



HAL
open science

Mathématique du signal

Franck Luthon

► **To cite this version:**

| Franck Luthon. Mathématique du signal. École d'ingénieur. France. 2019. cel-02192550

HAL Id: cel-02192550

<https://hal.science/cel-02192550v1>

Submitted on 23 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mathématique du Signal - MATH5

Franck Luthon

Email : Franck.Luthon@univ-pau.fr

**IUT Bayonne-Pays Basque, Département Génie Industriel
2 allée du Parc Montaury, 64600 Anglet**

[http ://www.iutbayonne.univ-pau.fr/~luthon/math0.pdf](http://www.iutbayonne.univ-pau.fr/~luthon/math0.pdf)¹

25 juin 2019

1. Ce document peut être reproduit sous réserve d'en citer la source.

Table des matières

1	RAPPEL DE PREREQUIS	13
1.1	Trigonométrie	13
1.2	Développements limités usuels au voisinage de zéro	15
1.3	Décomposition des fractions rationnelles : $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	16
1.4	Fonctions hyperboliques directes	17
1.5	Fonctions hyperboliques réciproques	17
1.6	Les coniques	18
2	SUITES NUMERIQUES	19
2.1	Mots-clés	19
2.2	Définition	19
2.3	Limite	19
2.4	Critères de convergence	19
2.4.1	Théorème	19
2.4.2	Suites adjacentes	20
2.4.3	Critère de Cauchy	20
2.5	Exemple fondamental	20
2.6	Suites récurrentes	20
2.6.1	Définition	20
2.6.2	Suite Arithmétique	20
2.6.3	Suite Géométrique	21
2.7	Exercices	21
2.7.1	Nature des suites par comparaison	21
2.7.2	Suite associée	21
2.7.3	Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique	21
2.7.4	Paradoxes grecs	21
2.7.5	Suite définie implicitement	22
2.7.6	Suite de Fibonacci	22
2.7.7	Convergence des suites	22
2.7.8	Suite récurrente	22
3	SERIES NUMERIQUES	23
3.1	Mots-clés :	23
3.2	Définition - Propriétés de convergence	23
3.2.1	Série géométrique	23
3.2.2	Condition nécessaire de convergence	23
3.2.3	Condition de Cauchy	23
3.2.3.0.1	Contre-Exemple : Série harmonique	24
3.2.4	Série absolument convergente	24
3.3	Séries à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$	24
3.3.1	CNS de convergence	24
3.3.2	Comparaison entre séries	24
3.3.2.1	Exemples	24
3.3.2.2	Critère de convergence :	24

3.3.3	Comparaison de la nature d'une intégrale généralisée et de la nature d'une série	24
3.3.3.1	Preuve	25
3.3.4	Critère de Riemann : Règle $n^\alpha u_n$	25
3.3.4.1	Exemple	25
3.3.5	Comparaison d'une série à termes positifs et d'une série géométrique	25
3.3.5.1	Théorème	25
3.3.5.2	Critère de Cauchy	25
3.3.5.2.1	Preuve :	25
3.3.5.3	Critère de d'Alembert	25
3.3.5.4	Applications	25
3.4	Séries alternées	26
3.4.1	Définition	26
3.4.2	Théorème	26
3.4.2.1	Preuve	26
3.4.2.2	Exemple 1 : Série harmonique alternée	26
3.4.3	Règle d'Abel	26
3.5	Résumé	26
3.5.1	Exemple 2	26
3.6	Séries Entières	26
3.6.1	Définition	26
3.6.2	Rayon de convergence	27
3.6.2.1	Lemme d'Abel	27
3.6.2.1.1	Preuve	27
3.6.2.2	Définition du rayon de convergence R	27
3.6.3	Détermination du rayon de convergence	27
3.6.3.1	Critère de Cauchy	27
3.6.3.1.1	Règle de Cauchy	27
3.6.3.1.2	Preuve :	27
3.6.3.2	Critère de d'Alembert	27
3.6.3.2.1	Règle de d'Alembert	27
3.6.4	Exemples	27
3.7	Exercices	28
3.7.1	Nature des séries	28
3.7.2	Séries alternées	28
3.7.3	Comparaison avec une intégrale	28
3.7.4	Calcul de somme de série	28
4	DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER	29
4.1	Séries trigonométriques	29
4.2	Théorème de Fourier	29
4.3	Condition de validité du DSF	29
4.4	Développement en un point de discontinuité (Phénomène de Gibbs)	30
4.5	DSF d'une fonction définie dans un intervalle quelconque	30
4.5.1	Remarque	30
4.6	Propriétés de symétrie	31
4.6.1	Fonction paire	31
4.6.2	Fonction impaire	31
4.7	Formule de Bessel-Parseval	31
4.7.1	Remarque : Définition de la valeur efficace	31
4.8	Intégration et dérivation	31
4.8.1	Intégration	32
4.8.2	Dérivation	32
4.9	DSF Exponentiel	33
4.10	Démonstration de la formule de Wallis	33

4.10.1	Développement en série de Fourier de $f(x) = \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in R$	33
4.10.2	Calcul de $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$	34
4.10.3	Formule de Wallis	34
4.11	Tableau de DSF	34

5 FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE 37

5.1	Nombre Complexe	37
5.1.1	Définition	37
5.1.2	Somme	37
5.1.3	Produit	38
5.1.4	Quotient	38
5.1.5	Complexe Conjugué	38
5.1.6	Racines nièmes	38
5.2	Fonction de la Variable Complexe	38
5.2.1	Continuité	38
5.2.2	Dérivabilité	39
5.2.2.1	Exemple 1	39
5.2.2.2	Exemple 2	39
5.2.3	Relations de Cauchy	39
5.2.3.1	Réciproque	39
5.2.4	Holomorphie et Analyticité	39
5.2.4.1	Définitions	39
5.2.4.2	Propriétés	40
5.2.4.3	Exemples de fonctions holomorphes	40
5.2.4.4	Remarque	40
5.2.5	Harmonicité	40
5.2.5.1	Réciproque	40
5.2.6	Points Singuliers	41
5.2.6.1	Définition	41
5.2.6.2	Singularité Artificielle	41
5.2.6.3	Pôle d'ordre p	41
5.2.6.3.1	Exemple :	41
5.2.6.3.2	Définition :	41
5.2.6.4	Points Singuliers Essentiels	41
5.2.6.5	Cas du point à l'infini	41
5.2.7	Notion de Point Critique	41
5.2.7.1	Exemple	42
5.3	Fonction Définie par une Série Entière	42
5.3.1	Série de la Variable Complexe	42
5.3.1.1	Convergence absolue	42
5.3.2	Rappel sur la Convergence des Séries	43
5.3.2.1	Condition Nécessaire de Convergence	43
5.3.2.2	Théorème de Cauchy	43
5.3.2.2.1	Remarque :	43
5.3.2.3	Critère de Cauchy	43
5.3.2.4	Critère de d'Alembert	43
5.3.2.5	Comparaison avec une Intégrale	43
5.3.2.6	Série de Riemann	43
5.3.3	Convergence Uniforme (C.U.)	43
5.3.3.1	Théorème de Cauchy	43
5.3.3.2	Règle de Weierstrass	44
5.3.3.3	Convergence Absolue \Rightarrow Convergence Uniforme	44
5.3.3.4	Critère d'Abel	44
5.3.3.4.1	Cas Particulier :	44

5.3.3.5	Intégration d'une Série C.U.	44
5.3.4	Série Entière de la Variable Complexe	44
5.3.4.1	Définition	44
5.3.4.2	Convergence	44
5.3.4.3	Théorème	45
5.3.4.4	Cas particulier	45
5.3.4.5	Généralisation	45
5.3.5	Développement en Série de Taylor (DST)	45
5.3.5.1	Développement de Mac-Laurin	45
5.3.5.2	Fonction Analytique	45
5.3.6	Fonctions Entières	45
5.3.6.1	Fonction Exponentielle $f(z) = e^z$	45
5.3.6.2	Fonctions Trigonométriques	46
5.3.6.3	Fonctions hyperboliques	46
5.3.6.3.1	Remarque	46
5.3.6.3.2	Démonstration de la possibilité d'avoir $\cos z > 1$	46
5.3.7	Série Géométrique et fonction $\log(1+z)$	46
5.3.7.1	Convention	46

6 TRANSFORMÉE DE LAPLACE 47

6.1	Intégrale de Laplace	47
6.1.1	Définition	47
6.1.2	Convergence	47
6.1.2.1	Démonstration	47
6.1.3	Quelques cas particuliers	48
6.1.3.1	Fonction unité de Heaviside $H(t)$ et $H(t-t_0)$ (parfois notée $u(t)$)	48
6.1.3.2	Impulsion	48
6.1.3.3	Impulsion de Dirac	49
6.1.3.4	Fonction $f(t) = t^\nu$	49
6.1.3.5	Fonctions $f(t) = e^{at}$ et $f(t) = t^n e^{at}$	49
6.2	Règles de Heaviside	49
6.2.1	Linéarité de la TL	49
6.2.2	Première règle de Heaviside	49
6.2.3	Deuxième règle de Heaviside	50
6.2.4	Applications	50
6.2.4.1	Recherche de l'original	50
6.3	Inversion de la transformée de Laplace	51
6.3.1	Définition de $H(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner	51
6.3.2	Intégrale de Mellin-Fourier	51
6.3.3	Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier	51
6.3.3.1	Contour de Bromwich - Lemme de Jordan généralisé	51
6.3.3.1.1	Contour de Bromwich d'une fonction $\phi(z)$	51
6.3.3.1.2	Intégrale de Bromwich-Wagner	51
6.3.3.1.3	Lemme de Jordan généralisé	52
6.3.3.1.4	Contour équivalent si $\phi(z)$ satisfait le lemme	52
6.3.3.2	Principe de calcul	52
6.3.3.3	Exemple d'une fonction uniforme	53
6.4	Règles opératoires du calcul symbolique [1]	53
6.4.1	Linéarité	53
6.4.2	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre	53
6.4.3	Changement d'échelle	53
6.4.4	Translation de la variable concrète t et symbolique p	53
6.4.5	Théorème du produit de Borel (convolution)	54
6.4.6	Dérivation et intégration par rapport à t	54

6.4.7	Théorèmes de la valeur initiale et finale	54
6.4.8	Dérivation et intégration par rapport à la variable p	54
6.5	Application de la TL : Fonction de transfert	55
6.5.1	Système linéaire SLIT	55
6.5.2	Réponse impulsionnelle et Convolution	55
6.5.3	Distribution de Dirac	55
6.5.4	Intérêt de la TL pour l'étude des Systèmes	56
6.5.5	Réponse harmonique	56
6.6	Equation différentielle linéaire à coefficients constants	57
6.6.1	Méthode classique	57
6.6.1.1	Solution générale sans 2nd membre	57
6.6.1.2	Solution particulière avec 2nd membre	57
6.6.2	Méthode symbolique	57
6.7	Vademecum du Calcul Symbolique	58
7	TRANSFORMEE DE FOURIER	59
7.1	Définition	59
7.2	Règles opératoires	59
7.2.1	Linéarité	59
7.2.2	Transposition	59
7.2.3	Conjugaison	60
7.2.4	Changement d'échelle	60
7.2.5	Translation de la variable concrète t (Règle du retard)	60
7.2.6	Translation de la variable symbolique ν (Règle de modulation)	60
7.2.7	Dérivation et intégration par rapport à t	60
7.2.7.1	Généralisation	60
7.2.7.2	Intégration	61
7.2.8	Dérivation par rapport à ν	61
7.2.8.1	Généralisation	61
7.2.9	Théorème de convolution	61
7.2.10	Formule de Parseval-Plancherel	61
7.2.10.1	Cas particulier	61
7.2.11	Egalité fondamentale (TF des distributions)	61
7.2.11.1	Moyen mnémotechnique (Fig. 7.1)	62
7.3	Relation entre TF et TL	62
7.3.1	Cas où on suppose que $f(t) = f(t) \cdot H(t)$	62
7.3.1.1	Transformée inverse	62
7.3.2	Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$	62
7.4	TF de distributions	62
7.4.1	TF de $\delta(t - a)$	62
7.4.2	TF de $f(t) = 1$ au sens des distributions	63
7.4.3	TF de $\exp(i2\pi at)$	63
7.4.4	TF de $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$	63
7.4.5	Fonctions propres de la TF	63
7.4.5.1	Peigne $p(t)$	63
7.4.5.2	Loi de Laplace-Gauss	63
7.5	Vademecum pour la Transformée de Fourier	64
8	TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE	65
8.1	Introduction	65
8.2	Conversion analogique-numérique	65
8.2.1	Échantillonnage et quantification	65
8.2.2	Echantillonnage temporel	65
8.3	Transformée de Fourier Discrète	67

8.3.1	TFDT d'un signal causal	67
8.3.2	Troncature temporelle	67
8.3.3	Pondération temporelle	68
8.3.4	Echantillonnage fréquentiel - TFD	69
9	TRANSFORMEE EN Z	73
9.1	Introduction sur l'échantillonnage	73
9.1.1	Rappel sur les distributions	73
9.1.1.1	Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac)	73
9.1.1.2	Distribution	73
9.2	TL d'une fonction échantillonnée	74
9.3	TZ des puissances de t	74
9.4	TZ de $f(t)e^{-at}$	74
9.4.1	Théorème	74
9.5	Translation temporelle	75
9.5.1	Retard	75
9.5.2	Avance	75
9.6	Théorème de la valeur initiale	75
9.7	Théorème de la valeur finale	75
9.7.1	Preuve	76
9.8	Formule d'inversion	76
9.9	Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$	77
9.10	Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus	77
9.10.1	Rappel sur les résidus	78
9.11	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre	78
9.12	Théorème de Parseval	78
9.13	Théorème de convolution discrète	78
9.14	Vademecum sur la Transformée en Z	80
10	RECAPITULATIF SUR LES TRANSFORMEES	81
10.1	Rappel sur les distributions	81
10.2	Développement en Série de Fourier	83
10.3	Tableau récapitulatif de la TL	84
10.4	Tableau récapitulatif de la TF	85
10.5	Tableau récapitulatif de la TZ	86
10.6	Tableau synthétique des transformées	87
11	TD - FRACTIONS, INTEGRATION	89
11.1	Décomposition des fractions rationnelles	89
11.2	Intégration	90
12	TD - EQUATIONS DIFFERENTIELLES	91
12.1	EDL du 1er ordre : Circuit RL série	91
12.2	EDL du second ordre	91
12.3	Circuit RLC parallèle	91
12.4	Régime apériodique	92
12.5	Propagation d'un virus	92
12.5.1	Résolution par changement de fonction	92
12.6	NB : Révisions complémentaires	92
13	TD - TRANSFORMEE DE LAPLACE	93
13.1	Calculs de transformées	93
13.2	Résolution d'une équation différentielle	93
13.3	Calcul d'un original	93
13.4	Application électrique : Circuit RC	94

13.5	Circuit RLC série	94
13.6	Généralisation de la notion d'impédance	94
13.7	Etude de circuit	94
13.8	Peigne de Dirac et Produit de Convolution - Echantillonnage	94
13.9	Résolution d'équation différentielle par TL	94
14	TD - FONCTION DE TRANSFERT	95
14.1	Bode Nyquist du premier ordre	95
14.1.1	Fonctions élémentaires	95
14.1.2	Fonctions composées	95
14.2	Amplificateur à résistance compensée	95
14.3	Filtre correcteur à avance de phase	96
15	TD - SERIES DE FOURIER	97
15.1	DSF d'un signal carré	97
15.2	DSF : Redressement double alternance	97
15.3	DSF d'un signal en dents de scie	97
15.4	Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire	97
15.5	DSF Onduleur	98
16	TD - TRANSFORMEE DE FOURIER	99
16.1	Calculs de transformée de Fourier	99
16.2	Transformée de Fourier : Modulation d'amplitude et analyse spectrale	99
16.3	Transformée de Fourier : diffusion de la chaleur	100
17	TD - TRANSFORMEE EN Z	101
17.1	Filtrage numérique	101
17.2	Transformation directe et inverse	101
17.3	Echantillonnage	101
17.4	Résolution d'équation de récurrence par la TZ	101
18	TD - SUITES & SERIES NUMERIQUES	103
18.1	Exemple assassin de raisonnement par récurrence	103
18.2	Calcul de sommes de séries numériques	103
18.3	Convergence des séries entières	103
18.4	Décomposition en séries de Fourier et Calcul de séries	104
19	CONTRÔLES	105
19.1	Sujet DUT Info No1	105
19.1.1	Transformée de Laplace	105
19.1.2	Transformée de Fourier	105
19.1.3	Transformée en Z	106
19.2	Sujet DUT Info 2005	107
19.2.1	Transformée de Laplace	107
19.2.2	Transformée en Z	107
19.3	Sujet MATHa 2007	108
19.3.1	Trigonométrie	108
19.3.2	Nombre Complexe	108
19.3.3	Dérivation	108
19.3.4	Intégration	109
19.3.5	Equation différentielle	109
19.4	Sujet MATHd 2008	109
19.4.1	Transformée de Laplace	109
19.4.2	Décomposition en série de Fourier	110
19.4.3	Transformée de Fourier : Modulation d'amplitude et analyse spectrale	110

19.5	Sujet MATHd 2011	110
19.5.1	Développement en série de Fourier	110
19.5.2	Calcul de transformées de Laplace	110
19.5.3	Calcul d'un original	110
19.5.4	Equation différentielle	110
19.5.5	Etude d'une fonction périodique	110
19.5.6	Transformée de Fourier	111
19.6	Sujet MATHd 2012	111
19.6.1	Décomposition en séries de Fourier	111
19.6.2	Résolution d'équation différentielle par TL	112
19.6.3	Transformée de Laplace : on traitera un des 2 filtres au choix	112
19.6.3.1	Filtre 1	112
19.6.3.2	Filtre 2	112
19.6.4	Transformée de Fourier	112
19.7	Sujet MATH5 2014	112
19.7.1	Série Entière	112
19.7.2	Décomposition en Série de Fourier	112
19.7.3	Transformée de Laplace : résolution d'équation différentielle	112
19.7.4	Transformée de Fourier : signal triangle	113
19.8	Sujet MATH5 2015	113
19.8.1	Reconstitution d'un signal échantillonné	113
19.8.1.1	Développement en série de Fourier (DSF)	113
19.8.1.2	Transformée de Fourier TF et TFD	114
19.8.2	TL : circuit RL série excité par une rampe	114
19.9	Sujet MATH5 2016	115
19.9.1	Développement en Séries de Fourier (DSF)	115
19.9.2	Application de la Transformée de Laplace (TL)	116
19.9.3	Calcul d'une Transformée de Fourier (TF)	116
19.10	Sujet MATH5 2017	117
19.10.1	Séries de Fourier : Etude de pompe à pistons	117
19.10.2	Transformée de Laplace : Etude de cuve de mélange	118
19.11	Sujet MATH5 2018	120
19.11.1	Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie exponentiellement	120
19.11.2	Développement en Série de Fourier	120
19.11.3	Transformée de Laplace (TL)	120

20 TRAVAUX PRATIQUES 121

20.1	Prérequis et Objectifs	121
20.2	Introduction à Matlab	121
20.2.1	Principales caractéristiques	121
20.2.2	Environnement de travail	121
20.2.2.1	Session MATLAB	121
20.2.2.2	Contrôle de session	122
20.2.3	Langage de programmation	122
20.2.3.1	Principe de la syntaxe	122
20.2.3.2	Exemples d'instructions	122
20.2.3.3	Opérateurs et constantes	123
20.2.3.4	Contrôle de flux de données	123
20.2.3.5	Création d'une fonction externe	123
20.2.4	Bibliothèque de fonctions	123
20.2.4.1	Fonctions graphiques	123
20.2.4.2	Interaction utilisateur	124
20.2.4.3	Interaction fichiers externes	124
20.2.4.4	Manipulation de matrices	124

20.2.4.5	Fonctions mathématiques	124
20.2.4.6	Signaux de base	124
20.3	TP - Séance d'Initiation	126
20.3.1	Manipulation de matrices	126
20.3.2	Manipulation de polynômes	126
20.3.3	Représentation graphique d'un signal temporel	126
20.3.4	Visualisation 3-D et Affichage d'Image	127
20.3.5	Programmation et Affichage du DSF d'une fonction au choix	127
20.4	TP - Equations différentielles	128
20.4.1	Toolbox Symbolic Math	128
20.4.2	ED Linéaire du 1er ordre	128
20.4.3	ED Linéaire du 2e ordre	128
20.4.4	Circuit RLC parallèle	128
20.5	TP - Transformée de Laplace	129
20.5.1	Définition	129
20.5.2	Calculs de quelques TL usuelles	129
20.5.3	Résolution d'équation différentielle linéaire	129
20.6	TP - Fonction de transfert	130
20.6.1	Rappels	130
20.6.2	Amplificateur à Résistance Compensée	130
20.7	TP - Transformée de Fourier	131
20.7.1	Rappels	131
20.7.2	TF Continue : Fonctions usuelles	131
20.7.3	TF Discrète : Analyse spectrale	131
20.7.3.1	Etude du théorème de Shannon	131
20.7.3.2	Influence de la troncature temporelle	131
20.7.3.3	Etude de l'écrêtage	132
20.7.4	Annexes	132
20.7.4.1	Signaux tests	132
20.7.4.2	Fonctions internes	132
20.7.4.3	Fonctions externes	132
20.8	TP - Transformée en Z	134
20.8.1	Rappel sommaire	134
20.8.2	Fonctions usuelles	134
20.8.3	Filtre numérique RII	134
20.8.4	Annexe théorique pour TP TZ	135
20.9	TP - Filtrage de Signaux	136
20.9.1	Filtrage par moyennage	136
20.9.2	Filtrage par troncature du spectre	136
20.9.3	Simulations	137
20.10	Consignes de Rédaction du Compte-Rendu de TP	138
20.10.1	Choix de sujets	138
20.10.2	Délivrables	138
20.10.3	Critères d'évaluation	138

Chapitre 1

RAPPEL DE PREREQUIS

1.1 Trigonométrie

RELATION FONDAMENTALE : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

PARITE : $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

SYMETRIE :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \\ \sin(\pi - \theta) &= -\sin(\pi + \theta) = \sin \theta \end{aligned}$$

ADDITION :

$$\left. \begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \\ \cot(a+b) &= \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} & \cot(a-b) &= \frac{1 + \cot a \cot b}{\cot b - \cot a} \end{aligned}$$

ANGLE DOUBLE :

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \Rightarrow \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} & \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{aligned}$$

SOMME-DIFFERENCE-PRODUIT :

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a - \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \sin(a+b) \sin(a-b) &= \cos^2 b - \cos^2 a & \tan a \tan b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)} \\ \cos(a+b) \cos(a-b) &= \cos^2 b - \sin^2 a & \frac{\tan a}{\tan b} &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} \end{aligned}$$

AUTRES RELATIONS :

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$$

soit : $t = \tan \frac{a}{2}$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \quad \cot a = \frac{1-t^2}{2t}$$

ANGLES REMARQUABLES :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

RELATIONS ENTRE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES :

	sin	cos	tan	cot
$\sin x =$	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\pm \tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x =$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	cot x

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

DERIVEES :

fonction	sin x	cos x	tan x	cot x	arcsin x	arccos x	arctan x
dérivée	cos x	-sin x	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

LIMITES ET INTEGRALES USUELLES :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

FORMULES D'EULER :

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i}$$

1.2 Développements limités usuels au voisinage de zéro

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \text{ car } a^x = \exp(x \ln a)$$

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-p+1)x^p}{p!} + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\arg \tanh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n) \cdot (2n+1)} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\arg \sinh x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n) \cdot (2n+1)} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

1.3 Décomposition des fractions rationnelles : $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

1. **CHERCHER LA PARTIE ENTIÈRE** : si $n \geq m$

2. **POLE REEL SIMPLE** : $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)Q(x)}$ avec $Q(a) \neq 0$

Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A}{x-a} + \dots$ où : $A = (x-a)F(x) \Big|_{x=a}$

Autre méthode (si fraction compliquée) : $A = \frac{P(a)}{Q'(a)}$

3. **POLE REEL MULTIPLE** : $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)}$ avec $Q(a) \neq 0$

Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots$

Poser $y = x - a \rightarrow F = \frac{P_1(y)}{y^k Q_1(y)}$.

On divise $P_1(y)$ par $Q_1(y)$ selon les puissances croissantes à l'ordre $k-1$.

4. **POLES COMPLEXES CONJUGUES** :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^k Q(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ (a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2 \text{ racines de } x^2 + px + q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

(a) $k = 1$

On décompose dans \mathbb{C} et on regroupe les 2 termes obtenus (car $B = \bar{A}$)

Forme de la décomposition : $F(x) = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-\bar{a}} \right) + \dots = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \dots$

avec : $A_1 = 2\text{Re}[A]$ et $B_1 = -2\text{Re}[A\bar{a}]$

(b) $k \geq 1$, Q simple

On soustrait de F les éléments simples issus de $Q \Rightarrow$ nouvelle fraction simplifiée.

On se ramène à : $F_1(x) = \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^k}$. On divise P_1 par $x^2 + px + q$ (selon les puissances décroissantes). Et on recommence.

(c) $k \geq 2$, Q moins simple

Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k} + \dots$$

On calcule : $(x^2 + px + q)^k F(x) \Big|_{x=a} \Rightarrow \frac{P(a)}{Q(a)} = A_k a + B_k \Leftrightarrow P(a) = Q(a) [A_k a + B_k]$

or $a^2 = -pa - q$ donc on remplace toutes les puissances de a par une combinaison linéaire de 1 et a .

On obtient : $a \times [\text{expression n}^\circ 1 \text{ en } A_k \text{ et } B_k] + 1 \times [\text{expression n}^\circ 2 \text{ en } A_k \text{ et } B_k] = 0$

Or 1 et a forment un système linéaire indépendant $\Rightarrow \begin{cases} \text{expression n}^\circ 1 = 0 \\ \text{expression n}^\circ 2 = 0 \end{cases}$

On est donc ramené à résoudre un système linéaire en A_k et B_k . On forme ensuite :

$F(x) - \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}$ et on recommence pour avoir A_{k-1} et B_{k-1} ...

NB : inutile de déterminer a .

5. **ISSUES DE SECOURS**

(a) donner à x des valeurs particulières (0 ; 1 ; -1 ...)

(b) calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x)$

(c) méthode d'identification générale avec coefficients indéterminés

(d) calculer $(x-a)^k F(x) \Big|_{x=a}$ pour le terme de plus haut degré

(e) utiliser la parité.

(f) faire une vérification *a posteriori*.

1.4 Fonctions hyperboliques directes

DEFINITIONS :

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \coth x &= \frac{1}{\tanh x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cosh(ix) \\ \cosh x &= \cos(-ix) \\ \sin x &= -i \sinh(ix) \\ \sinh x &= -i \sin(ix) \end{aligned}$$

DERIVEES :

fonction	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
dérivée	$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\ \sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \\ \tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \end{aligned}$$

1.5 Fonctions hyperboliques réciproques

DEFINITIONS

$$\begin{aligned} y = \arg \sinh x & \Leftrightarrow x = \sinh y \\ x \in \mathfrak{R} & y \in \mathfrak{R} \\ y = \arg \cosh x & \Leftrightarrow x = \cosh y \\ x \geq 1 & y \geq 0 \\ y = \arg \tanh x & \Leftrightarrow x = \tanh y \\ -1 < x < 1 & y \in \mathfrak{R} \\ y = \arg \coth x & \Leftrightarrow x = \coth y \\ x > 1 \text{ (resp. } x < -1) & y > 0 \text{ (resp. } y < 0) \end{aligned}$$

EXPRESSIONS LOGARITHMIQUES

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathfrak{R}, \arg \sinh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ \forall x \geq 1, \arg \cosh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ \forall |x| < 1, \arg \tanh x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ \forall |x| > 1, \arg \coth x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

DERIVEES

$$\begin{aligned} (\arg \sinh x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ (\arg \cosh x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ (\arg \tanh x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{sur }]-1; +1[\\ (\arg \coth x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{sur }]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

N.B :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \quad \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \right)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \forall x \in \mathfrak{R}, \quad x \neq 1, \quad x \neq -1, \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

1.6 Les coniques

Equation polaire : $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ avec : $\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ p > 0 \\ e > 0 \end{cases}$

Selon les valeurs de e , on obtient toutes les coniques :

1. ellipse : $0 < e < 1$
2. parabole : $e = 1$
3. hyperbole : $e > 1$

Equations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } r + e r \cos \theta = p \Leftrightarrow r = p - e x$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (p - e x)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) x^2 + y^2 = p^2 - 2p e x$$

1. si $e = 1$: $y^2 = p^2 - 2p x$ parabole
2. si $e \neq 1$:

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{p e}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

$$(1 - e^2) \underbrace{X^2}_{X^2} + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)}} = 1$$

(a) si $0 < e < 1$: on pose : $a^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$ $b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$

d'où : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse

(b) si $e > 1$: on pose : $a^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$ $b^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1}$

d'où : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbole

Chapitre 2

SUITES NUMERIQUES

2.1 Mots-clés

Suite arithmétique, Suite géométrique, Raison, Terme général d'une suite, Limite, Convergente, Divergente, Majorée, Minorée, Récurrenente, Somme partielle [2, 3, 4, 5]

2.2 Définition

On appelle suite à valeurs dans un ensemble E , la donnée d'une partie finie I de N et d'une application :

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow E \\ n &\longrightarrow u_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

u_n est appelé terme général de la suite. Souvent $E = R$ et $I = N$.

Notation : la suite est notée $(u_n)_{n \in I}$

Définitions :

- suite croissante :
- suite décroissante :
- suite majorée :
- suite minorée :

2.3 Limite

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ admet pour limite l ($l \in R$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N / \forall n \in I, (n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Propriété : Unicité de la limite

Convergence : si $(u_n)_{n \in I}$ admet pour limite l , $l \in R$, on dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers l .
On note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

Dans tous les autres cas, la suite $(u_n)_{n \in I}$ diverge.

2.4 Critères de convergence

2.4.1 Théorème

Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) ; alors u_n converge.

2.4.2 Suites adjacentes

On dit que 2 suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ croît} \\ (v_n) \text{ décroît} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème : 2 suites adjacentes convergent et ont même limite.

2.4.3 Critère de Cauchy

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq n_0, p \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

Théorème : on a l'équivalence :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy \iff la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .

2.5 Exemple fondamental

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

si : $\alpha > 1$ u_n converge

si : $0 < \alpha \leq 1$ u_n diverge

Preuve :

1. u_n croît car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$
2. cas $\alpha > 1$: on majore la somme par une intégrale convergente
3. cas $0 < \alpha \leq 1$: on minore la somme par une intégrale divergente
4. cas $\alpha = 1$: d'après 3, $u_n \geq \log(n+1)$ et u_n ne peut être borné

2.6 Suites récurrentes

2.6.1 Définition

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Théorème : si f est continue et si u_n converge vers l alors $\boxed{f(l) = l}$

— récurrence affine :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r.u_n + a \end{cases}$$

— récurrence homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ avec $c \neq 0$

— récurrence linéaire à 2 termes : $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$

2.6.2 Suite Arithmétique

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \iff u_n = n.r + a$$

Formule fondamentale : somme partielle d'une suite arithmétique $\boxed{\sum_{n=0}^N u_n = (N+1) \left(a + \frac{Nr}{2} \right)}$

2.6.3 Suite Géométrique

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = r \cdot u_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow u_n = r^n \cdot a$$

Formule fondamentale : somme partielle d'une suite géométrique

$$\sum_{n=0}^N u_n = a \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$$

2.7 Exercices

2.7.1 Nature des suites par comparaison

Etudier la nature des suites, et celle de leurs sommes partielles :

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{1}{3+n^2}$; c) $\frac{1}{(\log n)^p}$; d) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; f) $\log n \log(1+\frac{1}{n}) \log(1+\frac{1}{n^2})$; g) $u_n = \frac{\log n}{n^2}$

2.7.2 Suite associée

Soit une suite S_n définie par :

$$S_1 = a; S_2 = b; S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2}; \dots; S_n = \frac{S_{n-1} + S_{n-2}}{2}$$

où a et b désignent deux nombres réels quelconques. On lui associe la suite $u_n = S_n - S_{n-1}$ (et $u_1 = S_1$).

1. Montrer que u_n est le terme général d'une progression géométrique convergente.
2. En déduire la valeur de S_n et sa limite quand $n \rightarrow \infty$.

2.7.3 Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique

Cet exercice trouve application en électrotechnique pour l'étude du courant triphasé.

$$\begin{aligned} u &= \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+kb) + \dots + \cos[a+(n-1)b] \\ v &= \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \dots + \sin(a+kb) + \dots + \sin[a+(n-1)b] \end{aligned}$$

On forme $u + iv$ en posant : $\alpha = \cos a + i \sin a = e^{ia}$; $z = \cos b + i \sin b = e^{ib}$.

1. Exprimer z^k puis αz^k .
2. Montrer que $u + iv$ est la somme partielle d'une suite géométrique
3. Calculer u et v .
4. Application 1 : montrer que

$$S = \sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 99^\circ = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$$

5. Application 2 : montrer que

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

2.7.4 Paradoxes grecs

Paradoxe de Zénon d'Elée (dit paradoxe de la flèche) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Paradoxe de l'obélisque

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2.2)$$

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (2.3)$$

$$V = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots \quad (2.4)$$

2.7.5 Suite définie implicitement

Soit f la fonction de R vers R définie par [2] :

$$f(t) = \frac{3t - 1}{t + 1}.$$

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique initialisée à $u_0 = 4$ et définie par le formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Représenter la fonction $y = f(t)$ et y superposer le diagramme itératif de u .
2. Calculer les vingt premiers termes de la suite.
3. Que peut-on conjecturer quant au comportement de cette suite ?
4. Démontrer que cette suite est bornée et étudier sa monotonie.
5. Justifier sa convergence.
6. Préciser sa limite.

2.7.6 Suite de Fibonacci

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Cette suite modélise la croissance des lapins.

2.7.7 Convergence des suites

1. Etudier la convergence de la suite numérique de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n, \text{ avec } : a \in R$$

2. suite négative $u_n = \frac{3-n}{n^2}$ pour : $n \geq 4$
3. suite positive $v_n = \frac{n+3*(-1)^n}{n^2}$ pour : $n \geq 4$
4. suite alternée $w_n = \frac{3-(-1)^n*n}{n^2}$ pour : $n \geq 4$

2.7.8 Suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par la récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ [6].

