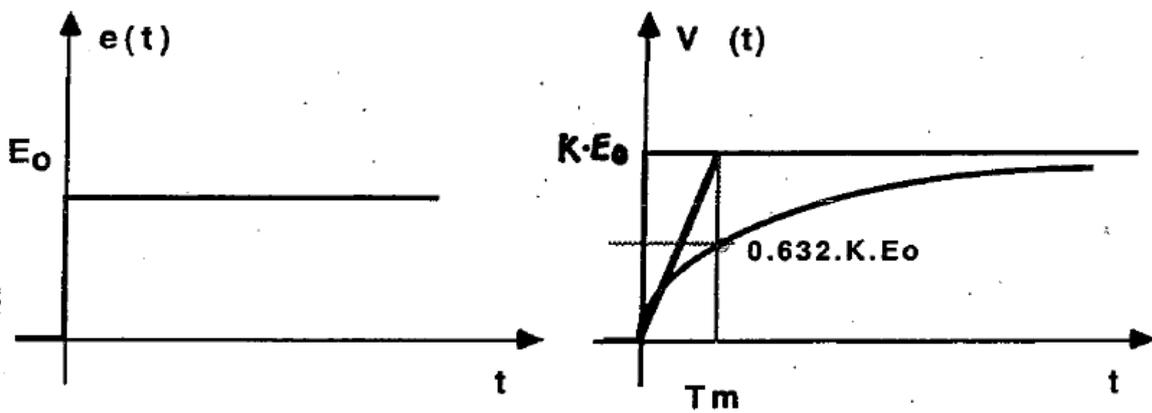


FIGURE 7.8 – Sortie Vitesse

## 4. Interprétation :

- Comparer les résultats obtenus avec les différentes méthodes
- Quelle est la méthode la plus précise ?

**7.3.2.2 Détermination du gain  $K_m$**  Le gain  $K_m$ , gain total de la chaîne d'asservissement en boucle ouverte, sera déterminé à partir de la réponse fréquentielle dans le plan de Bode, dont une approximation de son diagramme asymptotique est donnée Fig. 7.9).

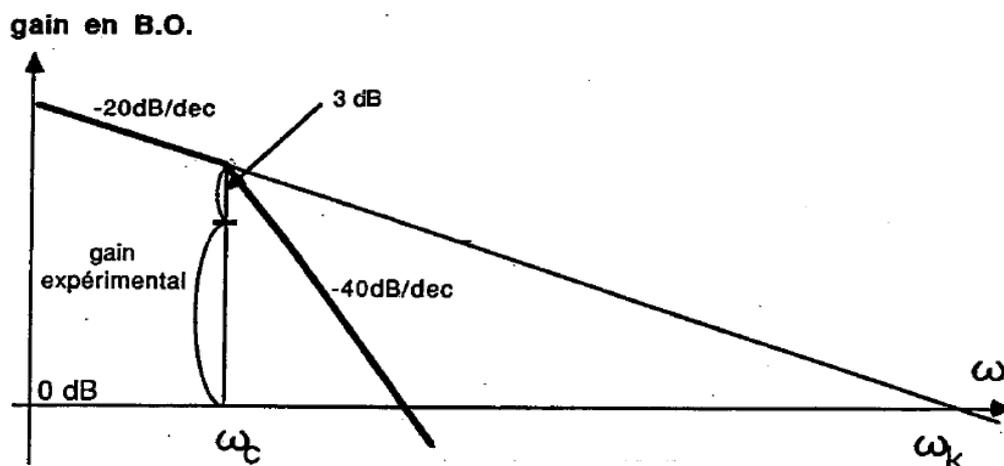


FIGURE 7.9 – FTBO

La détermination de la pulsation de cassure  $\omega_c$  et du gain du système pour cette pulsation est suffisante pour définir le diagramme asymptotique.

Mesure de la pulsation de coupure  $\omega_c$  et du gain expérimental  $K_m$  correspondant à cette pulsation :

- Appliquer un signal sinusoïdal à l'entrée de l'amplificateur et déterminer la fréquence de coupure  $f_c$  sachant qu'à  $f = f_c$ , le signal de sortie est atténué de 3dB par rapport au signal d'entrée.
- En déduire la pulsation de coupure  $\omega_c$
- Déterminer le gain  $K_m$  sachant que c'est le rapport des amplitudes du curseur de la règle et du signal d'entrée. Il se mesure donc en  $cm/V$ .

## 7.4 Annexes

### 7.4.1 Annexe 1 : Méthode de mesure en XY ou méthode de Lissajous

- Injecter sur l'oscilloscope le signal sinusoïdal d'entrée en X et le signal de sortie en Y.
- Sélectionner la fonction X-Y de l'oscilloscope : on n'observe plus les courbes en fonction du temps mais l'une (Y) en fonction de l'autre (X).
- La représentation est une ellipse ou une droite oblique (ceci dépend du déphasage, cf. Fig. 7.10).
- Pour que les mesures ne soient pas faussées, l'ellipse doit être parfaitement centrée au milieu de l'écran. Pour cela, appuyer sur la touche GND de chaque voie de l'oscilloscope et régler la position du point en utilisant les molettes de déviation horizontale et verticale (centrage du spot).
- **Mesure d'un gain** : C'est le rapport  $G = b/a$  en tenant compte des échelles respectives pour  $b$  et pour  $a$ . Pour le tracé des courbes de Bode, il ne faut pas oublier de calculer  $20 \log(G)$  pour obtenir le module en dB.
- **Mesure d'une phase** : Le déphasage est tel que :  $\sin(\phi) = c/b$  (cf. Fig. 7.11)

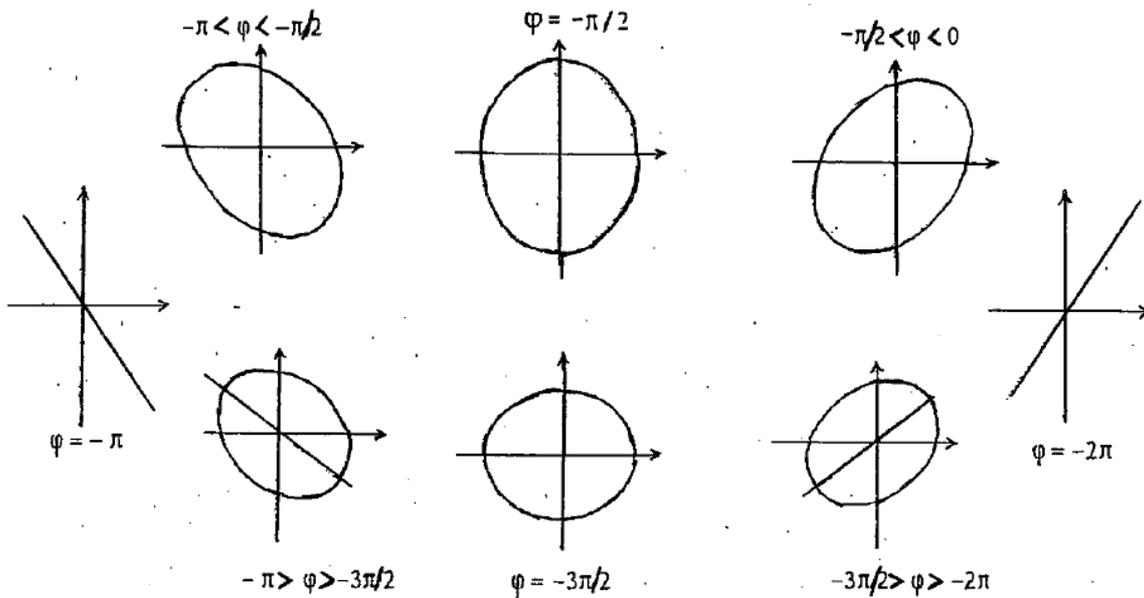


FIGURE 7.10 – Déphasages

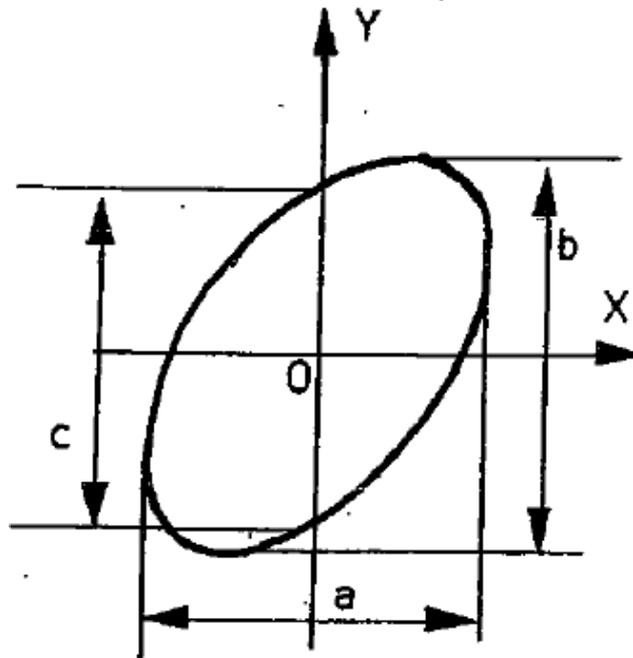


FIGURE 7.11 – Figure de Lissajous

#### 7.4.2 Protocole de Mesure de la pulsation de coupure $\omega_c$

On peut déterminer  $\omega_c$  sur la courbe de phase de Bode de  $T(j\omega)$  correspondant à la FTBO du moteur :

$$T(p) = \frac{K_m}{p(1 + T_m p)}$$

En effet, à la transition en  $\omega_c = 1/T_m$ , on aura un déphasage de  $\varphi = -135^\circ$ .

Le protocole expérimental est donc le suivant :

1. On injecte un signal sinusoïdal dont on fait varier la fréquence  $f$ .
2. On mesure le retard temporel  $\Delta t$  entre l'entrée et la sortie du système en boucle ouverte.
3. Sachant qu'une période complète du signal  $T = 1/f$  correspond à  $360^\circ$ , on en déduit, par la règle de trois, le déphasage correspondant à  $\Delta t$  :

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \varphi = -\Delta t \times 360 \times f$$

NB : le déphasage est forcément négatif car la sortie est toujours en retard (et non pas en avance) sur l'entrée (sinon le système ne serait pas causal).

4. Quand on sera à la fréquence de coupure  $f = f_c$ , on aura donc un retard de :

$$|\Delta t| = \frac{135}{360} T = 0.375 T \approx \frac{T}{3}$$

Il faut donc simplement **trouver la valeur de la fréquence qui conduit à un retard d'environ un tiers de période.**

#### 7.4.3 Mesure du gain $K_m$

La FTBO du système vaut

$$G(p) = kA \times T(p) \times K_{pot} = \frac{kAK_m K_{pot}}{p(1 + T_m p)}$$

On se place à la coupure  $\omega_c = 1/T_m$  et on prend  $kA = 1$ . On obtient alors :

$$G(p) = G(j\omega_c) = \frac{K_m K_{pot}}{j\omega_c(1+j)}$$

Il suffit alors de **mesurer le gain  $|G|$  du système en boucle ouverte à la fréquence de coupure pour déduire  $K_m$**  :

$$|G| = \frac{V_s}{V_e} = \left| \frac{K_m K_{pot}}{j\omega_c(1+j)} \right| = \frac{T_m K_m K_{pot}}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$K_m = \frac{|G|\sqrt{2}}{T_m K_{pot}}$$

#### 7.4.4 Expression de la FTBF $H(p)$ connaissant la FTBO $G(p)$

Notons pour simplifier l'écriture :  $\lambda = kAK_m K_{pot}$ . Alors :

$$G(p) = \frac{\lambda}{p(1+T_m p)}$$

La FTBF  $H(p)$  à retour unitaire vaut donc :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\lambda}{p(1+T_m p) + \lambda} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}p + \frac{T_m}{\lambda}p^2}$$

En identifiant avec l'expression canonique d'un **système du 2ème ordre d'amortissement  $\zeta$  et de pulsation propre  $\omega_n$**  (cf. TPAA1) :

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

on déduit les paramètres de l'asservissement :

$$\tau = \sqrt{T_m/\lambda} \quad (7.1)$$

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} = \sqrt{\lambda/T_m} \quad (7.2)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\lambda T_m}} \quad (7.3)$$

**Conclusion** : Le réglage choisi pour  $kA$ , qui modifie la valeur de  $\lambda$ , **influe sur l'amortissement  $\zeta$**  du système asservi, et **donc sur sa stabilité** en boucle fermée (cf. oscillations sur la réponse indicelle et surtension sur la courbe de gain de Bode). On peut le prévoir théoriquement grâce aux abaques des systèmes du 2ème ordre (cf. TPAA1).

