



HAL
open science

Exercices de dynamique et vibration mécanique

David Dureisseix

► **To cite this version:**

David Dureisseix. Exercices de dynamique et vibration mécanique. Master. Dynamique des solides - Vibrations des systèmes mécaniques, Montpellier, France. 2010. cel-02047369v1

HAL Id: cel-02047369

<https://hal.science/cel-02047369v1>

Submitted on 24 Feb 2019 (v1), last revised 14 Nov 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Exercices de dynamique et vibration mécanique

Auteur de la ressource pédagogique :

Dureisseix David

IUP GMP – Licence STPI – Master Mécanique

Création : 2002-2010

Publication : Décembre 2018

Exercices de dynamique et vibration mécanique

David Dureisseix
Département Mécanique, Université Montpellier 2

Ce polycopié est principalement un recueil d'exercices, que j'espère assez originaux quant à leur support d'application, réalisés suite à l'enseignement de dynamique du solide et celui de vibration en IUP GMP puis en Licence STPI et Master Mécanique à l'Université Montpellier 2, aujourd'hui Université de Montpellier, entre 2002 et 2010. Les exercices proposés ici sont issus d'exercices et de contrôles de connaissances, et ce document vise à les proposer comme exercices d'entraînement personnel ; il ne contient par contre pas de cours de dynamique ni de vibration...

Ces exercices sont aussi le fruit de discussions avec les collègues enseignants, dont Françoise Kra-sucki ; qu'ils en soient remerciés. Certains exercices sont certainement inspirés par des sujets proposés antérieurement à l'ENS de Cachan, aujourd'hui ENS Paris-Saclay... Je suis donc à la recherche des sources pour pouvoir les citer... Les sujets que je crois les plus originaux sont repérés par un astérisque à la fin de leur titre ; en tout cas, ils auront maintenant au moins le mérite d'être disponibles.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Exercices d'application de dynamique du solide	6
1	Centrifugeuse	7
2	Cycliste*	8
3	Roulement haute vitesse*	9
4	Effet " rétro "	10
5	Récupération d'énergie sur bus urbain	11
6	Embrayage centrifuge	13
7	Équilibrage dynamique	15
8	Étude du déploiement des bras d'un satellite	17
9	Destruction de cheminées par basculement*	19
10	Principe d'un système de récupération d'énergie : le yoyo*	24
11	Freinage et accélération d'une motocyclette*	26
3	Exercices d'application de vibration mécanique	28
12	Étude d'un accéléromètre*	29
13	Micro-accéléromètre MEMS résonnant*	31
14	Étude d'une corde vibrante*	34
15	Vibrations longitudinales	36
16	Amortisseur passif accordé de vibrations*	37
17	Vibrations transversales – Calcul par méthodes approchées	38
18	Suspension automobile : le système <i>skyhook</i> *	39
19	Pot vibrant électrodynamique*	42
20	VAL*	45
21	Vitesse critique d'arbre en rotation	47
22	La machine à laver simplifiée*	48
23	Couplage aéroélastique du pont de Tacoma*	49
24	Oscillations des gratte-ciel*	53
25	Vibrophone et endurance de pièces de faible raideur*	56
4	Vibrations des systèmes discrets à 1 degré de liberté – formulaire	59

1 Introduction

À propos du principe fondamental de la dynamique (PFD)...

Principe. Du latin *principium*, « commencement », « origine » (dérivé de *princeps*, « premier »). Dans les sciences, proposition première posée au fondement d'un raisonnement ou d'une démonstration. Pour Aristote, le souci de tout démontrer se heurte à l'impossibilité, pour l'esprit humain, de remonter à l'infini dans la chaîne des déductions. Il faut donc adopter, comme point de départ de toute démonstration, un ou plusieurs principes qui ne sont déduits d'aucune autre proposition et qui sont eux-mêmes indémontrables.

Dictionnaire de la philosophie, Serge Le Strat (2002)

Et pour un petit aperçu historique, comparer :

Se dit aussi de toutes les causes naturelles par lesquelles les corps agissent & se meuvent. Principe de mouvement. Les animaux ont le principe du mouvement en eux-mêmes, & les corps inanimés ne se meuvent que par un principe qui leur est étranger.

Dictionnaire de l'Académie française (1694)

Se dit aussi de toutes les causes naturelles, et particulièrement de celles par lesquelles les corps agissent et se meuvent. Le principe de la chaleur. Le principe du mouvement. On dit que les animaux ont le principe du mouvement en eux-mêmes, et que les corps inanimés ne se meuvent que par un principe qui leur est étranger.

Dictionnaire de l'Académie française (1835)

2 Exercices d'application de dynamique du solide

Exercice 1. Centrifugeuse

Le plan de situation de la centrifugeuse est donné sur la figure 1. On considère uniquement le sous-ensemble 1, qui est donc un solide S , en liaison pivot avec le massif-bâti R autour d'un axe vertical (O, \vec{z}) . Le point A de S est situé au centre de la nacelle, sur son articulation avec S . Sa position est repérée de la façon suivante : $\vec{OA} = h\vec{z} + a\vec{e}_r$ où $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})$ est un repère lié à S , et θ est l'angle entre \vec{x} et \vec{e}_r .

- 1°) Calculer $\vec{V}(A/S)$, $\vec{V}(A/R)$, $\vec{V}(A, S/R)$.
- 2°) Calculer $\vec{\Gamma}(A/R)$.
- 3°) Quelle est la trajectoire de A dans S ? Quelle est celle de A dans R ?

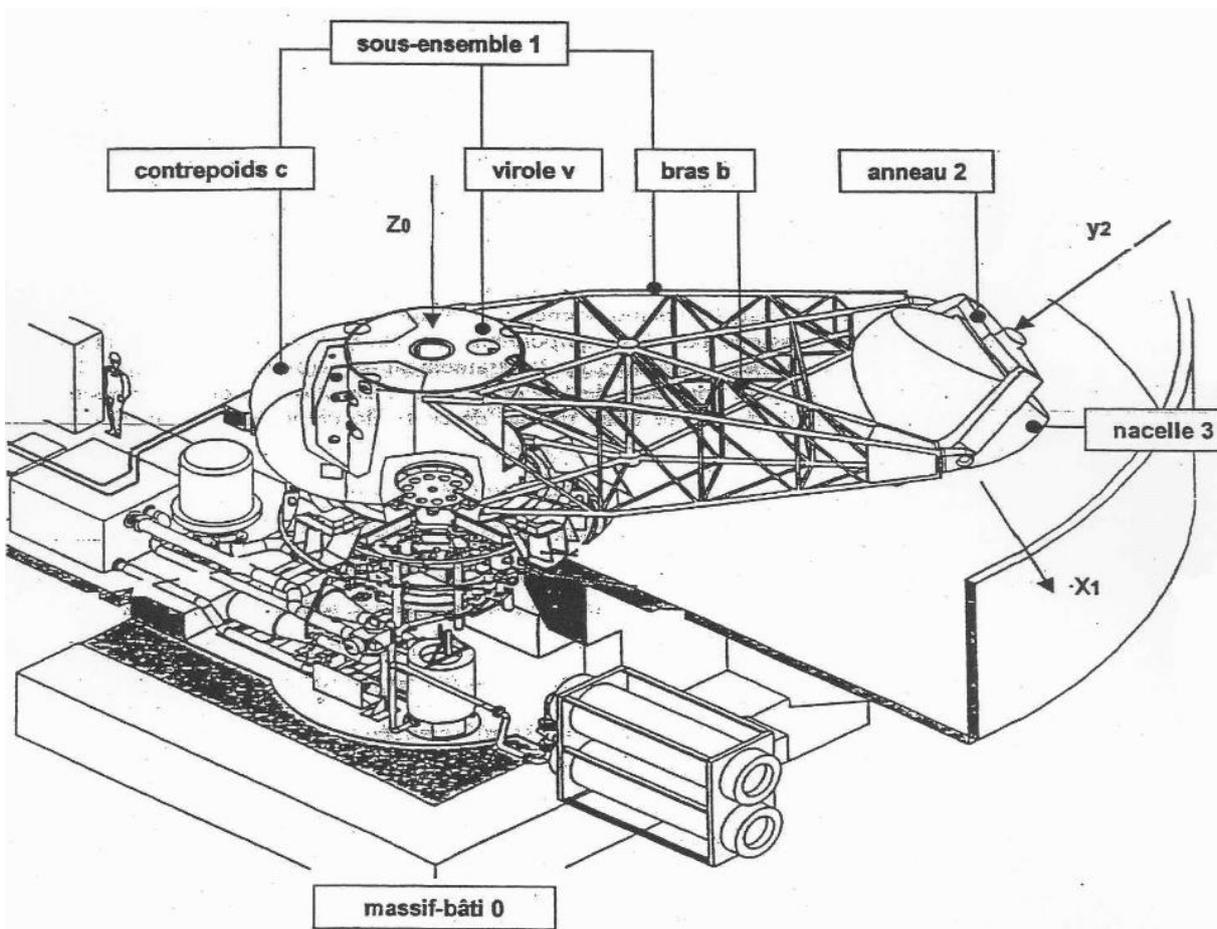


FIGURE 1 – Centrifugeuse (pour l'entraînement des humains, pas pour les jus de fruits...)

Exercice 2. Cycliste*

On considère la modélisation du vélo de la figure 2. Les deux roues 1 et 2 sont supposées parfaitement rigides et de même diamètre D , en liaison pivot avec le cadre 3 aux points O_1 et O_2 . Le mouvement est supposé plan. Les roues sont en contact avec le sol aux points I_1 et I_2 . Le cadre avance avec la vitesse $v\vec{x}$, les roues roulent sans glisser sur le sol.

- 1°) Quel est le mouvement du cadre 3 par rapport au sol 0 ?
- 2°) Quel est le mouvement de la roue 1 par rapport au cadre 3 ?
- 3°) Que signifie le roulement sans glissement au point I_1 ?
- 4°) Lier la vitesse de rotation des roues par rapport au cadre, à v .
- 5°) Quel est le mouvement de la roue 1 par rapport à la roue 2 ? Pour répondre, vous calculerez le torseur cinématique $\mathcal{V}(1/2)$ par composition des vitesses.

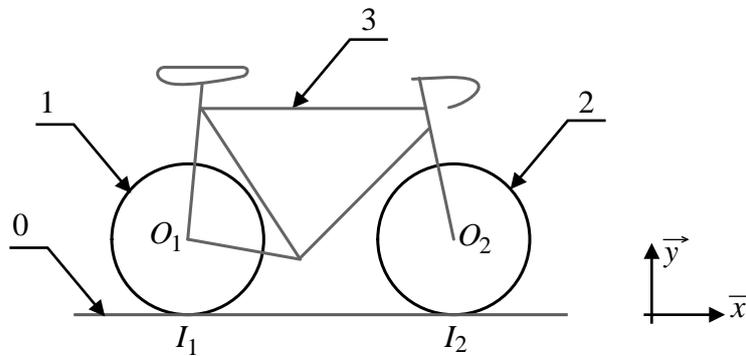


FIGURE 2 – Modèle du vélo envisagé (ce n'est qu'un modèle simplifié, bien sûr...)

Exercice 3. Roulement haute vitesse*

On s'intéresse à un roulement à bille haute vitesse (application typique : les roulements de broche de machine-outil), figure 3. Plus précisément, on considère une bille en acier S (de centre O , de rayon a), en contact en I avec la bague extérieure R , et en contact en J avec la bague intérieure S_1 . La position de la bille est repérée par $\overrightarrow{AO} = b\overrightarrow{e}_r$; le repère $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{z})$ est un repère lié à la cage du roulement, non représentée ici. Il tourne par rapport à R à une vitesse de rotation $\omega_c \overrightarrow{z}$.

La bague extérieure est fixe, la bague intérieure tourne autour de (A, \overrightarrow{z}) avec une vitesse de rotation $\omega \overrightarrow{z}$.

La bille roule sans glisser en I et J . On suppose le mouvement plan. Le torseur cinématique de S par rapport à R est alors noté :

$$\mathcal{V}(S/R) = \left\{ \begin{array}{c} \Omega \overrightarrow{z} \\ v \overrightarrow{e}_\theta \end{array} \right\}_O$$

Pour les applications numériques, on prendra $a = 5\text{mm}$, $b = 50\text{mm}$, $\omega = 15\,000 \text{ tr/min}$.

- 1°) Où est le centre de masse G de S ?
- 2°) a) Préliminaire : si on suppose connue la vitesse v de O par rapport à R , en déduire l'expression de ω_c .
- 2°) b) Montrer que $\Omega = \frac{1}{2}(1 - \frac{b}{a})\omega$ et $v = \frac{1}{2}(b - a)\omega$. Application numérique.
- 3°) Calculer l'opérateur d'inertie $\mathcal{I}(G, S)$. Application numérique.
- 4°) Calculer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(G, S/R)$. Application numérique.
- 5°) Calculer le moment dynamique $\overrightarrow{\delta}(G, S/R)$. Application numérique.
- 6°) Quelle est la résultante des actions mécaniques agissant sur cette bille ? Quelles sont leur origines possibles ? Application numérique.

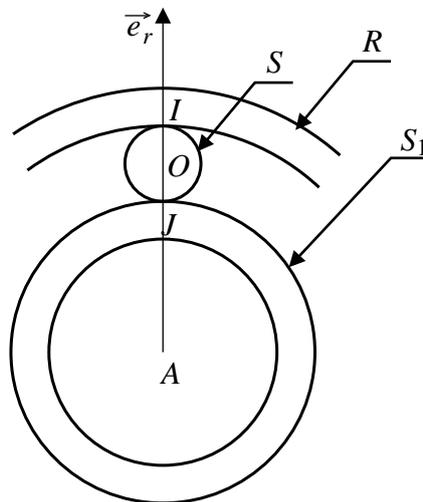


FIGURE 3 – Modèle du roulement (là aussi, c'est simplifié...)

Exercice 4. Effet “ rétro ”

Un effet très important pour les joueurs de billard est l'effet rétro¹. Pour l'illustrer, figure 4, on considère le mouvement supposé plan d'une boule de billard S , de centre A , de rayon a , sur son tapis R avec lequel elle est en contact au point I . Par rapport à R supposé galiléen, le point A est animé d'une vitesse horizontale $V\vec{x}$, la boule tourne avec une vitesse de rotation $\omega\vec{z}$ (voir figure ci-dessous). Le coefficient de frottement entre le tapis et la boule est noté μ .

À l'instant initial, la boule est lancée avec adresse à une vitesse $V(t = 0) = V_0$, $\omega(t = 0) = \omega_0$. V_0 et ω_0 sont tous deux positifs ! L'objectif est de regarder si et quand la boule est susceptible de s'arrêter, voire de rebrousser chemin.

- 1°) Donner l'expression de la vitesse de glissement au point I : $v_g(S/R)$.
- 2°) Donner les expressions des torseurs cinétique et dynamique du mouvement de S par rapport à R .
- 3°) La pesanteur à une accélération g qu'on ne négligera pas. Donner l'allure du torseur des actions mécaniques extérieures à S agissant sur S .
- 4°) Tant que la vitesse de glissement est non nulle, donner les expressions des évolutions en temps de $V(t)$ et $\omega(t)$.
- 5°) À quelle condition V s'annule-t-elle alors que la boule continue à glisser ? À quel instant ceci se produit-il ? Que vaut ω à cet instant ? D'après vous, quel sera le mouvement de la boule après cet instant ?
- 6°) Si la condition précédente n'est pas vérifiée, à quel instant la vitesse de glissement s'annule-t-elle ? Que valent alors V et ω ? D'après vous, quel sera le mouvement de la boule après cet instant ?

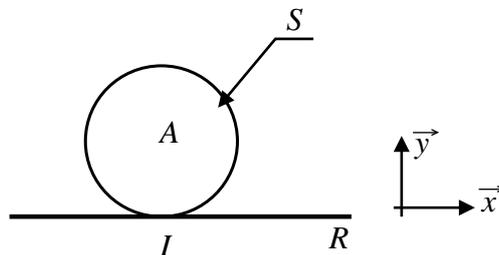


FIGURE 4 – Modèle de boule sur le tapis du billard (pas si simplifié que ça...)

1. Voir par exemple Jean Marty, *Le billard par l'image*, Imp. Desseaux, 1967

Exercice 5. Récupération d'énergie sur bus urbain

La fréquence de démarrage et d'arrêt des bus urbains s'accroît avec la circulation. Le coût de fonctionnement de ces bus peut être réduit en récupérant l'énergie dissipée lors d'un freinage pour la réutiliser au démarrage suivant. On peut envisager plusieurs solutions de stockage temporaire de cette énergie ; nous allons nous intéresser ici à un stockage sous forme d'énergie cinétique².

Un des premiers systèmes de récupération d'énergie a été mis au point par la société Volvo, voir figure 6. Il utilise un volant d'inertie pour stocker l'énergie. La transmission classique est remplacée par un ensemble volant d'inertie et transmission hydrostatique pilotée par microprocesseur (non étudiée ici).

Dans cette étude, on se propose de déterminer quelques conditions à respecter lors de l'installation du volant d'inertie dans le bus pour réduire les effets secondaires liés à ce volant.

Cahier des charges :

- vitesse de rotation maximale du volant : $\Omega_{\max} = 8000 \text{ tr/min}$,
- moment d'inertie du volant par rapport à son axe : $C = 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
- masse du volant d'inertie : $m = 330 \text{ kg}$,
- masse totale du véhicule (bus + volant) : $M = 12 \text{ t}$.

Le repère $\mathcal{R}_g = (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ lié à la route est supposé galiléen.

On va s'intéresser au bus lors d'un virage, en supposant la suspension infiniment rigide (pour simplifier) : le mouvement du bus b est alors une rotation suivant \vec{z}_g . Le repère lié au bus est $\mathcal{R}_b = (B, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_g)$ et la position du bus par rapport à la route est repérée par l'angle α (figure 5).

Le repère $\mathcal{R}_v = (G, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$ est lié au volant v , dont G est le centre de masse. (G, \vec{z}_v) est l'axe de la liaison pivot entre le volant et le bus. La position du volant par rapport au bus est repérée de façon générale par trois angles (dits angles d'Euler) ψ, θ, ϕ (figure 5). Les angles ψ et θ sont constants, et caractérisent la position de l'axe du volant par rapport au bus.

- 1°) À partir des données précédentes, proposez des valeurs d'encombrement pour le volant d'inertie.
- 2°) Calculer l'énergie cinétique maximale qui peut être stockée dans le volant d'inertie. Si toute cette énergie cinétique peut être transformée en énergie cinétique de translation du bus, quelle serait la vitesse du bus obtenue ?
- 3°) Donner l'expression de $\vec{\Omega}(b/\mathcal{R}_g)$. On note $\Omega_n, \Omega_w, \Omega_z$ les composantes de $\vec{\Omega}(v/\mathcal{R}_g)$ en projection sur \vec{n}, \vec{w} et \vec{z}_v . Donner leur expression.

Dans toute la suite, on se place dans le cas particulier suivant : le bus tourne à vitesse constante $\dot{\alpha} = \omega$, le volant d'inertie aussi $\dot{\phi} = \Omega$ et sa vitesse est grande devant celle du bus $\Omega \gg \omega$.

- 4°) Donner alors les versions simplifiées des expressions précédentes.
- 5°) On appelle M_n et M_w les composantes du moment en G des actions du bus sur le volant dans la liaison pivot. Donner leur expression en fonction de $\Omega_n, \Omega_w, \Omega_z$, et des données du problème, en limitant au maximum les calculs.
- 6°) Pour le scénario considéré, que faut-il choisir d'après vous comme position de l'axe du volant dans le bus ?
- 7°) Si cet axe avait été placé transversalement ($\psi = \pi/2, \theta = 0$), estimez la vitesse de rotation du bus, puis les moments dans la liaison entre le bus et le volant.

2. voir par exemple M. Hedlund al, Flywheel Energy Storage for Automotive Applications, *Energies* 8 :10636-10663, 2015. doi:10.3390/en81010636

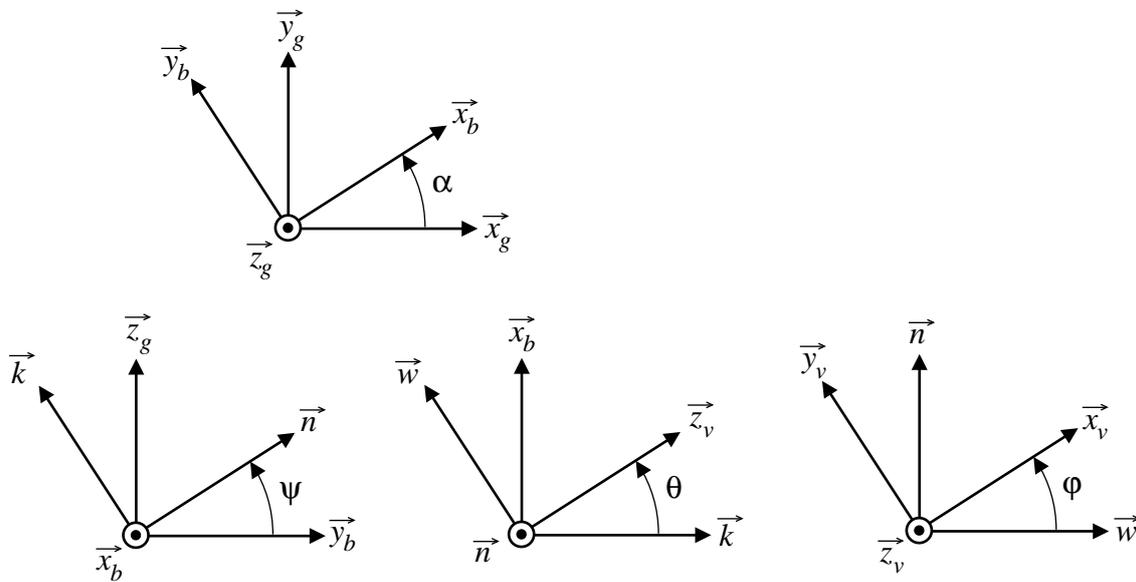


FIGURE 5 – Figures de calcul



FIGURE 6 – Volvo KERS system *Flywheel hybrid systems* <http://www.racecar-engineering.com/articles/f1/flywheel-hybrid-systems-kers/>

Exercice 6. Embrayage centrifuge

Le dispositif de la figure 7 représente un embrayage centrifuge. L'objectif est de synchroniser l'arbre d'entrée (3) et l'arbre de sortie (4) en pilotant l'embrayage constitué du plateau de (4) et du disque d'embrayage (2) par la vitesse de rotation.

