Notes de programmation (C) et d'algorithmique

Roberto M. Amadio

Notes de programmation (C) et d'algorithmique

Roberto M. Amadio
Université Paris Cité

16 mars 2023

Table des matières

I Bases de la programmation (en C) 9

1 Introduction 11
1.1 Algorithmes et programmes . . . 11
1.2 Structure et interprétation d'un programme C . . . 14
1.3 Compilation, exécution et erreurs . . . 18

2 Types atomiques 21
2.1 Entiers . . . 21
2.2 Booléens . . . 23
2.3 Flottants . . . 23
2.4 Entrées-sorties . . . 26
2.5 Conversions implicites et explicites . . . 27

3 Contrôle 29
3.1 Commandes de base et séquentialisation . . . 29
3.2 Branchement . . . 30
3.3 Boucles . . . 31
3.4 Rupture du contrôle . . . 33
3.5 Aiguillage switch . . . 34
3.6 Énumération de constantes . . . 34

4 Fonctions 35
4.1 Appel et retour d'une fonction . . . 35
4.2 Portée lexicale . . . 36
4.3 Argument-résultat, Entrée-sortie . . . 37
4.4 Méthode de Newton-Raphson . . . 38
4.5 Intégration numérique . . . 39
4.6 Conversion binaire-décimal . . . 39

5 Fonctions récursives 43
5.1 Évaluation de polynômes . . . 43
5.2 Tour d'Hanoï . . . 45
5.3 Suite de Fibonacci . . . 46

6 Tableaux 49
6.1 Déclaration et manipulation de tableaux . . . 49
6.2 Passage de tableaux en argument . . . 50
6.3 Primalité et factorisation . . . 51
6.4 Tableaux à plusieurs dimensions . . . 53

7 Tri et permutations 55
7.1 Tri à bulles et par insértion . . . 55
7.2 Tri par fusion . . . 56
7.3 Permutations . . . 59

8 Types structure et union **63**
8.1 Structures . . . 63
8.2 Rationnels . . . 64
8.3 Points et segments . . . 65
8.4 Unions . . . 67

9 Pointeurs **69**
9.1 Pointeurs de variables . . . 69
9.2 Pointeurs de tableaux . . . 70
9.3 Pointeurs de char . . . 71
9.4 Fonctions de fonctions et pointeurs de fonctions . . . 72
9.5 Fonctions génériques et pointeurs vers void . . . 73
9.6 Pointeurs de fichiers . . . 75

10 Listes et gestion de la mémoire **77**
10.1 Listes . . . 77
10.2 Allocation de mémoire . . . 78
10.3 Récupération de mémoire . . . 79
10.4 Tri par insertion avec des listes . . . 79
10.5 Ensembles finis comme listes . . . 80

11 Piles et queues **83**
11.1 Piles et queues . . . 83
11.2 Modularisation . . . 85
11.3 Applications . . . 86

12 Preuve et test de programmes **89**
12.1 Preuve d'algorithmes . . . 89
12.2 Terminaison . . . 91
12.3 Preuve de programmes . . . 93
12.4 Test de programmes . . . 94

13 Complexité asymptotique **97**
13.1 *O*-notation . . . 97
13.2 Opérations arithmétiques . . . 99
13.3 Tests de correction et de performance . . . 101
13.4 Variations sur la notion de complexité . . . 103

14 Problèmes **105**
14.1 Chiffrement par permutation . . . 105
14.2 Chaînes additives . . . 106
14.3 Remplissages de grilles . . . 107
14.4 Tournoi à élimination directe . . . 109
14.5 Motifs et empreintes . . . 110

II Algorithmique **113**

15 La structure de données tas (*heap*) **115**
15.1 Arbres binaires . . . 115
15.2 Tas et opérations sur le tas . . . 117
15.3 Applications . . . 118
15.4 Problème . . . 120
15.4.1 Un tas en dimension 2 . . . 120

16 Diviser pour régner et relations de récurrence **121**
16.1 Problèmes et relations de récurrence . . . 121
16.2 Solution de relations de récurrence . . . 123
16.3 Problème . . . 126
16.3.1 Recherche des deux points les plus rapprochés . . . 126

17 Transformée de Fourier rapide **129**
17.1 Polynômes et matrice de Vandermonde . . . 129
17.2 Le cercle unitaire complexe . . . 131
17.3 Transformée rapide . . . 132
17.4 Problème . . . 134
17.4.1 Transformée de Fourier dans un corps fini . . . 134

18 Algorithmes probabilistes **135**
18.1 Probabilité de terminaison et temps moyen de calcul . . . 135
18.2 Tri rapide (*quicksort*) . . . 140
18.3 Test de primalité . . . 143
18.4 Identité de polynômes . . . 146
18.5 Problèmes . . . 148
18.5.1 Majorité . . . 148
18.5.2 Tests probabilistes et polynômes . . . 148

19 Arbres binaires de recherche **151**
19.1 Opérations . . . 151
19.2 Hauteur moyenne d'un arbre . . . 152
19.3 Problèmes . . . 154
19.3.1 Arbres binaires de recherche et tableaux . . . 154
19.3.2 Calcul du centre d'un arbre . . . 154

20 Tables de hachage **157**
20.1 Fonctions de hachage . . . 157
20.2 Tables de hachage avec chaînage . . . 158
20.3 Tables de hachage avec adressage ouvert . . . 160
20.4 Problèmes . . . 162
20.4.1 Analyse d'une fonction d'hachage . . . 162
20.4.2 Table de hachage et n-grammes . . . 162

21 Listes à enjambements (*skip lists*) **165**
21.1 Listes à enjambements . . . 165
21.2 Approche probabiliste . . . 166
21.3 Analyse . . . 167
21.4 Borne de Chernoff . . . 169

22 Algorithmes gloutons **171**
22.1 Sous-séquence contiguë maximale . . . 171
22.2 Compression de Huffman . . . 173
22.3 Problèmes . . . 176
22.3.1 Affectation stable . . . 176
22.3.2 Optimisation de requêtes . . . 177

23 Programmation dynamique **179**
23.1 Techniques de programmation . . . 179
23.2 Calcul d'une plus longue sous-séquence commune . . . 180
23.3 Algorithme CYK . . . 182
23.4 Problèmes . . . 186
23.4.1 Plus longue sous-séquence croissante . . . 186
23.4.2 Distance d'édition . . . 186

24 Graphes **189**
24.1 Représentation . . . 189
24.2 Visite d'un graphe . . . 191
24.3 Visite en largeur et distance . . . 192
24.4 Visite en profondeur et tri topologique . . . 193
24.5 Problèmes . . . 195
24.5.1 Clôture transitive . . . 195
24.5.2 Diagrammes de décision binaire . . . 196

25 Graphes pondérés **199**
25.1 Algorithme de Prim pour le recouvrement minimum . . . 199
25.2 Algorithme de Dijkstra pour les plus courts chemins . . . 200
25.3 Une autre application de la structure tas (cas de Dijkstra) . . . 201
25.4 Problème . . . 202
25.4.1 Algorithme de Kruskal pour le calcul d'un arbre de recouvrement . . . 202

26 Flot maximum et coupe minimale **205**
26.1 Flots et coupes . . . 205
26.2 Chemin augmentant et graphe résiduel . . . 207
26.3 Problèmes . . . 211
26.3.1 Problème de circulation et flot maximum . . . 211
26.3.2 Mise en oeuvre du calcul du flot maximum . . . 212

III Optimisation linéaire **213**

27 Optimisation linéaire **215**
27.1 Optimisation convexe et linéaire . . . 215
27.2 Modélisation . . . 217
27.3 Élimination de Fourier-Motzkin . . . 221
27.4 Dualité . . . 223
27.5 Problèmes . . . 224
27.5.1 Interpolation en norme ∞ . . . 224
27.5.2 Un problème de production . . . 224
27.5.3 Un problème de séparation . . . 225
27.5.4 Mise en oeuvre de la méthode de Fourier-Motzkin . . . 225
27.5.5 Lemme de Farkas . . . 226
27.5.6 Recette pour le problème dual . . . 227
27.5.7 Preuve dualité forte . . . 227

28 Algorithme du simplexe **229**
28.1 Forme équationnelle (ou standard) et solutions basiques . . . 229
28.2 D'une solution basique à une autre . . . 231
28.3 Vue matriciale du pivot et solution duale . . . 233
28.4 Solution basique initiale . . . 235
28.5 Complexité . . . 236
28.6 Problèmes . . . 237
28.6.1 Écart complémentaire . . . 237
28.6.2 Jeux à somme nulle et théorème minimax . . . 237
28.6.3 Mise en oeuvre simplexe . . . 238
28.6.4 Recherche solution basique initiale . . . 239
28.6.5 Algorithme dual . . . 239

29 Optimisation linéaire en nombres entiers **241**
29.1 Modélisation 241
29.2 Contraintes en nombres entiers et relâchement 244
29.3 Unimodularité 245
29.4 Systèmes d'équations linéaires en nombres entiers 249
29.5 Enveloppe convexe et formulations 252
29.6 Méthode par séparation et évaluation 254
29.7 Méthode des plans sécants 256
29.8 Problèmes 258
29.8.1 Affectation quadratique 258
29.8.2 Forme normale d'Hermite et transformations unitaires 259
29.8.3 Formulations pour l'arbre de recouvrement minimum 259
29.8.4 Problème du sac à dos 260
29.8.5 Plans sécants 262
29.8.6 Logistique du dernier kilomètre 262

Bibliographie **267**

Index **269**

Première partie

Bases de la programmation (en C)

Chapitre 1

Introduction

On introduit les notions d'algorithme et de programme et on discute la structure et l'interprétation d'un programme C. Il s'agit de deux sujets fondamentaux pour la suite du cours. On termine avec des notions pratiques sur la compilation et l'exécution de programmes.

1.1 Algorithmes et programmes

L'*informatique* (en tant que science) s'intéresse au traitement *automatique* de l'*information*.

En général, une *information* est codifiée par une suite finie de symboles qui varient sur un certain alphabet et, à un codage près de cet alphabet, on peut voir cette suite comme une suite de valeurs binaires (typiquement 0 ou 1). Par exemple, une information pourrait être la suite 'bab' qui est une suite sur l'alphabet français. Il existe un code standard, appelé code ASCII, qui code les symboles du clavier avec des suites de 8 chiffres binaires. En particulier, le code ASCII de 'a' est '01100001', le code ASCII de 'b' est '01100010' et en suivant ce codage la suite 'bab' est représentée par une suite de 24 valeurs binaires.

L'aspect *automatique* de l'informatique est lié au fait qu'on s'attend à que les *fonctions* qu'on définit sur un ensemble de données (les informations) soient *effectivement calculables* et même qu'elles puissent être mises-en-oeuvre dans les dispositifs électroniques qu'on appelle ordinateurs.

L'ensemble des suites finies de symboles binaires 0 et 1 est dénombrable (il est infini et en correspondance bijective avec l'ensemble des nombres naturels). Plus en général, l'ensemble des suites finies de symboles d'un alphabet fini (ou même dénombrable) est dénombrable.

Considérons maintenant l'ensemble des fonctions de type $f : D \to D'$ où D et D' sont des ensembles dénombrables. [1]

Un *algorithme* est une telle fonction pour laquelle *en plus* on peut préciser une *méthode de calcul*.

Exemple 1 *On dénote par* $\{0,1\}^*$ *l'ensemble des suites finies de* 0 *ou* 1 *(y compris la suite vide). Prenons* $D = D' = \{0,1\}^*$ *et associons à toute suite* $w = b_n \cdots b_0 \in D$ *un nombre naturel* $\langle w \rangle$ *défini par :*

$$\langle w \rangle = \Sigma_{i=0,\ldots,n} b_i \cdot 2^i \quad .$$

1. Ici par *fonction* on entend une relation binaire sur $D \times D'$ telle que pour tout $x \in D$ il existe *au plus* un $y \in D'$ tel que (x, y) est dans la relation.

Par exemple :

$$\langle 01010\rangle = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 = 2+8 = 10 \quad .$$

La suite w représente donc un nombre naturel en base 2. Tout nombre naturel peut être représenté de cette façon mais la représentation n'est pas *unique. Par exemple :*

$$\langle 10\rangle = \langle 010\rangle = \langle 0010\rangle = \cdots = \langle 0\cdots 010\rangle = 2 \quad .$$

Cependant, on peut obtenir l'unicité en se limitant aux suites de 0 et 1 qui ne commencent pas par 0. Si n est un nombre naturel, on dénote par $\lfloor n\rfloor$ la seule suite $w \in \{0,1\}^*$ telle que : (i) $\langle w\rangle = n$ et (ii) w ne commence pas par 0. [2] *On peut maintenant définir une fonction :*

$$f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \quad ,$$

telle que $f(w) = w'$ ssi $w' = \lfloor(\langle w\rangle)^2\rfloor$. Par exemple, si $w = 010$ on a $(\langle w\rangle)^2 = 2^2 = 4$ et $w' = 100$. A un codage près, on a défini la fonction carré sur les nombres naturels. Pour avoir un algorithme*, il faut encore préciser une méthode de calcul. La diagramme suivant illustre deux algorithmes possibles :*

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^* & \stackrel{mult_2}{\longrightarrow} & \{0,1\}^* \\ \downarrow_{conv(2,10)} & & \uparrow_{conv(10,2)} \\ \{0,\ldots,9\}^* & \stackrel{mult_{10}}{\longrightarrow} & \{0,\ldots,9\}^* \end{array}$$

Le premier algorithme prend la suite w en entrée, la voit comme un nombre binaire en base 2 et multiplie le nombre par lui même en adaptant à la base 2 l'algorithme pour la multiplication appris en primaire. Le deuxième algorithme convertit la suite w dans un nombre en base 10, multiplie ce nombre par lui même et enfin retrouve sa représentation binaire (on verra dans la suite du cours comment effectuer ces conversions). On peut donc associer deux algorithmes différents à la même fonction et plus en général on peut montrer que pour tout algorithme il y a un nombre dénombrable d'algorithmes qui sont équivalents dans le sens qu'ils calculent la même fonction.