1. On prend $u_0 = 2$. Calculer u_1 . Montrer que la suite est décroissante et qu'elle est minorée.
2. On prend maintenant $u_0 = 0$. Montrer que la suite est alors croissante et majorée par 2.
3. Calculez u_n à partir de $u_0 = 2$, puis à partir de $u_0 = 0$ en arrêtant les calculs lorsque $|u_{n+1} - u_n| < 10^{-8}$. Conjecturer la valeur de la limite de la suite.
4. Confirmer par le calcul la valeur théorique de la limite de la suite récurrente (u_n) .

Chapitre 3

SERIES NUMERIQUES

3.1 Mots-clés :

Série de Riemann, Somme d'une série, Convergence, Divergence, Série Alternée, Série à termes positifs, Série Harmonique, Série géométrique, Convergence Absolue, Somme partielle, Série Entière, Rayon de Convergence, Cauchy, Critère de d'Alembert, Règle d'Abel. [7]

3.2 Définition - Propriétés de convergence

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On lui associe la suite des sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, alors on dit que la série (u_n) converge.

3.2.1 Série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{C}$. La série $(ar^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff |r| < 1$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

r est la raison géométrique.

3.2.2 Condition nécessaire de convergence

série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. NB : Ce n'est pas une condition suffisante

— Preuve : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

— Exemple 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{k}{4k-3}$$

$$|S_n - S_{n-1}| = |u_n| = \frac{n}{4n-3} \xrightarrow{\infty} \frac{1}{4} \Rightarrow \text{DIV}$$

— Contre-exemple 2 : Série harmonique

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ mais on ne peut pas conclure que la série converge.}$$

3.2.3 Condition de Cauchy

Série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \iff suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV $\implies \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall q > p > n_0, \|S_q - S_p\| < \varepsilon$
or $S_q - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_q$ d'où la condition de Cauchy sur les séries :

$$\text{série } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge } \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall q > p > n_0 \Rightarrow |u_{p+1} + \dots + u_q| < \varepsilon)$$

(Preuve : e.v.n. complet).

3.2.3.0.1 Contre-Exemple : Série harmonique On a : $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

3.2.4 Série absolument convergente

série $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \implies série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$$\left| \sum_0^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_0^{+\infty} |u_n|$$

Si $\sum(u_n)$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge, on parle de **semi-convergence**.

Cas de la série harmonique alternée.

3.3 Séries à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

3.3.1 CNS de convergence

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée, c'est-à-dire que : $\exists A \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq A$.

série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \iff suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée

3.3.2 Comparaison entre séries

Soient 2 séries (u_n) et (v_n) .

- si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.
- si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et si la série $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- si $\exists n_0 / \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$ alors :
série (v_n) converge \implies série (u_n) CV.
série (u_n) diverge \implies série (v_n) DIV

3.3.2.1 Exemples

Ex.1 : $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$ Ex.2 : $u_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n}$

3.3.2.2 Critère de convergence :

Hyp. : $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et $\exists n_1 \geq n_0 / \forall n > n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Conclusion : série $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \implies série (u_n) CV

série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV \implies série (v_n) DIV

3.3.3 Comparaison de la nature d'une intégrale généralisée et de la nature d'une série

Hypothèses :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow f(x) > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

- f décroissante sur $[a, +\infty[$, $a > 0$
- f localement intégrable sur \mathbb{R}^+
- $\lim_{+\infty} f = 0$
- On définit : $u_n = f(n) \geq 0$.

Alors : la série $\sum(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature

3.3.3.1 Preuve

On a l'encadrement :

$$u_1 + \dots + u_{n+1} \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq u_0 + \dots + u_n$$

3.3.4 Critère de Riemann : Règle $n^\alpha u_n$

La série de Riemann est définie par : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ série $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

D'où l'énoncé de la règle : soit une série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On forme $v_n = n^\alpha u_n$. On cherche un α tel que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = L}, L \geq 0.$$

Alors : $u_n \sim \frac{L}{n^\alpha}$ donc

$$\begin{cases} \text{si } \alpha > 1, (u_n) \text{ CV} \\ \text{si } \alpha \leq 1, (u_n) \text{ DIV} \end{cases}$$

3.3.4.1 Exemple

$$u_n = \left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^\alpha, \alpha > 0$$

On montre qu'elle ne converge que si $\alpha > 1/3$.

3.3.5 Comparaison d'une série à termes positifs et d'une série géométrique

3.3.5.1 Théorème

Soit $u_n \geq 0; \exists r, 0 < r < 1 | \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq r^n$

Série $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \Rightarrow série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

3.3.5.2 Critère de Cauchy

On forme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

— Si $l < 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

— Si $l > 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV

— Si $l = 1$, cas douteux.

3.3.5.2.1 Preuve : $l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon < 1 \Rightarrow u_n < (l + \varepsilon)^n$

3.3.5.3 Critère de d'Alembert

On forme :
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$$

— Si $l < 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

— Si $l > 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV

— Si $l = 1$, cas douteux.

3.3.5.4 Applications

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \text{ et } u_n = \frac{n!}{n^n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

3.4 Séries alternées

3.4.1 Définition

$$\begin{cases} u_{2n} \geq 0 \\ u_{2n+1} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_n \geq 0 \\ u_n = (-1)^n v_n \end{cases} \quad v_n = |u_n|$$

3.4.2 Théorème

si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3.4.2.1 Preuve

On calcule le reste de la série $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ où S_n est la somme partielle et $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est la limite.

On a toujours : $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

3.4.2.2 Exemple 1 : Série harmonique alternée

$$S = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

3.4.3 Règle d'Abel

Soit une série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^* \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \\ \text{suite } (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît} \end{cases}$$

On suppose que : $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N}, |v_0 + v_1 + \dots + v_n| \leq M$

Alors : la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

NB : ce théorème contient le précédent : $u_n = (-1)^n |u_n| = v_n \varepsilon_n$

3.5 Résumé

Méthodes d'étude des sommes S_n :

1. Comparaison à une autre série
2. Comparaison à une intégrale définie
3. Critères de Cauchy et de d'Alembert ; Règle $n^\alpha u_n$
4. Réduction de S_n si le terme général s'écrit : $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \Rightarrow S_n = \varphi(n) - \varphi(0)$
5. Emploi de la formule de Mac-Laurin ou de Taylor (D.S.E.)

3.5.1 Exemple 2

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha > 0$$

3.6 Séries Entières

3.6.1 Définition

C'est une série de terme général : $u_n = u_n(x) = a_n x^n$. On pose $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$.

3.6.2 Rayon de convergence

3.6.2.1 Lemme d'Abel

On suppose que : $\exists x_0 \in R$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée. Alors $\forall |x| < |x_0|$, la série $(a_n x^n)$ est absolument convergente.

3.6.2.1.1 Preuve

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

or une série géométrique de raison $r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ converge, CQFD.

3.6.2.2 Définition du rayon de convergence R

si $|x| < R$, la série $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.

si $|x| > R$, la série $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

3.6.3 Détermination du rayon de convergence

On applique les critères de convergence de Cauchy et d'Alembert à $u_n = a_n x^n$.

3.6.3.1 Critère de Cauchy

Si l'on pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$; alors le critère de Cauchy donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = l \cdot |x| \begin{cases} < 1 \rightarrow CV \\ > 1 \rightarrow DIV \end{cases}$$

3.6.3.1.1 Règle de Cauchy

Si $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{ a_n }$ alors $R = \frac{1}{l}$.

3.6.3.1.2 Preuve : En effet : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l} \rightarrow CV$

3.6.3.2 Critère de d'Alembert

De même, si l'on pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, alors le critère de d'Alembert donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \cdot |x| \begin{cases} < 1 \rightarrow CV \\ > 1 \rightarrow DIV \end{cases}$$

3.6.3.2.1 Règle de d'Alembert

Si $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $ alors $R = \frac{1}{l}$.
--

N.B. Un D.S.E. est valable à l'intérieur du cercle de convergence.

3.6.4 Exemples

1. $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$
2. $u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$
3. $u_n(x) = n^{\log n} x^n$
4. $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n$
5. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Montrer que $R = +\infty$ pour l'exemple 1, et que $R = 1$ pour les 4 autres exemples.

3.7 Exercices

3.7.1 Nature des séries

Préciser la nature des séries de terme général :

1. $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$
2. $\frac{1+n^2}{n!}$
3. $\frac{n!}{a^n}$ (avec $a > 0$)
4. $\frac{2n}{n+2^n}$
5. $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3+2\sqrt{n}-3\log n}$
6. $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$
7. $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
8. $\log \frac{1}{\sqrt{n}} - \log \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
9. $\frac{1}{n\sqrt{n \times n}}$
10. $\text{Arcsin} \frac{2n}{4n^2+1}$

3.7.2 Séries alternées

Préciser le caractère de convergence des séries suivantes :

$$(-1)^n \tan \frac{1}{n} \qquad (-1)^n n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$$

3.7.3 Comparaison avec une intégrale

Etudier la convergence de $u_n = \frac{\log n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ en comparant à l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$.

3.7.4 Calcul de somme de série

Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n$ de la série de terme général $u_n = \log \cos \frac{x}{2^n}$. On transformera à l'aide de la formule : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Chapitre 4

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

4.1 Séries trigonométriques

C'est une série de terme général : $u_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$
où :

- x est une variable réelle indépendante
- $k \in \mathbb{N}$
- a_k et b_k : termes de deux séries numériques

Si la série converge pour $x \in$ à un intervalle d'amplitude 2π , la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est une fonction continue de période 2π :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (4.1)$$

4.2 Théorème de Fourier

Soit $f(x)$ périodique de période 2π dans l'intervalle $[\theta, \theta + 2\pi]$ (ou plus simplement dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$). On suppose que l'on peut développer $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad .$$

Si la série ainsi définie converge, on montre que l'on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

Interprétation : a_0 = valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle.

4.3 Condition de validité du DSF

Le développement ainsi obtenu (Développement en Série de Fourier, en abrégé : DSF) est valable dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ pour toute fonction vérifiant les conditions de Dirichlet (en abrégé C.D.) :

- $f(x)$ doit être uniformément bornée dans $[-\pi, +\pi]$

- $f(x)$ n'a qu'un nombre fini de discontinuités de 1ère espèce (limite à droite et à gauche finies mais différentes) : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a - \varepsilon) = L^- \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon) = L^+$
- $f(x)$ n'a qu'un nombre fini d'extrema stricts.

Plus généralement, on peut parler du DSF des fonctions continues par morceaux dans un intervalle fini.

4.4 Développement en un point de discontinuité (Phénomène de Gibbs)

En un point de discontinuité de première espèce $x = a$, la somme $f(x)$ d'une série de Fourier prend la valeur :

$$f(a) = \frac{1}{2} [f(a - 0) + f(a + 0)]$$

De même, si les valeurs limites aux bornes de l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ sont différentes, on pose :

$$f(\pm\pi) = \frac{1}{2} [f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$$

4.5 DSF d'une fonction définie dans un intervalle quelconque

Soit une fonction $g(t)$ [8, 9, 10] :

- définie dans un intervalle $[\theta, \theta + T]$, de période T .
- satisfaisant les C.D. dans cet intervalle.

On pose :

$$\boxed{\frac{t}{T} = \frac{x}{2\pi}} \text{ et } \boxed{f(x) = g(t) = g\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)} \text{ alors : } \underline{f(x) \text{ est périodique de période } 2\pi.}$$

En effet : $f(x + 2k\pi) = g\left(\frac{T(x+2k\pi)}{2\pi}\right) = g\left(\frac{Tx}{2\pi} + kT\right) = g(t + kT) = g(t) = f(x)$

On peut écrire : $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

avec, d'après les équations (4.2) : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) dt$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

donc : $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$

$$\text{On peut poser : } \begin{cases} a_k = A_k \cos \varphi_k \\ b_k = A_k \sin \varphi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k = \text{Arctg } \frac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx - \varphi_k)$$

$$\Rightarrow g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k\right)$$

4.5.1 Remarque

- a_0 représente la composante continue
- A_1 représente l'amplitude du fondamental
- A_k représente l'amplitude de l'harmonique de rang k
- φ_k représente le déphasage
- $1/T = f$ représente la fréquence
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ représente la pulsation.

4.6 Propriétés de symétrie

4.6.1 Fonction paire

Toute fonction $f(x)$ **paire** de période 2π admet pour DSF une série de cosinus :

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \begin{aligned} \forall k, b_k = 0 \\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx \quad ; \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx \end{aligned}$$

Généralisation à une fonction $f(t)$ paire de période T :

$$\forall k, b_k = 0 \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad ; \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

4.6.2 Fonction impaire

Toute fonction $f(x)$ **impaire** de période 2π admet pour DSF une série de sinus :

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \begin{aligned} \forall k, a_k = 0 \\ b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

Généralisation à une fonction $f(t)$ impaire de période T :

$$\forall k, a_k = 0 \quad , \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

4.7 Formule de Bessel-Parseval

Soit une fonction $g(t)$:

- de période T
- satisfaisant les C.D.

On montre que (conservation d'énergie) : $\frac{1}{T} \int_\theta^{\theta+T} [g(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2}$

Dans le cas d'une fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi; +\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2}$$

4.7.1 Remarque : Définition de la valeur efficace

$$g_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_\theta^{\theta+T} [g(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{C'est-à-dire : } g_{eff}^2 = \underbrace{\langle [g(t)]^2 \rangle}_{\uparrow \text{valeur moyenne}}$$

4.8 Intégration et dérivation

Soit une fonction $f(x)$:

- de période 2π
- définie sur $[-\pi; +\pi]$

— développable en S.F. : $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

4.8.1 Intégration

$$\begin{cases} F(x) &= \int_0^x f(u) du &= a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k(1-\cos kx)}{k} \\ F(0) &= 0 &\uparrow C.U. \Rightarrow \text{intégration terme à terme.} \end{cases}$$

— Si $a_0 = 0$: Alors : $F(x)$ représente une fonction DSF dans $[-\pi; +\pi]$

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

avec :

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx = -\frac{b_k}{k} \quad B_k = \frac{a_k}{k}$$

— Si $a_0 \neq 0$: On développe $a_0 x$ en S.F. dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$ et on peut alors représenter $F(x)$ par une S.F. dans $[-\pi; +\pi]$.

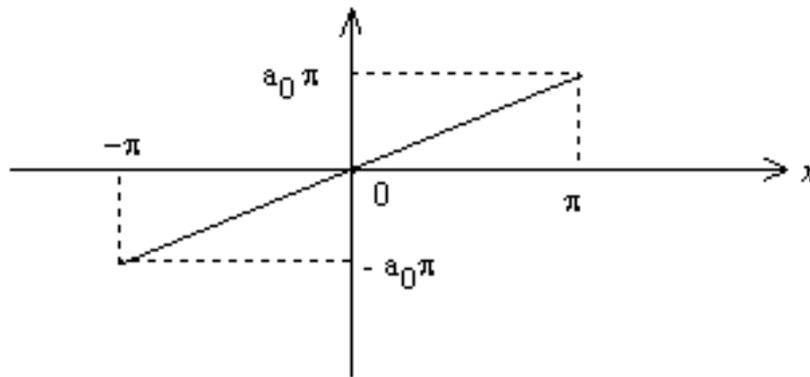


FIGURE 4.1 – Fonction $a_0 x$ représentée sur $[-\pi; +\pi]$

$$a_0 x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \alpha_k = 0 \quad \text{car la fonction est impaire.}$$

$$\text{Et : } \beta_k = 2 a_0 (-1)^{k+1} \Rightarrow$$

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \quad ; \quad A_k = -\frac{b_k}{k} \quad ; \quad B_k = \beta_k + \frac{a_k}{k}$$

4.8.2 Dérivation

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. On suppose $f'(x)$ DSF c'est-à-dire qu'on aura :

$$f'(x) = a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos kx + b'_k \sin kx$$

Soient x_i les divers points de discontinuités de $f(x)$ supposés en nombre fini p .

$$\text{On pose : } \begin{cases} \delta_i &= f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \\ \delta_0 &= f(\pi - 0) - f(-\pi + 0) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq p$$

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} [f(x)]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\delta_0 - \sum_{i=1}^p \delta_i \right] = a'_0$$

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx &= \frac{1}{\pi} [f(x) \cos kx]_{-\pi}^{+\pi} + \underbrace{\frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx}_{\text{intég. parties}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^p \cos k x_i [f(x_i - 0) - f(x_{i-1} + 0)] &+ k b_k \end{aligned}$$

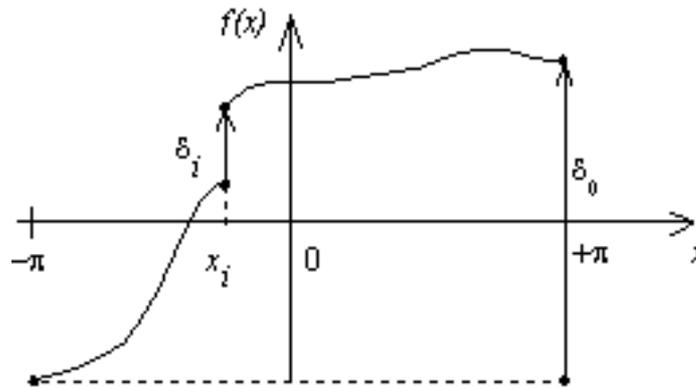


FIGURE 4.2 – Fonction $f(x)$ avec discontinuité de première espèce.

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \left[(-1)^k \delta_0 - \sum_{i=1}^p \delta_i \cos k x_i \right] + k b_k$$

De même on trouve :

$$b'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^p \delta_i \sin k x_i - k a_k = b'_k$$

↑
intég. par parties sur chaque
intervalle où f est continue.

Remarque : Si $f(x)$ est continue sur $[-\pi ; +\pi]$, on a :

$$\delta_0 = \delta_i = 0 \quad \text{et } f'(x) \text{ s'obtient en dérivant terme à terme le DSF de } f(x).$$

4.9 DSF Exponentiel

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right) \text{ avec } c_n = F(n) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right) dt$$

NB : Très utile en traitement du signal.

4.10 Démonstration de la formule de Wallis

4.10.1 Développement en série de Fourier de $f(x) = \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in R$

paire $\Rightarrow \underline{b_k = 0} \quad \forall k$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x dx \Rightarrow a_0 = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\alpha + k)x + \cos(\alpha - k)x] dx$$

... $a_k = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}$

d'où le DSF de $\cos(\alpha x)$:

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx$$

4.10.2 Calcul de $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$

On pose : $x = \pi$ dans le DSF de $\cos(\alpha x)$.

$$\Rightarrow \quad \cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \overbrace{\cos k\pi}^{(-1)^k}$$

On divise par $\sin(\alpha\pi)$:

$$\cotg \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} = -\frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$$

Pour $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$ converge et on peut intégrer les deux membres de l'égalité entre 0 et $x < 1$:

$$\int_0^x \left(\cotg \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) d\alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha d\alpha}{k^2 - \alpha^2}$$

Notons : $S_1 = \int_0^x \left(\cotg \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) d\alpha$ et $S_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2\alpha d\alpha}{k^2 - \alpha^2}$

Alors : $S_1 = \int_0^x \frac{\cos \pi \alpha}{\sin \pi \alpha} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d\alpha}{\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^x \frac{\cos \pi \alpha}{\sin \pi \alpha} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^x \frac{d\alpha}{\alpha} \right]$

Posons : $u = \sin \pi \alpha \Rightarrow du = \pi \cos \pi \alpha d\alpha$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{\sin \pi \varepsilon}^{\sin \pi x} \frac{du}{u} - \int_{\varepsilon}^x \frac{d\alpha}{\alpha} \right] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([\text{Log } u]_{\sin \pi \varepsilon}^{\sin \pi x} - [\text{Log } \alpha]_{\varepsilon}^x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{Log } \sin \pi x - \text{Log } \sin \pi \varepsilon - \text{Log } x + \text{Log } \varepsilon) \end{aligned}$$

or $\sin \pi \varepsilon \underset{0}{\sim} \pi \varepsilon$ (équivalent usuel)

donc $\text{Log } \sin \pi \varepsilon \underset{0}{\sim} \text{Log } \pi \varepsilon = \text{Log } \pi + \text{Log } \varepsilon$

d'où $S_1 = \frac{1}{\pi} (\text{Log } \sin \pi x - \text{Log } \pi - \text{Log } x) = \frac{1}{\pi} \text{Log } \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

D'autre part : $S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{-2\alpha d\alpha}{k^2 - \alpha^2}$ posons $\begin{cases} u = k^2 - \alpha^2 \\ du = -2\alpha d\alpha \end{cases}$

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k^2}^{k^2 - x^2} \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [\text{Log } u]_{k^2}^{k^2 - x^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [\text{Log } (k^2 - x^2) - \text{Log } k^2]$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \text{Log} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$$

Finalement : comme $S_1 = S_2$, on en déduit que : $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$

4.10.3 Formule de Wallis

On peut écrire : $\frac{\pi x}{\sin \pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - x^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k-x}$

En posant : $x = \frac{1}{2}$ (< 1) on obtient aisément :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^2}$$

4.11 Tableau de DSF

Le Tab. 4.1 donne le DSF de différentes fonctions illustrées sur la Fig.4.3.

TABLE 4.1 – DSF de quelques fonctions

signal	figure	DSF
dent de scie	positif	$s(t) = A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]$
triangle	impair	$s(t) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\omega t]$
triangle positif	pair, $T = 2\pi$	$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x]$
triangle positif	pair, max en 0	$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\omega t]$
double alternance	positif pair	$s(t) = \frac{2A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2n\omega t) \right]$
simple alternance	positif	$s(t) = \frac{A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2n\omega t) \right] + \frac{A}{2} \sin \omega t$
carré	impair	$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)\omega t]$
carré	pair positif	$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)\omega t]$
parabole $f(t) = t^2$	pair, période 2	$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n t)$
mi-rampe $f(x) = x$	période 2π	$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
impulsion	largeur τ	$s(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} [\sin n\omega t - \sin n\omega(t - \tau)]$
rectangle pair	rapport cyclique α	$a_0 = E(2\alpha - 1), a_n = \frac{4E}{n\pi} \sin(n\alpha\pi), b_n = 0$
fossé	asymétrique	$a_0 = -\frac{\pi}{4}, a_{2n} = 0, a_{2n+1} = -\frac{2}{\pi(2n+1)^2}, b_{2n} = -\frac{1}{2n}, b_{2n+1} = \frac{3}{2n+1}$
créneau	impair	$a_k = 0, b_{2n} = -\frac{2}{n\pi}, b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi} \left[1 + \frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^n \right]$
onduleur	décalé τ	$v(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos \left[(2n+1)\omega \frac{\tau}{2} \right] \sin \left[(2n+1)\omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$

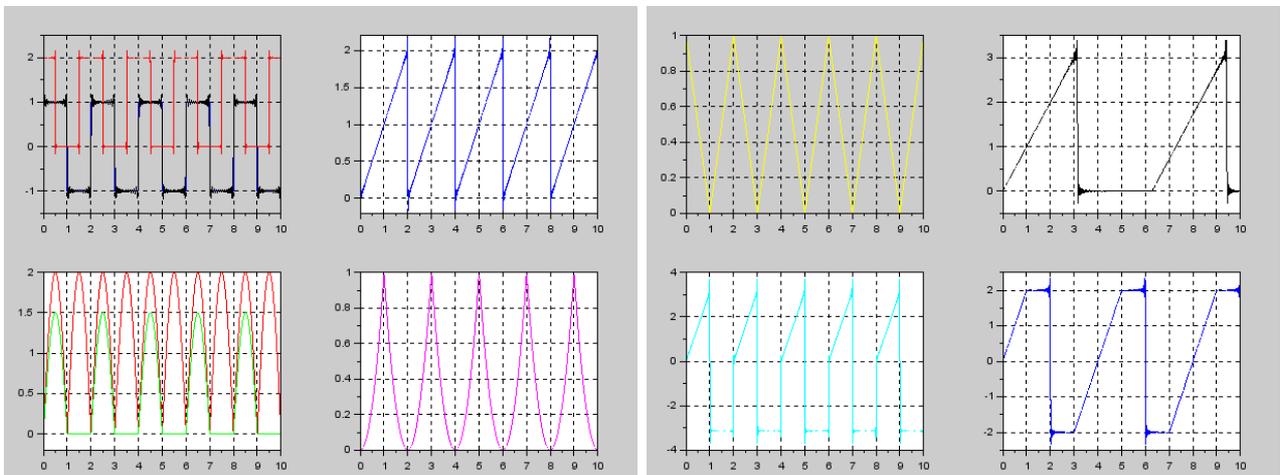


FIGURE 4.3 – Signaux périodiques définis par leur DSF

Chapitre 5

FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

5.1 Nombre Complexe

5.1.1 Définition

z peut être considéré comme l'affixe d'un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) :

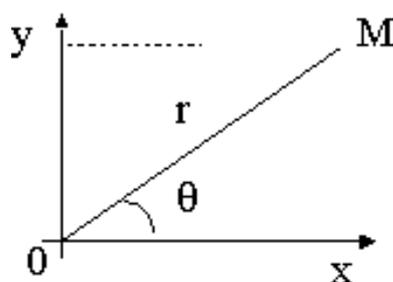


FIGURE 5.1 – Plan complexe

$z = \overrightarrow{OM} = x + iy = r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec : $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1} = \exp(i\frac{\pi}{2})$

Module : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argument : $\theta = \text{Arg}(z) = \arctan \frac{y}{x}$

5.1.2 Somme

La somme $z = z_1 + z_2$ est définie par la résultante géométrique :

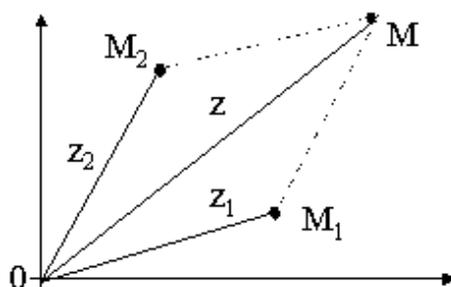


FIGURE 5.2 – Somme vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

Inégalité fondamentale pour l'étude des fonctions par majoration :

$$| |z_1| - |z_2| | \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (5.1)$$

5.1.3 Produit

$$z_1 z_2 = r_1 \exp(i\theta_1) r_2 \exp(i\theta_2) = r_1 r_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2)) \quad (5.2)$$

Donc :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \quad (5.3)$$

5.1.4 Quotient

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(i\theta_1)}{r_2 \exp(i\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(i(\theta_1 - \theta_2)) \quad (5.4)$$

Donc :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{et} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \quad (5.5)$$

5.1.5 Complexe Conjugué

Soit : $z = x + iy = r.e^{i\theta}$ alors : $\bar{z} = x - iy = r.e^{-i\theta}$

$$z \cdot \bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$$

\bar{z} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe $0x$.

5.1.6 Racines nièmes

$$z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)} \quad (5.6)$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (5.7)$$

Il existe n racines nièmes qui se déduisent les unes des autres par rotation de $2\pi/n$ ($k = 0 \dots n - 1$).

5.2 Fonction de la Variable Complexe

5.2.1 Continuité

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe appartenant à un domaine (D) . On considère une fonction $f(z)$ qui fait correspondre à z un nombre complexe image Z :

$$f : z \longrightarrow Z = f(z) \quad (5.8)$$

On peut séparer partie réelle et imaginaire de la fonction : $f(z) = Z = X(x, y) + iY(x, y)$.

Cette relation établit une correspondance entre 2 points complexes z et Z :

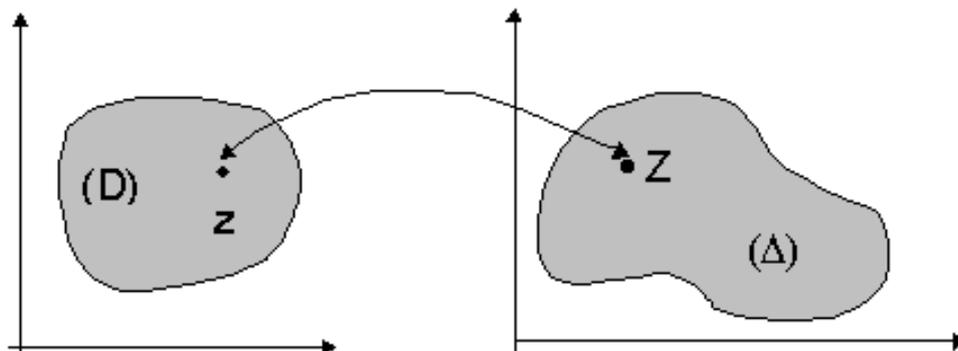


FIGURE 5.3 – Application du plan complexe

On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta / |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (5.9)$$

On en déduit qu'il suffit que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ soient continues par rapport aux variables x et y .

5.2.2 Dérivabilité

$f(z)$ est dérivable en z_0 si et seulement si la limite du rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et est indépendante du chemin suivi dans le plan complexe quand $z \rightarrow z_0$. On pose alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad (5.10)$$

5.2.2.1 Exemple 1

$Z = f(z) = \frac{3z-\bar{z}}{2}$ n'est pas dérivable en $z_0 = 0$ car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{3(x+iy) - (x-iy)}{2(x+iy)} = \frac{x+2iy}{x+iy} = 1 + \frac{iy}{x+iy} = 1 + \frac{1}{1-i\frac{x}{y}} \quad (5.11)$$

5.2.2.2 Exemple 2

$Z = f(z) = z^2$ est dérivable en $z_0 = 0$ car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z = 0 \quad (5.12)$$

5.2.3 Relations de Cauchy

C'est une CNS pour que $Z = f(z)$ soit dérivable en z_0 . Il faut et il suffit que X et Y soient différentiables en z_0 et que leurs dérivées satisfassent :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} \quad (5.13)$$

5.2.3.1 Réciproque

si les relations de Cauchy sont satisfaites, alors on montre que :

$$f'(z_0) = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \quad (5.14)$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial y} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - i \frac{\partial X}{\partial y} = -i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \quad (5.15)$$

5.2.4 Holomorphie et Analyticité

5.2.4.1 Définitions

- une fonction $f(z)$ dérivable en tout point d'un domaine (D) du plan complexe est dite fonction holomorphe
- une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est appelée fonction entière
- une fonction holomorphe dans un domaine (D), qui établit une bijection avec le domaine image (Δ), est dite fonction univalente

5.2.4.2 Propriétés

- la somme, le produit ou la composée de 2 fonctions holomorphes est holomorphe
- le quotient $f(z)/g(z)$ de 2 fonctions holomorphes dans (D) est holomorphe dans (D) sauf pour les points du plan complexe où $g(z) = 0$
- une fonction univalente admet une fonction inverse f^{-1} dont la dérivée vaut :

$$\frac{df^{-1}(Z)}{dZ} = \frac{1}{\frac{df(z)}{dz}} \quad (5.16)$$

5.2.4.3 Exemples de fonctions holomorphes

- les polynômes sont des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe à distance finie :

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (5.17)$$

$$P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \quad (5.18)$$

- les fractions rationnelles sont holomorphes dans tout le plan à distance finie sauf aux points p_i (pôles réels ou complexes d'ordre de multiplicité λ_i) :

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= E(z) + \sum_i \frac{A_{i,1}}{z - p_i} + \frac{A_{i,2}}{(z - p_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,\lambda_i}}{(z - p_i)^{\lambda_i}} = E(z) + \sum_i \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{i,j}}{(z - p_i)^j} \\ &= \text{partie entière} + \text{termes de première espèce} \end{aligned}$$

5.2.4.4 Remarque

Toute fonction holomorphe est analytique, c'est-à-dire continue et pourvue de dérivées de tous ordres elles-mêmes continues.

5.2.5 Harmonicité

Si les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont continues ainsi que les dérivées partielles 1ères et 2èmes, le lemme de Schwarz permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} \quad (5.19)$$

D'après la remarque du §. 5.2.4.4, le lemme de Schwarz s'applique à toute fonction holomorphe d'où l'expression des laplaciens, en tenant compte des relations de Cauchy :

$$\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.20)$$

$$\Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.21)$$

Si X et Y satisfont dans le domaine D d'holomorphie de $f(z)$ à l'équation dite de Laplace :

$$\Delta X = \Delta Y = 0 \quad (5.22)$$

alors on dit que ce sont 2 fonctions harmoniques associées (condition nécessaire mais non suffisante).

5.2.5.1 Réciproque

Si X est une fonction harmonique, c'est-à-dire :

- continue
- pourvue de dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 2
- satisfaisant l'équation de Laplace $\Delta X = 0$

alors on peut trouver $Y(x, y)$ en intégrant les équations de Cauchy de telle sorte que la fonction définie par $f(z) = X + iY$ soit une fonction holomorphe.

5.2.6 Points Singuliers

5.2.6.1 Définition

- si $f(z)$ est définie en z_0 , alors z_0 est un point ordinaire
- si $f(z)$ n'est pas définie en z_0 , alors z_0 est un point singulier

5.2.6.2 Singularité Artificielle

Cas où $f(z)$ n'est pas holomorphe mais reste bornée au voisinage de z_0 (qu'on note $V(z_0)$) : il s'agit alors d'une discontinuité de 1ère espèce. On peut fixer arbitrairement la valeur de $f(z_0)$ pour rendre la fonction holomorphe en z_0 .

5.2.6.3 Pôle d'ordre p

Cas où :

- $f(z)$ non définie en z_0
- $1/f(z)$ définie en z_0
- $(z - z_0)^p f(z)$ définie en z_0

5.2.6.3.1 Exemple : soient $h(z)$ et $g(z)$ holomorphes, et $f(z)$ définie par :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^p} + g(z) \quad (5.23)$$

C'est le développement classique au voisinage d'un pôle.

5.2.6.3.2 Définition : Une fonction qui n'admet pas d'autre singularité que ses pôles est dite méromorphe.

5.2.6.4 Points Singuliers Essentiels

Cas où :

- $f(z)$ non holomorphe en z_0
- $1/f(z)$ non holomorphe en z_0

Exemple : $f(z) = \exp(1/z)$ en $z_0 = 0$.

5.2.6.5 Cas du point à l'infini

Pour étudier ce cas, on pose : $u = 1/z$ et au lieu d'étudier : $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ on étudie : $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u)$ où : $\phi(u) = f(z)$.

- $f(z)$ est holomorphe à l'infini si $\phi(u)$ est holomorphe au $V(0)$
- $f(z)$ admet un pôle à l'infini si $\phi(u)$ admet un pôle pour $u = 0$

5.2.7 Notion de Point Critique

Hypothèse : soient

- une fonction $f(z)$ multiforme
- un point complexe z_0 et son image $Z_0 = f(z_0)$
- un point a autre que z_0 .

