HAL
open science

Exercices de résistance des matériaux

David Dureisseix

To cite this version:

David Dureisseix. Exercices de résistance des matériaux. Licence. Résistance des Matériaux, Montpellier, France. 2010, pp.29. cel-02185734

HAL Id: cel-02185734

https://hal.science/cel-02185734

Submitted on 16 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Exercices de résistance des matériaux

Auteur de la ressource pédagogique :
Dureisseix David

IUP GMP – Licence STPI
Création : 2002-2010
Publication : Décembre 2019

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

Exercices de résistance des matériaux

David Dureisseix
Département Mécanique, Université Montpellier 2

Ce polycopié est principalement un recueil d'exercices, que j'espère assez originaux quant à leur support d'application, réalisés suite à l'enseignement de résistance des matériaux IUP GMP puis en Licence STPI à l'Université Montpellier 2, aujourd'hui Université de Montpellier, entre 2002 et 2010. Les exercices proposés ici sont issus d'exercices et de contrôles de connaissances, et ce document vise à les proposer comme exercices d'entraînement personnel ; il ne contient par contre pas de cours...

Ces exercices sont aussi le fruit de discussions avec les collègues enseignants, dont Françoise Krasucki ; qu'ils en soient remerciés. Certains exercices sont certainement inspirés par des sujets proposés antérieurement... Je suis donc à la recherche des sources pour pouvoir les citer... Les sujets que je crois les plus originaux sont repérés par un astérisque à la fin de leur titre ; en tout cas, ils auront maintenant au moins le mérite d'être disponibles.

Table des matières

1 Mécanique de l'arbre tropical* 4
2 Arches romanes et gothiques* 8
3 Vérin hydraulique 10
4 Portique de flèche de grue* 14
5 Systèmes à barres et câbles* 18
6 Capteur acoustique passif sous-marin* 21
7 Rail de chemin de fer* 24
8 Aile d'avion* 27

Exercice 1. Mécanique de l'arbre tropical*

On s'intéresse ici à la croissance des arbres de sous-bois de la forêt tropicale de Guyane Française. En effet, contrairement aux espèces pionnières (voir arbres 1 et 2 de la figure 1 [1] ces dernières (arbres 3 et 4 de la même figure) doivent prendre des risques pour atteindre le plus rapidement possible (donc à production de masse minimale) la canopée, à environ $40\ \mathrm{m}$ de hauteur, pour accéder à suffisamment de lumière. À cause de la compétition ainsi développée, la tendance est à la prise rapide de hauteur au détriment de la masse, ce qui conduit à des risques de flambage des arbres sous leur propre poids. Il arrive ainsi de trouver de tels arbres qui utilisent leur voisins, des lianes, etc... pour se soutenir car ils ne sont pas autoporteurs : isolés, ils flambent sous leur propre poids.

FIGURE 1 – Arbre de la forêt tropicale de Guyane Française (genre Paninari), d'après [8] et logo de l'Unité Mixte de Recherche ECOFOG (ÉCOlogie des Forêts de Guyane)

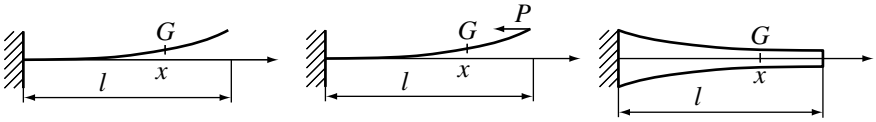


FIGURE 2 – Modèles de poutre utilisés

1ère partie : modélisation cylindrique du tronc

On suppose ici, pour simplifier, que le tronc est cylindrique, de section S constante.

1. UMR ECOFOG http://kourou.cirad.fr/umr, http://www.ecofog.gf/

1) Pour une poutre qui flambe (figure 2 à gauche), soumise uniquement à son propre poids, dont on note $v(x)$ la flèche, l la longueur, ρ la masse volumique et g l'accélération de la pesanteur, donner l'expression du moment de flexion $M_f(x)$ et montrer que

$$\frac{dM_f}{dx} = -\rho g \frac{dv}{dx} \int_x^l S dx$$

Préciser les conditions aux limites en v, auxquelles on ajoutera $M_f(x = l) = 0$.

2) En notant I le moment quadratique de flexion et E le module d'Young, montrer que la déformée doit satisfaire à

$$E \frac{d}{dx}\left(I \frac{d\omega}{dx}\right) + \rho g \left(\int_x^l S dx\right) \omega = 0 \qquad \text{où} \quad \omega = \frac{dv}{dx}$$

Dans le cas de section et moment quadratique constants, et avec le changement de variable $X = -\alpha(1 - \frac{x}{l})$, montrer que l'on peut arriver à $\frac{d^2\omega}{dX^2} = X\omega$ pour lequel vous préciserez l'expression de α. Préciser aussi les conditions aux limites que doit satisfaire ω.

3) Cette dernière équation de la configuration à l'équilibre a pour solution générale les fonctions d'Airy[2] $A_i(X)$ et $B_i(X)$ tracées sur la figure 3 : $\omega(X) = C_1 A_i(X) + C_2 B_i(X)$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

a) Avec les conditions aux limites précédentes, donner la condition sur α pour avoir une telle déformée. On pourra pour cela utiliser le fait que $\frac{B_i'(0)}{A_i'(0)} = -\sqrt{3}$.

b) Donner graphiquement la valeur de α correspondante.

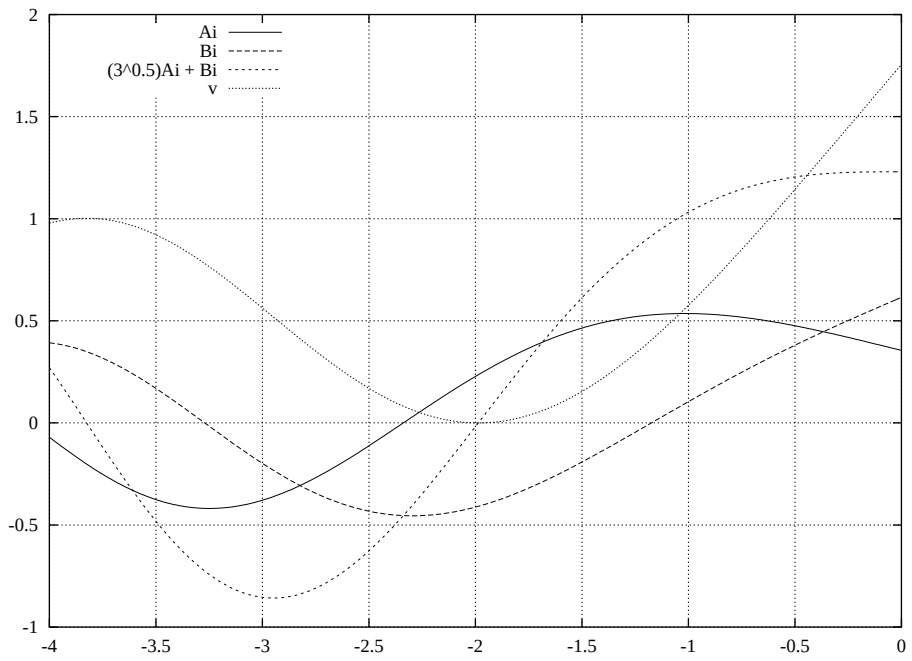


FIGURE 3 – Fonctions numériques, dont les fonctions d'Airy

4) On souhaite retrouver numériquement et de façon approchée le critère précédent. On propose pour cela deux allures plausibles de la déformée $v(x)$.

a) Réécrire la méthode énergétique dans le cas du poids propre.

b) On prend ici $v(x) = ax^2$ où a est une constante. Vérifie-t-elle les conditions aux limites en v ? Déterminer la valeur de α correspondante.

2. voir par exemple `http://dlmf.nist.gov/9`, la *Digital Library of Mathematical Functions*

c) On prend pour la deuxième allure, la solution obtenue en flexion avec la même charge qu'en flambage, mais cette fois-ci transversalement. Donner l'expression de $\dfrac{d\omega}{dx}$ puis de ω, et montrer qu'on trouve une valeur correspondante de $\alpha = 8$.

d) Comparer avec la solution exacte précédente.

5) La section S du tronc évolue avec sa hauteur l. Des campagnes expérimentales [2] donnent une loi de croissance de la forme $S(l) = \frac{\pi}{4} l_1 l$.

Pour une section de poutre circulaire, donner la relation entre I et S.

En déduire la hauteur critique l_c, puis la masse du tronc correspondante m_c.

Application numérique pour $l_1 = 1\ \mathrm{cm}$, $\rho = 1300\ \mathrm{kg/m^3}$, $E = 10\ \mathrm{GPa}$.

6) On veut maintenant prendre en compte le poids du feuillage. On modélise celui-ci par une charge P à l'extrémité (figure 2 au centre).

a) Montrer que le problème est identique au précédent en considérant une longueur équivalente $l_{\mathrm{eq}} = l + P/(\rho g S)$, en reprenant les questions 1 et 2.

b) Si l'arbre atteint la canopée avant sa hauteur critique, quel masse de feuillage et de branches m_f peut-il supporter ? La comparer à la masse m du tronc.

Pour information, les mesures effectuées [6] donnent un rapport de masse m_f/m de l'ordre de 10% à 20%. Conclure.

2ème partie : modélisation plus réaliste du tronc

Évidemment, la croissance du tronc ne se fait pas à section uniforme. Pour modéliser cette dernière, on va tout d'abord s'intéresser à une poutre en compression sous son propre poids et considérer qu'elle dépend de la position : $S(x)$ (figure 2 à droite).

1) Poutre d'égale résistance

a) Donner l'équation d'équilibre en compression.

b) En supposant que la contrainte de compression $-\sigma_O$ (< 0) reste constante sur le long de la poutre, montrer que la section soit satisfaire à $\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{\rho g}{\sigma_0} S$. et donner la forme de la solution (on notera S_0 la section à la base $x = 0$). Pour identifier le coefficient σ_0, on cherche à retrouver la forme réelle, ce qui conduit à $\sigma_0 \approx 0.15\ \mathrm{MPa}$.

c) Pour déterminer S_0, on se sert des mesures déjà utilisées dans la 1ère partie : la section à hauteur du torse (en $x = l_0 = 1.3\ \mathrm{m}$) est $S(l_0) = \frac{\pi}{4} l_1 l$. Donner l'expression de S_0.

d) Donner l'expression de la masse m du tronc en fonction de l.

e) Pour une section circulaire, donner l'expression de I.

2) Pour pouvoir travailler numériquement, on souhaite utiliser une forme approchée du mode de flambage (satisfaisant les conditions aux limites !). Ceci donnera une borne supérieure, malheureusement, pour le critère. On arrive à l'expression suivante, avec une charge P due au feuillage et aux branches, qu'on ne demande pas de retrouver :

$$\underbrace{\frac{\rho g l_1 E}{16\ \sigma_O^2}\, e^{-\dfrac{\rho g l_0}{\sigma_0}}}_{C} \underbrace{\left[\frac{1}{k}\,\frac{\displaystyle\int_0^1 \left(e^{-k\tau}\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 d\tau}{\displaystyle\int_0^1 \omega^2 d\tau}\right]}_{f_1(k)} = \underbrace{\left[k\,\frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-k\tau}\left(\int_0^\tau \omega^2 d\tau\right) d\tau}{\displaystyle\int_0^1 \omega^2 d\tau}\right]}_{f_2(k)} + \frac{P}{S_0\sigma_0} \tag{1}$$

où C est un coefficient ne dépendant que du matériau, et f_1 et f_2 ne sont des fonctions que de $k = \dfrac{\rho g}{\sigma 0} l$.

a) Faire l'application numérique pour C.

b) Avec la déformée statique ω (pour $P = 0$), on représente sur la figure 4 les évolutions des fonctions f_1 et f_2 en fonction de k. Pour $P = 0$, trouver graphiquement la valeur numérique de k satisfaisant l'équation (1).