Dans notre exemple, on a utilisé l'intuition des calculs appris en primaire pour spécifier l'algorithme (la méthode de calcul). Le lecteur sait que l'on peut effectuer les opérations arithmétiques sur des nombres de taille arbitraire à condition de disposer de suffisamment de papier, de crayons et de temps. Plus en général, on peut imaginer des 'machines' qui savent manipuler des chiffres, stocker des informations et les récupérer. Un *programme* est alors un algorithme qui est formalisé de façon à pouvoir être exécuté par une telle 'machine'. [3]

Exemple 2 *Considérons le problème de calculer le* produit scalaire *de deux vecteurs de taille n. Une première description de l'algorithme pourrait être la suivante :*

Entrée $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Calcul $s = 0$. *Pour $i = 1,\ldots,n$ on calcule $s = s + x_i y_i$.*

Sortie s.

2. Notez qu'avec cette convention $\lfloor 0\rfloor$ est la suite vide.

3. Un exemple particulièrement simple d'une telle machine est la *machine de Turing* qui a été formalisée autour de 1930 par Alan Turing.

Pour aller vers un programme*, il faut préciser une représentation des nombres entiers et des nombres réels. Les langages de programmation disposent de types prédéfinis. En particulier, en* C *on peut utiliser, par exemple, le type* int *pour représenter les entiers et le type* float *pour représenter les réels. Dans ces cas, un nombre est représenté avec un nombre limité de bits (typiquement avec* 32 *ou* 64 *bits) ; il faut donc savoir que les opérations arithmétiques dans le contexte de la programmation peuvent provoquer des* débordements*, et dans les cas des réels des* approximations *(*erreurs d'arrondi*) aussi. Par ailleurs, dans les langages de programmation on peut représenter les vecteurs par des* tableaux *(qu'on étudiera, dans les chapitre 6). Ainsi un programme* C *qui raffine l'algorithme ci-dessus pourrait être le suivant.*

```
1 double produit_scalaire(double x[], double y[], int n){
2     double s=0;
3     int i;
4     for(i=0;i<n;i++){
5         s=s+x[i]*y[i];}
6     return s;}
```

En résumant, un *algorithme* est une *fonction* avec domaine et codomaine dénombrable et avec une méthode de calcul qui précise pour chaque entrée comment obtenir une sortie. A ce stade, la méthode de calcul est typiquement décrite dans le langage semi-formel des mathématiques. Un *programme* est un algorithme qui est codifié dans le *langage de programmation* d'une machine. C'est une bonne pratique de passer de la fonction à l'algorithme et ensuite de l'algorithme au programme. Avec une *fonction* on spécifie le problème, avec un *algorithme* on développe une méthode de calcul (pour la fonction) en négligeant un certain nombre de détails et enfin avec le *programme* on peut vraiment exécuter la méthode de calcul sur une machine.

Digression 1 (théorie de la calculabilité) *Les notions d'algorithme, de modèle de calcul et de programme ont été développées autour de 1930 dans un cadre mathématique fortement inspiré par la logique mathématique qu'on appelle* théorie de la calculabilité*. Deux conclusions fondamentales de cette théorie sont :*

1. *Les modèles de calcul et les langages de programmation associés (du moins ceux considérés en pratique) sont équivalents dans les sens qu'ils définissent la même classe d'algorithmes (c'est la thèse de Church-Turing). Par exemple, pour tout algorithme codifié dans un programme* C *on a un algorithme équivalent codifié dans un programme* python *(et réciproquement).*
2. *Il n'y a qu'un nombre* dénombrable *de programmes et donc une très grande majorité des fonctions qu'on peut définir sur des ensembles dénombrables n'ont pas de méthode de calcul associée. Par exemple, il n'y pas de programme qui prend une assertion dans le langage de l'arithmétique et qui décide si cette assertion est vraie ou fausse. Et il est aussi impossible d'écrire un programme qui prend en entrée un programme* C *et décide si le programme termine ou pas.*

Digression 2 (théorie de la complexité) *Avec le développement des ordinateurs, on a cherché à cerner l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus de façon* efficace*. Comme on le verra dans la suite du cours (chapitre 13), la complexité d'un problème est une* fonction*. Par exemple, si on considère le problème de la multiplication de deux nombres naturels, on peut montrer que l'algorithme du primaire permet de multiplier deux nombres de n chiffres*

avec un nombre d'opérations élémentaires qui est de l'ordre de n^2*. On dit que la complexité de l'algorithme est (la fonction)* quadratique*. Plus en général, un algorithme polynomial est une méthode de calcul tel qu'il existe un polynôme* $p(n)$ *avec la propriété que la méthode sur une entrée de taille* n *effectue un nombre d'opérations élémentaires borné par* $p(n)$*. On appelle* théorie de la complexité *la branche de l'informatique théorique qui cherche à classifier la complexité des problèmes. Dans ce contexte, dans les années 1970 on a formulé le problème ouvert qui est probablement le plus important et certainement le plus célèbre de l'informatique. D'une certaine façon, la question est de savoir si* trouver *une solution d'un problème est beaucoup plus difficile que de* vérifier *sa correction. L'intuition suggère une réponse positive mais dans un certain cadre on est incapable de prouver le bien fondé de cette intuition. Le cadre est le suivant : existe-t-il un algorithme qui prend en entrée une formule* A *du calcul propositionnel et qui décide dans un temps polynomial dans la taille de* A *si* A *est satisfaisable ? Par exemple, si* $A = (\mathsf{not}(x)\ \mathsf{or}\ y)\ \mathsf{and}\ (x\ \mathsf{or}\ \mathsf{not}(y))$ *alors on peut satisfaire la formule avec l'affectation* $v(x) = \mathsf{true}$ *et* $v(y) = \mathsf{true}$*. Par contre, le lecteur peut vérifier que la formule* $B = (\mathsf{not}(x)\ \mathsf{or}\ y)\ \mathsf{and}\ (x\ \mathsf{or}\ \mathsf{not}(y))\ \mathsf{and}\ (\mathsf{not}(x)\ \mathsf{or}\ \mathsf{not}(y))\ \mathsf{and}\ (\mathsf{not}(x)\ \mathsf{or}\ y)$ *n'est pas satisfaisable. Pour toute affectation* v*, il est facile de* vérifier *si une formule* A *est vraie par rapport à l'affectation. Par ailleurs, pour savoir si une formule est satisfaisable on peut générer toutes les affectations et vérifier s'il y en a une qui satisfait la formule. Malheureusement, cette méthode n'est pas efficace car pour une formule avec* n *variables il faut considérer* 2^n *affectations (la fonction exponentielle* 2^n *croit beaucoup plus vite que n'importe quel polynôme). La question ouverte est donc de trouver un algorithme polynomial qui nous permet de décider si une formule est satisfaisable ou de montrer qu'un tel algorithme n'existe pas.* [4]

1.2 Structure et interprétation d'un programme C

Le langage C

Ce qui suit est une description à haut niveau du langage C qui suppose un lecteur qui a déjà une certaine expérience de programmation. A défaut, on retiendra un certain nombre de termes techniques dont la signification deviendra plus claire dans la suite du cours.

Le langage C a été conçu autour de 1970 dans le but d'écrire un système d'exploitation (qui deviendra le système Unix) en utilisant C plutôt qu'un langage assembleur, ce qui est bénéfique pour la portabilité du système. Il s'agit d'un *langage impératif* dans le style des langages Algol et Pascal. Le calcul est donc organisé autour de l'exécution de *commandes* qui modifient la *mémoire*. Il se distingue de ses prédécesseurs par la possibilité d'effectuer des *opérations de bas niveau sur la mémoire* (arithmétique de pointeurs) ; ce qui est une source potentielle d'*efficacité* et d'*erreurs*. Par rapport à ses successeurs (C++, Java,...), on notera l'absence d'un mécanisme pour combiner types de données et opérations et d'un système automatique de récupération de mémoire (on dit aussi ramasse miettes ou *garbage collector*, en anglais).

4. On dit aussi que le problème est de savoir si la classe NP est identique à la classe P des problèmes qui admettent un algorithme polynomial. Intuitivement, la classe NP est la classe des problèmes dont la solution peut être vérifiée en temps polynomial. A priori NP contient P et le problème est de savoir si l'inclusion est stricte.

Syntaxe et sémantique

En général, dans un langage la *syntaxe* est un ensemble de règles qui permettent de produire des phrases admissibles du langage et la *sémantique* est une façon d'attacher une signification aux phrases admissibles du langage.

Dans le cas des langages de programmation, on a besoin de règles pour écrire des programmes qui seront acceptés par la machine et aussi d'une méthode pour déterminer la sémantique à savoir la fonction calculée par le programme. On aura l'occasion de revenir sur les détails de la syntaxe dans la suite du cours. Pour l'instant, on souhaite esquisser une méthode pour calculer le comportement d'un programme (sa sémantique).

En première approximation, la sémantique d'un programme C (et plus en général d'un langage impératif) s'articule autour de 6 concepts : mémoire, environnement, variable, fonction, bloc d'activation (*frame* en anglais) et pile de blocs d'activation.

Pour décrire l'exécution d'un programme qui est essentiellement composé d'une seule fonction qui ne s'appelle pas récursivement on peut se concentrer sur les premiers 3 concepts et sur la notion de *compteur ordinal*; un compteur ordinal est une composante d'un bloc d'activation qui contient l'adresse de la prochaine instruction de la fonction qu'il faut exécuter.

Mémoire Une fonction qui associe des *valeurs* aux *adresses de mémoire*. Il est possible de :
- *allouer* une valeur à une nouvelle adresse,
- *lire* le contenu d'une adresse de mémoire,
- *modifier* le contenu d'une adresse de mémoire,
- *récupérer* une adresse de mémoire pour la réutiliser.

Environnement Dans un langage de programmation de 'haut niveau' on donne des *noms symboliques* aux entités qu'on manipule (une constante, une variable, une fonction,...) Un *environnement* est aussi une fonction qui associe à chaque nom du programme une entité (une valeur, une adresse mémoire, un segment de code,...) Environnement et mémoire sont liés. Par exemple, dans une commande de la forme $\mathsf{x} = \mathsf{10}$, on associe au nom x une nouvelle adresse de mémoire ℓ (modification de l'environnement) et à l'adresse de mémoire ℓ la valeur 10 (modification de la mémoire).

Variable Un *nom* qui est associé à une *adresse de mémoire* (on dit aussi location ou référence) qui contient éventuellement une *valeur*. Dans un langage *impératif* comme C la valeur peut être modifiée plusieurs fois pendant l'exécution. Il ne faut pas confondre les variables au sens mathématique avec les variables au sens informatique.

Exemple 3 *On considère le programme suivant qui reprend l'exemple 2 et qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs fixés. Le programme en question contient les variables* x, y, s *et* i. *Au début de l'exécution on associe aux variables* x *et* y *deux adresses de mémoires dans lesquelles on mémorise les valeurs vectorielles* $(1, 4)$ *et* $(-4, 5)$. *Ensuite, on initialise la variable* s *avec la valeur* 0 *et on entre dans une 'boucle* for*' dans laquelle on itère l'exécution d'une affectation en faisant varier la variable* i *entre* 0 *et* 1. *L'exécution d'une affectation commence par déterminer la valeur associée à l'expression à droite de l'affectation (symbole =) et associe cette valeur à la variable à gauche de l'affectation. Dans le cas en question, à chaque itération on peut modifier la valeur associée à la variable* s. *Enfin, à la sortie de la boucle, on imprime la valeur associée à* s *et on termine.*

```
1 void main(){
2     double x[2]={1,4};
3     double y[2]={-4,5};
4     double s=0;
5     int i;
6     for(i=0;i<2;i++){
7         s=s+x[i]*y[i];}
8     printf("%d\n", s);}
```

En pratique, tout programme intéressant se décompose en plusieurs fonctions qui s'appellent mutuellement et pour comprendre son exécution il est nécessaire d'introduire les 3 concepts suivants.

Fonction Un *segment de code* qu'on peut exécuter simplement en invoquant son nom. Souvent une fonction prend des *arguments* et rend un *résultat*. Dans un langage *impératif* comme C, le résultat rendu dépend à la fois des arguments et du contenu de la mémoire. Comme pour les variables, il convient de ne pas confondre les fonctions mathématiques avec les fonctions informatiques.

Bloc d'activation Un *vecteur* qui contient :
- un nom de fonction,
- ses paramètres (arguments, variables locales),
- le compteur ordinal.

Pile de blocs d'activation L'ordre de la pile correspond à l'ordre d'appel. Le bloc le plus profond dans la pile est le plus ancien. Quand on appelle une fonction on empile son bloc d'activation et quand on retourne d'une fonction on élimine le bloc d'activation au sommet de la pile.