On dit que a est point critique de $f(z)$ si, en faisant décrire au point z un contour fermé autour de a en partant de z_0 , on revient en z_0 avec une valeur de $f(z_0)$ différente de la valeur de départ Z_0 .

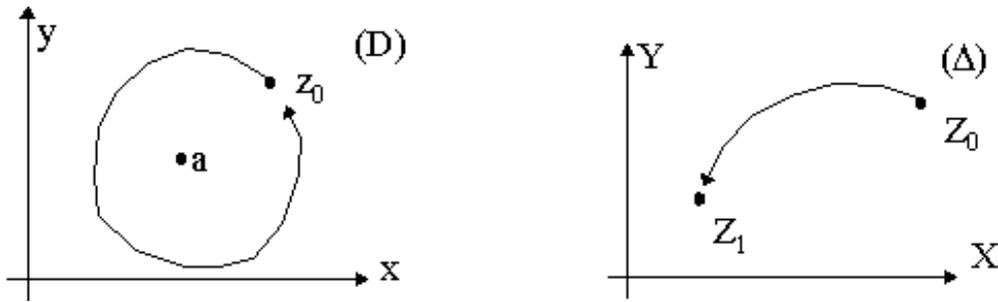


FIGURE 5.4 – Point critique

5.2.7.1 Exemple

$$f(z) = \sqrt{z} \quad (5.24)$$

$$z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)} \quad (5.25)$$

$$Z = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)} \quad (5.26)$$

Il y a donc 2 déterminations, c'est-à-dire 2 valeurs de Z pour un même z_0 :

$$Z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{pour } k \text{ pair} \quad (5.27)$$

$$Z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} \quad \text{pour } k \text{ impair} \quad (5.28)$$

Si l'on tourne autour de l'origine, on change de détermination. On dit que $a = 0$ est point critique de $f(z) = \sqrt{z}$.

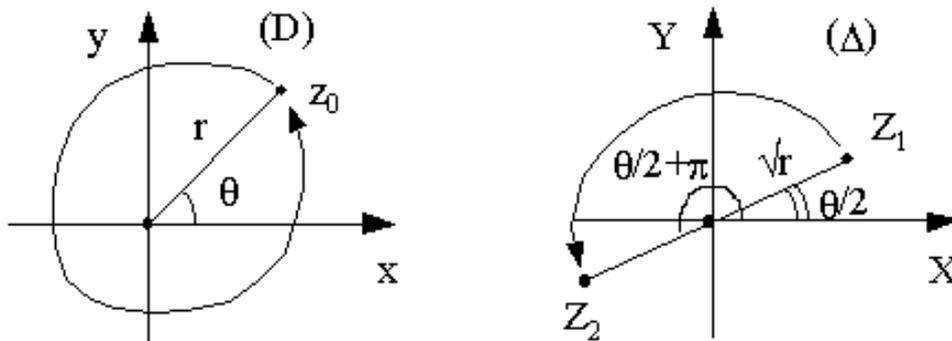


FIGURE 5.5 – Les 2 déterminations de la fonction racine

5.3 Fonction Définie par une Série Entière

5.3.1 Série de la Variable Complexe

Soit $w_n = u_n + iv_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ converge si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergent.

5.3.1.1 Convergence absolue

$$|w_n| \leq |u_n| + |v_n| \implies \left| \sum w_n \right| \leq \sum |w_n| \leq \sum |u_n| + \sum |v_n| \quad (5.29)$$

Donc la convergence absolue des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ implique la convergence de la série $\sum w_n$.

5.3.2 Rappel sur la Convergence des Séries

Soit une série de terme général u_n .

5.3.2.1 Condition Nécessaire de Convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (5.30)$$

5.3.2.2 Théorème de Cauchy

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall \epsilon > 0, \exists N / \forall n > N \text{ et } \forall m > N, |u_n + \dots + u_m| < \epsilon \quad (5.31)$$

5.3.2.2.1 Remarque : la convergence absolue entraîne la convergence simple car :

$$|u_n + \dots + u_m| \leq |u_n| + \dots + |u_m| \quad (5.32)$$

5.3.2.3 Critère de Cauchy

On calcule :

$$L_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \quad (5.33)$$

- Si $L_{sup} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge
- Si $L_{sup} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge
- Si $L_{sup} = 1$, on ne peut conclure.

5.3.2.4 Critère de d'Alembert

On calcule :

$$L_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \quad \text{et/ou} \quad L_{inf} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \quad (5.34)$$

- Si $L_{sup} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge
- Si $L_{inf} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge
- Dans les autres cas ($L_{inf} \leq 1 \leq L_{sup}$), on ne peut conclure.

Donc le critère de d'Alembert est moins performant que le critère de Cauchy.

5.3.2.5 Comparaison avec une Intégrale

Soit $f(x)$ une fonction définie, continue, > 0 et décroissante pour $x \geq 1$.

Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

5.3.2.6 Série de Riemann

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ convergent pour $\alpha > 1$.

D'où le critère de Riemann : si $|x^\alpha f(x)|$ reste borné pour $x \rightarrow \infty$ et $\alpha > 1$, alors : $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge et la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ aussi.

5.3.3 Convergence Uniforme (C.U.)

Soit la série : $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

5.3.3.1 Théorème de Cauchy

La série $u(z)$ converge uniformément (C.U.) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ indépendant de } z / \forall n > N, \forall m > N, |u_n(z) + \dots + u_m(z)| < \epsilon \quad (5.35)$$

5.3.3.2 Règle de Weierstrass

La série $u(z)$ converge uniformément (C.U.) si :

$$\exists z_0 / \forall |z| \geq |z_0|, \text{ et } \exists N / \forall n > N \text{ indépendant de } z, |u_n(z)| \leq a_n \text{ indépendant de } z \quad (5.36)$$

où a_n est le terme général d'une série à termes positifs convergente.

5.3.3.3 Convergence Absolue \Rightarrow Convergence Uniforme

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge $\implies u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformément (C.U.).

5.3.3.4 Critère d'Abel

Soit :

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(z) v_n(z). \quad (5.37)$$

Alors la série $u(z)$ C.U. si :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(z) = 0$
2. $\sum |\epsilon_n(z) - \epsilon_{n+1}(z)|$ converge
3. $\forall (n, m), |v_n(z) + \dots + v_m(z)| \leq A$ où A est indépendant de n et m .

5.3.3.4.1 Cas Particulier : Le critère d'Abel s'applique souvent dans le cas où ϵ_n est une suite à termes > 0 , indépendante de z et décroissante vers 0. Ainsi les deux premières conditions du critère sont remplies. Il faut et il suffit alors que : $|v_0(z) + \dots + v_m(z)| \leq A$, où A est indépendant de m , pour que $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(z) v_n(z)$ converge uniformément.

5.3.3.5 Intégration d'une Série C.U.

Si une série $u(t)$ C.U. dans l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(t) dt \right] \quad (5.38)$$

c'est-à-dire qu'on peut *intervertir l'ordre des sommations* si la convergence est uniforme.

5.3.4 Série Entière de la Variable Complexe

5.3.4.1 Définition

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (5.39)$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$

5.3.4.2 Convergence

Posons :

$$L_a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (5.40)$$

et appliquons le critère de Cauchy :

$$L_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot L_a \quad (5.41)$$

Si : $L_{sup} = |z| \cdot L_a < 1$ alors : la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge.

Ceci permet de définir le rayon de convergence R :

$$|z| < R = \frac{1}{L_a} \implies f(z) \text{ converge} \quad (5.42)$$

5.3.4.3 Théorème

Quand $z \in$ au disque de convergence, la série entière est uniformément convergente et sa somme est une fonction continue de z . La dérivée a même rayon de convergence et s'obtient en dérivant terme à terme.

5.3.4.4 Cas particulier

si $R = \infty$, $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan complexe. On parle alors de fonction entière.

5.3.4.5 Généralisation

On peut définir la fonction $f(z)$ par une série entière au $V(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.43)$$

Cette série converge pour $|z - z_0| < R$, c'est-à-dire dans le cercle (z_0, R) . C'est le principe du prolongement analytique à l'ensemble du plan complexe, en excluant les points isolés (critiques ou singuliers).

5.3.5 Développement en Série de Taylor (DST)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (5.44)$$

5.3.5.1 Développement de Mac-Laurin

C'est un cas particulier du développement en série de Taylor calculé en $z_0 = 0$.

5.3.5.2 Fonction Analytique

- continue,
- aux dérivées de tous ordres continues,
- développable en série de Taylor.

On a l'équivalence : $f(z)$ analytique dans (D) $\Leftrightarrow f(z)$ holomorphe dans (D)

Donc toute fonction holomorphe peut être définie par une série de la variable complexe. On peut en particulier calculer les développements en série entière des fonctions holomorphes.

5.3.6 Fonctions Entières

5.3.6.1 Fonction Exponentielle $f(z) = e^z$

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \quad (5.45)$$

Donc pour $z_0 = 0$, on a :

$$f^{(n)}(0) = 1 \implies f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (5.46)$$

Calcul du rayon de convergence :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1} n!}{(n+1)! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \implies R = \infty \quad (5.47)$$

donc e^z est une fonction entière car holomorphe dans tout le plan complexe. e^z est périodique de période $2i\pi$.

5.3.6.2 Fonctions Trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (5.48)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (5.49)$$

Ces fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.

Attention ! $|\cos z|$ et $|\sin z|$ peuvent être > 1 (cf. § 5.3.6.3.2)

5.3.6.3 Fonctions hyperboliques

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad (5.50)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (5.51)$$

Ces deux fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.

5.3.6.3.1 Remarque

$$\begin{cases} \cosh z = \cos iz \\ \cos z = \cosh iz \\ i \tan z = \tanh iz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sinh z = \frac{1}{i} \sin iz = -i \sin iz \\ \sin z = -i \sinh iz \\ i \tanh z = \tan iz \end{cases} \quad (5.52)$$

5.3.6.3.2 Démonstration de la possibilité d'avoir $\cos z > 1$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (5.53)$$

donc $\cos z = a \in \mathbb{R} > 1$ est possible pour :

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = a \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = \text{Argch}(a) \end{cases} \quad (5.54)$$

5.3.7 Série Géométrique et fonction $\log(1+z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \quad (5.55)$$

avec comme rayon de convergence : $R = 1$ car on a :

$$L_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad (5.56)$$

Par intégration de $f(z)$ en choisissant la constante d'intégration nulle, on obtient le développement en série entière correspondant à la détermination principale de la fonction multiforme $\log(1+z)$, valable pour $|z| < 1$:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } |z| < 1 \quad (5.57)$$

5.3.7.1 Convention

Les déterminations principales des fonctions multiformes usuelles sont notées avec une première lettre majuscule.

Chapitre 6

TRANSFORMEE DE LAPLACE

6.1 Intégrale de Laplace

6.1.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t ($f(t) = 0$ pour $t < 0$). On lui fait correspondre une fonction $\Phi(p)$ de la variable symbolique $p \in C$:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (6.1)$$

$\Phi(p)$ est l'image de $f(t)$. On note : $\Phi(p) \subset f(t)$.

$f(t)$ est l'original de $\Phi(p)$.

Calcul symbolique : un problème de détermination d'une fonction $f(t)$ peut se traiter par la détermination de $\Phi(p)$, souvent plus simple.

6.1.2 Convergence

Théorème : Soit $I = \Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Si l'intégrale I converge pour une valeur donnée $p_0 = x_0 + iy_0$, alors elle converge pour toute valeur de $p = x + iy$ telle que $Re(p) = x > x_0$.

x_0 est l'abscisse de convergence. La région de convergence est alors un demi-plan situé à droite de la droite $x = x_0$ (Fig. 6.1).

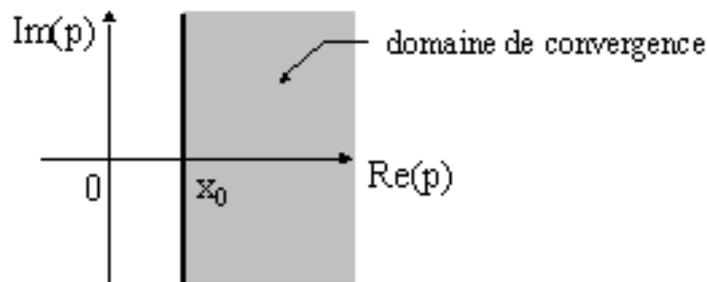


FIGURE 6.1 – Domaine de convergence

6.1.2.1 Démonstration

On pose : $\Psi(t) = \int_0^t e^{-p_0\tau} f(\tau) d\tau$.

NB : $\Psi(0) = 0$

Si I converge pour p_0 , alors : $\exists M/\forall t : |\Psi(t)| = \left| \int_0^t e^{-p_0\tau} f(\tau) d\tau \right| < M$

D'autre part : $\frac{d\Psi}{dt} = e^{-p_0 t} f(t) \Rightarrow$

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} f(t) e^{-p_0 t} dt = \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} \frac{d\Psi}{dt} dt$$

$$\Phi(p) = \underbrace{\left[e^{-(p-p_0)t} \psi(t) \right]_0^\infty}_{=0 \text{ si } x > x_0} + (p-p_0) \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} \psi(t) dt$$

$$\phi(p) = 0 + (p-p_0) \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} \psi(t) dt$$

$$|\phi(p)| = |p-p_0| \left| \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} \psi(t) dt \right| \leq |p-p_0| M \left| \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} dt \right|$$

$$|\phi(p)| \leq |p-p_0| M \int_0^\infty e^{-(x-x_0)t} dt \text{ qui converge si } x > x_0$$

$$|\phi(p)| \leq |p-p_0| M \left[\frac{-e^{-(x-x_0)t}}{x-x_0} \right]_0^\infty = \frac{|p-p_0|M}{x-x_0}$$

donc : $|\Phi(p)|$ converge pour $x > x_0$.

6.1.3 Quelques cas particuliers

6.1.3.1 Fonction unité de Heaviside $H(t)$ et $H(t-t_0)$ (parfois notée $u(t)$)

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.a)}$$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty = \frac{1}{p} \text{ si } \text{Re}(p) > 0$$

$$H(t) \supset \frac{1}{p} \text{ avec } x_c = 0$$

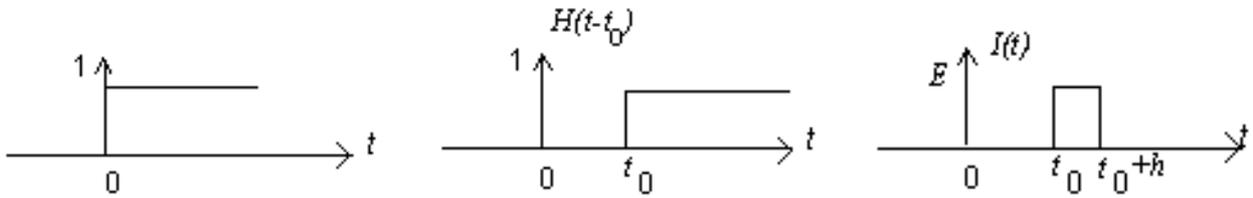


FIGURE 6.2 – a) fonction de Heaviside $H(t)$; b) fonction retardée $H(t-t_0)$; c) impulsion $I(t)$.

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t_0 \\ 1 & \text{pour } t > t_0 \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.b)}$$

$$\phi(p) = \int_{t_0}^\infty e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_{t_0}^\infty$$

$$H(t-t_0) \supset \frac{e^{-pt_0}}{p} \text{ avec } x_c = 0$$

6.1.3.2 Impulsion

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\infty < t < t_0 \\ E & \text{pour } t_0 < t < t_0+h \\ 0 & \text{pour } t_0+h < t < \infty \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.c)}$$

$$I(t) = E [H(t-t_0) - H(t-(t_0+h))]$$

$$\phi(p) = \int_{t_0}^{t_0+h} E e^{-pt} dt = \frac{E}{p} e^{-pt_0} (1 - e^{-ph})$$

$$I(t) \supset_{x_c=-\infty} \frac{E}{p} e^{-pt_0} [1 - e^{-ph}]$$

6.1.3.3 Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/\varepsilon & \text{pour } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{pour } t > \varepsilon \end{cases} \quad \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [H(t) - H(t - \varepsilon)]$$

$$\phi(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon p} [1 - e^{-p\varepsilon}] = 1 \Rightarrow \delta(t) \underset{x_c = -\infty}{\supset} 1$$

$$\delta(t - a) \underset{x_c = -\infty}{\supset} e^{-pa}$$

6.1.3.4 Fonction $f(t) = t^\nu$

— définition d'Euler de la fonction factorielle :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \quad x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

— $\nu = n$ entier > -1 ; p variable réelle > 0

$$\phi(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt \underset{u=pt}{=} \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{n!}{p^{n+1}} \underset{p=x>0}{\subset} t^n$$

— généralisation : $\nu \neq$ entier ; p complexe

$$t^\nu \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \quad x_c = 0$$

— cas particuliers :

$$\nu = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \quad \sqrt{t} \supset \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

6.1.3.5 Fonctions $f(t) = e^{at}$ et $f(t) = t^n e^{at}$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a} \quad \text{donc : } \boxed{e^{at} \underset{x_c = \text{Re}(a)}{\supset} \frac{1}{p-a}}$$

$$t^n e^{at} \underset{x_c = \text{Re}(a)}{\supset} \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

6.2 Règles de Heaviside

6.2.1 Linéarité de la TL

Les propriétés de linéarité de la TL sont dues aux propriétés de linéarité de l'intégrale :
 λ, μ scalaires

$$\begin{cases} \phi_1(p) \subset f_1(t) \\ \phi_2(p) \subset f_2(t) \end{cases} \Rightarrow \lambda \phi_1(p) + \mu \phi_2(p) \subset \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$$

6.2.2 Première règle de Heaviside

Soit $f(t)$ définie par son développement en série entière :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

notons :

$$\phi_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{a_n t^n}{n!} dt = \frac{a_n}{n!} TL[t^n] = \frac{a_n}{p^{n+1}} ; x_c = 0 \quad (6.2)$$

donc par linéarité (et convergence uniforme) :

$$\phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} \subset f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

La série $\phi(p)$ converge d'après le critère de Cauchy si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{p^{n+1}} \right|} < 1$

$$\text{c'est-à-dire si } \begin{cases} |p| > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ \operatorname{Re}(p) > 0 & x_c = 0 \end{cases}$$

6.2.3 Deuxième règle de Heaviside

Soit $\phi(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ avec $\operatorname{deg} D > \operatorname{deg} N$

Soient a_i les pôles de $\phi(p)$ d'ordre de multiplicité λ_i .

On décompose $\phi(p)$ en éléments simples :

$$\phi(p) = \sum_i \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(p-a_i)^j} \right] \text{ On en déduit l'original } f(t)$$

$$f(t) = \sum_i e^{a_i t} \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} \right] \supset \phi(p) = \sum_i \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(p-a_i)^j} \right]$$

$$x_c = \max [\operatorname{Re}(a_i)]$$

6.2.4 Applications

Soit $\omega \in R$: $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Comme $e^{at} \supset_{x_c = \operatorname{Re}(a)} \frac{1}{p-a}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos \omega t & \supset_{x_0=0} \frac{p}{p^2 + \omega^2} & \sin \omega t & \supset_{x_0=0} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \operatorname{ch} \omega t & \supset_{x_0=|\omega|} \frac{p}{p^2 - \omega^2} & \operatorname{sh} \omega t & \supset_{x_0=|\omega|} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

6.2.4.1 Recherche de l'original

- $\phi(p) = \operatorname{Arctg} \left(\frac{\omega}{p} \right)$

$$\frac{d\phi}{dp} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} \cdot \left(-\frac{\omega}{p^2} \right)_{|p| > |\omega|} = -\frac{\omega}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\omega^2}{p^2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{2k+1}}{p^{2k+2}}$$

On intègre terme à terme en choisissant la constante d'intégration nulle

$$\phi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2k+1}$$

$$\left(\text{cf. D.S.T. } \operatorname{Arctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \right)$$

On applique la première règle de Heaviside :

$$\phi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}} \subset \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1}}{(2k+1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc $\boxed{\operatorname{Arctg} \frac{\omega}{p} \subset \frac{\sin \omega t}{t}}$

$$\bullet \phi(p) = \text{Log} \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dp} &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} \cdot \left(\frac{-2\omega^2}{p^3} \right) \quad |p| > |\omega| = -\frac{2\omega^2}{p^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\omega^2}{p^2} \right)^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{2k+2}}{p^{2k+3}} \end{aligned}$$

On intègre terme à terme

$$\phi(p) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2k+2}$$

$$\left(\text{cf. } \text{Log}(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1} \quad \begin{array}{l} \text{D.S.T.} \\ \text{pour } |z| < 1 \end{array} \right)$$

$$\phi(p) \subset 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} \frac{\omega^{2k+2}}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \frac{2}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$\phi(p) \subset \frac{2}{t} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right] = \frac{2}{t} [1 - \cos \omega t]$$

$$\text{Log} \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) \subset \frac{2}{t} (1 - \cos \omega t)$$

6.3 Inversion de la transformée de Laplace

6.3.1 Définition de $H(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner

$$H(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp$$

6.3.2 Intégrale de Mellin-Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} \phi(p) dp$$

L'intégrale de Mellin-Fourier permet, connaissant l'image $\phi(p)$, de remonter à l'original $f(t)$.

6.3.3 Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier

6.3.3.1 Contour de Bromwich - Lemme de Jordan généralisé

6.3.3.1.1 Contour de Bromwich d'une fonction $\phi(z)$: C'est une droite (Fig. 6.3) :

- joignant le point $C - i\infty$ au point $C + i\infty$
- laissant à gauche tous les points singuliers de $\phi(z)$

6.3.3.1.2 Intégrale de Bromwich-Wagner : Soit $\phi(z)$ une fonction de z dont tous les points singuliers sont à gauche du contour de Bromwich. L'intégrale de Bromwich-Wagner est du type :

$$J(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz$$

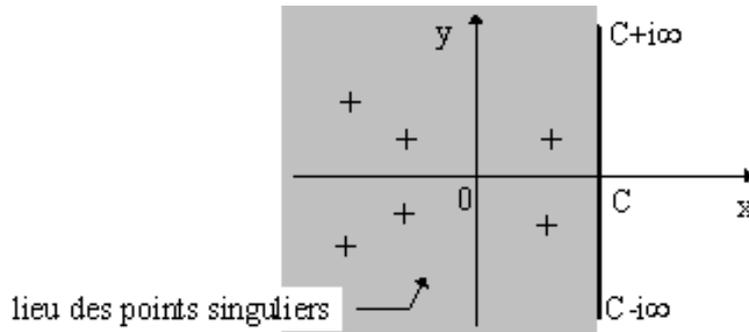


FIGURE 6.3 – Contour de Bromwich

6.3.3.1.3 Lemme de Jordan généralisé :

- Soit une fonction $\phi(z)$:
 - holomorphe (définie, analytique et uniforme) dans le demi-plan $x < 0$ sauf en un nombre fini de pôles
 - tendant uniformément vers zéro lorsque $|z| \rightarrow \infty$
 - soit t réel > 0
 - soit C la demi-circonférence $(0, R)$ située à gauche de l'axe imaginaire (Fig. 6.4.a).

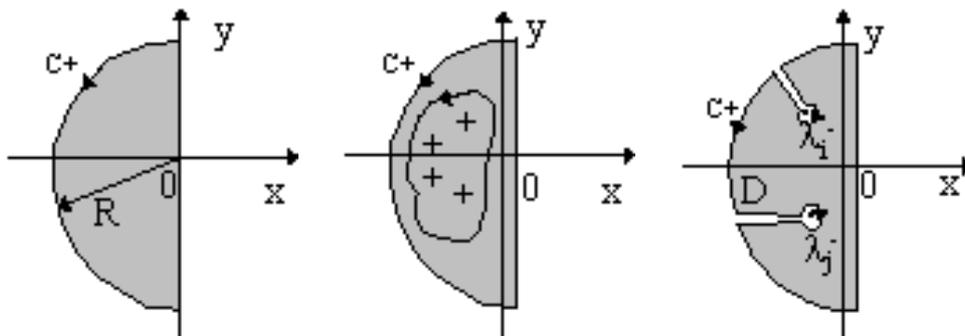


FIGURE 6.4 – De gauche à droite : contours a) , b) et c).

Alors :
$$\int_{C^+} e^{tz} \phi(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

6.3.3.1.4 Contour équivalent si $\phi(z)$ satisfait le lemme :

- Les singularités ne sont **que des pôles** : contour équivalent = toute courbe fermée (γ) sans point double enfermant les pôles (Fig. 6.4.b).
Notons $A(z_j)$ les résidus aux pôles z_j :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz = \sum_{z_j} A(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma^+)} e^{tz} \phi(z) dz$$

- S'il existe **des points critiques (fonction multiforme)** : on exclut du domaine les points critiques (Fig. 6.4.c).

$$\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz + \sum_j \int_{\lambda_j^-} e^{tz} \phi(z) dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} A(z_j)$$

6.3.3.2 Principe de calcul

L'intégrale de Mellin-Fourier se calcule par la méthode des résidus. L'abscisse C est choisie de manière à laisser à gauche du contour de Bromwich tous les points singuliers de $\phi(p)$.

On complète le plus souvent le chemin d'intégration $(C - i\infty, C + i\infty)$ par une demi circonférence $\Gamma^+(O, R \rightarrow \infty)$ tracée du côté des $x < 0$ en ajoutant les coupures nécessaires au niveau des points critiques si la fonction $\phi(p)$ est multiforme.

Si le lemme de Jordan est satisfait, l'intégrale sur Γ^+ est nulle et on applique le théorème des résidus :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} \phi(p) dp = \sum_{z_j} A(z_j) + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \sum_j \int_{\lambda_j^+} e^{tz} \phi(z) dz}_{\substack{\text{éventuellement si } f \\ \text{est multiforme}}}$$

$A(z_j)$: résidus relatifs à $e^{pt}\phi(p)$

6.3.3.3 Exemple d'une fonction uniforme

Soit $\phi(p) = \frac{1}{(p+a)^{n+1}}$ avec $\begin{cases} n \in N^+ \\ a \in C \end{cases}$

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+a)^{n+1}} dp = \frac{e^{-at}}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{(p+a)t}}{(p+a)^{n+1}} dp$$

$$\Psi(p) = \frac{e^{(p+a)t}}{(p+a)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (p+a)^{k-n-1} \leftrightarrow \text{DSE de } \psi(p) \text{ au } V(-a)$$

$$f(t) = \frac{e^{-at}}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \psi(p) dp = e^{-at} A(-a) \begin{cases} \text{car lemme de Jordan} \\ \text{satisfait par } \phi(p). \\ \text{un point singulier } -a \end{cases}$$

$$A(-a) = a_{-1} = \frac{t^n}{n!} = \text{Res} [\psi(p)]_{-a}$$

donc $\boxed{\frac{1}{(p+a)^{n+1}} \subset \frac{t^n}{n!} e^{-at}}$

6.4 Règles opératoires du calcul symbolique [1]

6.4.1 Linéarité

$$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) \supset a_1 \cdot \phi_1(p) + a_2 \cdot \phi_2(p)$$

6.4.2 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre

$$f(t, \alpha) \supset \phi(p, \alpha) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(p, \alpha) \subset \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha) \\ \int_a^b \phi(p, \alpha) d\alpha \subset \int_a^b f(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

Exemple : $\frac{\partial}{\partial a} (e^{at}) = t e^{at} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{1}{(p-a)^2} \supset t e^{at}$

$$\int_a^b e^{\alpha t} d\alpha = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \supset \int_a^b \frac{d\alpha}{p-\alpha} = \text{Log} \left(\frac{p-a}{p-b}\right)$$

6.4.3 Changement d'échelle

Soit $k \in R^+$ $\phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t) \Rightarrow k \phi(kp) \underset{\frac{x_c}{k}}{\subset} f\left(\frac{t}{k}\right)$

6.4.4 Translation de la variable concrète t et symbolique p

$$\phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t) \Rightarrow \begin{cases} e^{\pm pa} \phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t \pm a) \cdot H(t) \\ \phi(p+a) \underset{x_c - \text{Re}(a)}{\subset} e^{-at} f(t) \end{cases}$$

Exemple : $\frac{p}{p^2+1} \subset \cos t \Rightarrow \frac{p+1}{p^2+2p+2} \subset e^{-t} \cos t$

6.4.5 Théorème du produit de Borel (convolution)

$$\text{Soit } \begin{array}{l} \phi_1(p) \subset f_1(t) \\ \phi_2(p) \subset f_2(t) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(p) \phi_2(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} f_1(\theta) \phi_2(p) d\theta \subset \int_0^\infty f_1(\theta) f_2(t-\theta) \mathbf{H}(t-\theta) d\theta \\ &= \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta \quad \text{car } \mathbf{H}(t-\theta) = 0 \text{ pour } \theta > t \end{aligned}$$

rôle symétrique de f_1 et f_2 donc :

$$\phi_1(p) \phi_2(p) \subset f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta$$

$$\text{Exemple : } \frac{1}{(p-a)(p-b)} \subset \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$$

6.4.6 Dérivation et intégration par rapport à t

$$\begin{aligned} f(t) \supset \phi(p) &\Rightarrow \frac{df}{dt} \supset \int_0^\infty e^{-pt} \frac{df}{dt} dt = [e^{-pt} f(t)]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ &\frac{df}{dt} \supset p \phi(p) - f(0^+) \end{aligned}$$

$$\text{Généralisation : } f^{(n)}(t) \supset p^n \phi(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Intégration :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \supset \frac{\phi(p)}{p}$$

6.4.7 Théorèmes de la valeur initiale et finale

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} p \phi(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \\ \lim_{p \rightarrow 0} p \phi(p) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned}$$

6.4.8 Dérivation et intégration par rapport à la variable p

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow \frac{d\phi}{dp} \subset -t f(t)$$

$$\text{Généralisation : } \boxed{\frac{d^n \phi}{dp^n} \subset (-1)^n t^n f(t)}$$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow \int_p^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt ds = \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{e^{-st}}{t} \right]_p^\infty dt$$

$$\text{d'où : } \boxed{\int_p^\infty \phi(p) dp \subset \frac{f(t)}{t}}$$

6.5 Application de la TL : Fonction de transfert

6.5.1 Système linéaire SLIT

Un système linéaire stationnaire (*i.e.*, invariant dans le temps) ou SLIT est représenté par une boîte noire (Fig. 6.5).

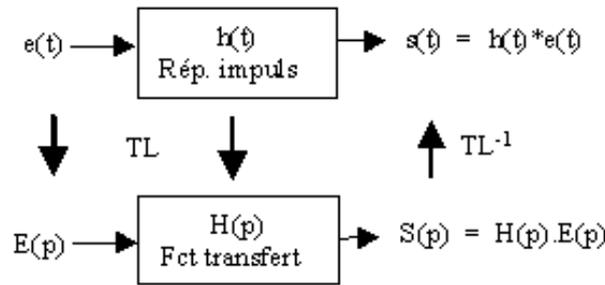


FIGURE 6.5 – Système linéaire

Il se caractérise au choix par :

- sa réponse impulsionnelle $h(t) : e(t) = \delta(t) \Rightarrow s(t) = h(t)$
- l'EDL qui le régit : $a_n s^{(n)} + \dots + a_1 s' + a_0 s(t) = b_m e^{(m)} + \dots + b_1 e' + b_0 e(t)$
- sa réponse indicielle : quand $e(t) = H(t)$ (échelon unité de Heaviside)
- sa réponse harmonique : quand $e(t) = A \cos \omega t$ (ou $e^{j\omega t}$)
- sa fonction de transfert $H(p) \subset h(t) : H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$

6.5.2 Réponse impulsionnelle et Convolution

La sortie du système est la convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle : $s(t) = h(t) * e(t)$.

Un produit de convolution est une intégrale compliquée.

Interprétation graphique : retournement et décalage d'une des fonctions, produit avec l'autre fonction et sommation des aires sous la courbe produit.

6.5.3 Distribution de Dirac

Définie par une limite : $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x)$ où $I_\epsilon(x)$ est une impulsion infiniment courte (durée ϵ) et infiniment haute (amplitude $1/\epsilon$) :

On en déduit :

— la parité : $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(x - a) = \delta(a - x)$

— l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Produit simple : distribution pondérée par la valeur de la fonction

$$\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)$$

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0) \text{ (cas particulier } a = 0)$$

Élément neutre de la convolution (preuve par la TL : $H(p) = 1$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - u)f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(x - u)du = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

De même :

$$\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$$

On en déduit les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a)$$

6.5.4 Intérêt de la TL pour l'étude des Systèmes

- simple produit algébrique en p au lieu du produit de convolution en t
- équation algébrique en p (fraction rationnelle) au lieu d'une équation différentielle
- étude harmonique : on pose $p = j\omega = j2\pi f \Rightarrow$ diagramme de Bode (gain et phase)

6.5.5 Réponse harmonique

Notation réelle :

$$e(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow s(t) = B \cos(\omega t + \psi) \text{ où } A \text{ et } B \in \mathcal{R}$$

Notation complexe :

$$e(t) = \text{Re}[\mathcal{A}e^{j\omega t}] \text{ et } s(t) = \text{Re}[\mathcal{B}e^{j\omega t}] \text{ où } \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{C} : \mathcal{A} = Ae^{i\phi} \text{ et } \mathcal{B} = Be^{i\psi}.$$

$$\text{Alors en posant } p = j\omega, \text{ on a la relation : } H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\mathcal{B}e^{j\omega t}}{\mathcal{A}e^{j\omega t}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{B}{A}e^{j(\psi-\phi)}$$

Définition du gain (module de la FdT) : $G = \frac{B}{A}$

Définition du déphasage (argument de la FdT) : $\Delta\Phi = \psi - \phi$

Courbe de Bode : on trace $G_{dB} = 20 \log_{10} G$ et $\Delta\Phi$ en fonction de $\log_{10}\omega$.

Interprétation : la sortie reste sinusoïdale (même fréquence) mais est décalée temporellement (déphasage) et son amplitude est modifiée (gain ou atténuation) :

$$\Delta t = \Delta\Phi \frac{T}{2\pi}$$

On a deux FdT types :

— 1er ordre :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

— 2e ordre :

$$H_2(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

6.6 Equation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = b(x) \quad (6.3)$$

6.6.1 Méthode classique

6.6.1.1 Solution générale sans 2nd membre

On calcule les s racines distinctes r_k (réelles ou complexes et d'ordre de multiplicité m_k) du polynôme caractéristique $\Phi(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$.