# Chapitre 8

## TP Aa3(suite) Asservissement de position - Etude en boucle fermée

### 8.1 But de la manipulation

Cette étude fait suite à l'étude en B.O. de l'asservissement de position. On utilise la même platine d'étude (Tergane).

Le système étudié précédemment est asservi par un retour unitaire. Sa réponse au signal  $e(t)$  sera donc essentiellement fonction du gain de la chaîne directe. Suivant la valeur de ce gain, on peut obtenir 3 régimes de fonctionnement : apériodique, apériodique critique et pseudo-périodique.

La manipulation consistera donc à identifier tout d'abord ces 3 régimes en soumettant le montage à un échelon unitaire.

De la réponse indicielle du montage en B.F. assimilé à un système du 2nd ordre, on peut déterminer certains paramètres notamment le facteur d'amortissement  $\zeta$ , le coefficient de surtension  $Q$ , la pulsation propre  $\omega_n$ , etc...

L'étude harmonique de ce même montage permet de retrouver ces valeurs. Enfin, l'étude complète du système s'achèvera par son réglage optimum au sens de l'automatique (en insérant un correcteur).

### 8.2 Présentation de la platine d'étude

Voir Fig. 8.1 : cf. le TP du chapitre 7 sur l'asservissement en B.O. pour le rôle des différents blocs fonctionnels.

### 8.3 Manipulation

Câbler la platine de façon à la préparer pour une étude en boucle fermée à retour unitaire.

#### 8.3.1 Etude en régime indiciel

##### 8.3.1.1 Etude qualitative

Injecter des signaux rectangulaires de fréquence  $f = 1Hz$  avec une amplitude de 4 Volts crête à crête.

Régler le potentiomètre  $K$  de l'atténuateur de façon à observer les 3 modes de fonctionnement :

- apériodique

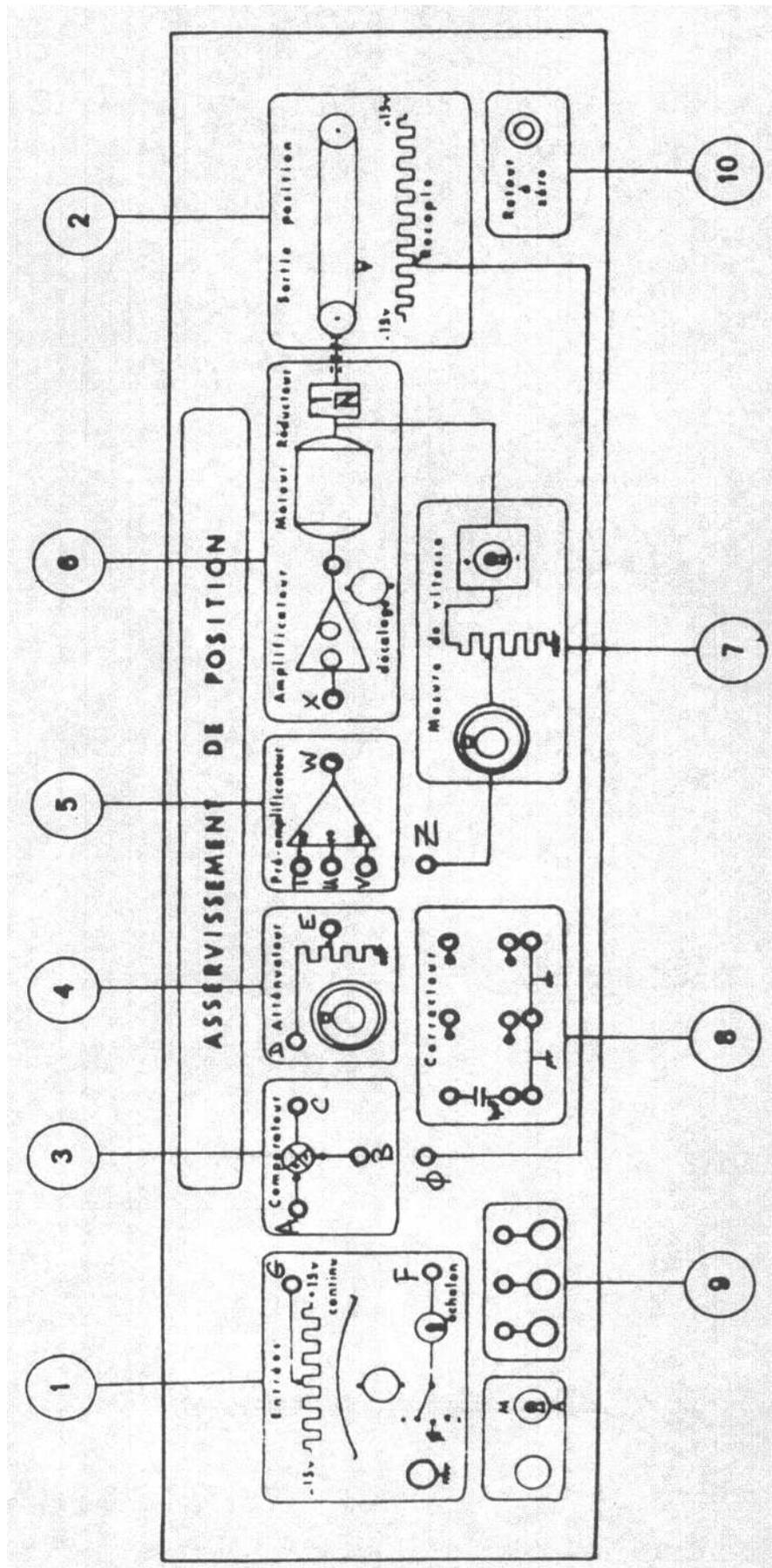


FIGURE 8.1 – Platine : Face avant de la Maquette

- aperiodique critique
- pseudo-periodique

Définir les plages de variation de  $K$  correspondant à ces 3 régimes et représenter l'allure des signaux observés en sortie Position.

### 8.3.1.2 Etude du régime pseudo-oscillatoire

Le gain du préamplificateur est fixé à  $A = 10$ .

On se place en régime oscillatoire amorti, soit :

$K \approx 0.6$  (valeur à ajuster selon la maquette 1 ou maquette 2)

La fréquence du signal d'attaque étant toujours de  $1Hz$ , représenter à l'échelle le signal Position et en déduire le coefficient d'amortissement  $\zeta$  et la pulsation propre non amortie  $\omega_n$  du système. (NB : Pour déterminer le coefficient d'amortissement, on mesurera la valeur du premier dépassement et on utilisera la méthode du décrement logarithmique cf. TP du Chap. 5).

Donner la fonction de transfert complète du système.

### 8.3.2 Etude en régime harmonique

Pour les 3 valeurs de gain :

$K = 0.1$ ,  $K = 0.28$  et  $K \approx 0.6$  (à ajuster selon la maquette 1 ou maquette 2)

tracer les diagrammes de Bode (amplitude et phase) du système.

La fréquence du signal d'attaque doit être comprise entre  $0.5Hz$  et  $20Hz$ .

Tracer aussi les 3 courbes de Black et mesurer les 3 marges de phase.

#### 8.3.2.1 Remarque

En augmentant le gain, on augmente la précision mais aussi l'instabilité.

Dans certains cas, le fait même d'être oscillant n'est pas tolérable pour un asservissement : c'est le cas par exemple d'un avion, d'une machine outil ou de certains robots.

#### 8.3.2.2 Influence de la génératrice tachymétrique

Prenons un gain de préamplificateur tel que l'asservissement soit instable (par exemple  $K = 0.15$  et on met le préamplificateur sur la position 100). Le gain est très élevé, le système oscille sans pouvoir s'arrêter.

Réglons le potentiomètre de retour Vitesse sur 0.3 et le commutateur sur "-" c'est-à-dire que le moteur fournit en  $Z$  une tension proportionnelle à la vitesse mais négative.

En connectant ce point  $Z$  à l'entrée  $U$  de gain 10 du préamplificateur-sommeur, on soustrait à la tension d'erreur une tension proportionnelle à la vitesse. Si le moteur doit se déplacer, il sera freiné par sa propre vitesse.

Observer que le système qui était instable redevient stable mais oscillant.

Si l'on règle le retour Vitesse à la valeur 1.0, on arrive à ne plus le faire osciller du tout !

#### 8.3.2.3 Expérience inverse

On règle maintenant l'asservissement de telle sorte qu'il soit stable et non oscillant.

Inverser l'interrupteur de retour Vitesse sur "+" : au lieu de retrancher à l'erreur une tension proportionnelle à la vitesse, on l'ajoute maintenant. Donc dès que le moteur sera soumis à une tension d'erreur, une tension supplémentaire proportionnelle à sa vitesse aura tendance à l'accélérer.

L'asservissement devient oscillant et plus nerveux.

### 8.3.3 Synthèse de correcteur

Nous venons de voir comment la réinjection du signal tachymétrique en + ou en - permettait :

- de rendre plus nerveux un asservissement trop mou
- de stabiliser un système nerveux mais oscillant.

Cette méthode peut être réalisée en utilisant des correcteurs sous forme de circuits filtres tels que :

- circuits P.I.D.
- circuits à avance ou retard de phase
- etc...

Nous allons par exemple utiliser un correcteur à avance de phase :

La fonction de transfert d'un tel correcteur est :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + a\tau p} \quad \text{avec} \quad \tau = 1/100 = 10ms \quad \text{et} \quad a = 0.25$$

Le correcteur est réalisé à partir du circuit passif de la Fig. 8.2, avec  $C = 1\mu F$ ,  $R_1 = 10k\Omega$ ,  $R_2 = 3.3k\Omega$ .

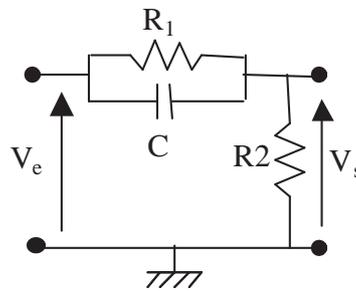


FIGURE 8.2 – Correcteur électronique

1. Insérer le correcteur entre la sortie du comparateur et l'entrée de l'atténuateur  $k$ . Le filtre défini ci-dessus introduit un affaiblissement de valeur  $a$  aux basses fréquences et en conséquence le gain  $KA$  sera fixé à  $10/a$ .
2. Visualiser les diagrammes de Bode pour vérifier les effets du correcteur.

# Chapitre 9

## TP Ab0 Synthèse fréquentielle des asservissements. Etude des correcteurs en cascade

### 9.1 But de la manipulation

On considère Fig. 9.1 le schéma fonctionnel d'un asservissement à retour unitaire où le correcteur, de transmittance  $G_c(p)$ , est placé en série entre le comparateur et le système à corriger  $H(p)$ .