Exemple 4 *On illustre l'utilisation de ces concepts dans l'exemple suivant d'un programme* C *qui calcule le plus grand commun diviseur (pgcd) d'après l'algorithme d'Euclide. On rappelle que si* a, b *sont des entiers avec* $b > 0$ *alors ils existent uniques* q *et* r *tels que* $0 \leq r < b$ *et*

$$a = b \cdot q + r \quad .$$

On appelle q *le quotient ou la division entière de* a *par* b *et* r *le reste qu'on dénote aussi par* $a \bmod b$*. En supposant* a, b *entiers avec* $b > 0$ *on a la propriété suivante :*

$$pgcd(a,b) = \begin{cases} b & si\ a \bmod b = 0 \\ pgcd(b, a \bmod b) & autrement. \end{cases}$$

En C*, l'opération de quotient est dénotée par* / *et celle de reste par* %*. Voici un programme pour le* pgcd*. A noter qu'en* C*, on peut avoir* $-6/4 = -1$ *et* $-6\%4 = -2$*; si l'on veut que l'expression* $a\%b$ *calcule le module il convient de supposer que* $a \geq 0$*.*

```
1 #include <stdio.h>
2 void lire(int *p){
3     printf("Entrez un entier positif:");
4     scanf("%d",p);}
5 int pgcd(int a,int b){
6     int mod=a%b;
7     if (mod==0){
```

PILE FRAMES	MEMOIRE
main()	
a->l1, b->l2	
lire(l1)	
p->l3	l3->l1, l1->6
fin_lire	
lire(l2)	
p->l4	l4->l1, l2->4
fin_lire	
resultat->l5	
pgcd(6,4)	
a->l6, b->l7	l6->6, l7->4
mod->l8,	l8->2
pgcd(4,2)	
a->l9, b->l10	l9->4, l10->2
mod->l11	l11->0
fin_pgcd 2	
fin_pgcd 1	
	l5->2
fin_main	

TABLE 1.1 – Trace de l'exécution du programme avec entrées 6 et 4

```
8           return b;}
9       else{
10          return pgcd(b,mod);}}
11  void main(){
12      int a, b;
13      lire(&a);
14      lire(&b);
15      int resultat;
16      resultat = pgcd(a,b);
17      printf("le pgcd est %d\n",resultat);}
```

Ce programme commence avec une directive au compilateur pour inclure les fonctions de bibliothèque contenues dans stdio.h. *Parmi ces fonctions, on trouve les fonctions* printf *et* scanf *qu'on utilisera dans le cours pour imprimer et lire des valeurs.*

Le programme comporte 3 *fonctions :* lire, pgcd *et* main. *L'*interface *(ou* en tête*) de chaque fonction précise le type du résultat et les noms et types des arguments de la fonction. Par exemple, la fonction* pgcd *rend un résultat de type* int *et attend deux arguments de type* int *dont les noms sont* a *et* b. *La table 1.1 décrit l'exécution du programme en supposant que l'utilisateur rentre les valeurs* 6 *et* 4. *Chaque instant du calcul est décrit par la pile des blocs d'activation et le contenu de la mémoire.*

La table 1.1 décrit l'exécution du programme en supposant que l'utilisateur rentre les valeurs 6 *et* 4. *Comme il s'agit d'un programme très simple on n'a pas besoin d'expliciter les locations de mémoire associées aux variables.*

Remarque 1 *Variables et fonctions sont des entités qu'on peut associer à certaines portions du texte (la* syntaxe*) du programme. Par opposition, mémoire, environnement, bloc d'activation et contrôle sont des entités qu'on a crée pour expliquer et prévoir l'exécution du*

programme (la sémantique*).*[5] *Pendant l'exécution peuvent coexister* plusieurs instances (ou avatars) du même objet syntaxique*. Par exemple, on peut avoir plusieurs instances de la fonction* `pgcd` *et des variables* `a,b,mod`*. Aussi, on peut avoir des situations d'*homonymie*. Par exemple,* `a` *est une variable de* `main` *et un paramètre (un argument) de* `pgcd`*. On élimine toute ambiguïté en supposant qu'on s'adresse toujours au* `a` *qui est le plus 'proche'.*

1.3 Compilation, exécution et erreurs

Un programme C est d'abord *compilé* (= traduit dans le langage de la machine) et ensuite *exécuté* (par le processeur de la machine).

Exemple 5 *Considérons un programme* C *qui imprime à l'écran le mot* Bonjour*. A partir de maintenant, on omet les directives nécessaire à l'utilisation des fonctions de bibliothèque. Le lecteur peut trouver ces directives dans tout manuel de programmation.*

```
1 int main(){                \\ un commentaire
2     printf("Bonjour\n");
3     return 0;}
```

Tout programme C *contient au moins une fonction dont le nom est* main *(ligne* 1*). Le calcul commence avec un appel à cette fonction et termine quand cette fonction termine son exécution. Par défaut, la fonction* main *ne prend pas d'arguments et rend un entier* 0 *comme résultat (ligne* 3*). Par convention, l'entier* 0 *indique une terminaison normale. Certains compilateurs permettent aussi un résultat de type* void *(le type vide) et dans ce cas on peut marquer la fin de la fonction avec une commande* return*. La commande qui imprime* Bonjour *est à la ligne* 2*. La fonction* printf *est une fonction de la bibliothèque* stdio *et pour l'utiliser il faut ajouter au programme ci-dessus une directive* ♯include⟨stdio.h⟩*. Le texte à imprimer est compris entre guillemets. Dans l'exemple, après le mot* Bonjour *on imprime aussi un saut de ligne qui est dénoté par le caractère* \n*. On notera que chaque commande dans le corps de la fonction est suivie par un point virgule.*

Tout ce qui suit le symbole // et se trouve dans la même ligne est un commentaire. Un commentaire devrait aider à comprendre le comportement d'un programme mais n'affecte en rien son exécution. Si l'on veut écrire un texte de commentaire sur plusieurs lignes on utilisera la notation :

```
1 /* texte
2    de commentaire ici */
```

L'utilisateur commence par écrire à l'aide d'un éditeur de texte (par exemple emacs*) le programme dans un fichier dont le nom termine par* .c*. Par exemple :* Bonjour.c*. Pour compiler avec le compilateur* gcc *on écrira une commande :*

cc Bonjour.c

Par défaut, le code exécutable généré est mémorisé dans le fichier a.out*. Pour l'exécuter, on lance la commande :*

./a.out

5. Il faut *raffiner* ce modèle pour arriver à couvrir *tout* C.

On peut modifier le nom du fichier qui contient l'exécutable en utilisant l'option -o. *Par exemple, avec la commande :*

cc −o Bonjour Bonjour.c

on mémorise l'exécutable dans le fichier Bonjour. *Chaque compilateur propose nombreuses options. En* gcc, *avec l'option* -O *on peut générer un code optimisé, avec l'option* -Wall *on sollicite un certain nombre d'avertissements, avec l'option* -lm *on lie les fonctions de bibliothèque à l'exécutable, avec l'option* -save-temps *on visualise les codes intermédiaires et assembleurs produits par le compilateur.*

En programmation, on est confronté à des erreurs qu'on peut classifier en deux catégories.

— Les erreurs générées au moment de la *compilation* : parenthèse oubliée, variable non déclarée, type du résultat incompatible avec le type de la fonction,...
— Les erreurs observées au moment de l'*exécution* : division par zéro, indice d'un tableau hors des bornes, manque de mémoire,...

En général, le compilateur fournit assez d'indications pour éliminer les erreurs du premier type. Pour les erreurs de deuxième type, il est souvent nécessaire d'analyser le programme en détail et d'en tester le comportement.

Exemple 6 *Considérons le petit programme suivant. Si l'on remplace le* ; *en ligne* 3 *par* : *on obtient une erreur au moment de la compilation. Autrement, ce programme compile sans problème mais au moment de l'exécution il génère un message d'erreur car on cherche à diviser* 3 *par* 0. *La raison de ce message tardif est que le compilateur* gcc *ne peut pas* prévoir *que la variable* y *prend la valeur* 0 *à la ligne* 5.

```
1 int main(){
2     printf("%d\n",3/1);
3     int x=1;
4     int y=x-x;
5     printf("%d\n",3/y);
6     return 0;}
```

Chapitre 2

Types atomiques

Les valeurs manipulées par un programme sont classifiées dans un certain nombre de types. Le type d'une valeur va déterminer les opérations qu'on peut lui appliquer (ou pas).

Tout langage comporte un certain nombre de types *prédéfinis* et *atomiques* (ou indivisibles). Parmi ces types, le langage C propose les types suivants :

- short, int ou long pour les nombres entiers,
- char pour les caractères ASCII (8 bits) ; par exemple, 'a', 'b', '@' sont des valeurs de type char,
- bool pour les valeurs booléennes (true ou false),
- float ou double pour les nombres flottants (une approximation des nombres réels).

Remarque 2 *En fonction de la version de* C *qu'on utilise, pour avoir le type booléen il faut ajouter la directive :* ♯include < stdbool.h >. *Dans toutes les versions de* C*, on peut codifier* false *par l'entier* 0 *et* true *par tout entier différent de* 0.

2.1 Entiers

Représentation

Soit $B \geq 2$ un nombre naturel qu'on appelle *base*. On dénote par $d, d', \ldots$ les chiffres en base B. Typiquement, si $B = 2$ les chiffres sont $0, 1$, si $B = 10$ les chiffres sont $0, 1, 2, \ldots, 9$ et si $B = 16$ les chiffres sont $0, 1, 2 \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$. Dans la suite on abusera la notation en ne faisant pas de différence entre un chiffre et le nombre naturel qui lui est associé. Par exemple, pour la base $B = 16$, C est un chiffre et il est aussi un nombre qu'on représente en base 10 par 12.

Proposition 1 *Pour toute base $B \geq 2$ et pour tout $n > 0$ nombre naturel positif ils existent uniques $\ell \geq 0$ et $d_\ell, \ldots, d_0 \in \{0, \ldots, B-1\}$ tels que $d_\ell \neq 0$ et*

$$n = \Sigma_{i=0,\ldots,\ell}\ d_i \cdot B^i\ . \tag{2.1}$$

On appelle la suite $d_\ell \cdots d_0$ la représentation en base B de n.

Preuve. Existence. Pour trouver la suite il suffit d'itérer l'opération de division et reste. Soit $n_0 = n$. Tant que $n_i > 0$ on calcule le quotient et le reste de la division par la base B :

$$n_i = n_{i+1} \cdot B + d_i\ .$$

On obtient ainsi la représentation de n à partir du chiffre le moins significatif (le plus à droite). On a donc :

$$\begin{array}{ll} n_0 & = n_1 \cdot B + d_0 \\ n_1 & = n_2 \cdot B + d_1 \\ \cdots & = \cdots \\ n_{\ell-1} & = n_\ell \cdot B + d_{\ell-1} \\ n_\ell & = 0 \cdot B + d_\ell \end{array}$$

et on peut vérifier :

$$\begin{array}{ll} n = n_0 & = (\cdots((d_\ell \cdot B) + d_{\ell-1}) \cdot B + \cdots + d_0) \\ & = \Sigma_{i=0\ldots\ell}\ d_i \cdot B^i\ . \end{array}$$

Unicité. On remarque que $\Sigma_{i=0,\ldots,k}\ d_i \cdot B^i < B^{k+1}$. Il est ensuite facile de vérifer que deux suites différentes $d_\ell, \ldots, d_0$ et $d'_\ell, \ldots, d'_0$ ne peuvent pas représenter le même nombre. □

En pratique, on a l'abitude de manipuler les nombres en base 10. Les deux questions qu'on se pose en priorité sont donc :

— Comment trouver la représentation en base 10 d'un nombre représenté dans une autre base ?

— Comment trouver la représentation en base B d'un nombre représenté en base 10 ?

Pour repondre à la première question il suffit d'appliquer la formule (2.1). Par exemple, le nombre 101 en base 2 a comme valeur :

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5\ .$$

Pour ce qui est de la deuxième question, on applique la méthode de division itérée évoquée dans la preuve de la proposition 1. Par exemple, pour convertir un *décimal* en *binaire* on itère l'opération de quotient par 2 et reste :

$$\begin{array}{lll} 19 & = 2 \cdot 9 + \mathbf{1} & \text{(bit le moins significatif)} \\ 9 & = 2 \cdot 4 + \mathbf{1} & \\ 4 & = 2 \cdot 2 + \mathbf{0} & \\ 2 & = 2 \cdot 1 + \mathbf{0} & \\ 1 & = 2 \cdot 0 + \mathbf{1} & \text{(bit le plus significatif)} \end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{ll} 19 & = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 0 + \mathbf{1}) + \mathbf{0}) + \mathbf{0}) + \mathbf{1}) + \mathbf{1} \\ & = 2^4 \cdot \mathbf{1} + 2^3 \cdot \mathbf{0} + 2^2 \cdot \mathbf{0} + 2^1 \cdot \mathbf{1} + 2^0 \cdot \mathbf{1} \end{array}$$

La représentation de 19 en base 2 est 10011.

Les entiers en C

La majorité des langages de programmation prevoient des types qui permettent de représenter un nombre borné à priori d'entiers (typiquement des entiers sur 8, 16, 32, 64,… bits). En C on dispose notamment des types int et long qui utilisent typiquement 32 et 64 bits. Par ailleurs, certains langages disposent de bibliothèques pour la représentation de 'grands entiers' (typiquement des entiers avec de l'ordre de 10^3 chiffres). Sur les valeurs de type int ou long on dispose des opérations arithmétiques suivantes : + pour l'addition, − pour la soustraction, ∗ pour la multiplication, \ pour la division entière, % pour le reste de la division entière.

2.2 Booléens

En C on dénote les valeurs booléennes par true et false (ou alors par un nombre entier différent de 0 et par 0, respectivement). Sur ces valeurs on dispose d'opérateurs logiques standard && (*and*), || (*or*) et ! (*not*) dont on rappelle le comportement :

x	y	$not(y)$	$and(x,y)$	$or(x,y)$
false	false	true	false	false
false	true	false	false	true
true	false		false	true
true	true		true	true

Il est facile de montrer que ces opérateurs suffisent à exprimer toute fonction qu'on pourrait définir sur des valeurs booléennes. En particulier, on peut exprimer d'autres opérateurs logiques binaires comme l'implication logique, l'équivalence logique, le ou exclusif,...

Les prédicats de comparaison (égalité ==, différence ! =, plus petit que <, plus grand que >, plus petit ou égal <=,...) retournent une valeur booléenne. Typiquement on utilise ces prédicats pour écrire des conditions logiques qui vont déterminer la suite du calcul. Bien sûr, les conditions logiques peuvent être combinées à l'aide d'opérateurs logiques. Par exemple, on peut écrire :

$$(\mathsf{x} == \mathsf{y}) \;\&\&\; (\mathsf{x} < \mathsf{z} + 5 \quad || \quad (\mathsf{x} == \mathsf{y} + \mathsf{z})) \; .$$

Remarque 3 *En* C*, ainsi que dans d'autres langages, l'évaluation d'une condition logique se fait de gauche à droite et de façon paresseuse, c'est-à-dire dès qu'on a déterminé la valeur logique de la condition on omet d'évaluer les conditions qui suivent. Ainsi, en* C*, on peut écrire la condition logique :*

$$\mathsf{not}(\mathsf{x} == 0)\&\&\; (\mathsf{y}/\mathsf{x} == 3) \tag{2.2}$$

qui ne produit pas d'erreur même si x *est égal à* 0*. En effet, si* x *est égal à* 0 *alors la première condition* not(x == 0) *est fausse et ceci suffit à conclure que la condition logique est fausse. Le problème avec ce raisonnement est qu'en* C *une expression logique peut être vraie, fausse, produire une erreur, produire un effet de bord (par exemple lire une valeur) et même faire boucler le programme. Il en suit que la conjonction en* C *n'est pas commutative. Par exemple, la condition :*

$$(\mathsf{y}/\mathsf{x} == 3) \;\&\&\; \mathsf{not}(\mathsf{x} == 0) \tag{2.3}$$

n'est pas équivalente à la condition (2.2) ci-dessus.