La forme générale de la solution sans 2nd membre s'exprime alors comme une combinaison d'exponentielles :

$$y_{g_0}(x) = \sum_{k=1}^s P_k(x) e^{r_k x}$$

où $P_k(x)$ est un polynôme de degré $m_k - 1$ (comportant donc m_k constantes arbitraires qu'on détermine grâce aux conditions initiales).

6.6.1.2 Solution particulière avec 2nd membre

- 2nd membre constant : $b(x) = A \Rightarrow y_p(x) = B$
- 2nd membre sinusoïdal : $b(x) = A \sin(\omega x + \phi) \Rightarrow y_p(x) = B \sin(\omega x + \psi)$
- 2nd membre polynomial : $b(x)$ de degré $d \Rightarrow y_p(x)$ polynôme de degré $\leq d + 2$.

6.6.2 Méthode symbolique

On utilise la transformée de Laplace en tenant compte des conditions initiales.

Soient : $Y(p) \subset y(x)$ et $B(p) \subset b(x)$.

L'équation différentielle se transforme en :

$$a_n \left[p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} y^{(k)}(0) \right] + \dots + a_1 [pY(p) - y(0)] + a_0 Y(p) = B(p) \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{a_n \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} y^{(k)}(0) + \dots + a_1 y(0) + B(p)}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{A(p) + B(p)}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec} \quad \deg A(p) = n - 1 \quad (6.6)$$

On décompose judicieusement la fraction en identifiant avec des termes connus donnés dans les tables, ce qui permet ensuite de remonter à l'original $y(x)$ connaissant sa transformée de Laplace $Y(p)$.

6.7 Vademecum du Calcul Symbolique

On pose :

$$\boxed{\phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t)}$$

DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT A t :

$$\frac{df}{dt} \underset{\max(0, x_c)}{\supset} p \phi(p) - f(0^+) \quad ; \quad \int_0^t f(\theta) d\theta \underset{\max(0, x_c)}{\supset} \frac{\phi(p)}{p}$$

Généralisation :

$$f^{(n)}(t) \supset p^n \phi(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT A LA VARIABLE p :

$$\frac{d\phi}{dp} \subset -t f(t) \quad ; \quad \frac{d^n \phi}{dp^n} \subset (-1)^n t^n f(t) \quad ; \quad \int_p^\infty \phi(p) dp \subset \frac{f(t)}{t}$$

TRANSLATION DE LA VARIABLE CONCRETE t ET SYMBOLIQUE p :

$$e^{\pm pa} \phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t \pm a) \quad ; \quad \phi(p+a) \underset{x_c - \text{Re}(a)}{\subset} e^{-at} f(t)$$

THEOREME DU PRODUIT DE BOREL (PRODUIT DE CONVOLUTION) :

$$\text{Soient } \begin{matrix} \phi_1(p) \subset f_1(t) \\ \phi_2(p) \subset f_2(t) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\phi_1(p) \phi_2(p) \subset f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta$$

THEOREMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \phi(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \quad ; \quad \lim_{p \rightarrow 0} p \phi(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

CHANGEMENT D'ECHELLE :

Soit $k \in \mathbb{R}^+$

$$k \phi(kp) \underset{\frac{x_c}{k}}{\subset} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT A UN PARAMETRE :

$$\phi(p, \alpha) \subset f(t, \alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(p, \alpha) \subset \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha) \quad ; \quad \int_a^b \phi(p, \alpha) d\alpha \subset \int_a^b f(t, \alpha) d\alpha$$

Chapitre 7

TRANSFORMEE DE FOURIER

7.1 Définition

Soit $f(t)$:

- une fonction de la variable réelle t
- intégrable
- admettant un nombre fini de discontinuités de 1ère espèce.

La TF de $f(t)$ est définie par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \nu t} dt = TF[f(t)]$$

La formule de réciprocity donne : $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi \nu t} d\nu = TF^{-1}[F(\nu)]$

Si l'on pose $\omega = 2\pi\nu$, on a les formules : $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ω (ou ν) est appelé la variable conjuguée de t (ν est une variable réelle). Le produit νt est sans dimension. En physique, ν correspond à la fréquence (en Hz) et ω correspond à la pulsation (en rad/s).

7.2 Règles opératoires

7.2.1 Linéarité

$$TF[\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)] = \lambda TF[f_1(t)] + \mu TF[f_2(t)]$$

7.2.2 Transposition

$$TF[f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-i2\pi \nu t} dt \stackrel{x = -t}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{i2\pi \nu x} (-dx) = F(-\nu)$$

$$TF[f(-t)] = F(-\nu)$$

Donc : $\begin{cases} f \text{ paire} \Rightarrow F \text{ paire} \\ f \text{ impaire} \Rightarrow F \text{ impaire} \end{cases}$

7.2.3 Conjugaison

Soit : $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ et $\overline{f(t)} = f_1(t) - i f_2(t)$

Notons : $F(\nu) = TF[f(t)]$

Alors : $TF[\overline{f(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i2\pi\nu t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\nu t} dt} = \overline{F(-\nu)}$

donc : $TF[\overline{f(t)}] = \overline{F(-\nu)}$

si f réelle : $\overline{f(t)} = f(t) \Rightarrow F(\nu) = \overline{F(-\nu)}$ hermitique
 si f imaginaire pure : $\overline{f(t)} = -f(t) \Rightarrow \overline{F(-\nu)} = -F(\nu)$ antihermitique

7.2.4 Changement d'échelle

— si $a > 0$:

$$TF[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i2\pi\nu t} dt \stackrel{x=at}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

— si $a < 0$:

$$\begin{aligned} TF[f(at)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i2\pi\nu t} dt \stackrel{x=at}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\frac{\nu}{a}x} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \end{aligned}$$

— donc : $\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \text{si } F(\nu) = TF[f(t)] \quad \text{alors } TF[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$

7.2.5 Translation de la variable concrète t (Règle du retard)

$$TF[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-i2\pi\nu t} dt \stackrel{x=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu(x+t_0)} dx$$

donc : $TF[f(t-t_0)] = e^{-i2\pi\nu t_0} F(\nu)$

7.2.6 Translation de la variable symbolique ν (Règle de modulation)

Soit $\nu_0 \in \mathbb{R}$ $TF[e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)t} dt = F(\nu - \nu_0)$

donc pour $\nu_0 \in \mathbb{R}$ $TF[e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)] = F(\nu - \nu_0)$

7.2.7 Dérivation et intégration par rapport à t

$$TF[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \cdot \frac{e^{-i2\pi\nu t}}{\nu} dt \stackrel{\text{intég. parties}}{=} [f(t) e^{-i2\pi\nu t}]_{-\infty}^{+\infty} + i2\pi\nu F(\nu)$$

donc si $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$ c'est-à-dire si f est intégrable au sens de Riemann,

alors :

$$TF[f'(t)] = i2\pi\nu F(\nu)$$

7.2.7.1 Généralisation

$$TF[f^{(n)}(t)] = (i2\pi\nu)^n F(\nu)$$

7.2.7.2 Intégration

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$ alors $TF \left[\int_{-\infty}^t f(x) dx \right] = \frac{1}{i2\pi\nu} F(\nu)$

7.2.8 Dérivation par rapport à ν

$$\frac{dF(\nu)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-i2\pi t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

donc si $F(\nu) = TF[f(t)]$ alors $F'(\nu) = TF[-i2\pi t f(t)]$

7.2.8.1 Généralisation

$$F^{(n)}(\nu) = TF[(-i2\pi t)^n f(t)]$$

7.2.9 Théorème de convolution

Soient : $\begin{cases} F_1(\nu) = TF[f_1(t)] \\ F_2(\nu) = TF[f_2(t)] \end{cases}$

Considérons le produit de convolution de f_1 et f_2 défini par :

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-x) f_2(x) dx$$

posons $G(\nu) = TF[g(t)]$

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-x) f_2(x) dx \right) dt$$

C.U. $\Rightarrow G(\nu) = \iint f_1(t-x) f_2(x) e^{-i2\pi\nu(t-x+x)} dt dx$

$$= \int f_2(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \int \underbrace{f_1(t-x)}_u e^{-i2\pi\nu(t-x)} dt = F_2(\nu) \cdot F_1(\nu)$$

donc

$$TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)$$

On montre de même que : $TF[f_1(t) \cdot f_2(t)] = F_1(\nu) * F_2(\nu)$

7.2.10 Formule de Parseval-Plancherel

Soient : $\begin{cases} F_1(\nu) = TF[f_1(t)] \\ F_2(\nu) = TF[f_2(t)] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \overline{F_2(\nu)} d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i2\pi\nu t} dt} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_2(t)} e^{+i2\pi\nu t} dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_2(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu}_{f_1(t)} dt \end{aligned}$$

donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \cdot \overline{F_2(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} dt$

7.2.10.1 Cas particulier

Si $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$

7.2.11 Egalité fondamentale (TF des distributions)

Si $F(\nu) = TF[f(t)]$ alors : $TF[F(t)] = f(-\nu)$

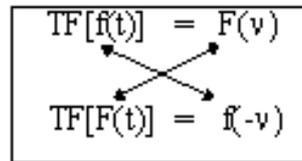


FIGURE 7.1 – Moyen mnémotechnique

7.2.11.1 Moyen mnémotechnique (Fig. 7.1)

7.3 Relation entre TF et TL

7.3.1 Cas où on suppose que $f(t) = f(t) \cdot H(t)$

où $H(t)$ = fonction échelon unité, c'est-à-dire que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Par définition : $\phi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \subset f(t)$

Posons : $p = x + iy = i2\pi\nu$ (c'est-à-dire $x = 0$)

alors $\phi(i2\pi\nu) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$

Comme $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on peut écrire : $\phi(i2\pi\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = F(\nu)$

7.3.1.1 Transformée inverse

Rappel : la transformée de Laplace inverse s'obtient par une intégrale de Mellin-Fourier sur le contour de Bromwich :

$$f(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \phi(p) e^{pt} dp$$

Si l'on pose $p = i2\pi\nu$ alors $\frac{dp}{i2\pi} = d\nu$.

Donc, il y aura identité avec la formule de la TF⁻¹ : $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu$ si : $C = 0$.
Donc $\phi(p)$ ne doit pas posséder de points singuliers à droite de l'axe imaginaire ($x \geq 0$).

7.3.2 Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$

Alors $F(\nu) = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$

On fait le changement de variable $t \rightarrow -t$ dans la première intégrale :

$$F(\nu) = \int_0^{\infty} f(-t) e^{i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Les deux fonctions $f_1(t) = f(-t) \cdot H(t)$ et $f_2(t) = f(t) \cdot H(t)$ sont bien définies pour $t > 0$.

Alors : $F(\nu) = \phi_1(-i2\pi\nu) + \phi_2(i2\pi\nu)$

car $\phi_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt$

Il faut de même que $C = 0$ pour ϕ_1 et ϕ_2 pour avoir identité des transformées inverses.

7.4 TF de distributions

7.4.1 TF de $\delta(t - a)$

La Fig. 7.2 représente une impulsion de Dirac décalée en a .

$TF[\delta(t - a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) e^{-i2\pi\nu t} dt$

or : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x - a) dx = g(a)$ pour $g(x)$ définie, continue

$$\Rightarrow TF[\delta(t - a)] = e^{-i2\pi\nu a} \Rightarrow TF[\delta(t)] = 1$$

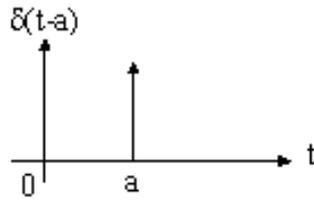


FIGURE 7.2 – Impulsion de Dirac décalée.

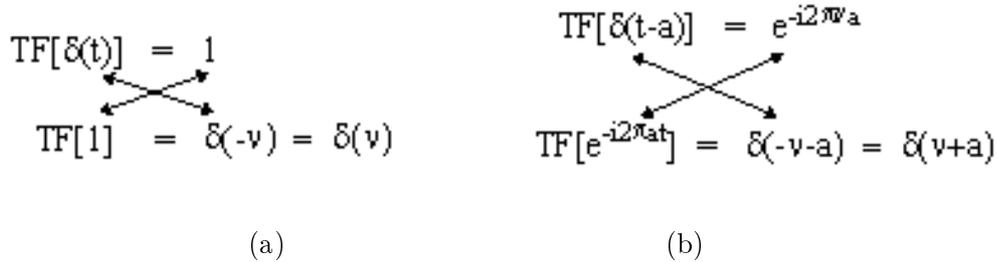


FIGURE 7.3 – Applications du moyen mnémotechnique pour obtenir les TF de : (a) une fonction constante; (b) une exponentielle complexe.

7.4.2 TF de $f(t) = 1$ au sens des distributions

On applique le moyen mnémotechnique (Fig. 7.3a).

$$\Rightarrow TF[1] = \delta(\nu)$$

7.4.3 TF de $\exp(i2\pi at)$

On applique encore le moyen mnémotechnique (Fig. 7.3b).

$$\Rightarrow TF [e^{i2\pi a t}] = \delta(\nu - a)$$

7.4.4 TF de $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$

$$TF [\cos 2\pi a t] = \frac{1}{2} [\delta (\nu - a) + \delta (\nu + a)]$$

$$TF [\sin 2\pi a t] = \frac{1}{2i} [\delta (\nu - a) - \delta (\nu + a)] = \frac{i}{2} [\delta (\nu + a) - \delta (\nu - a)]$$

7.4.5 Fonctions propres de la TF

7.4.5.1 Peigne $p(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) \tag{7.1}$$

$$TF [p(t)] = P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi \nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta (\nu - n) \tag{7.2}$$

C'est la formule de Poisson.

7.4.5.2 Loi de Laplace-Gauss

$$TF [e^{-\pi t^2}] = e^{-\pi \nu^2} \tag{7.3}$$

7.5 Vademecum pour la Transformée de Fourier

DEFINITION : on note

$$F(\nu) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \nu t} dt$$

FORMULE D'INVERSION :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi \nu t} d\nu = TF^{-1}[F(\nu)]$$

TRANSPOSITION :

$$TF[f(-t)] = F(-\nu)$$

CONJUGAISON :

$$TF[\overline{f(t)}] = \overline{F(-\nu)}$$

CHANGEMENT D'ECHELLE :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \text{si } F(\nu) = TF[f(t)] \quad \text{alors } TF[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

TRANSLATION DE LA VARIABLE CONCRETE t :

$$TF[f(t - t_0)] = e^{-i2\pi \nu t_0} F(\nu)$$

REGLE DE MODULATION :

$$TF[e^{i2\pi \nu_0 t} f(t)] = F(\nu - \nu_0)$$

DERIVATION PAR RAPPORT A t :

$$TF[f^{(n)}(t)] = (i2\pi \nu)^n F(\nu)$$

DERIVATION PAR RAPPORT A ν :

$$F^{(n)}(\nu) = TF[(-i2\pi t)^n f(t)]$$

CONVOLUTION :

$$TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)$$

FORMULE DE PARSEVAL-PLANCHEREL :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \cdot \overline{F_2(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} dt$$

TF DES DISTRIBUTIONS :

$$TF[\delta(t - a)] = e^{-i2\pi \nu a}$$

EGALITE FONDAMENTALE :

$$\begin{array}{c} TF[f(t)] = F(\nu) \\ \swarrow \quad \searrow \\ TF[F(t)] = f(-\nu) \end{array}$$

Chapitre 8

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

8.1 Introduction

Par abus de langage, on emploie souvent indifféremment les deux termes spectre et transformée de Fourier, sans se soucier de la phase de la transformée de Fourier. Mais en toute rigueur, le spectre d'un signal est le module au carré de sa transformée de Fourier.

L'analyse spectrale d'un signal analogique déterministe par une technique numérique comporte deux étapes essentielles :

- la conversion analogique-numérique du signal : c'est l'**échantillonnage**,
- le calcul de la **transformée de Fourier discrète** : TFD.

Ces deux étapes génèrent des distorsions qui peuvent perturber l'analyse. Pour interpréter correctement les spectres obtenus, il faut connaître l'origine et les conséquences de ces distorsions, ainsi que les techniques permettant de les minimiser [11]. On étudiera d'abord les conséquences de l'échantillonnage temporel d'un signal, puis on mettra en évidence les problèmes posés par le recours à la TFD.

8.2 Conversion analogique-numérique

8.2.1 Échantillonnage et quantification

La conversion d'un signal analogique en une séquence de valeurs numériques, ou **signal numérique**, se divise en deux phases :

- la prise d'échantillons du signal à intervalles de temps réguliers dont la durée est appelée période d'échantillonnage T_e . Cet **échantillonnage temporel** peut induire des distorsions gênantes si les conditions du *théorème de Shannon* ne sont pas vérifiées (§ 8.2.2).
- la **quantification** des valeurs des échantillons ainsi prélevés, avec un écart maximal entre la valeur réelle et la valeur stockée qui dépend du nombre de bits dont dispose le convertisseur analogique-numérique. Si le signal a un spectre suffisamment étendu, on assimile les conséquences de cette quantification à la *superposition d'un bruit blanc* sur le signal d'origine. Si le nombre de bits du calculateur est suffisant et si l'amplitude du signal à analyser est assez forte, on peut considérer que le rapport signal sur bruit de quantification est très grand, et négliger les effets de la quantification.

8.2.2 Echantillonnage temporel

Considérons un signal analogique $x_a(t)$ de transformée de Fourier $X_a(\nu)$. Notons $x_e(t)$ le signal résultant de l'échantillonnage de $x_a(t)$ à la fréquence $F_e = 1/T_e$. Il est défini par :

$$\begin{cases} x_e(t) = x_a(t) = x_n & \text{si } t = nT_e \\ x_e(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.1)$$

On peut écrire :

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot e(t) \quad (8.2)$$

où $e(t)$ est le peigne de Dirac de période T_e :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (8.3)$$

Soit $E(\nu)$ la transformée de Fourier de $e(t)$:

$$E(\nu) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - kF_e) \quad (8.4)$$

La transformée de Fourier $X_e(\nu)$ de $x_e(t)$ est donnée par le produit de convolution :

$$X_e(\nu) = X_a(\nu) * E(\nu) = X_a(\nu) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - kF_e) \quad (8.5)$$

soit :

$$X_e(\nu) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(\nu - kF_e) \quad (8.6)$$

Le spectre du signal échantillonné correspond donc, au facteur multiplicatif F_e près, à la périodisation à période F_e du spectre $X_a(\nu)$ du signal analogique. Nous allons voir que cette **périodisation spectrale** peut introduire une distorsion du spectre dans la bande de fréquences considérée, à savoir $] -F_e/2; F_e/2[$.

Supposons d'abord que $X_a(\nu) = 0$ pour $|\nu| > F_m$ où F_m est la fréquence maximale du signal. Selon le théorème de Shannon, si $x_a(t)$ est un signal d'**énergie finie**, on peut retrouver sans distorsion le signal $x_a(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ si et seulement si :

$$F_e \geq 2F_m. \quad (8.7)$$

Dans ce cas (Fig. 8.1), les spectres $X_a(\nu)$ et $X_e(\nu)$ coïncident parfaitement sur l'intervalle $] -F_e/2; F_e/2[$, et la périodisation spectrale liée à l'échantillonnage temporel n'a pas de conséquence sur l'analyse spectrale du signal étudié.

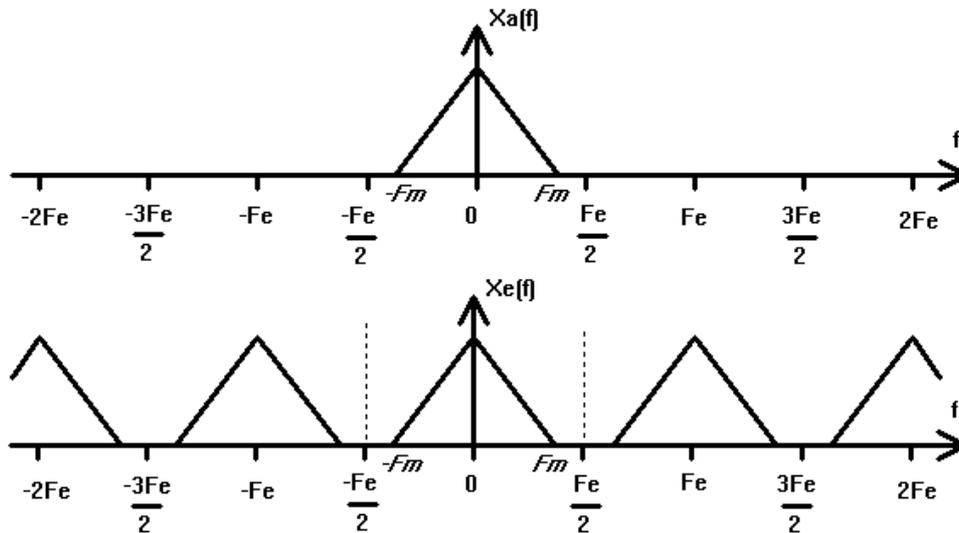


FIGURE 8.1 – Respect du théorème de Shannon : aucune distorsion dans la bande $] -F_e/2; F_e/2[$.

Par contre, si $F_e < 2F_m$ ou bien si le signal n'est pas à spectre borné, il y a **recouvrement** ou **repliement de spectre** (Fig. 8.2) Les deux spectres $X_e(\nu)$ et $X_a(\nu)$ ne coïncident plus sur l'intervalle $] -F_e/2; F_e/2[$: on a un rehaussement d'énergie en bouts de bande autour de $\pm F_e/2$. La distorsion liée à la périodisation spectrale est alors telle que l'analyse de Fourier du signal échantillonné ne permet pas d'avoir une bonne description du spectre du signal analogique. On ne pourra pas reconstituer correctement le signal analogique à partir de ses échantillons.

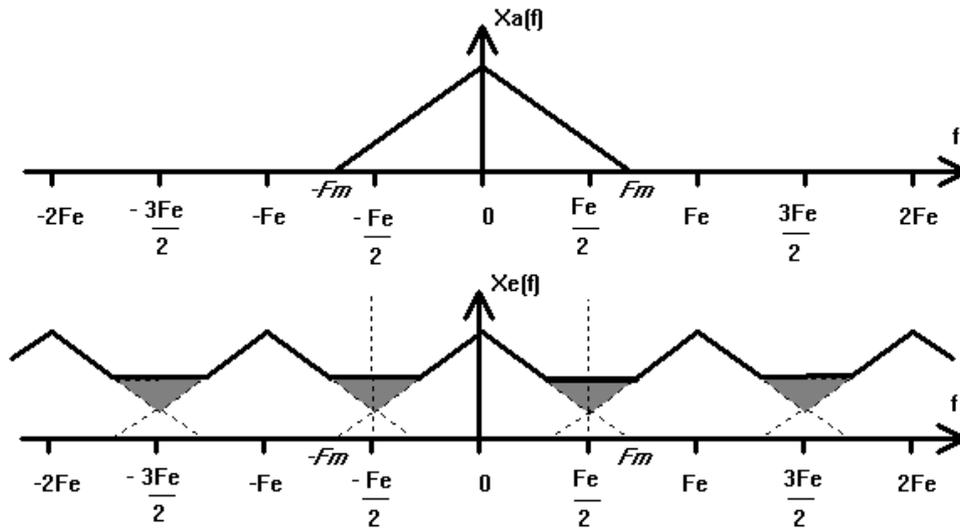


FIGURE 8.2 – Recouvrement de spectre : distorsions dans la bande $] - F_e/2; F_e/2[$.

8.3 Transformée de Fourier Discrète

8.3.1 TFDT d'un signal causal

Le signal $x_e(t)$, échantillonnée idéale de $x_a(t)$, peut s'écrire d'après (8.2) :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT_e) \tag{8.8}$$

Donc la transformée de Fourier $X_e(\nu)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ s'exprime par :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \tag{8.9}$$

Le signal $x_e(t)$ étant défini par une séquence discrète de valeurs x_n dans le temps, $X_e(\nu)$ est appelée **Transformée de Fourier Discrète dans le Temps (TFDT)**. Notons que dans cette expression, le temps est discrétisé tandis que la fréquence reste continue. Si le signal $x_e(t)$ est causal, c'est-à-dire que $x_n = 0$ pour $n < 0$, alors l'expression de la TFDT se simplifie :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \tag{8.10}$$

Nous supposons dans la suite que nous traitons toujours un signal causal.

8.3.2 Troncature temporelle

Pour une fréquence ν donnée, le calcul sur ordinateur de la TFDT ci-dessus est possible si le signal est de durée finie (x_n est nul à partir d'un certain indice $n = N$). Par contre, si le signal est de durée *a priori* infinie, la TFDT n'est pas calculable sur ordinateur (somme infinie). Pour y remédier, il faut faire l'hypothèse qu'à partir d'un certain indice $n = N$, les échantillons x_n sont négligeables. Alors, l'expression de la TFDT $X_e(\nu)$ devient :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \tag{8.11}$$

Cette démarche consistant à assimiler un signal de durée infinie à un signal de durée finie est appelée **troncature temporelle**. Elle peut avoir des conséquences spectrales fâcheuses si l'hypothèse sur la

faiblesse de l'amplitude des x_n pour $n \geq N$ est fautive. Du point de vue mathématique, la troncature revient à multiplier le signal $x_e(t)$ par une porte causale $\pi_T(t)$ de largeur $T = N.T_e$, qu'on appelle aussi **fenêtre rectangulaire**, définie par :

$$\begin{cases} \pi_T(t) = 1 & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ \pi_T(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.12)$$

En d'autres termes, on assimile le signal $x_e(t)$ à un signal $x_T(t)$ défini par :

$$x_T(t) = x_e(t) \cdot \pi_T(t) \quad (8.13)$$

Ceci revient à assimiler la TFDT $X_e(\nu)$ à la TFDT $X_T(\nu)$, résultat de la convolution :

$$X_T(\nu) = X_e(\nu) * \Pi_T(\nu) \quad (8.14)$$

où $\Pi_T(\nu)$ est la transformée de Fourier de la porte de largeur T :

$$\Pi_T(\nu) = T \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \exp(-j\pi\nu T) \quad (8.15)$$

N.B. L'exponentielle complexe $\exp(-j\pi\nu T)$, terme de déphasage dû au fait que la porte est causale centrée en $T/2$, ne modifie en rien le module de la transformée de Fourier.

Cette convolution par un sinus cardinal induit des distorsions caractérisées par un **élargissement spectral** et l'apparition d'**ondulations** dans le voisinage des zones de transition du spectre¹ (zones de fréquences où est concentrée l'énergie) : c'est ce que l'on appelle le **phénomène de Gibbs** (Fig. 8.3).

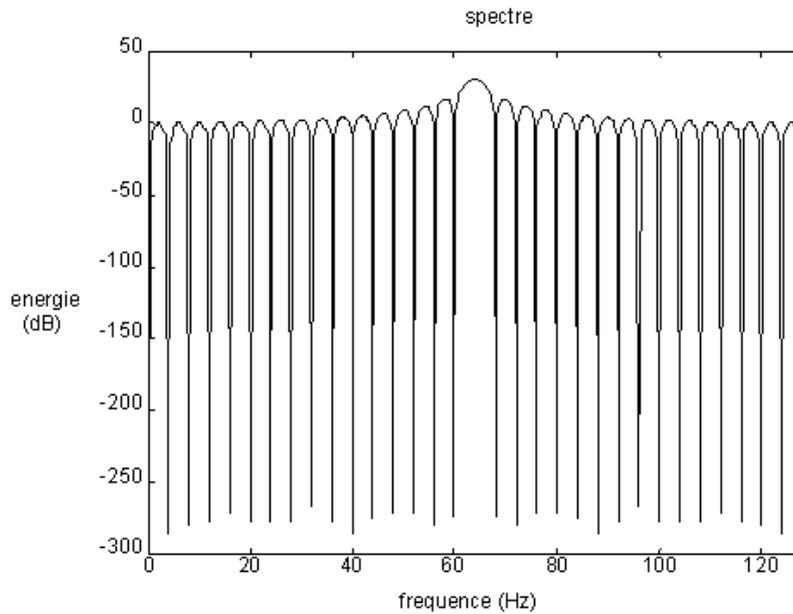


FIGURE 8.3 – Phénomène de Gibbs pour le spectre d'un sinus représenté sur l'intervalle $[0; F_e/2]$.

8.3.3 Pondération temporelle

Pour diminuer les incidences spectrales de la troncature temporelle, on peut pondérer le signal échantillonné par une fonction qui laisse inchangés les échantillons situés au centre de la fenêtre, et qui atténue plus ou moins les échantillons situés sur les bords de cette fenêtre. Cela revient à calculer la TFDT pour un signal multiplié non plus par une fenêtre rectangulaire de durée T (Eq. 8.13), mais par une fenêtre de pondération temporelle de même durée, appelée aussi **fenêtre d'apodisation**.

1. Classiquement, on ne représente le spectre que dans l'intervalle $[0; F_e/2]$ car on sait que pour les signaux réels, le spectre est symétrique par rapport à $\nu = 0$: $X(-\nu) = X^*(\nu)$, où * dénote le complexe conjugué.

Il existe de nombreux types de pondérations. Toutes ont comme objectif de réduire l'amplitude des ondulations et l'élargissement spectral associés au phénomène de Gibbs, mais elles ont des propriétés spécifiques différentes. Nous limiterons notre étude à trois fenêtres de pondération, dont les propriétés sont représentatives des grandes catégories de pondérations possibles :

— la fenêtre de **Hanning**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_h(t) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right) \right] & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_h(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.16)$$

— la fenêtre de **Hamming**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_H(t) = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right) & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_H(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.17)$$

— la fenêtre de **Blackman**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_B(t) = 0.42 - 0.50 \cos \left(\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi t}{(N-1)T_e} \right) & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_B(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.18)$$

Quelle que soit la fenêtre de pondération temporelle, le module de sa transformée de Fourier est constitué d'un **lobe central** ou principal d'amplitude unité et de largeur variable selon la pondération, et d'une succession de **lobes secondaires** dont l'amplitude relative à celle du lobe principal décroît plus ou moins vite selon la pondération. Ces différentes propriétés sont résumées dans le Tab. 8.1.

TABLE 8.1 – Caractéristiques des fenêtres de pondération.

Fenêtre	Atténuation (en dB) du premier lobe secondaire	Largeur (en Hz) du lobe principal	Vitesse d'atténuation des lobes secondaires
Rectangulaire	-13	$2Fe/N$	Lente
Hanning	-31	$4Fe/N$	Rapide
Hamming	-41	$4Fe/N$	Lente
Blackman	-57	$6Fe/N$	Très rapide

L'intérêt de chaque pondération dépend à la fois des objectifs recherchés et du type de signal analysé : signal à spectre continu, signal périodique, signal à large spectre, signal à spectre étroit ...

8.3.4 Echantillonnage fréquentiel - TFD

Pour une fréquence ν donnée, on peut calculer la TFDT et contrôler dans une certaine mesure les distorsions liées au phénomène de Gibbs grâce aux fenêtres de pondération. Mais le calcul sur ordinateur de l'ensemble du spectre, autrement dit de la TFDT pour $\nu \in [0, Fe/2]$, n'est évidemment possible que pour un nombre fini de valeurs de la fréquence. Il faut donc échantillonner en fréquence la TFDT sur cet intervalle.

Compte tenu du théorème de Shannon, la durée du signal temporel analysé étant égale² à $T = N.T_e$, il suffit d'échantillonner la TFDT à une "fréquence" égale à $N.T_e$, ce qui revient à prendre un échantillon spectral tous les Fe/N . Le spectre ainsi échantillonné, représentation spectrale discrète d'un signal discret dans le temps, est appelé **Transformée de Fourier Discrète** (TFD). La TFD est alors donnée par les valeurs X_k définies par :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}) \quad (8.19)$$

NB : Pour le calcul de la formule (8.19) sur ordinateur, il existe un algorithme rapide appelé FFT (Fast Fourier Transform) : FFT 1-D pour les signaux et FFT 2-D pour les images.

2. N est le nombre d'échantillons du signal sans *zero-padding* (cf. commentaire sur la fft en annexe).

Notons que dans cette expression, le temps **et** la fréquence sont échantillonnés. Cet échantillonnage fréquentiel peut avoir une influence notable sur l'allure du spectre.

En effet, considérons le cas simple d'une cosinusoïde de fréquence f_0 , échantillonnée à la fréquence F_e et observée sur une fenêtre de durée $T = N.T_e$, où N représente le nombre d'échantillons du signal. Son spectre continu théorique sur $[0; F_e/2]$ correspond à un sinus cardinal dont le maximum est centré en f_0 , et dont les zéros sont espacés de $1/T$ car :

$$\left| \frac{1}{2} \delta(\nu - f_0) * T \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T} \right|^2 = \left| K \frac{\sin \pi(\nu - f_0)T}{\pi(\nu - f_0)T} \right|^2 \quad (8.20)$$

Or on a justement : $\frac{1}{T} = \frac{1}{N.T_e} = \frac{F_e}{N}$ c'est-à-dire que l'espacement entre les zéros du sinc est le même que l'espacement entre les points du spectre échantillonné.

Ainsi, si $f_0 = k.F_e/N$ (avec k entier), les échantillons du spectre tombent exactement sur les zéros du sinc (Fig. 8.4a). Alors le phénomène de Gibbs, bien que présent, n'apparaît pas à la visualisation du spectre échantillonné (raie spectrale fine). Il est masqué par l'échantillonnage fréquentiel.

Par contre, si $f_0 = (k + 1/2).F_e/N$, les échantillons du spectre tombent sur les maxima des lobes secondaires du sinc (Fig. 8.4b). Alors le phénomène de Gibbs est le plus apparent (raie spectrale très large). L'échantillonnage fréquentiel révèle clairement le phénomène, dit de **fuite d'énergie** (*leakage* en anglais), où l'amplitude de la raie fréquentielle est diminuée.