Pour cela, l'arbre d'entrée est muni de 3 masses (1) en liaison glissière avec lui. Celle qui est représentée sur la figure a pour centre de masse G_1 , la liaison glissière est de direction \vec{e}_r .

$$\overrightarrow{O_1G_1} = r_1 \vec{e}_r$$

Ces masses sont supposées de faible dimension (masses ponctuelles).

Ces masses sont en appui sur la partie conique du disque (2) suivant une liaison ponctuelle de normale inclinée \vec{n} . Le disque (2) est en liaison glissière par rapport à l'arbre d'entrée, d'axe \vec{x} . Il a une masse M_2 , un centre de masse O_2 , un moment d'inertie I_2 par rapport à l'axe (O_2, \vec{x}) .

$$\overrightarrow{O_1O_2} = a \vec{x}$$

Le disque (2) est supposé toujours en contact avec le plateau de l'arbre (4) (avec un effort presseur variable...) dont on néglige l'inertie.

Dans toute la suite, on négligera les effets de la pesanteur. Toutes les liaisons sont supposées parfaites (sauf le contact entre (2) et (4)). La position de l'arbre d'entrée par rapport au bâti (liaison pivot) est repérée par un angle θ_3 . La position de l'arbre de sortie (4) par rapport au bâti (liaison pivot) est repérée par un angle θ_4 . Le bâti est supposé galiléen.

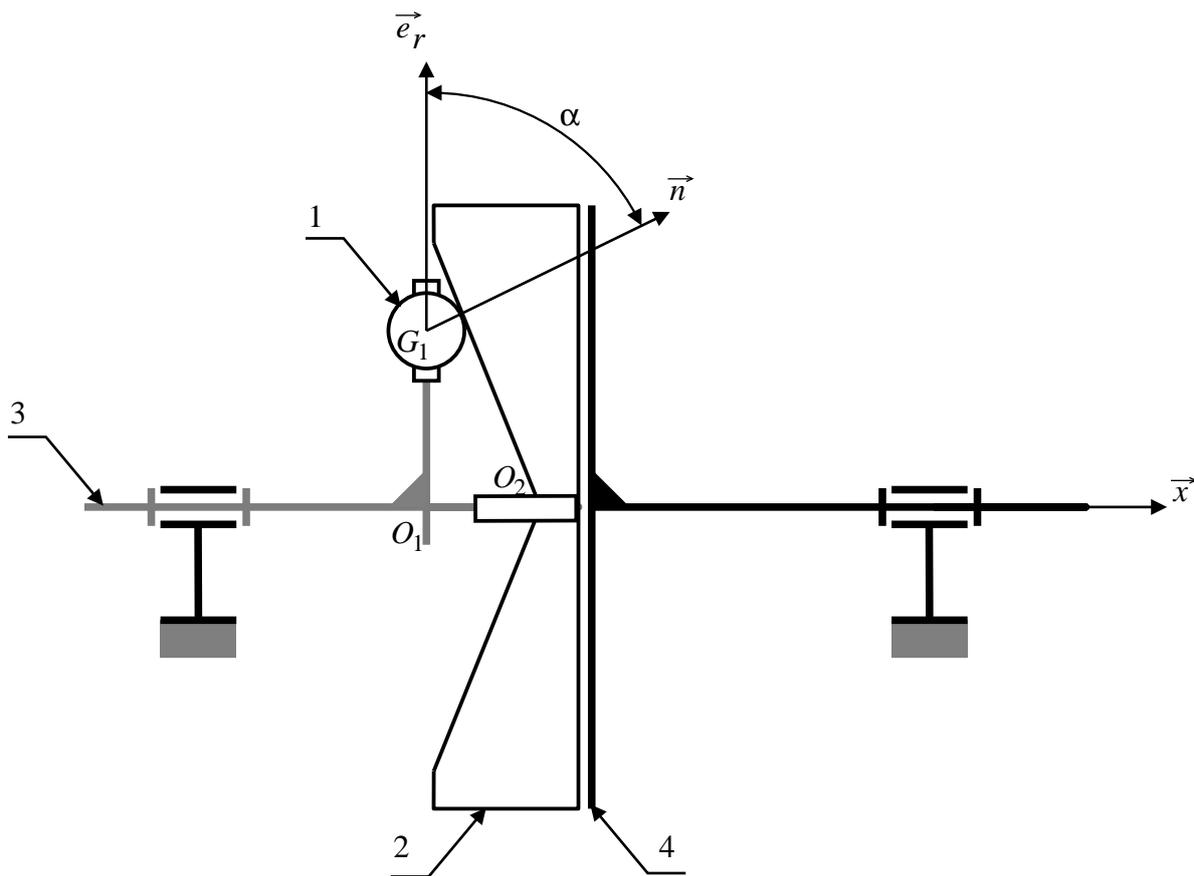


FIGURE 7 – Principe de fonctionnement

1°) On appelle ω_3 la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée par rapport au bâti, et ω_4 celle de l'arbre de sortie. Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble étudié $\{1,2,3,4\}$.

2°) En isolant une masse (1), donner l'expression de l'effort de contact N exercé par (1) sur (2).

3°) Donner alors l'expression de l'effort presseur dans l'embrayage P (résultante en projection sur \vec{x} de l'action de (2) sur (4)).

Indépendamment de ce que vous auriez pu trouver précédemment, on suppose que les actions mécaniques de (2) sur (4) sont de la forme

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow 4) = \left\{ \begin{array}{l} P \vec{x} \\ C \vec{x} \end{array} \right\}_{O_2}$$

avec $C = k\omega_3^2$ où k est une constante.

À l'arbre de sortie (4), on lie un récepteur (5) à forte inertie. Ses caractéristiques sont les suivantes :

— centre de masse G sur l'axe : $\overrightarrow{O_1G} = b\vec{x}$,

— masse M

— opérateur d'inertie en G : $\mathcal{I}(5, G) = \begin{bmatrix} I_5 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Dans toute la suite, on suppose que ω_3 est constante.

4°) En isolant (4) et le récepteur, donner l'expression de son accélération angulaire $\dot{\omega}_4$.

5°) À quel instant aura-t-on fini de démarrer le récepteur (c'est-à-dire quand aura-t-on $\omega_4 = \omega_3$) ?

Exercice 7. Équilibrage dynamique

La machine représentée sur les documents de la figure 9 est une machine à équilibrer les roues de véhicules automobiles, ou plus généralement, les solides pour lesquels la vitesse de rotation est suffisamment élevée pour qu'on ne puisse pas tolérer d'avoir un "balourd" trop grand. L'objectif est donc de pouvoir corriger ce balourd.

On va étudier le cas d'une roue ou d'un solide S en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec un bâti R . Il est entraîné en rotation à l'aide d'un moteur qui exerce sur lui un couple $C\vec{x}$ en O . On repère sa position avec un angle θ et on note $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse de rotation (pas forcément constante).

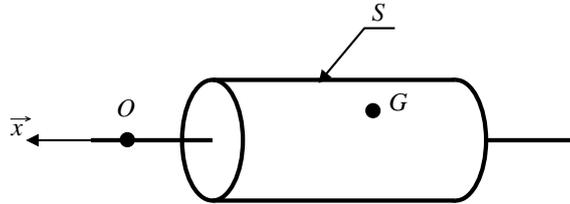


FIGURE 8 – Modèle de balourd

On ne considèrera pas d'autres actions mécaniques extérieures (par exemple : pas de pesanteur, pas de tension dans la poulie).

Ce solide S possède un "balourd". En particulier, son centre de masse G n'est pas sur l'axe : $\vec{OG} = \lambda\vec{x} + e\vec{y}_1$. Le repère $(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à S , il tourne donc par rapport au repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti.

Sa matrice d'inertie est quant à elle quelconque (a priori, aucun des coefficients A, B, C, D, E, F n'est nul) :

$$\mathcal{I}(O, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

1°) On note \vec{R} la résultante des efforts exercés par le bâti R sur le solide S dans la liaison pivot. Donner l'expression de \vec{R} .

2°) On note \vec{M} le moment des efforts exercés par le bâti R sur le solide S en O dans la liaison pivot. Donner l'expression de \vec{M} et de C .

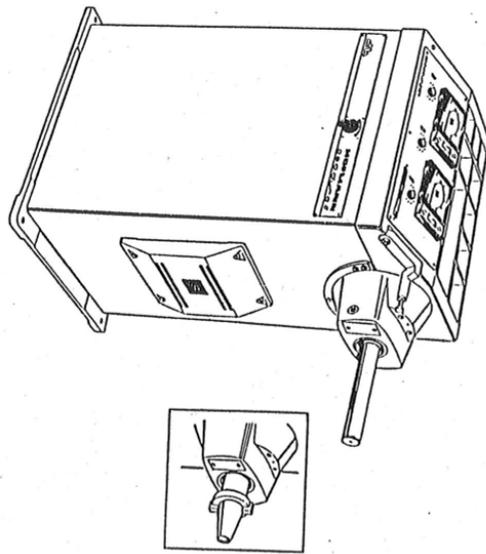
3°) On souhaiterait ne plus avoir de résultante \vec{R} dans cette liaison, quelle que soit la vitesse de rotation. Quelle condition faut-il respecter ?

4°) Une fois la condition précédente satisfaite, on souhaiterait ne plus avoir non plus de moment \vec{M} . Quelle condition faut-il respecter ?

Si aucune des conditions précédente n'est vérifiée, on voudrait alors équilibrer le solide S en rotation autour de l'axe de rotation. Une solution consiste à ajouter une ou des masses ponctuelles (ou à les enlever par usinage) au solide S .

5°) Essayons avec une masse ajoutée m_1 en position $\vec{OM}_1 = \lambda_1\vec{x} + a_1\vec{y}_1 + b_1\vec{z}_1$. Il faut donc choisir $(m_1, \lambda_1, a_1, b_1)$. Pourra-t-on arriver à équilibrer dynamiquement S , c'est-à-dire n'avoir plus d'action mécanique dans la liaison pivot ?

6°) Essayons avec une seconde masse ajoutée m_2 en position $\vec{OM}_2 = \lambda_2\vec{x} + a_2\vec{y}_1 + b_2\vec{z}_1$. Pourra-t-on arriver à équilibrer dynamiquement S , c'est-à-dire n'avoir plus d'action mécanique dans la liaison pivot ? Y arrivera-t-on en plaçant les deux masses dans le même plan, c'est-à-dire avec $\lambda_1 = \lambda_2$? Donner les conditions à vérifier pour équilibrer dynamiquement S .



Rn.	Désignation
1	vis hc M 10 . 70
2	coffret écran Hm 10
3	capoteur MESSYS-TEM
4	bille d'appui \varnothing 6
5	accouplement élastique
6a	arbre embout cylindrique
6b	arbre embout conique
7	poulie
8	anneau élastique A 35
9	vis hc M 10 . 50
10	carter
11	goupille cylindrique \varnothing 8 . 20
12	vis Cnc M 8 . 25
13	Plaque
14	vis F 90 M 4 . 8
15	écran H M 8
16	rouleau \varnothing M 8
17	vis Cnc M 8 . 30
18	anneau élastique A 25
19	boîtier de roulement à rotule

Rn.	Désignation
20	vis Cnc M 8 . 20
21	écriteur
22	lame flexible
23	rouleau \varnothing M 10
24	vis Cnc M 10 . 120
25	vis Cnc M 10 . 25
26	copieux
27	vis Cnc M 6 . 16
28	clavette
29	goupille cylindrique \varnothing 6.50
30	capteur rotatif
31	roulement à rotule
32	vis hc M 10 . 50

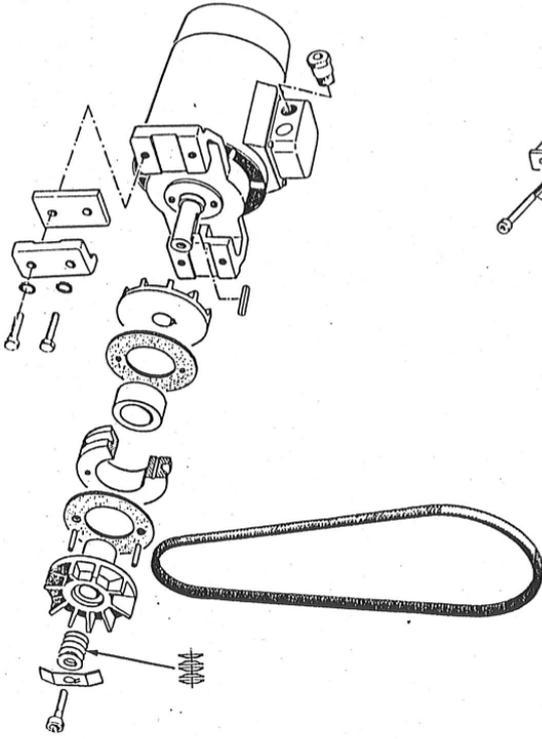
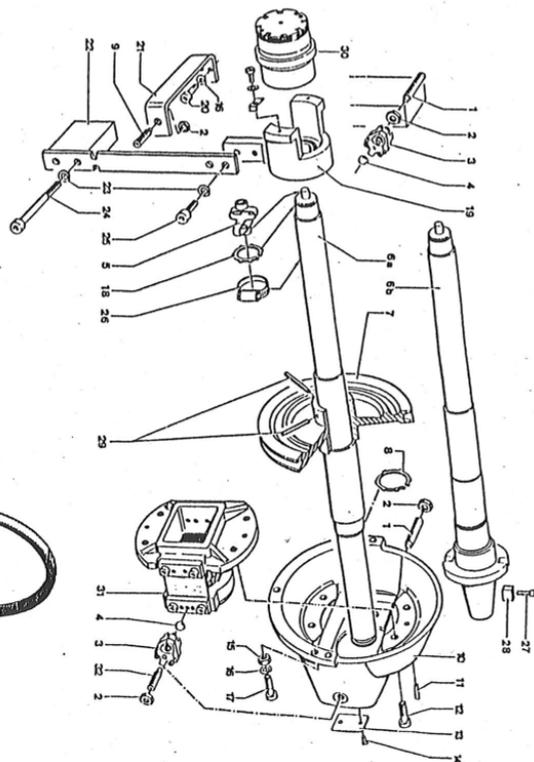


FIGURE 9 – Machine d'équilibrage dynamique

Exercice 8. Étude du déploiement des bras d'un satellite

Afin d'étudier le déploiement des bras d'un satellite, bras destinés au contrôle de l'auto-rotation, on emploie au laboratoire le modèle expérimental défini sur la figure 10.

Le référentiel lié au laboratoire est $\mathcal{R}_0 = (O_1, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$; il est supposé galiléen, \vec{Z}_0 est vertical ascendant.

Le corps du satellite S_1 est en liaison pivot parfaite d'axe (O_1, \vec{Z}_0) avec \mathcal{R}_0 . On lui associe un repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$. G_1 est le centre de masse de S_1 , $\overrightarrow{O_1G_1} = h\vec{Z}_0$. Sa masse est M_1 . Son opérateur d'inertie est

$$\mathcal{I}(O_1, S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}_{\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0}$$

Sa position est repérée par rapport à \mathcal{R}_0 par l'angle $\Psi = (\widehat{\vec{X}_0, \vec{X}_1})$.

Le bras S_2 du satellite est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{Y}_1) avec S_1 , $\overrightarrow{O_1O_2} = a_2\vec{X}_1$. On lui associe un repère $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_1, \vec{Z}_2)$. G_2 est le centre de masse de S_2 , $\overrightarrow{O_2G_2} = b_2\vec{Z}_2$. Sa masse est M_2 . Son opérateur d'inertie est

$$\mathcal{I}(O_2, S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{\vec{X}_2, \vec{Y}_1, \vec{Z}_2}$$

Sa position est repérée par rapport à \mathcal{R}_1 par l'angle $\theta_2 = (\widehat{\vec{Z}_1, \vec{Z}_2})$. Entre S_1 et S_2 , on place un moteur \mathcal{M}_2 délivrant un couple $C_{\mathcal{M}_2}\vec{Y}_1$.

Le bras S_3 du satellite est en liaison pivot d'axe (O_3, \vec{Y}_1) avec S_1 , $\overrightarrow{O_1O_3} = -a_3\vec{X}_1$. On lui associe un repère $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{X}_3, \vec{Y}_1, \vec{Z}_3)$. G_3 est le centre de masse de S_3 , $\overrightarrow{O_3G_3} = b_3\vec{Z}_3$. Sa masse est M_3 . Son opérateur d'inertie est

$$\mathcal{I}(O_3, S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{\vec{X}_3, \vec{Y}_1, \vec{Z}_3}$$

Sa position est repérée par rapport à \mathcal{R}_1 par l'angle $\theta_3 = (\widehat{\vec{Z}_1, \vec{Z}_3})$. Entre S_1 et S_3 , on place un moteur \mathcal{M}_3 délivrant un couple $C_{\mathcal{M}_3}\vec{Y}_1$.

Première partie

On s'intéresse pour l'instant au cas où le corps du satellite est fixe par rapport au laboratoire : $\Psi = 0, \dot{\Psi} = 0$.

1°) On souhaite avoir les équations du mouvement de S_2 , les couples moteurs étant donnés. Quels sont les systèmes à isoler et quelles équations du principe fondamental faut-il écrire ?

2°) Établir ces équations de mouvement.

Deuxième partie

Maintenant, le satellite peut aussi tourner par rapport au laboratoire.

3°) Si les bras S_2 et S_3 sont fixes par rapport au corps S_1 , quelle est l'inertie en rotation de l'ensemble $\{S_1, S_2, S_3\}$ autour de l'axe (O_1, \vec{Z}_0) ?

4°) Ces bras peuvent maintenant aussi tourner par rapport au corps S_1 . On souhaite avoir les équations du mouvement du système $\{S_1, S_2, S_3\}$ par rapport à \mathcal{R}_0 , les couples moteurs étant donnés. Combien y a-t-il de degrés de liberté dans ce mouvement ? Quels sont les (sous)-systèmes à isoler et quelles équations du principe fondamental faut-il écrire ?

5°) Établir ces équations de mouvement, dans le cas particulier (simplificateur) où $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ (donc $b_2 = b_3 = 0$).

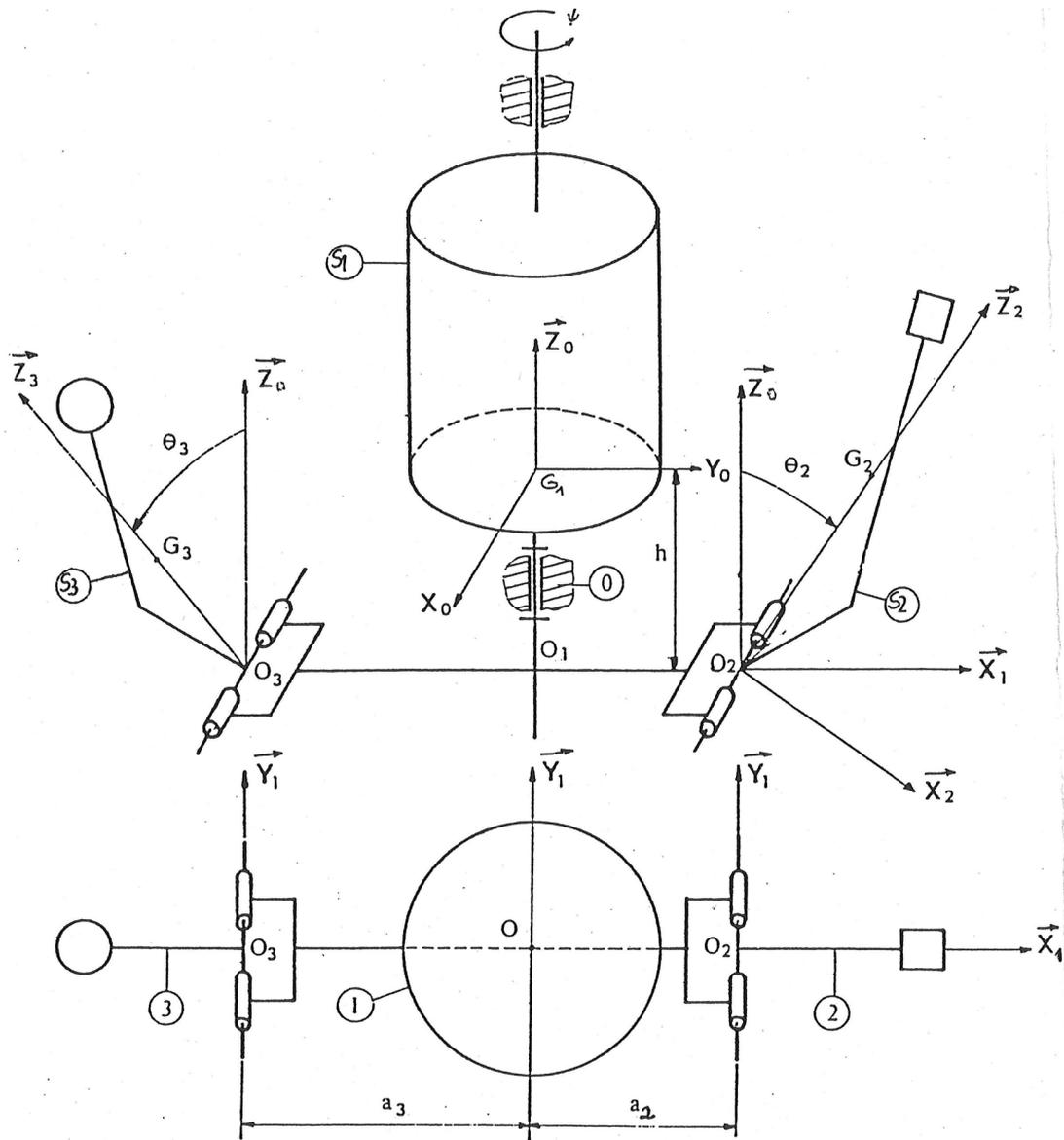


FIGURE 10 – Modèle du mécanisme de déploiement

Exercice 9. Destruction de cheminées par basculement*



FIGURE 11 – Démolition de la cheminée principale de la fonderie Noranda à Murdochville (Québec), le 13 octobre 2003 (photographie Jacques Gratton, <http://www.jacquesgratton.com>)

Première partie : la cheminée Noranda

La compagnie Noranda a décidé en 2003, pour des raisons de sécurité, de démolir la cheminée principale de son ancienne fonderie de cuivre de Murdochville, qui s'est éteinte avec la fin des activités de la mine au printemps 2002. Cette cheminée de plus de 30 mètres a été pendant cinquante ans un symbole de prospérité à Murdochville.