En déduire la valeur critique de la hauteur, l_c, puis la masse de tronc correspondante, m_c.

c) On se place maintenant à la hauteur de la canopée, $l = 40\ \mathrm{m}$. Quelle valeur de P est admissible pour rester en deça de la hauteur critique ? À quelle masse maximale de feuillage m_f correspond-elle ? Quelle est alors la masse de tronc, m ?

d) Discuter de cette valeur et comparer aux résultats de la 1ère partie.

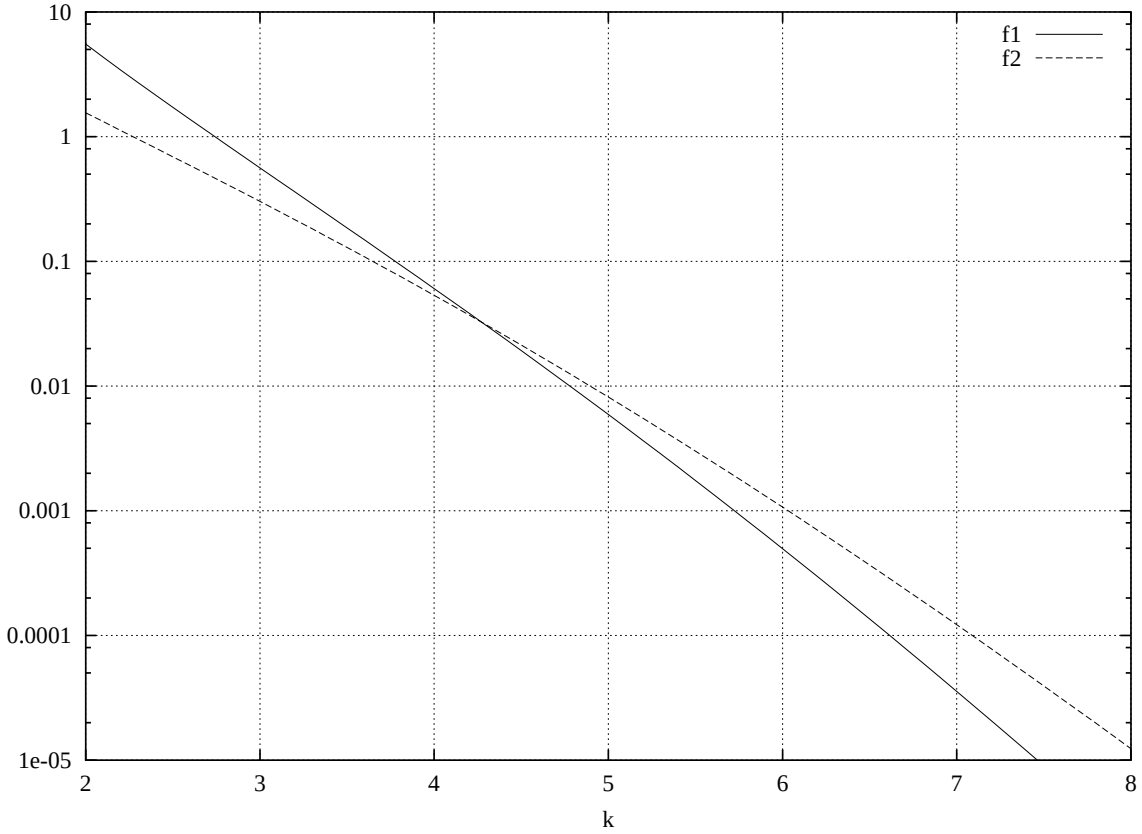


FIGURE 4 – Fonctions numériques pour la section variable

Exercice 2. Arches romanes et gothiques*

En architecture, et en particulier pour la conception des cathédrales, on distingue plusieurs styles, dont les styles roman et gothique sont parmi les plus célèbres. Un élément caractéristique de ces styles est le design des arcs.

Jusqu'à la fin du XIe siècle, l'arc en plein-cintre avec ses variétés est seul employé dans les constructions, sauf quelques rares exceptions, figure 5 [3]. Les arcs surbaissés que l'on trouve souvent dans les voûtes de l'époque romane sont presque toujours le résultat d'une déformation produite par l'écartement des murs, ayant été construits originairement en plein-cintre. En effet, l'arc en plein-cintre, de forme demi-circulaire, engendre une grande poussée latérale à sa base, ce qui nécessite souvent l'utilisation de renforts ou de contreforts dans la construction, figure 5 (à droite).

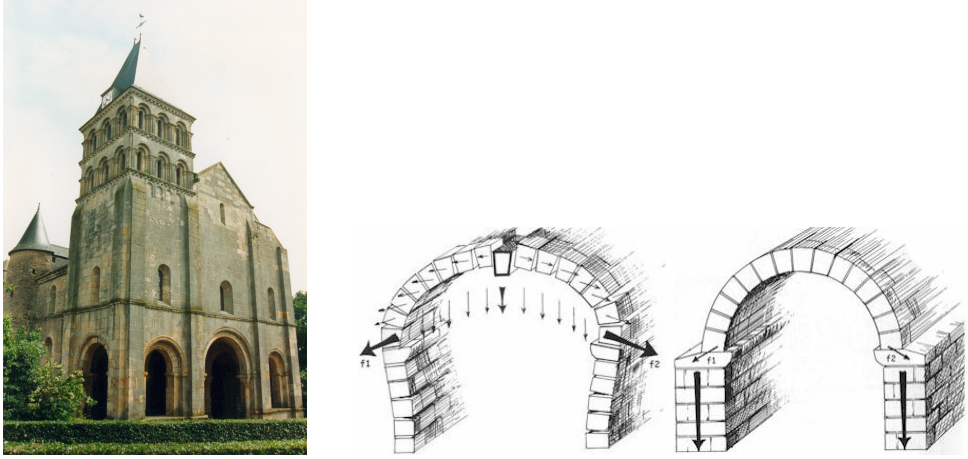


FIGURE 5 – Abbaye de Paray-le-Monial (ou Prieuré de Perrecy-les-Forges...) (photographie Patrick Giraud, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paray_le_monial_abbaye_04.jpg, CC BY-SA 1.0), et utilisation des arcs en plein-cintre, https://www.edelo.net/roman/archi_poussee.htm

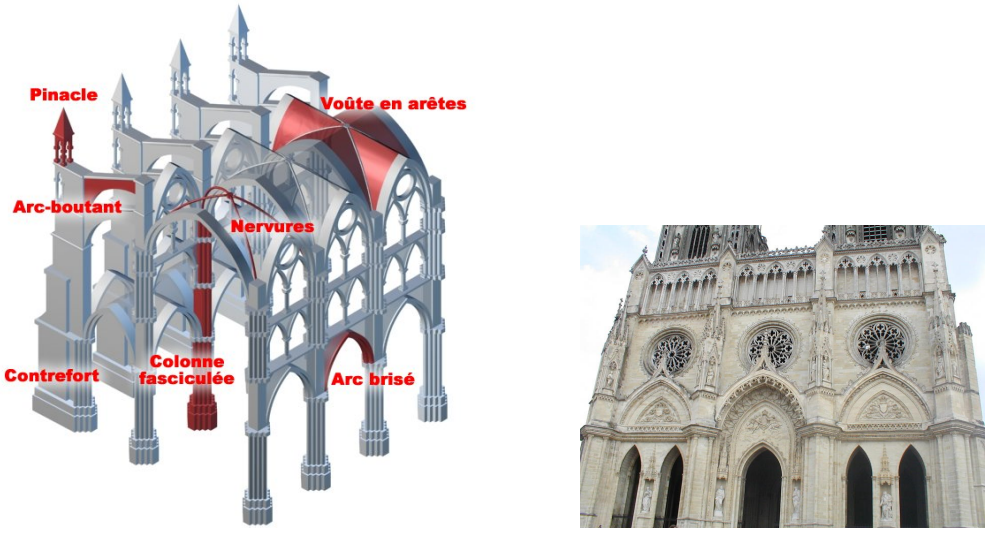


FIGURE 6 – Arc brisé utilisé dans les cathédrales (image Hill, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Architecture-gothique-infographie.jpg, CC BY-SA 1.0), cathédrale Sainte Croix d'Orléans (photographie Olivier Lubet)

C'est pendant le XIIe siècle que l'arc formé de deux portions de cercle (arc en ogive, en tiers-point

3. d'après http://www.brantacan.co.uk, http://fr.wikipedia.org/wiki/Architecture_romane, http://garennes.com/TPE-Roman et http://www.cpo.com/weblabs/chap3/archf.htm

ou brisé) est adopté successivement dans les provinces de France et dans tout l'Occident. Il est plus particulièrement utilisé dans le style gothique, figure 6 [4].

Bien que l'analyse de ces structures relève de la mécanique des maçonneries et pas de la théorie des poutres, nous allons quand même essayer de les analyser par l'utilisation de la résistance des matériaux sur poutre courbe.

On considère une demi-arche circulaire AB de rayon R, éventuellement brisée en B, figure 7 (si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a une arche en plein-cintre, sinon, une arche brisée). Elle est encastrée en A, et un effort vertical P est appliqué en B.

Le point courant de la ligne moyenne est G ; son abscisse curviligne est $s = R\theta$.

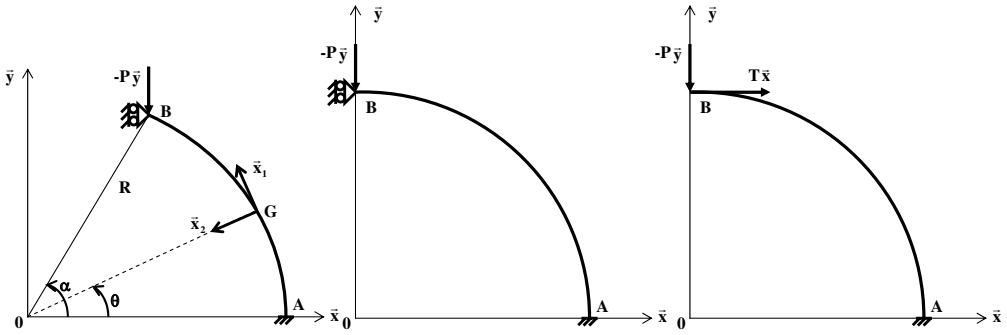


FIGURE 7 – Modèles de poutre utilisés

On ne demandera ici, pour simplifier, que l'étude du cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

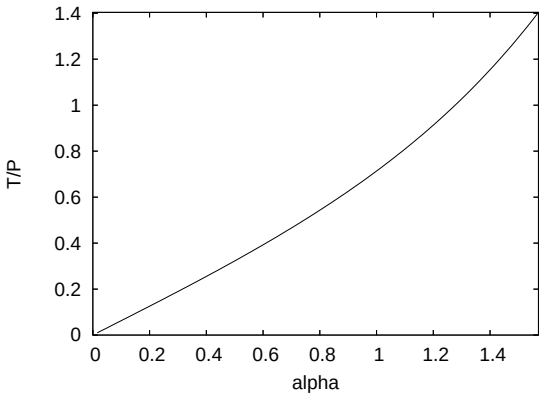
1) On remplace la condition de symétrie en B (figure 7 au centre) par un effort horizontal T (figure 7 à droite). Déterminer le torseur des efforts intérieurs en G, en fonction de P et T. Donner en particulier l'expression du moment de flexion M_f.