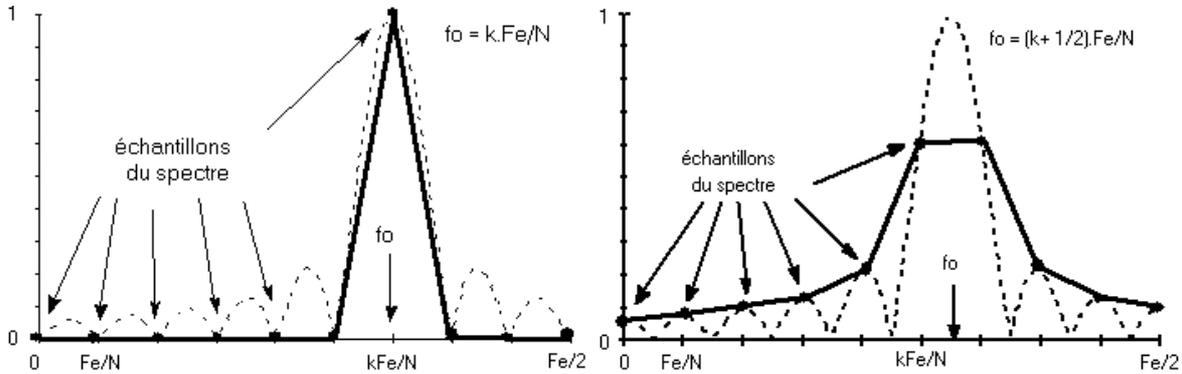


FIGURE 8.4 – Influence de l'échantillonnage fréquentiel : a) Echantillonnage passant par les zéros du sinc ; b) Echantillonnage passant par les maxima du sinc.

On peut résumer cette discussion en calculant le rapport :

$$r = \frac{f_0}{\Delta f} \text{ avec } \Delta f = \frac{F_e}{N} \text{ c'est-à-dire } r = \frac{N f_0}{F_e} = T f_0 = \frac{T}{T_0} \quad (8.21)$$

où T_0 représente la période du signal sinusoïdal. Selon la valeur de r , on sera dans un cas d'échantillonnage fréquentiel induisant plus ou moins de fuite d'énergie, les cas extrêmes correspondant respectivement à r demi-entier et r entier. Tous les cas intermédiaires sont bien sûr possibles. En pratique évidemment, on ne peut pas maîtriser ce paramètre r sans connaissance *a priori* sur le signal (il faudrait connaître f_0 ... ce qui est justement le but de l'analyse spectrale !) Il faudra donc toujours se méfier du phénomène de fuite d'énergie éventuelle avant d'interpréter un spectre ...

Dans le cas d'une analyse avec une fenêtre rectangulaire, on peut aboutir à des représentations spectrales très différentes pour des signaux de même type (cf. Fig. 8.5 pour le cas d'une sinusoïde) soit parce que l'on a modifié légèrement la fréquence d'échantillonnage ou le nombre de points acquis, soit parce que la fréquence du signal est légèrement différente. Là encore, le recours aux pondérations décrites au § 8.3.3 peut s'avérer utile.

Signalons pour finir que l'on peut également interpréter ce phénomène de fuite d'énergie d'un point de vue temporel. L'échantillonnage fréquentiel se traduit en effet par une périodisation temporelle à la période $T = N.T_e$ du signal analogique original. Le spectre échantillonné de $x_e(t)$ correspond donc en fait au spectre d'un signal périodique de période T , dont une période correspond aux N premiers échantillons de $x_e(t)$. Si le rapport T/T_0 n'est pas entier, le signal périodisé présentera des discontinuités aux raccordements des tranches de signal, qui se traduiront par des distorsions spectrales

plus ou moins importantes selon la nature de ces discontinuités. Comme $T = N.T_e$, on comprend que cette interprétation temporelle revient exactement à l'interprétation fréquentielle précédente où on calculait le rapport :

$$r = \frac{Nf_0}{F_e} = T f_0 = \frac{T}{T_0}. \quad (8.22)$$

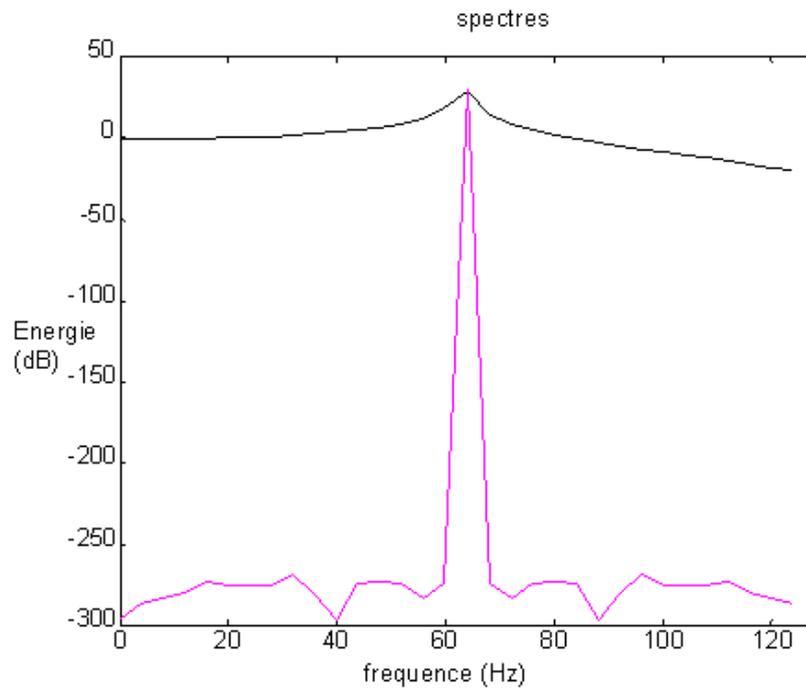


FIGURE 8.5 – Spectres discrets (TFD sur $[0; F_e/2]$) de deux signaux sinusoïdaux de fréquences très proches (64 Hz et 63.125 Hz) pour une même fréquence d'échantillonnage $F_e = 256$ Hz et un même nombre d'échantillons $N=64$.

Chapitre 9

TRANSFORMEE EN Z

9.1 Introduction sur l'échantillonnage

Notons $f^*(t)$ la fonction échantillonnée (suite d'impulsions espacées de T_e) correspondant à une fonction continue $f(t)$. Il est intéressant de poser :

$$z = e^{pT_e} \tag{9.1}$$

dans l'expression de sa TL $\phi^*(p)$ car $\phi^*(p)$ est alors une fonction rationnelle de $\exp(pT_e)$. On obtient ainsi une Transformée en Z (en abrégé TZ).

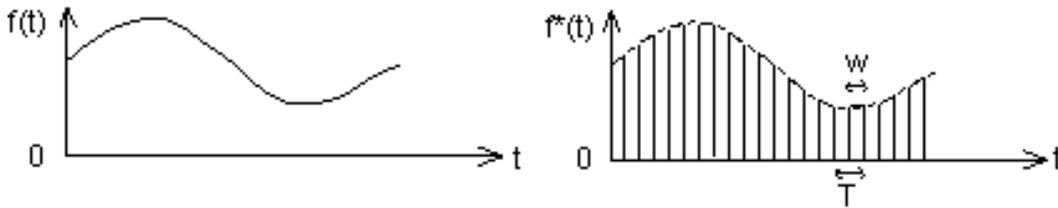


FIGURE 9.1 – Echantillonnage temporel

9.1.1 Rappel sur les distributions

9.1.1.1 Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac)

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \tag{9.2}$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{9.3}$$

9.1.1.2 Distribution

On appelle distribution T , une fonctionnelle sur D où D est l'EV des fonctions $\varphi(t)$ à valeurs complexes définies sur R , indéfiniment dérivables et à support borné.

$$T : \underset{D}{\varphi} \rightarrow \underset{C}{\langle T, \varphi \rangle}$$

Exemple : $\langle T_F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle T_\delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

NB. Distribution : pas de sens au sens des fonctions (intégrale de Riemann).

9.2 TL d'une fonction échantillonnée

- $f(t)$ continue par morceaux pour $t \geq 0$
- $f(t) = 0$ pour $t < 0$
- $f(t)$ d'ordre exponentiel α_0 ,

c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N/\forall n > N \quad \forall \alpha > \alpha_0 \quad |f(nT_e)| e^{-\alpha nT_e} < \varepsilon$

$$\phi^*(p) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_e) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(t - nT_e) e^{-pt} dt}_{e^{-nT_e p}}$$

$$\Rightarrow \phi^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) e^{-nT_e p} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > \alpha_0 \text{ (abscisse de convergence).}$$

Le changement de variable $z = e^{pT_e}$ transforme l'axe de convergence $\operatorname{Re}(p) = \alpha_0$ en le cercle :
 $z = e^{(\alpha_0 + j\omega)T_e} \Leftrightarrow |z| = e^{\alpha_0 T_e}$

$$F(z) = \phi^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} = Z[f(t)] = Z[f(nT_e)] ; |z| > e^{\alpha_0 T_e}$$

Souvent, on prend : $\boxed{T_e = 1}$

9.3 TZ des puissances de t

$$TZ [t^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k T_e^k z^{-n} \text{ converge pour } |z| > 1 \quad (\text{critère de d'Alembert})$$

$$= T_e z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} n z^{-(n+1)}$$

$$TZ [t^{k-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz} TZ [t^{k-1}] = - \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} n z^{-(n+1)} \Rightarrow TZ [t^k] = -T_e z \frac{d}{dz} Z [t^{k-1}]$$

$$\text{pour } k = 0 : TZ [1] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z| > 1$$

$$\text{Donc : } TZ [t] = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

La TZ étant obtenue avec la TL et un changement de variable, c'est donc une transformation **linéaire**.

$$\boxed{TZ [\text{polynôme en } t] = \text{fonction rationnelle en } z}$$

9.4 TZ de $f(t)e^{-at}$

$$Z [e^{-at} f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) e^{-anT_e} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) (ze^{aT_e})^{-n}$$

$$\text{donc si } F(z) = Z [f(t)] \quad \text{alors} \quad Z [e^{-at} f(t)] = F(e^{aT_e} z)$$

9.4.1 Théorème

Si $f(t)$ est une somme finie de termes du type t^k et $t^k e^{-at}$, dont la TL est d'abscisse de convergence α_0 , alors la TZ est une fraction rationnelle en z , ayant tous ses pôles à l'intérieur du cercle de rayon $e^{\alpha_0 T_e}$.

9.5 Translation temporelle

9.5.1 Retard

$$Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n}$$

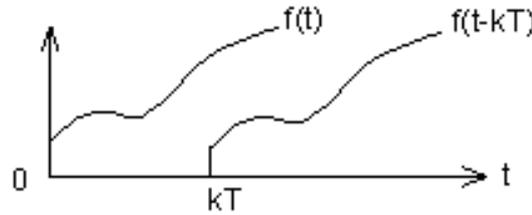


FIGURE 9.2 – Fonction retardée

Fonction retardée : $g(t) = f(t - kT_e) \cdot H(t - kT_e)$ avec : $H(t - kT_e) = 0$ pour $t < kT_e$

$$\begin{aligned} Z[g(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} g(nT_e) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[(n-k)T_e] \underbrace{H[(n-k)T_e]}_{=0 \text{ si } n < k} z^{-n} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} f[(n-k)T_e] z^{-n} = 0 + \dots + 0 + f(0) z^{-k} + f(T_e) z^{-(k+1)} + \dots \\ Z[f(t - kT_e) H(t - kT_e)] &= z^{-k} Z[f(t)] \end{aligned}$$

donc : z^{-1} = opérateur retard

9.5.2 Avance

$$\begin{aligned} Z[f(t + kT_e)] &= \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+k)T_e] z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+k)T_e] z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} f(mT_e) z^{-m} \\ Z[f(t + kT_e)] &= z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e) z^{-m} \right] \end{aligned}$$

9.6 Théorème de la valeur initiale

$$F(z) = Z[f(t)] = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} \quad ; |z| > e^{\sigma T_e}$$

La série converge uniformément pour $|z| \geq R' > e^{\sigma T_e}$ donc la limite de la série quand $|z| \rightarrow \infty$ est obtenue en prenant la limite de chaque élément terme à terme :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$$

9.7 Théorème de la valeur finale

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$$

9.7.1 Preuve

$$\begin{aligned}
 z F(z) - F(z) &= [zf(0) + Z[f(t + T_e)] - Z[f(t)]] \\
 &\Rightarrow Z[f(t + T_e) - f(t)] = (z - 1)F(z) - zf(0) \\
 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [f[(n+1)T_e] - f(nT_e)] z^{-n} &= (z - 1)F(z) - zf(0) \\
 &\quad f(T_e) - f(0) \\
 &\quad f(2T_e) - f(T_e) \\
 &\quad \dots \\
 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT_e) z^{-n} - f(0) &= (z - 1)F(z) - zf(0)
 \end{aligned}$$

Si on fait tendre z vers 1, on a : $\boxed{\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z) = f(\infty)}$

9.8 Formule d'inversion

Posons : $z = Re^{j\theta}$ dans l'équation $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n}$:

$$F(Re^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} e^{-jn\theta} \quad R > e^{\sigma T_e}$$

On peut décomposer partie réelle et imaginaire :

$$f_1(\theta) = \operatorname{Re}[F(Re^{j\theta})] \quad \text{et} \quad f_2(\theta) = \operatorname{Im}[F(Re^{j\theta})]$$

$$f_1(\theta) + j f_2(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} \cos n\theta - j \sum_{n=1}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} \sin n\theta$$

Utilisons les formules des coefficients des séries de Fourier :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta$$

$$f(nT_e) = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$f(nT_e) = -\frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta$$

Additionnons les deux dernières équations et divisons par 2 :

$$f(nT_e) = \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) \cos n\theta - f_2(\theta) \sin n\theta] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] d\theta$$

car : $F(Re^{j\theta}) = f_1(\theta) + j f_2(\theta)$ et : $R^n e^{jn\theta} = R^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$

$F(z)$ est une fonction réelle de z donc :

— $\operatorname{Re}[F]$ est fonction paire de θ

— $\operatorname{Im}[F]$ est fonction impaire de θ

Donc :

$$\operatorname{Im}[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] = \operatorname{Re}[F(Re^{j\theta})] \operatorname{Im}(R^n e^{jn\theta}) - \operatorname{Im}[F(Re^{j\theta})] \operatorname{Re}(R^n e^{jn\theta})$$

est une fonction impaire de θ , ce qui entraîne que : $\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] d\theta = 0$

On peut donc réécrire : $f(nT_e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] d\theta$

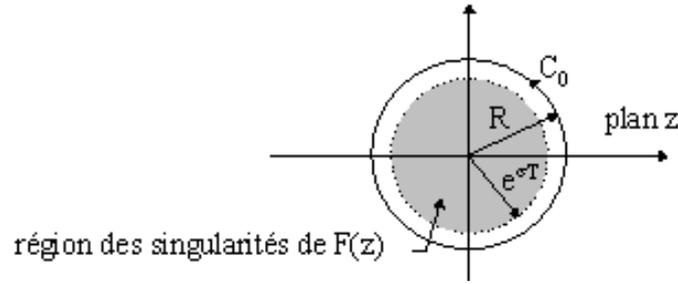


FIGURE 9.3 – Contour d’intégration utilisé pour la TZ inverse.

Considérons un contour d’intégration C_0 circulaire dans le sens direct de rayon $R > e^{\sigma T_e}$ (Fig. 9.3) :

On fait donc une intégration sur ce contour : $Re^{j\theta} = z$ et $d\theta = \frac{1}{jz}dz$

$$\text{d'où : } \begin{cases} f(nT_e) &= \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} F(z) dz \\ f(nT_e) &= \sum_k \text{Résidu} [z^{n-1} F(z); z = p_k] \end{cases} \quad \text{où } p_k = \text{pôles de } F(z)$$

que l’on peut écrire : $f(nT_e) = Z^{-1}[F(z)]$.

On voit donc que cette formule ne donne $f(t)$ que pour les valeurs entières de n .

Elle ne donne pas une détermination unique de $f(t), \forall t \in R$.

9.9 Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$

$$z = e^{pT_e} \quad \phi^*(p) = F(z)$$

comme : $e^{pT_e} = e^{(p + j\frac{2\pi n}{T_e})T_e}$ on en déduit que $F(z)$ est une fonction périodique :

$$\phi^*(p) = \phi^*\left(p + \frac{j2\pi n}{T_e}\right)$$

On a : $f^*(t) = f(t) p(t)$

$$\text{Or on montre que (formule de Poisson) : } p(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}}$$

$$\text{Donc : } f^*(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}}$$

$$\text{D'où : } \phi^*(p) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} TL \left[f(t) e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}} \right]$$

$$\text{Or : } f(t) e^{-at} \supset \phi(p+a)$$

$$\text{Donc : } TL \left[f(t) e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}} \right] = \phi\left(p - \frac{2i\pi n}{T_e}\right)$$

$$\text{Conclusion : } \phi^*(p) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(p + \frac{2i\pi n}{T_e}\right)$$

9.10 Expression de $\phi^*(p)$ à l’aide des résidus

$$\phi^*(p) = F(z) = \sum_{\substack{p_i \\ \text{pôles de } F(\nu)}} \text{Résidus} \left[\frac{F(\nu)}{1 - e^{\nu T_e} z^{-1}} \right]_{\nu = p_i}$$

Si $F(\nu) = \frac{N(\nu)}{D(\nu)}$, le résidu correspondant à un pôle simple vaut :

$$r_i = \frac{N(p_i)}{\frac{d}{d\nu} [D(\nu) (1 - e^{\nu T_e} z^{-1})]_{\nu=p_i}} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i) (1 - e^{p_i T_e} z^{-1})}$$

Donc si $F(\nu)$ n'a que des pôles simples :

$$F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}}$$

Pour des pôles multiples : pôle d'ordre n

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\nu^{n-1}} \left((\nu - p_i)^n F(\nu) \frac{1}{1 - e^{T_e \nu} z^{-1}} \right) \right]_{\nu=p_i}$$

9.10.1 Rappel sur les résidus

— cas d'un pôle simple z_0 :

$$\text{Res} [F(z) \text{ en } z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) F(z) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)} \text{ si } F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

— cas d'un pôle multiple z_0 d'ordre n :

$$\text{Res} [F(z) \text{ en } z = z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n F(z)]_{z=z_0}$$

9.11 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre

$$Z \left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

$$Z \left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT_e, a) da \right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da$$

Nous avons en effet : $F(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e, a) z^{-n}$

$$\text{Donc : } \frac{\partial F(z, a)}{\partial a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial f(nT_e, a)}{\partial a} z^{-n} = Z \left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a) \right]$$

$$\text{Exemple : calculer } Z \left[\frac{1}{(p+a)^2} \right] = \frac{T_e e^{-aT_e} z}{(z - e^{-aT_e})^2}$$

$$\text{sachant que : } Z \left[\frac{1}{p+a} \right] = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

9.12 Théorème de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(nT_e)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz$$

Preuve : on utilise la formule d'inversion.

9.13 Théorème de convolution discrète

$$F_1(z) = Z [f_1(t)] = \sum_0^{\infty} f_1(nT_e) z^{-n}$$

$$F_2(z) = Z [f_2(t)] = \sum_0^{\infty} f_2(nT_e) z^{-n}$$

$$F_1(z) F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(kT_e) z^{-(n+k)}$$

Posons $m = n + k$

$$F_1(z) F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} f_1(nT_e) f_2[(m-n)T_e] z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2[(m-n)T_e] z^{-m}$$

car : $f_2[(m-n)T_e] = 0$ pour $m < n$.

Posons : $C(mT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2((m-n)T_e)$ et $t = mT_e$

$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e)$ produit de convolution discrète

On a : $F_1(z) F_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C(mT_e) z^{-m} = Z[C(t)]$

D'où : $F_1(z) F_2(z) = Z\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e)\right]$

C'est-à-dire :

$$\boxed{F_1(z) \cdot F_2(z) = Z[f_1(t) * f_2(t)]}$$

NB : En fait, la sommation n'est pas infinie mais s'arrête à $nT_e = t$ (causalité de f_2). [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]

9.14 Vademecum sur la Transformée en Z

On pose : $z = e^{pT_e}$

Définition :

$$Z[f(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} \quad |z| > e^{\sigma T_e}$$

TRANSFORMEE EN Z DES PUISSANCES DE t :

$$Z[t^k] = -T_e z \frac{d}{dz} Z[t^{k-1}] \quad ; \quad Z[1] = \frac{z}{z-1} \quad , \quad |z| > 1 \quad ; \quad Z[t] = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

TRANSFORMEE EN Z DE $f(t)e^{-at}$:

$$Z[e^{-at} f(t)] = F(e^{aT_e} z) \quad ; \quad Z[e^{-at}] = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

RETARD TEMPOREL :

$$Z[f(t - kT_e)] = z^{-k} Z[f(t)]$$

AVANCE TEMPORELLE :

$$Z[f(t + kT_e)] = z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e) z^{-m} \right]$$

THEOREME DE LA VALEUR INITIALE :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$$

THEOREME DE LA VALEUR FINALE :

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z)$$

THEOREME DE CONVOLUTION DISCRETE :

$$\begin{cases} F_1(z) = Z[f_1(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) z^{-n} \\ F_2(z) = Z[f_2(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT_e) z^{-n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z[f_1(t) * f_2(t)] = Z\left[\sum_{n=0}^{t/T_e} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e)\right]$$

DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT A UN PARAMETRE :

$$Z\left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a)\right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \quad ; \quad Z\left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT_e, a) da\right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da$$

THEOREME DE PARSEVAL :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(nT_e)]^2 = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz$$

FORMULE D'INVERSION :

$$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} F(z) dz = \sum_i \text{Résidu} [z^{n-1} F(z); z = p_i]$$

Chapitre 10

RECAPITULATIF SUR LES TRANSFORMEES

10.1 Rappel sur les distributions

Définition

On appelle distribution T , une fonctionnelle sur D où D est l'espace vectoriel (EV) des fonctions $\varphi(t)$ à valeurs complexes définies sur R , indéfiniment dérivables et à support borné.

$$T : \underset{D}{\varphi} \rightarrow \underset{C}{\langle T, \varphi \rangle}$$

Exemple : $\langle T_F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle T_\delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

NB. Distribution : pas de sens au sens des fonctions (intégrale de Riemann).

Distribution de Dirac

Définie par une limite : $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x)$ où $I_\epsilon(x)$ est une impulsion infiniment courte (durée ϵ) et infiniment haute (amplitude $1/\epsilon$) :

On en déduit :

— la parité : $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(x - a) = \delta(a - x)$

— l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Produit simple :

— distribution pondérée par la valeur de la fonction : $\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)$

— cas particulier où $a = 0$: $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$

Elément neutre de la convolution (preuve par la TL : $H(p) = 1$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - u)f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(x - u)du = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

De même : $\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$

On en déduit les **intégrales** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$$

Dérivée : $f'(x) = f(x) * \delta'(x)$

Dérivée nième : $f(x) * \delta^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$

10.2 Développement en Série de Fourier

Soit une fonction $f(t)$:

- périodique de période T
- définie dans un intervalle $[\theta, \theta + T]$,
- satisfaisant les conditions de Dirichlet (discontinuités de 1ère espèce).

Alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \end{aligned}$$

On peut poser : $\begin{cases} a_k = A_k \cos \varphi_k \\ b_k = A_k \sin \varphi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k = \text{Arctg} \frac{b_k}{a_k} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k \right)$$

Terminologie

- a_0 représente la **composante continue**
- A_1 représente l'amplitude du **fondamental**
- A_k représente l'amplitude de l'**harmonique** de rang k
- φ_k représente le **déphasage**
- $\nu = 1/T$ représente la **fréquence** fondamentale
- $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ représente la **pulsation** de base.

Formule de Bessel-Parseval

On a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2}$$

Définition de la valeur efficace

$$V_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} [f(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{C'est-à-dire : } V_{eff}^2 = \underbrace{\langle [f(t)]^2 \rangle}_{\uparrow \text{valeur moyenne}}$$

DSF Exponentiel

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp \left(\frac{j2\pi kt}{T} \right) \quad \text{avec} \quad c_k = F(k) = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp \left(-\frac{j2\pi kt}{T} \right) dt$$

Pour un signal réel, on a $c_k^* = c_k$ d'où :

$$a_0 = c_0 \tag{10.1}$$

$$a_k = 2\Re[c_k] \tag{10.2}$$

$$b_k = -2\Im[c_k] \tag{10.3}$$

10.3 Tableau récapitulatif de la TL

Domaine du temps $t \in \mathcal{R}$ où $t > 0$	\xrightarrow{TL} $\xleftarrow{TL^{-1}}$	Domaine de fréquence généralisée $p \in \mathcal{C}$ avec $Re(p) = \sigma > \sigma_o$
$f(t)$	\supset	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \subset f(t)$
df/dt	\supset	$pF(p) - f(0^+)$
$f(t) * g(t)$	\supset	$F(p).G(p)$
$f(0^+)$	$=$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
$f(t - t_0)$	\supset	$e^{-pt_0} F(p)$
$e^{-at} f(t)$	\supset	$F(p + a)$
$a.f(at)$	\supset	$F(p/a)$
$f^{(n)}(t)$	\supset	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-1)^n t^n f(t)$	\supset	$F^{(n)}(p)$
$\delta(t)$	\supset	1
$\delta^{(n)}(t)$	\supset	p^n
$H(t) = 1_{t>0}$	\supset	$1/p$
t	\supset	$1/p^2$
$t^n/n!$	\supset	$1/p^{n+1}$
e^{-at}	\supset	$1/(p + a)$
$\sin \omega t$	\supset	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	\supset	$p/(p^2 + \omega^2)$
$\sinh at$	\supset	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh at$	\supset	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{-at} t^n/n!$	\supset	$1/(p + a)^{n+1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	\supset	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	\supset	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{bt} \sinh at$	\supset	$\frac{a}{(p-b)^2 - a^2}$
$e^{bt} \cosh at$	\supset	$\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	\supset	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	\supset	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$[(b-a)t + 1]e^{-at}$	\supset	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
$t \sin \omega t$	\supset	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	\supset	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3}$	\supset	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$

10.4 Tableau récapitulatif de la TF

Domaine du temps continu $t \in \mathcal{R}$	\xrightarrow{TF} $\xleftarrow{TF^{-1}}$	Domaine des fréquences $\nu \in \mathcal{R} \ (\omega = 2\pi\nu)$
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu$		$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$
$f(-t)$		$F(-\nu)$
$f(t/a)$		$ a F(a\nu)$
$f(t) * g(t)$		$F(\nu).G(\nu)$
$f(t).g(t)$		$F(\nu) * G(\nu)$
$f(t - t_0)$		$e^{-j2\pi t_0\nu} F(\nu)$
$e^{j2\pi\nu_0 t} f(t)$		$F(\nu - \nu_0)$
$f^{(n)}(t)$		$(j2\pi\nu)^n F(\nu)$
$(-j2\pi t)^n f(t)$		$F^{(n)}(\nu)$
$\overline{f(t)}$		$\overline{F(-\nu)}$
$\delta(t)$		1
1		$\delta(\nu)$
$\delta(t - t_0)$		$e^{-j2\pi t_0\nu}$
$e^{j2\pi\nu_0 t}$		$\delta(\nu - \nu_0)$
$\delta^{(n)}(t)$		$(j2\pi\nu)^n$
$(j2\pi t)^n$		$(-1)^n \delta^{(n)}(\nu)$
$\Pi_T(t)$		$T \text{sinc}(\pi\nu T)$
$\text{sin}(\pi t)/(\pi t)$		$\Pi_1(\nu)$
$\wedge_T(t)$		$(T/2)\text{sinc}^2(\pi\nu T/2)$
$H(t)$		$\frac{\delta(\nu)}{2} - \frac{j}{2\pi\nu}$
$\text{sign}(t)$		$-\frac{j}{\pi\nu}$
$\cos 2\pi\nu_0 t$		$\frac{1}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$
$\sin 2\pi\nu_0 t$		$\frac{j}{2}[\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$
$\exp(-\pi t^2)$		$\exp(-\pi\nu^2)$
$e^{-t}H(t)$		$1/(1 + j2\pi\nu)$
$e^{- t }$		$2/(1 + 4\pi^2\nu^2)$
$te^{-\pi t^2}$		$-j\nu e^{-\pi\nu^2}$
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$F_0 = \frac{1}{T_0}$	$F_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - nF_0)$
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)$	$T_0 = 1$	$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n)$
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n t}$	Formule de Poisson	$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n \nu}$

10.5 Tableau récapitulatif de la TZ

Domaine du temps échantillonné $t = nT_e \Rightarrow f(t) = f(nT_e) = f(n)$	$\frac{TZ}{\leftarrow}$ $\frac{TZ^{-1}}{\rightarrow}$	Domaine des fréquences $F(z)$ $z = e^{pT_e} \in \mathcal{C}$
$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} \frac{F(z)}{z} z^n dz$	\leftrightarrow	$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n}$
$f(t - kT_e) = f(n - k)$	\leftrightarrow	$z^{-k}F(z)$
$f(t + kT_e) = f(n + k)$	\leftrightarrow	$z^k F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{k-n} f(nT_e)$
$f_1(t) * f_2(t) = \sum_{k=0}^{t/T_e=n} f_1(kT_e) f_2(t - kT_e)$	\leftrightarrow	$F_1(z) \cdot F_2(z)$
$f(0)$	$=$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$
$f(t)e^{-at}$	\leftrightarrow	$F(ze^{aT_e})$
$f(t)a^t$	\leftrightarrow	$F\left(\frac{z}{aT_e}\right)$
$tf(t)$	\leftrightarrow	$-T_e z F'(z)$
$\delta(t)$	\leftrightarrow	1
$\delta(t - kT_e)$	\leftrightarrow	z^{-k}
$H(t)$	\leftrightarrow	$z/(z-1)$
e^{-at}	\leftrightarrow	$z/(z - e^{-aT_e})$
a^t	\leftrightarrow	$z/(z - a^{T_e})$
t	\leftrightarrow	$T_e z/(z-1)^2$
t^2	\leftrightarrow	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
te^{-at}	\leftrightarrow	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}$
$e^{-at}t^2/2$	\leftrightarrow	$\frac{zT_e^2 e^{-aT_e}}{2(z - e^{-aT_e})^2} + \frac{zT_e^2 e^{-2aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^3}$
$\sin \omega t$	\leftrightarrow	$z \sin \omega T_e / (z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1)$
$\cos \omega t$	\leftrightarrow	$z(z - \cos \omega T_e) / (z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1)$
$e^{-at} \sin \omega t$	\leftrightarrow	$z e^{-aT_e} \sin \omega T_e / (z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e})$
$e^{-at} \cos \omega t$	\leftrightarrow	$z(z - e^{-aT_e} \cos \omega T_e) / (z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e})$
$\sinh \omega t$	\leftrightarrow	$z \sinh \omega T_e / (z^2 - 2z \cosh \omega T_e + 1)$
$\cosh \omega t$	\leftrightarrow	$z(z - \cosh \omega T_e) / (z^2 - 2z \cosh \omega T_e + 1)$

10.6 Tableau synthétique des transformées

Transformée	Liens	Directe	Inverse
TF énergie finie	$\omega = 2\pi\nu$	$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{+j2\pi\nu t} d\nu$
TFDT échantillonné	$t = nT_e$ $F_e = 1/T_e$	$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi\nu nT_e)$	$x_n = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu nT_e) d\nu$
TFDT fréq. réduite	$u = \frac{\nu}{F_e}$ $(F_e = 1)$	$X(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi nu)$	$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(u) \exp(j2\pi nu) du$
TFD (FFT) durée tronquée	$\nu = \frac{kF_e}{N}$ $T = NT_e$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j\frac{2\pi nk}{N})$	$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(+j\frac{2\pi nk}{N})$
DSF périodique	$\nu_k = \frac{k}{T_0}$ période T_0	$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T_0}\right)$
TL analogique causal	$p = j\omega$ $C = 0$	$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$	$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p)e^{pt} dp$
TZ numérique	$z = e^{pT_e}$ $t = nT_e$ C_0 cercle U	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)z^{-n}$	$x(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} X(z) dz$ $= \sum_i \text{Résidu} [z^{n-1} X(z); z = p_i]$

Chapitre 11

TD - FRACTIONS, INTEGRATION

11.1 Décomposition des fractions rationnelles

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \frac{5x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2(x - 3)} \\F_2(x) &= \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} \\F_3(x) &= \frac{5x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 3x + 3)^2(x - 3)} \\F_4(x) &= \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 4} \\F_5(x) &= \frac{6x^2 - x + 1}{x(x^2 - 1)} \\F_6(x) &= \frac{2x^2 + 13}{(x - 2)^2(x + 5)} \\F_7(x) &= \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1}\end{aligned} \tag{11.1}$$

11.2 Intégration

1. Calculer en décomposant la fraction :

$$I_1 = \int \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

2. Montrer par le calcul que ces 2 intégrales impropres valent $\frac{\pi}{2}$:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Calculer par intégration par parties et récurrence :

$$I_n = \int x^n \cdot e^x \cdot dx$$

4. Calculer par changement de variable évident :

$$I_4 = \int \cot x dx$$

5. Calculer, en développant les intégrandes, les primitives de :

$$I_5 = \int \frac{x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{1/3}} dx \quad \text{et} \quad I_6 = \int \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

6. Calculer par changement de variable évident :

$$I_7 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$$

7. Calculer par intégration par parties répétée :

$$I_8 = \int x^2 e^{2x} dx$$

8. Calculer par changement de variable $x = a \sin^2 t$ (à justifier) :

$$I_9 = \int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} dx$$

9. Etablir une formule de récurrence pour : $I_n = \int (\log x)^n dx$

En déduire la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}^+$.

10. Calculer par intégration par parties :

$$I_{10} = \int x \tan^2 x dx$$

Chapitre 12

TD - EQUATIONS DIFFERENTIELLES

12.1 EDL du 1er ordre : Circuit RL série

Le circuit de la Fig. 12.1 est régi par l'équation :

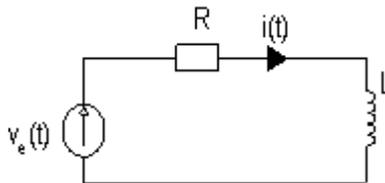


FIGURE 12.1 – Circuit RL série

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (12.1)$$

où $e(t)$ est la tension d'excitation du circuit et $i(t)$ le courant. On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$. Calculer et tracer $i(t)$ (pour $t > 0$) quand :

1. $e(t) = E.H(t)$ est un échelon d'amplitude E
2. $e(t) = \alpha t.H(t)$ est une rampe de pente α
3. A.N. : $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$

12.2 EDL du second ordre

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (12.2)$$

avec pour conditions initiales : $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

A.N. : 1) $\omega_0 = 1$; 2) $\omega_0 = 3$.

12.3 Circuit RLC parallèle

Soit le circuit de la Fig. 12.2, où $R = 12k\Omega$; $L = 10mH$ et $C = 10nF$.