La technique de basculement consiste à dynamiter la base de la cheminée de façon à la faire tomber comme s'il n'y avait plus qu'une articulation à la base.

Question 1 : Pour la modélisation, on a plusieurs possibilités :

- on peut modéliser la cheminée comme un cylindre creux S , homogène, d'axe (G, \vec{y}_1) , à base circulaire de rayon extérieur R_e , de rayon intérieur R_i . Sa longueur est $2L$, sa masse m et G est son centre de masse (Figure 12(a) à gauche).

- on peut aussi modéliser la cheminée comme une barre homogène, d'axe (G, \vec{y}_1) , de même longueur $2L$, de même masse m et de même centre de masse G (Figure 12(a) à droite).

Sous quelles conditions ces deux modélisations peuvent être considérées comme équivalentes pour la dynamique ?

Question 2 : Dans le cas de la barre homogène, rappeler l'expression de son moment d'inertie en G autour de \vec{z} (attention : \vec{z} et pas \vec{y}_1 !!) que l'on notera I .

Dans toute la suite, on utilisera le modèle de la barre homogène. On s'intéresse à la phase dans laquelle la cheminée ne se brise pas au cours de la chute.

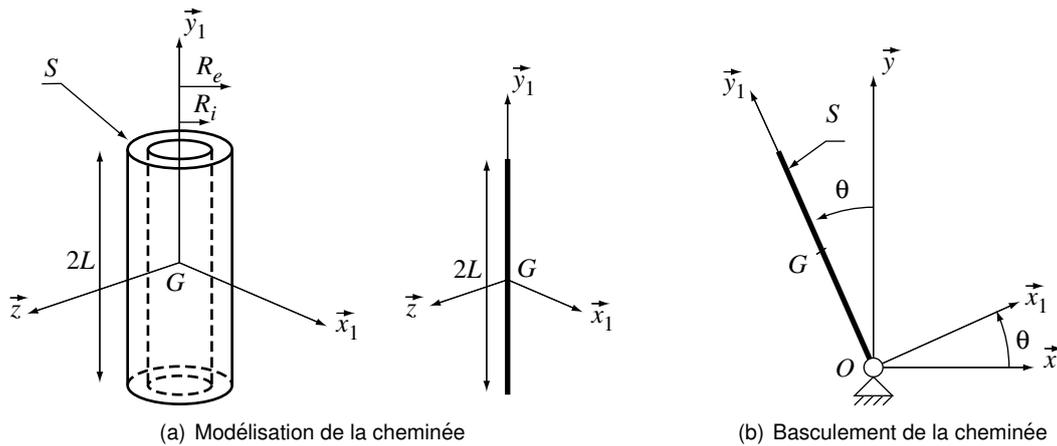


FIGURE 12 – Cheminée Noranda

Question 3 : Équation du mouvement de basculement de la cheminée Noranda. Ayant modélisé la cheminée par la barre S précédente, on suppose cette fois-ci que la destruction de la base à l'explosif conduit à avoir une liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}) entre la cheminée et le sol (Figure 12(b)). On appelle g l'accélération de la pesanteur, et θ est l'angle qui repère la position de S par rapport au référentiel lié au sol $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen.

- 3a)** Donner l'expression de la vitesse de G par rapport à \mathcal{R} , puis de l'accélération de G par rapport à \mathcal{R} .
- 3b)** Donner l'expression du moment dynamique de S par rapport à \mathcal{R} au point O .
- 3c)** Quelles sont les actions extérieures agissant sur S ?
- 3d)** Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à S par rapport à \mathcal{R} , en moment en O en projection sur \vec{z} . En déduire que l'équation du mouvement de S par rapport à \mathcal{R} est de la forme $\sin \theta = \alpha \frac{L}{g} \ddot{\theta}$ où α est une constante dont on demande l'expression.

Dans toute la suite, on suppose qu'on a pu résoudre cette équation de mouvement, au moins numériquement, et en cas de besoin, la solution est donnée graphiquement sur la figure 13. Sur cette figure, les valeurs portées sur les axes ont été adimensionnées (par exemple, on a en abscisse $t\sqrt{\frac{g}{L}}$, et les angles sont donnés en radian).

Question 4 : À partir des résultats numériques de la figure 13, qui sont donnés pour la cheminée Noranda, donner une méthode pour déterminer la valeur numérique de la constante α , puis la valeur de cette dernière.
on prendra $L = 30$ m.

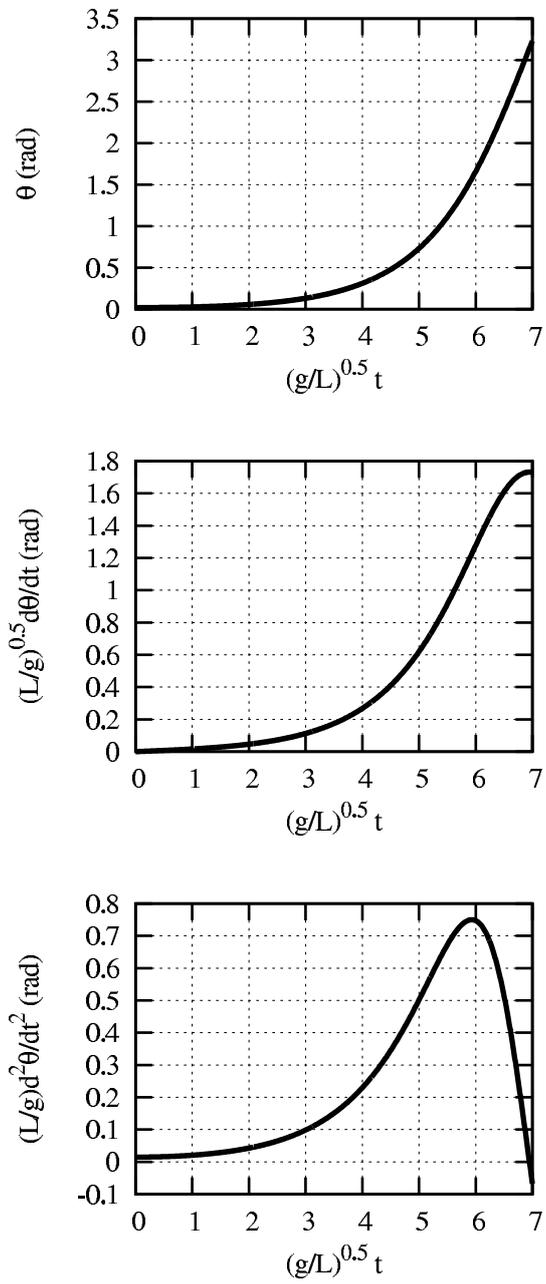


FIGURE 13 – Mouvement solution

Deuxième partie : la cheminée de Marcoule



FIGURE 14 – Basculement de la cheminée G1 de Marcoule (Gard), le 19 juillet 2003 (<http://www.cea.fr/fr/thema/centres/valrho.htm>)

Symbole historique du site nucléaire de Marcoule, la cheminée de l'ancien réacteur G1 a été abattue avec 30 kilogrammes d'explosifs, pour cet édifice de 100 mètres de haut, pesant 2200 tonnes de béton et d'acier. La cheminée avait cessé de fonctionner en 2000 et des études avaient été engagées pour la détruire puisque les conditions de sa construction (en 1956) ne correspondaient plus aux normes les plus récentes de tenue aux vents violents et aux séismes.

Indépendamment de la valeur trouvée précédemment, et pour toute la suite, on prendra comme valeur de α celle correspondant à la cheminée de Marcoule, et qui est $\alpha = 1.33$.

Contrairement au cas précédent, il s'avère que la cheminée s'est brisée en deux lors de sa chute. Il est bien évident que pouvoir prévoir ce genre de comportement est important du point de vue de la sécurité du chantier de démolition. On aimerait savoir si une modélisation simplifiée en dynamique des solides peut l'expliquer. Pour cela, on va chercher à connaître les efforts intérieurs s'exerçant entre les briques de la cheminée.

Question 5 : La démarche proposée consiste à considérer la cheminée comme un assemblage de 2 barres S_1 et S_2 liées entre elles par une liaison encastrement, et à déterminer les efforts dans la liaison. On propose donc d'isoler la seule barre S_1 , de longueur $2h$, (figure 15) dont le mouvement est imposé (c'est celui de la figure 13) et on cherche les actions de S_2 sur S_1 : une résultante $N\vec{y}_1 + T\vec{x}_1$ et un moment en A $M\vec{z}$. On appelle τ le rapport de longueur $\tau = h/L$.

5a) G_1 est le centre de masse de S_1 : $\overrightarrow{OG_1} = L_1\vec{y}_1$. Donner l'expression de L_1 en fonction de L et τ .

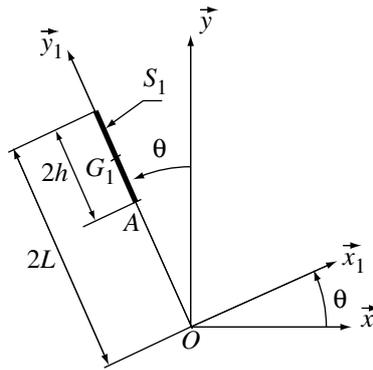


FIGURE 15 – Modélisation de la partie haute de la cheminée

- 5b)** Donner l'expression de la masse m_1 de S_1 en fonction de la masse totale m de la cheminée et de τ .
- 5c)** Donner l'expression de l'accélération de G_1 par rapport à \mathcal{R} en fonction de L , τ et θ .
- 5d)** Donner l'expression de la résultante des efforts extérieurs qui agissent sur S_1 , puis écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à S_1 en résultante. En déduire l'expression de l'effort tranchant T en fonction, entre autres, de m , L et τ .
- 5e)** Décrivez, sans faire les calculs, la méthode qui permettrait de trouver le moment \mathcal{M} dans la liaison encastrement.
- 5f)** Pour la suite, on suppose que les calculs nous donneraient

$$\mathcal{M} = \frac{mL^2}{3}\alpha\tau(\tau^2 - 5\tau + 4)$$

En quel point A , c'est à dire pour quelle valeur de τ le moment de flexion est-il d'amplitude maximale ? Conclure.

Exercice 10. Principe d'un système de récupération d'énergie : le yoyo*

Un système de récupération d'énergie pour monte-charge (quand il n'y a pas 2 monte-charges en parallèle, l'un descendant, l'autre montant) est basé sur le même principe que celui du yoyo. Le système étant plus simple dans ce dernier cas, c'est celui que nous allons étudier en premier lieu ici.

Ce système se compose principalement d'un solide inertiel S_1 dont la géométrie peut varier, mais qui peut ressembler à celle de la figure 16. G est son centre de masse et \vec{z} son axe principal. $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est donc un repère lié à S_1 . L'opérateur d'inertie de S_1 en G est de la forme

$$\mathcal{I}(G, S_1) = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

Dans le cas d'un yoyo en bois, on a une masse de S_1 égale à $m = 0,12$ kg, et un moment d'inertie $I = 10^{-4}$ kg m².

Question 1 Une ficelle est enroulée autour du cylindre central, de rayon r , du yoyo et se déroule autour de celui-ci lors de la descente du yoyo, figure 17. On supposera la partie supérieure de la ficelle attachée au bâti, et pour simplifier, on considèrera que la ficelle est toujours dirigée suivant la verticale \vec{y} . Le mouvement du yoyo est décrit par 2 paramètres : un angle θ , et la position verticale λ , $\vec{OG} = -\lambda \vec{y}$. L'accélération de la pesanteur est $-g \vec{y}$. On note $\omega \vec{z}$ le taux de rotation de S_1 par rapport au bâti, et $\vec{V}(G/\text{bâti}) = -V \vec{y}$.

1a) Donner le torseur cinématique de S_1 par rapport au bâti, en fonction, entre autres, de ω et V . Donner ensuite les expressions de ω et V en fonction de θ et λ .

1b) Donner l'expression du torseur cinétique de S_1 par rapport au bâti, puis celle de l'énergie cinétique de S_1 par rapport au bâti.

1c) Donner l'expression du torseur dynamique de S_1 par rapport au bâti.

Question 2 Lors du mouvement du yoyo, tout se passe comme si le yoyo roulait sans glisser sur la ligne verticale de la ficelle. On note A le point où se déroule la ficelle (point de contact entre le yoyo et la verticale de la ficelle).

2a) Donner l'expression de $\vec{V}(A, S_1/\text{bâti})$.

2b) Avec ce roulement sans glissement, comment sont liés ω et V ?

Question 3 On note T la tension dans la ficelle (l'action de la ficelle sur le yoyo en A est une résultante $T \vec{y}$). Au cours de la descente du yoyo, le frottement de l'air agit comme un moment extérieur s'appliquant sur l'axe (G, \vec{z}) . Il est proportionnel au taux de rotation et opposé en signe : $\vec{M} = -k\omega \vec{z}$ (k est une constante positive).

3a) En écrivant le principe fondamental de la dynamique en résultante sur \vec{y} , donner l'expression de T .

Avec la condition de roulement sans glissement de la question 2b), montrer que la tension peut s'écrire $T = a + b\omega$, où a et b sont des constantes positives à déterminer.

3b) Écrire le principe fondamental de la dynamique en moment en G . Montrer que $\omega(t)$ est la solution d'une équation du type : $\dot{\omega} + \alpha\omega + \beta T = 0$ où α et β sont des constantes positives à déterminer, en particulier en fonction de k .

3c) La résolution de l'équation précédente (avec une vitesse initiale nulle) donne

$$\omega(t) = a \frac{\beta}{\alpha} \left(\exp \left(-\frac{\alpha}{1 + \beta b} t \right) - 1 \right)$$

(on ne demande pas de la retrouver!).

Donner l'expression de la tension T . À quel instant la valeur de T est-elle maximale ?

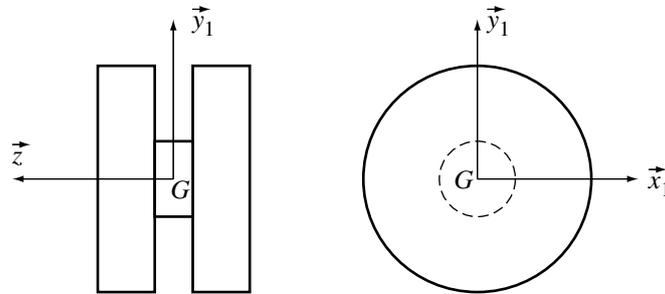


FIGURE 16 – Géométrie du yoyo

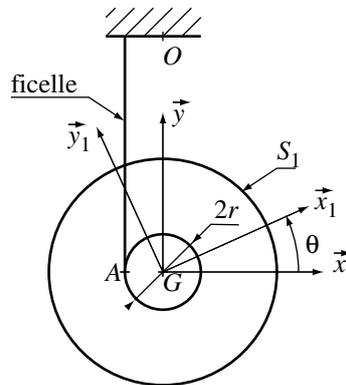


FIGURE 17 – Le yoyo en mouvement

Exercice 11. Freinage et accélération d'une motocyclette*

On s'intéresse à une motocyclette qui roule en ligne droite, sur un terrain parfaitement plat. Plus précisément, on s'intéresse à la phase de freinage. La figure 18 présente le problème, ainsi que la modélisation proposée. L'ensemble pilote et moto sans les roues est supposé former un solide rigide 3, de masse m , de centre de masse G . La suspension est supposée infiniment rigide, de façon à avoir des liaisons pivot parfaites entre le solide 3 et les roues 1 et 2, d'axes (O_1, \vec{x}) et (O_2, \vec{x}) . L'accélération de la pesanteur est $-g\vec{z}$.

$$\overrightarrow{O_1G} = H\vec{y} + h\vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1O_2} = L\vec{y}$$

Les roues ont un rayon extérieur R_e . Le contact entre une roue et le sol 0 est supposé ponctuel (aux points I_1 et I_2), et le coefficient de frottement de Coulomb correspondant est noté μ . On suppose qu'il y a roulement sans glissement des roues sur le sol.

Le système de freinage est monté entre le solide 3 et les roues. Il exerce un couple $C_1\vec{x}$ en O_1 sur la roue 1, et un couple $C_2\vec{x}$ en O_2 sur la roue 2.

Le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthonormé direct.

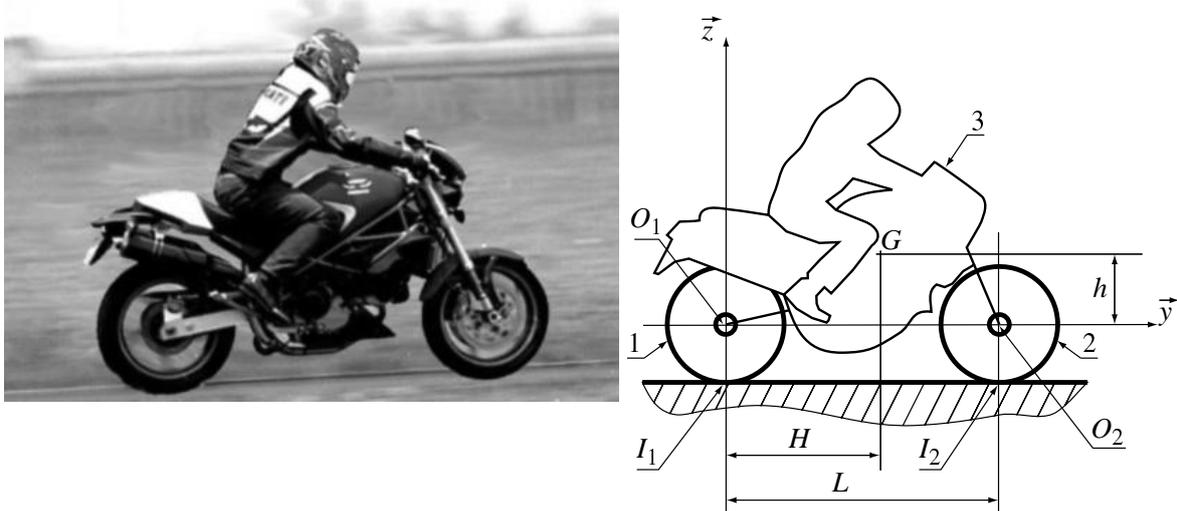


FIGURE 18 – À gauche : le problème considéré, à droite : la modélisation envisagée

1°) Quel est le mouvement de 3 par rapport au sol 0 ? Donner son torseur cinématique.

Dans toute la suite, on notera $V\vec{y}$ la vitesse de 3 par rapport à 0.

2°) Pour estimer l'inertie d'une roue, on utilise un modèle simplifié homogène équivalent, présenté sur la figure 19. Donner l'expression de son moment d'inertie autour de son axe en fonction de la géométrie de la roue et de la masse volumique équivalente ρ_{eq} (on ne vous demande pas de recalculer les intégrales correspondantes, mais de réutiliser les documents que vous avez !). Cette roue est-elle équilibrée dynamiquement autour de son axe, et pourquoi ?

Dans toute la suite, on négligera les effets des masses et des inerties des roues.

3°) Les couples de freinage C_1 et C_2 étant supposés donnés, trouver l'expression des efforts tangentiels $T_1\vec{y}$ et $T_2\vec{y}$ exercés au contact par le sol sur les roues 1 et 2.

4°) En isolant l'ensemble de la moto, écrire le théorème de la résultante dynamique. En déduire l'expression de l'accélération (en fait sa décélération) $\vec{\Gamma}(G/0)$ en fonction des efforts aux contacts, tangentiels ($T_1\vec{y}$ et $T_2\vec{y}$) et normaux ($N_1\vec{z}$ et $N_2\vec{z}$) en I_1 et I_2 .

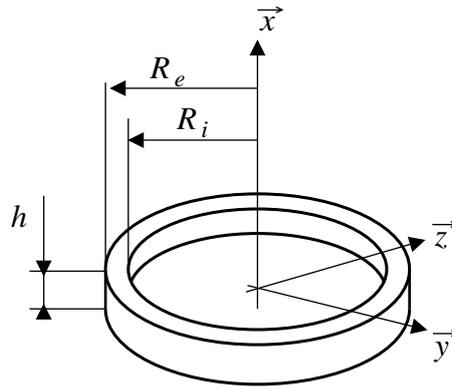


FIGURE 19 – Modélisation de la roue pour le calcul de l'inertie équivalente

- 5°) Écrire le théorème du moment dynamique en G appliqué à la moto.
- 6°) À partir des résultats des questions précédentes, donner les expressions des efforts normaux N_1 et N_2 exercés au contact par le sol sur les roues 1 et 2, en fonction, entre autres, des couples de freinage.

Dans toute la suite, pour une géométrie particulière de la moto (valeurs de H , h et L particulières), on utilisera les expressions suivantes qui pourraient être obtenues dans la question 5° :

$$N_1 = \frac{2}{3}mg - \frac{2}{3R_e}(C_1 + C_2) \text{ et } N_2 = \frac{1}{3}mg + \frac{2}{3R_e}(C_1 + C_2)$$

- 7°) On imagine maintenant le cas où $C_2 = 0$: on ne freine qu'avec la roue arrière. Quelle est la condition sur les efforts au contact à respecter pour que la roue arrière ne glisse pas sur le sol ? Quelle est alors la condition à respecter sur C_1 ?
- 8°) On imagine maintenant le cas où $C_1 = 0$: on ne freine qu'avec la roue avant. Quelle est la condition sur les efforts au contact à respecter pour que la roue avant ne glisse pas sur le sol ? Quelle est alors la condition à respecter sur C_2 ?
- 9°) Pour obtenir la décélération la plus grande, quel est des deux cas précédents, le plus favorable ?
- 10°) Lors d'une phase d'accélération, les freins sont desserrés. Le moteur, monté sur 3, exerce un couple $-C\vec{x}$ sur la seule roue 1. Donner l'expression de l'accélération $\vec{\Gamma}(G/0)$ dans cette phase en fonction du couple C . À partir de quelle valeur la motocyclette décolle-t-elle de la roue avant ?