2) On considère uniquement la sollicitation de flexion. Écrire la relation de comportement correspondante.

3) Toujours pour la seule sollicitation de flexion, utiliser les formules de Bresse pour calculer $\overrightarrow{U}_B \cdot \overrightarrow{x}$, en fonction de P et T.

4) Quelle condition doit vérifier $\overrightarrow{U}_B$ pour que le problème traité, figure 7 à droite, soit équivalent au problème de départ, figure 7 au centre ? En déduire l'expression de T.

5) Demander au chargé de TD les expressions générales de M_f et T quand α est quelconque. Vérifier alors vos résultats, et conclure.



4. d'après http://fr.wikipedia.org/wiki/Architecture_gothique

Exercice 3. Vérin hydraulique

Les vérins hydrauliques double effet (qui peuvent travailler en sortie ou en rentrée de tige, figure 8) sont généralement contitués d'un tube creux appelé corps (1), d'un chapeau arrière (2), d'un chapeau avant (3), reliés par 4 tirants (4) et d'une tige pleine (5). Ils sont en liaison avec l'extérieur par l'intermédiaire de deux articulations à chaque bout.

Le vérin étudié ici possède un corps (1) de diamètre intérieur $D = 400\ \mathrm{mm}$, d'épaisseur $e = 11\ \mathrm{mm}$ et de longueur $l_0 = 658\ \mathrm{mm}$. Chaque tirant (4) a un diamètre de $d_0 = 40\ \mathrm{mm}$. La tige (5) a un diamètre $d = 180\ \mathrm{mm}$. Toutes les pièces sont réalisée dans un acier de module d'Young $E = 200\,000\ \mathrm{MPa}$ et de limite d'élasticité $\sigma_Y = 350\ \mathrm{MPa}$.

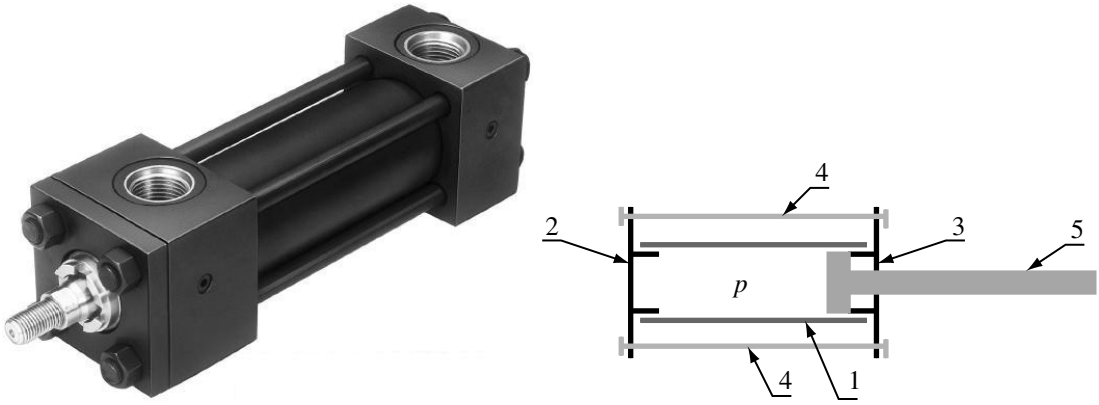


FIGURE 8 – Vérin hydraulique double effet (d'après documents Parker http://www.parker.com/) et son principe de construction en position complètement sortie.

1) Dans un premier temps, on s'intéresse à la phase de fonctionnement tige sortie au maximum, en appui sur le chapeau avant, sans effort extérieur (figure 8).

La pression d'alimentation en huile dans la chambre arrière est notée p.

a) Quelle est l'expression de la tension minimale F à mettre en place au montage dans *chaque* tirant pour empêcher le décollement des chapeaux du corps dans cette phase ?

b) Quelle est l'expression de la pression maximale d'alimentation $p_{\max}$ pour que les tirants restent dans leur limite élastique ?

c) Application numérique.

2) On s'intéresse maintenant au fonctionnement dans la phase tige sortie presque au maximum (pas d'appui sur le chapeau avant) sous l'effort extérieur de compression F en C (figure 9). On note I le moment quadratique de la section de la tige, et on prendra $l = 658\ \mathrm{mm}$.

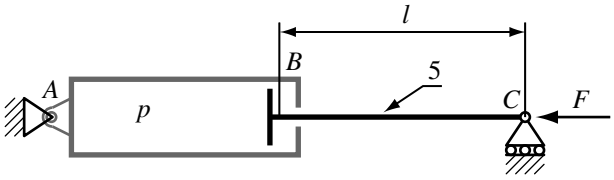
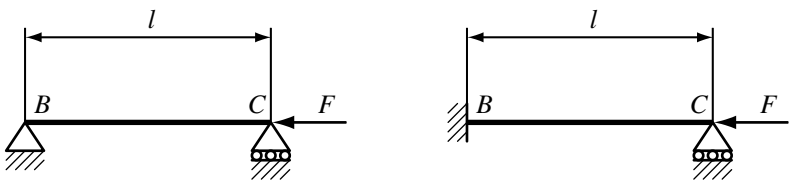


FIGURE 9 – Schématisation du vérin

On regarde tout d'abord la seule tige (5) et on propose plusieurs solutions pour sa liaison équivalente avec l'ensemble (1,2,3,4) en B :

a) Si on a une raideur en flexion faible dans cette liaison, on peut la modéliser comme une articulation (figure 10(a)).



(a) première modélisation (b) deuxième modélisation

FIGURE 10 – Modélisations de la tige du vérin

Quelle est alors l'expression de la charge limite due au risque de flambement de la tige, F_c ? Application numérique.

Quelle sera alors la pression limite correspondante, p_c ?

b) Si on a une raideur en flexion élevée dans cette liaison, on peut la modéliser comme un encastrement (figure 10(b)).

Quelle est alors l'expression de la charge limite due au risque de flambement de la tige, F_c ? Application numérique.

Quelle sera alors la pression limite correspondante, p_c ?

3) On s'intéresse maintenant à l'ensemble du vérin, en considérant le corps et la tige rigidement liés. Le modèle de poutre retenu est composé de deux tronçons : le premier, le corps, de longueur l_0, a un moment quadratique de section I_0 ; le deuxième, la tige, de longueur l, a un moment quadratique de section I, figure 11.

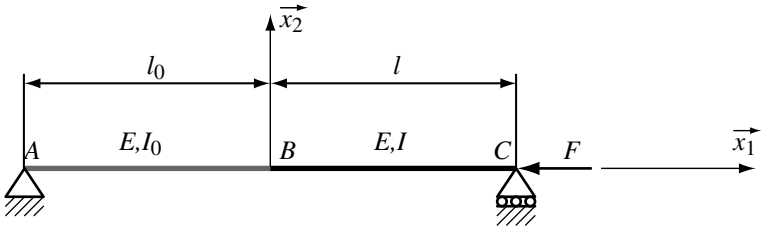


FIGURE 11 – Modélisation du vérin

Pour simplifier, on considèrera que $l_0 = l$.

On cherche à estimer la charge limite F_c en se donnant une forme de mode de flambement $v_0(x) = \cos(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l})$ (l'origine des x étant en B).

a) Cette solution vérifie-t-elle les conditions aux limites ?

b) Donner l'expression de la charge critique estimée F_c, puis de la pression critique correspondante p_c. Application numérique.

c) Comparer avec les résultats précédents.

4) On cherche maintenant à avoir l'expression exacte de cette charge critique.

a) Pour cela, donner l'expression du moment de flexion $M_f(x)$ en notant $v(x)$ la flèche, inconnue, de la poutre.

b) Montrer que $v(x)$ doit vérifier sur AB : $\dfrac{d^2v}{dx^2} + \alpha_0^2 v = 0$, sur BC : $\dfrac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = 0$, où vous préciserez les expressions de α et α_0.

c) Préciser les conditions aux limites sur v en A et C, puis ce que doit satisfaire v à la jonction en B.

d) Montrer que la condition à réaliser sur α et α_0 est $f(\alpha) = -f(\alpha_0)$ où $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta}\tan\beta$.

e) Donner l'expression de $k = \dfrac{\alpha_0}{\alpha}$. Application numérique.

f) Sur la figure 12, les fonctions $f(\beta)$ et $-f(\beta)$ sont tracées, en prenant une échelle log pour β. Déterminer graphiquement la valeur appropriée de α. En déduire la valeur de F_c. Comparer avec les résultats précédents.

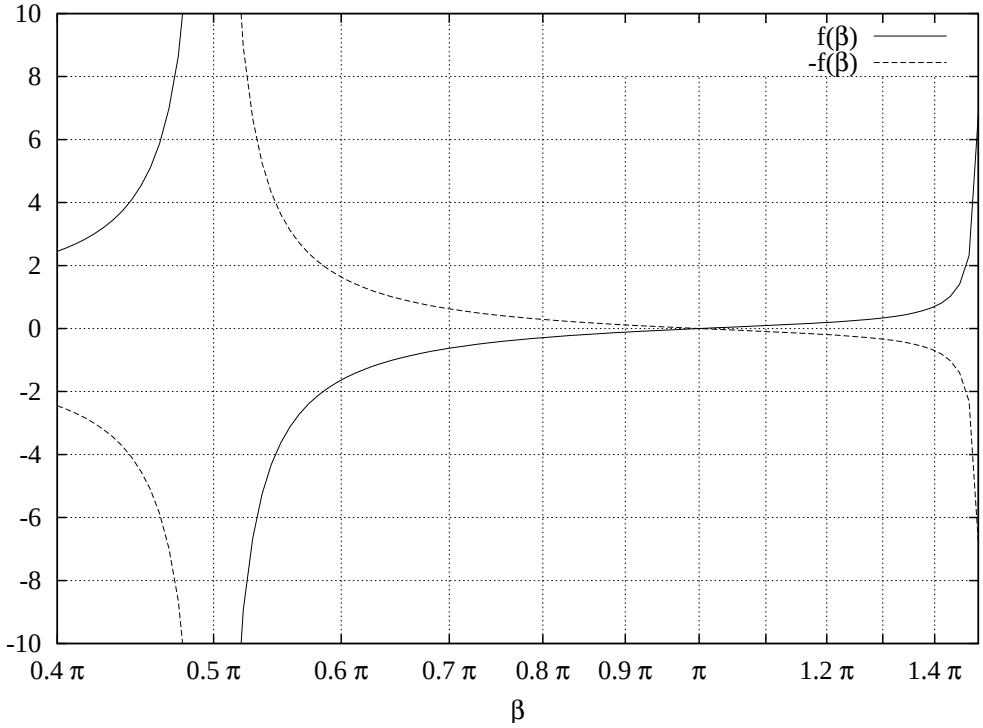


FIGURE 12 – Fonctions numériques

g) Dans le cas où $\alpha = \alpha_0$ ($k = 1$), donner graphiquement la valeur appropriée de α. En déduire la valeur de F_c.