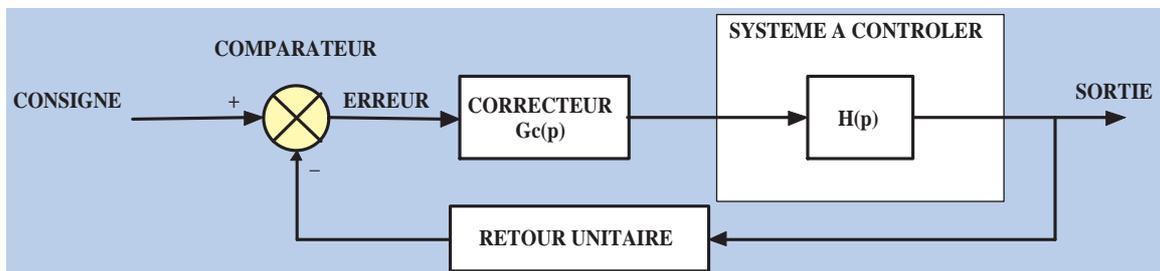


FIGURE 9.1 – Asservissement à retour unitaire

Le choix et la synthèse du correcteur s'effectuent en fonction d'un cahier des charges qui spécifie les conditions de fonctionnement d'un système à régulation automatique, en régime transitoire et en régime permanent.

Les conditions suivantes sont généralement imposées :

- annulation des erreurs statiques en réponse à un échelon ou à une rampe
- degré de stabilité : nombre d'oscillations
- forme de la réponse indicielle : apériodique ou oscillatoire optimale (une seule oscillation)
- rapidité

En utilisant le logiciel Black sous Matlab, nous allons étudier les principaux types de correcteurs utilisés et les appliquer à des systèmes simples.

Les correcteurs qui vont être étudiés ont été classés en deux groupes :

- ceux qui ont une action proportionnelle et/ou dérivée et/ou intégrale pure,
- et ceux qui ont une action proportionnelle et/ou intégrale et/ou dérivée approchée.



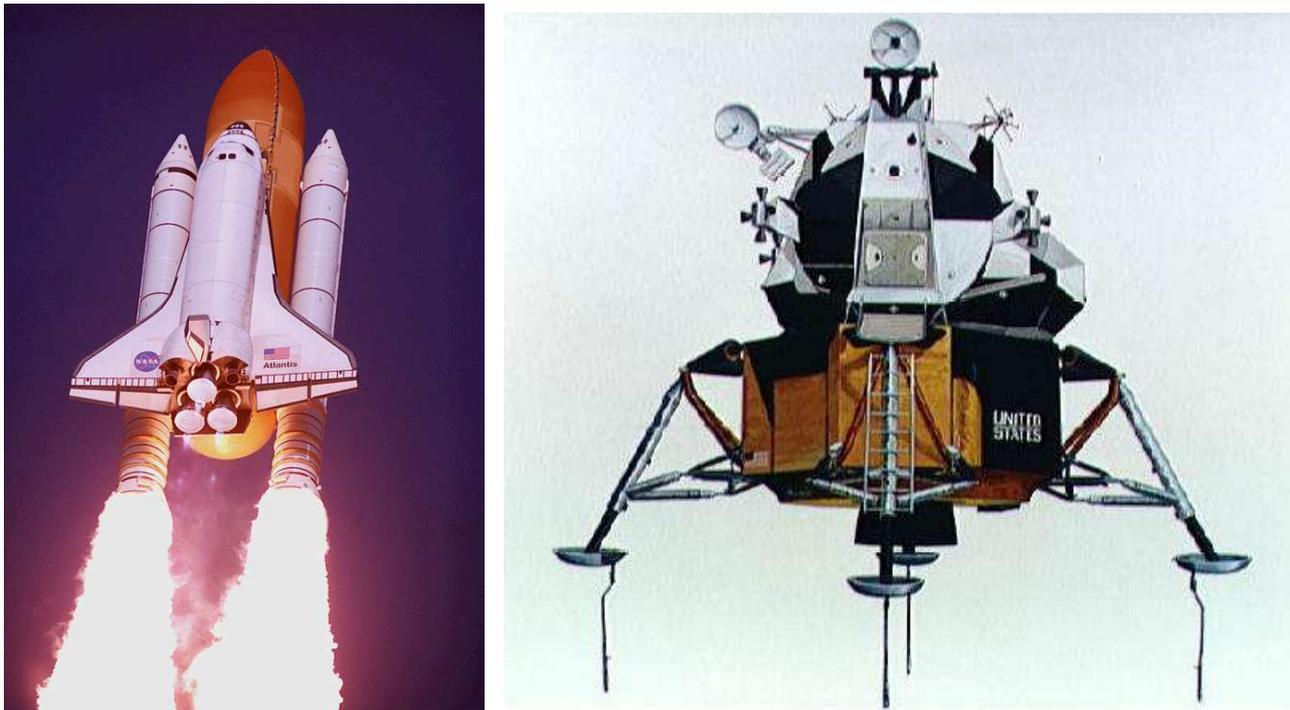


FIGURE 9.3 – a) Navette ; b) Lunar Excursion Module

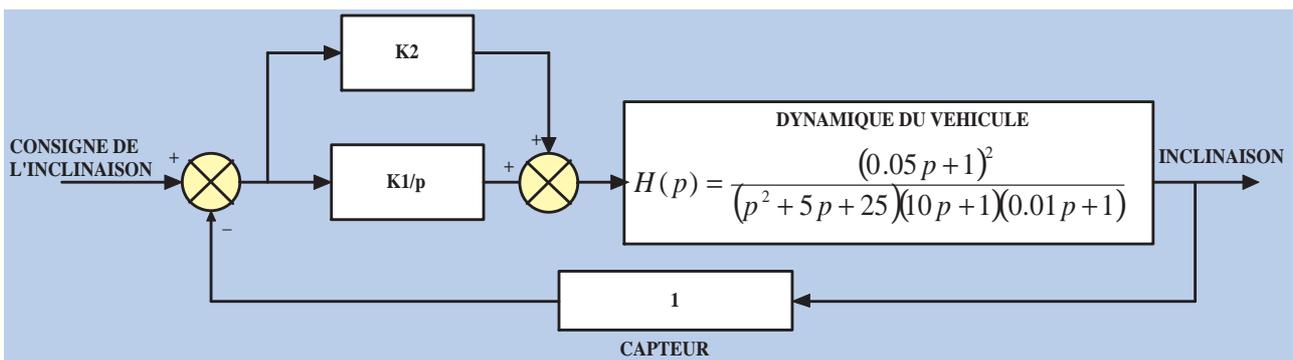


FIGURE 9.4 – Régulation de l'inclinaison d'une navette

Nous allons appliquer cette méthode à un système régulant l'inclinaison d'une navette (Fig. 9.3a) en modifiant la position de ses ailerons.

Le diagramme fonctionnel d'un tel système est représenté à la Fig. 9.4. Le correcteur est un P.I. réglable au moyen des gains  $K_1$  et  $K_2$ .

4. Simuler avec Black et visualiser la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système pour  $K_1 = 0$  et  $K_2 = 1$ . Quelle est la marge de gain et la marge de phase ?
5. Effectuer la synthèse du correcteur permettant d'obtenir les contraintes suivantes :
  - réponse indicielle apériodique (marge de phase de  $50^\circ$ )
  - erreur statique nulle en réponse à un échelon.
6. Vérifier les performances du système.

### 9.2.3 Correction par action proportionnelle et dérivée D

La transmittance du correcteur est :

$$G_c(p) = K + K_d p = K_c(1 + pT_d)$$

1. Visualiser le diagramme asymptotique de la réponse fréquentielle de ce correcteur.
2. Quelle est approximativement l'avance de phase et le gain du correcteur obtenus pour :

$$\omega = \frac{10}{T_d}$$

3. Quelles sont les contraintes qui peuvent être satisfaites ?
4. On considère le système :

$$H(p) = \frac{10}{p(1 + 0.1p)(1 + p)}.$$

Calculer le gain statique en boucle ouverte pour que l'erreur en réponse à une rampe soit de 10%. En déduire le gain du correcteur  $K_c$ .

5. Tracer la réponse en boucle ouverte  $K_c H(p)$  pour le gain obtenu.
6. Déterminer la pulsation pour laquelle la réponse coupe l'ordonnée  $-20dB$ . En déduire une valeur possible de  $T_d$ .
7. Vérifier avec Black les performances obtenues.

### 9.3 Correction par action approchée

Les correcteurs par action approchée sont généralement plus faciles à réaliser en particulier au moyen de composants passifs. Il en existe de différentes sortes notamment des correcteurs par avance de phase ou par retard de phase.

Dans ce qui suit, nous allons faire l'étude d'un correcteur par avance de phase (cf. annexe 13.2).

Sa transmittance s'écrit :

$$G_c(p) = K_c \frac{1 + aT_d p}{1 + T_d p} \quad \text{avec} \quad a > 1.$$

1. Visualiser le diagramme asymptotique de la réponse fréquentielle du correcteur.
2. Quelles sont les contraintes qui peuvent être satisfaites ?
3. Vérifier par le calcul que la pulsation pour laquelle l'avance de phase est maximale vaut :

$$\omega_m = \frac{1}{T_d \sqrt{a}}$$

et qu'à cette pulsation, le gain en dB vaut :  $g(\omega_m) = 20 \log \sqrt{a} + 20 \log K_c$ .

On peut également montrer que l'avance de phase est donnée par :

$$\Delta\varphi_m = \arcsin \left[ \frac{a - 1}{a + 1} \right]$$

Des abaques représentant ces relations sont données en annexe 13.2.

4. Considérons le contrôle d'un L.E.M. (*Lunar Excursion Module*) dont la photo apparaît à la Fig. 9.3b. La commande et le contrôle de la navigation mettent en œuvre de nombreux capteurs et différentes unités de propulsion. Pour l'analyse qui va être faite, on peut considérer la dynamique du véhicule comme une double intégration. Le diagramme fonctionnel de la Fig. 9.5 illustre le système de régulation d'un axe de l'attitude du véhicule. De plus, on suppose que le couple  $T(p)$  est proportionnel au signal de contrôle  $U(p)$  :

$$T(p) = 2U(p) \quad \text{et que} \quad J = 0.25$$

En vous aidant des abaques, déterminer un réseau d'avance de phase tel que la marge de phase du système corrigé soit comprise entre  $40^\circ$  et  $60^\circ$ .

5. Vérifier les performances du système avec Black.

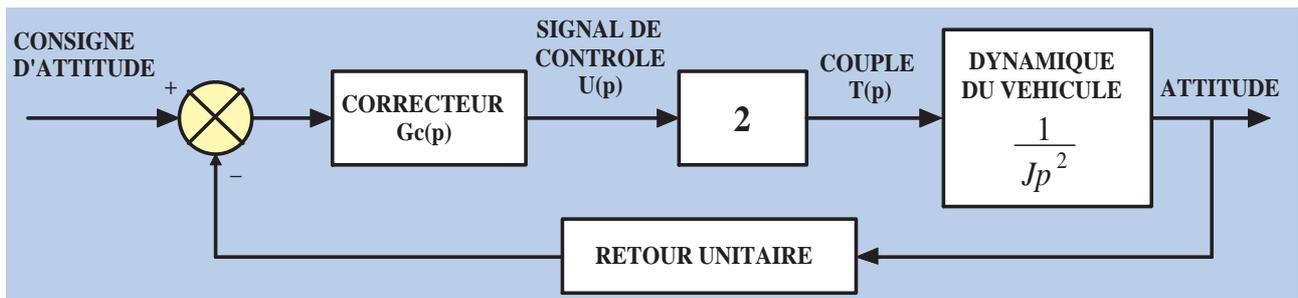


FIGURE 9.5 – Block diagramme du Lunar Excursion Module



# Chapitre 10

## TP Ab1 Régulation de vitesse

L'objectif de ce TP est d'asservir en vitesse le moteur de la plaquette Motor Board (Fig. 10.1).