3 Exercices d'application de vibration mécanique

Exercice 12. Étude d'un accéléromètre*

On s'intéresse à un accéléromètre piézo-électrique, qui peut être modélisé par le schéma de la figure 20. L'embase, supposée indéformable et solidaire de la structure dont on désire mesurer l'accélération, est soumise au déplacement de cette structure. k et c sont respectivement la raideur et l'amortissement de la partie réalisée en matériau piézo-électrique, m est la valeur de la masse sismique.

On désigne par $x(t)$ et $y(t)$ les déplacements de la structure et de la masse sismique par rapport à la position d'équilibre statique, et on pose $z = y - x$.

Un élément piézo-électrique a la particularité de délivrer un signal électrique proportionnel à l'effort qui lui est appliqué. Le but est de déterminer dans quelles conditions l'accéléromètre mesure avec fidélité les vibrations de la structure étudiée.

1°) Montrer que l'effort exercé par la masse m sur l'élément piézo-électrique est

$$f = k.z + c.\dot{z}$$

Pour connaître $f(t)$ il faut donc déterminer auparavant $z(t)$ et sa dérivée.

2°) Écrire l'équation différentielle vérifiée par z . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\ddot{z} + 2\epsilon\omega_0\dot{z} + \omega_0^2z = -\ddot{x}$$

avec $\epsilon = c/c_c$ où $c_c = 2\sqrt{k.m}$ est l'amortissement critique.

3°) La structure est animée d'un mouvement harmonique $x(t) = X.\sin(\omega t)$.

Montrer que la solution forcée $z(t)$ peut s'écrire sous la forme $z(t) = Z.\sin(\omega t - \phi)$.

Exprimer $\tan(\phi)$ puis Z/X en fonction de la fréquence adimensionnelle $\tau = \omega/\omega_0$.

À $\omega = \omega_0$, que valent ϕ et Z/X ?

4°) Montrer que l'effort f appliqué à l'élément piézo-électrique est

$$f = m.\omega^2 X.A.\sin(\omega t - \psi)$$

Donner l'expression de A en fonction de X et Z . Quelle est la méthode pour calculer ψ ?

5°) Quelle est l'expression de l'accélération $\gamma(t)$ de la structure qu'on cherche à mesurer ? Quelle est son amplitude ? Quelle est l'amplitude de l'effort mesuré f ? Quelle est l'amplification de l'amplitude (appelée aussi gain) ? En s'aidant des figures 21 et 22, quelle est la fréquence autour de laquelle le capteur effectue une mesure fidèle de l'accélération de la structure ?

6°) On considère deux accéléromètres B&K de type 4367 et 4370 dont les caractéristiques, données par le fabricant, sont les suivantes :

type	$f_0 = \omega_0/2\pi$	Gain pour $f = f_0$	Masse sismique	Sensibilité (pC/ms ⁻²)	Sensibilité (mV/ms ⁻²)	Masse du capteur
4367	39 kHz	26 dB	5 g	2,1	1,8	13 g
4370	26 kHz	27 dB	25 g	10	7,9	52 g

Vérifier que la sensibilité des capteurs est proportionnelle à la masse sismique.

Donner pour le premier capteur : le coefficient d'amortissement ϵ , les bandes de fréquence pour lesquelles la distorsion d'amplitude n'excède pas 10%.

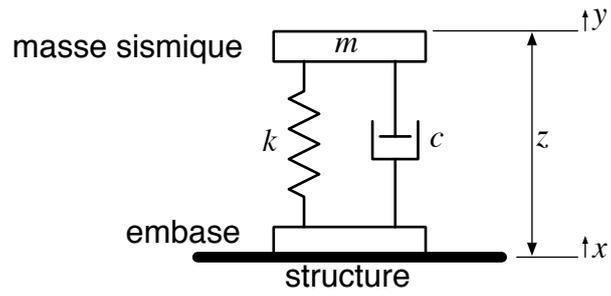


FIGURE 20 – Modèle

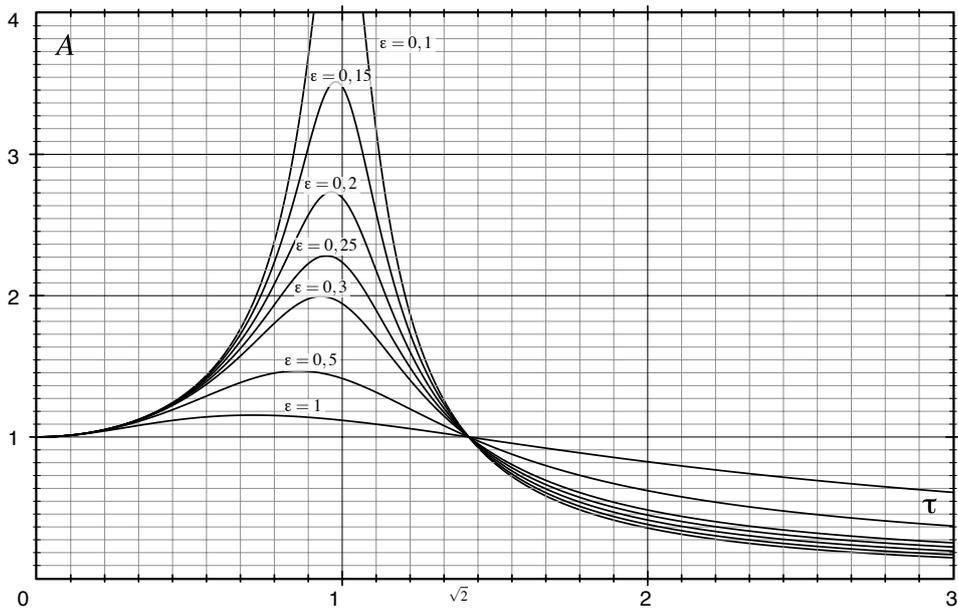


FIGURE 21 – $A(\epsilon, \tau)$

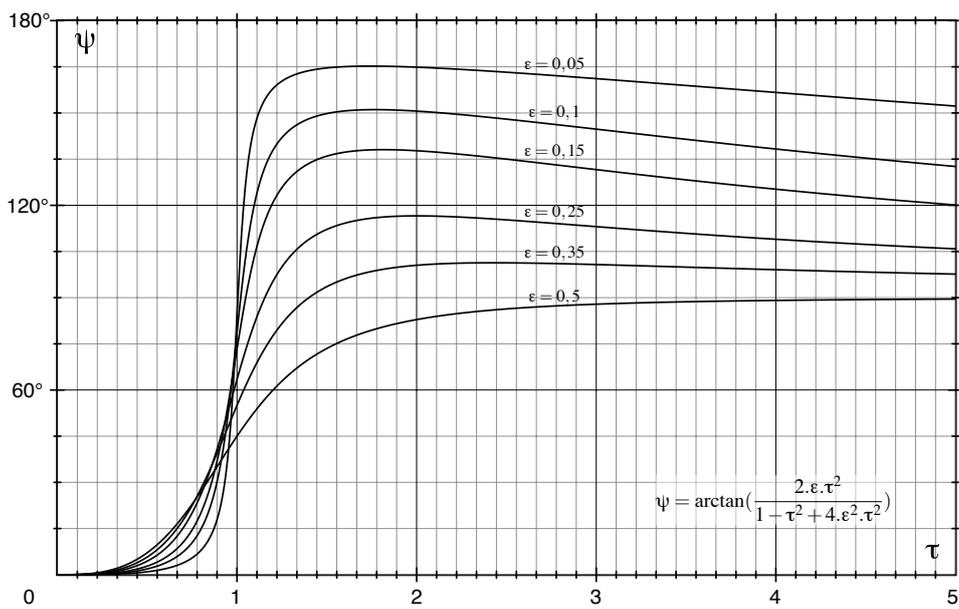


FIGURE 22 – $\psi(\epsilon, \tau)$

Exercice 13. Micro-accéléromètre MEMS résonnant*

On s'intéresse ici à la conception de micro-accéléromètres qui font partie de la famille des MEMS (*Micro Electro Mechanical Systems*), qui ont l'avantage d'être miniaturisés et qui sont réalisés avec les mêmes procédés que les circuits intégrés. Ils sont donc d'un coût réduit, à condition d'être produits en très grandes quantités.

La figure 23 présente une puce de 3 mm de côté contenant le système de contrôle électronique et l'accéléromètre (*sensor*) de 400 μm de taille (à gauche³). La même figure (à droite⁴) présente un zoom sur l'accéléromètre⁵. La puce est placée directement sur la structure ou le système dont on cherche à connaître le mouvement ou l'accélération.

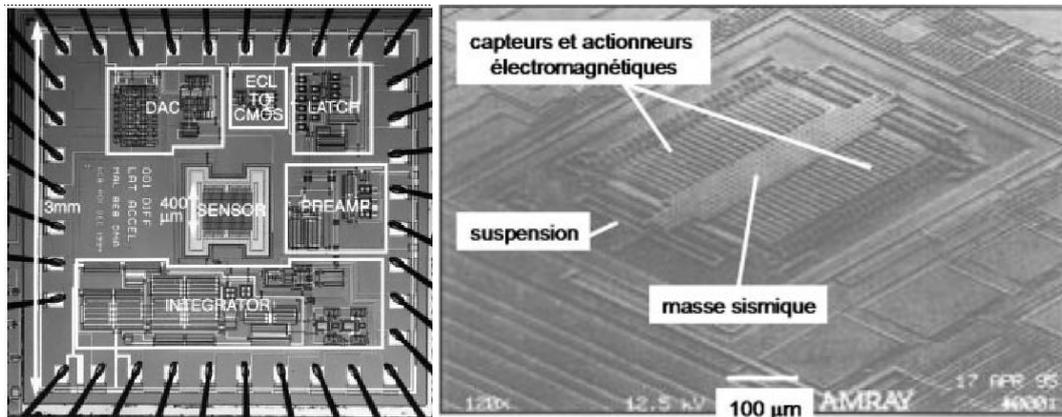


FIGURE 23 – Réalisation d'un micro-accéléromètre et de sa partie mécanique

La modélisation mécanique de cet accéléromètre par un système à 1 degré de liberté (accéléromètre 1 axe) est présentée sur la figure 24. On note m la masse sismique, qui est reliée au carter (la puce) par des suspensions constituées de lames flexibles, de raideur k et de coefficient d'amortissement c . On note x la position absolue de la masse (par rapport au référentiel galiléen, donc), y la position absolue du carter (la puce), et $z = x - y$ repère la position de la masse par rapport à la puce. f est un effort extérieur, exercé sur la masse m par un système d'actionneurs électromagnétiques (voir figure 23).

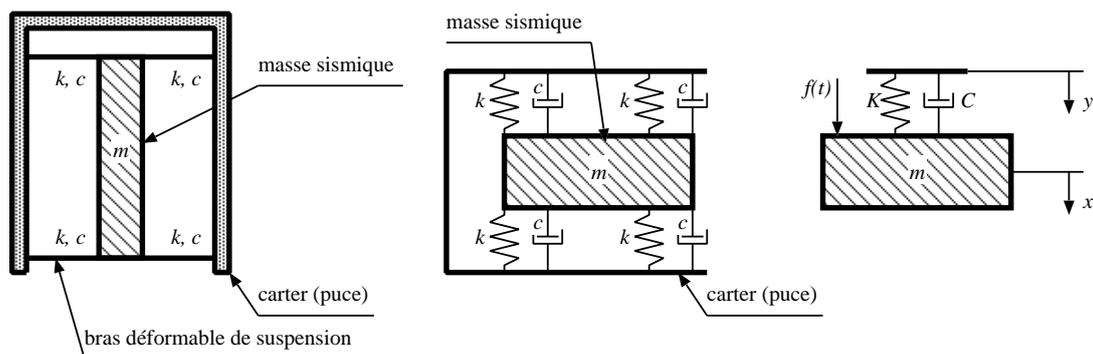


FIGURE 24 – Modèles de l'accéléromètre : schéma (à gauche), système à 1 degré de liberté (au centre), système type équivalent (à droite)

3. M. A. Lemkin et al., 1996, A fully differential surface micromachined lateral accelerometer, CICC, Atlanta

4. d'après N. Yazdi et al, Micromachined Inertial Sensors, *Proceedings of the IEEE* 86(8) :1640-1659, 1998 [doi: 10.1109/5.704269](https://doi.org/10.1109/5.704269)

5. Analog Devices, 1995, ADXL05-monolithic accelerometer with signal conditioning, Norwood, MA, data sheet

On rappelle l'extrait du formulaire suivant : pour un système à 1 degré de liberté (de pulsation propre ω_0 , pourcentage d'amortissement ε , et masse m), sa fonction de transfert en déplacement est $H(\omega) = \frac{1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2\omega_0^2}}$ de valeur maximale $H_{\max} = \frac{1/m}{2\omega_0^2\varepsilon\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}$ atteinte pour $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$

- 1°) Donner l'expression de la raideur K et du coefficient d'amortissement C équivalents.
- 2°) Donner l'équation du mouvement de la masse sismique et montrer qu'elle peut s'écrire $m\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = f - m\ddot{y}$.

Dans un premier temps, on considère le cas d'un accéléromètre capacitif (passif) pour lequel on a $f = 0$.

On mesure la réponse permanente z dans le composant de façon électronique (la réponse transitoire a été amortie depuis longtemps), et on cherche à le relier à \ddot{y} qui est la quantité qu'on cherche à atteindre. Un tel composant a les caractéristiques suivantes : $m = 3 \mu\text{g} = 3 \times 10^{-9} \text{ kg}$, $C = 6,8 \mu\text{Nm}^{-1}\text{s}$, $K = 0,17 \text{ N/m}$.

- 3°) Donner les expressions de la pulsation propre ω_0 , du pourcentage d'amortissement ε et de la pulsation propre amortie ω_D . Applications numériques. Le système est-il fortement ou faiblement amorti ?
- 4°) En fait, le mouvement qu'on cherche à détecter (d'accélération \ddot{y}) est très lent devant la pulsation propre de l'accéléromètre. On définit la sensibilité s de l'accéléromètre comme le rapport de l'amplitude de z sur l'amplitude de \ddot{y} . L'amplitude maximale de l'accélération \ddot{y} qu'on cherche à atteindre est de $A = 0,1 \text{ m/s}^2$. On envisage alors deux cas de figure :

4a) Si l'accélération de la puce est une constante, $\ddot{y} = a_0$, son amplitude est évidemment aussi a_0 . Donner l'expression de la solution particulière z . Donner l'expression de s . Application numérique. Quelle sera la valeur maximale de z à mesurer ?

4b) Si $\ddot{y} = a_0 \sin(\omega t)$, avec $\omega \ll \omega_0$, En utilisant la fonction de transfert rappelée figure 23, donner l'expression de s . Quelle sera la valeur maximale de z à mesurer ?

Au vu des faibles valeurs précédentes de z , il est difficile de les mesurer précisément avec la technologie retenue pour la fabrication du micro-accéléromètre. On utilise alors plutôt un accéléromètre résonnant (actif) dans lequel on trouve des actionneurs qui permettent d'appliquer un effort f sur la masse sismique, piloté par un circuit électronique d'asservissement dont l'objectif est d'imposer un mouvement $z = Z \sin(\omega_1 t)$, quelle que soit l'accélération \ddot{y} par ailleurs.

On appelle toujours $A = 0,1 \text{ m/s}^2$ l'amplitude maximale de cette accélération à mesurer, et on conserve les mêmes caractéristiques : $m = 3 \mu\text{g} = 3 \times 10^{-9} \text{ kg}$, $C = 6,8 \mu\text{Nm}^{-1}\text{s}$, $K = 0,17 \text{ N/m}$.

5°) Considérons tout d'abord le cas où $y(t) = 0$ (pas de mouvement de la puce). Donner alors l'expression de l'effort $f(t)$ que le système d'asservissement impose, en fonction de Z et ω_1 .

Donner ensuite l'expression de son amplitude F . Pour quelle valeur de ω_1 cette dernière est-elle minimale ?

6°) Indépendamment du résultat de la question précédente, on fixe la pulsation ω_1 à ω_0 et l'amplitude Z à $0,1 \mu\text{m}$. On considère maintenant le cas où la puce bouge. Donner alors l'expression de l'effort $f(t)$ que le système d'asservissement doit imposer, et montrer qu'il peut se mettre sous la forme $f(t) = F \cos(\omega_0 t) + m\ddot{y}$.

7°) Ayant capté le signal $f(t)$ précédent, le système électronique est capable de mesurer précisément la valeur RMS (*Root Mean Square*) du signal. La valeur RMS d'un signal $w(t)$ périodique de période T est notée $\langle w \rangle$ et est définie de la façon suivante :

$$\langle w \rangle = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T w^2(t) dt}$$

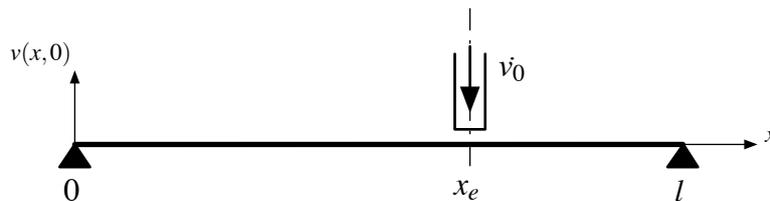
On définit maintenant la sensibilité s de l'accéléromètre comme le rapport de la valeur RMS de f sur la valeur RMS de \ddot{y} . Si l'accélération de la puce est une constante, $\ddot{y} = a_0$, donner l'expression de s . Quelle sera la valeur maximale de f à mesurer ?

Exercice 14. Étude d'une corde vibrante*

Dans cet exercice, on s'intéresse aux vibrations d'une corde dans un instrument de musique soumise à différentes conditions initiales. Elle est de longueur l et de masse linéique ρ , encadrée à ses extrémités sous une tension fixe T_0 . Le déplacement transversal d'un point d'abscisse x de cette corde est noté $v(x, t)$.

1°) Rappeler d'après le cours l'équation décrivant l'évolution de la déformée transversale et la forme générale de la solution $v(x, t)$.

Cas du piano



$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_0 \text{ pour } x_e - \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq x_e + \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ sinon.}$$

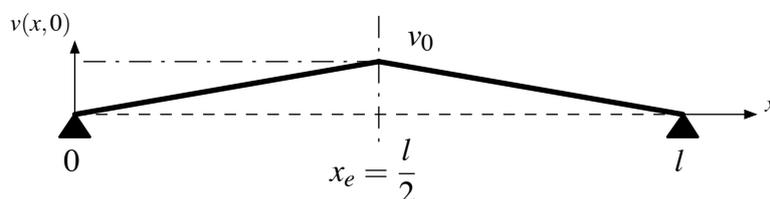
FIGURE 25 – Piano

2°) À $t = 0$, la corde, initialement immobile et dans sa position d'équilibre, est excitée à l'aide d'un marteau de largeur $e \ll l$ dont l'effet est d'imposer une vitesse initiale v_0 sur cette partie centrée autour du point d'abscisse x_e (cf. figure 25). En déduire l'évolution de la déformée. Comment s'expriment les amplitudes des modes propres ? De quoi est fonction le spectre sonore de cette corde ?

3°) On cherche à supprimer un harmonique dissonant qui correspond au mode $p = 7$. Comment faut-il faire ?

4°) On choisit d'exciter cette corde en la frappant en $x_e = \frac{l}{2}$. Donner les amplitudes des modes propres pour $n = 1 \dots 6$. Faire l'application numérique avec $\rho = 0,062 \text{ kg/m}$, $l = 0,42 \text{ m}$, $T_0 = 8470 \text{ N}$, $e = 5 \text{ mm}$ et $v_0 = 95 \text{ m/s}$.

Clavecin



$$v(x, 0) = \frac{2v_0}{l}x \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ et } v(x, 0) = \frac{2v_0}{l}(l - x) \text{ pour } \frac{l}{2} \leq x \leq l$$

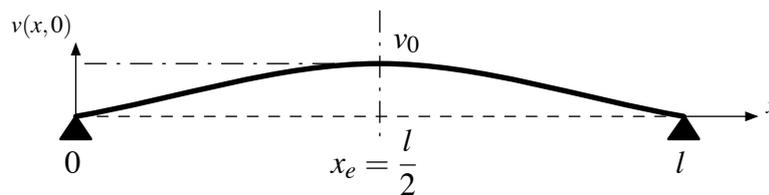
$$\frac{\partial v}{\partial t}v(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x$$

FIGURE 26 – Clavecin

5°) On impose cette fois un déplacement initial v_0 au point d'abscisse $x_e = \frac{l}{2}$ avec une vitesse initiale nulle partout (voir figure 26). Exprimer de même la déformée $v(x, t)$. Comment évoluent cette fois les amplitudes modales ?

6°) Faire l'application numérique avec $v_0 = 1$ mm en calculant les amplitudes des 6 premiers modes propres.

Harpe



$$v(x, 0) = \frac{4v_0}{l^2} x(l - x) \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} v(x, 0) = 0, \text{ pour tout } x$$

FIGURE 27 – Harpe

7°) Le pincement est ici plus délicat et conduit aux conditions initiales présentées en figure 27. Comment s'écrit la déformée $v(x, t)$ dans ce cas ?

8°) Faire l'application numérique sur les 6 premiers modes propres.

Bilan

9°) Que pouvez vous en déduire sur les qualités sonores de ces trois instruments ?

Exercice 15. Vibrations longitudinales

Barre simple

On étudie les mouvements longitudinaux $u(x, t)$ d'une barre en acier définie en figure 28a. Ses caractéristiques sont les suivantes : $A = 1 \text{ cm}^2$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et $l = 1 \text{ m}$. On la soumet à différentes conditions aux limites et initiales.