2.3 Flottants

Représentation

Le proposition 1 sur la représentation des nombres entiers se généralise aux nombres réels.

Proposition 2 *Soit $B \geq 2$ et $x > 0$ nombre réel. Alors ils existent uniques un nombre entier e (l'exposant) et une suite de chiffres $\{d_i \mid i \geq 0\}$ en base B (la mantisse) tels que (i) $d_0 \neq 0$, (ii) pour tout $i \geq 1$ existe $j > i$ tel que $d_j \neq (B-1)$ et (iii) $x = B^e \cdot (\Sigma_{i \geq 0}\; d_i \cdot B^{-i})$.*

Preuve. On esquisse la preuve pour le cas $B = 2$. On a donc :

$$(i) \quad d_0 = 1, \quad (ii) \quad d_i \in \{0,1\}, \quad (iii) \quad \forall i \geq 1 \; \exists j \geq i (d_i = 0) \; . \tag{2.4}$$

En utilisant les propriétés des series géométriques on vérifie les propriétés suivantes :

$$(1) \quad 1 = 2^{-0} \leq \Sigma_{i \geq 0}\ d_i \cdot 2^{-i} < 2, \qquad (2) \quad \Sigma_{i \geq s}\ d_i \cdot 2^{-i} < 2^{-s+1} \quad (s \geq 1).$$

Pour tout $x > 0$ nombre réel positif, il existe unique e nombre entier tel que :

$$2^e \leq x < 2^{e+1}\ .$$

Si on pose $h = x/2^e$ on a $1 \leq h < 2$. Il reste maintenant à montrer que pour un tel h il existe une suite unique $d_0, d_1, \ldots$ avec les propriétés (2.4) et telle que : $h = \Sigma_{i \geq 0}\ d_i \cdot 2^{-i}$.

Les chiffres $d_0, d_1, \ldots$ sont détérminées de façon itérative. Au premier pas, si $h = 2^{-0}$ on termine avec $d_0 = 1$ et $d_i = 0$ pour $i \geq 1$. Sinon, on cherche l'unique d_1 tel que :

$$2^{-0} + d_1 \cdot 2^{-1} \leq h < 2^{-0} + (d_1 + 1) \cdot 2^{-1}\ .$$

A nouveau si $h = 2^{-0} + d_1 \cdot 2^{-1}$ on termine et sinon on cherche d_2 tel que :

$$2^{-0} + d_1 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-2} \leq h < 2^{-0} + d_1 \cdot 2^{-1} + (d_2 + 1) \cdot 2^{-2}\ .$$

En continuant de la sorte, on montre l'*existence* de la suite $d_1, d_2, \ldots$ Pour l'unicité, on suppose disposer de deux suites qui correspondent au même nombre h et on montre que dans ce cas une des deux suites doit avoir des chiffres 1 à partir d'un certain indice. □

Norme IEEE 754

Les langages de programmation disposent de un ou plusieurs types qui permettent de représenter les nombres réels (du moins une partie). En général, la représentation et le calcul sur ces représentations entraînent des *approximations*. Pour assurer la fiabilité et la portabilité des programmes, il est alors important d'établir des *normes* que toute mise en oeuvre doit respecter.

Dans ce cadre, la norme *IEEE 754* est de loin la plus importante. Elle fixe la représentation des nombres en *virgule flottante* sur un certain nombre de bits (typiquement 32 ou 64). La norme reprend la notation avec exposant et mantisse utilisée dans la proposition 2. Par exemple, dans le cas où les nombres sont représentés sur 64 bits (on dit aussi en *double précision*) la norme utilise 1 bit pour le signe, 11 bits pour l'exposant et 52 bits pour la mantisse. Comme en base 2 le chiffre à gauche de la virgule est forcement 1, on utilise les 52 bits pour représenter les chiffres binaires à droite de la virgule. Certaines valeurs de l'exposant sont réservées pour représenter le 0 et d'autres nombres non standards ($+\infty, \ldots$).

Les opérations sur les nombres flottants ne sont pas forcement exactes car le résultat théorique de l'opération n'est pas forcement un nombre flottant. Pour cette raison, la norme *IEEE 754* fixe aussi la façon dans laquelle le résultat d'une opération arithmétique ou d'une opération d'extraction de la racine carrée doit être arrondi pour obtenir un nombre flottant.

Erreur absolue et erreur rélative

Soit $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{F}$ l'ensemble des nombres réels représentables par la machine. On souhaite analyser la façon dans laquelle $\mathbf{F}$ approxime $\mathbf{R}$. Clairement, pour tout $x \in \mathbf{R}$ on peut définir un nombre $\widetilde{x} \in \mathbf{F}$ (pas forcement unique) qui approxime x.

Définition 1 *On appelle* erreur absolue *la quantité* $|\widetilde{x} - x|$ *et et si* $x \neq 0$ *on appelle* erreur rélative *la quantité :*[1]

$$\left|\frac{\widetilde{x} - x}{x}\right| .$$

En pratique, il est bien plus intéressant de contrôler l'erreur relative que l'erreur absolue ! Par exemple, supposons $x = 100.11$ et $\widetilde{x} = 100.1$ alors l'erreur absolue est 10^{-2} et l'erreur relative d'environ 10^{-4}. D'autre part si $x = 0.11$ et $\widetilde{x} = 0.1$ alors l'erreur absolue est toujours 10^{-2} mais l'erreur relative est d'environ 10^{-1}.

Soit $\mathbf{F}$ fini (ce qui est le cas par exemple en double précision), soient f^- et f^+ le plus petit et le plus grand nombre flottant positif dans $\mathbf{F}$. Soit maintenant $x > 0$ (le cas $x < 0$ est symétrique). Que peut-on dire sur l'erreur absolue et relative d'une approximation de x dans $\mathbf{F}$? On distingue 3 cas.

1. Si $x < f^-$ et on pose $\widetilde{x} = 0$ on a :

$$|x - \widetilde{x}| = x < f^- \quad \text{(borne sur l'erreur absolue)}, \quad \left|\tfrac{x-\widetilde{x}}{x}\right| = 1 \quad \text{(erreur relative)}.$$

   Il est intéressant de noter que si on avait pris $\widetilde{x} = f^-$ on aurait toujours la même borne sur l'erreur absolue mais une erreur relative qui tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers 0.

2. Si $x > f^+$ et on pose $\widetilde{x} = f^+$ on a une erreur absolue qui tende vers $+\infty$ pour x qui tend vers $+\infty$ et une erreur relative qui tend vers 1 pour x qui tend vers $+\infty$.

3. Si $x \in [f^-, f^+]$ on considère la situation où on est en virgule flottante en base B et avec une mantisse qui comporte t chiffres. Dans ce cas, l'erreur absolue est au plus la distance entre 2 nombres consécutifs dans $\mathbf{F}$. Cette distance est de la forme B^{e-t}, où l'exposant e peut varier. La distance n'est donc pas constante mais depend de l''ordre de grandeur' des nombres qu'on est en train de considérer : plus le nombre est grand plus l'erreur absolue est grande. En utilisant la proposition 2, on peut supposer que $x = (d_0, d_1 d_2 \cdots d_t d_{t+1} \cdots) \cdot B^e$ avec $d_0 \neq 0$. On obtient donc la borne suivante sur l'erreur relative :

$$\left|\frac{x - \widetilde{x}}{x}\right| < \frac{B^{e-t}}{B^e} = B^{-t} . \tag{2.5}$$

   Il est remarquable que cette borne depend seulement du nombre de chiffres de la mantisse. Par exemple, en double précision on obtient une borne de 2^{-52} sur l'erreur relative.

Remarque 4 *On pourrait penser qu'une erreur relative de* 2^{-52} *est négligeable (*$2^{-52} \approx 2 \cdot 10^{-16}$*). En particulier, si on se place dans le cadre de mésures physiques une erreur relative de* 2^{-52} *est très probablement négligeable par rapport à l'erreur de mésuration. Le problème est que les fonctions mises en oeuvre pour approcher les fonctions mathématiques usuelles (opérations arithmétiques, extraction de racine carrée, fonctions trigonométriques, logarithme,...) induisent aussi des erreurs et que ces erreurs se propagent et peuvent s'accumuler jusqu'à rendre le résultat d'un calcul sur les flottants non-significatif.*

1. Ici on prend l'erreur rélative comme une valeur *non-négative*. Dans d'autres contextes, on peut aussi définir l'erreur relative comme le nombre $\epsilon = (\widetilde{x} - x)/x$ ce qui permet de dire que $\widetilde{x} = (1 + \epsilon) \cdot x$.

Exemple 7 *Considérons deux définitions de la même fonction sur les réels :*

$$f(x) = x \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \ .$$

Dans la première formulation, le numérateur tend à 0 *et provoque des erreurs de calcul significatifs pour* $x \geq 10^{10}$*. Le lecteur peut tester le programme suivant (en compilant avec l'option* -lm*).*

```
1  int main(){
2      float x;
3      printf("Input?");
4      scanf("%f", &x);
5      printf("fonction 1\n");
6      float y=x * (sqrt(x+1) - sqrt(x));
7      printf("%f\n",y);
8      printf("fonction 2\n");
9      y=x/(sqrt(x+1) + sqrt(x));
10     printf("%f\n",y);
11     return 0;}
```

2.4 Entrées-sorties

On utilisera en priorité printf pour écrire une valeur à l'écran et scanf pour lire une valeur de l'écran. On verra plus tard (section 9.6) que des variantes de ces commandes permettent aussi de lire/écrire des fichiers. Voici deux exemples d'utilisation des commandes printf et scanf.

```
1  printf("x=%d",4);        //imprime : x=4
2  scanf("%d",&x);          //lit et sauve un entier dans x
```

On remarquera la présence des symboles %d. Dans le cas de la commande printf, il faut interpréter ces symboles comme un entier dont la valeur doit être déterminée en évaluant l'expression suivante qu'on passe en argument à printf. L'expression 4 ayant comme valeur l'entier 4, l'impression de x=%d produit en effet l'impression des caractères x=4. Dans le cas de la commande scanf, on interprète les symboles %d comme un entier rentré par l'utilisateur qui doit être mémorisé à une adresse spécifiée dans l'expression qu'on passe en argument à scanf. Dans l'exemple, il s'agit de l'adresse de la variable x. On notera l'introduction d'un nouveau opérateur de *déréférencement* & qui sert à déterminer l'adresse associée à une variable. Il s'agit d'un cas particulier de *pointeur* dont on examinera l'utilisation dans le chapitre 9.

Exemple 8 *Voici un programme qui lit un entier* n *et imprime* $n+1$*.*

```
1  int main(){
2      int x;
3      printf("Entrez un nombre : \n");
4      scanf("%d",&x);
5      printf("%d\n",x+1);
6      return 0;}
```

Les symboles %d servent à lire/écrire des valeurs de type entier. Pour manipuler des caractères on utilise les symboles %c et pour des flottants les symboles %f ou %lf. Par ailleurs, une commande printf (ou scanf) peut contenir plusieurs occurrences de ces symboles et dans ce cas pour chaque occurrence il faut prévoir une expression (ou une adresse de mémoire) d'un type compatible. Par exemple, la commande :

```
printf("\%d : %f", 3, 455.45);
```

va imprimer un entier et un flottant de la façon suivante :

```
3 : 455.45
```

Exemple 9 *Voici un petit programme qui illustre l'introduction de variables des différents types primitifs, la forme des valeurs de ces types et les directives utilisées pour les imprimer avec la commande* printf.

```
int main() {
    char x1='a';        printf("%c\n",x1);
    short x2=2754;      printf("%d\n",x2);
    int x3=333333;      printf("%d\n",x3);
    long x4=333333333;  printf("%ld\n",x4);
    float x5=0.45f;     printf("%f\n",x5);
    double x6=455.54;   printf("%lf\n",x6);
    return 0;}
```

2.5 Conversions implicites et explicites

Dans la pratique mathématique, on a l'habitude de voir un entier comme un réel et un réel comme un complexe. Les langages de programmation supportent ce type de pratique en introduisant des *conversions implicites*. Notamment, en C on effectue automatiquement les conversions suivantes :

$$\text{char} \leq \text{short} \leq \text{int} \leq \text{long} \leq \text{float} \leq \text{double} .$$

Parfois, il est nécessaire de procéder dans l'autre sens. Par exemple, on veut voir un int comme un char. Dans ce cas, le programmeur doit effectuer une *conversion explicite*. En C, on parle aussi d'opération de *cast* (ou coercition). Par exemple, on peut écrire :

```
int x=34444;
char y=(char)(x);
```

Le lecteur remarquera qu'il y a beaucoup plus d'entiers de type int (32 bits) que de caractères de type char (8 bits). L'opération de cast a donc un caractère arbitraire et il faut bien comprendre son effet. En général, les opérations de cast entre types produisent souvent des erreurs et il faut les utiliser avec parcimonie.

Chapitre 3

Contrôle

On peut voir le corps de chaque fonction comme une suite de *commandes*. Dans les programmes les plus simples on a une *liste* de commandes qu'on exécute *une fois* dans l'ordre. On va présenter des opérateurs qui permettent d'exécuter les commandes selon un ordre plus élaboré. Par exemple :

- On exécute une commande seulement si une certaine condition logique est satisfaite.
- On répète l'exécution d'une commande tant qu'une certaine condition logique est satisfaite.
- On arrête l'exécution d'une suite de commandes pour sauter directement à l'exécution d'une commande plus éloignée.

Digression 3 *Pour apprendre à* écrire*, il est aussi important de connaître la* grammaire *que de lire les* classiques*. De la même façon, pour apprendre à* programmer*, il convient de maîtriser les* règles du langage *et en même temps d'étudier un certain nombre d'*exemples classiques*. En essayant de reproduire les 'classiques', vous comprendrez mieux les* règles *du langage et vous développerez votre propre* style *de programmation. Dans ces notes de cours, on va examiner un certain nombre d'algorithmes classiques. Le lecteur est averti que leur programmation correspond au* style *de l'auteur de ces notes. Des variations et des améliorations sont certainement possibles et encouragées !*

3.1 Commandes de base et séquentialisation

Les commandes de bases comprennent l'affectation d'une valeur à une variable, la commande d'écriture (printf) et de lecture (scanf), l'appel et le retour de fonction (return). Il est aussi possible de composer les commandes pour obtenir des commandes plus complexes. Le premier opérateur de composition est la *séquentialisation* qui dans de nombreux langages est dénoté par le point virgule :

$$C_1; C_2 \ .$$

L'interprétation de cette commande composée est qu'on exécute d'abord C_1 et ensuite C_2. On notera que l'opération de séquentialisation est *associative* :

$$(C_1; C_2); C_3 \equiv C_1; (C_2; C_3)$$

il est donc inutile de mettre les parenthèses.