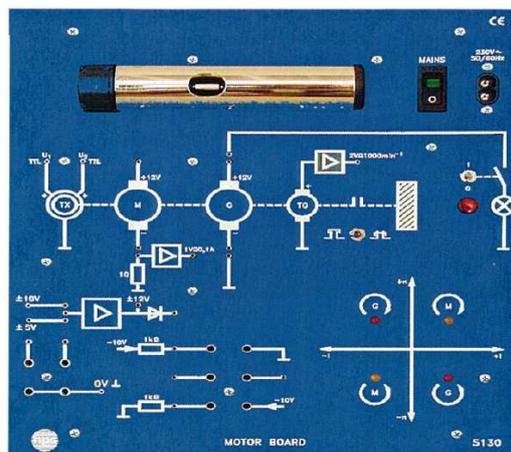


FIGURE 10.1 – Motor Board (réf. hps H5130)

### 10.1 Présentation du matériel

- Le moteur est un moteur à courant continu de tension nominale 12V et de vitesse nominale  $7800 \text{ tr.min}^{-1}$ .
- Ce moteur est alimenté grâce à un amplificateur de puissance : entrée  $\pm 10V$  ; sortie 4 quadrants  $\pm 12V$ .
- Il est couplé à un autre moteur identique monté en génératrice tachymétrique générant une tension proportionnelle à la vitesse du moteur ( $2V$  pour  $1000 \text{ tr.min}^{-1}$ ). Cette tension doit être filtrée par un filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps  $50ms$  pour être utilisée.
- La génératrice peut être chargée par une lampe.
- L'axe des moteurs peut être chargé par un volant d'inertie.
- Relier les masses des 2 platines (placer le PID board à gauche et le moteur à droite).
- Connecter les bornes RESET du générateur interne.  
NB : Il faut appuyer sur le bouton rouge START/STOP pour activer le générateur interne.
- Attention aux signes moins sur les sorties des modules : la platine est faite de sommateurs inverseurs  $S = -(A + B)$  et d'ampli inverseurs. Il faudra bien tenir compte du nombre de signes moins dans la boucle pour éviter de faire un oscillateur !
- Si l'on entend un bruit strident en FTBF, vérifier le cavalier mis sur le filtre de tachymètre.

## 10.2 Boucle ouverte

1. Réaliser un essai indiciel en boucle ouverte sans charge et avec charge (lampe et/ou volant d'inertie). cf. Fig. 10.2.

NB : On réglera à l'oscilloscope le signal d'entrée carré (fourni par le générateur interne du PID board) tel que :  $f = 0.5Hz$  et  $V_{pp} = 7V$ . Ce signal alimentera l'entrée  $\pm 10V$  de l'ampli de puissance du moteur.

On déclenchera l'oscilloscope par le signal de Trigger externe (mode TRIG EXT, Normal, coupling DC).

2. Pour chaque essai, visualiser l'allure des courbes de réponse et identifier la fonction de transfert du moteur (ordre, constante de temps).

NB : on pourra utiliser la fonction **Sauve** et la touche **Ref Menu** de l'oscilloscope pour stocker et superposer plusieurs réponses afin de mieux les comparer.

3. Dresser un tableau de mesures donnant  $V_e$ ,  $V_s$  et le temps de montée pour les 4 cas de charge. Compléter le tableau avec les valeurs de gain  $K_0$  et de constante de temps  $\tau_0$  déduites de ces mesures pour chaque cas.
4. Quelle est l'influence respective des charges sur la fonction de transfert du système ?

## 10.3 Boucle fermée non corrigée

1. Dessiner un schéma de câblage pour un essai indiciel en boucle fermée sans correcteur (cf. Fig. 10.3).
2. Réaliser un essai indiciel en boucle fermée sans correcteur sans charge et avec charge (lampe et/ou volant d'inertie).
3. Pour chaque essai, visualiser l'allure des courbes de réponse et préciser si la fonction de transfert est un premier, un second ou un autre ordre.
4. Vérifier le résultat de l'identification à partir des fonctions obtenues en 10.2.
5. Quelle est l'influence du rebouclage sur le système (sur le gain et sur la rapidité) ? Pour étayer la réponse, on peut calculer la fonction de transfert  $H(p)$ .

## 10.4 Boucle fermée corrigée

1. Dessiner un schéma de câblage pour réaliser un essai indiciel en boucle fermée avec correcteurs PID.
2. Utiliser les correcteurs PID parallèles pour réaliser un essai en boucle fermée. Régler ces correcteurs par la méthode expérimentale et relever la valeur de leurs paramètres.
3. A partir du 10.2 et du 10.3, déterminer les paramètres des correcteurs par une autre méthode que la méthode expérimentale.
4. Régler les correcteurs et réaliser un essai indiciel.
5. Comparer les résultats des deux méthodes de réglage en terme de performances du système et proposer des améliorations.

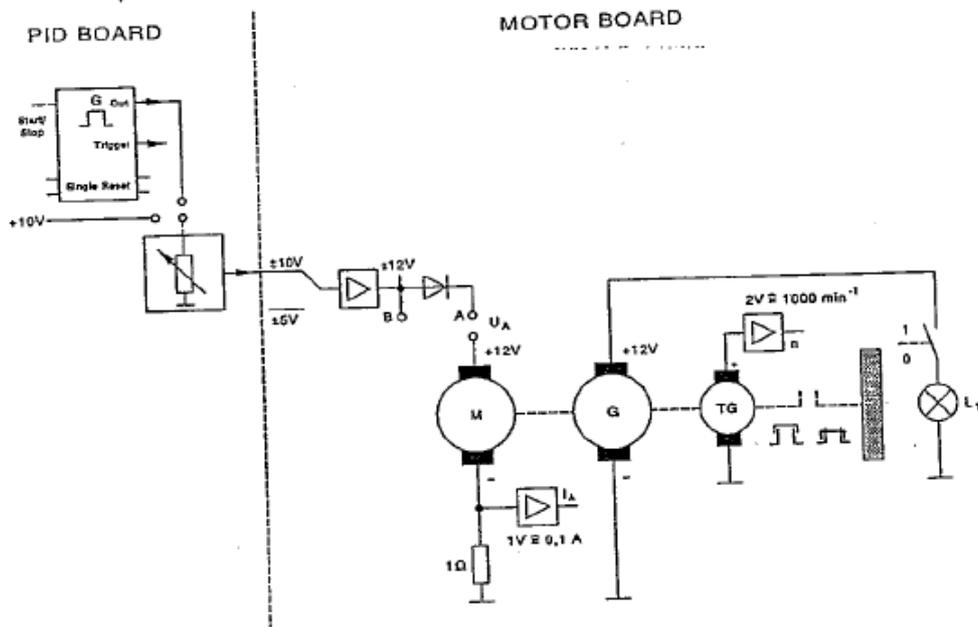


FIGURE 10.2 – Boucle ouverte

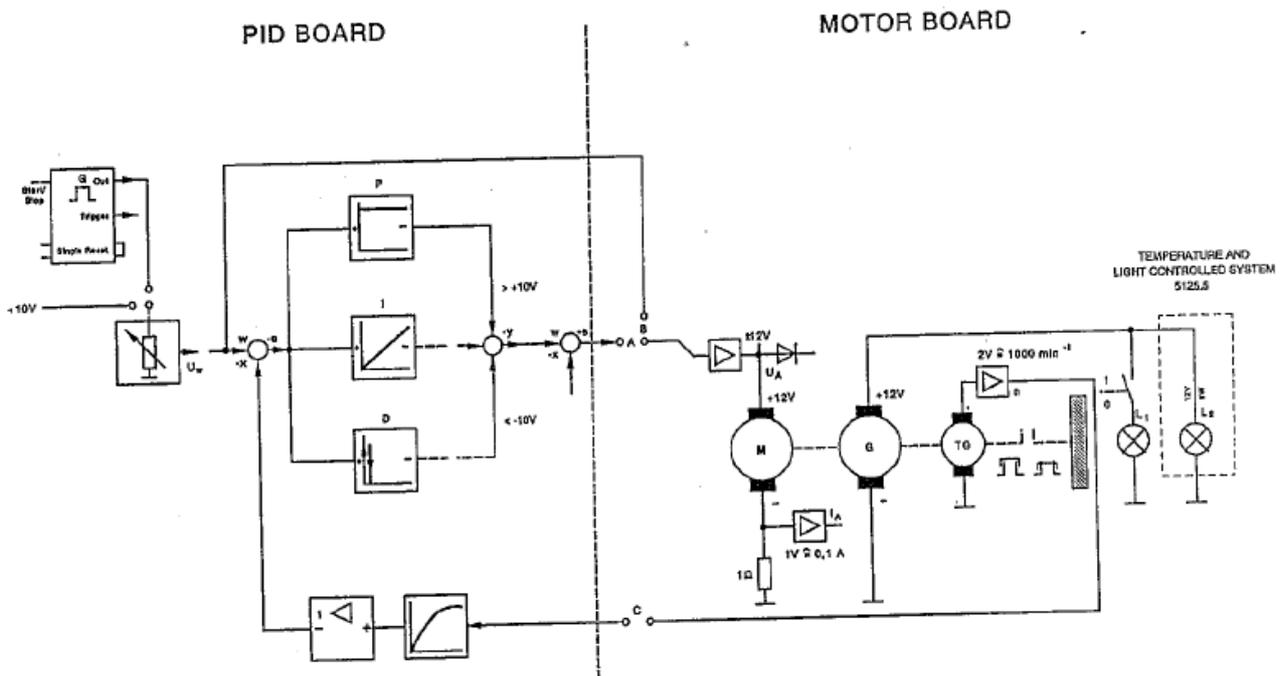


FIGURE 10.3 – Câblage en Boucle fermée



# Chapitre 11

## TP Ab2 Régulation de position

L'objectif de ce TP est d'asservir en position le moteur de la plaquette Servo Board (Fig. 11.1).

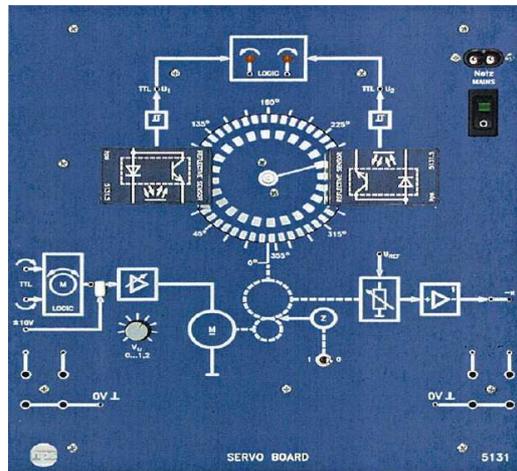


FIGURE 11.1 – Servo Board (réf. hps H5131)

### 11.1 Présentation du matériel

- La plaquette contient un moteur dont la position angulaire est apparente.
- Un potentiomètre à point milieu permet de générer un signal proportionnel à cette position angulaire en fonction d'une tension de référence  $U_{REF}$  (ici  $-10V$  ou  $+10V$ )
- Le moteur est alimenté grâce à un amplificateur de puissance de gain variable ( $V_u \in [0; 1.2]$ ).
- Pour les essais, l'interrupteur Z doit être placé sur 0.
- On utilisera un générateur externe (et non pas le générateur interne de la platine PID) pour alimenter le système.

### 11.2 Boucle ouverte

cf. Fig. 11.2

1. Mettre le ServoBoard à gauche et la platine PID à droite et relier les masses des 2 chassis.
2. Réaliser un essai indiciel en boucle ouverte. Prendre un signal carré :  $V_{pp} = 3V$  ;  $f = 0.3Hz$  ;  $V_{offest} = 3VDC$ . Faire une copie d'écran et expliquer les sauts verticaux.

3. Le signal de consigne permet-il d'asservir la position du moteur ?
4. Le système est-il stable en boucle ouverte ? Justifier en considérant que  $G(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$ .

### 11.3 Boucle fermée non corrigée

cf. Fig. 11.3

1. Dessiner un schéma de câblage pour réaliser un essai indiciel en boucle fermée sans correcteur.
2. Réaliser un essai indiciel en boucle fermée sans correcteur.  
Faire une copie d'écran. Mesurer temps de montée  $t_m$  et erreur statique  $\varepsilon_0$   
NB : attention à modifier la valeur de  $U_{REF}$ .
3. Quelle est la relation entre la position angulaire du moteur et le signal issu du potentiomètre capteur de position ?
4. Donner l'allure de la courbe de réponse et préciser si la fonction de transfert est un premier, un second ou un autre ordre.