- 1°) Rappelez la forme de l'équation que respecte $u(x, t)$. Quelle est la forme de la solution ?
- 2°) On considère d'abord que la barre est totalement libre à ses extrémités. À $t < 0$, on la maintient immobile sous une effort normal $N_0 = 1 \text{ kN}$ puis on la relâche complètement à $t = 0$. Déterminez le mouvement $u(x, t)$ puis faites l'application numérique pour les 6 premiers modes.
- 3°) On encastre la barre à son extrémité gauche ($x = 0$) et on la soumet aux mêmes conditions initiales. Déterminez de même $u(x, t)$ et faites l'application numérique.
- 4°) On fixe cette fois l'extrémité droite ($x = l$) par un ressort de raideur K . Exprimez $u(x, t)$ dans ce cas. Comment peut-on déterminer le nombre d'onde k_n ? Que se passe-t-il lorsque $K \rightarrow +\infty$ (encastrement parfait) ?

Colonne

On étudie la colonne définie en figure 28b. Elle est formée d'un assemblage de deux barres de longueur l , de même caractéristiques que précédemment mais de sections différentes.

- 5°) Donnez les conditions aux limites requises pour exprimer les mouvements longitudinaux $v(y, t)$.
- 6°) Écrire l'équation que doit vérifier le nombre d'onde k et évaluer les fréquences et les allures des premiers modes.

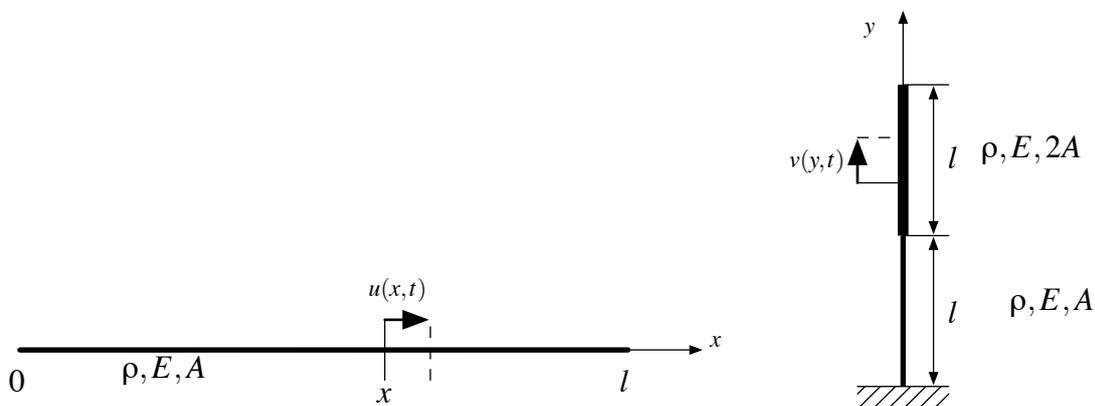


FIGURE 28 – (a) Barre simple - (b) Colonne

Exercice 16. Amortisseur passif accordé de vibrations*

On s'intéresse au réglage de la liaison au sol d'une machine outil, en vue de contrôler ses vibrations lors d'usinages de pièces. La masse qui peut vibrer est $m = 500$ kg, et on estime la valeur de la raideur de la liaison au sol (faisant intervenir la raideur du carter, du tacle et de la visserie) à $k = 10^6$ N/m, figure 29.

1°) Sous une charge extérieure $F = A \sin(\omega t)$, supposée verticale pour simplifier, due au balourd de la pièce à usiner et aux efforts de coupe, la machine vibre, et on note B l'amplitude de son déplacement vertical.

Donner l'expression de B en fonction des données.

Application numérique pour $A = 500$ N et $\omega = 1\,500$ tr/min.

2°) On ajoute un système composé d'une masse m_1 et de deux ressorts k_1 afin de limiter les vibrations précédentes. On cherche à dimensionner m_1 et k_1 de façon à avoir une solution viable (masse et vibrations de la masse ajoutée pas trop importantes), figure 30.

Plus précisément, on essaie d'avoir un carter machine immobile ($x(t) = 0$) et on cherche le mouvement de la masse ajoutée m_1 sous la forme $x_1(t) = C \sin(\omega t)$.

2a) Donner l'expression de C en fonction des données et des caractéristiques cherchées de l'amortisseur (m_1, k_1).

2b) Quelles contraintes constructives sur m_1 et k_1 faut-il avoir ?

2c) Pour le chargement de la question 1, on cherche à avoir une amplitude du mouvement de la masse additionnelle, C , limitée à 1 cm. Choisir les valeurs de m_1 et k_1 .

3°) Avec le système déterminé précédemment, on se place sous une autre condition de coupe, pour $\omega = 800$ tr/min, et on se demande alors quelles sont les valeurs des amplitudes du mouvement du carter machine, et de la masse ajoutée (pour une même valeur de A).

La solution choisie est-elle encore viable ?



FIGURE 29 – Centre d'usinage OKUMA MB46VA/VAE et sa modélisation simplifiée 1D

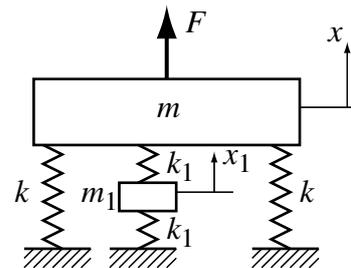
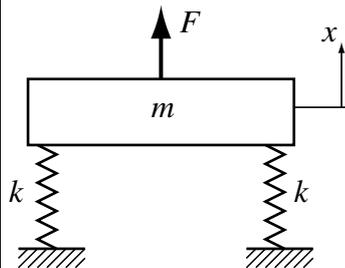


FIGURE 30 – Système avec amortisseur dynamique

4°) Pourquoi dit-on de ce système qu'il est passif ? Pourquoi dit-on qu'il est accordé ?

Exercice 17. Vibrations transversales – Calcul par méthodes approchées

Étude d'un triangle

On propose de déterminer les caractéristiques modales d'un triangle. Celui-ci est en fait une poutre en acier de longueur l , recourbée en deux endroits, à $x = \frac{l}{3}$ et $x = \frac{2l}{3}$. On étudie donc les mouvements transversaux $v(x, t)$ de cette poutre dont les caractéristiques sont les suivantes : $E = 210000 \text{ MPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Sa section est circulaire de diamètre $\phi = 1 \text{ cm}$ et la longueur d'un côté du triangle fait 15 cm .

- 1°) Rappelez la forme de l'équation que respecte $v(x, t)$. Quelle est la forme de la solution ?
- 2°) Donnez les conditions aux limites à respecter. En déduire l'expression du nombre d'onde k .
- 3°) Que vaut la fréquence fondamentale ? Faites l'application numérique pour ce premier mode.
- 4°) On applique maintenant la méthode de Rayleigh-Ritz. On propose la fonction de forme du premier mode d'allure suivante : polynôme de degré 2, valant 2 en 0 et l , et -1.25 en $\frac{l}{2}$. Calculer la fréquence fondamentale. Comparez avec la solution exacte.

Passerelle piéton

Cette étude concerne une passerelle piéton légère. Celle-ci est en fait une structure réticulée constituée de barres et de câbles organisés en nappes. On étudie ses mouvements dans un plan vertical. Elle est donc assimilable à une poutre continue de longueur $l = 12.8 \text{ m}$, de raideur $EI = 1.125 \cdot 10^7 \text{ N.m}^2$. Sa masse linéique est $\mu = 78.125 \text{ kg/m}$.

- 5°) Exprimez les conditions aux limites requises et en déduire les mouvements transversaux $v(x, t)$.
- 6°) Calcul des deux premières fréquences propres par méthode énergétique :
 1. En utilisant les formes exactes sinusoïdales.
 2. En utilisant les formes approchées de la déformée statique : force ponctuelle au milieu pour mode 1 et couple ponctuel au milieu pour mode 2.

Exercice 18. Suspension automobile : le système skyhook*

On s'intéresse ici à une modélisation simple d'une suspension automobile classique ou avec un système actif appelé *skyhook* (littéralement "crochet dans le ciel"); ce dernier système est proposé sur des véhicules haut de gamme, des engins militaires... figure 31⁶.



FIGURE 31 – Maserati Coupé et blindé 8x8 de 33 tonnes

Une transmission classique peut être modélisée grossièrement par un système linéaire composé d'une masse m , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient c (tous prenant aussi en compte le comportement du pneumatique), sollicitée par la pesanteur, ainsi qu'à sa base (par exemple, lors d'un franchissement d'obstacle, pour un véhicule avançant à vitesse constante V , la roue à un déplacement vertical noté $x_0(t)$), figure 32 à gauche⁷. Enfin, on note g l'accélération de la pesanteur.

Le principe du système *skyhook* est de pouvoir interposer un amortisseur de coefficient c_1 avec une "référence" qui reste horizontale (par exemple, un nuage dans le ciel...) qui peut même remplacer dans l'idéal le reste de l'amortisseur, ce qui correspondrait à $c_2 = 0$ pour le modèle de la figure 32 au centre.

En pratique, on ne peut pas s'accrocher à un nuage ! Les systèmes proposés veulent simuler ce comportement ; ils utilisent un amortisseur variable piloté (système semi-actif) seul, ou avec un effort de contrôle F_c piloté lui aussi (système actif), figure 32 à droite.

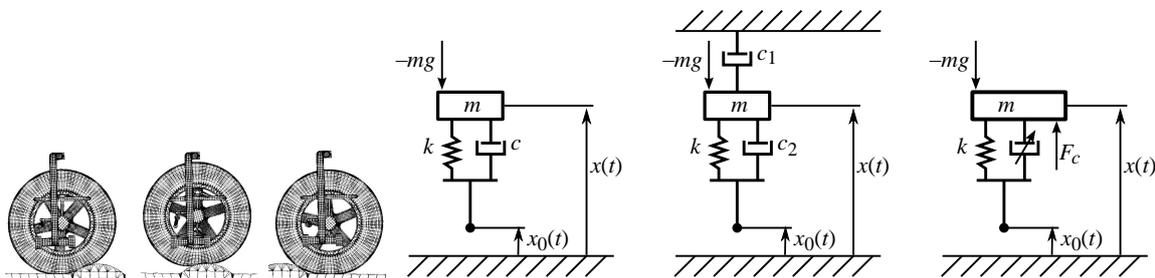


FIGURE 32 – Illustration de la sollicitation à la base et d'une suspension classique (à gauche), principe (au centre) et réalisation (à droite) du système *skyhook*

Des critères de sécurité demanderaient à ne pas trop amplifier la réponse du système au voisinage de ω_0 , alors que des critères de confort demanderaient à amortir la réponse du système à fréquence élevée. Si le confort est amélioré, le système précédent ne doit pas trop influencer la tenue de route. On se propose donc ici de regarder le comportement de ce système dans certains scénarios de conduite.

Pour cela, on étudie le modèle de suspension décrit sur la figure 33 à gauche. Si $c_1 = 0$, on retrouve la suspension classique, et le système *skyhook* correspond dans le cas idéal à un amortissement $c_2 = 0$.

1°) Isoler la masse m et montrer que son équation de mouvement vertical est de la forme $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ où vous préciserez les expressions de c et $f(t)$.

Rappeler les expressions de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement ε correspondants.

6. M. Hönlinger et U. Glauch, Mobility Analysis of a Heavy Off-Road Vehicle Using a Controlled Suspension, Krauss-Maffei Wegmann GmbH & Co. KG, 1999.

7. J.-C. Walrick et al, Optimisation numérique d'une suspension de véhicule en sollicitation dynamique, *Mécanique & Industries* 7(5-6) :445-452, 2006 doi:10.1051/meca:2007002

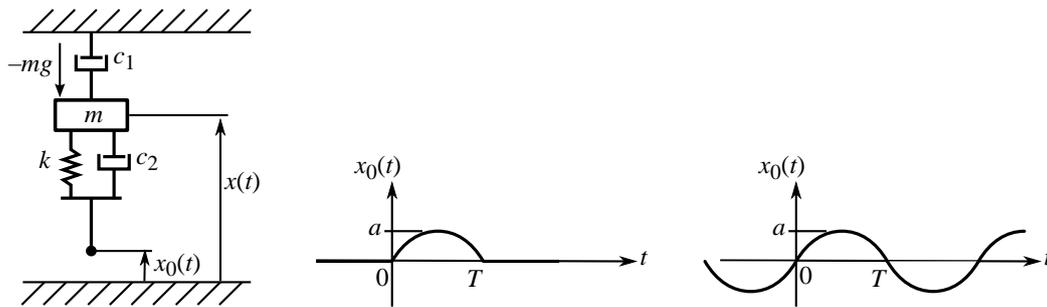


FIGURE 33 – Modèle de suspension étudiée (à gauche), route avec dos d'âne (au centre), et avec ondulation (à droite)

2°) Si la route à un profil de la forme $a \sin(\pi \frac{y}{L})$, où a et L sont des longueurs données (y est la distance horizontale), et si le véhicule avance à vitesse constante V , montrer que $x_0 = a \sin(\omega t)$ en donnant l'expression de ω en fonction des données.

Dans toute la suite, on prendra $x_0 = a \sin(\omega t)$. Pour les applications numériques, vous utiliserez les valeurs suivantes : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $m = 400 \text{ kg}$, $k = 26\,660 \text{ N/m}$.

3°) Montrer que f peut se mettre sous la forme $f(t) = -mg + kaA(\omega) \sin(\omega t + \Phi)$ où vous préciserez l'expression de la fonction $A(\omega)$ (on ne demande pas celle de Φ).

Dans un premier temps, on s'intéresse au passage du véhicule sur une route en forme de "tôle ondulée", figure 33 à droite. On s'intéresse alors à la **solution forcée** uniquement (solution particulière de l'équation du mouvement).

4°) On note X l'amplitude du déplacement vertical $x(t)$ autour de la valeur moyenne $-mg/k$.

a) Pour la suspension *skyhook* avec $c_2 = 0$, montrer que $X = aH_D(\omega)$ où H_D est la fonction de transfert en déplacement.

b) Pour la suspension classique ($c_1 = 0$), le ratio X/a est tracé sur la figure 34 à gauche, pour plusieurs valeurs de ε , en même temps que le ratio X/a de la question précédente. Le compromis sécurité/confort pour la suspension classique conduit en général à une valeur $\varepsilon = 0.7$.

Comparez les deux suspensions sur ce cas de figure.

c) Un critère de confort demande à ce que l'amplitude de l'accélération verticale de la caisse du véhicule (masse m) ne dépasse jamais $1.2g$. Pour la suspension *skyhook* avec $c_2 = 0$ et $\varepsilon = 0.7$, en déduire une condition sur l'ondulation du sol, a , maximale.

On s'intéresse maintenant au franchissement d'un "dos d'âne", figure 33 au centre, pour lequel $x_0(t) = 0$ sauf quand $t \in [0, \pi/\omega]$ où $x_0(t) = a \sin(\omega t)$. On s'intéresse alors à la solution transitoire complète (solution générale de l'équation du mouvement avec second membre), et si nécessaire pour les applications numériques, on prendra $\varepsilon = 0,7$.

5°) Pour $t \leq 0$, quelle sont les valeurs de x et \dot{x} ?

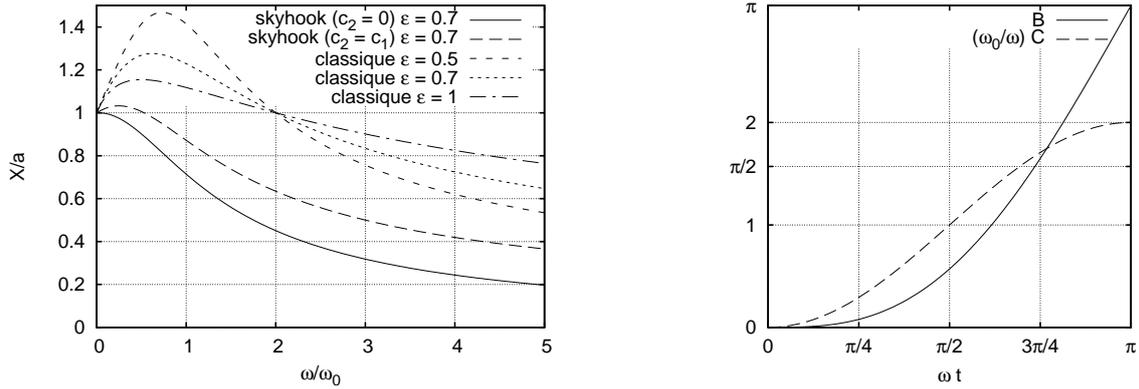


FIGURE 34 – Réponses de la suspension classique et du système *skyhook* (à gauche), évolution des fonctions B et $\frac{\omega_0}{\omega}C$ (à droite)

6°) Donner la valeur numérique de ω_0 et de l'amortissement c pour $\varepsilon = 0.7$. Pour un dos d'âne de longueur $L = 10$ cm et une vitesse de véhicule de $V = 10$ km/h, donner la valeur numérique de ω .

En supposant $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$, on peut simplifier l'expression de la solution en déplacement pour $t \in [0, \pi/\omega]$ en $x(t) - x_0(t) = -mg/k + a(\omega t - \sin(\omega t))$. On utilisera cette expression dans toute la suite.

7°) Rappeler l'expression de l'action du ressort k et de l'amortisseur c_2 sur la masse m (figure 33 à gauche). En isolant la roue supposée sans masse, donner l'expression de l'action F de la route sur la roue en fonction, entre autres, de x et \dot{x} . Avec l'expression proposée de $x(t)$, donnez l'expression de F sous la forme $F(t) = mg - ka[B(\omega t) + \frac{c_2}{\sqrt{km}}C(\omega t)]$ où vous préciserez les expressions de $B(\omega t)$ et $C(\omega t)$, le coefficient c_2 ne devant pas intervenir dans celles-ci.

8°) On cherche à vérifier si, au moins pendant le passage de l'obstacle, la roue se décolle pas, c'est-à-dire si $F(t)$ reste positif pour $t \in [0, \pi/\omega]$.

a) Les allures des fonctions $B(\omega t)$ et $\frac{\omega_0}{\omega}C(\omega t)$ sont données sur la figure 34 à droite. À quel instant $F(t)$ prend-il sa valeur minimale ? Quelle est l'expression de cette valeur minimale ?

b) Écrire la condition de non décollement de la roue dans le cas de la suspension *skyhook* avec $c_2 = 0$. Pour que cela soit valable $\forall t \in [0, \pi/\omega]$, en déduire une condition sur le franchissement de l'obstacle, c'est-à-dire sur les éventuelles quantités a et ω .

c) Écrire la condition de non décollement de la roue dans le cas de la suspension classique ($c_1 = 0$) et pour $\omega \gg \omega_0$.

Pour que cela soit valable $\forall t \in [0, \pi/\omega]$, en déduire une condition sur le franchissement de l'obstacle, c'est-à-dire sur les éventuelles quantités a et ω .

d) Comparer les deux suspensions ci-dessus vis à vis de ce critère de tenue de route pour $a = 2$ cm et $L = 20$ cm.

Exercice 19. Pot vibrant électrodynamique*

Pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une structure (pulsation propre, amortissement...), une méthode souvent utilisée est l'excitation de la structure par pot vibrant (ou exciteur électrodynamique, figure 35⁸) :

- l'entrée du système est l'effort exercé sur la structure,
- la sortie mesurée est la réponse de la structure (par exemple en déplacement).

Le pot vibrant est constitué (figure 36 à gauche) :

- d'un aimant permanent solidaire du carter du pot,
- d'une bobine électrique (de masse m_2) se déplaçant dans l'entrefer de l'aimant, le guidage en translation étant assuré par des membranes élastiques (de raideur k_2).

L'excitateur est fixé à un bâti rigide. La bobine m_2 est liée rigidement à la structure.

Pour simplifier, la structure étudiée est assimilée à un système à 1 degré de liberté, de raideur k , de masse m et de coefficient d'amortissement c (figure 36 à droite). On note $x(t)$ le déplacement vertical de l'ensemble (bobine + structure). On négligera la pesanteur devant les efforts mis en jeu.

On suppose que l'effort exercé par l'aimant sur la bobine est de la forme $f(t) = F_0 \cos \omega t$ où F_0 est une constante, et ω peut être réglée par l'expérimentateur.

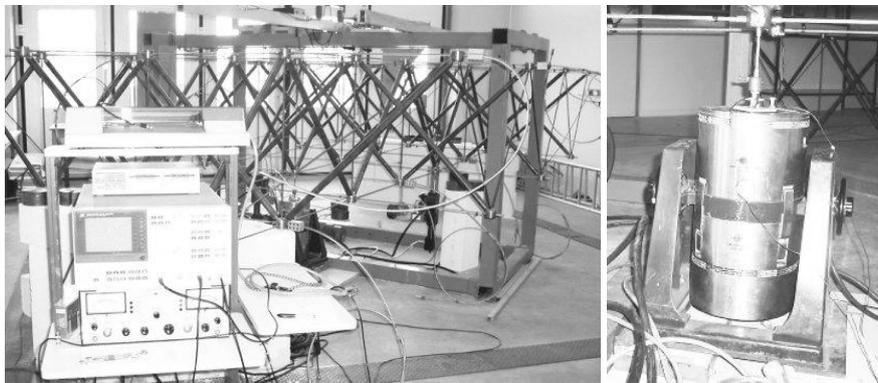


FIGURE 35 – structure instrumentée et pot vibrant

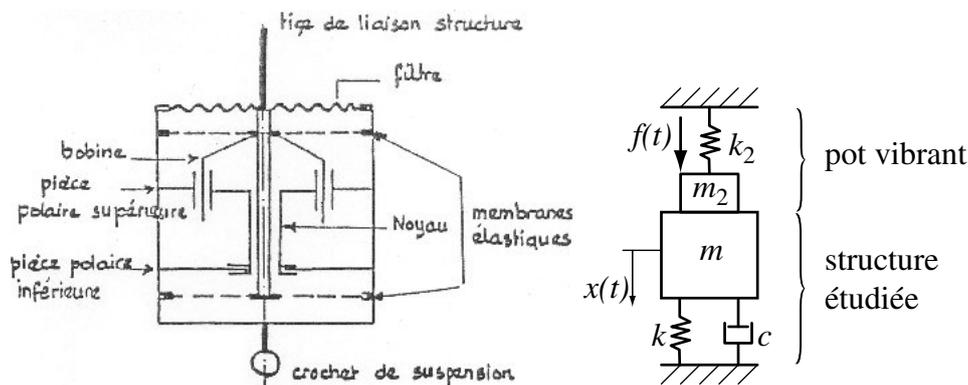


FIGURE 36 – constitution d'un pot vibrant (à gauche) et modélisation de l'ensemble pot + structure (à droite)

1°) Montrer que l'équation du mouvement est de la forme $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$ où vous préciserez les expressions de M , K et C .