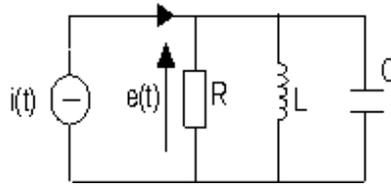
Les lois de l'électronique définissent $e(t)$ par :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{LC} e(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt}$$

On donne les conditions initiales : $e(0) = 0$ et $\frac{de}{dt}(0) = \frac{I_0}{C}$ avec $I_0 = 3mA$.

Trouver $e(t)$ pour :

1. $i(t) = I_0.H(t)$
2. $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

FIGURE 12.2 – Circuit RLC parallèle

12.4 Régime apériodique

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt} + u(t) = \sin(2t)$$

avec les conditions initiales : $u(0) = E$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

12.5 Propagation d'un virus

Un virus se propage dans la population d'une île. Une étude démographique a montré que l'effectif de sa population reste constant. A l'instant initial $t_0 = 0$, le virus touche 0.1% de la population. Cinq jours plus tard $t_1 = 5$, la contamination concerne 0.5 % de la population.

Des chercheurs ont modélisé la diffusion du virus. Si $p(t)$ désigne le pourcentage d'îliens atteints du virus à l'instant t , ils font l'hypothèse que la vitesse de propagation du virus, $p'(t)$, est proportionnelle :

- à $p(t)$ (le risque de contamination augmente avec le nombre de personnes déjà contaminées)
- à $100 - p(t)$ (le nombre de nouveaux cas de contamination est plus élevé si la population saine susceptible d'être atteinte est très nombreuse)

Le modèle proposé s'exprime donc par une EDL du premier ordre :

$$p'(t) = ap(t)(100 - p(t))$$

où a désigne une constante réelle non nulle liée à la population.

12.5.1 Résolution par changement de fonction

Résoudre en posant :

$$y = \frac{1}{p}$$

1. Exprimer l'EDL qui régit y .
2. Déterminer l'unique solution f de l'équation satisfaisant les conditions initiales à t_0 et à t_5 .
3. Représentation graphique de f pour $t \in [0; T]$ où $T =$
4. Déterminer à quel instant 95% de la population sera atteinte par le virus.

12.6 NB : Révisions complémentaires

- Identités remarquables : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Equation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$
- Polynôme caractéristique d'une EDL à coefficients constants :
 $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$
- Equation d'une droite de pente a : $y = ax + b$
- Intégration par parties : $\int u'v = [uv] - \int uv'$
 cf. preuve triviale : $(uv)' = u'v + uv'$
- Trigonométrie
- Notion de constante de temps

Chapitre 13

TD - TRANSFORMÉE DE LAPLACE

13.1 Calculs de transformées

1. Calculer les transformées de Laplace des signaux de la Fig. 13.1 :

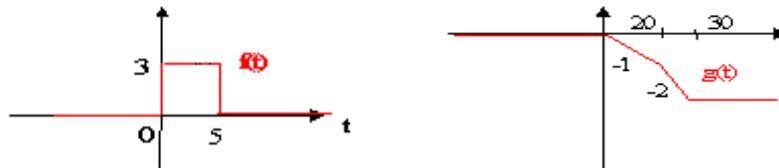


FIGURE 13.1 – a) Impulsion rectangulaire ; b) Fonction linéaire par morceaux.

2. Donner les transformées de Laplace des fonctions suivantes en justifiant les réponses :

- $f(t) = -2 \cos(t) + 3 \sin(t)$
- $g(t) = e^{5t} \sin(t)$
- $h(t) = -2 \cos(5t) + 3 \sin(5t)$
- $k(t) = e^{5t} \sin(2t)$

13.2 Résolution d'une équation différentielle

A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) = \sin(\omega_0 t).$$

avec pour conditions initiales : $u(0) = a$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

- A.N. : 1) Application au cas simple : $a = 0$, $\omega_0 = 1$;
- A.N. : 2) Application au cas : $a = 0$, $\omega_0 = 3$;
- A.N. : 3) Application au cas : $a = 1$, $\omega_0 = 1$.

13.3 Calcul d'un original

Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit ayant la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p^2+2p+2)} \quad \subset \quad h(t)$$

Pour cela :

- Décomposer d'abord la fraction en éléments simples,
- Puis identifier avec les transformées usuelles dans les tables.

13.4 Application électrique : Circuit RC

Déterminer la réponse indicielle (*i.e.*, à un échelon) d'un circuit RC, puis sa réponse à une sinusoïde.

13.5 Circuit RLC série

Déterminer la réponse à une sinusoïde d'un circuit RLC série.

A.N. : $R = 12k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 10nF$.

13.6 Généralisation de la notion d'impédance

Soit le circuit de la Fig. 13.2. Les condensateurs ont, à leurs bornes , des tensions E_1 et E_2 . A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

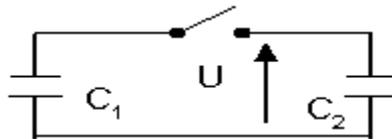


FIGURE 13.2 – Commutation de capacités

Déterminer $u(t)$ en utilisant la transformée de Laplace.

13.7 Etude de circuit

Soit le circuit de la Fig. 13.3 où $u_2(0^-) = 0$ et $u(t)$ est un échelon de Heaviside d'amplitude E .

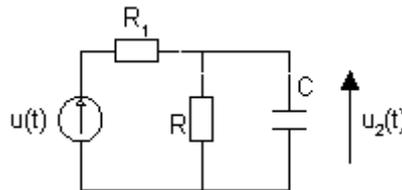


FIGURE 13.3 – Filtre de courant R//C

Déterminer $u_2(t)$ en utilisant la méthode mathématique traditionnelle puis la transformée de Laplace.

13.8 Peigne de Dirac et Produit de Convolution - Echantillonnage

Soit un signal $s(t)$ nul en dehors d'un intervalle de temps borné.

Soient les signaux suivants (où $\Pi(t)$ est le peigne de Dirac) :

$$s_p(t) = s(t) * \Pi(t) \text{ et } s_e(t) = s(t) \cdot \Pi(t)$$

1. Exprimer $s_p(t)$ et $s_e(t)$, puis représenter $s(t)$, $s_p(t)$ et $s_e(t)$.
2. Calculer les transformées de Laplace de $s_p(t)$ et $s_e(t)$.

13.9 Résolution d'équation différentielle par TL

Déterminer à l'aide du calcul symbolique la solution de Heaviside de l'équation différentielle :

$$y^{(2)}(t) + 6y'(t) + 9y(t) = t^2 \exp(-3t)$$

Chapitre 14

TD - FONCTION DE TRANSFERT

14.1 Bode Nyquist du premier ordre

14.1.1 Fonctions élémentaires

— Tracer les diagrammes de Bode des fonctions suivantes :

1. $T(j\omega) = -5$
2. $T(j\omega) = -0.5$
3. $T(j\omega) = 0.5$
4. $T(j\omega) = 10$
5. $T(j\omega) = 2j\omega$
6. $T(j\omega) = -3j\omega$
7. $T(j\omega) = \frac{4}{j\omega}$
8. $T(j\omega) = \frac{-3}{j\omega}$
9. $T(j\omega) = 2 + 3j\omega$
10. $T(j\omega) = 2 - 3j\omega$
11. $T(j\omega) = -2 - 3j\omega$
12. $T(j\omega) = -2 + 3j\omega$
13. $T(j\omega) = \frac{5}{1+j\omega}$
14. $T(j\omega) = \frac{2}{1-3j\omega}$

— Tracer les diagrammes de Nyquist des fonctions n° 1 à 12.

N.B. : On commencera par les questions en gras.

14.1.2 Fonctions composées

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions suivantes :

$$T(j\omega) = \frac{10j\omega(2-3j\omega)}{1+j\omega}$$

$$T(j\omega) = -5 \frac{2}{1-3j\omega} \frac{4}{j\omega} (2-3j\omega)$$

14.2 Amplificateur à résistance compensée

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions suivantes :

$$H_1(p) = \frac{R}{RCp+1}$$

$$H_2(p) = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}$$

On pourra poser :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; k = \frac{\omega_0}{\omega_c}$$

A.N. : On donne :

$$R = 1k\Omega ; C = 1\mu F ; k = 1.51$$

14.3 Filtre correcteur à avance de phase

Le circuit électrique de la Fig. 14.1 est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C}v_s(t) = \frac{dv_e(t)}{dt} + \frac{1}{R_0C}v_e(t) \quad \text{où : } \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}$$

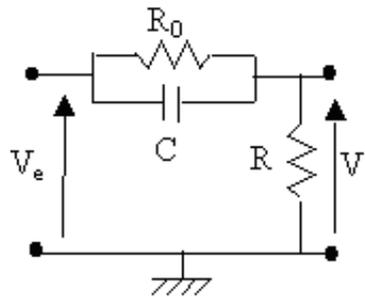


FIGURE 14.1 – Réseau à avance de phase

1. On suppose le circuit relaxé (conditions initiales nulles).
Exprimer sa fonction de transfert $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$.
On posera : $\tau_0 = R_0C = 1/\omega_0$ et $\tau_1 = R_1C = 1/\omega_1$.
2. Tracer les courbes asymptotiques de Bode (gain et phase pour $p = j\omega$).
A.N. : $R = 1k\Omega$; $R_0 = 9k\Omega$; $C = 1\mu F$
3. Que vaut le gain statique (quand $\omega \rightarrow 0$) et le gain en HF (quand $\omega \rightarrow \infty$) ?
4. Pourquoi appelle-t-on ce circuit un réseau à avance de phase ?

Rappel :

Soit un quotient complexe : $z = \frac{z_1}{z_2} \in \mathcal{C}$. Alors :

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow |z|_{dB} = |z_1|_{dB} + \left| \frac{1}{z_2} \right|_{dB} = |z_1|_{dB} - |z_2|_{dB}$$

et

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

Chapitre 15

TD - SERIES DE FOURIER

15.1 DSF d'un signal carré

Soit un signal carré pair $s(t)$ de période T , d'amplitude E , et valant $+E$ en $t = 0$. Calculer son DSF.

Démo : programme matlab (cf. DSF09.m)

15.2 DSF : Redressement double alternance

Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction suivante :

$$x(t) = A|\sin(\omega t)|$$

qui correspond au signal électrique du redressement double alternance.

15.3 DSF d'un signal en dents de scie

Calculer le DSF d'un signal périodique en dents de scie de période T et d'amplitude A défini par l'équation :

$$s(t) = \frac{A}{T}t \quad \text{pour } [0, T]$$

On pourra poser : $\omega = 2\pi/T$.

15.4 Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire

1. Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction triangulaire définie par la courbe de la Fig. 15.1 (après avoir choisi l'origine des temps et des ordonnées à votre convenance) :

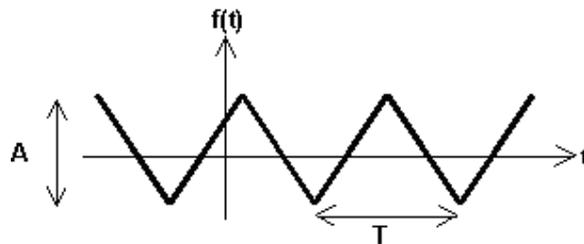


FIGURE 15.1 – Signal triangulaire

2. Représenter graphiquement l'allure du spectre correspondant (module des coefficients de Fourier).
3. Interpréter.

15.5 DSF Onduleur

Un onduleur à commande décalée est un montage qui permet, à l'aide d'un générateur et de quatre interrupteurs électroniques bidirectionnels tantôt ouverts, tantôt fermés, d'obtenir une tension u aux bornes d'un récepteur, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de la forme indiquée Fig. 15.2 [2].

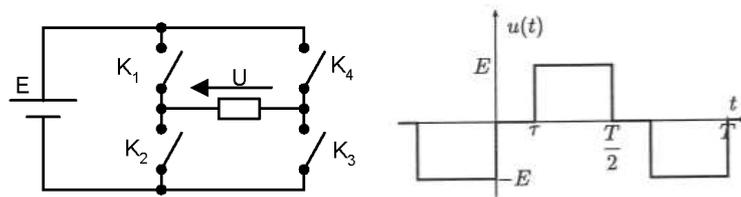


FIGURE 15.2 – Tension $u(t)$ d'un onduleur

1. Montrer que le D.S.F. du signal u peut s'écrire :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cos \left[(2k+1)\omega \frac{\tau}{2} \right] \sin \left[(2k+1)\omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

Pour faciliter le calcul, on s'intéressera d'abord au signal v décalé dans le temps : $v(t) = u(t + \tau/2)$ dont on donnera le DSF. On en déduira ensuite le DSF de $u(t) = v(t - \tau/2)$.

2. Tracer l'allure du spectre d'amplitude correspondant à u . Interpréter.
3. Déterminer les décalages horaires τ qui permettent l'élimination de l'harmonique de rang 3, puis celui de rang 5.

Chapitre 16

TD - TRANSFORMÉE DE FOURIER

16.1 Calculs de transformée de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier d'une porte centrée de largeur T et d'amplitude A . Interprétation sur l'effet spectral de la troncature temporelle d'un signal.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction de la Fig. 16.1 après avoir choisi l'origine des temps et des ordonnées.

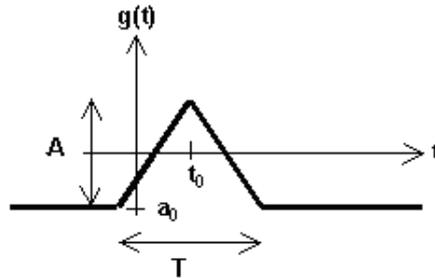


FIGURE 16.1 – Triangle

16.2 Transformée de Fourier : Modulation d'amplitude et analyse spectrale

Un signal modulé en amplitude s'exprime par :

$$s(t) = [1 + Km(t)]p(t)$$

où :

- K est le taux de modulation (variable de 0 à 1). On prend ici : $K = 50\%$
- $m(t)$ est le signal modulant. On prendra ici : $m(t) = \sin 2\pi f_m t$
- $p(t)$ est la porteuse HF : $p(t) = A_p \sin 2\pi f_p t$ où $f_p \gg f_m$

1. Développer $s(t)$ en une somme de fonctions sinusoïdales élémentaires.
2. En déduire les trois fréquences présentes dans le signal.
3. A la réception, on observe ce signal sur une durée T , c'est-à-dire qu'on ne voit au récepteur qu'une portion du signal émis : $r(t) = s(t) \cdot \Pi_T(t)$, où $\Pi_T(t)$ est la porte centrée de largeur T . Rappeler ce que vaut la TF de la fonction porte (et dessiner sommairement son allure en précisant les abscisses des passages par zéro).
4. En déduire $R(\nu)$, la TF de $r(t)$.
5. Représenter sommairement l'allure du spectre correspondant (module de la TF : $|R(\nu)|$), dans le cas où T est très grand.

6. En considérant comme négligeables les lobes secondaires d'un sinus cardinal, quelle est la durée d'observation minimale T_{min} nécessaire pour bien distinguer les différentes raies spectrales (i.e. les fréquences présentes dans le signal) à la réception ?

16.3 Transformée de Fourier : diffusion de la chaleur

L'équation de diffusion de la chaleur dans le cas mono-dimensionnel est :

$$a \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

où t est la variable temporelle, x la variable spatiale, $f(x, t)$ la fonction température, et $a > 0$ un coefficient constant caractéristique du matériau.

Le matériau étudié est supposé indéfini suivant la direction Ox (c'est-à-dire qu'il s'agit du cas limite d'un barreau très fin et très long), de sorte qu'il n'existe qu'une condition initiale à satisfaire : $f(x, 0) = f_0(x)$ correspondant à l'instant $t = 0$.

On désigne par $F(X, t)$ la transformée de Fourier de $f(x, t)$ par rapport à la variable x , t **jouant alors le rôle d'un simple paramètre.**

1. Donner l'image par transformation de Fourier de l'équation de diffusion
2. Déterminer la transformée de Fourier $F(X, t)$ en fonction de $F_0(X)$, transformée de Fourier de $f_0(x)$.
3. Par application du théorème du produit de convolution (et de celui du changement d'échelle), en déduire la solution temporelle correspondante $f(x, t)$.
4. Dessiner sommairement son graphe à trois instants successifs $t_0 = 0 < t_1 < t_2$.
5. Interpréter.

Chapitre 17

TD - TRANSFORMEE EN Z

17.1 Filtrage numérique

On étudie un système numérique réalisant un filtre passe-bas du premier ordre entre le signal d'entrée $e(n)$ et le signal de sortie $s(n)$:

$$s(n) = a.s(n-1) + (1-a).e(n-1)$$

1. Dessiner le schéma du circuit numérique implantant ce filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert en z , $H(z)$, associée à ce système.
3. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système et la représenter ($0 < a < 1$).
4. A.N. : $a = 1/4$.
5. Mêmes questions que ci-dessus pour : $s(n) + 5.s(n-1) = e(n-2) + 3.e(n)$. Conclusion ?

17.2 Transformation directe et inverse

1. Calculer les TZ de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$.
2. Calculer l'original de $\phi(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ puis calculer $F(z)$.
3. Montrer que, si $F(z) = Z[f(t)]$, alors $Z\left[\sum_{k=0}^n f(kT_e)\right] = \frac{z}{z-1}F(z)$. Interprétation ?
4. Rechercher l'original de $F(z) = \frac{3z^3-12z^2+11z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, c'est-à-dire retrouver les échantillons $f(nT_e)$ par deux méthodes différentes :
 - division selon les puissances croissantes de z^{-1}
 - décomposition de la fraction en éléments simples.

17.3 Echantillonnage

1. Soit le signal analogique non causal $s(t) = t + 1$. Le représenter.
2. On considère son échantillonnage à la période $T_e = 0.5s$. Représenter le signal échantillonné $s^*(t)$.
3. Soit $s_1(t) = s(t).H(t)$. Représenter $s_1^*(t)$ le signal échantillonné et calculer sa transformée en z .
4. Même question pour : $s_2(t) = s(t+1).H(t)$ et $s_3(t) = s(t-1).H(t-1)$.

17.4 Résolution d'équation de récurrence par la TZ

Résoudre l'équation de récurrence linéaire à coefficients constants :

$$u_n - 3u_{n+1} + u_{n+2} = 0$$

avec pour condition initiale : $u_1 = 2u_0$.

Dans l'expression de la TZ, on prendra, sans perte de généralité : $T_e = 1$

Formulaire :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{Argcosh}\left(\frac{3}{2}\right) = \operatorname{Argsinh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0.9624$$

$f(t)$ où $t = nT_e$	$F(z)$ $= TZ[f(t)]$
$\sinh(\omega_0 t)$	$\frac{z \sinh(\omega_0 T_e)}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T_e) + 1}$
$\cosh(\omega_0 t)$	$\frac{z[z - \cosh(\omega_0 T_e)]}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T_e) + 1}$

Chapitre 18

TD - SUITES & SERIES NUMERIQUES

18.1 Exemple assassin de raisonnement par récurrence

On dira l'histoire cruelle, mais pas inutilement, parce qu'elle illustre à merveille le raisonnement par récurrence [20].

A Bagdad, un sultan ayant découvert la félonie de l'une de ses maîtresses décide d'éliminer de sa ville toutes les femmes infidèles. Ordre est donc donné aux maris trompés de tuer leurs épouses en cas de culpabilité.

Chaque homme connaît la fidélité ou l'infidélité de toutes les femmes de Bagdad, excepté la situation de sa propre épouse (on suppose, pour la beauté du raisonnement, que tous les hommes de Bagdad sont monogames), lui seul a pourtant le droit de tuer son épouse en cas d'infidélité.

Par ailleurs, un héraut annonce chaque soir s'il y a encore, ou non, des femmes infidèles à Bagdad. Ce héraut est, de tous les hommes de la ville, le seul à connaître la fidélité ou l'infidélité de toutes les femmes et l'on suppose qu'il n'est pas marié.

Le héraut annonce 82 soirs de suite : "Il y a encore des femmes infidèles à Bagdad !" Mais le 83ème soir, il peut proclamer : "Il n'y a plus de femme infidèle à Bagdad !"

Question : Combien y avait-il de femmes infidèles à Bagdad et que s'est-il passé ?

18.2 Calcul de sommes de séries numériques

1. On considère la série de terme général $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Montrer que cette série converge. Décomposer u_k en une somme de deux termes. En déduire la somme de cette série.
2. On considère la série $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \rightarrow S$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que cette série converge. Donner l'encadrement du reste de cette série. Calculer la valeur de S avec une précision de 10^{-2} .

18.3 Convergence des séries entières

1. Donner les valeurs de x pour lesquelles les séries suivantes convergent :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k + \frac{1}{2^k x^k} \right) \quad (18.1)$$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k 3^k \log(k)} \quad (18.2)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2k-1}}{2k 4^k} \quad (18.3)$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \left(\frac{x}{2} \right)^k \quad (18.4)$$

2. Discuter suivant les valeurs de x la convergence des séries :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (2-x)^n \quad (18.5)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n (2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} \quad (18.6)$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x-2)^n} \quad (18.7)$$

18.4 Décomposition en séries de Fourier et Calcul de séries

On considère la fonction $f(x)$ de période 2π définie dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ par la représentation de la Fig. 18.1.

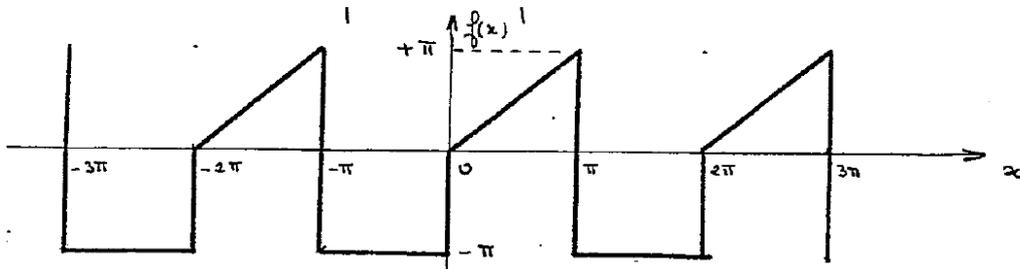


FIGURE 18.1 – Fonction périodique

1. Montrer que $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet.
2. Calculer les coefficients du développement de $f(x)$.
3. Poser $x = 0$ et en déduire la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Vérifier ce résultat en posant $x = \pi$.
4. Poser $x = \pi/2$ et en déduire la somme $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
5. Par application de la formule de Bessel-Parseval, sachant que $S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et compte tenu de la valeur de S_1 , donner la valeur de la somme $S_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$
6. On considère maintenant la fonction $g(x) = \frac{df}{dx}$. Représenter $g(x)$ dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Calculer les coefficients du développement en série de Fourier de $g(x)$ à partir de l'expression analytique de $g(x)$.
7. Retrouver les résultats de la question 6 à partir des coefficients calculés en 2 et des discontinuités de $f(x)$.
8. A partir de la valeur de $g(x)$ obtenue pour $x = \pi/2$, retrouver la valeur de la somme S_2 .

Chapitre 19

CONTRÔLES

19.1 Sujet DUT Info No1

19.1.1 Transformée de Laplace

On considère la fonction de transfert composée de deux premiers ordres (où $\tau_1 \leq \tau_0$) :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \tau_0 p)} \times \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} \quad (19.1)$$

NB : On pourra adopter les notations : $\omega_0 = 1/\tau_0$ et $\omega_1 = 1/\tau_1$.

1. Sachant que :

$$\frac{1}{(p - a)(p - b)} \subset \frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}, \quad (19.2)$$

donner l'original $h(t)$ qui est la réponse impulsionnelle correspondant à $H(p)$.

2. Tracer les courbes de Bode asymptotiques (module et argument de $H(p)$ pour $p = j\omega$) dans le cas où : $\tau_1 = \tau_0/10$.

NB : **papier semilog fourni ; prendre $\tau_0 = 0.1$ pour le tracé.**

Bien indiquer les pulsations de transition, les pentes, les gains et phases caractéristiques.

3. En notant :

$$\tau = \sqrt{\tau_0 \tau_1} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\tau_0 + \tau_1}{\sqrt{\tau_0 \tau_1}}$$

exprimer $H(p)$ en fonction de la variable p et des seuls paramètres ζ et τ .

4. On se place désormais dans le cas où : $\tau_1 = \tau_0$.

Calculer le paramètre ζ qu'on appelle facteur d'amortissement.

5. Tracer les courbes de Bode asymptotiques correspondant à ce cas.

6. Que vaut alors le module (en dB) pour la pulsation : $\omega = 1/\tau_0$?

7. Chercher la pulsation de coupure ω_c à -3dB. La placer sur la courbe de Bode.

8. De quel type de filtre fréquentiel s'agit-il ?

9. Comment sera modifié le signal en sortie, si l'entrée est une sinusoïde $e(t) = A \sin(\omega t)$ d'amplitude $A = 1$ et de pulsation $\omega = 10\omega_c$?

19.1.2 Transformée de Fourier

Le filtre électronique de la Fig. 19.1 a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp} \quad (19.3)$$

1. Calculer et tracer l'allure de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

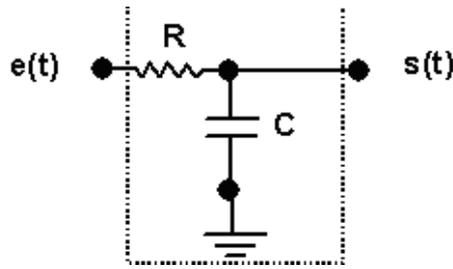


FIGURE 19.1 – Filtre RC

2. Donner sa constante de temps τ .
3. On pose $p = j2\pi\nu$ où ν est la fréquence.
Déduire de l'expression de $H(p)$ que la transformée de Fourier $H(\nu)$ correspondante se met sous la forme :

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} \quad (19.4)$$

et exprimer ν_c en fonction de R et C .

4. Exprimer le module et l'argument de $H(\nu)$.
5. Soit un signal d'entrée : $e(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$ (tension sinusoïdale).
Exprimer sa transformée de Fourier $E(\nu)$.
6. Pour $\nu = \nu_0$, on pose : $H_0 = |H(\nu_0)|$ et $\Phi_0 = \text{Arg}[H(\nu_0)]$.
Expliciter les valeurs de H_0 et Φ_0 en fonction du rapport ν_0/ν_c .
7. Déduire de 4, 5 et 6 la transformée de Fourier $S(\nu)$ du signal de sortie du filtre.
8. Montrer alors que la sortie s'exprime par :

$$s(t) = B \cos(2\pi\nu_0 t + \Phi_0) \quad \text{avec} \quad B = AH_0 \quad (19.5)$$

9. Décrire qualitativement le double effet du filtrage (sur l'amplitude et sur la phase) :
 - pour les basses fréquences : $\nu_0 \ll \nu_c$ (à quoi équivaut alors $s(t)$?)
 - pour les hautes fréquences : $\nu_0 \gg \nu_c$ (vers quoi tend alors $s(t)$?)
10. Comment se traduit dans le domaine temporel un déphasage entre deux signaux ?
Illustrer graphiquement l'effet du filtre sur les signaux temporels.
11. Si l'on souhaite atténuer fortement le signal d'entrée (typiquement $B = \varepsilon A$ avec $\varepsilon \ll 1$), comment choisir ν_c en fonction de ν_0 ?
A.N. : Calculer ν_c pour $\nu_0 = 1 \text{ kHz}$ et $\varepsilon = 1\%$.

Rappels utiles :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (19.6)$$

$$\text{Arg} \left(\frac{1}{z} \right) = -\text{Arg} z \quad (19.7)$$

$$f(\nu)\delta(\nu - \nu_0) = f(\nu_0)\delta(\nu - \nu_0) \quad (19.8)$$

$$\delta(\nu - \nu_0) = TF[e^{j2\pi\nu_0 t}] \quad (19.9)$$

19.1.3 Transformée en Z

On considère la fonction de transfert en Z d'un système numérique :

$$H(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad (19.10)$$

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$.

2. Tracer $h(n)$ pour $n \geq 0$
3. Donner l'équation de récurrence du filtre (qui respecte le principe de **causalité**).
On notera $e(n)$ et $s(n)$ les échantillons en entrée et en sortie à l'instant courant $t = nT_e$ (période d'échantillonnage normalisée $T_e = 1$).
4. Dessiner le circuit numérique implantant ce filtre.
5. Ce filtre numérique est-il stable ? Pourquoi ?
6. Conclure sur son intérêt pratique.

19.2 Sujet DUT Info 2005

19.2.1 Transformée de Laplace

On considère le filtre analogique (système ou boîte noire) régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + (a^2 + b^2)y(t) = bx(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont l'entrée et la sortie du filtre. On suppose les conditions initiales nulles.

A.N. : on prend : $a = \frac{1}{2} \log 2$ (logarithme népérien) et $b = \frac{\pi}{4}$.

1. Calculer la fonction de transfert du filtre $H(p)$.
2. En déduire sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
3. Tracer sommairement l'allure temporelle de ce signal.
4. Le système est-il stable ? Justifier.
5. Ecrire $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du 2e ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

en explicitant les valeurs du gain statique K , de l'amortissement ζ et de la constante de temps τ en fonction de a et b .

6. Exprimer la réponse harmonique du filtre $H(j\omega)$ en fonction de ζ et de la pulsation propre $\omega_n = 1/\tau$.
7. **A.N.** : Calculer les valeurs numériques de ζ et ω_n .
8. En s'aidant des abaques théoriques, tracer sommairement les courbes de Bode du système (gain et phase en fonction de la pulsation). Que valent le gain statique, la surtension et la fréquence de coupure ?

19.2.2 Transformée en Z

On souhaite réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique précédent, au sens où l'on veut une réponse impulsionnelle échantillonnée équivalente. La période d'échantillonnage est normalisée : $T_e = 1$.

1. A partir de la connaissance de $h(t)$, déduire l'expression de la fonction de transfert en z équivalente $H(z)$.
2. Monter qu'elle peut s'exprimer selon les puissances de z^1 sous la forme :

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (19.11)$$

3. A partir de l'Eq. (19.11), trouver l'équation aux différences (équation de récurrence) qui régit le filtre numérique.
4. En déduire le schéma du circuit numérique réalisant ce filtre à l'aide d'additionneurs, de retards purs, d'amplificateurs etc.
5. En prenant en entrée une impulsion unitaire (suite d'échantillons : $x(0) = 1$ et $x(1) = x(2) = \dots = x(n) \dots = 0$), calculer la sortie du filtre $y(n)$, $\forall n \in [0, 12]$.
6. Tracer cette réponse $y(n)$ et la comparer à l'allure de la réponse impulsionnelle du filtre analogique $h(t)$. Conclure.

19.3 Sujet MATHa 2007

19.3.1 Trigonométrie

1. Résoudre :

$$\cos 2x - \cos 4x = \sin x$$

NB : on pourra utiliser la formule trigonométrique de : $\cos a - \cos b$.

2. En appliquant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$.
3. Montrer que :

$$\cos(4 \arctan x) = \frac{1 - 6x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

NB : On pourra poser $\theta = \arctan x$ et utiliser le résultat du 2).

19.3.2 Nombre Complexe

1. Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{ix}{1 + ix}$$

où x est un réel positif.

Exprimer le module et l'argument de Z , ainsi que ses parties réelle $Re(z)$ et imaginaire $Im(z)$.

A.N : Calculer module et argument de Z pour $x = 1$.

2. Soit la fonction complexe

$$Z(x) = A + iBx + \frac{1}{iCx}$$

où A, B, C sont des constantes positives et x une variable réelle positive.

Exprimer le module de $Z(x)$.

Rechercher son extremum en fonction de x : pour cela, déterminer la valeur de la variable x_0 qui annule la dérivée $\frac{dZ}{dx} = 0$. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{1+z}{1-z}$$

est imaginaire pur si et seulement si le module de z est égal à 1.

19.3.3 Dérivation

1. Calculer la dérivée de :

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 - 1}$$

2. Idem pour :

$$g(x) = \frac{(x-1)^3}{x^{1/2}}$$

3. Calculer la dérivée de :

$$f(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$$

4. Idem pour :

$$g(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

5. Montrer par récurrence que la dérivée nième de

$$f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$$

(où α est une constante réelle) vaut :

$$f^{(n)}(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha + n\alpha)$$

6. Etablir par récurrence la dérivée nième de : $f(x) = \ln(1+x)$

7. Etablir par récurrence la dérivée nième de :

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

19.3.4 Intégration

1. Soit la fonction périodique de période T :

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Calculer l'intégrale :

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$$

2. Calculer, par changement de variable, la primitive :

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

3. Idem pour :

$$\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$$

4. Calculer, par intégration par parties :

$$\int x \sin x dx$$

19.3.5 Equation différentielle

1. Résoudre :

$$y'' + 3y' + 2y = 5x + 1$$

où $y = y(x)$ est une fonction de la variable réelle x .

2. On considère la relation :

$$x^2 y'' - \frac{1}{2} x y' - y = 0$$

où y est une fonction de la variable x , et y' et y'' sont ses dérivées première et seconde. Trouver toutes les fonctions de la forme $y = x^\alpha$, vérifiant cette relation pour $x > 0$.

Idem pour la relation :

$$x^2 y'' - x y' + y = x^2$$

3. Résoudre :

$$y' + 2y = 5 \sin(3x)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

19.4 Sujet MATHd 2008

19.4.1 Transformée de Laplace

EDL du second ordre

Traiter l'exercice de la section 13.2.

Calculs de transformées

Traiter l'exercice 2 de la section 13.1.

Transformée inverse : Calcul de l'original

Traiter l'exercice de la section 13.3.

19.4.2 Décomposition en série de Fourier

Traiter l'exercice de la section 15.4.

19.4.3 Transformée de Fourier : Modulation d'amplitude et analyse spectrale

Traiter l'exercice de la section 16.2.

19.5 Sujet MATHd 2011

19.5.1 Développement en série de Fourier

Traiter l'exercice de la section 19.8.1.1

19.5.2 Calcul de transformées de Laplace

Déterminer les transformées de Laplace des 4 fonctions suivantes définies pour $t \geq 0$:

1. $f_1(t) = \sin(3t) \cos(2t)$
2. $f_2(t) = t^2 \sin(\omega t)$
3. $f_3(t) = (\sin t - \cos t)^2$
4. $f_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^3 & \text{pour } t \geq 2 \end{cases}$

NB. On explicitera pour chaque cas les règles opératoires et les transformées usuelles utilisées.