Cette solution est-elle réalisable ? Est-elle souhaitable ?

5) On s'intéresse maintenant au corps (1), sous la pression interne p. Vu de côté (figure 13, au centre) une portion de longueur h du corps ressemble à une poutre circulaire, de section rectangulaire (largeur h, hauteur e, toutes deux négligeables devant le diamètre du corps), sollicitée uniquement par la pression interne p. Grace aux symétries, seul un quart est considéré (figure 13, à droite).

a) Quelles sont les actions extérieures appliquées à ce quart de poutre ?

b) Donner l'expression de l'effort interieur de traction N dans cette poutre.

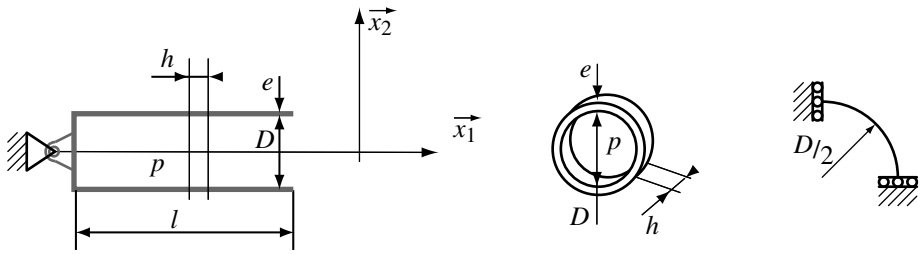


FIGURE 13 – Modélisation du corps du vérin

c) Sous l'effet de ce seul effort N, quelle est la pression limite p_Y dans le corps pour satisfaire le critère de limite élastique du corps ? Application numérique.

Exercice 4. Portique de flèche de grue*

De nombreuses grues de grande taille sont assemblées à partir de différentes parties, élancées (et donc modélisables comme des poutres) : la tour, la flèche... constituées elles-même d'un assemblage de petites poutres, figure 14. L'objectif de cette étude est de caractériser un modèle de poutre global d'une flèche de grue, à partir de l'assemblage de petites poutres. Dans tous les cas, on ne considèrera que les sollicitations de traction et de flexion (on négligera donc les éventuelles torsion et cisaillement), avec un modèle de Navier-Bernoulli.

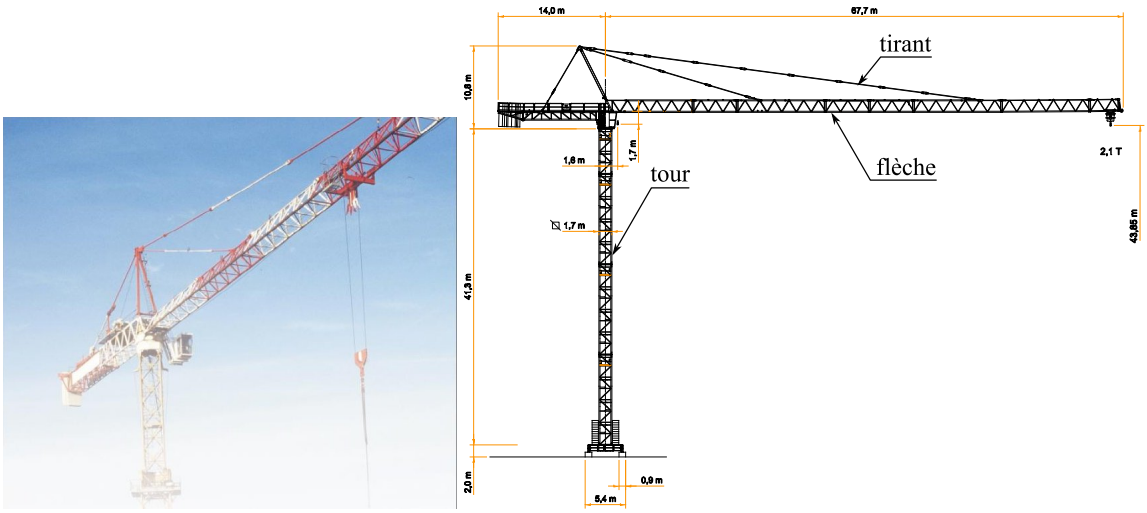


FIGURE 14 – Grue à tour (images d'après [7])

1ère partie : caractérisation d'une poutre simple

On s'intéresse tout d'abord à la rigidité globale d'une poutre de longueur $L = 1$ m, à section circulaire d'aire $S = 1,633$ cm^2 et de module quadratique de flexion $I = 0,217$ cm^4. Elle est fabriquée en acier de module d'Young $E = 200$ GPa, et de limite d'élasticité $\sigma_Y = 500$ MPa. On la suppose encastrée d'un coté, et on impose différentes conditions à l'autre extrémité, figure 15.

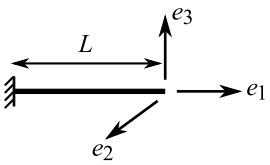


FIGURE 15 – Poutre élémentaire

1) On impose tout d'abord un déplacement axial $u_1\underline{e}_1$ en extrémité droite de la poutre. Donner l'expression des forces intérieures le long de la poutre : N_1 pour l'effort axial et M_1 pour le moment de flexion en fonction, entre autres, de u_1 (vous pourrez répondre par un diagramme des efforts).

2) On impose ensuite un moment $M_2\underline{e}_2$ en extrémité droite de la poutre. Donner l'expression des déplacement axial u_2 et et rotation ω_2 de la section en extrémité droite en fonction, entre autres, de M_2.

3) Donner alors, dans le cas d'un chargement composé des deux précédents, la relation entre les quantités en extrémité droite de la poutre (u, ω) et (N, M), sous la forme d'une matrice 2×2 :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

4) Avec une sollicitation en effort normal N seulement, donner l'expression de la charge maximale $N_{\max}$ qui évite la plastification. Donner aussi l'expression de la charge limite au flambement. Applications numériques.

Avec une sollicitation en moment de flexion M seulement, donner l'expression du moment maximale $M_{\max}$ qui évite la plastification. Application numérique.

Dans un plan portant en abscisse N et en ordonnée M, tracer l'allure du domaine admissible vis à vis des critères précédents.

Une caractérisation plus poussée prendrait aussi en compte un effort tranchant $T\underline{e}_3$ en bout de poutre. On donne ici le résultat (qu'on ne demande pas de retrouver, mais qu'on utilisera dans la suite), pour une poutre particulière de caractéristiques données, qui lie u, v (le déplacement transverse sur $\underline{e}_3$) et ω à (N, T, M) [a] sous la forme d'une matrice 3×3 :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12a & -6aL \\ 0 & -6aL & 4aL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{où } a = 195 \text{ (sans unité)} \tag{2}$$

a. non... il ne s'agit pas ici d'un groupe musical.

2ème partie : caractérisation de l'assemblage

On cherche maintenant à trouver les caractéristiques d'une poutre équivalente à la flèche de grue. Pour cela, on considère un tronçon élémentaire de cette flèche, voire même une moitié de tronçon (grâce à la symétrie), qu'on appellera une cellule, dont la longueur est toujours $L = 1$ m. Cette cellule est constituée de petites poutres soudées entre elles, figure 16. Pour des questions de facilité de fabrication, on suppose que toutes ces poutres ont les mêmes section, moment quadratique, et matériau, qui sont ceux de la première partie.

Cette cellule est encastrée en partie gauche, et dans la partie droite G est le centre de section supposé (il se trouve dans le triangle grisé, à H_1 du haut et H_2 du bas), figure 16. On va imposer un mouvement de poutre à toute cette section, défini par une translation $u_0\underline{e}_x$, une translation $v_0\underline{e}_z$ et une rotation de section en G, $\omega_0\underline{e}_y$. C'est-à-dire qu'on va imposer en chaque nœud A, B et C le mouvement correspondant.

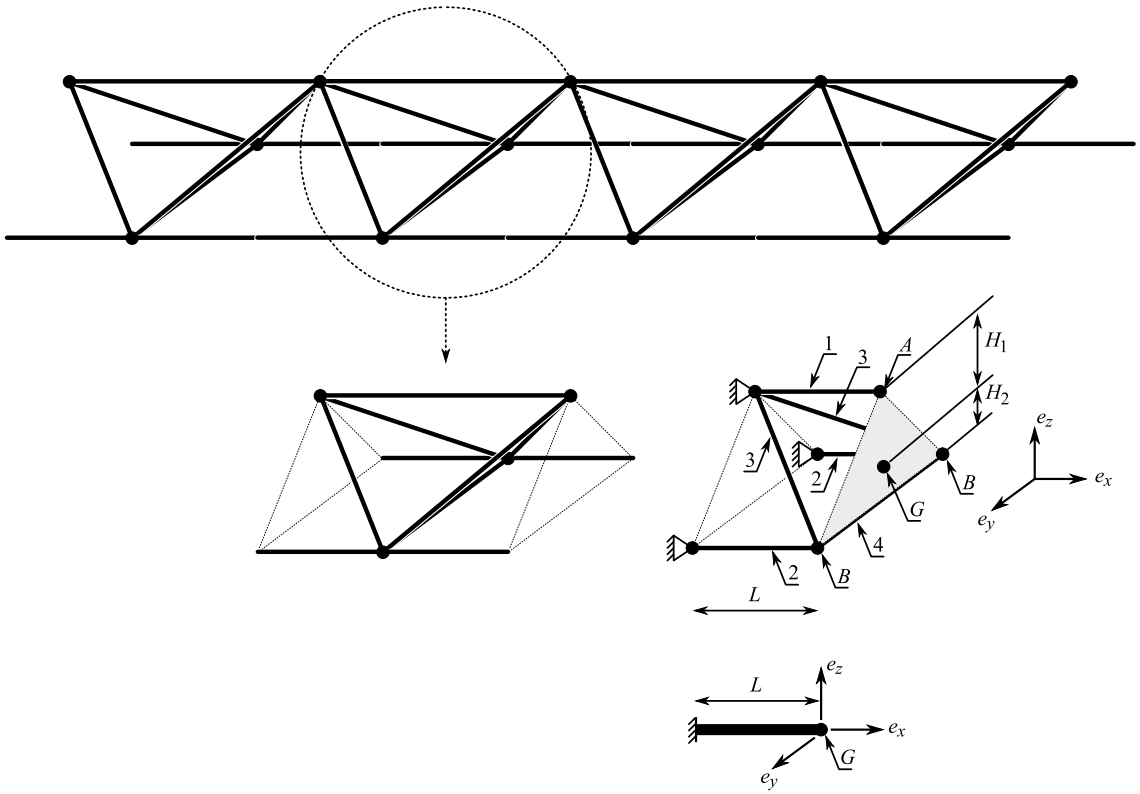


FIGURE 16 – Flèche de grue (en haut), tronçon et cellule (au milieu) et poutre équivalente (en bas)

5) Montrer que le mouvement imposé en A, à la poutre 1, est $u_0 - H_1\omega_0$ en axial, v_0 en transversal et ω_0 en rotation sur $\underline{e}_y$. En déduire les efforts exercés sur la poutre 1 en A : N_1, T_1, M_1, en utilisant (2).