8. la structure étudiée ici est un système de tenségrité (structure réticulée constituée de barres en compression et de câbles en tension), photographies de J. Averseng ; LMGC, Université Montpellier 2.

2°) Quand $m_2 = k_2 = 0$ (pas de pot), rappeler l'expression de la pulsation propre de la structure ω_0 , et du pourcentage d'amortissement ε . Application numérique pour $m = 1,92 \text{ kg}$, $k = 2,97 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ et $c = 1,5 \text{ Ns/m}$.

3°) En présence du pot, on pose $\alpha = \frac{m_2}{m}$, $\beta = \frac{k_2}{k}$.

3a) Donner l'expression de la pulsation propre du système (structure + pot), Ω_0 , et de son pourcentage d'amortissement, Σ . Donner en particulier l'expression des perturbations $\frac{\Omega_0}{\omega_0}$ et $\frac{\Sigma}{\varepsilon}$ en fonction de α et β .

3b) En général, $\alpha < 1$ et $\beta < 1$. On mesure Ω_0 et Σ , au lieu de ω_0 et ε . Que peut-on dire de l'estimation ainsi obtenue (a-t-on surestimation, sous-estimation...)?

3c) Application numérique pour Ω_0 , Σ et les perturbations, pour $m_2 = 0,135 \text{ kg}$ et $k_2 = 4700 \text{ N/m}$.

4°) À partir du formulaire rappelé dans la section 4, donner l'expression du rapport de l'amplitude de x sur celle de f , en fonction de ω , Ω_0 , K , M , Σ . On la notera $H_1(\omega)$. Quelle est sa valeur pour $\omega = \Omega_0$? Pour cette pulsation, on souhaite limiter l'amplitude du déplacement de la structure à 1 cm ; quelle est la valeur maximale F_{max} ? peut-on alors avoir pour F ?

5°) Pour éviter le problème précédent de perturbation sur la mesure de ω_0 et ε , on place entre la bobine et la structure un capteur d'effort (supposé rigide, de masse négligeable) et on mesure ainsi $g(t)$, l'effort de m_2 sur m .

5a) En isolant uniquement m , justifier sans calcul que $g(t)$ est de la forme $g(t) = G_0 \cos(\omega t + \phi)$ (on ne demande pas les expressions de G_0 ni de ϕ !)

5b) À partir du formulaire rappelé dans la section 4, donner l'expression du rapport de l'amplitude de g sur celle de x en fonction de ω . On la notera $H_2(\omega)$. Quelle est sa valeur pour $\omega = \Omega_0$? Pour une amplitude de déplacement maximale de la structure de 1 cm à cette pulsation, quelle est la valeur de G_0 à mesurer?

6°) On change de structure testée (on ne connaît plus ni m , ni k , ni c). On mesure maintenant G_0 et l'amplitude du déplacement x de la structure pour différentes pulsations ω . On observe une résonance de déplacement à $\omega_d = 139,2 \text{ Hz}$, pour laquelle $H_2(\omega_d) = 140 \text{ N/m}$, figure 37.

6a) La masse de la structure est facile à obtenir par ailleurs, et on trouve $m = 1,8 \text{ kg}$. En déduire les valeurs de ω_0 et ε (on pourra pour simplifier supposer que $\varepsilon \ll 1$).

6b) Quelles sont les valeurs de k et c ?

On rappelle un résultat du formulaire : pour un système à 1 degré de liberté (de pulsation propre ω_0 , pourcentage d'amortissement ε , et masse m), sa fonction de transfert en déplacement est

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2\omega_0^2}}$$

et sa valeur maximale est $H_{max} = \frac{1/m}{2\omega_0^2\varepsilon\sqrt{1-2\varepsilon^2}}$

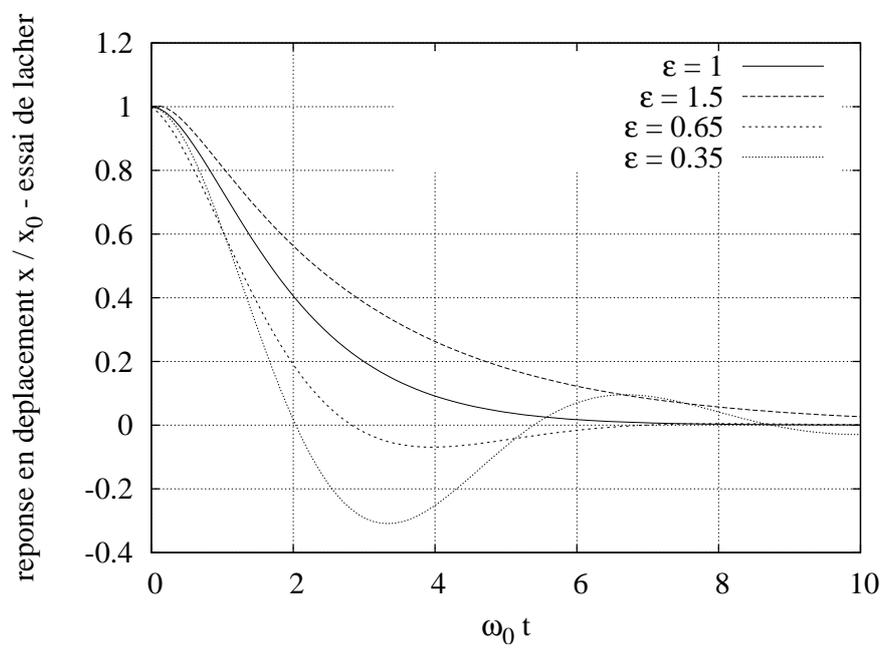


FIGURE 37 – Réponse en déplacement de la structure

Exercice 20. VAL*

L'étude proposée concerne le comportement transversal, en virage, d'un véhicule de transport urbain (le VAL de Matra). Les mouvements de la caisse S , de masse m , sont supposés découplés, ce qui conduit pour le mouvement transversal seul à la modélisation de la figure 38 où l'on trouve deux ressorts de raideur k_1 et deux amortisseurs de coefficient d'amortissement c_1 .

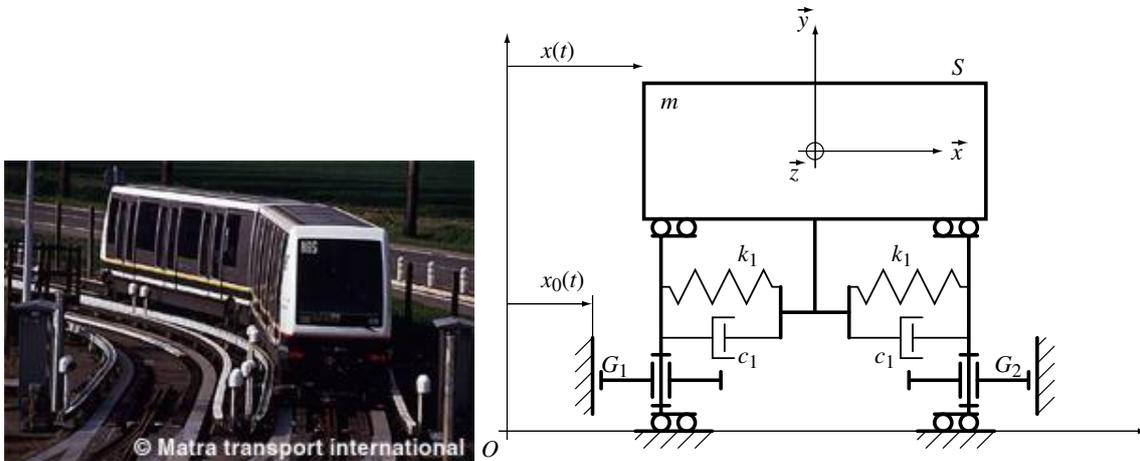


FIGURE 38 – Orlyval et la modélisation de son comportement transversal

Les galets G_1 et G_2 assurent simplement le guidage du véhicule. \vec{z} est le sens d'avance, \vec{x} est la direction du mouvement transversal. $x(t)$ repère la position transversale de la caisse et $x_0(t)$ celle de la bordure qui guide les galets. On suppose que quand $x = x_0 + h$, les ressorts k_1 de la suspension transversale sont à vide (pas d'effort).

Lors d'un changement de direction, la position de la bordure x_0 change. On suppose qu'il n'y a pas d'effort extérieur latéraux agissant sur S .

1°) Pour des positions x et x_0 quelconques, donner l'expression de l'effort exercé par le ressort de gauche k_1 sur la caisse S .

Dans toute la suite, on prendra $h = 0$.

2°) Montrer que le système est équivalent au modèle de la figure 39(a) pour lequel vous donnerez l'expression de la raideur k et de l'amortissement c en fonction de k_1 et c_1 .

Dans toute la suite, on prendra $m = 6500$ kg, $k = 60$ kN/m, et un pourcentage d'amortissement $\varepsilon = 0,3$ pour le modèle de la figure 39(a).

3°) Donner les valeurs numériques de l'amortissement c , de la pulsation propre ω_0 et de la pulsation propre amortie ω_D .

Donner l'équation du mouvement de la caisse en fonction de m , k , c et x_0 .

4°) Lors de la première phase du changement de direction, l'évolution de x_0 est décrite sur la figure 39(b) en haut : $x_0 = A \sin \omega t$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2\omega}]$, où $\omega = 0,5$ rad/s et $A = 2$ m.

Les conditions initiales pour x sont $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$.

4a) L'amortissement est-il qualifié de fort ou de faible ? En vous aidant du cours, donner la forme de la solution générale du système homogène.

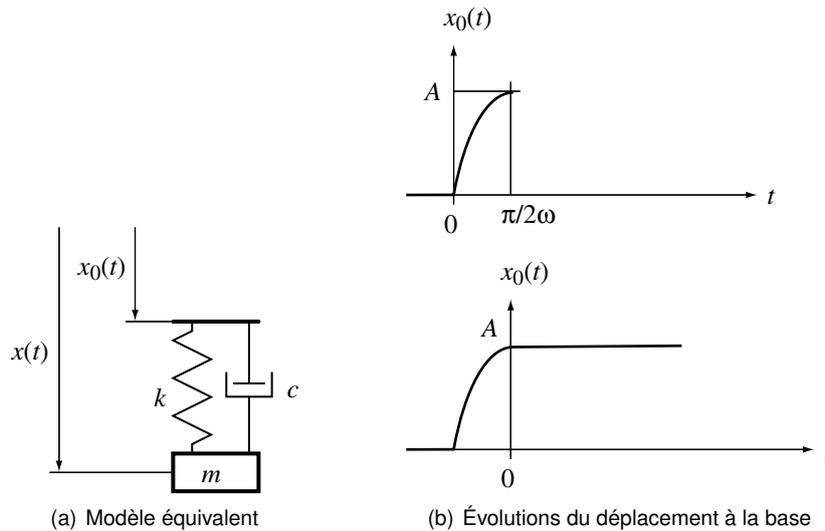


FIGURE 39 –

4b) Quelle est la forme de la solution particulière du système forcé ? On ne demande pas de trouver les coefficients, et pour toute la suite on prendra pour cette solution particulière l'expression : $A \sin \omega t$, qui est une approximation suffisante au vu des rapports de pulsations.

Avec les conditions initiales, donner alors la solution du mouvement de la caisse, puis faites l'application numérique pour les coefficients que vous aurez introduits.

4c) Donner les valeurs numériques de la position de la caisse, et de sa vitesse à la fin de la première phase, qu'on notera : $x_1 = x(t = \frac{\pi}{2\omega})$ et $v_1 = \dot{x}(t = \frac{\pi}{2\omega})$.

5°) Lors de la deuxième phase du changement de direction, $t > \frac{\pi}{2\omega}$, figure 39(b) en bas, et avec un décalage d'origine en temps, on a maintenant $x_0 = \text{constante} = A$, et des conditions initiales $x(t = 0) = x_1$ et $\dot{x}(t = 0) = v_1$.

Donner la solution complète du mouvement de la caisse dans cette deuxième phase, puis faites l'application numérique pour les coefficients que vous aurez introduits.

6°) Au bout de combien de temps est-on sûr que la caisse sera revenue à une position ne s'écartant pas plus de A que $\delta = 1 \text{ cm}$?

Exercice 21. Vitesse critique d'arbre en rotation

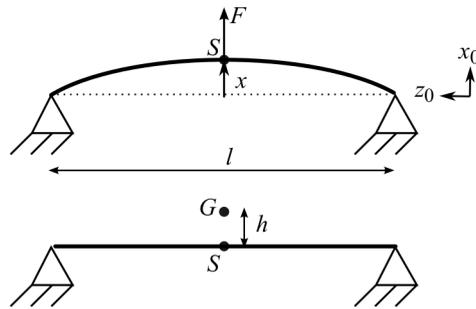


FIGURE 40 – Modèle du rotor

Les nuisances engendrées par un rotor déséquilibré sont bien connues. L'une d'entre elles, lorsque la vitesse de rotation atteint une certaine valeur conduit à faire fléchir l'arbre (qui n'est donc plus considéré comme un solide rigide) de façon importante, suffisamment pour compromettre sa résistance. Il est donc important de connaître ces vitesses de rotation dites « critiques » de façon à faire tourner l'arbre en dessous de la première vitesse critique, ou alors de dépasser très vite cette vitesse au démarrage.

Si l'on s'intéresse à la première vitesse critique, on peut se contenter de modéliser le système avec un seul degré de liberté, en supposant la masse de l'arbre négligeable devant celle du rotor.

1°) Vibrations de flexion de l'arbre du rotor

On considère ici l'ensemble arbre + rotor comme une poutre de masse négligeable, de longueur l , de module d'Young E , de moment d'inertie en flexion I , reposant à ses extrémités sur des appuis simples et supportant une masse m en son milieu (le rotor), comme sur la figure 40.

On considère l'arbre à l'arrêt (vitesse de rotation nulle), et on rappelle que la flèche x au milieu d'une poutre de longueur l , de module d'Young E , de moment d'inertie en flexion I , reposant à ses extrémités sur des appuis simples et soumise à un effort transversal en son milieu est $x = F/k$ avec $k = 48EI/l^3$ et $I = \pi d^4/64$ pour une section circulaire.

Le rotor est supposé être un disque en acier de diamètre $D = 120$ mm, d'épaisseur $e = 25$ mm. L'arbre cylindrique est en acier, de diamètre $d = 12$ mm, de longueur $l = 600$ mm.

1a) Calculer la raideur statique.

1b) Calculer la pulsation propre du système lorsque l'arbre est en flexion.

2°) Vitesse critique de rotation

On considère cette fois un arbre vertical flexible et le rotor fixé en son centre géométrique S . On négligera ici l'influence du poids. L'arbre tourne à la vitesse angulaire constante ω . Le centre de masse G est situé à la distance h de S (h est l'excentricité). $(0, x_0, y_0, z_0)$ est un repère lié au bâti. Le disque reste dans le plan $(0, x_0, y_0)$ lors de son mouvement, et on appelle x et y les coordonnées de S dans ce plan.

2a) En appliquant la résultante du principe fondamental de la dynamique appliqué au disque, donner les équations du mouvement pour les paramètres x et y .

2b) On propose de passer en complexe et d'appeler $z = x + iy$. Que doit vérifier z ?

2c) Pour $\omega \neq \omega_0$, montrer que z peut se mettre sous la forme $z = Ae^{i\omega t}$. Donner l'expression de A et l'allure de la courbe A/d en fonction de ω/ω_0 . Conclure.

2d) Pour $\omega = \omega_0$, montrer que z peut se mettre sous la forme $z = ate^{i\omega t}$. Donner l'expression de a . Conclure.

Exercice 22. La machine à laver simplifiée*

Nous allons étudier le mouvement d'une machine à laver représentée sur la figure 41⁹.

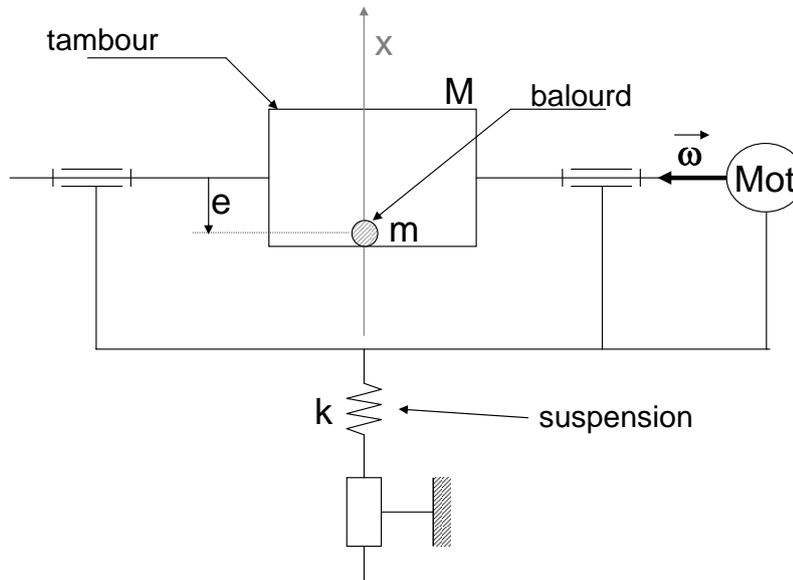


FIGURE 41 – Représentation de la machine à laver

Le déséquilibre lié à la répartition du linge dans le tambour de masse $M = 10 \text{ kg}$ a été ici simplifié et l'on assimile le linge à un balourd, masse ponctuelle ($m = 4 \text{ kg}$) située à une distance $e = 100 \text{ mm}$ de l'axe de rotation. Le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{y}$ est ici donné pour une phase d'essorage : $\omega = 800 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$.

Problème On cherche ici à limiter l'amplitude du mouvement du tambour durant l'essorage à 10 mm. Quelles conditions faut-il satisfaire ?

Dans un premier temps, vous calculerez l'action du balourd sur le reste du système et l'on considérera pour la suite uniquement la projection sur l'axe \vec{x} de cette action mécanique.

Une fois le système simplifié (1 ddl, mouvement sur 1 axe) vous écrirez le PFD appliqué au tambour pour obtenir les équations de vibration de la machine à laver.

9. vibrations forcées sur un système à un degré de liberté

Exercice 23. Couplage aéroélastique du pont de Tacoma*

Le premier pont de *Tacoma Narrows* (détroit de Tacoma), dans l'état de Washington, USA, a été ouvert à la circulation le 1er juillet 1940. Pendant les 4 premiers mois d'activité du pont, les principales vibrations observées étaient des vibrations verticales de flexion, en particulier le premier mode de *flexion de fréquence propre* $f_1 = 0,13$ Hz. Des vibrations de *torsion de fréquence propre* $f_0 = 0,2$ Hz furent aussi observées. Ces deux modes sont découplés et correspondent chacun à un système à 1 degré de liberté, figure 42 : la flèche verticale x au milieu du pont pour le premier, l'angle d'inclinaison α de la section centrale du pont pour le deuxième (I est alors l'inertie en rotation, par unité de longueur du pont, k_0 est la raideur en torsion par unité de longueur du pont, et c_0 l'amortissement associé).

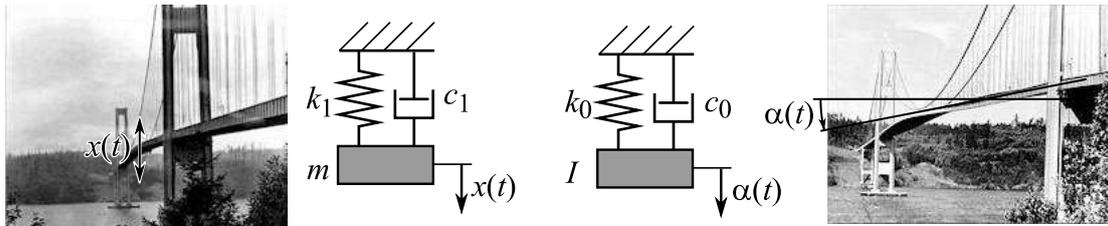


FIGURE 42 – Modes de vibration et modèles à 1 degré de liberté associés

Le 7 novembre à 9h45, un vent de 15 m/s a excité le pont en flexion avec une amplitude de 0,46 m, ce qui était déjà arrivé et ne présentait pas de danger. Le vent est ensuite passé à 19 m/s et à 10h15, des oscillations de torsion ont brusquement commencé à la fréquence f_0 avec des amplitudes jamais observées avant d'environ 0,7 radians (plus de 40 degrés !); le pont n'a pas résisté au delà de 11h où il s'est écroulé, figure 43¹⁰.