3.2 Branchement

Un deuxième exemple d'opérateur de composition de commandes est le branchement. La forme de base est :

$$\mathsf{if}\ (b)\{C_1\}\ \mathsf{else}\ \{C_2\}$$

L'interprétation est qu'on évalue une *condition logique* b. Si elle est vraie on exécute C_1 et sinon C_2. Dans la syntaxe de C, on admet aussi une version sans branche else :

$$\mathsf{if}\ (b)\{C_1\}$$

qui est équivalente à :

$$\mathsf{if}\ (b)\{C_1\}\ \mathsf{else}\ \{\mathsf{skip}\}$$

où skip est une abréviation pour une commande qui ne fait rien d'observable.

Exemple 10 *Pour pratiquer le branchement, on considère la conception d'un programme qui lit trois coefficients a, b, c et imprime les zéros du polynôme $ax^2 + bx + c$. La première partie de la fonction* main *lit les coefficients. Dans la deuxième partie on trouve un certain nombre d'instructions de branchement imbriquées qui nous permettent de distinguer les différentes situations qui peuvent se présenter. Il est fortement conseillé de visualiser d'abord avec un schéma qui peut prendre la forme d'un arbre binaire les différentes possibilités. Une fois qu'on a vérifié la correction du schéma on procédera à son codage en* C.

```
1  int main(){
2      double a,b,c,delta,root,sol1,sol2;
3      printf("Entrez coeff a : ");
4      scanf("%lf",&a);
5      printf("Entrez coeff b : ");
6      scanf("%lf",&b);
7      printf("Entrez coeff c : ");
8      scanf("%lf",&c);
9      delta = b*b-(4*a*c);
10     if (a==0 && b==0){       // degré 0
11         if (c==0){
12             printf("Tout nombre est une solution\n");}
13         else{
14             printf("Pas de solution");}}
15     else{
16         if (a==0){           // degré 1
17             sol1=-c/b;
18             printf("L'unique solution est :%lf\n",sol1);}
19         else{
20             if (delta==0){   // degré 2
21                 sol1=-b/(2*a);
22                 printf("L'unique solution est :%lf\n",sol1);}
23             else{
24                  if (delta<0) {
25                      printf("Pas de solution\n");}
26                  else{
27                      root = sqrt(delta);
28                      sol1=(-b+root)/(2*a);
29                      sol2=(-b-root)/(2*a);
```

```
30                          printf("2 solutions :%lf,%lf\n",sol1,sol2);}
31      return 0;}}}}
```

Exemple 11 *On souhaite concevoir un programme qui reçoit en entrée le nombre de billets de* 50*,* 20 *et* 10 *euros dont on dispose ainsi qu'une somme s à payer. Si possible, le programme doit imprimer une façon de payer (exactement) la somme s avec les billets dont on dispose. Sinon, le programme imprime un message qui dit que le payement de la somme n'est pas possible. Pour simplifier le problème, on va supposer qu'on dispose d'au moins une note de* 10 *euros. Dans ce cas, la stratégie suivante permet de résoudre le problème : on paye autant que possible, c'est-à-dire sans dépasser la somme s, avec des billets de* 50*, ensuite avec des billets de* 20 *et enfin avec des billets de* 10*. Le lecteur est invité à vérifier que sans l'hypothèse sur les billets de* 10 *euros, cette stratégie ne permet pas toujours de trouver une solution. Un codage possible de la stratégie en* C *est ci-dessous où on laisse au lecteur le soin de compléter les parties qui concernent la lecture des paramètres et l'impression du résultat.*

```
1  int main(){
2      int n50, n20, n10, s, p50, p20, p10;
3      /* on lit n50, n20, n10 et s */
4      /* calcul */
5      if ((s/50) <= n50){
6          p50=(s/50);}
7      else{
8          p50=n50;}
9      s=s-(50*p50);
10     if ((s/20) <= n20){
11         p20=(s/20);}
12     else {p20=n20;}
13     s=s-(20*p20);
14     if ((s/10) <= n10){
15         p10=(s/10);}
16     else {p10=n10;}
17     s=s-(10*p10);
18     /* impression resultat */
19     return 0;}
```

3.3 Boucles

Une boucle permet d'exécuter une commande un nombre arbitraire de fois. L'opérateur while est probablement le plus utilisé pour construire une boucle. Sa forme est :

$$\mathsf{while}(b)\{C\} \ .$$

La commande résultante évalue la condition logique b et elle termine si elle est fausse. Autrement, elle exécute la commande C et ensuite elle recommence à exécuter la commande $\mathsf{while}(b)\{C\}$. Ainsi, d'un point de vue conceptuel on a l'équivalence suivante :

$$\mathsf{while}(b)\{C\} \equiv \mathsf{if}(b)\{C; \mathsf{while}(b)\{C\}\} \ .$$

Exemple 12 *On programme l'algorithme d'Euclide pour le calcul du* pgcd *(exemple 4) en utilisant une boucle* while*.*

```
1  int main(){
2      int a,b;
3      /* lire a et b */
4      int aux;
5      while (b!=0){
6          aux=b;
7          b=a%b;
8          a=aux;}
9      /* imprimer a */
10     return 0;}
```

Tant que b *n'est pas* 0, *on remplace* a *par* b *et* b *par* a mod b. *Cependant, le langage* C *ne permet pas d'effectuer deux affectations en même temps. Pour cette raison, on introduit une variable auxiliaire* aux *qui garde la valeur originale de* b *pendant qu'on remplace* b *par* a mod b. *Il s'agit d'une technique standard pour permuter le contenu de deux variables.*

Exemple 13 *On utilise la boucle* while *pour programmer un exemple de* recherche dichotomique. *Le principe général de la recherche dichotomique est qu'à chaque itération soit on trouve l'élément recherché soit on divise par deux la taille de l'espace de recherche. On applique ce principe au problème du calcul d'une approximation à un ϵ près de la racine carrée d'un nombre flottant $x \geq 1$.*[1] *A priori, on sait que $\sqrt{x} \in [1, x]$. Plus en général, si on sait que $\sqrt{x} \in [\mathsf{low}, \mathsf{high}]$ avec $1 \leq \mathsf{low} < \mathsf{high}$ on peut appliquer le raisonnement suivant :*

- *Si $|\mathsf{high} - \mathsf{low}| \leq \epsilon$ on connaît $\sqrt{x}$ à un ϵ près.*
- *Sinon, on calcule le carré du milieu de l'intervalle* $[\mathsf{low}, \mathsf{high}]$ *et on le compare à x. Si la valeur est plus grande il faut continuer la recherche dans la moitié gauche de l'intervalle et autrement dans la moitié droite.*

Une programmation possible de la méthode est la suivante.

```
1  int main (){
2      /* lire x */
3      double low = 1;
4      double high = x;
5      double mid;
6      while ((high-low)> eps){
7          mid = (high+low)/2;
8          if (mid*mid>x){
9              high=mid;}
10         else {
11             low=mid;}};
12     /* imprimer x */
13     return 0;}
```

Boucle for

Pour améliorer la lisibilité du programme, on utilise aussi une boucle dérivée for avec la forme :

$$\mathsf{for}(C_1; b; C_2)\{C\} \tag{3.1}$$

En première approximation, la boucle for est équivalente à :

$$C_1; \mathsf{while}(b)\{C; C_2\}\ . \tag{3.2}$$

1. Bien sûr on pourrait aussi utiliser la fonction de bibliothèque sqrt pour résoudre ce problème.

Dans une bonne pratique de la boucle for, on utilise la commande C_1 pour initialiser la boucle et la commande C_2 pour modifier les variables dont dépend la condition logique b (la condition d'arrêt). Typiquement, il s'agit d'incrémenter ou décrémenter un indice et, en lisant le texte du programme, il est aisé de déterminer combien de fois le corps C de la boucle for sera itéré.

Exemple 14 *On souhaite lire un nombre naturel n et imprimer ses diviseurs propres (différents de 1 et n). Pour résoudre ce problème, on peut utiliser une boucle* for *qui va parcourir les entiers compris entre 2 et $n/2$.*

```
1 int main(){
2     int n,i;
3     /* lire n */
4     for (i=2;i<=n/2;i=i+1){
5         if (n%i==0){
6             printf("%d\n",i);}}
7     return 0;}
```

3.4 Rupture du contrôle

On présente un certain nombre de commandes qui permettent de s'extraire de la commande en exécution et de sauter à un autre point du contrôle. On les présente en ordre décroissant de puissance :

- exit(n) pour terminer l'exécution du *programme*. Convention C : on utilise $n = 0$ pour indiquer une terminaison normale.
- return pour terminer l'exécution d'une *fonction*.
- break pour terminer l'exécution de la *boucle* dans laquelle on se trouve.
- continue pour *reprendre l'exécution au début de la boucle* dans laquelle on se trouve. [2]

Exemple 15 *Dans la boucle suivante on va imprimer $5, 4, 3, 2, 1$. En particulier le décrément* x- - *après* continue *n'est jamais exécuté.*

```
1 int x=5;
2 while (x>0){
3     printf("%d\n",x);
4     x--;
5     if (x>0){
6         continue;}
7     x--;}
```

Exemple 16 *La boucle suivante ne terminerait pas sans* break.

```
1 int acc=0;
2 int i;
3 for(i=1;i<=n;i--){
4     acc=i+acc;
5     if (i<-100){
6         break;}}
```

2. Si on se trouve dans une boucle for, continue va quand même exécuter la commande d'incrément/décrément. Pour cette raison, la transformation de la boucle for en boucle while décrite dans (3.2) doit être raffinée.

Remarque 5 *Il faut utiliser* break *et* continue *seulement si on se trouve dans une boucle (ou dans une commande* switch *qui sera discutée dans la section 3.5 qui suit).*

3.5 Aiguillage switch

La commande switch (*aiguillage*) permet aussi d'effectuer des branchements dans le calcul. Elle est présentée ici car elle est utilisée souvent en combinaison avec les commandes break ou return. Voici un exemple :

```
1 switch(x){
2     case 0 : printf("%d\n",x);
3     case 1:  printf("%d\n",x+1);
4     default: printf("%d\n",x+2); }
```

Si x est 0 on imprime $0, 1, 2$ si x est 1 on imprime 2 et 3 et autrement on imprime $x + 2$. Le switch évalue une expression entière qui donne une valeur n et ensuite exécute toutes les branches à partir de celle de la forme case n (si elle existe) et la branche default autrement. En pratique, on a souvent besoin d'exécuter *seulement* la branche qui correspond à case n. On obtient ce comportement en insérant une commande break à la fin de chaque branche. Ainsi, notre exemple devient :

```
1 switch(x){
2     case 0 : printf("%d\n",x); break;
3     case 1:  printf("%d\n",x+1); break;
4     default: printf("%d\n",x+2); }
```

Dans ce cas, si x est 0 on imprime 0, si x est 1 on imprime 2 et autrement on imprime $x + 2$.

3.6 Énumération de constantes

Pour améliorer la lisibilité d'un programme qui depend d'un certain nombre de valeurs entières constantes, on peut regrouper ces constantes dans une déclaration. Par exemple, on peut définir :

```
1 typedef enum {ZERO, ONE} bool;
2 bool not(bool x){
3     switch(x){
4         case ZERO: return ONE;
5         case ONE: return ZERO;
6         default: return x;}}
```

Par défaut, le compilateur associe aux noms une suite d'entiers croissants : $0, 1, 2, \ldots$ Dans l'exemple, on associe donc l'entier 0 à ZERO e l'entier 1 à ONE. Notez que la spécification de C n'exige pas que l'argument ou le résultat de la fonction not soit bien un ZERO ou un ONE. Par exemple, avec gcc l'appel not(3) ne produit pas d'erreur au moment de la compilation ou de l'exécution et retourne 3.

Chapitre 4

Fonctions

Un programme C est composé d'une liste de fonctions qui peuvent s'appeler mutuellement. Les fonctions sont un élément essentiel dans la modularisation et le test d'un programme.

Si une tâche doit être répétée plusieurs fois c'est une bonne pratique de lui associer une fonction ; ceci permet de produire un code plus compact tout en clarifiant le fonctionnement du programme.

Aussi si une tâche est trop compliquée il est probablement utile de la décomposer en plusieurs fonctions. Le code de chaque fonction devrait tenir dans une page (20-30 lignes) et avant de tester le programme dans son intégralité, il convient de s'assurer de la fiabilité de chaque fonction.

4.1 Appel et retour d'une fonction

Comme indiqué dans la section 1.2, une fonction est un *segment de code* identifié par un *nom*. En C, la forme d'une fonction est la suivante :

```
t f(t1 x1, ..., tn xn)
{corps de la fonction}
```

La première ligne spécifie l'*interface* (ou *en tête*) de la fonction, à savoir le nom de la fonction (f), le type du résultat (t) et les types et les noms des arguments (t1 x1,...,tn xn). Quand on *appelle* une fonction on définit les *valeurs* de ses arguments. Par exemple, dans l'appel $f(e_1, \ldots, e_n)$ on évalue les expressions $e_1, \ldots, e_n$ et on affecte leurs valeurs aux variables $x1, \ldots, xn$. On dit que l'appel d'une fonction est *par valeur*. Un *appel de fonction est une expression* dont le type est le type du résultat de la fonction. Donc l'appel $f(e_1, \ldots, e_n)$ a type t. Par ailleurs, le corps de la fonction contient des commandes return e où e est une expression de type t.