19.5.3 Calcul d'un original

Déterminer l'original $g(t)$ de la transformée de Laplace suivante :

$$G(p) = \frac{Ap + a}{(p + a)^2 + b^2}$$

où A , a et b sont trois constantes réelles.

19.5.4 Equation différentielle

Traiter l'exercice de la section 19.7.3.

19.5.5 Etude d'une fonction périodique

Soit la fonction périodique et causale $f(t)$ définie graphiquement Fig. 19.2.

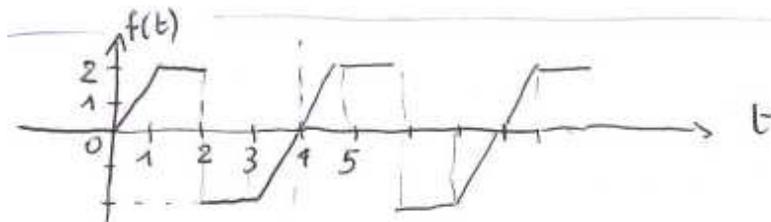


FIGURE 19.2 – Fonction périodique $f(t)$.

1. Que vaut sa période T ?
2. Soit $m(t)$ le motif de base correspondant à la première période, c'est-à-dire que $m(t) = f(t)$ pour $0 \leq t \leq T$ et $m(t) = 0$ partout ailleurs. Dessiner $m(t)$.

3. A l'aide de la fonction échelon unité de Heaviside $H(t)$, exprimer $m(t)$ comme une somme de fonctions linéaires définies par morceaux et décalées temporellement, c'est-à-dire sous la forme :

$$m(t) = \sum_{n=0}^T (a_n t + b_n) H(t - n)$$

où a_n et b_n sont des coefficients constants à déterminer.

4. Dédire de l'expression ci-dessus la transformée de Laplace $M(p)$ de $m(t)$.
5. Sachant qu'on peut exprimer $f(t)$ à partir de $m(t)$ sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m(t - kT)$$

en déduire une expression de la transformée de Laplace $F(p)$ de $f(t)$.

6. En utilisant les notions sur la convergence des séries géométriques, en déduire qu'on peut exprimer $F(p)$ sous la forme simplifiée :

$$F(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-4p}}$$

7. Pour finir, calculer le DSF de la fonction périodique $f(t)$ définie ci-dessus (Fig. 19.2), en supposant ici que la fonction n'est pas nulle pour $t < 0$, mais toujours périodique. Commentaires ?

19.5.6 Transformée de Fourier

Soit un signal sinusoïdal $e(t) = A \cos(2\pi\nu_1 t)$ en entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)H(t)$ où $\tau = 1s$ est la constante de temps et où $H(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside.

1. Donner la transformée de Fourier $H(\nu)$ de la réponse impulsionnelle.
2. Exprimer $H(\nu)$, qui est une grandeur complexe, sous la forme module et argument, en adoptant la notation simplificatrice $\nu_0 = 1/(2\pi\tau)$.
3. Calculer la transformée de Fourier $S(\nu)$ de la sortie $s(t)$ du filtre (Fig. 19.3), sachant que la théorie des systèmes stipule que la sortie temporelle est donnée par le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle : $s(t) = e(t) * h(t)$.
4. Si le signal en entrée a pour fréquence $\nu_1 = 50Hz$ et amplitude $A = 1$, que vaudra l'amplitude du signal de sortie ?

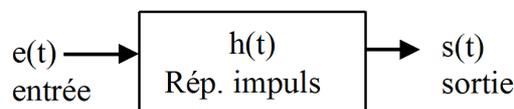


FIGURE 19.3 – Filtre.

19.6 Sujet MATHd 2012

19.6.1 Décomposition en séries de Fourier

Traiter les 5 premières questions de l'exercice de la section 18.4 pour déterminer la valeur de la somme :

$$S_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^4}$$

19.6.2 Résolution d'équation différentielle par TL

Traiter l'exercice de la section 13.9.

19.6.3 Transformée de Laplace : on traitera un des 2 filtres au choix

19.6.3.1 Filtre 1

Traiter l'exercice de la section 14.3.

19.6.3.2 Filtre 2

Traiter l'exercice de la section 19.1.1.

19.6.4 Transformée de Fourier

Traiter l'exercice de la section 19.1.2.

19.7 Sujet MATH5 2014

19.7.1 Série Entière

On considère la série entière $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)x^n$, où x est une variable réelle.

1. En utilisant le critère de d'Alembert, que conclure sur la convergence de cette série ?
2. Quel est son rayon de convergence R ?
3. Démontrer que cette série a pour somme :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Idée [21] : on pourra développer la somme des N premiers termes de la série, et trouver un lien avec la somme partielle d'une série géométrique de raison x , dont on connaît les propriétés.

19.7.2 Décomposition en Série de Fourier

On considère la fonction **impaire** $f(t)$ de période $2L$ définie sur sa demi-période $[0, L]$ par :

$$f(t) = A \quad \text{pour} \quad 0 < t < L/2 \quad (19.12)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad L/2 < t < L \quad (19.13)$$

1. Tracer la fonction $f(t)$ sur une période complète $[-L, +L]$ (A étant une constante positive).
2. Calculer les coefficients de Fourier de cette fonction [21].
3. Exprimer alors la fonction $f(t)$ par son DSF sous forme synthétique ($f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dots$), puis sous forme développée en explicitant les 7 premiers termes.
4. Représenter graphiquement les fréquences présentes dans ce signal, et leur amplitude. Interpréter.

19.7.3 Transformée de Laplace : résolution d'équation différentielle

Résoudre, par transformation de Laplace, l'équation différentielle (ED) suivante [2], portant sur la fonction $y(t)$ causale :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = te^t$$

sous les conditions initiales (CI) : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. On notera $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. On montrera que $Y(p)$ est une fraction rationnelle qu'on exprimera. On vérifiera qu'elle se décompose en éléments simples sous la forme :

$$Y(p) = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-2}$$

où $A = -1/2$; $B = -1/4$; $C = 7/12$ et $D = 2/3$.

2. On en déduira la solution $y(t)$. Vérifier que la fonction obtenue est bien solution de (ED).

19.7.4 Transformée de Fourier : signal triangle

On considère la fonction $f(t)$ définie par (A et T étant 2 constantes positives) :

$$f(t) = \frac{A}{T}t + A \quad \text{pour} \quad -T < t < 0 \quad (19.14)$$

$$f(t) = -\frac{A}{T}t + A \quad \text{pour} \quad 0 < t < T \quad (19.15)$$

1. Tracer la fonction $f(t)$ sur tout l'axe réel. NB : $f(t) = 0$ hors de l'intervalle $[-T; T]$
2. Calculer sa transformée de Fourier $F(\nu)$. Tracer l'allure de $F(\nu)$ en fonction de la fréquence ν .

19.8 Sujet MATH5 2015

19.8.1 Reconstitution d'un signal échantillonné

19.8.1.1 Développement en série de Fourier (DSF)

Soit la fonction $s(t)$ de la Fig. 19.4, représentative d'un signal électrique sinusoïdal redressé en simple alternance, d'amplitude crête A et de période $T = 2\pi/\omega_0$.

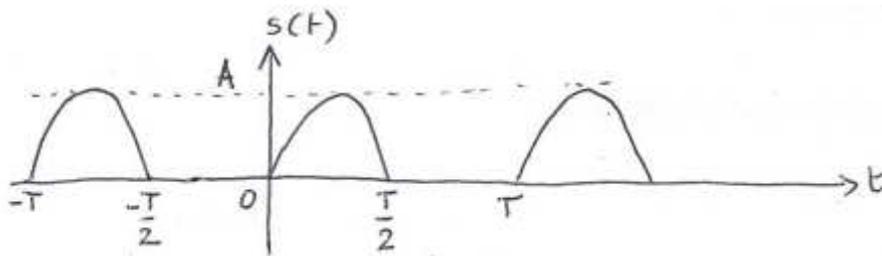


FIGURE 19.4 – Signal $s(t)$ obtenu par redressement simple alternance d'une sinusoïde.

1. Démontrer par le calcul que le DSF de la fonction $s(t)$ vaut :

$$s(t) = A \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\omega_0 t)}{4n^2 - 1} \right]$$

NB : pour le calcul des coefficients a_k et b_k , utiliser les formules de trigonométrie.

Et attention au calcul particulier de b_k pour $k = 1$!

2. Préciser quels sont les harmoniques présents et comment décroît leur amplitude par rapport à celle du fondamental.

Dessiner sommairement les raies spectrales du signal (amplitude des harmoniques en fonction de la pulsation).

19.8.1.2 Transformée de Fourier TF et TFD

3. Calculer la transformée de Fourier $S(\nu)$ de $s(t)$.
NB : pour cela, on notera $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ et on utilisera la linéarité de la TF.
4. Représenter graphiquement $|S(\nu)|$, spectre de $s(t)$. NB : prendre $A = 2$ et $\pi \approx 3$ pour le tracé.
5. On échantillonne $s(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_e . On note $v(t)$ ce signal échantillonné ; on rappelle qu'il s'obtient en multipliant le signal par un peigne de Dirac $p(t)$ de période T_e :

$$v(t) = s(t).p(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

Exprimer $V(\nu)$, transformée de Fourier du signal échantillonné $v(t)$.

6. Représenter graphiquement l'allure de $|V(\nu)|$, spectre de $v(t)$.
7. Peut-on proposer a priori une valeur correcte pour F_e ? Justifier la réponse.
8. En première approximation, on suppose que le spectre de $s(t)$ est borné. Pour cela, on néglige les harmoniques véhiculant une **énergie inférieure à $1/100^{ème}$ de celle du fondamental**.
Rappeler les définitions générales de la valeur efficace d'un signal et de son énergie.
Traduire alors la condition d'énergie négligeable en terme de valeurs efficaces des harmoniques.
9. Quel est le premier harmonique que l'on peut négliger ?
Quelle est donc l'amplitude de l'erreur tolérée sur $s(t)$, erreur due à ce seul harmonique ?
10. Le signal approximé à spectre borné est noté $s_b(t)$.
Exprimer et représenter graphiquement $S_b(\nu)$ et $V_b(\nu)$, spectres respectifs de $s_b(t)$ analogique et de $s_b(t)$ échantillonné.
11. On filtre $s(t)$ pour être sûr d'obtenir un spectre borné grâce à un filtre passe-bas. Quelle est la condition sur F_e pour que le signal analogique $s_b(t)$ soit reconstituable (sans phénomène de repliement de spectre) ?
12. On veut utiliser le filtre passe-bas de la Fig. 19.5 pour la reconstitution du signal.

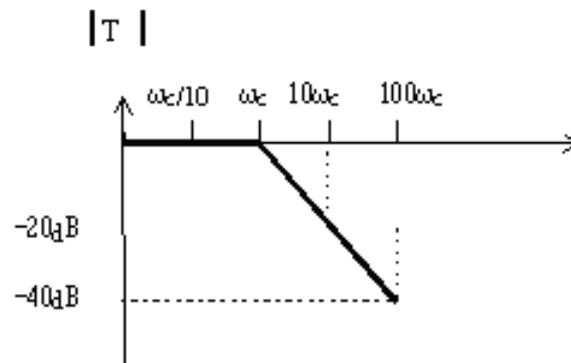


FIGURE 19.5 – Filtre passe-bas : courbe de gain en dB (pulsation de coupure $\omega_c = 2\pi\nu_c$).

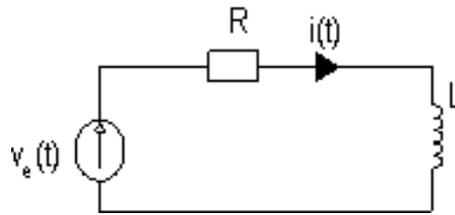
Quelles sont les fréquences F_e et ν_c (coupure du filtre) les plus basses que l'on pourra utiliser ?

19.8.2 TL : circuit RL série excité par une rampe

Le circuit de la Fig. 19.6 est régi par l'équation :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (19.16)$$

où $e(t)$ est la tension d'excitation du circuit et $i(t)$ le courant. On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$. On veut calculer et tracer $i(t)$ (pour $t \geq 0$) quand $e(t) = t.H(t)$ est une rampe de pente $\alpha = 1$ (où $H(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside).

FIGURE 19.6 – Circuit RL série

13. En utilisant les TL, exprimer $I(p)$ en fonction de $E(p)$.

14. Que vaut $E(p)$?

15. Montrer que l'on peut décomposer $I(p)$ comme suit :

$$I(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{R + Lp}$$

avec : $A = -L/R^2$, $B = 1/R$ et $C = (L/R)^2$.

16. En déduire l'expression de la fonction $i(t)$.

17. A.N. : on prend $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$. Que vaut la constante de temps τ du circuit ?

18. Tracer sommairement les graphes de $e(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps.

19.9 Sujet MATH5 2016

19.9.1 Développement en Séries de Fourier (DSF)

On veut calculer le DSF d'un signal sinusoïdal mono-alternance, dont on n'a conservé que les alternances négatives (Fig. 19.7).

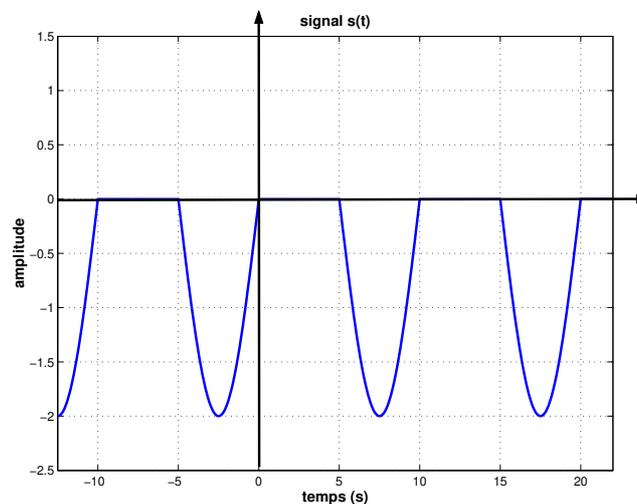


FIGURE 19.7 – Alternances négatives d'une sinusoïde.

1. Préciser la valeur de la période T_0 , de la fréquence fondamentale f_0 , de la pulsation fondamentale ω_0 et de l'amplitude crête A_0 de ce signal.
2. Donner les équations définissant le signal sur une période.
3. Calculer sa composante continue a_0 .
4. Calculer le premier coefficient a_1 du DSF (cas particulier pour $k = 1$).
5. Déterminer la valeur des autres coefficients a_k des termes en cosinus (pour $k > 1$).
NB : On distinguera bien les termes pairs (pour $k = 2n$) des termes impairs (pour $k = 2n + 1$).
6. Calculer le coefficient b_1 du DSF (cas particulier pour $k = 1$).

7. Montrer que tous les autres coefficients b_k des termes en sinus (pour $k > 1$) valent zéro.
8. En déduire l'expression littérale du DSF complet du signal.
9. Faire une représentation graphique sommaire du DSF (amplitudes des diverses composantes sinusoïdales en fonction des pulsations).
10. Commenter ce spectre et conclure (on pourra comparer au cas connu du redressement positif).

19.9.2 Application de la Transformée de Laplace (TL)

Un circuit RL série est un système régi par une équation différentielle linéaire du 1er ordre :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} \quad (19.17)$$

où $u(t)$ est la tension appliquée en entrée du circuit et $i(t)$ le courant circulant dans le circuit, considéré ici comme étant la sortie du système.

On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$.

On note $I(p)$ et $U(p)$ les TL respectives de $i(t)$ et de $u(t)$.

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle, calculer la réponse $i(t)$ dans les 2 cas suivants :

11. Quand la tension entrée $u(t)$ est un échelon d'amplitude A :
 $u(t) = A.H(t)$, où $H(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside.
12. Quand la tension d'entrée $u(t)$ est une rampe causale de pente α :
 $u(t) = \alpha t$ pour $t \geq 0$ (et $u(t) = 0$ pour $t < 0$).
13. A.N. : on prend $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$.
 Tracer les réponses temporelles dans les 2 cas (graphes de $i(t)$ en fonction du temps).
14. Commenter les courbes obtenues, en comparant l'allure de $i(t)$ avec celle de $u(t)$.

19.9.3 Calcul d'une Transformée de Fourier (TF)

Soit $f(t)$ la fonction définie graphiquement par la Fig. 19.8.

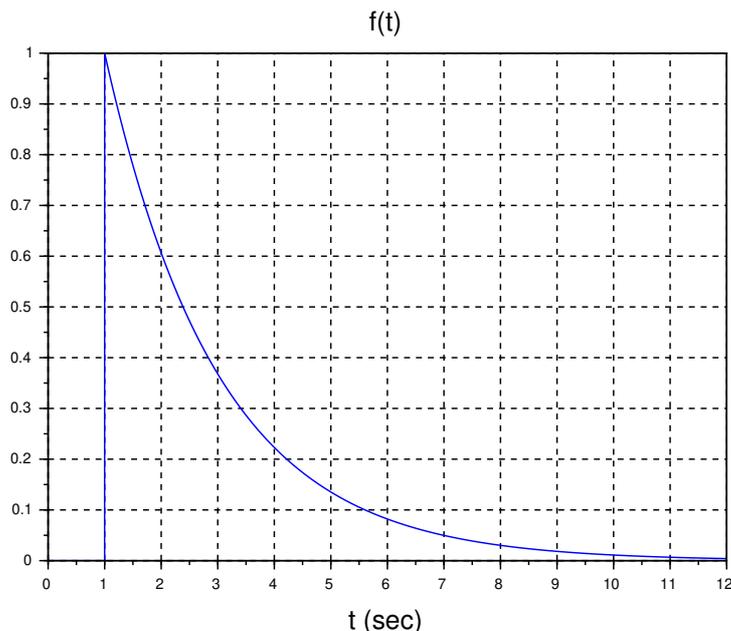


FIGURE 19.8 – Fonction exponentielle décroissante retardée.

Elle correspond à une fonction exponentielle décroissante de type $e^{-t/\tau}$, avec une constante de temps $\tau = 2$ et démarrant en retard à l'instant $t_0 = 1$ (elle est nulle pour $t < t_0$).

15. Ecrire l'équation de définition de $f(t)$.

NB : On utilisera la notation de l'échelon unité de Heaviside qui permet de traduire la nullité d'une fonction avant son instant de démarrage.

16. En utilisant le tableau des TF des fonctions usuelles, et en appliquant 2 des propriétés de la TF (la règle du changement d'échelle et la règle du retard temporel), déterminer l'expression de la transformée de Fourier $F(\nu)$ de $f(t)$.

17. Exprimer le module $|F(\nu)|$ et le représenter graphiquement (fréquence ν en abscisse, module en ordonnée).

18. Exprimer l'argument $Arg[F(\nu)]$ et représenter graphiquement la courbe de phase correspondante. Conclure.

19.10 Sujet MATH5 2017

19.10.1 Séries de Fourier : Etude de pompe à pistons

Les constructeurs de pompes (cf. Fig. 19.9, extraite de [22]) affirment que "le débit est plus régulier si le nombre p de pistons est impair". On se propose de vérifier cette affirmation dans les cas $p = 3$ et $p = 4$.

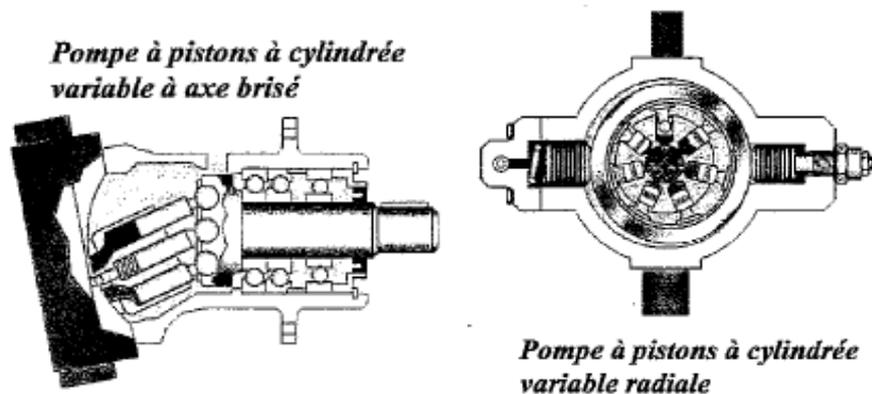


FIGURE 19.9 – Exemples de pompes à piston

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{pour : } 0 \leq t < \pi \quad (19.18)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour : } \pi \leq t < 2\pi \quad (19.19)$$

Etude du cas $p=3$

Les débits élémentaires q_1 , q_2 et q_3 des trois cylindres sont donnés par les 3 fonctions décalées entre elles de $2\pi/3$:

$$q_1(t) = f(t) \quad q_2(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad q_3(t) = f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Le débit global Q_3 de la pompe est la somme des débits des pistons : $Q_3(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$.

On démontre alors de manière triviale que :

— Q_3 est périodique de période $2\pi/3$, c'est-à-dire que : $Q_3(t) = Q_3(t + \frac{2\pi}{3})$

— pour $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$: $Q_3(t) = \sin(t + \pi/3)$

— pour $t \in [\pi/3; 2\pi/3]$: $Q_3(t) = \sin(t)$

1. Dessiner sommairement q_1 , q_2 et q_3 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
2. Préciser les valeurs de $Q_3(t)$ pour $t = 0$, $t = \pi/3$ et $t = 2\pi/3$.
3. Donner la représentation graphique de Q_3 sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Etude du cas $p=4$

Dans ce cas, le débit de la pompe vaut : $Q_4(t) = f(t) + f(t + \frac{\pi}{2}) + f(t + \pi) + f(t + \frac{3\pi}{2})$.

1. Montrer que Q_4 a pour période $\pi/2$.
2. Montrer que pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $Q_4(t) = \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})$.
3. Préciser les valeurs de $Q_4(t)$ pour $t = 0$ et $t = \pi/4$.
4. Donner la représentation graphique de Q_4 sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Etude du taux d'irrégularité du débit

Le taux d'irrégularité du débit est défini par :

$$\theta_p = \frac{Q_p \text{max} - Q_p \text{min}}{Q_p \text{moy}}$$

1. Calculer le débit moyen d'un cylindre élémentaire, c'est-à-dire la valeur moyenne de f sur $[0; 2\pi]$.
2. En déduire le débit moyen $Q_p \text{moy}$ de la pompe pour $p = 3$ et $p = 4$.
3. Déterminer également les valeurs mini et maxi de Q_3 et Q_4 .
4. En utilisant les résultats précédents, calculer θ_3 et θ_4 . Vérifier que $\theta_3 < \theta_4$.

Etude du cas $p=4$ à l'aide des séries de Fourier

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$.
NB : Pour le calcul des intégrales, on utilisera les formules de linéarisation de trigonométrie concernant $\sin a \sin b$ et $\sin a \cos b$.
Ecrire alors le D.S.F. de $f(t)$.
2. En déduire les développements en série de Fourier des trois fonctions décalées $f(t + \frac{\pi}{2})$, $f(t + \pi)$, et $f(t + \frac{3\pi}{2})$.
3. En déduire que :

$$Q_4(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \cos(4kt)$$

4. Tracer sommairement le spectre de fréquences correspondant et interpréter.
5. **Question Bonus (+ 3points)** : calculer de même le D.S.F. de $Q_3(t)$. Comparer et conclure.

19.10.2 Transformée de Laplace : Etude de cuve de mélange

M. Lavinas, œnologue averti, spécialiste des vins du Jura, a décidé de faire lui-même ses assemblages à partir des cépages Chardonnay et Savagnin (qui donne le célèbre vin jaune). Pour cela, il a mis au point dans la cave de sa ferme l'appareil schématisé Fig. 19.10 (extrait de [22]).

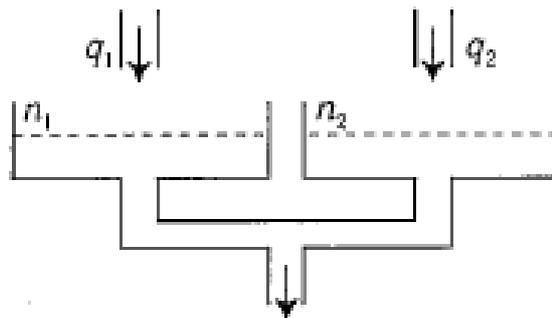


FIGURE 19.10 – Mélangeur de cuve

- Le système est composé de 2 bacs cylindriques se vidant dans une même conduite. Le bac de gauche contient le Savagnin, celui de droite le Chardonnay.
- Les signaux d'entrée sont les débits q_1 et q_2 et les signaux de sortie sont les niveaux n_1 et n_2 correspondants.
- Il s'agit donc d'un système ayant deux entrées et deux sorties.

Dans ce problème, la modélisation mathématique du phénomène se traduit par le système différentiel (S) :

$$n_1'(t) = q_1(t) - 2n_1(t) + n_2(t) \quad (19.20)$$

$$n_2'(t) = q_2(t) + n_1(t) - 2n_2(t) \quad (19.21)$$

où t est un réel positif ou nul, représentant la variable temps.

Partie A

Dans cette première partie, on suppose : $n_1(0^+) = 0$; $n_2(0^+) = 0$.

1. Démontrer en appliquant la transformation de Laplace au système (S) que l'on a :

$$N_1(p) = \frac{(p+2)Q_1(p) + Q_2(p)}{(p+1)(p+3)} \quad (19.22)$$

$$N_2(p) = \frac{Q_1(p) + (p+2)Q_2(p)}{(p+1)(p+3)} \quad (19.23)$$

où $N_1(p)$; $N_2(p)$; $Q_1(p)$; $Q_2(p)$ sont les transformées de Laplace respectives de $n_1(t)$; $n_2(t)$; $q_1(t)$; $q_2(t)$.

2. Calculer $n_1(t)$ et $n_2(t)$ dans le cas où $q_1(t) = q_2(t) = H(t)$, échelon unité de Heaviside.
3. Représenter graphiquement la réponse $n_1(t)$ sans étudier la fonction.
4. Calculer $n_1(t)$ et $n_2(t)$ dans le cas où $q_1(t) = 0$ et $q_2(t) = H(t)$.

Partie B

Dans cette partie, le signal d'entrée $q_1(t)$ est l'impulsion unité $\delta(t)$ et le signal d'entrée $q_2(t)$ est la fonction nulle. Dans ces conditions, le phénomène est régi par le système différentiel :

$$n_1'(t) + 2n_1(t) - n_2(t) = 0 \quad (19.24)$$

$$n_2'(t) - n_1(t) + 2n_2(t) = 0 \quad (19.25)$$

$$\text{avec : } n_1(0^+) = 1 \quad ; \quad n_2(0^+) = 0 \quad (19.26)$$

1. Appliquer la transformation de Laplace au système donné ci-dessus et déterminer $N_1(p)$ et $N_2(p)$.
2. Déterminer les fonctions $n_1(t)$ et $n_2(t)$ solutions de ce système.
3. Etudier pour finir les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1 : t \rightarrow f_1(t) = e^{-t} + e^{-3t} \quad (19.27)$$

$$f_2 : t \rightarrow f_2(t) = e^{-t} - e^{-3t} \quad (19.28)$$

On calculera évidemment limites et dérivées de ces 2 fonctions et on tracera sommairement l'allure des 2 courbes.

On déterminera notamment la valeur exacte du maximum de la fonction f_2 et on précisera la position relative des deux courbes lorsque $t \rightarrow +\infty$.

4. Expliquer le lien de l'étude des fonctions f_1 et f_2 avec la question 2 précédente.

19.11 Sujet MATH5 2018

19.11.1 Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie exponentiellement

Soit la fonction du temps t , causale (nulle pour $t < 0$), définie par :

$$f(t) = \exp(-at) \cos(\omega t) H(t)$$

où $H(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside, et où a et ω sont des paramètres réels positifs.

On pourra poser $\omega = 2\pi\nu_0$, où ν_0 dénote la fréquence de la sinusoïde.

1. Dessiner l'allure du graphe temporel de la fonction $f(t)$.
2. A l'aide des tables de transformées, calculer sa transformée de Fourier $F(\nu)$.

A.N. : $a = 0.2$; $\omega = 1$; $t \in [0; 20]$.

19.11.2 Développement en Série de Fourier

1. Soit la fonction périodique de période T définie par :

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \text{ pour } t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right] \quad (19.29)$$

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \quad (19.30)$$

Calculer son développement en série de Fourier (DSF).

On pourra adopter la notation : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ pour alléger l'écriture.

2. Représenter succinctement son spectre fréquentiel (amplitude des raies en fonction des pulsations).

A.N. : $A = 2$; $T = 2\pi$.

19.11.3 Transformée de Laplace (TL)

1. Soit un système régi par l'équation différentielle :

$$a \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (19.31)$$

où $e(t)$ est l'entrée du système et $s(t)$ la sortie ; a est un paramètre réel positif.

On suppose les conditions initiales nulles.

On note $S(p)$ et $E(p)$ les TL respectives de $s(t)$ et $e(t)$.

Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et du paramètre a .

2. En déduire la réponse $s(t)$ quand l'entrée $e(t)$ est une rampe causale de pente $b > 0$:

$$e(t) = b \times t \text{ pour } t \geq 0 \quad (19.32)$$

$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0. \quad (19.33)$$

3. Tracer sur un même graphe en fonction du temps t , l'allure de la sortie $s(t)$ et de l'entrée $e(t)$.

A.N. : $a = 1$; $b = 2$.

Chapitre 20

TRAVAUX PRATIQUES

20.1 Prérequis et Objectifs

- Prérequis : cours de math en analyse, algèbre, statistique, TL,TF,TZ
- Objectif : maîtriser l'usage de Matlab pour le traitement de signal appliqué à l'électronique et l'automatique
- Organisation : 6 TP de 1h30 en binôme
- Evaluation : 1 compte-rendu final rédigé par le binôme contenant tous listings, résultats et figures utiles, ainsi que l'**interprétation** des résultats (traitement de texte obligatoire).

20.2 Introduction à Matlab

20.2.1 Principales caractéristiques

Matlab est un environnement logiciel de **calcul et visualisation scientifique** :

- Matlab (pour Matrix Laboratory) repose sur un langage **interprété**.
- La programmation est aisée car la syntaxe du langage est proche de l'écriture mathématique.
- La donnée de base est la **matrice** ou tableau (vecteur ou scalaire étant des cas particuliers).
- La dimension des données n'a pas besoin d'être spécifiée (ni leur type).
- L'**interactivité** de Matlab permet de programmer et simuler plus vite qu'en C ou Fortran.
- Matlab est couramment utilisé dans la recherche et l'industrie.
- Les inconvénients éventuels sont la lenteur d'exécution et le coût en mémoire.

Matlab est fourni avec des **Toolboxes** (boîtes à outils) dédiées à des applications spécifiques :

- Ce sont des bibliothèques de fonctions (fichiers ASCII d'extension .M)
- **Symbolic Math** : calcul symbolique (intégrale, équation différentielle)
- **Signal Processing** : traitement de signal (filtrage, analyse spectrale)
- **System Identification** et **Control System** : automatique (identification, correcteur)
- **Image Processing** : traitement d'image

Le système interactif MATLAB comporte 5 parties :

- **Environnement** de développement (fenêtres de commandes)
- **Bibliothèque** de fonctions mathématiques (algèbre, trigonométrie, transformées)
- **Langage** (contrôles de flux, fonctions, structures)
- Commandes **graphiques** (visualisation 2-D et 3-D)
- API de **communication** avec le C et le Fortran

20.2.2 Environnement de travail

20.2.2.1 Session MATLAB

- licence PC sous Windows (jetons)
- double-cliquer sur l'icône MATLAB pour lancer une session
- fenêtre de **commande** : pour saisir des variables, écrire des instructions, lancer des programmes (après le prompt (») de l'interpréteur Matlab), et voir des résultats en mode texte

- fenêtre d'**éditeur** : pour écrire des fichiers .M
- fenêtre graphique (**Figure**) : pour visualiser des courbes
- répertoire de travail par défaut : work (modifiable dans startup.m)

20.2.2.2 Contrôle de session

- CTRL C : interruption de programme
- exit/quit : fin de session
- ↑ : rappel de commande précédente
- ! : redonner la main au système d'exploitation
- **help** <nom de fonction> : aide en ligne (très utile!)
- who/whos : liste des variables en mémoire
- **clear** : libération de la mémoire vive (très utile!)
- **close all** : ferme toutes les figures
- clc : efface la fenêtre de commande.
- fichier de démarrage (à configurer éventuellement) : <Matlab>\toolbox\local\startup.m

```
path(path, 'D:\MonRepertoire\MesPgmMatlab')
cd D:\MonRepertoire\MesPgmMatlab
```

20.2.3 Langage de programmation

20.2.3.1 Principe de la syntaxe

MATLAB est un langage d'expression, i.e. interprété (pas de compilation nécessaire). Il interprète et évalue en ligne les instructions tapées au clavier.

Une instruction peut être :

- tapée directement dans la fenêtre de **commande** pour exécution en ligne.
- insérée dans un **programme** exécutable (fichier .M)
- insérée dans une **fonction** externe (fichier .M)

Une instruction est constituée de variables, nombres, opérateurs et fonctions. Elle est de la forme :

```
variable=expression;
```

ou simplement :

```
expression;
```

Séparateurs :

- une instruction se termine par un **point-virgule** (;) sauf si l'on veut voir à l'écran tous les calculs intermédiaires auquel cas on utilise à la place le simple retour chariot (<RET>) ou la virgule (,).
- % : séparateur qui annonce un **commentaire** dans un fichier MATLAB.