6) Montrer que le mouvement imposé en B, à une des poutres 2, est $u_0 + H_2\omega_0$ en axial, v_0 en transversal et ω_0 en rotation sur $\underline{e}_y$. En déduire les efforts exercés sur une poutre 2 en B : N_2, T_2, M_2, en utilisant (2).

7) Le cas d'une des poutres 3 est plus compliqué à cause de l'inclinaison de ces poutres. Dans un premier temps, on néglige leur action. En déduire alors les efforts complets N_0, T_0, M_0, sur la section de poutre à droite, en G, sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

Pourquoi la poutre 4 n'intervient-elle pas ?

8) Si on prend en compte les poutres 3, on trouve le résultat partiel suivant (qui est donné et qu'on ne demande pas de retrouver) :

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,9.\,10^7 \text{ N/m} & 0 & 0 \\ 0 & 9.\,10^6 \text{ N/m} & -9.\,10^6 \text{ N/rad} \\ 0 & -9.\,10^6 \text{ N} & 4.\,10^7 \text{ Nm/rad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Au vu de ce résultat, pourrait-on trouver les caractéristiques (section S_0, moment quadratique I_0, module d'Young E_0) d'une poutre de longueur L équivalente qui donne le même résultat avec (2) ? (on ne demande pas de le faire, mais de justifier votre réponse).

9) Les résultats obtenus aux questions 7 et 8 sont en fait issus d'une méthode appelée homogénéisation cinématique. Une autre méthode, plus précise, appelée homogénéisation périodique, permet de trouver les résultats partiels suivants :

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,9.\,10^7 \text{ N/m} & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 3.\,10^7 \text{ Nm/rad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

Pour ce résultat, peut-on trouver les caractéristiques (section S_0, moment quadratique I_0, module d'Young E_0) d'une poutre de longueur L équivalente qui donne le même résultat, c'est-à-dire de la forme (2) mais avec une autre valeur de a, qu'on pourra noter a_0 ? Application numérique pour les caractéristiques que vous pouvez identifier.

3ème partie : caractérisation de la flèche complète

Ayant obtenu les caractéristiques équivalentes, on peut maintenant faire un calcul sur la flèche entière, composée de n cellules (donc de longueur $2nL$) soumise à un unique effort tranchant $T = 2,1$ kN en bout : (i) avec les caractéristiques de l'homogénéisation cinématique, (ii) avec les caractéristiques de l'homogénéisation périodique, (iii) avec un modèle complet de toute la flèche (modèle de référence, obtenu numériquement), (iv) avec les caractéristiques d'une homogénéisation cinématique, mais avec un modèle de poutre de Timoshenko (avec cisaillement, sans l'hypothèse de Navier-Bernoulli, qui n'a pas été étudié ici). Ces calculs ont été réalisés, et donnent les résultats suivants :

calcul	déplacement vertical en bout		
	$n = 4$	$n = 12$	$n = 34$
(i)	3,6 mm	9,8 cm	2,22 m
(ii)	4,7 mm	12,7 cm	2,88 m
(iii)	6,7 mm	16 cm	3,6 m
(iv)	8,6 mm	16,9 cm	3,5 m

10) Commentez ces résultats en les comparant entre eux.

11) Sur la flèche entière modélisée comme une poutre équivalente, avec le chargement précédent, dans quelle section les efforts intérieurs sont-ils les plus grands ?

Calculez le moment de flexion $M_{\max}$ dans cette section.

En supposant l'effort normal nul et avec les résultats (3), en déduire les valeurs des déplacements sur la cellule correspondante, u_0, v_0 et ω_0.

12) Avec les déplacements de la question précédente, et en reprenant la question 5, en déduire les valeurs des efforts exercés sur la poutre 1 en A : N_1, T_1, M_1, en utilisant (2).

13) On cherche à vérifier si cette poutre 1 est correctement dimensionnée. Sa section est circulaire, de diamètre $d = 1,45$ cm, et le matériau est un acier de module d'Young $E = 200$ GPa et de limite d'élasticité $\sigma_Y = 500$ MPa.

Avec la seule sollicitation N_1, la poutre risque-t-elle de plastifier ? Risque-t-elle de flamber ?

Avec les sollicitations combinées N_1 et M_1, la poutre risque-t-elle de plastifier ? Le critère de flambement serait-il plus critique qu'avec la seule sollicitation N_1 ? (Justifiez votre réponse sans calculs).

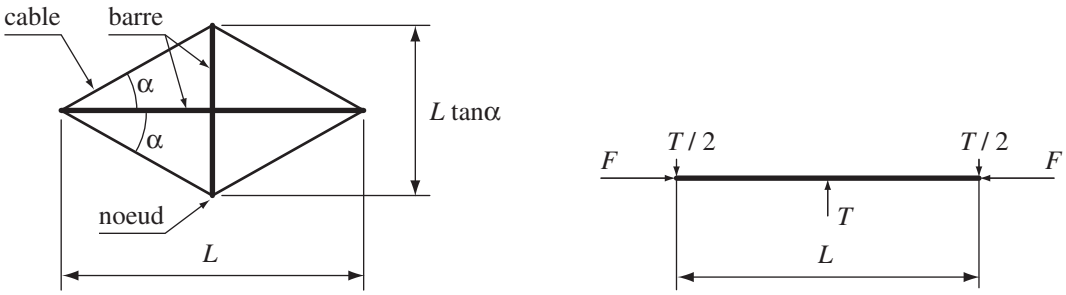
Exercice 5. Systèmes à barres et câbles*

1ère partie : étude d'un système de tenségrité Un système de tenségrité [4, 5] est une structure composée de câbles et de barres, utilisée en Génie Civil pour l'architecture, les structures spatiales légères... voir figure 17.

FIGURE 17 – Applications des structures de tenségrités ; à gauche : *Needle Tower* (Snelson 1968, image Onderwijsgek, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kenneth_Snelson_Needle_Tower.JPG, CC-BY-SA-2.5-NL) , à droite : *Tensarch Project* [3]

Sa particularité est que les barres ne sont reliées qu'à des câbles, par leur extrémités (les nœuds) ; les câbles sont tendus alors que les barres ne travaillent qu'en compression. Les nœuds sont supposés parfaits (toutes les rotations sont libres) de sorte qu'un système de tenségrité peut être vu comme un treillis très particulier. La raideur de l'ensemble est obtenue en tendant les câbles. On peut alors construire de grandes structures par assemblage de plus petits modules autocontraints (en équilibre sans efforts extérieurs, avec des câbles tendus).

On va s'intéresser dans un premier temps à un module très simplifié, plan et symétrique, constitué de deux barres et quatre câbles, voir figure 18(a). On suppose que les deux barres ne se touchent pas entre elles ; α est l'angle formé entre une barre et un câble. On tend les câbles de façon à obtenir un effort intérieur N_0 dans ceux-ci, en l'absence d'effort extérieur sur le module. Les caractéristiques des barres et des câbles sont données dans le tableau 1.



(a) Module de tenségrité étudié

(b) Barre étudiée

FIGURE 18 –

	section	module d'Young	limite d'élasticité en traction
câble	$S_c = 50\ \mathrm{mm}^2$	$E_c = 80\ \mathrm{GPa}$	$\sigma_{Yc} = 200\ \mathrm{MPa}$
barre	S_b	$E_b = 200\ \mathrm{GPa}$	$\sigma_{Yb} = 250\ \mathrm{MPa}$
		$\alpha = 30,\ L = 1.2\ \mathrm{m}$	

TABLE 1 – Caractéristiques des barres et des câbles, et géométrie de la structure

1) Donner l'expression des efforts intérieurs dans les barres en fonction des données (et de N_0 en particulier). Les barres sont-elles bien en compression ?

2) Quel effort maximal N_0 permet de ne plastifier aucun câble ? Application numérique.

3) Vis-à-vis du critère de flambement, quelle barre est la plus sollicitée (les deux sont réalisées dans le même profilé d'acier) ?

4) Les barres sont réalisées dans un tube cylindique creux de diamètre extérieur D_e et de diamètre intérieur D_i. Quelle est l'expression du moment quadratique de flexion I ?

5) À partir de quelle longueur L du module une barre va-t-elle plastifier avant de flamber ?

6) On considère maintenant une barre de longueur L qui, à cause du montage de la structure, est aussi sollicitée par un effort tranchant en son milieu, T (on suppose $\delta = T/L$ petit), voir figure 18(b).

a) Quels sont le moment de flexion maximal et l'effort normal dans la poutre ?

b) D'après vous, cette barre va-t-elle flamber plus tôt que prévu (c'est-à-dire si $\delta = 0$) ? On ne demande pas la démonstration, mais juste une justification !

2ème partie : étude d'un câble tressé On considère ici un câble fabriqué à partir du tressage de seulement 3 fils en acier de diamètre d pour simplifier (figure 19). En réalité, les câbles sont fabriqués avec un plus grand nombre de fils, de façon de plus en plus complexe quand les tensions doivent être élevées : pour information, la figure 20(a) présente la section d'un câble de télésiège.

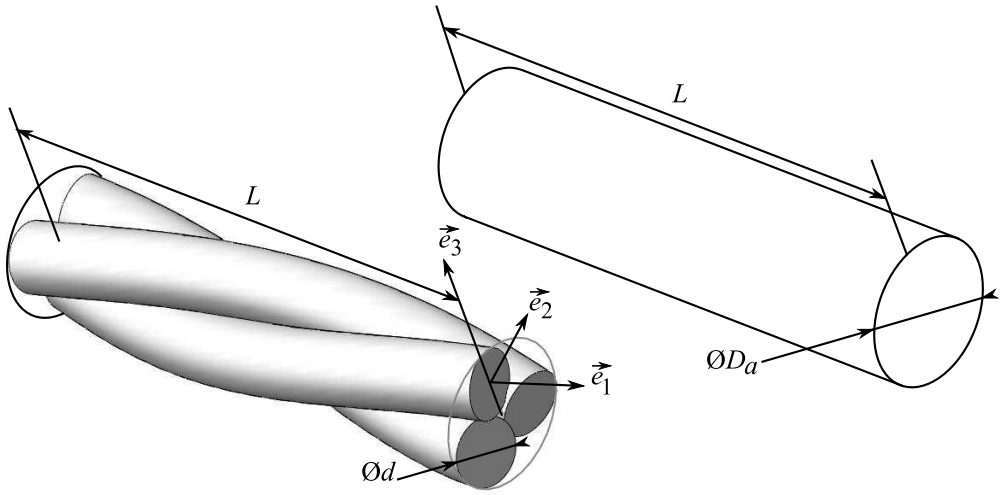


FIGURE 19 – Constitution d'un câble à 3 fils et poutre pleine équivalente

Chaque fil d'acier est donc une poutre courbe (comme un ressort, mais avec un grand angle d'hélice β, ou un faible angle d'enroulement $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, voir figure 20(b)).

On ne demande pas ici d'analyser cette poutre courbe ! On fournit dans la suite des résultats d'analyse (dans le cas où α est assez petit) qui ne devront pas être redémontrés.