### 11.4 Boucle fermée corrigée

1. Dessiner un schéma de câblage pour réaliser un essai indiciel en boucle fermée avec correcteurs PID.
2. Utiliser les correcteurs PID parallèles pour réaliser un essai en boucle fermée. Régler ces correcteurs par la méthode expérimentale et relever la valeur de leurs paramètres.
3. Réaliser un essai de pompage (avec  $Z = 1$ ). Préciser la valeur du gain et la période des oscillations.
4. En utilisant la méthode de Ziegler-Nichols, déterminer le réglage des correcteurs et réaliser un essai indiciel avec les correcteurs.
5. Comparer les résultats des deux méthodes de réglage en terme de performances du système et proposer des améliorations.

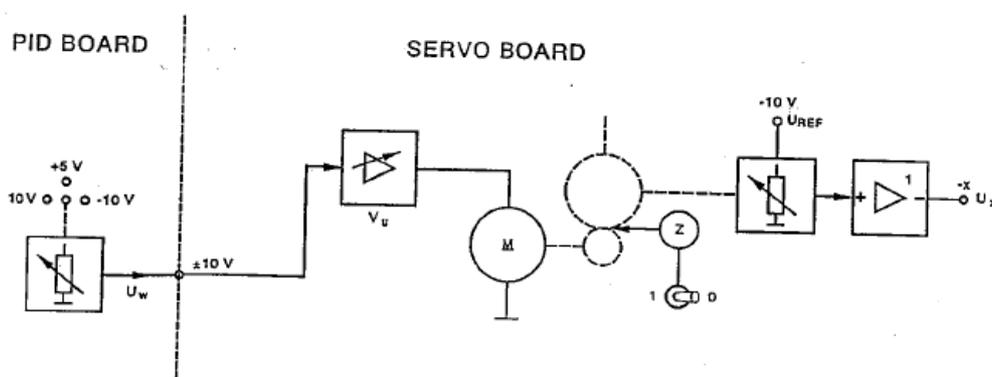


FIGURE 11.2 – Boucle ouverte

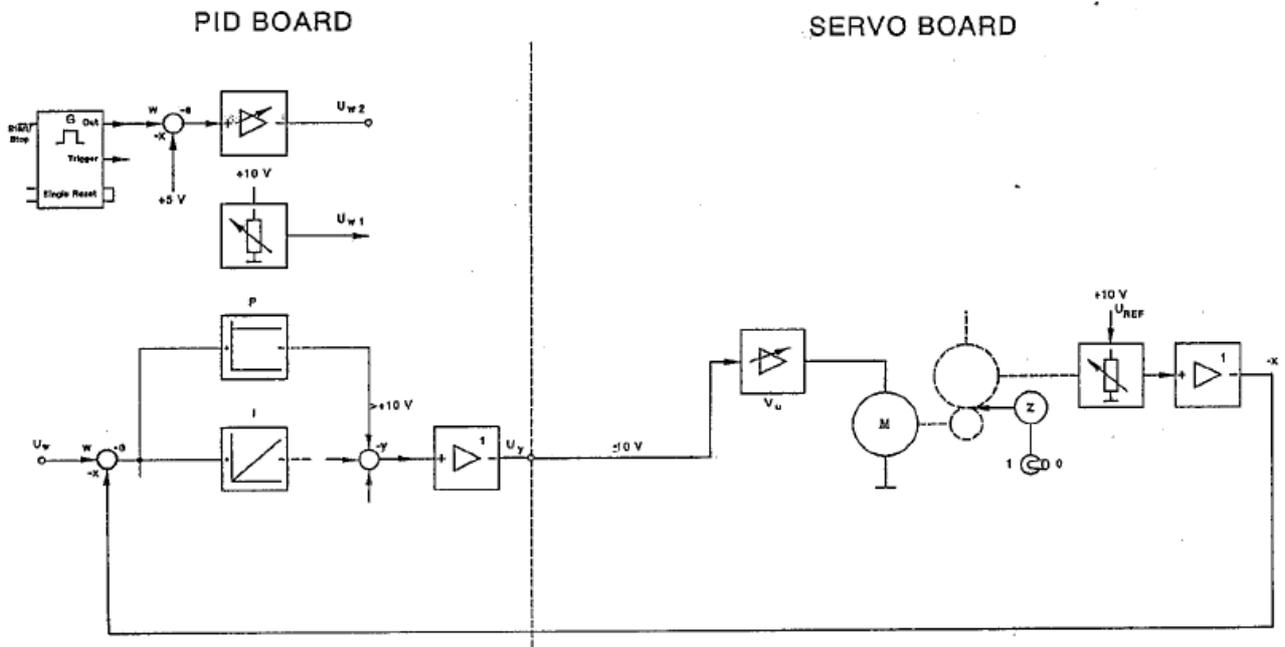


FIGURE 11.3 – Boucle fermée



# Chapitre 12

## TP Ab3 Régulation de puissance

### 12.1 Présentation

Le système EP060 de Didalab regroupe la partie commande et la partie mesure pour l'étude des asservissements sur des groupes moteurs de 0.3 kW à 1.5kW (Fig. 12.1). Il permet d'étudier le système en boucle ouverte ou en boucle fermée (en position ou en vitesse). En boucle fermée, on peut choisir plusieurs types de correcteurs : PID, TOR ou échantillonné (en « Z »).

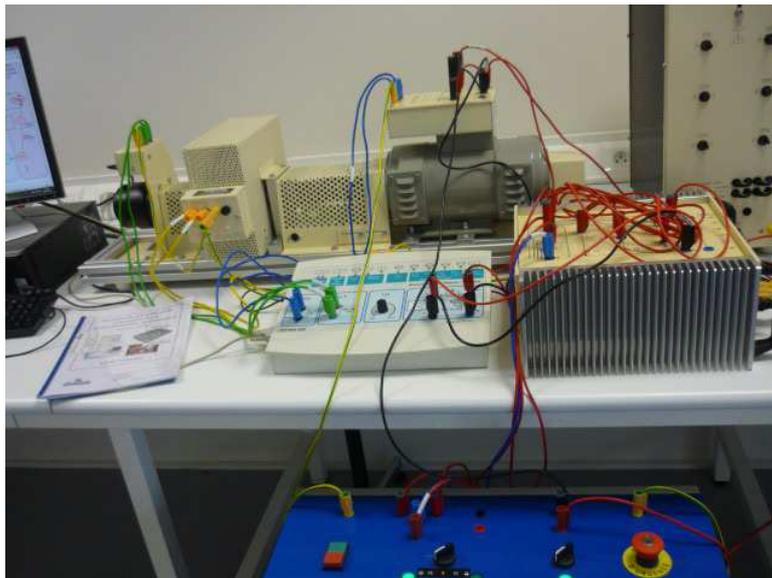


FIGURE 12.1 – Banc expérimental : partie opérative et partie contrôle-commande

#### 12.1.1 Objectifs du TP

1. Proposer et tester un réglage de PI(D) proche de l'optimum en l'absence de frottement (en terme de dépassement et de temps de réponse).
2. Même question en présence de frottements (avec charge frein à poudre à configurer).
3. Conclusion : expliciter les compétences mobilisées dans ce TP et le savoir-faire acquis.

- Durée du TP : 4h
- Lieu : Salle 134 (Labo Electrotechnique)
- Docs : 3 docs DidaLab

### 12.1.2 Liste des équipements

Identifier les équipements :

- Banc moteur CC (300W)
- Frein à poudre
- Plan de charge résistif 500W
- Génératrice tachymétrique
- Redresseur gradateur EP 260 000
- Boîtier de commande EP 060 000
- Alimentation COMPAK20 triphasée
- PC avec logiciel D\_EP060
- 1 Oscilloscope 4 voies
- 2 Voltmètres (pour relever la tension aux bornes du tachymètre qui donne la vitesse, et pour mesurer la tension aux bornes du frein à poudre).

### 12.1.3 Câblage

Réaliser ou vérifier le câblage (hors tension) selon la Fig.12.2.

NB : Lors du démarrage, on alimentera en premier l'inducteur en  $220V_{CC}$  puis l'induit en  $150V_{AC}$ . Mettre environ 20 % de la charge résistive et 50% des tensions maxi d'alimentation.

Entre 2 essais, remettre à zéro les alimentations CA-tri (induit) et CC-mono (inducteur).

Toujours laisser EP060000 et EP260000 sous tension (avant d'allumer le PC).

### 12.1.4 Logiciel

Se familiariser avec le Fonctionnement des barres de menu (Fig.12.3) :

Il faut passer en mode « partie commande » pour pouvoir aller sur les différents menus. En effet, lorsqu'on lit une courbe, on ne peut pas naviguer directement dans les différents menus notamment pour changer les unités ou le type d'essai.

### 12.1.5 Configuration du système

Dans le menu Configurer Partie Opérative, vérifier si les valeurs suivantes sont saisies :

- Mesure : Génératrice tachymétrique : Gain = 0,02 V/tr/min, Plage =  $\pm 50V$  (ou  $\pm 100V$ )
- Charges : Frein à poudre :  $I_{max} = 0,2$  A ;  $I_{nom} = 0,1$  A ;  $C_{nom} = 4$  Nm  
Charge active :  $U_{max} = 10$  V ;  $U_{nom} = 5$  V
- Moteur :  $U_{nom} = 220$  V ;  $I_{nom} = 2$  A ; Vitesse = 1500 tr/min
- Compensation frottement sec : Commande tension :  $U_{démarrage} = 0V$  (ou 10 V)  
Commande courant :  $I_{démarrage} = 0.5$  A
- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.01$  s (sauf pour vitesse :  $T_e = 0.005s$ )

## 12.2 Caractérisation du système en boucle ouverte

Faire le schéma bloc de l'installation en boucle ouverte (Fig.12.4). La FTBO du moteur sans charge ( $a = 0$ ) se modélise par un 1er ordre :  $G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$ . Celle du moteur avec charge ( $a = 4$  : frottement visqueux du frein à poudre) se modélise par un 2e ordre :  $G(p) = \frac{K}{(1+\tau p)^2}$ .