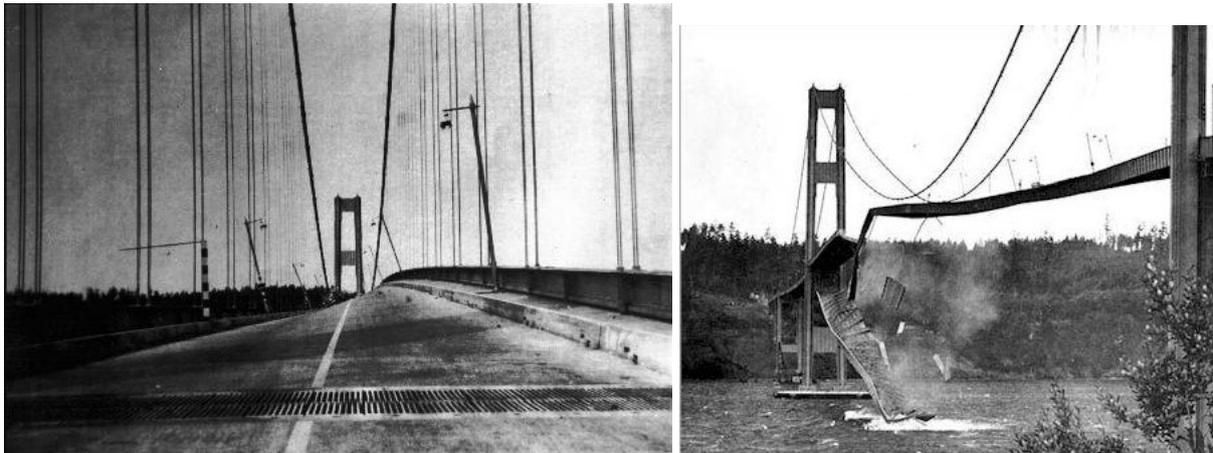


FIGURE 43 – Torsion excessive et ruine du pont

L'amortissement dans le pont était assez faible, le pont était assez flexible et a été essentiellement dimensionné en statique : les sollicitations aérodynamiques dues au vent étaient peu connues à l'époque.

Plusieurs scénarios ont été avancés pour expliquer la rupture. Le premier concerne la résonance en torsion. Cependant, les vents présents ne sollicitaient pas avec suffisamment d'énergie, ni suffisamment longtemps la structure à sa pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$. Ce scénario n'explique donc pas le problème.

Le deuxième scénario concerne les vortex de von Karman (*Vortex Shedding*)¹¹. En effet, lorsqu'un profil non aérodynamique (comme la section du pont) est placée dans un écoulement, des tourbillons se forment, figure 44. Les tourbillons sont des zones à basse pression, qui agissent donc sur le profil. Dans le cas d'une section en H, horizontale ou peu inclinée, deux types de tourbillons sont générés :

10. Les images sont extraites de D. Smith, A Case Study and Analysis of the Tacoma Narrows Bridge Failure, Engineering Project 99.497, Carleton University, 1974. et font partie du domaine public, comme <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Tacoma-narrows-bridge-collapse.jpg>

11. Th. von Kármán, Collapse of the Tacoma Narrows Bridge, reprint in *Resonance*, 97-102, August 2005.

des tourbillons de type 1, fixes par rapport au pont, presque symétriques au dessus et au dessous (ils n'exercent donc que peu de résultante sur le pont), et des tourbillons de type 2 qui se détachent en aval du pont alternativement en haut et en bas. La fréquence de génération de ces derniers tourbillons est appelée fréquence de Strouhal f_S . Sous forme adimensionnelle, le nombre de Strouhal est $S = H f_S / U$ où H est la hauteur du profil et U la vitesse du vent ; il ne dépend que de la géométrie de la section, et pour le pont de Tacoma, il vaut $S = 0,12$.

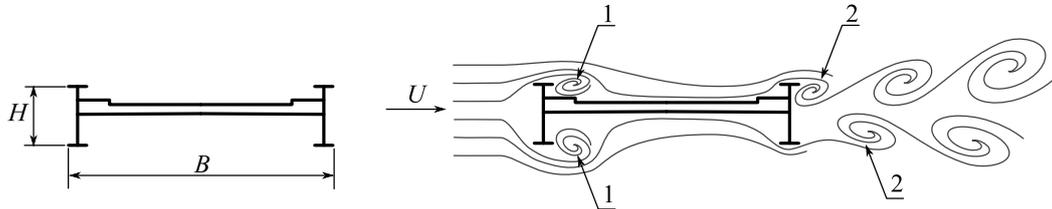


FIGURE 44 – Profil du pont et tourbillons de l'écoulement d'air

1°) La hauteur du tablier est $H = 2,4$ m. Calculer la fréquence de Strouhal f_S pour $U = 19$ m/s. À quelle pulsation ω_S cela correspond-il ?

2°) Pour une sollicitation harmonique à la pulsation ω_S , quelle est la valeur de la fonction de transfert en déplacement pour chacun des deux modes (flexion puis torsion), si on suppose l'amortissement négligeable ? Vous pourrez répondre en vous aidant de la fonction de transfert de la figure 46.

Comparer ces valeurs à celles obtenues en statique ($\omega = 0$) pour chacun des deux modes. Conclusion ?

Avec de l'amortissement faible, dans quel sens irait le résultat précédent ? (réponse à justifier, mais sans calcul).

Le troisième scénario porte sur les instabilités aérodynamiques¹². Quand le pont est assez incliné, les tourbillons de type 1 se détachent et avancent à une vitesse de l'ordre de $0,25 \times U$. Suivant la fréquence de vibration en torsion, ils peuvent avoir un effet néfaste. Par exemple, avec une vitesse assez élevée comme c'est le cas sur la figure 45, le moment de torsion M engendré par ces tourbillons a le même signe que $\dot{\alpha}$. Il va avoir tendance à amplifier le mouvement. Une analyse dimensionnelle permet d'écrire ce moment, par unité de longueur de pont, sous la forme

$$M = \frac{1}{16} \rho B^4 \omega_0 A \dot{\alpha}$$

où A est un paramètre adimensionnel fonction de U , donné sur la figure 47(b)¹³, $\rho = 1,23$ kg/m³ est la masse volumique de l'air, et $B = 11,9$ m, est la largeur du pont.

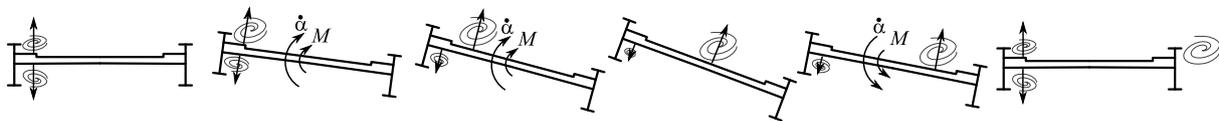


FIGURE 45 – Évolution du mouvement de torsion et décollement des tourbillons de type 1

3°) Le principe fondamental de la dynamique, en moment, donne l'équation du mouvement de torsion : $I\ddot{\alpha} + c_0\dot{\alpha} + k_0\alpha = M$. Mettez-la sous la forme $I\ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + k_0\alpha = 0$ où c est un amortissement équivalent à donner en fonction, entre autres, de c_0 .

4°) Donner la forme de la solution $\alpha(t)$ si $c < 0$. Conclusion ?

12. B. Koobus, Ch. Farhat, H. Tran, Computation of unsteady viscous flows around moving bodies using the $k-\varepsilon$ turbulence model on unstructured dynamic grids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(11-12) :1441-1466, 2000.

13. K. Billah and R. Scanlan, Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure and Undergraduate Physics Textbooks, *American Journal of Physics*, 59(2) :118-124, 1991.

5°) Au vu de la forme de A , comment varie c en fonction de U (croissant, décroissant) ?

Le cas critique correspond à $c = 0$. Donner alors l'expression de la valeur critique A_c de A , en fonction entre autres de c_0 .

6°) Si cette valeur critique est obtenue pour $U = 15$ m/s, quelles étaient alors les valeurs de l'amortissement c_0 et du pourcentage d'amortissement associé ε_0 ? Si cette valeur critique est obtenue pour $U = 19$ m/s, quelles étaient alors les valeurs de c_0 et de ε_0 ? On pourra prendre $I = 177\,730$ kg.m²/m.

Ce dernier scénario vous semble-t-il pertinent ?

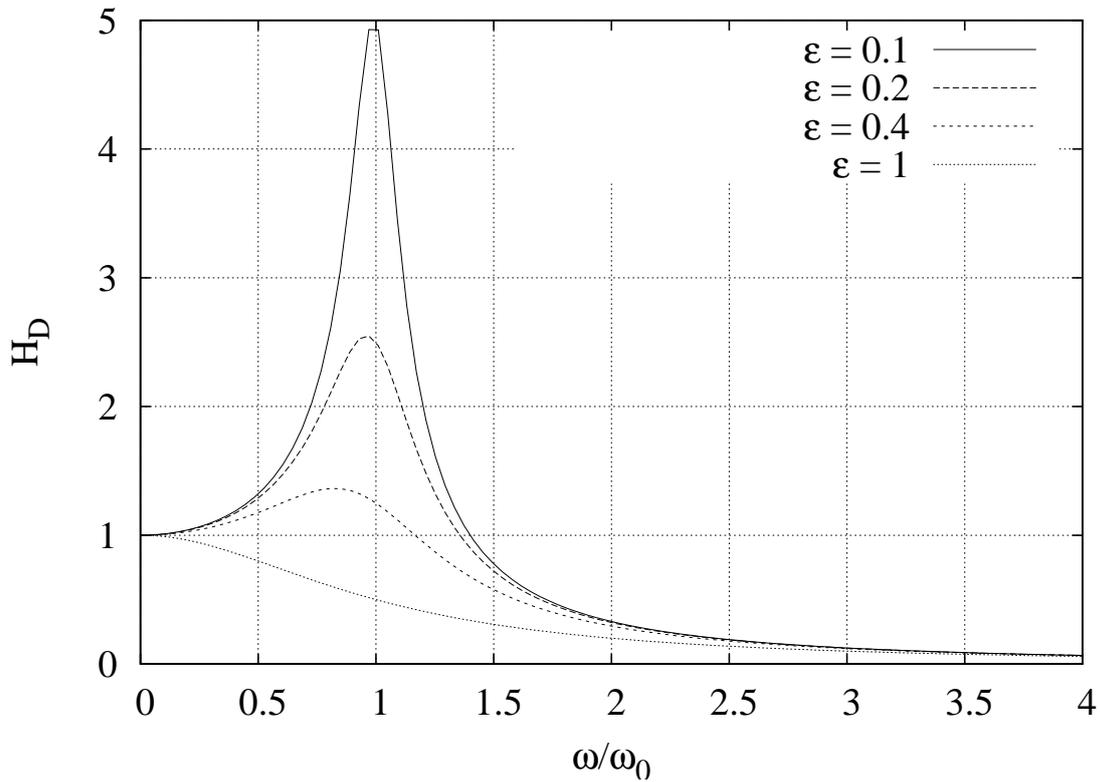
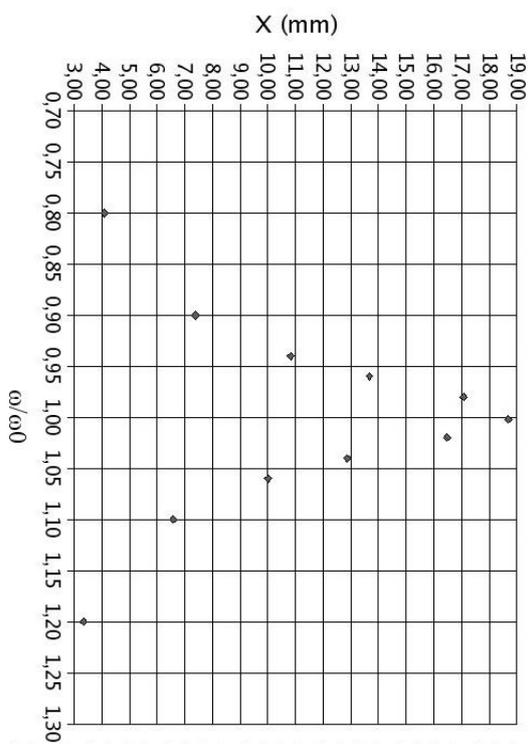
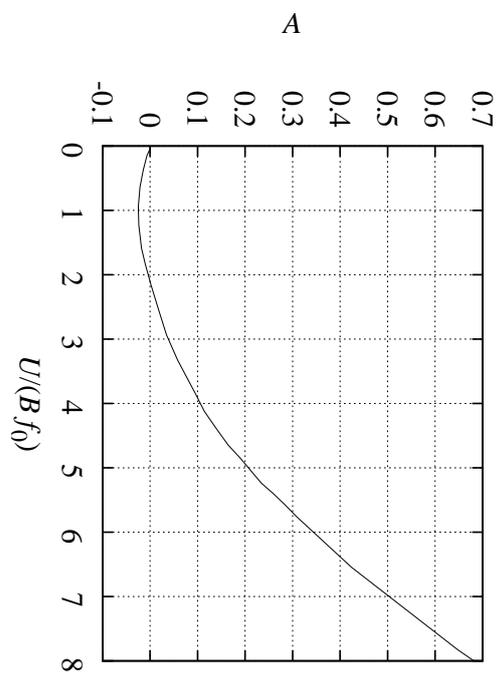


FIGURE 46 – Fonction de transfert en déplacement d'un système à 1 degré de liberté, pour plusieurs pourcentages d'amortissement



(a) Mesures sur le dispositif



(b) Paramètre adimensionnel aérodynamique A , fonction de U

FIGURE 47 –

Exercice 24. Oscillations des gratte-ciel*

La rigidité des bâtiments est liée à leur conception. Plus effilés et plus hauts que leurs prédécesseurs, les gratte-ciel modernes sont aussi plus flexibles. Sous l'effet de puissantes rafales de vent, ces constructions oscillent, ce qui est désagréable pour les occupants et risque d'endommager la structure. Pour y remédier, il existe des systèmes passifs : les masses amortissantes (*Tuned Mass Dampers* ou TMD).

On considère donc les vibrations latérales d'une tour, qu'on modélise comme un système à 1 degré de liberté (masse équivalente m , ressort de raideur k , amortisseur de coefficient d'amortissement c), **figure 48 a et b**. $x(t)$ est le déplacement au sommet de la tour. On s'intéresse au cas où une rafale de vent vient de passer, et où la tour oscille librement (en vibrations libres, donc).

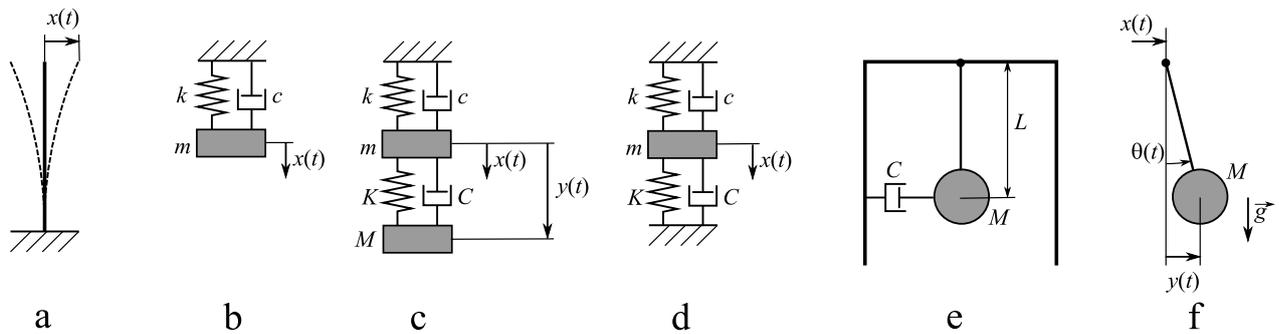


FIGURE 48 – Modèles de vibration

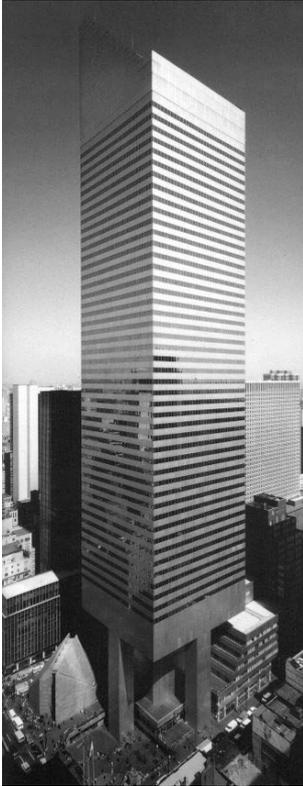
1°) Dans le cas où l'amortissement est faible, rappeler l'expression de la solution en vibrations libres $x(t)$ (rappeler l'expression des différentes grandeurs en fonction des données m , k et c).

2°) En une période T , l'amplitude décroît. Donner l'expression de r , le pourcentage de décroissance de l'amplitude sur 1 cycle ($r = (x(t) - x(t + T))/x(t)$) en fonction des données.

Montrer qu'avec une faible valeur du pourcentage d'amortissement ε , il peut s'écrire $r \approx 2\pi\varepsilon$, expression que vous utiliserez dans toute la suite.



FIGURE 49 – Solutions adoptées (à gauche : pour la tour *Citicorp*, image http://www.lemessurier.com/citigroup_center, à droite : pour la tour *Taipei 101*, image A. du Plessis, Wikimedia Commons CC BY 3.0)



sources : http://www.lemessurier.com/citigroup_center

3°) Pour la tour *Citicorp* à New-York (59 étages, 279 m de haut, ci-contre), la période des vibrations libres est de $T = 6,5$ s et laissée à elle-même l'amplitude des oscillations décroît de $r = 0,01 = 1\%$ par cycle. En déduire les expressions puis les valeurs numériques de la pulsation propre ω_0 et du pourcentage d'amortissement ε .

4°) Toujours pour la même tour, lorsque l'amplitude du déplacement est de $X = 0,5$ m, quelle est l'amplitude A de l'accélération. Donnez la valeur de celle-ci en pourcentage de l'accélération de la pesanteur $g = 9,81$ m/s².

La valeur précédente de l'accélération est suffisamment élevée et dure suffisamment longtemps pour que les occupants ressentent une nausée. Afin d'améliorer les choses, un système particulier est installé dans les étages supérieurs de la tour : une masse additionnelle $M = 400$ t est montée sur des patins lubrifiés, et reliée au mur par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient d'amortissement C , figure 49 (à gauche). L'ensemble du système oscillant est alors modélisé par un système à 2 degrés de liberté, figure 48 c : $x(t)$ est la position absolue du sommet de la tour, $y(t)$ est la différence de position de sorte que la position absolue de la masse M par rapport au sol soit $x(t) + y(t)$.

5°) Si la masse avait une très grande inertie, elle ne bougerait quasiment pas et on se trouverait dans le même cas qu'une suspension classique, figure 48 d.

5a) Quels seraient alors la raideur équivalente k_{eq} et l'amortissement équivalent C_{eq} ?

5b) Quelles seraient alors les nouvelles expressions des période d'oscillation libre T_0 et pourcentage de décroissance de l'amplitude par cycle r_0 ?

6°) On ne peut cependant pas immobiliser la masse M par rapport au sol, figure 48 c. Donner alors les équations du mouvement.

7°) L'objectif est de déterminer M , K et C pour limiter au maximum les oscillations libres. Cette optimisation, qui n'est pas demandée ici, conduit usuellement à avoir une pulsation propre ω_1 du seul système ajouté, égal à ω_0 de la tour seule. Si on note $\mu = M/m$, l'optimisation arrive à un pourcentage d'amortissement du seul système ajouté $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{2}$, et à un pourcentage d'amortissement apparent (quand on regarde le seul mouvement de la tour) $\varepsilon_{eq} = \varepsilon + \frac{\sqrt{\mu}}{4}$.

Avec ce choix, en déduire les expressions de M , K , C et du nouveau pourcentage de décroissance par cycle r_1 de la tour, en fonction des données (m, k, c) , de ω_0 et de μ .

Application numérique pour r_1 dans le cas de la *Citicorp* pour laquelle $\mu = 0,0143$.

Une autre conception est celle de la tour *Taipei 101* à Taiwan (101 étages, 508 m de haut — c'est la deuxième plus haute tour du monde, ci-dessous). Dans celle-ci une masse sphérique de $M = 660$ t est suspendue au bout de câbles de longueur L et liée à la tour par des amortisseurs, **figure 48 e** et **figure 49** à droite. On conserve la même modélisation pour la tour seule (m, k, c).

8°) La **figure 48 f** montre ce système dans une position y . Avec un angle θ petit, et l'accélération de la pesanteur \vec{g} , quelle est l'expression de la force F agissant sur la boule à l'horizontale et qui tend à la ramener en position $y = 0$?

Montrer alors que ce système est équivalent à un ressort de raideur K dont vous donnerez l'expression en fonction des données. Pour avoir une fréquence propre de ce seul système ω_1 égale à ω_0 , comment doit-on choisir K ? Application numérique pour L sachant que la période d'oscillation libre de la tour *Taipei 101* est de $T = 6,8$ s.

9°) Pour la tour *Taipei 101*, on a $\mu = 0,013$. En déduire les expressions puis les valeurs numériques de C et de r_1 .

10°) Dans cette question, on prendra pour la tour *Taipei 101* sans la masse M le pourcentage d'amortissement $\varepsilon = 0,016$. On considère maintenant une sollicitation harmonique forcée, et on s'intéresse donc à l'amplitude des vibrations forcées de la tour.

10a) Sans la masse M , quel serait la valeur maximale de la fonction de transfert en déplacement ? Application numérique.

10b) Avec le système ajouté, lorsque la sollicitation harmonique s'applique sur l'extérieur de la tour, on a les deux fonctions de transfert en déplacement H_x pour l'amplitude du déplacement $x(t)$ de la tour et H_y pour l'amplitude du déplacement $y(t)$ de M par rapport à la tour, **figure 50**. Si l'amplitude maximale de la tour sans la masse M pouvait être de 0,5 m, quelle est-elle maintenant ? Quelle est alors l'amplitude maximale de déplacement de la masse M dans la tour ? Conclusion sur ces deux valeurs.