20.2.3.2 Exemples d'instructions

- formation d'un vecteur-ligne t contenant des instants d'échantillonnage espacés d'une période T_e :

```
t=0:Te:T; %vecteur-temps échantillonné
```
- extraction des n premiers échantillons :

```
t(1:n);
```
- génération d'un vecteur x contenant les échantillons d'une sinusoïde :

```
x=A*sin(2*pi*f*t);
```

A, π, f étant des scalaires, x récupère la dimension de t (aucune déclaration de type ou de dimension n'est nécessaire).
- transposition pour former le vecteur colonne correspondant :

```
y=x';
```
- formation d'une matrice M de taille 3×3 :

```
M=[a11 a12 a13 ; a21 a22 a23 ; a31 a32 a33];
— extraction du premier coefficient de la matrice :
coeff1=M(1,1);
```

20.2.3.3 Opérateurs et constantes

```
+ - * / ^ '
.* ./ .^ .'
== ~= > < <= >=
pi i j Inf NaN
```

20.2.3.4 Contrôle de flux de données

- **for** : répétition d'instructions un certain nombre de fois. Syntaxe :

```
for variable=scalaire1:scalaire2
    instruction;
end
```
- **if** : exécution conditionnelle d'instructions. Syntaxe :

```
if expression1
    instruction1;
elseif expression2
    instruction2;
end
```

 où expression1 et 2 utilisent les tests d'égalité, différence ou inégalité.
- **while** : répétition d'instructions un nombre indéfini de fois.
- Autres instructions conditionnelles classiques : **switch**, **continue**, **break**

20.2.3.5 Création d'une fonction externe

L'instruction **function** sert à définir une nouvelle fonction externe qui étend ainsi le vocabulaire de Matlab. Les instructions constituant la fonction sont écrites dans un fichier d'extension **.M** et de **même nom** que la fonction. La première ligne du fichier contient la définition de la syntaxe de la fonction. Par exemple dans un fichier **newfun.m**, la 1ère ligne :

```
function [out1, out2] = newfun(in1)
```

définit une nouvelle fonction appelée **newfun** qui calcule à partir d'une matrice d'entrée **in1**, deux matrices de sortie **out1** et **out2**. L'appel à cette nouvelle fonction dans un autre programme se fait par :

```
[z,y] = newfun(x);
```

20.2.4 Bibliothèque de fonctions

20.2.4.1 Fonctions graphiques

- **axis** : pour spécifier les limites des axes d'une figure.
- **figure** : ouvre une nouvelle fenêtre graphique (Figures No. 2, 3, etc...) qui devient la fenêtre graphique courante. On peut spécifier le numéro de la fenêtre : `figure(1)`.
- **grid** : ajoute un quadrillage en pointillé sur une figure.
- **hold on/off** : maintien ou non du tracé précédent dans la fenêtre graphique (pour superposer des courbes).
- **plot** : tracé de courbes dans la fenêtre de visualisation. Syntaxe :

```
plot(x, y, 'type', x1,y1,'type1',...);
```

où x est le vecteur des abscisses (facultatif), y le vecteur des ordonnées, 'type' le type ou la couleur du trait (facultatif). On peut spécifier en option l'échelle des axes, les légendes, la grille de façon très souple.

- **print** : impression de la figure sur l'imprimante :
`print -ddesket` ou `-dlaserjet`
 impression de la figure dans le presse-papier :
`print -dmeta` ou `-dbitmap`
 impression de la figure dans un fichier Postscript :
`print nom_fich -deps`
- **subplot(m,n,p)** : division d'une Figure en $m \times n$ rectangles et tracé dans le p -ième rectangle.
- **title** : ajoute un titre sur une figure.
- **xlabel, ylabel** : ajoute une légende sur l'axe horizontal (resp. vertical) d'une figure.
- **zoom on/off/out** : pour dilater une courbe à l'aide des boutons de la souris.

20.2.4.2 Interaction utilisateur

- **disp** : affichage de texte ou matrices dans la fenêtre de commande. Intérêt : commentaires à l'exécution.
- **echo on/off** : contrôle l'affichage à l'écran des commandes des fichiers d'extension .M lors de leur exécution. Intérêt : pour debugger ou pour un programme de démonstration.
- **input** : après l'affichage d'un message, attente d'une entrée au clavier avec retour chariot. Syntaxe :
`x = input('message', 's');`
 où x récupère la valeur ou la chaîne de caractères entrée au clavier. On rajoute 's' dans le cas où l'entrée au clavier est une chaîne de caractères (string) et non une valeur numérique.
- **isempty(x)** : retourne 1 si l'élément est vide, 0 sinon. Utile pour spécifier une valeur par défaut lors d'une entrée au clavier avec input.
- **pause** : arrêt temporaire de l'exécution jusqu'à la frappe d'une touche quelconque au clavier. Cela permet de s'arrêter pour voir à l'écran un graphique.

20.2.4.3 Interaction fichiers externes

- Transfert matrice \leftrightarrow fichier ASCII : **load/save**
- Entrée/sortie fichier : **fopen, fclose, fread, fwrite, fseek, fprintf...**
- Accès image externe : **imread, imwrite...**

20.2.4.4 Manipulation de matrices

- **length(x)** où x est un vecteur : donne la dimension d'un vecteur.
- **[m n]=size(A)** : récupère les dimensions m et n d'une matrice donnée A .
- **min(x)** : recherche du minimum du vecteur x .

20.2.4.5 Fonctions mathématiques

- **abs** : valeur absolue (resp. module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe).
- **log(x), log10(x)** : logarithme népérien ou à base 10 des éléments de x .
- autres fonctions de base : **sqrt, exp ...**

20.2.4.6 Signaux de base

- **randn** : génère un bruit aléatoire normal de moyenne nulle et de variance 1. Syntaxe :
`randn(size(A))`
 pour avoir un vecteur de nombres aléatoires de même taille que A .
- **y=sin(x)** : fonction sinus (qui opère élément par élément dans le cas d'une matrice) où x est un scalaire, un vecteur ou une matrice. y récupère la même dimension que x .

- **square(t,duty)** : génère un signal carré de rapport cyclique variable (fait partie du toolbox Signal Processing) où t est le vecteur-temps et $duty$ le rapport cyclique exprimé en % de la période où le signal est positif (par défaut : $duty = 50$ %).

20.3 TP - Séance d'Initiation

20.3.1 Manipulation de matrices

1. Former une matrice 3×3 et calculer :
 - matrice transposée
 - extraction d'une ligne, d'une colonne
 - sommation d'une ligne, d'une colonne
 - matrice diagonale ; matrices triangulaires supérieure et inférieure
 - matrice inverse (vérifier le résultat !)
 - produit de matrice et de tableaux (NB : différence entre * et .* !)
 - déterminant, valeurs propres et vecteurs propres
2. Résoudre le système suivant par inversion de la matrice :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases} \quad (20.1)$$

Fonctions utiles : **sum, diag, tril, triu, inv, det, eig ...**

Objectifs : savoir générer et manipuler une matrice, rappel sur la transposition et l'inversion.

20.3.2 Manipulation de polynômes

Un polynôme est représenté par un vecteur ligne contenant les coefficients dans l'ordre des puissances décroissantes. Par exemple le polynôme $P(x) = x^4 + 3.5x^3 - 3.9x^2 + 8x - 20$ s'écrit :

`p=[1 3.5 -3.9 8 -20];`

1. calculer les racines du polynôme : $P_1(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2$.
2. reconstruire un polynôme $P_2(x)$ à partir de ses racines : 0;0;1;1;1.
3. tracer le polynôme $P_1(x)$ dans l'intervalle $[-1;3]$.

Fonctions utiles : **roots, poly, plot**

Objectifs : savoir représenter un polynôme et calculer ses racines.

20.3.3 Représentation graphique d'un signal temporel

On veut générer un signal sinusoïdal de fréquence $f = 10Hz$, d'amplitude $A = 3$, de durée $T = 2s$ et échantillonné à $Fe = 5kHz$.

1. écrire une fonction **sinus(Fe,T,f,A)** qui retourne deux vecteurs : le signal échantillonné et les instants d'échantillonnage.
2. tracer le signal en fonction du temps
3. ajouter une légende aux axes et un titre
4. imprimer la figure
5. sauvegarder la figure dans un fichier (pour insérer dans un document)
6. sauvegarder les données (pour communiquer avec un programme externe)
7. ajouter au signal une composante continue : $V_0 = 5$
8. tracer l'histogramme ;
9. calculer la moyenne et la variance ; interprétation ?
10. idem en ajoutant un bruit aléatoire.

Fonctions utiles : **sin, rand, randn, var, mean, hist, function, save, print, plot, stairs, stem, bar, subplot, hold, figure**

Objectifs : savoir générer et analyser un signal discret, tracer une courbe, créer une fonction.

20.3.4 Visualisation 3-D et Affichage d'Image

1. Formation d'une matrice faite de zéros ou de uns : construire une matrice de taille 32×32 contenant une zone carrée de "1" entourée de zéros.
2. Représentation des données en 3-D : visualiser la matrice en 3-D.
3. Affichage d'une image : le répertoire de travail contient une image au format BMP. Programmer la lecture et l'affichage de cette image sous Matlab. Le programme doit permettre à l'utilisateur de saisir au clavier le nom du fichier.

Fonctions utiles : **zeros**, **ones**, **mesh**, **surf**, **imread**, **image**, **colormap**, **input**, **isempty**

Ojectifs : savoir présenter des données en 3-D, savoir afficher une image, gérer l'interaction avec l'utilisateur (entrée au clavier).

20.3.5 Programmation et Affichage du DSF d'une fonction au choix

1. Choisir un des DSF de la liste fournie dans le Tableau 4.1 de la section 4.11 et écrire un programme avec Matlab ou Scilab qui permet de calculer ce développement jusqu'à un ordre $N = 10$.
2. Afficher graphiquement le signal obtenu (comparer à la Fig. 4.3).
3. Faire varier N et commenter le résultat.

20.4 TP - Equations différentielles

20.4.1 Toolbox Symbolic Math

Cette boîte à outils dédiée au calcul symbolique est basée sur le noyau Maple. Etant donné une fonction $f(x)$ de la variable symbolique x , elle permet entre autres de :

- calculer en fonction de x les dérivée, intégrale, limite, développement en série de Taylor : fonctions **diff**, **int**, **limit**, **taylor**,
- résoudre des équations différentielles ou algébriques : fonctions **solve**, **dsolve** (cf. démo. **symeqndemo**),
- calculer les transformées usuelles (Laplace, Fourier, Z) : fonctions **laplace**, **ilaplace**, **fourier**, **ifourier**, **ztrans**, **iztrans**.

20.4.2 ED Linéaire du 1er ordre

1. Résoudre l'équation électrique suivante (pour $t > 0$) :

$$v_e(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} \quad (20.2)$$

avec la condition initiale : $i(0) = 0$

2. Application numérique : $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$. Calculer la constante de temps τ .
3. Tracer $i(t)$ quand $v_e(t)$ est un échelon unitaire puis une rampe.

20.4.3 ED Linéaire du 2e ordre

1. Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales nulles :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u(t) = \sin(t) \quad (20.3)$$

2. Tracer la fonction solution $u(t)$ pour $t \geq 0$.

20.4.4 Circuit RLC parallèle

Un circuit RLC parallèle est régi par l'équation suivante ($t > 0$) avec conditions initiales :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{LC} e(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} \quad (20.4)$$

$$e(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{de}{dt}(0) = \frac{I_0}{C} \quad (20.5)$$

1. Calculer $e(t)$ pour $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ où $\omega = 2\pi f$
2. A.N. : $R = 12k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 10nF$, $f = 1kHz$, $I_0 = 3mA$. Tracer $e(t)$ et comparer à $i(t)$.

Fonctions utiles : **syms**, **dsolve**, **simplify**, **simple**, **subs**, **ezplot**, **diff**

Objectifs : savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et tracer la fonction solution. Savoir interpréter les résultats fournis par Matlab.

20.5 TP - Transformée de Laplace

20.5.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t ($f(t) = 0$ pour $t < 0$). On lui fait correspondre une fonction $F(s)$ de la variable symbolique s :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (20.6)$$

$F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$. On note : $F(s) \subset f(t)$. $f(t)$ est l'original de $F(s)$.

Calcul symbolique : un problème de détermination d'une fonction $f(t)$ peut se traiter par la détermination de $F(s)$, souvent plus simple car on se ramène à un problème algébrique.

20.5.2 Calculs de quelques TL usuelles

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \exp(at)$
2. $f(t) = \cos wt$ et $f(t) = \sin wt$
3. $f(t) = \cosh(at)$ et $f(t) = \sinh(at)$
4. $f(t) = t^n$ où n est un entier positif
5. $f(t) = t^n \exp(-at)$
6. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) = \sqrt{t}$

20.5.3 Résolution d'équation différentielle linéaire

Résoudre à l'aide de la TL l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 13y = 4 \exp(-3t) \sin(2t) \quad (20.7)$$

avec pour conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

1. Calculer la TL du second membre.
2. Exprimer la TL $Y(s)$ de la solution $y(t)$.
3. En déduire la solution $y(t)$ par transformée inverse.

Help :

laplace, ilaplace, solve, simple, pretty, subs, syms

Objectifs : savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants par transformation de Laplace.

Comprendre que cette méthode algébrise le problème.

20.6 TP - Fonction de transfert

20.6.1 Rappels

Intérêt pour l'étude des systèmes linéaires stationnaires :

- simple produit algébrique en p au lieu du produit de convolution en t
- $p = j\omega = j2\pi f$: diagramme de Bode (gain et phase)

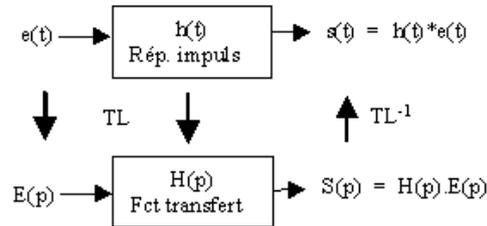


FIGURE 20.1 – Système linéaire

20.6.2 Amplificateur à Résistance Compensée

La Fig 20.2 montre trois variantes d'amplificateur à résistance utilisé dans les chaînes d'amplification vidéo.

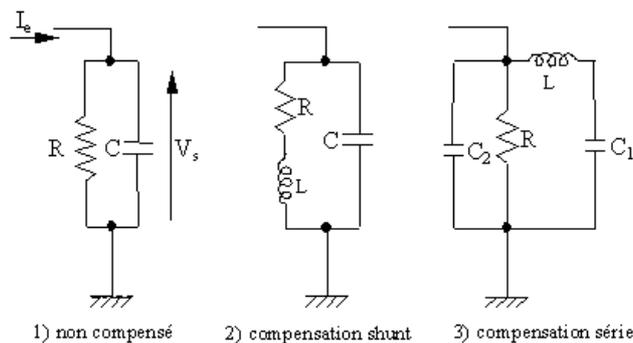


FIGURE 20.2 – Schémas électriques

On pose : $C = C_1 + C_2$, $\omega_c = 1/RC$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_1}$, $k = \omega_0/\omega_c$, $m = C_2/C$

1. Montrer que les fonctions de transfert $H(p) = V_s(p)/I_e(p)$ des trois circuits valent :

$$H_1(p) = \frac{R}{RCp + 1} \qquad H_2(p) = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$H_3(p) = \frac{R}{RLC_1C_2p^3 + LC_1p^2 + RCp + 1}$$

2. Tracer les trois fonctions de transfert (gain et phase) pour :
 $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$, $k = 1.5$, $m = 1/3$ (NB notation : $C_1 = C$ pour le circuit 2).
3. Mesurer les fréquences de coupure, les pentes, les marges de phase.
4. Interpréter les courbes.

Help : **freqs**, **logspace**, **semilogx**, **abs**, **angle**, **unwrap**, **tf**, **bode**, **ltiview**

Objectif : Comprendre la représentation des courbes de Bode.

Savoir les interpréter et faire les mesures pertinentes.

20.7 TP - Transformée de Fourier

20.7.1 Rappels

— Définition :

$$TF[f(t)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \quad (20.8)$$

— N.B. En prenant $f(t)$ causale et $p = i\omega = i2\pi\nu$, alors on a : TF=TL

— Convolution : $TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)$

— Translation : $TF[f(t - t_0)] = \exp(-i2\pi\nu t_0) F(\nu)$

— Modulation : $TF[\exp(i2\pi\nu_0 t) f(t)] = F(\nu - \nu_0)$

— Peigne de Dirac (Formule de Poisson) :

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi\nu n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) \quad (20.9)$$

20.7.2 TF Continue : Fonctions usuelles

1. Calculer la TF d'une gaussienne $f(t) = \exp(-t^2)$. Interprétation.
2. Calculer la TF inverse d'un sinus cardinal $F(\nu) = 2\pi \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$. Interprétation.
3. Calculer les TF de $f(t) = \cos 2\pi f_0 t$ et $f(t) = \sin 2\pi f_0 t$. Interprétation.

Help : **fourier, ifourier**

20.7.3 TF Discrète : Analyse spectrale

La TFD est fréquemment utilisée pour l'analyse spectrale des signaux numériques.

On fournit trois fonctions : **sinus, carre, spectre** et un programme : **tfdo**.

Help : **fft, abs, square, log10**

Objectif : Comprendre la notion de spectre d'un signal. Savoir le calculer et interpréter son tracé graphique.

20.7.3.1 Etude du théorème de Shannon

1. Générer le signal SIN1 ; calculer son spectre échantillonné avec une fenêtre rectangulaire (Porte) de longueur 1024 points ; tracer le spectre en dB sur $[0; F_e/2]$.
2. Idem pour SIN2.
3. Comparer et interpréter par rapport à la théorie.
4. Tracer le spectre échantillonné du signal CAR3. Calculer la décroissance des harmoniques. Interpréter en se reportant à la décomposition en série de Fourier d'un signal carré.
5. idem pour les signaux CAR1 et CAR2. Interpréter.

20.7.3.2 Influence de la troncature temporelle

Calculer la TFDT (obtenue par FFT avec zero-padding sur 1024 points qui donne une approximation fine du spectre continu) du signal SIN1 pour une fenêtre temporelle Rectangulaire de 128 points puis 64 points.

Etudier le spectre de SOM1. Quels commentaires peut-on faire à propos de la résolution fréquentielle (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux de fréquences proches) et de la résolution dynamique (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux d'amplitudes très différentes) de la fenêtre rectangulaire ?

20.7.3.3 Etude de l'écrêtage

Le programme `tfd0` permet d'étudier l'influence spectrale de l'écrêtage d'un signal en choisissant un seuil s .

Générer un signal sinusoïdal tel que : $A = 1$, $f = 10\text{Hz}$, $T = 1\text{s}$, $F_e = 200\text{Hz}$, $s = 0.3$. Interpréter le spectre obtenu en comparant au spectre de la sinusoïde pure.

20.7.4 Annexes

20.7.4.1 Signaux tests

TABLE 20.1 – Signaux tests

Nom	Type de signal	Durée	Fe	Fréq. 1	Amplitude 1	Fréq. 2	Amplitude 2
<i>unité</i>		(s)	(Hz)	(Hz)		(Hz)	
SIN1	sinusoïdal	7	256	100	1	-	-
SIN2	sinusoïdal	7	160	100	1	-	-
CAR1	carré	1	1408	128	1	-	-
CAR2	carré	1	1024	88	1	-	-
CAR3	carré	1	5000	100	1	-	-
SOM1	somme	1	256	100	1	104	1

20.7.4.2 Fonctions internes

- `fft` : calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) avec l'algorithme rapide de FFT (Fast Fourier Transform) si le nombre de points est une puissance de 2. Sinon, le calcul utilise un algorithme plus lent de DFT (Discrete Fourier Transform). C'est pourquoi on a intérêt à choisir un nombre N de points qui est une puissance de 2. Syntaxe :

$$z = \text{fft}(x, N);$$

où x est le vecteur contenant les échantillons du signal, N le nombre de points sur lequel on veut calculer la FFT et z est le vecteur de sortie (*a priori* complexe) récupérant les échantillons de la TFD. Signalons que N n'est pas nécessairement égal au nombre d'échantillons du signal. Si N est supérieur au nombre d'échantillons de signal disponibles, le calcul de la TFD se fait après l'ajout automatique du nombre nécessaire d'échantillons nuls en queue de signal pour compléter les échantillons manquant et obtenir au total N points. Cet artifice de calcul, qui s'appelle *zero-padding*, est intéressant pour avoir un spectre discret (TFD) (évidemment, puisqu'on travaille sur ordinateur !) qui est une approximation très fine du spectre continu (TFDT). Typiquement, on prend $N = 1024$. Cela rajoute sur le spectre échantillonné d'origine des points intermédiaires qui réalisent une interpolation en sinus cardinal (donc exacte) entre les points originels, au lieu de l'interpolation linéaire (donc fautive) faite par l'œil. On améliore ainsi la visualisation du spectre, mais cela n'ajoute évidemment pas d'information utile d'un point de vue mathématique.

- `abs` : calcul de la valeur absolue (resp. du module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe). Par exemple, si l'on veut le spectre S_{xx} du signal x , on prend le module au carré de sa TFD z :

$$S_{xx} = \text{abs}(z).^2;$$

20.7.4.3 Fonctions externes

- `sinus` : génération d'une sinusoïde. Syntaxe :

$$[x, t] = \text{sinus}(F_e, T, f, A)$$

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e , la durée T (en secondes), la fréquence f et l'amplitude A . Elle donne en sortie 2 vecteurs de même dimension : x contient les échantillons du signal sinusoïdal et t contient les instants d'échantillonnage.

- `carre` : génération d'un signal carré. Syntaxe identique à `sinus`.

— **spectre** : calcul d'un spectre. Syntaxe :

`[Sxx,freq]=spectre(Fe,x,N,dB)`

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e , le vecteur des échantillons du signal x , le nombre de points de calcul N et une chaîne de caractères dB (n/o) qui spécifie l'échelle désirée (linéaire ou en dB). Elle donne en sortie 2 vecteurs de dimension N : Sxx contient les échantillons du spectre et $freq$ contient les fréquences discrètes correspondantes (de 0 à F_e).

20.8 TP - Transformée en Z

20.8.1 Rappel sommaire

La TZ est l'équivalent de la TL pour des signaux échantillonnés : $x(t) = x(kT_e) = x(k) = x_k$.

Elle s'obtient à partir de la TL par changement de variable complexe : $z = \exp(pT_e)$.

Elle est définie par :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \quad (20.10)$$

z^{-1} est l'opérateur retard.

La fonction de transfert d'un filtre numérique est définie par une fraction rationnelle en z^{-1} .

20.8.2 Fonctions usuelles

1. Calculer la TZ de la fonction échantillonnée $f(t) = \exp(at)$ où $t = nT_e$.
2. Calculer la TZ inverse de $F(z) = T_e \frac{z}{(z-1)^2}$.

Help : `ztrans`, `iztrans`

20.8.3 Filtre numérique RII

On s'intéresse à un filtre numérique dont la fonction de transfert est du type :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (20.11)$$

On peut le caractériser par ses pôles $p_i = r_i e^{i\theta_i}$ et zéros $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, ceci à une constante multiplicative près (facteur de gain qu'on prendra par défaut égal à : $k = 1$).

On supposera que la fréquence d'échantillonnage vaut : $F_e = 10kHz$.

Pour chacun des systèmes ci-dessous, on tracera :

- la position des pôles et zéros dans le plan complexe (help : `pzmap`, `zgrid`, `conj`)
- la fonction de transfert (help : `zp2tf`, `freqz`)
- la réponse impulsionnelle sur 256 points (help : `filter`, `zeros`)

1. Système avec 2 pôles complexes conjugués : $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$.
2. idem pour $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence de θ_i .
3. idem pour $r_i = .96$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter l'influence de r_i .
4. idem pour $r_i = 1$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
5. idem pour $r_i = 1.01$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
6. Ajouter au système 1) une paire de zéros : $r_j = 0.99$ et $\theta_j = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence des zéros.
7. Ecrire l'équation aux différences qui régit le système (expression de l'échantillon de sortie en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents).

Objectif : Aborder la caractérisation et la synthèse d'un filtre numérique.

Comprendre l'influence des pôles et des zéros de la fonction de transfert en Z.

20.8.4 Annexe théorique pour TP TZ

Cas d'une paire de pôles complexes conjugués :

$$H(z) = \frac{A}{z - p_0} + \frac{A^*}{z - p_0^*} = \frac{Az^{-1}}{1 - p_0z^{-1}} + \frac{A^*z^{-1}}{1 - p_0^*z^{-1}} \quad (20.12)$$

$$H(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \text{ avec : } b_1 = 2\Re[A] \text{ et : } b_2 = -2\Re[Ap_0^*] \quad (20.13)$$

$$H(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} Ap_0^n z^{-n} + A^* p_0^{*n} z^{-n} \right] z^{-1} \quad (20.14)$$

$$h(n) = h_0(n - 1) \quad (20.15)$$

$$h_0(n) = Ap_0^n + A^* p_0^{*n} = 2\Re[Ap_0^n] \text{ pour : } n \geq 0 \quad (20.16)$$

Si l'on pose : $p_0 = r \exp(j\theta)$ et $A = a \exp(j\phi)$, il vient :

$$h_0(n) = 2a.r^n \cos[n\theta + \phi] \quad (20.17)$$

$$h(n) = 2a.r^{n-1} \cos[(n-1)\theta + \phi] \text{ pour : } n \geq 1 \quad (20.18)$$

Correspondant au système analogique :

$$h_0(t) = 2a.r^{t/T_e} \cos\left[\frac{\theta}{T_e}t + \phi\right] \quad (20.19)$$

$$H_0(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} \quad (20.20)$$

Et les relations entre paramètres analogiques et numériques :

$$\omega_p = \frac{\theta}{T_e} \quad (20.21)$$

$$\exp(-\zeta\omega_n t) = r^{t/T_e} \Rightarrow -\zeta\omega_n = \frac{\text{Log}(r)}{T_e} \quad (20.22)$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (20.23)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (20.24)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (20.25)$$

20.9 TP - Filtrage de Signaux

Soient $y(t)$ un signal temporel défini pour $t \in [0, 1]$ et $b(t)$ un bruit aléatoire suivant une loi uniforme de moyenne nulle. Pour $i = 1, \dots, n + 1$, on note $t_i = (i - 1)T_e$ où $T_e = 1/n$. On “observe” le signal bruité z en ces $n + 1$ points équidistants t_i :

$$z(t_i) = y(t_i) + b(t_i), \quad 1 \leq i \leq n + 1$$

et on veut filtrer z pour retrouver le signal y .

20.9.1 Filtrage par moyennage

On note z_m le signal filtré par moyenne. Soit r un entier strictement positif.

- Pour $r + 1 \leq i \leq n + 1 - r$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_{i-r} \cdots t_{i+r}$.
- Pour $1 \leq i \leq r$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_1 \cdots t_{i+r}$.
- Pour $n + 2 - r \leq i \leq n + 1$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_{i-r} \cdots t_{n+1}$.

Ecrire une fonction Matlab qui calcule z_m . La syntaxe d’appel devra être la suivante :

$$z_m = \mathbf{filmoy}(z, r)$$

où z représente le vecteur des $(z(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$ et z_m le vecteur des $(z_m(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.

(On pourra utiliser la fonction “**mean**” qui calcule la moyenne arithmétique des composantes d’un vecteur).

20.9.2 Filtrage par troncature du spectre

On suppose que $z(t)$ est périodique de période 1 et que n est pair. Pour obtenir le signal filtré par troncature de spectre, on procède de la manière suivante :

- On calcule la transformée de Fourier discrète de $z(t)$, on obtient le spectre discret en fréquence de z noté $Fz(\nu_i)$ pour des fréquences entières ν_i comprises entre $-n/2$ et $n/2$.

$$\nu_i = -n/2 + (i - 1) \quad i = 1, \dots, n + 1$$

Avec Matlab, pour obtenir le vecteur (à valeur complexe) $Fz = (Fz(\nu_i))_{i=1:n+1}$ on utilise les commandes suivantes :

- » $Fz = \mathbf{fft}(z)$;
- » $Fz = \mathbf{fftshift}(Fz)$;
- On tronque le spectre Fz à une fréquence ν_c fixée ($\nu_c > 0$ est appelée la fréquence de coupure), c’est-à-dire que l’on met à 0 les valeurs de $Fz(\nu_i)$ pour $|\nu_i| > \nu_c$. Le spectre tronqué, noté Fzt , est donné par :

$$\begin{cases} Fzt(\nu_i) = Fz(\nu_i) & -\nu_c \leq \nu_i \leq \nu_c \\ Fzt(\nu_i) = 0 & -n/2 \leq \nu_i < -\nu_c \text{ et } \nu_c < \nu_i \leq n/2 \end{cases}$$

- Puis on calcule la transformée de Fourier inverse du spectre tronqué, on obtient alors le signal filtré z_f . Pour obtenir la transformée de Fourier inverse on utilise :
 - » $Fzt = \mathbf{ifftshift}(Fzt)$;
 - » $z_f = \mathbf{ifft}(Fzt)$;

Ecrire une fonction Matlab qui calcule z_f . La syntaxe d’appel devra être la suivante :

$$z_f = \mathbf{filfft}(z, \nu_c)$$

où z_f représente le vecteur des $(z_f(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.

20.9.3 Simulations

Soit $y(t) = \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t) + \sin(16\pi t)$.

1. Pour $n = 1000$, créer le vecteur $y = (y(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.
2. En utilisant la command **rand**, construire un vecteur b de dimension $n+1$ dont les composantes suivent une loi uniforme. Modifier b pour qu'il soit à moyenne nulle.
 - Créer le vecteur $z = y + 3b$.
 - Tracer sur un même graphique z et y .
 - Calculer z_m pour $r = 2, r = 5, r = 10, r = 20, r = 50$. Tracer sur un même graphique y et z_m pour les différentes valeurs de r .
 - Calculer z_f pour $\nu_c = 5, \nu_c = 10, \nu_c = 15, \nu_c = 20, \nu_c = 100$. Tracer sur un même graphique y et z_f pour les différentes valeurs de ν_c .
3. Mêmes questions pour : $y(t) = t^3 + \sin(16\pi t)$

N.B. : Joindre au compte-rendu le listing des programmes Matlab ainsi que les graphes demandés. Les graphes devront être commentés (i.e. titre, légendes ...)

20.10 Consignes de Rédaction du Compte-Rendu de TP

20.10.1 Choix de sujets

1. DSF : signaux périodiques DDS + triangle + $|\sin \omega t|$ (TP 20.3.5 et TD 15)
2. TL : calcul symbolique et résolution d'EquaDiff (TP 20.5)
3. ED : circuit RLC// (TP 20.4 et TD 12)
4. TL-ED : circuit RLC série (cf. TD 13)
5. TL-FdT : Ampli TV (TP 20.6)
6. TFD-FFT : Analyse spectrale (TP 20.7)
7. TZ-FdT : Filtre RII (TP 20.8)
8. TFD-FFT : Filtrage (TP 20.9)
9. TL-Réponse Impuls. et FdT fonctions composées (cf. TD 13 et TD 14)
10. TF : modulation AM (cf. TD 16)
11. TZ : équation de récurrence (cf. TD 17)

20.10.2 Délivrables

Fournir :

- **listings** commentés
- **résultats** : figures (domaine temporel, fréquentiel), résultats numériques, solutions symboliques...
- toutes **mesures** pertinentes : *e.g.* constante de temps, fréquence (coupure, fondamental, harmoniques, résonance), période, pente (dB/décade), gain (maxi, statique), bande passante,
- **interprétation** : type de signal ou de filtre (passe-bas, passe-bande), stabilité, oscillation, rapidité...

20.10.3 Critères d'évaluation

1. CR TP / 20 points (à rendre en fin de séance) :
 - /5 Intro/Présentation/Mise en forme propre (page de garde avec noms+date+lieu)
 - /5 Programmation du calcul Matlab : listing (avec commentaires dans fichier)
 - /5 Résultat : Figure montrant les signaux
 - /5 Interprétation, Commentaire du résultat.
2. RAPIDITE / 20 points :

NoteVitesse=20-rang (1er fini => 19 ; 2ème => 18 ; 3ème =>17 ; NonFini =>10)
3. NOTE GLOBALE= (CR TP + NoteVitesse) / 2

Bibliographie

- [1] F. Luthon. Mathématique de l'ingénieur. Reprographie ENSERG, INPG Grenoble, 1999. Document de cours, 100 pages.
- [2] G. Chauvat, A. Chollet, and Y. Bouteiller. Mathématiques BTS/DUT. Analyse. EdiScience. Dunod, Paris, 2005. ref :515CHA45551.
- [3] J-M. Monier. Analyse I - Cours et 300 exercices corrigés. Dunod, Paris, 3 edition, 1999. ref :515MON32059.
- [4] F. Liret and D. Martinais. Mathématiques pour le DEUG, Analyse 1re année. Cours et exercices résolus. Sciences Sup. Dunod, Paris, 1997. ref :515LIR29178.
- [5] G. Papelier. Précis d'Algèbre, d'Analyse et de Géométrie. Librairie Vuibert, Paris, 17 edition, 1956. (à l'usage des élèves de MathSup et de MathSpé).
- [6] A. Belage, J. Rouvre, and R. Théodor. Exercices résolus de mathématiques générales CNAM niveau A, volume 1. Masson, Paris, 1983.
- [7] K. Devlin. Les énigmes mathématiques du 3e millénaire. Le Pommier, Paris, poche edition, 2007.
- [8] C. Cherruau and F. Cherruau. Maths BTS groupement B. Ellipses, Paris, 2005. ref :510CHE56780.
- [9] C. Cherruau and F. Cherruau. Sujets corrigés de Mathématiques - BTS groupement A. Ellipses, Paris, 2010. ref :510CHE56781.
- [10] V. Dotsenko. Méthodes mathématiques pour la physique. Dunod, 2018. Ref :530.15DOT-68517.
- [11] M. Kunt. Techniques modernes de traitement numérique des signaux, volume 1, 2 et 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991.
- [12] Robert Vich. Z Transform Theory and Applications. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [13] Murray R. Spiegel. Variables complexes, Cours et problèmes. Série Schaum. Mac Graw Hill, 1984.
- [14] Abdul J. Jerri. Integral and discrete transforms with applications and error analysis. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [15] Jacques Max and Collaborateurs. Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, volume 1 et 2. Masson, Paris, 4e edition, 1987.
- [16] Pierrette Benoist-Gueutal and Maurice Courbage. Mathématiques pour la physique. Intégrale de Lebesgue, Fonctions analytiques, Espaces normés, volume 1. Eyrolles, Paris, 2nd edition, 1994.
- [17] B. Picinbono. Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus. Dunod, Paris, 1989.
- [18] M. Carbon, D. Ghorbanzadeh, P. Marry, N. Point, and D. Vial. Eléments de mathématiques du signal. Exercices résolus. Dunod, Paris, 1997.
- [19] G. Blanchet and M. Charbit. Traitement numérique du signal. Simulation sous Matlab. Hermès, Paris, 1998.
- [20] Christian Godin. La philosophie pour les nuls. First Editions, 2006.
- [21] M. Chossat and Y. Privat. Aide-mémoire Mathématiques de l'ingénieur. L'Usine Nouvelle. Dunod, Paris, 2nd edition, 2010.
- [22] H. Collet, B. Girard, and C. Perrier. Mathématiques, Spécialités du groupement A, BTS industriel. Nathan, 2002.