### 12.2.1 Réponse à un échelon constant

Partant d'un état de repos avec 20V, on souhaite appliquer un échelon de commande constant de valeur  $S_r = 60V$  (pour effectuer une variation de commande de 40V autour du

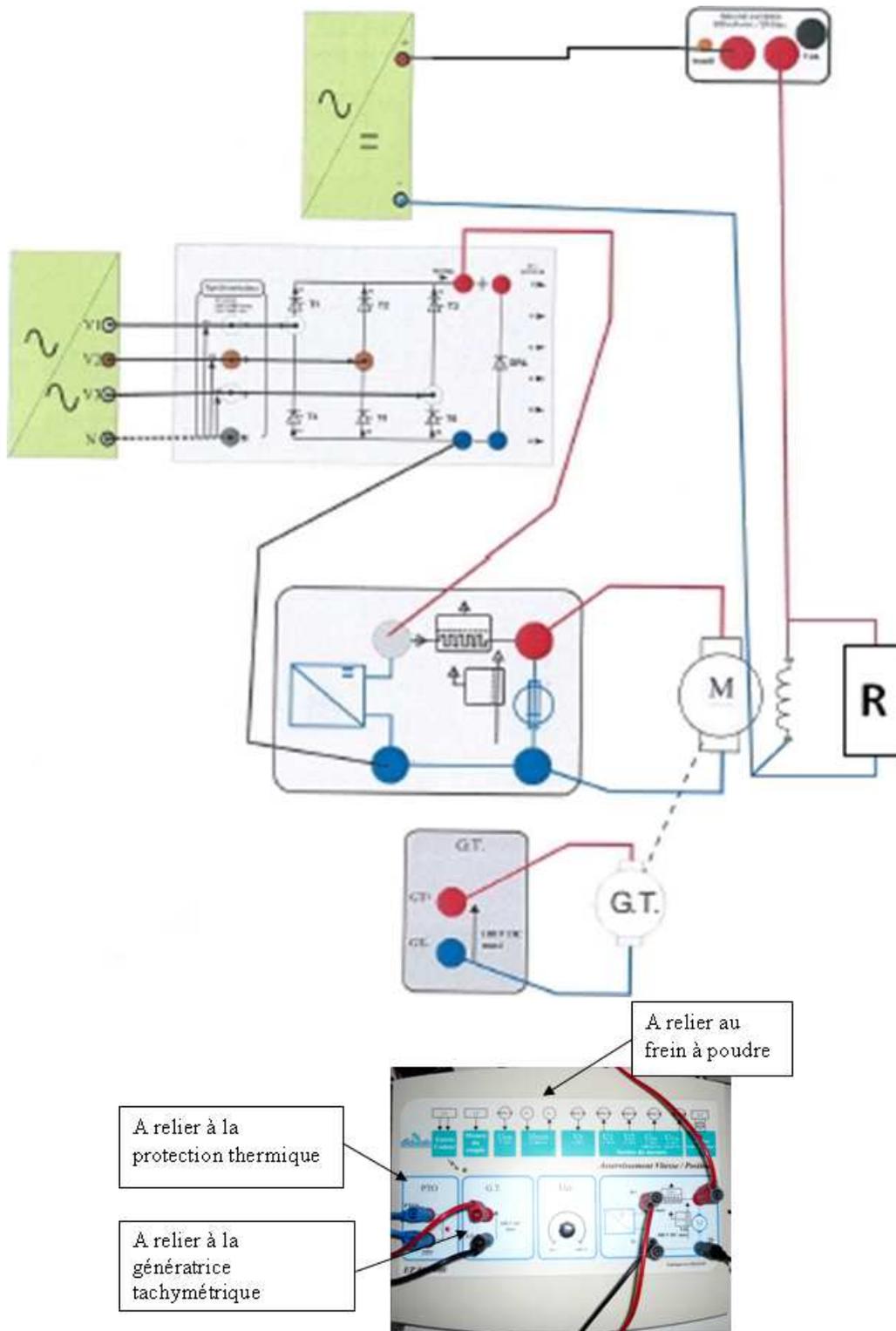


FIGURE 12.2 – Synoptique de câblage

point de repos) à un instant pris comme origine de temps  $t = 0.1s$ .

Conditions de l'essai et mode opératoire :

- Configurer la caractéristique de charge :  $a = 0$  ou  $a = 4 \text{ mN.m/tr/min}$
- Définir la valeur de repos à 20V, et la valeur de l'échelon constant à 60V avec un temps de retard de l'échelon égal à  $tr = 0.1 \text{ s}$
- Veiller à être en mode Stop avec l'interrupteur de sortie fermé
- Appliquer l'échelon en cliquant sur le commutateur d'application de l'échelon
- Sélectionner les points d'enregistrement Nm et Sr en cliquant gauche dessus

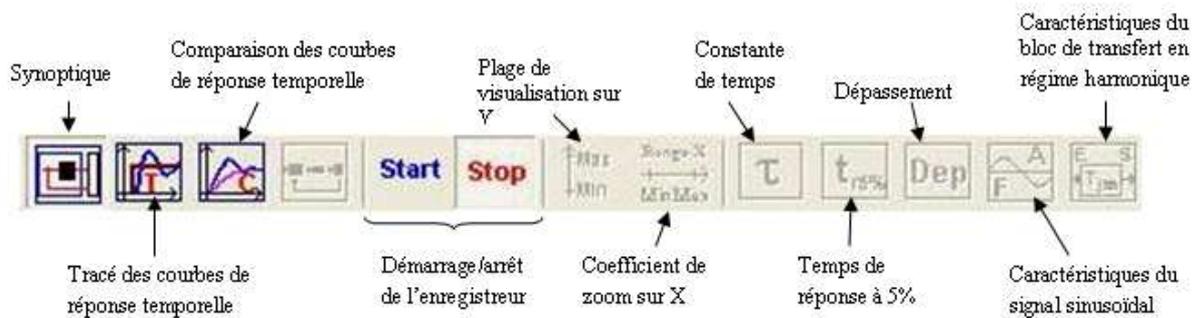
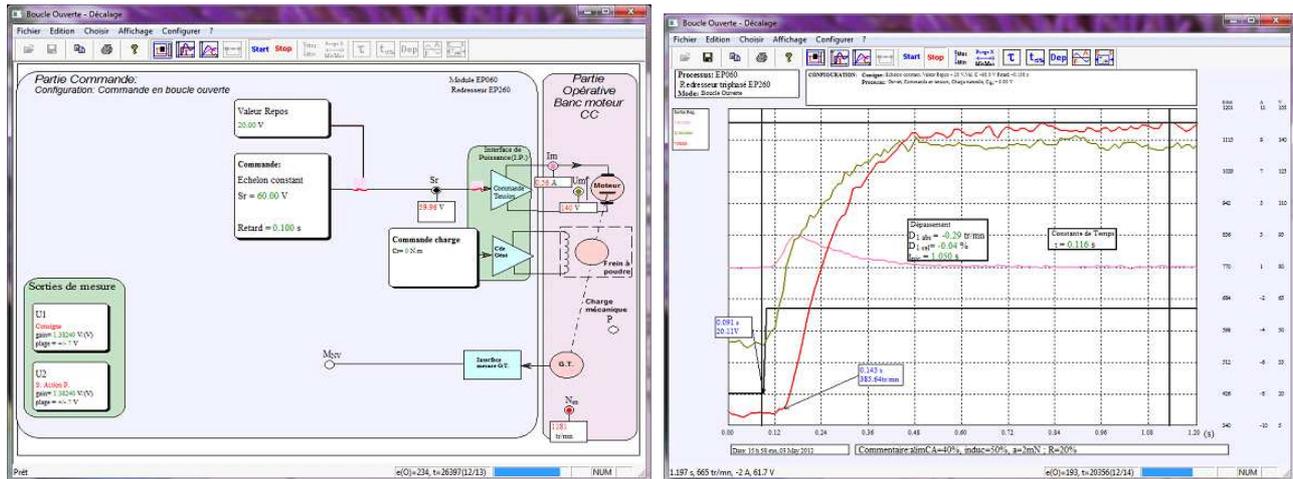


FIGURE 12.3 – Barre de menu du logiciel D Ep060

FIGURE 12.4 – Essai en boucle ouverte : a) Schéma-Bloc ; b) Réponse Indicielle : échelon de tension en entrée (coeff=0.05V/tr.min<sup>-1</sup>)

- Tracer la réponse temporelle grâce au bouton du menu. Visualiser l'évolution de la vitesse  $N$  au cours du temps.
- On peut connaître les coordonnées d'un point en positionnant une sonde. Pour cela, cliquer/glisser depuis le point de la courbe vers l'endroit où l'on veut positionner la sonde. Pour effacer une sonde indésirable, il suffit de cliquer dessus.
- Grâce aux boutons du menu, en positionnant les sondes demandées, on peut mesurer la constante de temps, le gain, le dépassement et le temps de réponse à 5 % du système. NB : l'instant initial est l'instant où se produit la discontinuité de la consigne.

## 12.2.2 Exploitation des résultats

Pour chaque essai, visualiser l'allure des courbes de réponse et identifier la fonction de transfert (valeur du gain statique  $K$  et constante de temps  $\tau$ ). Mesurer les temps de réponse et dépassements.

Quelle est l'influence de la charge sur la fonction de transfert ?

## 12.3 Boucle fermée

Faire le schéma bloc de l'installation en boucle fermée (Fig.12.5).

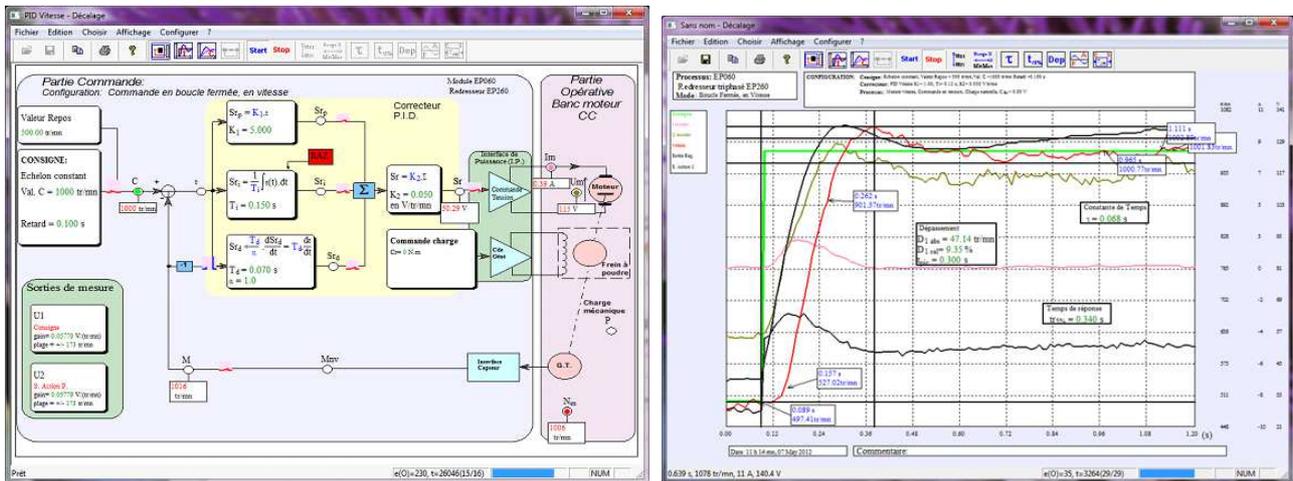


FIGURE 12.5 – Essai en boucle fermée avec correcteur PID : a) Schéma-bloc ; b) Réponse indicielle : erreur statique annulée

### 12.3.1 Réponse à un échelon constant

Partant d'un état de repos égal à 500 tr/min, on souhaite appliquer un échelon de commande constant de valeur  $C = 1000$  tr/min à un instant pris comme origine des temps  $t = 0.1$ s.

Conditions de l'essai et mode opératoire :

- Configurer la caractéristique de charge :  $a = 0$  ou  $a = 4$  mN.m/tr/min
- Définir la valeur de repos à 500 tr/min. Définir la valeur de l'échelon constant à 1000 tr/min avec un retard de 0.1 s.
- Définir par défaut des coefficients  $K1 = 1$  et  $K2 = 0.05$  Définir la constante d'intégration  $Ti = \tau$  prédéterminée en cliquant sur le bloc « Action intégrale »
- Veiller à être en mode Stop avec l'interrupteur de sortie fermé
- Appliquer l'échelon en cliquant sur le commutateur d'application de l'échelon
- Sélectionner les points d'enregistrement vitesse Nm et commande C
- Tracer la réponse temporelle
- Déterminer le temps de réponse à 5 % .

### 12.3.2 Boucle fermée non corrigée

- Tenter un essai sans correcteur (avec ou sans charge).
- Pour chaque essai, visualiser l'allure des courbes de réponse et préciser l'ordre de la fonction de transfert.
- Valider l'ordre de la fonction transfert avec les résultats en boucle ouverte.
- Quelle est l'influence du rebouclage ?

### 12.3.3 Boucle fermée corrigée

- Connaissant la FTBO, déterminer par calcul les paramètres du correcteur PI, sachant qu'il est défini sur la platine de commande par :  $C(p) = K_2(K_1 + \frac{1}{\tau_i p})$ .
- Régler le correcteur PI(D) dans le logiciel puis effectuer un essai en boucle fermée avec ce correcteur (NB : faire une RAZ du PI avant chaque essai).
- Commenter les résultats et faire toute mesure utile à l'aide du menu (dépassement, temps de montée).

## 12.4 Conclusion

Commentaire et interprétation : intérêt de la commande ?