Exemple 17 *Voici un programme simple composé de* 3 *fonctions et d'une variable globale* pi. *Une variable globale est une variable dont la déclaration n'est pas dans le corps d'une fonction. Une variable globale est visible dans toutes les fonctions du programme sauf si elle est cachée par une déclaration locale (plus de détails dans la section 4.2). On remarquera que les appels de fonction peuvent être imbriqués comme dans* imprimer(1.0, circonference(1.0)) ; *Dans ce cas, il faut d'abord exécuter l'appel interne (*circonference(1.0)*) et ensuite celui externe* imprimer$(1.0, 6.28\cdots)$

```c
double pi = M_PI;       //constante pi définie dans math.h
double circonference(double r){
    return 2 * pi * r;}
void imprimer(double r, double c){
    printf("La circonference de %lf est %lf\n", r, c);}
int main(){
    printf("%lf\n",pi);
    imprimer(1.0, circonference(1.0));
    imprimer(2.0, circonference(2.0));
    return 0;}
```

4.2 Portée lexicale

Dans un programme, en particulier dans un programme avec plusieurs fonctions, la même variable peut être déclarée plusieurs fois (et avec plusieurs types).

Une bonne pratique consiste à utiliser des noms différentes pour les arguments et les variables locales et si possible à éviter d'utiliser le même nom pour les variables locales et les variables globales. A défaut, la variable locale couvrira la globale.

Exemple 18 *Voici un programme composé de* 2 *variables globales et* 3 *fonctions. Quels sont les entiers imprimés ? Voici des indices. Dans* 4*,* x *est l'argument de la fonction alors que dans* 5 y *est la variable globale. Dans* 7*, l'affectation n'a pas d'effet sur le* x *de la fonction* main *ni sur le* x *global. Dans* 9*, la déclaration de* y *cache la variable globale dans le segment de code délimité par les accolades. Ainsi, dans* 11 *on se réfère à la variable globale et dans* 12 *on peut déclarer à nouveau une variable* y*. Dans* 16*, on passe la valeur de la variable* x *du* main*, ainsi l'incrément dans* 7 *n'a pas d'effet sur la variable du* main*.*

```c
int x=5;
int y=6;
void imprimer(int x){
    printf("%d\n",x);
    printf("%d\n",y);}
void portee(int x){
    x=x+1;
    imprimer(x);
    {int y=10;
    imprimer(y);}
    imprimer(y);
    int y=20;
    imprimer(y);}
int main(){
    int x = 4;
    portee(x);
    imprimer(x);
    return 0;}
```

Exercice 1 *Dans le programme suivant on trouve* 10 *appels à la fonction* imprimer*. Pour chaque appel vous devez prévoir combien de fois il sera exécuté et avec quelles valeurs.*

```c
int x=5;
int y=6;
void imprimer(int x){
     printf("%d\n",x);}
void portee(int x){
     x=x+1; imprimer(x);
     {int y=10; imprimer(y);}
     imprimer(y);
     int y=20; imprimer(y);}
int main(){
     int x = 4;
     portee(x);
     imprimer(x);
     controle();
     return 0;}
void controle(){
     if (x>0){
      imprimer(--x);}
     else{
         imprimer(x++);};
     int acc=1, n=2;
     int k;
     for(k=1;k<=n;k++){
         acc=k*acc;
         imprimer(acc);};
     int i=2;
     while(i>0){
         acc=acc-i;i--;
         imprimer(acc);
         if (i==1){
             break;}
         else{
             continue;}}
         imprimer(f(3));
         return ;}
int f(int x){
    switch(x){
        case 0: return 1;
        case 1: return 2;
        default: return f(x-1)*f(x-2); } }
```

4.3 Argument-résultat, Entrée-sortie

Une fonction C *doit* prendre n *arguments* ($n \geq 0$) et rendre un *résultat* (éventuellement de type void). Par ailleurs, comme effet de bord, elle *peut* aussi *lire* des valeurs (avec scanf par exemple) et *imprimer* des valeurs (avec printf par exemple). Il faut bien comprendre que :

— prendre en argument est différent de lire une valeur.

— rendre un résultat est différent d'imprimer une valeur.

Un *argument* est passé par la fonction appelante alors que la *valeur lue* vient de l'écran ou d'un fichier. De même une fonction rend le *résultat* à la fonction appelante alors qu'elle *imprime une valeur* à l'écran ou dans un fichier. Prendre en argument/rendre un résultat est

donc une interaction entre deux fonctions alors que lire une valeur/imprimer une valeur est une interaction entre une fonction et l'utilisateur (ou un fichier externe au programme).

4.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode élémentaire utilisée en calcul numérique pour trouver le zéro d'une fonction dérivable f. On commence par un point x_0 'assez proche d'un point x tel que $f(x) = 0$. Au pas i, on détermine x_{i+1} par la formule :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

dont on dérive :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \ . \tag{4.1}$$

Le calcul sur les flottants étant approché, on fixe un niveau de précision ϵ souhaité et on arrête l'itération dès que (cf. recherche dichotomique de l'exemple 13) :

$$|x_i - x_{i+1}| < \epsilon \ .$$

Notons au passage qu'il faut étudier f et le point initial x_0 pour s'assurer de la convergence vers un zéro de la fonction. En effet, la méthode peut ne pas converger même si f est un polynôme. Considérons une mise en oeuvre pour la fonction $f(x) = x^2 - a$ où $a \geq 0$. Il faut : (1) lire la valeur a, (2) itérer l'opération (4.1) jusqu'au niveau de précision souhaité et (3) imprimer le résultat. Par ailleurs, il convient de prévoir une fonction C qui correspond à la fonction mathématique f. Ainsi si l'on souhaite adapter le programme à une autre fonction mathématique il suffira de modifier la fonction C correspondante. En suivant ces considérations, une mise en oeuvre possible est la suivante.

```
1  #define epsilon 10E-10
2  double a;
3  double fun(double x){
4      return x*x - a;}
5  double itere(double x){
6      double xnext;
7      while (1){
8          xnext = x - fun(x)/(2*x);
9          if (fabs(xnext-x)<epsilon){
10             return xnext;}
11         else{
12             x=xnext;}}}
13 int main(){
14     double x;
15     // lire a
16     x=itere(a);
17     //imprimer x
18     return 0;}
```

4.5 Intégration numérique

Pour calculer une approximation numérique de l'intégrale d'une fonction f dans l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ on peut découper l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de taille $(b - a)/n$ et approximer la surface de chaque petit intervalle par la surface du trapèze. Plus précisément, si l'on veut approximer :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

on fixe le nombre n d'*intervalles* et $h = \frac{(b-a)}{n}$. Soit :

$$x_i = a + ih \qquad 0 \leq i \leq n \ .$$

La *surface* S_i du trapèze déterminé par x_i et x_{i+1} est :

$$S_i = \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))h}{2} \ .$$

En *additionnant les surfaces* des trapèzes on dérive :

$$\Sigma_{i=0,\ldots,n-1} S_i = \frac{h}{2}(2(\Sigma_{i=1,\ldots,n-1} f(x_i)) + f(a) + f(b)) \ .$$

Il convient de dissocier le calcul de la somme des surfaces des trapèzes. Ainsi la structure d'un programme pour ce problème pourrait être celle ci-dessous où l'on suppose que f est la fonction de bibliothèque *sinus*. Comme pour la méthode de Newton-Raphson, on pourrait ajouter des fonctions pour lire et imprimer et on pourrait encapsuler la fonction mathématique dont on calcule l'intégrale dans une fonction C séparée.

```
1  double integral(double a,double b,int n){
2      double h=(b-a)/n;
3      double acc=0;
4      double x=a+h;
5      int i;
6      for (i=1;i<=n-1;i++){
7          acc=acc+sin(x);x=x+h;}
8      acc= (2*acc+sin(a)+sin(b));
9      acc= (acc*h)/2;
10     return(acc);}
11 int main(){
12     double a,b,val; int n;
13     /* lire a, b, n */
14     val=integral(a,b,n);
15     /* imprimer résultat */
16     return 0;}
```

4.6 Conversion binaire-décimal

En se basant sur les principes discutés dans la section 2.1, on souhaite effectuer deux opérations.

1. Lire un nombre de type int et imprimer sa représentation binaire (aussi de type int). Par exemple :

On lit	On imprime
19	10011

2. Lire un nombre de type int dont les chiffres varient dans $\{0, 1\}$, le *voir comme un nombre binaire* et imprimer sa représentation décimale (aussi de type int). Par exemple :

On lit	On imprime
10011	19

   Le lecteur remarquera que dans cet exemple on utilise un sous-ensemble des valeurs de type int (celles dont les chiffres varient sur 0 et 1) pour représenter les nombres binaires.

Dans une mise en oeuvre il est naturel d'introduire une fonction pour chaque conversion. Remarquons que la solution ci-dessous utilise la fonction de bibliothèque assert de la bibliothèque assert.h. La commande assert(b) évalue la condition logique b. Si la condition est fausse le calcul s'arrête et un message d'erreur est émis qui permet d'identifier l'assertion qui n'est pas valide. Avec la fonction assert, on a une façon simple et fort utile de documenter et tester un programme.

```
1  int dec_to_bin (int d){
2      int q,r;
3      if (d==0){
4          return 0;}
5      else{
6          r=d%2;
7          q=d/2;
8          return (r+10*dec_to_bin(q));}}
9  int bin_to_dec (int b){
10     int q,r;
11     if (b==0){
12         return 0;}
13     else{
14         r=b%10;
15         q=b/10;
16         assert((r==0) || (r==1));
17         return (r+2*bin_to_dec(q));}}
18 int main(){
19     printf("Entrez 10 pour décimal et 2 pour binaire\n");
20     int choix;
21     int x;
22     scanf("%d",&choix);
23     assert((choix==2)||(choix==10));
24     if (choix==10){
25         printf("Entrez un nombre décimale\n");}
26     else{
27         printf("Entrez un nombre binaire\n");}
28     scanf("%d",&x);
29     if (choix==10){
30         printf("%d\n",dec_to_bin(x));}
31     else{
```

```
32          printf("%d\n", bin_to_dec(x));}
33      return 0;}
```

Chapitre 5

Fonctions récursives

Un programme C est composé d'une liste de fonctions qui peuvent s'appeler mutuellement. En particulier, une fonction peut s'appeler elle même ; il s'agit alors d'un exemple de *fonction récursive* (n fonctions qui s'appellent mutuellement sont aussi des fonctions récursives). On a déjà examiné dans l'exemple 4 la programmation de l'algorithme d'Euclide par une fonction récursive. Les fonctions récursives permettent de programmer aisément les définitions par récurrence qu'on trouve souvent en mathématiques. Aussi, un certain nombre d'algorithmes qui suivent une stratégie diviser pour régner se programment naturellement de façon récursive ; par exemple, la recherche dichotomique et certains algorithmes de tri qu'on étudiera dans la section 7.1 suivent cette stratégie. On a vu dans l'exemple 12 que l'algorithme d'Euclide peut se programmer aussi avec une boucle ; on dira aussi de façon *itérative*. La récursion utilisée dans la programmation de l'algorithme d'Euclide est de type *terminal* dans le sens qu'après l'appel récursif il ne reste plus rien à faire et la fonction retourne immédiatement. [1] Il se trouve que pour la *récursion terminale* (*tail recursion* en anglais), un compilateur optimisant peut générer automatiquement un programme itératif équivalent.

Dans la section 5.1, on pratique la programmation récursive et itérative dans le cadre du problème de l'évaluation de polynômes.

Comme on l'a vu dans la section 1.2, l'appel et le retour de fonction manipule implicitement une *pile de blocs d'activation*. Il s'avère que dans certaines situations cette structure de données permet une programmation élégante et compacte. Dans la section 5.2, on illustre une telle situation avec le problème de la tour d'Hanoï.

Enfin, il y a aussi des situations dans lesquelles la programmation d'une définition par récurrence à l'aide d'une fonction récursive peut générer un programme particulièrement inefficace. Dans la section 5.3, on examine différentes stratégies pour contourner ce problème dans le contexte du calcul de la suite de Fibonacci.

5.1 Évaluation de polynômes

Considérons le problème de l'évaluation d'un polynôme de degré n :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

dans un point x. Un premier algorithme peut consister à calculer les sommes partielles :

$$a_0, \qquad a_0 + a_1 x, \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \cdots$$

1. Il s'agit d'une intuition, on ne donnera pas de définition formelle de la récursion terminale.

en calculant en parallèle les puissances de x :

$$x^0, \qquad x^1 = x \cdot x^0, \qquad x^2 = x \cdot x, \qquad x^3 = x \cdot x^2, \ldots$$

Pour ce calcul, il faut donc effectuer $2 \cdot n - 1$ multiplications ainsi que n sommes. Cependant le coût d'une somme est bien inférieur à celui d'une multiplication et donc on peut considérer que le coût du calcul dépend essentiellement du nombre de multiplications.

Règle de Horner

La règle de Horner est un autre algorithme pour évaluer un polynôme de degré n dans un point qui demande seulement n multiplications. On définit :

$$\begin{array}{rcll} h_0 & = & a_n & \\ h_i & = & h_{i-1}x + a_{n-i} & 1 \leq i \leq n \ . \end{array}$$

On remarque que :

$$h_i = a_n x^i + a_{n-1}x^{i-1} + \cdots + a_{n-i+1}x + a_{n-i} \ .$$

Donc $p(x) = h_n$ et on peut calculer $p(x)$ avec seulement n *multiplications* !

Exemple 19 *Pour mettre en oeuvre l'évaluation d'un polynôme on va faire l'hypothèse que le programme lit le degré du polynôme, un point où il faut évaluer le polynôme et les coefficients du polynôme. Pour l'instant, on ne dispose pas d'une structure de données pour mémoriser (de façon simple) $n+1$ coefficients où n est variable ; les tableaux qui seront discutés dans le chapitre 6 feront l'affaire. Il s'agit donc de lire les coefficients et en même temps de faire progresser l'évaluation du polynôme.* [2] *Pour mettre en oeuvre l'algorithme on a 4 choix possibles. En effet, on peut choisir entre la méthode d'évaluation directe et la méthode de Horner et aussi entre une programmation par récursion et une par itération. On présente ci-dessous la méthode de Horner programmée de façon récursive et itérative et on laisse en exercice le même problème pour la méthode directe. Notez que dans la version récursive on lit les coefficients dans l'ordre $a_0, a_1, \ldots, a_n$ alors que dans la version itérative on procède dans l'ordre inverse.*

```
1  double horner_rec(int i, double x, int n){
2      double a;
3      printf("Entrez coefficient %d\n",i);
4      scanf("%lf",&a);
5      if (i==n){
6          return a;}
7      else{
8          return (a+ x* horner_rec(i+1,x,n));}}
9  double horner_it(double x, int n){
10     double a;
11     double b;
12     printf("Entrez coefficient %d\n",n);
```

2. On voit ici un exemple d'algorithme *en ligne* (*on line* en anglais) dans lequel le programme ne dispose pas d'assez de mémoire ou de temps pour mémoriser toutes les entrées avant de commencer le calcul. Typiquement, on trouve ce type d'algorithme dans des situations où il faut traiter des grandes masses de données et/ou le processeur qui traite ces données a un pouvoir de calcul limité.

```
13      scanf("%lf",&a);
14      int i;
15      for (i=1;i<=n;i=i+1){
16          printf("Entrez coefficient %d\n",(n-i));
17          scanf("%lf",&b);
18          a=b+x*a;}
19      return a;}
```

5.2 Tour d'Hanoï

Le jeu de la tour d'Hanoï est bien connu. On dispose de 3 pivots et de n disques de diamètre différent qu'on peut enfiler dans les pivots. Au début du jeu, tous les disques sont enfilés sur le premier pivot par ordre de diamètre décroissant (le plus petit diamètre est au sommet).