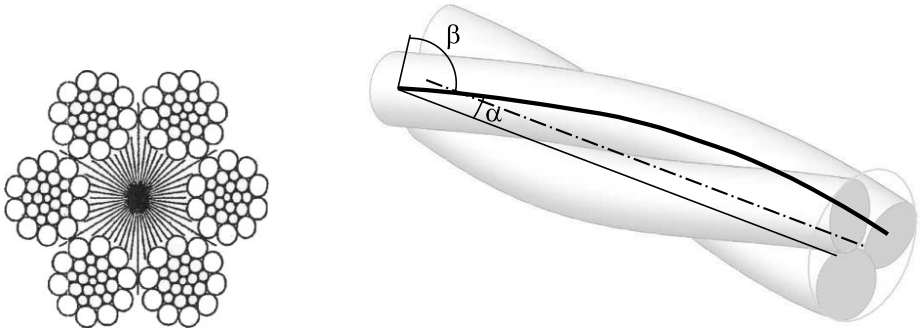
Pour choisir de tels câbles, soumis à une force de traction globale, on utilise dans les catalogues une poutre dite 'équivalente' (figure 19), de diamètre le diamètre extérieur de tressage, ici $D_a = d(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$, de module d'Young équivalent E_a, et de limite d'élasticité équivalente en traction σ_{Ya} (c'est cette poutre équivalente qui était utilisée dans la première partie de ce sujet).

1) Pour la poutre équivalente (figure 19) soumise à une force de traction F, donner, en fonction entre autres de D_a, E_a, σ_{Ya}, les expressions de :

a) son allongement ΔL,

b) sa contrainte σ_a,

c) la valeur maximale de l'effort de traction, $F_{\max}$, pour ne pas plastifier.



(a) Section d'un câble de support de télécabine (d'après document Poma)

(b) Un fil est une poutre courbe en hélice

FIGURE 20 –

2) On fournit les informations suivantes : lorsqu'on tire sur le câble avec un effort de traction F, chaque fil est soumis à :

— son propre effort de traction $N = \dfrac{F}{3}$,

— mais aussi à un moment de flexion (autour de $\vec{e}_2$, voir figure 19) égal à $M_f = \sqrt{3}\dfrac{GI}{ESd^2}\alpha^2\dfrac{F}{3}d$ (qu'on admettra dans toute la suite).

S est la section du fil de diamètre d, I, son moment quadratique de flexion, E est le module d'Young de l'acier qui constitue le fil, G son module de cisaillement, α, l'angle d'enroulement.

a) Donner l'expression de la contrainte maximale $\sigma_{\max}$ dans la section d'un fil en fonction de N et M_f.

Dans toute la suite, vous utiliserez l'expression suivante : $\sigma_{\max} = \dfrac{F}{3S}(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2\dfrac{G}{E})$

b) Dans le cas d'un fil non enroulé ($\alpha = 0$) on a évidemment comme contrainte maximale dans la section $\sigma^0_{\max} = \dfrac{F}{3S}$. Application numérique pour $\dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma^0_{\max}}$ avec un fil en acier étiré pour lequel $E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa, $\alpha = 10° = 0,175$ rad.

c) Pour un acier de limite d'élasticité en traction σ_Y, quelle est l'expression de la charge maximale sur l'ensemble du câble, $F_{\max}$ qui évite de plastifier les fils ?

d) Pour la poutre pleine équivalente au câble, en déduire σ_{Ya} qui donne la même charge maximale $F_{\max}$ sous la forme $\sigma_{Ya} = k\sigma_Y$ où vous donnerez l'expression du coefficient k. Application numérique pour k. Conclusion ?

Exercice 6. Capteur acoustique passif sous-marin*

La surveillance des fonds marins, outre les objectif militaires, a aussi pour fonction de prévenir les catastrophes naturelles, comme les tsunamis.

FIGURE 21 – D'après [1] https://apps.dtic.mil/docs/citations/ADA494741

Il s'agit alors de déployer un réseau de nombreux capteurs sur de très longues distances. L'interrogation de tels capteurs lointains peut tirer parti des technologies utilisées en communication, comme la fibre optique.

Une technologie intégrée récente de capteurs de pression acoustique (microphones sous-marins) utilise le laser à fibre : une faible longueur de fibre optique (de l'ordre de $L = 6\ \mathrm{cm}$) est traitée pour émettre, en réaction à un signal lumineux de puissance qui la traverse, une lumière laser à une unique fréquence qui dépend de l'allongement du tronçon de longueur L. Un capteur acoustique devant mesurer la pression extérieure à ce tronçon, un dispositif mécanique doit permettre de transformer cette pression en un allongement (ou un raccourcissement) du tronçon.

La figure 22(a) présente un tel dispositif. Il est constitué d'un tube rigide, fermé par deux membranes déformables ; la fibre traverse ces membranes auxquelles elle est collée, le tout formant un boîtier étanche.

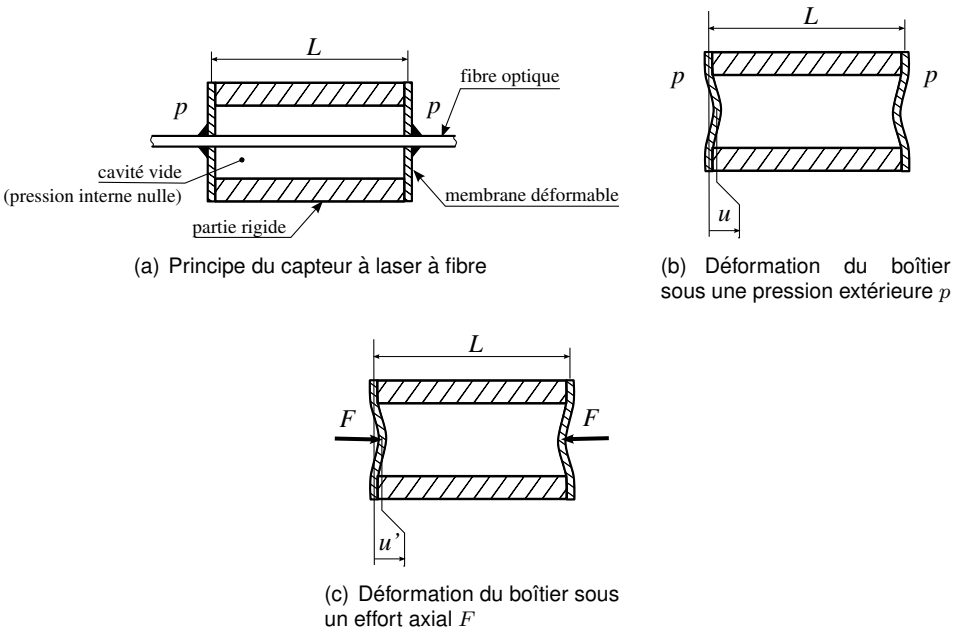
La fibre optique se présente sous la forme d'un cylindre de silice de diamètre $D = 0,125\ \mathrm{mm}$, de module d'Young $E = 72\ \mathrm{GPa}$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.2$, et de limite d'élasticité $\sigma_Y = 100\ \mathrm{MPa}$.

1) Sous l'effet d'une force axiale F, chaque membrane se déforme et son centre se déplace cette d'une valeur u' proportionnelle à F : $u = s'F$, figure 22(c). Un essai à $F = 100\ \mathrm{N}$ donne $u' = 6\ \mu\mathrm{m}$.

Donnez l'expression de la raideur k d'une longueur L de fibre en traction/compression. Application numérique. Est-elle négligeable devant celle des membranes ? Justifiez rapidement.

2) Sous l'effet d'une pression extérieure p uniquement, chaque membrane se déforme et son centre se déplace cette fois-ci d'une valeur u proportionnelle à p : $u = sp$, figure 22(b). Un essai à $p = 2\ \mathrm{bars}$ (rappel : $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$) donne $u = 5.75\ \mu\mathrm{m}$.

Si on néglige la rigidité de la fibre en traction/compression devant celle des membranes, donnez l'expression de la déformation ε dans la fibre en fonction de p sous la forme $\varepsilon = \alpha p$. Application numérique pour α.



(a) Principe du capteur à laser à fibre

(b) Déformation du boîtier sous une pression extérieure p

(c) Déformation du boîtier sous un effort axial F

FIGURE 22 –

Une autre réalisation de boîtier conduit à
$|\alpha| = 1.2\ 10^{-5}\ (\mathrm{MPa})^{-1}$, $|s| = 3.6\ 10^{-13}\ \mathrm{m/N}$ et $|s'| = 5.5\,10^{-8}\ \mathrm{m/N}$,
que vous prendrez dans la suite, indépendamment des résultats précédents. Dans toute la suite, on négligera la raideur de la fibre vis à vis de celle des membranes.

3) Pour une profondeur en mer de $200\ \mathrm{m}$, la pression extérieure est $p = 20\ \mathrm{bars}$. Donnez l'expression de la contrainte de compression σ dans la fibre. La fibre reste-t-elle dans son domaine élastique ?

4) Toujours dans les mêmes conditions, y a-t-il un risque de flambement de la fibre ? On prendra pour conditions aux limites pour la fibre un encastrement avec les membranes.

Quelle est la pression extérieure maximale p_0 qui évite le flambement ? Application numérique.

Pour augmenter p_0, on envisage plusieurs solutions. La première consiste à prétendre la fibre au montage avec un effort de traction F_0, figure 23.

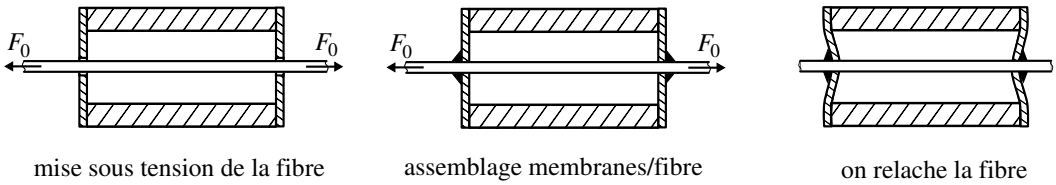


FIGURE 23 – Prétension de la fibre au montage

5) Donnez l'expression de la déformation ε_0 de la fibre lorsqu'elle est sous tension (avant assemblage avec les membranes). Une fois la fibre assemblée et relachée, montrez que le déplacement u_1 dont ont fléchi les membranes s'écrit

$$u_1 = \frac{s'k}{1 + 2s'k}\varepsilon_0 L$$

Quelle est alors l'expression de la déformation *totale* ε_1 dans la fibre (par rapport à la situation avant mise sous tension) ?

6) On met l'ensemble sous pression extérieure p. Quel est alors l'expression du déplacement total u ? À partir de quelle pression p_1 la fibre n'est-elle plus contrainte ? (dans ces expressions, inutile de remplacer u_1 par son expression précédente...)

7) Quelle est la nouvelle expression de la pression maximale p_0 pour éviter le flambement (inutile encore de remplacer u_1 par son expression précédente...) ?
Si on veut $p_0 > 20\ \mathrm{bar}$, quelle est la valeur initiale de F_0 à installer ? Applications numériques.
Vérifiez que sous cette valeur de F_0 la fibre n'a pas plastifié au montage.

8) Quelle est la sensibilité G du capteur ainsi réalisé ? (si on change p de Δp, u change de $\Delta u = G\Delta p$).

Une autre solution consiste à essayer de guider la fibre. Pour cela, on remplit la cavité intérieure du capteur avec un autre matériau de caractéristiques élastiques E_0, ν_0, σ_{Y0}. Pour l'instant, on considère que la fibre n'est pas prétendue au montage.