Quatrième partie

**ANNEXE TECHNIQUE**



# Chapitre 13

## ANNEXES

### 13.1 Annexe 1 : Courbes Canoniques du 2eme Ordre

Voir courbes de Bode : gain et phase en fonction de la fréquence, Fig. 13.1.

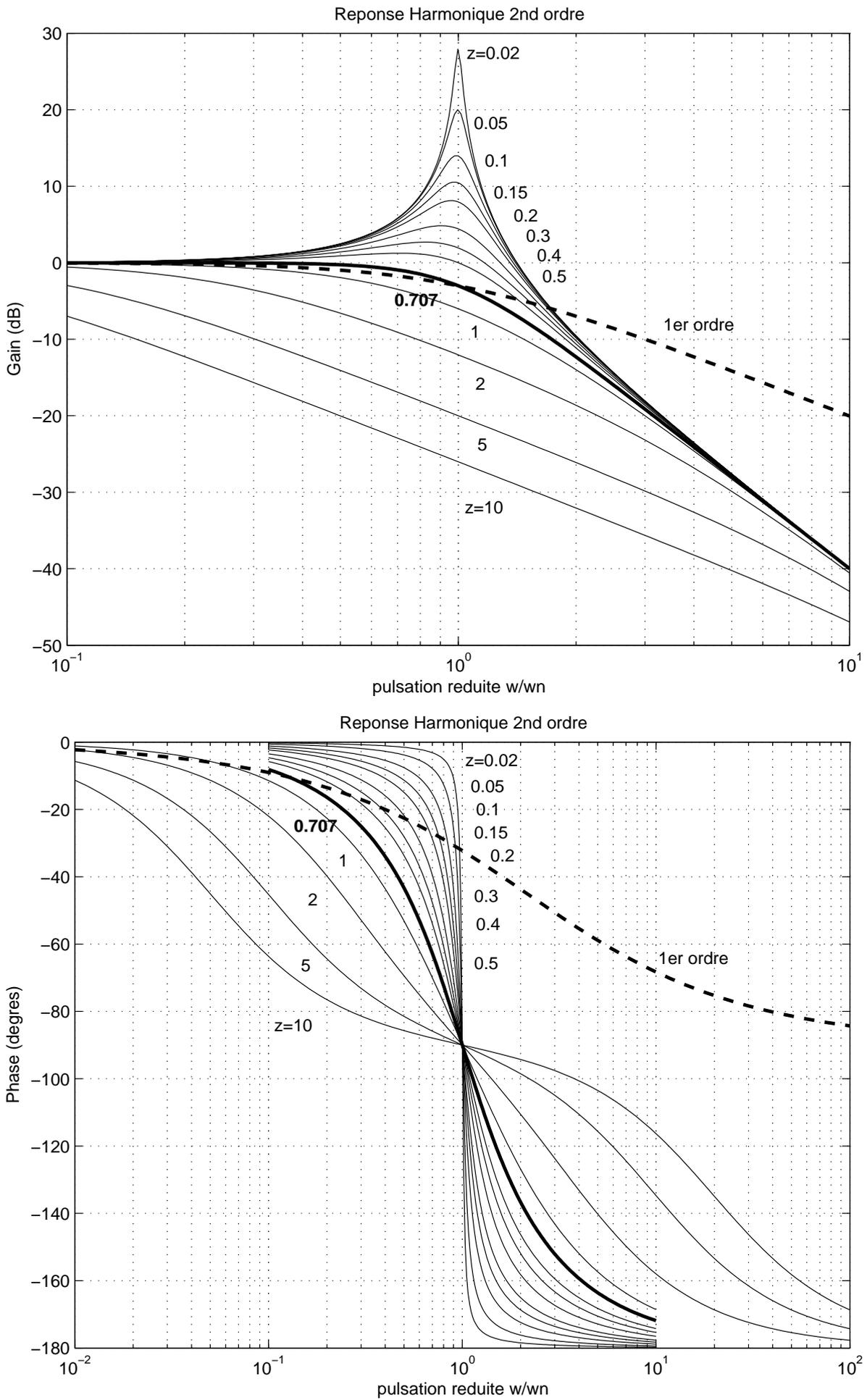


FIGURE 13.1 – Courbes de Bode d'un système du 2e ordre canonique : a) Gain ; b) Phase. (où  $w_n$  dénote la pulsation propre du système et  $z$  le coefficient d'amortissement).

### 13.2 Annexe 2 : Abaques pour le calcul du correcteur à avance de phase

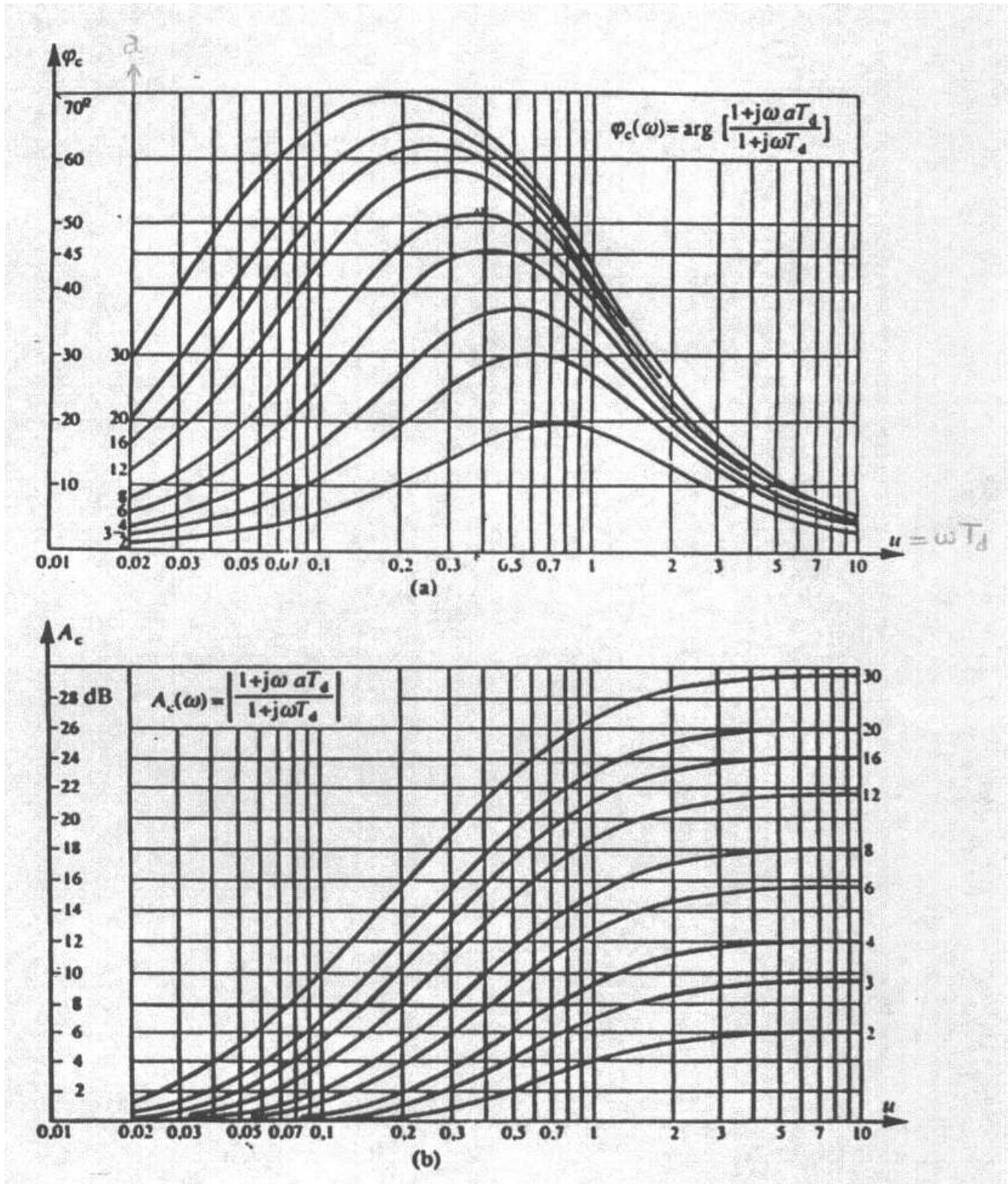


FIGURE 13.2 – Abaques

## 13.3 Annexe 3 : Notice d'utilisation du programme Black dans Matlab

### Mode d'emploi succinct :

- Démarrage de l'environnement : cliquer sur l'icône **Matlab**
- Exécution du programme : dans la fenêtre de commande, taper **black**
- Edition éventuelle du fichier contenant le programme : choisir le menu **File-> Open** (fichier **black.m**)

**Paramètres de simulation** : On a le choix pour les 4 parties du TP :

```
choix=? [turbine=0]; navette=1; P&D=2; L.E.M.=3
```

Les fonctions de transfert sont pré-définies par défaut dans le programme.

Les expressions entre crochets ( [ ... ] ) sont les valeurs prises par défaut.

Pour des modifications, il faut renseigner :

- H : fonction de transfert de retour (unitaire par défaut)
- G0 (ou G1 et G2) : les fonctions de transfert du système étudié
- GC : fonction de transfert du correcteur (défini par ses gains et/ou constantes de temps).

**NB** : La notation algébrique utilise la variable symbolique " s " pour définir une fonction de transfert. Par exemple :

```
G2=0.5/(s^2+3*s+2);
```

correspond à la fonction de transfert :  $G_2(p) = \frac{0.5}{p^2+3p+2}$

**Exécution** : A l'exécution, la **fenêtre de commande** fournit les informations suivantes :

- expression des fonctions de transfert du système (BO/BF, sans/avec correcteur)
- marges de gain et de phase en BO

De plus, 2 types de **fenêtres graphiques** apparaissent :

#### 1. **LTVIEWER** (visualiseur de systèmes linéaires) :

- pour les **options d'affichage**, cliquer sur le **bouton droit** de la souris : choix du type de courbe (Nichols (=Black), Bode, Nyquist, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, pôles et zéros...), du système (BF/BO, sans/avec correcteur), du zoom, affichage des caractéristiques (marges, temps...), affichage de la grille
- pour imprimer la figure : menu **File -> Print to Figure** (permet ensuite d'éditer la figure pour ajouter des légendes)
- pour fermer le visualiseur : **File-> Close Viewer**

#### 2. **FIGURE** :

- Possibilité d'éditer la figure : menu **Tools -> Add -> Text, Arrow** (pour insérer des commentaires en vue du compte-rendu)
- Pour imprimer : **File ->Print Preview** ou **Print**
- Pour enregistrer la figure dans un fichier image : **File ->Export** (avec choix du format : bmp ; eps ; tif ; gif ; jpg)