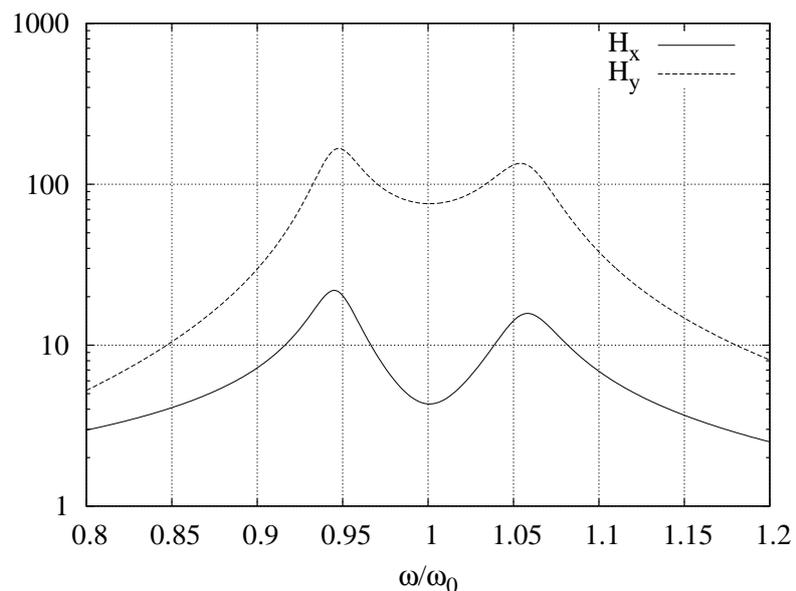
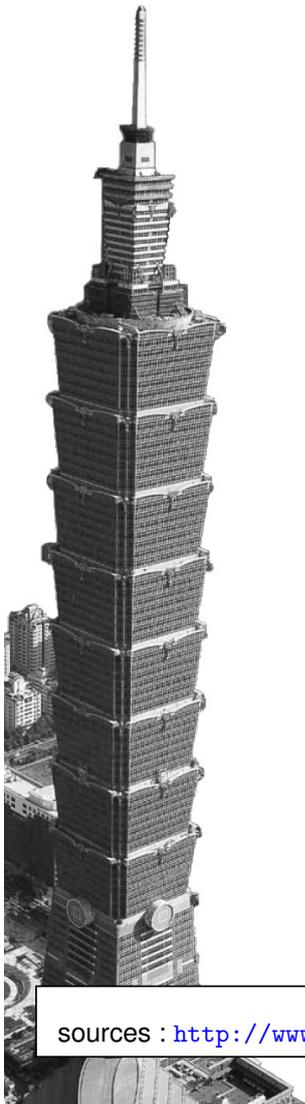


FIGURE 50 – Fonctions de transfert

sources : <http://www.motioneering.ca>, <http://www.vibrationdata.com>, *Structure Magazine*, vol. 41, 2006

Exercice 25. Vibrophore et endurance de pièces de faible raideur*

Un dispositif spécial de mesure d'endurance (fatigue à grand nombre de cycles) sur des pièces de faible raideur (en l'occurrence, des soufflets alliage nickel de $50 \mu\text{m}$ d'épaisseur)¹⁴ est étudié ici. Comme des millions de cycles doivent être testés, la sollicitation est dynamique pour limiter la durée des essais : la machine de test est un Vibrophore résonant, et un montage particulier a été réalisé, qui est sollicité à la première fréquence propre du système complet. Les soufflets à tester ont une raideur $k_b = 2,65 \text{ N/mm}$ et un débattement en service d'amplitude maximale $U_b = 0,5 \text{ mm}$.

Le vibrophore est un dispositif comprenant, entre autres, une cellule de mesure d'effort, modélisée par un ressort de raideur $k_1 = 84 \text{ kN/mm}$ et un dispositif d'application d'effort modélisé par un ressort de raideur $k_a = 2,6 \text{ kN/mm}$ et permettant d'appliquer un effort $f(t) = F_a \cos(\omega t)$, figure 51.

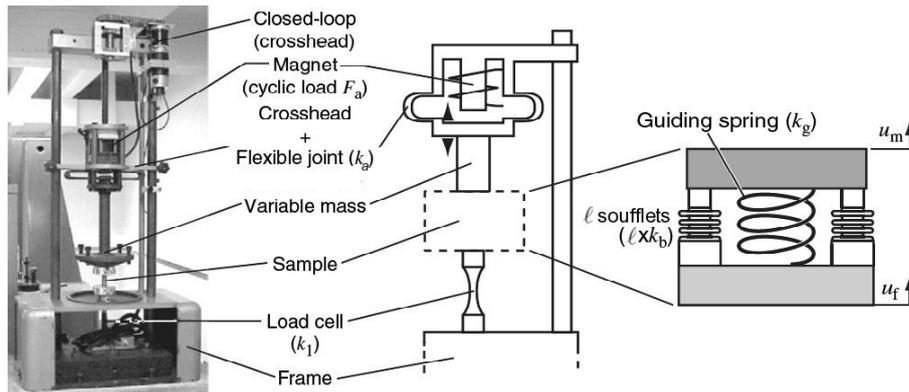


FIGURE 51 – Vibrophore et son montage dédié (d'après la référence citée)

Le montage est lui-même constitué d'une série de ℓ soufflets à tester ($\ell = 10$), d'un ressort k_g , d'un amortisseur c , et de plateaux de masses $m_f = 33 \text{ kg}$ et $m = 42,5 \text{ kg}$, figure 52(a).

Dans toute la suite, on négligera la pesanteur et on supposera que la raideur des soufflets k_b est négligeable devant k_g . Les degrés de liberté sont les positions verticales u_m et u_f des plateaux ; il s'agit donc d'un modèle à deux degrés de liberté.

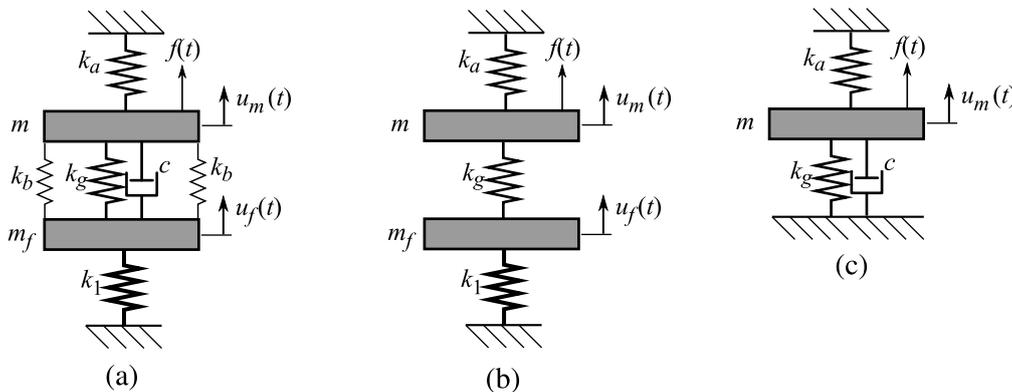


FIGURE 52 – Différents modèles du même système

Dans un premier temps, on néglige l'amortissement ($c = 0$) et le modèle considéré est celui de la figure 52(b).

1°) Écrire les équations du mouvement en appliquant le principe fondamental de la dynamique successivement à m_f et à m . Montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme $M\ddot{U} + KU = F$ où $U = \begin{bmatrix} u_f \\ u_m \end{bmatrix}$ où vous préciserez les matrices M , K et le terme F .

14. O. Arnould and F. Hild, High-cycle fatigue device for low stiffness components, *Experimental Techniques* :17-25, 2008. doi : 10.1111/j.1747-1567.2007.00292.x

2°) Les fréquences propres de vibration libre du système précédent peuvent être calculées. Pour la plus basse des pulsations propres, Ω , l'expression de son carré est donnée (on ne demande pas de retrouver cette expression) par :

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_g \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_f} \right) \right] - \frac{1}{2} \sqrt{\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_g \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_f} \right) \right]^2 - 4 \left[\omega_1^2 \omega_2^2 + k_g \left(\frac{\omega_1^2}{m} + \frac{\omega_2^2}{m_f} \right) \right]}$$

avec $\omega_1^2 = k_1/m_f$ et $\omega_2^2 = k_a/m$.

2a) Un résultat d'essai de chargement quasi-statique (f varie très lentement) donne une courbe effort f_g en fonction de $u_m - u_f$ représentée sur la figure 53. L'effort f_g est directement celui du ressort k_g sur un plateau (il a été mesuré avec une cellule d'effort supplémentaire). Déduire de ces résultats d'essai la valeur numérique de la raideur k_g . Comparez-la avec celle des ℓ soufflets. Conclusion ?

2b) Application numérique pour Ω . Donner la valeur de la fréquence associée à Ω . Avez-vous une remarque sur cette dernière valeur ?

2c) La machine est prévue pour fonctionner à la pulsation propre $\omega = \Omega$. Avec le modèle utilisé dans cette partie, quel serait l'amplitude de vibration du système ? (répondre sans calcul)

La valeur k_g précédente pose un problème, et elle est en conséquence modifiée pour une valeur $k_g = 13,7$ kN/mm que vous prendrez dans toute la suite. Pour cette valeur de k_g , on obtient $\Omega = 577$ rad/s (qu'on ne demande pas de recalculer). On supposera maintenant qu'il y a effectivement un amortissement c faible, mais non nul, figure 52(a).

3°) Écrire les équations du mouvement avec amortissement. Vous les mettrez sous la forme $M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = f$ où vous préciserez les différents termes.

Une hypothèse supplémentaire va être faite dans la suite : si la raideur k_1 est suffisamment grande, on peut supposer que $u_f(t) = 0$ et le modèle se réduit à celui d'un système à un seul degré de liberté, u_m , figure 52(c). Dans ce cas Ω est la seule pulsation propre du système.

4°) Un nouvel essai de qualification du dispositif est utilisé : on remplace les soufflets par un petit système instrumenté, de raideur $k_0 = 5$ N/mm, qui mesure l'effort qui s'applique sur lui : $f_0 = k_0(u_m - u_f)$, et qui est reporté sur la figure 54 en fonction de la fréquence de sollicitation $\omega/(2\pi)$ qu'on fait maintenant varier.

4a) Quelle est la pulsation propre mesurée ? Comparez-la à la valeur théorique donnée.

4b) Quelle est la valeur maximale F_{\max} de l'amplitude de f_0 mesurée ? On cherche à déterminer l'amortissement à partir de la largeur du pic de résonance de la réponse. On définit pour cela la largeur $\Delta\omega$ comme la largeur du pic en pulsation propre à l'altitude $F = F_{\max}/9$. On peut montrer que dans le cas d'un amortissement faible (on ne demande pas de le montrer ici) : $\Delta\omega/\Omega = 18\varepsilon$. À partir de la figure 54, déterminer la valeur de ε . En déduire la valeur de c .

4c) Avec la valeur de ε précédente, l'hypothèse d'amortissement faible est-elle vérifiée ? Avec cet amortissement, quelle est la valeur de la pulsation propre amortie ? Comparez-la avec la valeur de Ω . Conclusion ?

5°) Pour le système à un degré de liberté (figure 52(c)), sollicité à sa fréquence propre, quelle amplitude d'effort F_a faudra-t-il pour avoir une amplitude de déplacement $U_a = U_m - U_f$ de 0,5 mm ?

6°) Pour valider ou non l'hypothèse précédente ($u_f = 0$), on revient au système à deux degrés de liberté de la figure 52(a). Une modélisation numérique de ce modèle permet de trouver des solutions en vibration libre, pour la plus basse fréquence, de la forme $e^{-12,9t}(A \cos(577t) + B \sin(577t))$ où A et B sont deux constantes indéterminées, et où tous les coefficients ont pour unité l'inverse de la seconde. En déduire les valeurs de Ω et du pourcentage d'amortissement ε associés. Comparez-les à ceux obtenus par le modèle à 1 degré de liberté. Conclusion ?

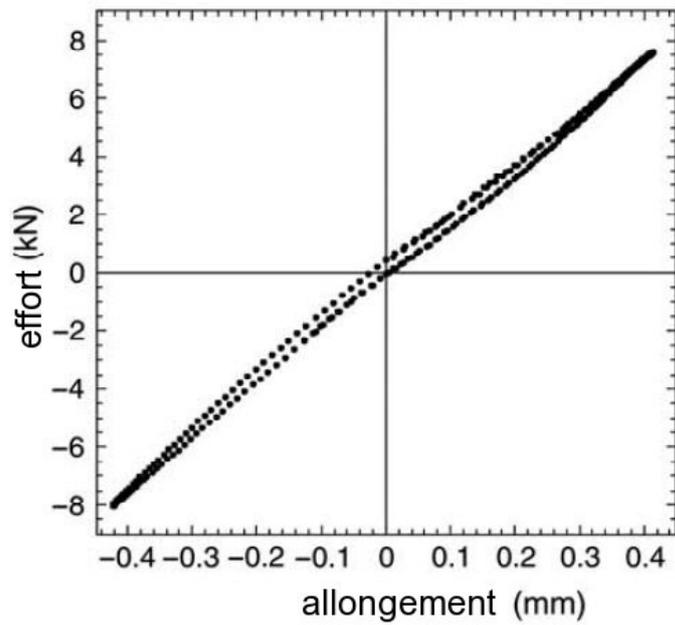


FIGURE 53 – Essai de chargement statique sur le ressort k_g

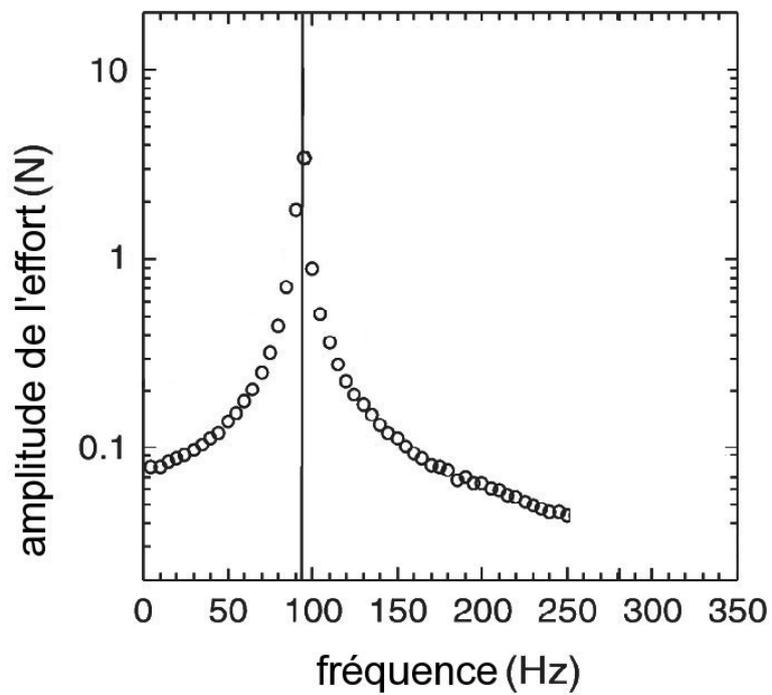


FIGURE 54 – Essai de chargement dynamique

4 Vibrations des systèmes discrets à 1 degré de liberté – formulaire

1. Solution générale en vibrations libres

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

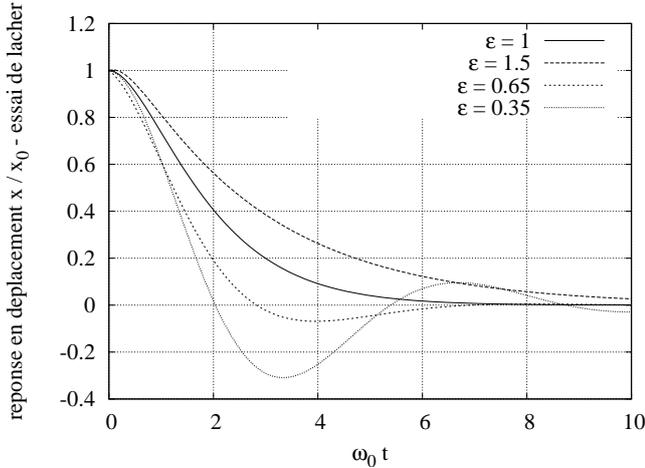
amortissement critique : $c_c = 2\sqrt{km}$,

pourcentage d'amortissement : $\varepsilon = \frac{c}{c_c}$

3 cas sont à distinguer :

- amortissement faible : si $\varepsilon < 1$,
 $x = e^{-\varepsilon\omega_0 t} (A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t))$
 pulsation propre amortie $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$
- amortissement fort : si $\varepsilon > 1$,
 $x = A e^{-\varepsilon\omega_0(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}})t} + B e^{-\varepsilon\omega_0(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}})t}$
- amortissement critique : si $\varepsilon = 1$,
 $x = (At + B)e^{-\omega_0 t}$

A et B sont des constantes.



2. Solution forcée en régime harmonique

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F}{m} \cos(\omega t)$$

(même chose avec sin, cela correspond juste à un décalage d'origine temporelle)

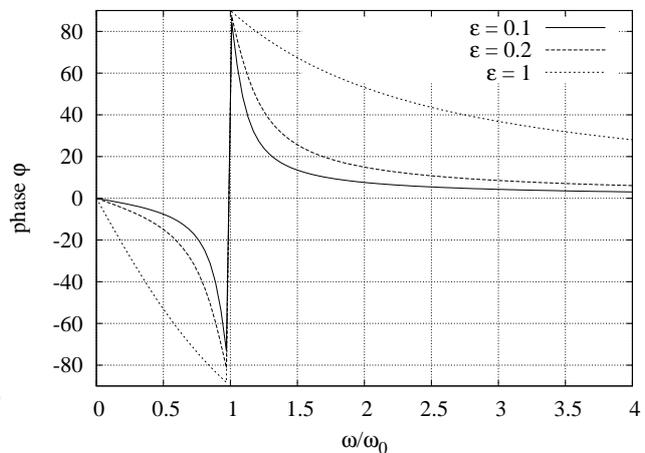
$x = X \cos(\omega t + \phi)$ d'amplitude X
 $\dot{x} = -X\omega \sin(\omega t + \phi)$ d'amplitude $X\omega$
 $\ddot{x} = -X\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$ d'amplitude $X\omega^2$

déphasage ϕ : $\tan \phi = -\frac{2\varepsilon\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

fonction de transfert en déplacement : $\frac{X}{F/k} = H_D(\omega)$

fonction de transfert en vitesse : $\frac{X\omega}{F/c} = H_V(\omega)$

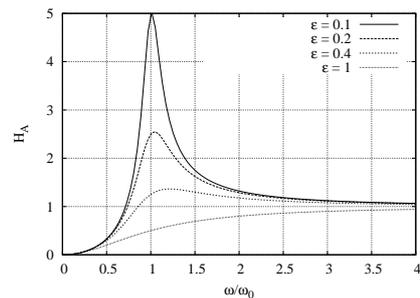
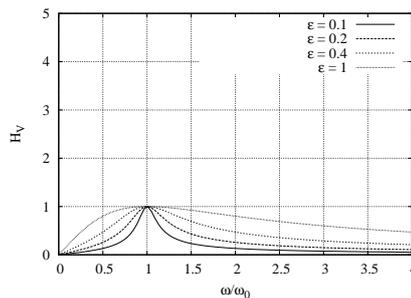
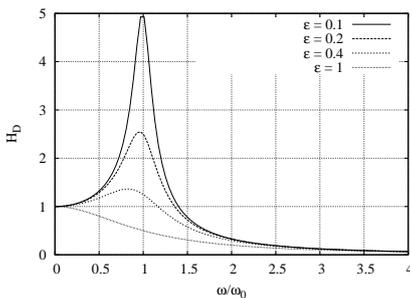
fonction de transfert en accélération : $\frac{X\omega^2}{F/m} = H_A(\omega)$



$$H_D(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_0^2\omega^2}}, \text{ de max } \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ atteint en } \omega = \omega_0\sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \text{ (si } \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ sinon, } H_D(0) = 1).$$

$$H_V(\omega) = 2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0} H_D(\omega) \text{ dont le maximum vaut 1, et est atteint en } \omega = \omega_0$$

$$H_A(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_D(\omega), \text{ de max } \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ atteint en } \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}} \text{ (si } \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ sinon, } H_D(\infty) = 1).$$



3. Solution générale transitoire = solution générale en vibrations libres + solution particulière forcée

Références

- [1] Pierre Agati, Gérard Delville, and Yves Brémont. *Mécanique du solide*. Sciences Sup. Dunod, 2^e édition, 2003.
- [2] Jean Boistel de Belloy, Michèle Delannoy, Paul Rougée, and Nicole Toupance. *Exercices et problèmes de mécanique : Torseurs, cinématique, cinétique*. Exercices et problèmes de mécanique générale. Vuibert, 1982.
- [3] Jean-Claude Bône, Jeannine Morel, Michel Boucher, and Bone. *Mécanique générale : Cours et applications avec exercices et problèmes résolus*. Sciences Sup. Dunod, 1994.
- [4] Roger Boudet and Alain Chauvin. *Mécanique – éléments de mécanique rationnelle : cours, exercices et corrigés*. Hermes Science Publications, 1997.
- [5] Claude Chèze and Hélène Lange. *Mécanique générale : Cours, exercices et problèmes corrigés*. Ellipses, 1998.
- [6] Roland Cravero. *Éléments de mécanique classique et statique*. Eyrolles, 1988.
- [7] Marcel Gaillard and Jean Claude Raffy. *Mécanique générale*. Eyrolles, 1990. Tomes I et II.
- [8] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Collection Physique fondamentale et appliquée. Masson, 1996.
- [9] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson, 3^e édition, 2001.
- [10] Christian Lalanne. *Vibrations et chocs mécaniques*, volume 1. Hermès, 1999.
- [11] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. Electronic and electrical engineering series. McGraw-Hill, 1986.
- [12] Jean Jacques Moreau. *Mécanique classique*. Enseignement Supérieur : Premier cycle et Écoles d'Ingénieurs. Masson, 1971.
- [13] M. D. Pedro and P. Pahud. *Mécanique vibratoire : systèmes discrets linéaires*. Mécanique (Lausanne). Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.
- [14] J. Pérès. *Mécanique générale*. 4^e édition, 1994.
- [15] José-Philippe Pérez. *Mécanique : fondements et applications – Avec 320 exercices et problèmes résolus*. Dunod, 7^e édition, 2014.
- [16] Sylvie Pommier and Yves Berthaud. *Mécanique générale*. Dunod, 2010.
- [17] M. Roseau. *Vibrations des systèmes mécaniques : méthodes analytiques et applications*. Masson, 1984.
- [18] Paul Rougée. *Mécanique Générale*. Vuibert Université, 1982.
- [19] Francisque Salles and Claude Lesueur. *Les vibrations mécaniques*, volume 1. Masson, 1972.

N.B. Certaines références sont un peu anciennes... Elles correspondent à des ouvrages que j'ai utilisés, ou leurs auteurs sont des collègues que j'ai croisés.