9) Caractéristiques du boîtier rempli : cette fois-ci, on obtient $|s'| = 4.5\,10^{-8}\ \mathrm{m/N}$ et $|\alpha| = 10^{-5}\ (\mathrm{MPa})^{-1}$ (voir questions 1 et 2). Pouvait-on prévoir que la valeur de $|\alpha|$ serait moins élevée qu'auparavant ? Justifiez brièvement votre réponse.

Cette fois-ci, la fibre se comporte différemment en flambement. En effet, le matériau de remplissage, élastique, a tendance à retenir la fibre latéralement. On peut alors considérer que la fibre est sollicitée comme sur la figure 24 avec une raideur répartie k_0 (quand la flèche est $v(x)$, le matériau de remplissage réagit avec une charge linéique répartie sur la fibre $-k_0 v(x)$) modélisant l'interaction avec le matériau de remplissage. On prendra $k_0 = 1000\ \mathrm{N/m^2}$ pour les applications numériques.

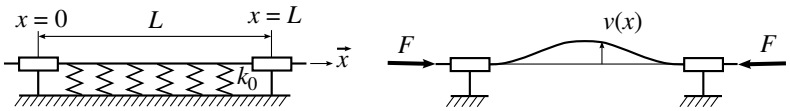


FIGURE 24 – Flambement de la fibre sur support élastique

10) Donner l'expression de l'énergie élastique de la poutre, E_d, puis celle du support, E_s, lorsque la poutre se déforme avec une flèche $v(x)$ (les expressions sont demandées sous forme d'intégrales le long de la poutre).

11) Pour obtenir une approximation de la nouvelle charge critique de flambement, on va utiliser le quotient de Rayleigh

$$R = \frac{E_d + E_s}{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}$$

Lorsque la rigidité k_0 est suffisamment faible, le mode de flambement ressemble à celui où il n'y a pas de support élastique. En approchant ce mode par

$$v(x) = v_0\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

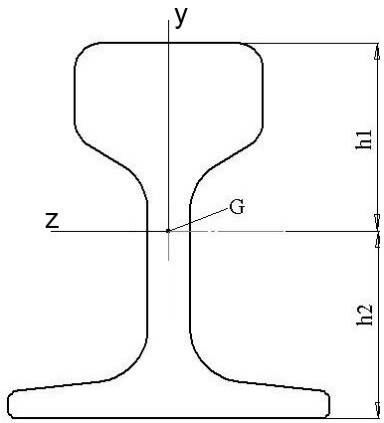
où v_0 est une constante, montrez que la charge critique de flambement s'écrit $F_c + \beta k_0 L^2$, où F_c est la charge critique sans support élastique, et β une constante dont vous donnerez l'expression. Pour éviter les calculs, on donne les valeurs (on ne demande donc pas de démontrer ces expressions !) :

$$\int_0^L v^2 dx = \frac{3}{2}Lv_0^2, \qquad \int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2}L\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 v_0^2, \qquad \int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}L\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 v_0^2$$

12) Avec l'expression précédente de la charge critique, et en prenant $\beta \approx 0.1$, donnez l'expression de la nouvelle pression extérieure maximale p_0 avant qu'il n'y ait flambement. Conclusion ?

Exercice 7. Rail de chemin de fer*

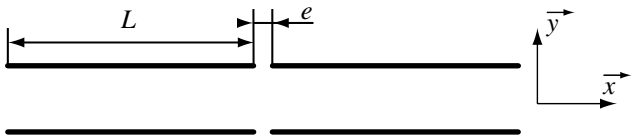
(a) Rails SNCF in situ



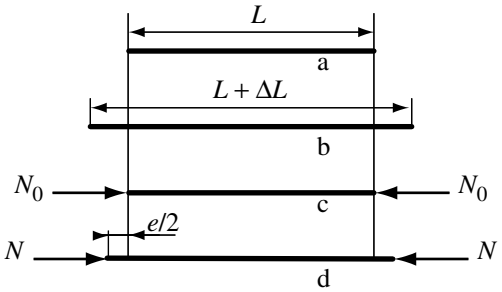
(b) Profil normalisé de rail “Vignole” (hauteur $140\ \mathrm{mm}$)

FIGURE 25 –

1ère partie : Flambement d'une poutre sous sollicitation thermique On se propose de trouver pourquoi les anciens rails SNCF sont installés en tronçons de longueur L, séparés par des jeux de dilatation e, et de dimensionner ceux-ci, figure 26(a). On va s'intéresser ici uniquement à des rails droits (en ligne droite, donc). Dans toute la suite, on négligera le poids du rail.



(a) Disposition des rails sur la voie



(b) Différentes configurations d'un rail

FIGURE 26 –

Les rails ont une géométrie particulière, figure 25(b), imposée, de section $S = 6000\ \mathrm{mm}^2$ et de moment quadratique $I = 2,8.10^{-6}\ \mathrm{m}^4$ pour une flexion autour de $(G, \vec{z})$ (latérale). Pour des raisons d'installation et de maintenance, les longueurs sont $L = 36\ \mathrm{m}$. Ils sont constitués d'acier de module d'Young $E = 200\ \mathrm{GPa}$ et de limite d'élasticité en traction $\sigma_Y = 300\ \mathrm{MPa}$.

Si on considère un unique rail de longueur L, sous l'effet d'une variation de température ΔT, il s'allonge de ΔL (figure 26(b) cas a et b).

On note $\alpha = \dfrac{\Delta L/\Delta T}{L}$ le coefficient de dilatation du matériau. Pour l'acier du rail, il vaut $\alpha = 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

1) Si les rails sont montés jointifs (c'est-à-dire si $e = 0$), ils ne peuvent s'allonger. Ils subissent alors un effort de compression noté N_0 (figure 26(b) cas c). Quelle est l'expression de N_0 en fonction des données du problème, dont ΔT ?

2) Toujours si $e = 0$, rappeler l'expression de l'effort critique N_c vis à vis du critère de flambement de la poutre. En déduire la variation de température maximale admissible ΔT_c pour le rail. Application numérique et conclusion.

3) Dans le cas où il existe un jeu e, donner l'expression de l'effort N (figure 26(b) cas d). Pour tolérer une variation de température $\Delta T = 200\ ^\circ\mathrm{C}$ sans flambement, donner l'expression du rapport e/L minimal à installer. Application numérique et conclusion.

4) Vérifier que sous le chargement critique N_c, il n'y a pas de plastification du rail.

2ème partie : Flambement du rail En pratique, l'étude précédente n'est pas significative pour le flambement du rail. En effet, celui-ci est placé sur une embase, elle-même déposée sur du ballast, figure 25(a). On se propose donc ici d'étudier le flambement latéral d'une poutre (le rail), supportée par une raideur répartie latéralement le long de cette poutre k (le comportement du support de rail : quand la flèche est $v(x)\overrightarrow{y}$, le support réagit avec une charge linéique sur le rail $-kv(x)\overrightarrow{y}$), figure 27 à gauche. On a estimé cette raideur à $k = 10^5\ \mathrm{N/m^2}$. Cette raideur est d'autant plus élevée que le rail est fixé rigidement avec son support.

Enfin, on appelle $v(x)$ la flèche de la poutre suivant $\overrightarrow{y}$.

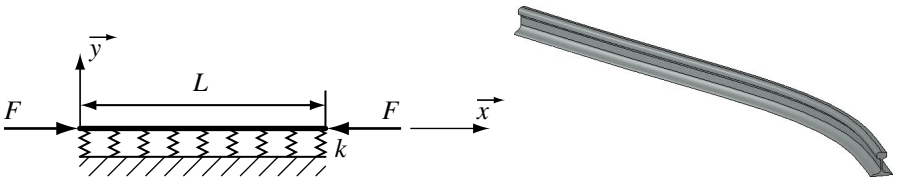


FIGURE 27 – Modélisation du support latéral du rail (à gauche) et mode de flambement au bout $x = 0$ de la poutre (à droite)

Une étude préalable a montré que lorsque la raideur k est suffisamment élevée, le mode de flambement est localisé en bout de poutre. C'est ce qui se produit en pratique sur un rail. Pour avoir une estimation de la charge critique F_c correspondante, on propose d'utiliser une forme raisonnable du mode de flambement (voir figure 27 à droite) :

$$v(x) = v_0 \cdot e^{-\frac{x}{a}} \cdot \cos\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{4}\right)$$

où v_0 et a sont des paramètres, pour l'instant inconnus.

Le quotient de Rayleigh associé est $F_c = \dfrac{24EI + ka^4}{12a^2}$ (on ne demande pas de retrouver cette expression !).

5) Donner alors l'expression de a qui minimise F_c, puis la valeur de la charge critique F_c associée. Application numérique pour a/L et F_c.

Pour la suite, et indépendamment de la valeur éventuellement trouvée précédemment, on prendra celle correspondant à un autre type de rail, à savoir $F_c = 100\ \mathrm{kN}$

6) Au vu de la valeur de F_c et vis à vis du résultat obtenu sur la dilatation du rail sans joint ($e = 0$), quelle variation de température ΔT_c est alors admissible ? Application numérique et conclusion.

7) Pour tolérer une variation de température $\Delta T = 200\ ^\circ\mathrm{C}$ sans flambement, donner l'expression du rapport e/L minimal à installer. Application numérique et conclusion.

8) Vérifier que sous le chargement critique F_c, il n'y a pas de plastification du rail.

9) Pourrait-on poser un rail continu (c'est à dire pour lequel $e = 0$), et qui supporte une variation de température $\Delta T = 200\ ^\circ\mathrm{C}$ sans flambement ? Donner alors la valeur de la raideur k nécessaire du support. Application numérique.

3ème partie : Étude du rail en flexion On s'intéresse maintenant à étudier la déformation du rail soumis à son poids propre noté $-\rho g\overrightarrow{y}$. Pour cela on considère la modélisation suivante : le rail est une poutre droite élastique de type Navier Bernoulli. Afin de prendre en compte l'élasticité du support, on considèrera que la poutre est en appui sur deux ressorts élastiques à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$. Ces deux ressorts ont la même raideur, notée k. On cherche à calculer $v(x)$ la flèche de la poutre suivant $\overrightarrow{y}$.

10) Écrire l'équation différentielle du quatrième ordre que doit vérifier la flèche $v(x)$, compte tenu des hypothèses. En déduire que le déplacement s'écrit : $\dfrac{-\rho g x^4}{24} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Afin d'achever la détermination de $v(x)$, c'est à dire la détermination des constantes A, B, C, et D, on va, par l'intermédiaire des questions qui suivent, déterminer rigoureusemment les conditions aux limites du problème.

11) Quelle force le ressort situé à l'extrémité $x = L$ exerce t-il sur la poutre ? En déduire la condition portant sur l'effort tranchant en $x = L$. Quelle force le ressort situé à l'extrémité $x = 0$ exerce t-il sur la poutre ? En déduire la condition portant sur l'effort tranchant en $x = 0$. Pour cette extrémité vous prendrez soin de respecter la convention utilisée en cours dans la définition des efforts intérieurs.

12) Dans ce problème, l'effort tranchant noté T est égal à $T = -EI\dfrac{d^3v}{dx^3}$. Déduire de la question précédente une équation reliant la valeur de $\dfrac{d^3v}{dx^3}$ à v à chacune des extrémités.

13) Quelle est la condition sur la valeur du moment aux deux extrémités ? En déduire (en la justifiant) la valeur de la dérivée deuxième de $v(x)$.