## 13.4 Annexe 4 : Listing du fichier Matlab black.m

```

%%%%%%%%%% TP1 AUTOMATIC : ABAQUE DE BLACK-NICHOLS %%%%%%%%%%%
clear all;
s=tf('s');
choix=input('choix=? [turbine=0]; navette=1; P&D=2; L.E.M.=3 ');
if isempty(choix),choix=0;end
H=input('H (retour) =?[1] ');if isempty(H),H=1;end
if choix==0, %TURBINE: correction P
    G1=input('G1=?[1/(s+0.1)] ');if isempty(G1),G1=1/(s+0.1);end
    G2=input('G2=?[0.5/(s^2+3*s+2)] ');if isempty(G2),G2=0.5/(s^2+3*s+2);end
    G0=series(G1,G2); %connection des blocs en serie
    K=input('gain K=[1]?');if isempty(K), K=1;end
    GC=K+0*s %ajout de 0*s pour pouvoir tracer un bode
elseif choix==1, %NAVETTE: correction PI
    G0=((0.05*s+1)^2)/((s^2+5*s+25)*(10*s+1)*(0.01*s+1));
    K1=input('K1=?[0] ');if isempty(K1),K1=0;end
    K2=input('K2=?[1] ');if isempty(K2),K2=1;end
    GC=K2+K1/s
elseif choix==2, %SYSTEME H(p): correction P&D
    G0=10/(s*(0.1*s+1)*(s+1));
    Kc=input('Kc=?[1] ');if isempty(Kc),Kc=1;end
    Td=input('Td=?[1] ');if isempty(Td),Td=1;end
    GC=Kc*(Td*s+1)
elseif choix==3, %MODULE LUNAIRE:correction P&D approchee (avance de phase)
    J=0.25;
    G0=2/(J*s^2);
    Kc=input('Kc=?[1] ');if isempty(Kc),Kc=1;end
    Td=input('Td=?[1] ');if isempty(Td),Td=1;end
    a=input('a=?[2] (typ.{2...20} ');if isempty(a),a=2;end
    GC=Kc*(a*Td*s+1)/(Td*s+1)
end
disp('FTBO SANS CORRECTEUR:');
BOSC=series(G0,H) %connection des blocs -> FTBO
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=MARGIN(BOSC);
MG_MGdB_MP_Wmg_Wmp=[Gm,20*log10(Gm),Pm,Wcg,Wcp]
disp('FTBO AVEC CORRECTEUR:');
G=series(GC,G0);
BOAC=series(G,H)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=MARGIN(BOAC);
MG_MGdB_MP_Wmg_Wmp=[Gm,20*log10(Gm),Pm,Wcg,Wcp]
disp('FTBF SANS / AVEC CORRECTEUR:');
BFSC=feedback(G0,H)
BFAC=feedback(G,H)
LTIVIEW('nichols',BOSC,'b',BOAC,'g')
LTIVIEW('step',BFSC,'b',BFAC,'g')
%%%%%%%%%abaque de Black %%%%%%%%%%
[MAG,PHASE,W] = BODE(BOAC);
phi=squeeze(PHASE);
mod=20*log10(squeeze(MAG));
Y=zeros(size(phi));

```

```
figure(1),
subplot(2,2,1)
plot(phi,mod,phi,Y,'r');axis tight
grid on;title('plan de Black - FTB0'),xlabel('Phase (deg)'),ylabel('Gain (dB)')
subplot(2,2,2)
bode(GC),title('correcteur seul')
subplot(2,2,3)
PZMAP(G0),title('systeme seul')
subplot(2,2,4)
bode(BOSC,BOAC,BFSC,BFAC),title('boucle ouverte/fermee')
%%%%%%%%FIN%%%%%%%%%
```

## **13.5 Annexe 5 : Abaques Papiers**

# DIAGRAMME AMPLITUDE - DÉPHASAGE dit ABAQUE de BLACK

Abscisses : phase de  $y$  en degrés (1 division =  $10^\circ$ )

Ordonnées :  $20 \log |y|$  (1 division = 2 dB)

Contours d'amplitude de  $20 \log \left| \frac{y}{1+y} \right|$

Contours de déphasage de  $\frac{y}{1+y}$

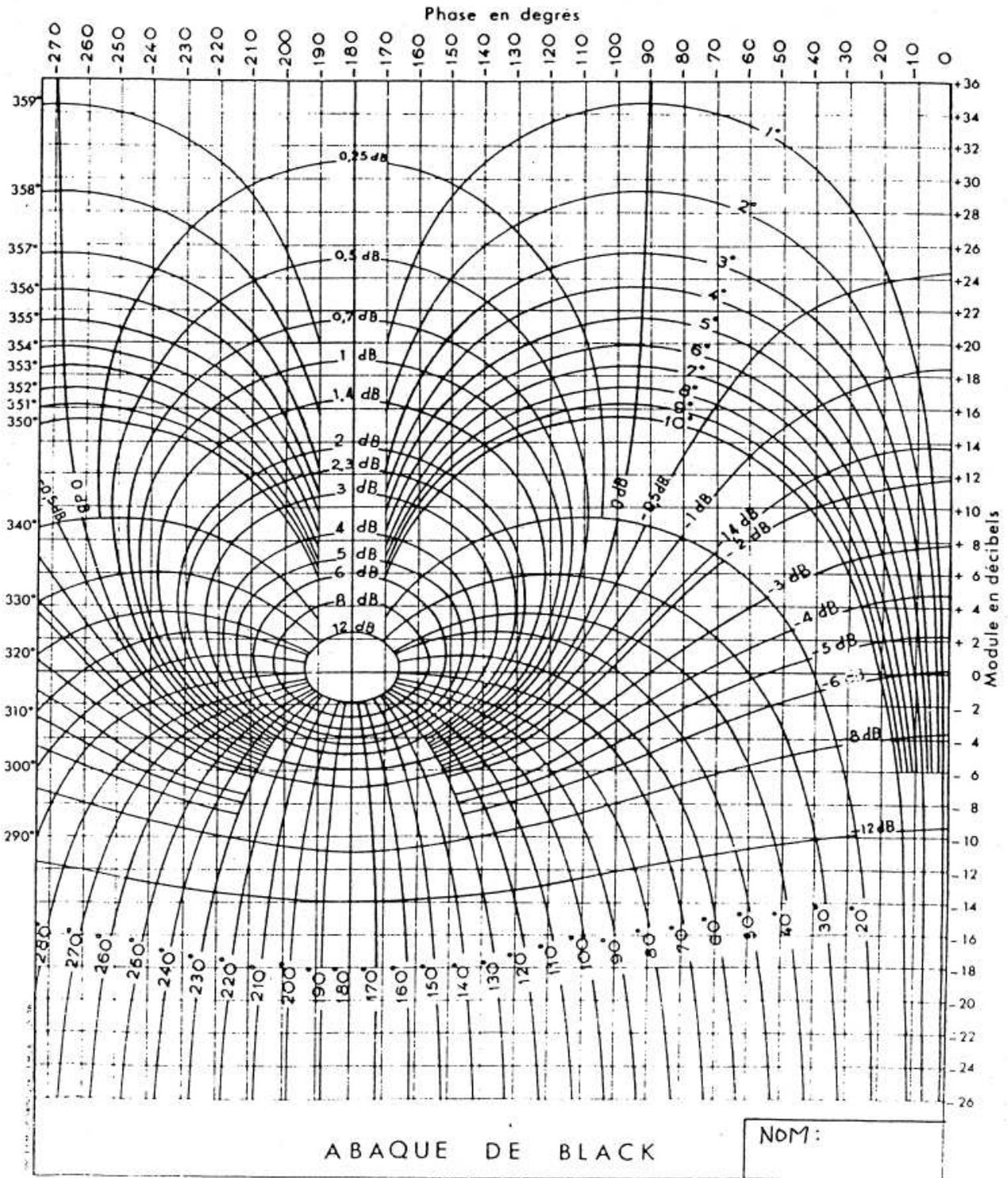


FIGURE 13.3 – Abaque de Black-Nichols.

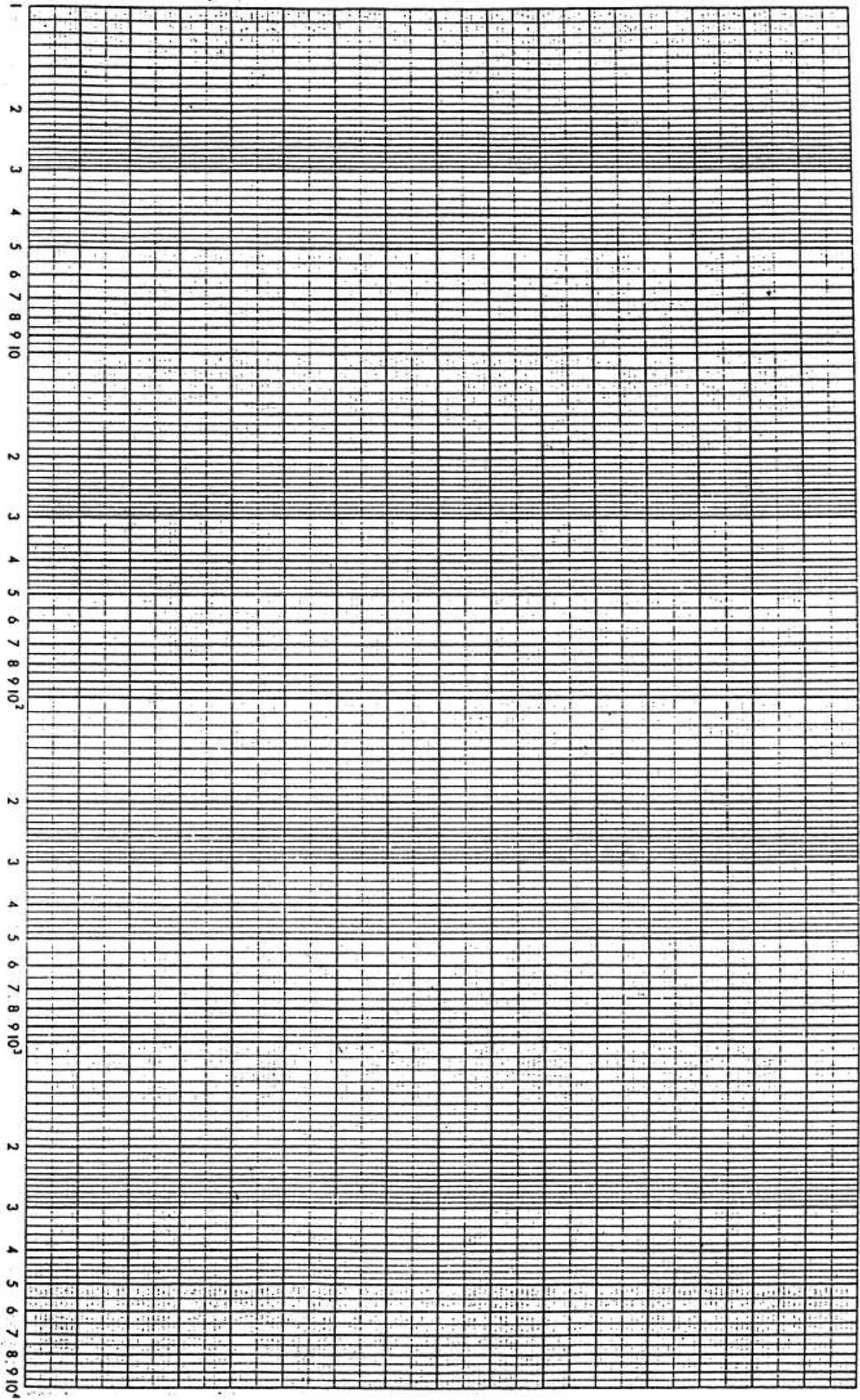


FIGURE 13.4 – Papier semilog.



# Bibliographie

- [1] Olivier Le Gallo. Automatique des systèmes mécaniques : cours, travaux pratiques et exercices corrigés. Sciences Sup. Dunod, Paris, 2009. ref :629.8LEG49874.
- [2] S. Laplace. Asservissements linéaires - Cours, TD, TP. IUT de Bayonne, Dpt Informatique, Option Informatique des Systèmes Industriels, Anglet, 2003.
- [3] C. Sermonade and A. Toussaint. Régulation, volume Tomes 1, 2, 3 of Etapes Mémento. Editions Nathan, Paris, 1994.
- [4] H. Bühler. Electronique de réglage et de commande. Dunod, 1987.
- [5] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. Automatique des systèmes continus. Eléments de cours et exercices résolus. Editions Technip, Paris, 1997. ref. 629.8 SUE 27757.
- [6] Patrick Rousseau. Asservissements linéaires continus. Technosup. Ellipses, Paris, 2004.
- [7] S. Le Ballois and P. Codron. Automatique, Systèmes linéaires et continus. Sciences Sup. Dunod, Paris, 2nd edition, 2006. Cours et exercices corrigés IUT BTS Licence.
- [8] M. Rivoire, J.L. Ferrier, and J. Groleau. Exercices d'automatique, volume 2. Eyrolles, Paris, 1995. ref. 629.8 RIV 23456-2.