Une action élémentaire du jeu consiste à déplacer 1 disque du sommet d'une pile au sommet d'une autre pile en gardant la propriété qu'un disque n'est jamais au dessus d'un disque de diamètre inférieur.

Le problème est de trouver une suite d'actions élémentaires qui permettent de transférer la pile de n disques du pivot 1 au pivot 2 (par exemple).

Pour $n = 1$, une suite est $1 \to 2$. Pour $n = 2$, une suite est $1 \to 3; 1 \to 2; 3 \to 2$. Pour $n = 3$, ça devient déjà plus compliqué, mais heureusement la solution du problème s'exprime naturellement de façon *récursive* :

$$\mathsf{Hanoi}(i,j,n) = \begin{cases} i \to j & \text{si } n = 1 \\ \mathsf{Hanoi}(i,k,n-1); i \to j; \mathsf{Hanoi}(k,j,n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

où i, j, k sont 3 pivots *distincts*. Le raisonnement est le suivant : pour déplacer n disques du pivot i au pivot j ($i \neq j$), on peut commencer par déplacer $n-1$ disques du pivot i au pivot k ($k \neq i$ et $k \neq j$). Ensuite, on déplace le disque de diamètre maximal qui se trouve au pivot i au pivot j et on termine en déplaçant $n-1$ disques du pivot k au pivot j. Une possible mise en oeuvre en C est la suivante :

```
1  void hanoi (int n, int p1, int p2){
2      int p3=troisieme(p1,p2);
3      if(n==1){
4          imprimer(p1,p2);}
5      else{
6          hanoi(n-1,p1,p3);
7          imprimer(p1,p2);
8          hanoi(n-1,p3,p2);}
9      return;}
```

On laisse au lecteur le soin de programmer la fonction troisieme qui prend $p1, p2 \in \{0, 1, 2\}$ tels que $p1 \neq p2$ et rend l'entier $p \in \{0, 1, 2\}$ différent de $p1$ et $p2$. On notera que chaque appel à la fonction hanoi avec $n > 1$ génère deux appels à la même fonction. En particulier, quand on commence à calculer hanoi$(n-1, \ldots)$ on utilise la pile des blocs d'activations pour se souvenir qu'il reste encore à exécuter imprimer$(\ldots)$ ainsi qu'un deuxième appel hanoi$(n-1, \ldots)$. Le lecteur est invité à modifier le code ci-dessus pour qu'il trace chaque appel à la fonction hanoi en imprimant un petit message.

5.3 Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie par :

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f(n-2)+f(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Il y a des mathématiques non-triviales autour de cette suite... mais ici on s'y intéresse parce que elle illustre un *problème de mise en oeuvre* qu'on rencontre parfois dans les définitions récursives. Une mise en oeuvre directe de la fonction f pourrait être la suivante.

```
1  int fibo_rec(int n){
2      switch(n){
3          case 0: return 0 ;
4          case 1: return 1;
5          default: return fibo_rec(n-2)+fibo_rec(n-1);}}
```

Cette solution est particulièrement inefficace car on recalcule plusieurs fois la fonction f sur les mêmes arguments. Dans le cas de la suite de Fibonacci, il est facile de concevoir une version itérative dans laquelle on calcule $f(0), f(1), f(2), \ldots$ exactement une fois et au pas $i \geq 2$ on se souvient de la valeur de la fonction f dans $i-1$ et $i-2$.

```
1  int fibo_it(int n){
2      int x=0;
3      int y=1;
4      switch(n){
5          case 0: return 0;
6          case 1: return 1;
7          default: {
8              int z=0;
9              int i;
10             for (i=2;i<=n;i++){
11                 z=x+y;
12                 x=y;
13                 y=z;}
14             return(z);}}}
```

Il est intéressant de noter qu'on peut mettre en oeuvre cette même idée en utilisant une fonction récursive un peu plus générale (fonction fibo_aux).

```
1  int fibo_aux(int n,int x, int y,int i){
2      if (i==n){
3          return(y);}
4      else{
5          return fibo_aux(n,y,x+y,i+1);}}
6  int fibo_rec_eff(int n){
7      switch(n){
8          case 0: return 0;
9          case 1: return 1;
10         default: return fibo_aux(n,0,1,1);}}
```

Il existe aussi une technique générale dite de *mémoïsation* qui permet de transformer automatiquement une fonction récursive. On mentionne l'idée générale sans aller dans les détails car on ne dispose pas encore des structures de données nécessaires. On associe à la fonction une structure de données dans laquelle on *mémoïse* tous les arguments passés à

la fonction ainsi que les valeurs retournées. Chaque fois qu'on appelle la fonction avec un argument on vérifie d'abord dans la structure si la fonction a été déjà appelée avec le même argument et dans ce cas on retourne directement le résultat. Autrement, on effectue le calcul et on mémorise le résultat dans la structure.

Chapitre 6

Tableaux

En mathématiques, un *vecteur* de dimension n sur un domaine D est un élément de D^n. Le *tableau* est la structure de données qui correspond au vecteur. Un vecteur de vecteurs est une matrice. De la même façon il est possible de représenter une structure de données à deux dimensions en déclarant un tableau de tableaux.

6.1 Déclaration et manipulation de tableaux

Pour *déclarer un tableau* x de type T et de dimension n on écrit en C :

$$\mathsf{T}\ \mathsf{x}[\mathsf{n}]; \tag{6.1}$$

Ceci a l'effet de réserver un segment de mémoire suffisant pour contenir n données de type T et d'associer l'adresse de base du segment au nom x. On notera que le nom d'un tableau est associé à une adresse et non pas à son contenu.

Dans une déclaration comme (6.1), le contenu du tableau x n'est pas défini. Comme pour les variables de type primitif, il est une erreur de lire un tableau avant de l'avoir défini. En C, il est aussi possible de déclarer un tableau et en même temps de l'initialiser. Par exemple,

$$\mathsf{int\ a}[10] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

déclare un tableau a avec 10 cellules et initialise la i-ème cellule avec la valeur i pour $i = 0, 1, \ldots, 9$.

On peut *écrire* ou *lire* le i-ème élément du tableau en utilisant la notation x[i] à condition que $0 \leq \mathsf{i} \leq (n-1)$. C'est au programmeur de respecter les bornes. En particulier, on notera qu'on commence à compter de 0 et que donc un accès à x[n] produit une erreur.

Exemple 20 *On met en garde le lecteur sur le fait que ce type d'erreur peut passer inaperçu et provoquer un comportement bizarre du programme. Par exemple, avec le compilateur* gcc *le programme ci-dessous compile et imprime* 10.

```
1 int main(){
2     int a[4];
3     int b[4];
4     b[0]=10;
5     printf("%d\n",a[4]);
6     return 0;}
```

Exemple 21 *Voici un programme qui lit le degré et les coefficients d'un polynôme et évalue le polynôme dans un point. Par opposition au programme considéré dans la section 5.1, on utilise maintenant un tableau pour mémoriser tous les coefficients. Il est donc possible de lire complètement les données en entrée avant d'évaluer le polynôme. On laisse au lecteur le soin de modifier le programme ci-dessous de façon à utiliser la règle de Horner.*

```
int main(){
    int n;
    double x;
    printf("Entrez degré polynôme\n");
    scanf("%d",&n);
    printf("Entrez  point\n");
    scanf("%lf",&x);
    double a[n+1];
    int i;
    for (i=0;i<=n;i++){
        printf("Entrez coefficient %d\n", i);
        scanf("%lf",&a[i]);}
    double s=a[0];
    double y=1;
    for (i=1;i<=n;i++){
        y=x*y;
        s=a[i]*y+s;}
    printf("La valeur du polynôme est : %lf\n",s);
    return 0;}
```

6.2 Passage de tableaux en argument

Une fonction peut compter parmi ses *arguments* une variable de type tableau. Par exemple :

```
void f(int x[]){
    x[0]=3;}
```

Comme on l'a déjà remarqué, la *valeur* d'une variable de type tableau est une *adresse de mémoire* (et non pas le contenu du tableau). Par exemple, si on appelle la fonction f comme dans :

```
int y[3];
f(y);
```

on va modifier le tableau de l'appelant (y).

Exemple 22 *Considérons un petit exemple qui permet de comparer les variables de type tableau aux variables de type primitif. Dans* (7)*, on appelle* f *en lui passant l'adresse du tableau* a *et la valeur de la variable* x *de la fonction* main*. Dans* (2)*, la fonction* f *incrémente la variable* x *de* f *et l'élément* a[0] *du tableau* a *de la fonction* main*. Dans* (8)*, on imprime* 0 *car la variable* x *du* main *n'a pas été modifiée alors que dans* (9) *on imprime* 1*.*

```
void f (int a[], int x){
    x=x+1;
    a[0]=a[0]+1;}
int main(){
    int x=0;
```

```
6       int a[10]={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9};
7       f(a,x);
8       printf("x=%d\n",x);
9       printf("a[0]=%d\n",a[0]);
10      return 0;}
```

Remarque 6 *On peut se demander pourquoi on passe les variables de type primitif par valeur et les variables de type tableau par adresse. La raison est que les tableaux peuvent occuper beaucoup de mémoire et qu'autant que possible il est préférable de les partager plutôt que de les dupliquer. En cas de nécessité, il n'est pas compliqué de dupliquer un tableau : il suffit de déclarer un tableau dans la fonction appelée et d'y recopier le tableau dont la fonction appelante a fournit l'adresse. Dans le cas de la fonction* f *de l'exemple 22 ci-dessus, on aura par exemple :*

```
1  void f (int a[], int x){
2       x=x+1;
3       int b[10];
4       int i;
5       for (i=0;i<10;i++){
6           b[i]=a[i];}
7       b[0]=b[0]+1;}
```

Exemple 23 *On souhaite écrire une fonction qui prend en argument un tableau et sa taille et imprime le minimum et le maximum du tableau. Une solution possible est la suivante.*

```
1  void minmax (int a[], int n){
2      int min, max, i;
3      min=a[0];
4      max=a[0];
5      for (i=1;i<n;i++){
6          if (a[i]<min){
7              min=a[i];}
8          else{
9              if (max<a[i]){
10                 max=a[i];}}}
11     printf("min=%d\n",min);
12     printf("max=%d\n",max);
13     return;}
```

En suivant la discussion ci-dessus, on notera que la fonction minmax *utilise le tableau dont l'adresse lui est communiquée par la fonction appelante.*

Dans le pire des cas, la fonction minmax *effectue* $2 \cdot (n-1)$ *comparaison (trouvez un tel cas !). Il est possible d'utiliser un autre algorithme qui lit les éléments du tableau par couple et les compare au* min *et au* max*. Vérifiez qu'on peut effectuer cette opération avec au plus* 3 *comparaisons et dérivez un algorithme qui effectue* $\frac{3}{2}n$ *comparaisons dans le pire des cas.*

6.3 Primalité et factorisation

Soit $n \geq 2$. Si n n'est pas premier alors il y a un premier p tel que $p \mid n$ et $p \leq \sqrt{n}$. Donc tout nombre n qui *n'est pas premier* s'écrit comme :

$$n = i \cdot j, \text{ où : } 2 \leq i \leq \sqrt{n} \text{ et } i \leq j \leq n/i \ .$$

La liste des *premiers inférieurs à un n* donné peut être générée avec un algorithme ancien connu comme *crible d'Ératosthène* :

pour $i = 2, \ldots, n$
    $P[i] =$ true
pour $i = 2, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor$
    pour $j = i, \ldots, n/i$
        $P[i \cdot j] =$ false

Exemple 24 *Pour $n = 15$, on obtient :*

$i\backslash j$	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3		9	12	15		

Exercice 2 *Estimez en fonction de n le nombre de fois qu'on exécute l'affectation $P[i \cdot j] =$* false*. Soit $\pi(n)$ la cardinalité des nombres premiers inférieurs à n. On sait que $\pi(n) \approx n/\log n$. Comparez votre estimation avec la cardinalité des nombres composés inférieurs à n (à savoir $n - \pi(n)$).*

Exemple 25 *Voici une fonction* filtre *qui prend en entrée un tableau de* short *de $n + 1$ éléments et marque avec* 1 *les nombres premiers et avec* 0 *les autres.*

```
1 void filtre (short f[], int n){
2     int i,j;
3     int r =(int)(sqrt(n));
4     for (i=2;i<=n;i++){
5         f[i]=1;}
6     for (i=2;i<=r;i++){
7         for (j=i; j<= n/i; j++){
8             f[i*j]=0;}}}
```

On a donc une méthode pour générer un segment initial des nombres premiers. Considérons maintenant le problème de savoir si un nombre n est premier. Par exemple, prenons $n = 15413$. On calcule,

$$\lfloor\sqrt{15413}\rfloor = 124 \ .$$

Avec le crible d'Ératosthène, on peut calculer les premiers inférieurs à 124 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	97	101	103	107	109	113

Le nombre n est premier si et seulement si aucun de ces nombres divise n. On a donc une méthode qu'on appelle *essai par division* pour savoir si un nombre n est premier. On sait qu'il y a environ $m/\log m$ nombres premiers inférieurs à m. La méthode d'essai par division demande donc environ $\sqrt{n}/\log\sqrt{n})$ divisions ce qui n'est pas très efficace (mais on connaît plusieurs algorithmes efficaces pour savoir si un nombre est premier).