14) Grâce à la question précédente, montrer que $B = 0$ et que $A = \dfrac{\rho g L}{12}$.

15) En utilisant la condition sur l'effort tranchant en zéro et les résultats précédents, montrer que $D = -\dfrac{EI\rho g L}{2k}$.

16) En utilisant la condition sur l'effort tranchant en $x = L$, achever la détermination de v. Donner l'expression de la flèche maximum. Calculer la rotation aux deux extrémités.

Exercice 8. Aile d'avion*

On considère une aile d'avion dans deux configurations différentes : en vol ou au sol. La carlingue de l'avion à laquelle l'aile est attachée est supposée rigide, et on modélise dans un premier temps l'aile par une poutre de section *uniforme*, de longueur L, fabriquée dans un matériau de module d'Young E, de section ayant un moment quadratique de flexion I. En vol, l'action de l'air selon la verticale (la portance) est supposée être une répartition d'effort linéique p le long de la poutre, figure 28 à gauche. Au sol, seule l'action du train d'atterrissage sur l'aile est considérée F, figure 28 à droite. Dans tous les cas, on négligera le poids propre de l'aile, et on notera M la masse totale de l'avion.

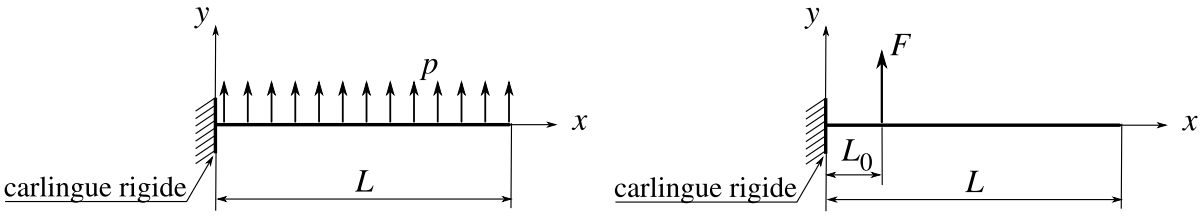


FIGURE 28 – Modèle simplifié de l'aile ; à gauche : en vol, à droite : au sol

1) Si on néglige, en vol, la portance de la carlingue, alors la charge linéique p sur les *deux* ailes équilibre le poids de l'avion. Donner l'expression de p en fonction des données.

2) Si on néglige, au sol, l'action du train d'atterrissage avant, alors l'effort sur les *deux* ailes équilibre aussi le poids de l'avion. Donner l'expression de F en fonction des données.

3) Sollicitations dans la poutre :
a) Tracer dans chaque cas, la répartition du moment fléchissant le long de la poutre.
b) Quelle est la section (supposée ici uniforme) la plus sollicitée dans chaque cas ?
c) Lequel des deux chargements est le plus pénalisant pour le critère de limite élastique ?

4) On considère maintenant, pour simplifier, une section elliptique creuse pour l'aile, figure 29 en haut, de demi-axes a et b et d'épaisseur e. On donne le moment quadratique de flexion pour une section elliptique *pleine* (on ne demande donc pas de le retrouver !) : $I = \dfrac{\pi a b^3}{4}$. Donner l'expression de I pour la section considérée.

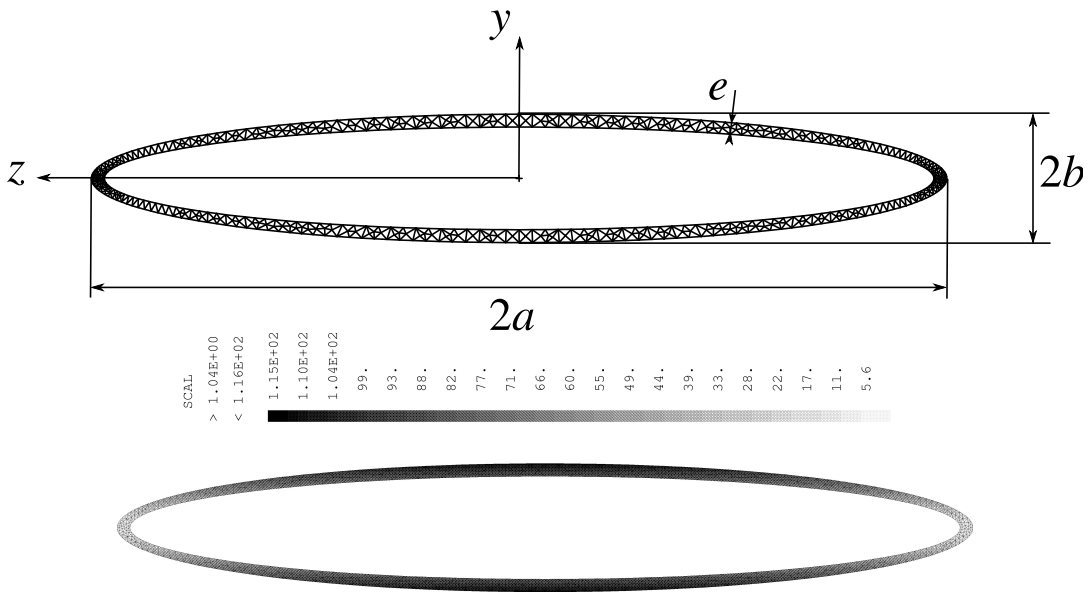


FIGURE 29 – Profil en ellipse creuse. En haut : maillage éléments finis, en bas : contraintes calculées

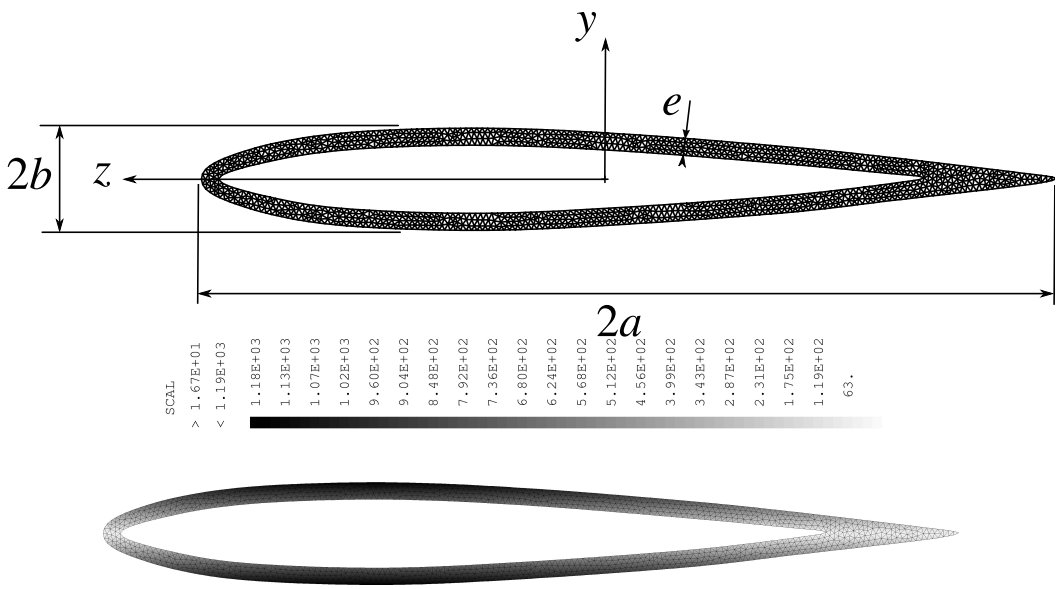


FIGURE 30 – Profil NACA. En haut : maillage éléments finis, en bas : contraintes calculées

Dans le cas où l'épaisseur e est petite devant a et b, l'expression de I est $I = (3 - 2\eta)\eta^2 \dfrac{\pi e a^3}{4}$, où $\eta = b/a$ est appelée la finesse, qu'on prendra dans la suite, sans chercher à la démontrer.

5) Toujours pour la section elliptique creuse, donner l'expression de la contrainte maximale σ dans la section en fonction du moment de flexion M_f, de a, η et e.

6) Quelle que soit la forme de la section, une analyse dimensionnelle avec des hypothèses raisonnables donne le résultat suivant (admis) : $\sigma = f(\eta)\dfrac{1}{e/a}\dfrac{M_f}{a^3}$ où f est une fonction dépendant du profil de la section et de η.

a) Donner l'expression de $f(\eta)$ pour l'ellipse creuse. Application numérique pour $\eta = 0,15$.

b) Un calcul par éléments finis présenté sur la figure 29 en bas, donne, pour les paramètres $a = 1$, $e = 0.03$, $\eta = 0,15$, $M_f = 1$ une contrainte maximale $\sigma = 116$. Commentez brièvement ce résultat et comparez-le avec celui obtenu par résistance des matériaux.

7) Un profil de section plus réaliste (profil extérieur de type NACA[5], le profil elliptique fonctionne très mal du point de vue aérodynamique) est présenté sur la figure 30 en haut. Ses caractéristiques sont $e/a = 0,04$ et $\eta = 0,12$. Une simulation numérique réalisée avec $a = 0,5$ et $M_f = 1$, présentée sur la figure 30 en bas, donne une contrainte maximale $\sigma = 1190$.

a) Commentez brièvement ce résultat.

b) Donner la valeur de f correspondant à ce profil et cette finesse.

c) Du point de vue de la limite élastique, quel profil résiste le mieux à matériau, épaisseur e et finesse η identiques ? Justifiez.

5. http://www.ppart.de/aerodynamics/profiles/NACA4.html, https://fr.wikipedia.org/wiki/Profil_NACA

Références

[1] Scott Foster. Listening with light. *Australian Defense Science*, 13(1) :10–11, 2005.

[2] Gaëlle Jaouen. *Etude des stratégies biomécaniques de croissance des jeunes arbres en peuplement hétérogène tropical humide*. phdthesis, Université Henri Poincaré – Nancy I, December 2007. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00272100.

[3] R. Motro. Tensarch : A tensegrity double layer grid prototype. In *Space Structures 5*, pages 1 :57–66. Thomas Telford Publishing, jan 2002. doi:10.1680/ss5v1.31739.0007.

[4] R. Motro. *Tensegrity*. Elsevier, 2003. doi:10.1016/b978-1-903996-37-9.x5028-8.

[5] René Motro. Tensegrity : from art to structural engineering. In *2012 IASS-APCS Symposium*, page 14 p., Séoul, South Korea, May 2012. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00857410.

[6] Christophe Proisy. *Apport des données radar à synthèse d'ouverture pour l'étude de la dynamique des écosystèmes forestiers*. PhD thesis, Université Paul Sabatier – Toulouse III, 1999. Thèse de doctorat dirigée par Mougin, Eric Sciences biologiques et fondamentales appliquées. Psychologie Toulouse 3 1999. URL : http://www.theses.fr/1999TOU30040.

[7] Comité technique national du bâtiment et des travaux publics (CTN B). Prévention du risque de renversement des grues à tour sous l'effet du vent. Technical Report Recommandation de la CNAMTS R 406, Institut national de recherche et de sécurité pour la prévention des accidents du travail et des maladies professionnelles, 2004.

[8] B. Thibaut, J. Gril, and B. Chanson. Wood growth and development. In *Encyclopedia of Applied Plant Sciences*, pages 96–105. Elsevier, 2003. doi:10.1016/b0-12-227050-9/00045-4.