On rappelle que tout nombre $n \geq 2$ admet une factorisation unique comme produit de nombres premiers. On peut *itérer* l'essai par division pour trouver une factorisation complète :

1. On trouve p_1 tel que p_1 divise n.

2. Si $n' = n/p_1$ est premier on a trouvé la factorisation et autrement on itère sur le nombre n'.

Par exemple, pour $n = 15400$ on trouve :

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ .$$

On a donc un algorithme pour *factoriser un nombre*. Voici une mise en oeuvre possible de l'algorithme de factorisation où l'on suppose que la fonction imprimer_factorisation reçoit en argument un tableau de short premier où les nombres premiers ont été marqués en utilisant la fonction filtre du crible d'Ératosthène. Le tableau premier est initialisé une fois et réutilisé dans tous les appels de la fonction imprimer_factorisation. [1]

```
1  void imprimer_factorisation(short premier[], int n){
2      int m = (int)(sqrt(n));
3      int i;
4      for (i=2; i<=m; i++){
5          if (premier[i] && (n%i==0)){
6              printf("%d ",i);
7              break;}}
8      if (i>m){
9          printf("%d",n);
10         return;}
11     else{
12         imprimer_factorisation(premier, n/i);}}
```

6.4 Tableaux à plusieurs dimensions

On peut déclarer des tableaux de tableaux de tableaux... Par exemple :

```
1  int m=3, n=5, p=7;
2  int a[m][n][p];
3  a[0][4][5]=1;
```

En C, on peut omettre seulement la dimension du premier tableau. Ainsi la première déclaration qui suit est admise mais la deuxième ne l'est pas.

```
1  void produit (int a[][5], int b[5][10]){...} // admise
2  void produit (int a[][], int b[][]){...}     // pas admise
```

En pratique, une bonne méthode consiste à passer la dimension du tableau en paramètre. Par exemple, une fonction C qui calcule le produit de deux matrices a et b de dimension $n \times n$ et écrit le résultat dans la matrice c pourrait être la suivante :

```
1  void multiplier (int n, int a[n][n], int b[n][n], int c[n][n]){
2      int i,j,k;
3      for (i=0;i<n;i++){
4          for (j=0;j<n;j++){
5              c[i][j]=0;
6              for (k=0;k<n;k++){
7                  c[i][j]=c[i][j]+a[i][k]*b[k][j];}}}}
```

1. On peut optimiser le calcul en se souvenant du dernier nombre premier essayé et/ou en construisant un tableau qui contient les nombres premiers compris entre 2 et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

On notera que cette fonction contient 3 boucles for imbriquées et qu'elle effectue de l'ordre de n^3 multiplications.

Exemple 26 *On souhaite imprimer les éléments d'un tableau de tableaux* a *de type* int a[m][n] *avec la contrainte que l'élément* a[i][j] *doit être imprimé avant l'élément* a[k][l] *si* $i+j < k+l$. *Par exemple, si* a *est comme suit :*

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

en supposant a[0][0] $= 8$, a[0][1] $= 2$, ..., *une impression qui respecte la contrainte énoncée (il y en a d'autres) est :* $8, 2, 3, 4, 1, 1, 9, 5, 4, 10, 7, 3$ *; on imprime donc 'par diagonale'.*

Pour traiter ce problème, on peut remarquer que la valeur $k = i + j$ *varie entre* 0 *et* $(m + n - 2)$. *Pour un* k *fixé, la première coordonnée* i *varie entre* 0 *et* $min(k, m - 1)$, *alors que la deuxième est déterminée par* $k - i$. *On a donc l'algorithme suivant :*

pour $k = 0, \ldots, (m + n - 2)$
  pour $i = 0, \ldots, min(k, m - 1)$
    si $(k - i) \leq (n - 1)$ imprimer $a[i][k - i]$

Pour le a *en question, avec* $m = 3$ *et* $n = 4$, *on imprime :*

$$8, 2, 3, 1, 1, 4, 4, 9, 5, 10, 7, 3 \ .$$

La fonction C *suivante met en oeuvre l'algorithme.*

```
1  void imprime_diag(int m, int n, int a[m][n]){
2      int k;
3      int i;
4      for (k=0; k<=(m+n-2); k++){
5          int min=(m-1);
6          if (k<min){
7              min=k;}
8          for (i=0; i<=min;i++){
9              if ((k-i)<=(n-1)){
10             printf("%d ", a[i][k-i]);}}}}
```

Chapitre 7

Tri et permutations

Le tri d'une suite finie d'éléments selon un certain ordre est une *opération fondamentale*. En faisant l'hypothèse que la suite est représentée par un tableau, on présente et on analyse l'efficacité de 3 algorithmes de tri. Une *permutation* sur un ensemble fini admet aussi une représentation naturelle en tant que tableau. Dans ce contexte, on étudie la composition, l'inversion, la génération aléatoire et l'énumération de permutations.

7.1 Tri à bulles et par insértion

Dans cette section, on présente 2 algorithmes de tri :

1. Tri à bulles (*bubble sort*, en anglais).
2. Tri par insertion (*insertion sort*, en anglais).

Dans la prochaine section on discutera le tri par fusion (*merge sort*, en anglais). D'autres algorithmes de tri existent dont le tri rapide ou par partition (*quicksort*, en anglais) et le tri par tas (*heapsort* en anglais) ont des performances proches du tri par fusion.

Par défaut, on fait l'hypothèse que la suite est mémorisée dans un *tableau*. Alternativement, on peut aussi envisager de représenter la suite par une *liste* (une structure de données qui sera discutée dans la section 10.1) et dans ce cas il peut être nécessaire de reconsidérer certains détails.

Tri à bulles

On peut écrire une fonction bulles(i) qui compare les $i-1$ couples aux positions :

$$(1,2),(2,3),(3,4),\cdots(i-1,i)$$

et les permute si elles ne sont pas en ordre croissant. Le coût est linéaire en $i-1$. A la fin de l'exécution de bulles(i) on est sûr que l'élément le plus grand se trouve à la position i. Pour trier, il suffit donc d'exécuter :

$$\mathsf{bulles(n)}, \mathsf{bulles(n-1)}, \ldots, \mathsf{bulles(2)} \ ,$$

pour un coût qui est :

$$\Sigma_{i=1,\ldots,n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \ .$$

soit de l'ordre de n^2 opérations élémentaires. Voici un exemple de fonction C qui prend en argument un tableau et sa taille et le trie selon le principe décrit ci dessus.

```
void tri_bulles(int a[], int n){
    int aux, i,j;
    for (i=(n-1);i>=1;i--){
        for (j=0;j<i;j++){
          if (a[j]>a[j+1]){
              aux=a[j];
              a[j]=a[j+1];
              a[j+1]=aux; }}}}
```

Tri par insertion

On peut écrire une fonction insert(i) qui, en supposant les éléments aux positions $i+1, \ldots, n$ en ordre croissant, va insérer l'élément en position i à la bonne place. Le coût est linéaire en $n-i$.

Pour trier il suffit donc d'exécuter :

$$\mathsf{insert}(n-1), \mathsf{insert}(n-2), \ldots, \mathsf{insert}(1) \ ,$$

pour un coût qui est :

$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \ .$$

Soit on a encore de l'ordre de n^2 opérations élémentaires. Une mise en oeuvre de l'algorithme est ci-dessous. Le lecteur est invité à analyser en détail la fonction ins qui effectue l'insertion d'un élément dans un tableau.

```
void ins(int a[], int n, int j){
    int k=a[j];
    int i=j+1;
    while (i<n && k>a[i]){
        a[i-1]=a[i];
        i++;}
    a[i-1]=k;}
void tri_ins(int a[], int n){
    int j;
    for (j=n-2;j>=0;j--){
        ins(a,n,j);}}
```

7.2 Tri par fusion

On a examiné deux algorithmes de tri dont le coût est quadratique dans le nombre d'éléments à trier. Peut-on faire mieux ? On va appliquer une stratégie diviser pour régner dont on a déjà vu un exemple dans le cadre de la recherche dichotomique. Une façon d'appliquer cette stratégie donne lieu au *tri par fusion* (*mergesort*, en anglais) qui a été proposé par Von Neumann autour de 1945.

— Si le tableau a *taille* 1, le tableau est trié.
— Sinon, on sépare le tableau en *deux parties égales* et on les trie.
— Ensuite on fait une *fusion* des deux tableaux triés.

Le coeur de l'algorithme est la *fonction de fusion* de deux ensembles ordonnés. L'idée naturelle est de *parcourir en parallèle* les deux ensembles par ordre croissant (par exemple) et de sélectionner à chaque pas le *minimum* entre les deux. Si l'on représente les ensembles comme des *listes* (section 10.1) il est facile de construire la liste fusion *en place* (sans allocation de mémoire). Cependant, si l'on représente les ensembles comme des *tableaux* il est *beaucoup plus compliqué* (mais possible) de travailler en place. Une solution simple, consiste à utiliser un *tableau auxiliaire*. Avant de commencer la fusion on *copie* les deux tableaux ordonnés dans le tableau auxiliaire et ensuite on écrit la solution dans le tableau de départ. Une mise en oeuvre en C pourrait être la suivante.

```
1  void fusion(int t[], int i, int j, int k){
2      assert((i<=j)&&(j<k));
3      printf("fusion(%d,%d,%d)\n",i,j,k);
4      int aux[k+1];
5      int p;
6      for(p=i;p<=k;p++){
7          aux[p]=t[p];}
8      p=i;
9      int q=j+1;
10     int r=i;
11     while (r<=k){
12         if (p>j){
13             t[r]=aux[q];q++;r++;
14             continue;}
15         if (q>k){
16             t[r]=aux[p];
17             p++;
18             r++;
19             continue;}
20         if ((p<=j) && (aux[p]<=aux[q])){
21             t[r]=aux[p];
22             p++;
23             r++;
24             continue;}
25         if ((q<=k) && (aux[p]>aux[q])){
26             t[r]=aux[q];
27             q++;
28             r++;
29             continue;}}}
30 void trifusion(int t[], int i, int j){
31     assert(i<=j);
32     if (i<j){
33         int m=(i+j)/2;
34         trifusion(t,i,m);
35         trifusion(t,m+1,j);
36         fusion(t,i,m,j);}}
```

Efficacité du tri par fusion

Quelle est l'efficacité du tri par fusion ? Soit $C(n)$ une borne supérieure au temps nécessaire pour trier par fusion un tableau de taille n. On pose la *récurrence* suivante :

$$\begin{aligned} C(1) &= 1 \\ C(n) &= 2 \cdot C(n/2) + n \end{aligned}$$

qui veut dire qu'un problème de taille n génère deux sous-problèmes de taille $n/2$ et effectue un travail de combinaison (la fusion) dont le coût est proportionnel à n.

Pour simplifier le raisonnement, supposons que $n = 2^k$. On a :

$$\begin{array}{lll} 2^0 & \text{problèmes de taille} & 2^k \\ 2^1 & \text{problèmes de taille} & 2^{k-1} \\ \cdots & & \\ 2^k & \text{problèmes de taille} & 2^0 \end{array}$$

La somme du travail de *combinaison* à chaque niveau est *constant* et égal à n. Comme on a $k = \log_2 n$ niveaux, le travail total est de l'ordre de $n\log_2 n$.

Remarque 7 *La* solution de relations de récurrence *est un sujet très vaste (c'est la version discrète des équations différentielles !). Par exemple, on sait traiter toutes les récurrences de la forme :*

$$C(n) = a \cdot C(n/b) + n^c \ .$$

Calcul du nombre d'inversions

On va étudier une application remarquable de la fonction de fusion. On dispose d'un tableau t *non-ordonné* de n éléments. Une *inversion* est un couple (i, j) tel que :

$$1 \leq i < j \leq n \qquad t[i] > t[j]$$

On souhaite calculer le *nombre d'inversions* dans t qui est un nombre compris entre 0 et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 3 *Proposez un algorithme pour calculer le nombre d'inversions. Programmez une fonction* C *qui correspond à l'algorithme d'en tête :* `int inversions(int n, int t[n])`.

Comme il y a de l'ordre de n^2 inversions, tout algorithme qui compte les inversions une par une prendra dans le pire des cas un temps quadratique en n. Pour être plus efficaces il nous faut donc une méthode pour compter plusieurs inversions en même temps. Il se trouve qu'il est possible de modifier la fonction `fusion` ci-dessus de façon telle que l'algorithme de tri par fusion qui l'utilise calcule le nombre d'inversions. Considérons les 4 cas de la boucle `while` de la fonction `fusion` (section 7.1). Dans le deuxième cas, on inverse l'élément `a[q]` avec tous les éléments `a[p]`, ..., `a[j]` et il faut donc ajouter au compteur $j - p + 1$ inversions. Il n'y a pas d'inversion dans les autres 3 cas. En supposant que l'addition d'entiers 32 bits se fait en temps constant, on a une efficacité comparable à celle de l'algorithme du tri par fusion. Voici une application de la méthode à la séquence $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$:

Séquences à fusionner	Nombre inversions
$76, 54, 32, 10$	$4 \cdot 1 = 4$
$6745, 2301$	$2 \cdot 4 = 8$
54670123	$1 \cdot 16 = 16$
	Total $28 = \frac{8 \cdot 7}{2}$

Bornes inférieures

Quelle est le coût minimal d'un algorithme de tri ? Il est clair que tout algorithme de tri doit examiner l'intégralité de son entrée et que le coût de cette opération est linéaire.

Les algorithmes de tri qu'on a considéré sont basés sur la comparaison d'éléments. Pour ce type d'algorithmes un simple argument combinatoire qui va suivre permet de conclure qu'on ne peut pas faire mieux que $n \log n$.

On considère un algorithme (déterministe) qui prend en entrée un tableau de n éléments $x_0, \ldots, x_{n-1}$. L'algorithme compare un nombre fini de fois et deux par deux les éléments du tableau. A la fin de cette phase de comparaison, l'algorithme n'a plus accès au tableau et il calcule une permutation π sur $\{0, \ldots, n-1\}$ telle que $x_{\pi(0)} \leq \cdots \leq x_{\pi(n-1)}$. Combien de comparaisons faut-il faire dans le pire des cas ? Le calcul de l'algorithme peut être visualisé comme un arbre binaire enraciné où on associe une comparaison à chaque noeud interne et une permutation à chaque feuille. L'arbre binaire doit avoir au moins une feuille pour chaque permutation sur $\{0, \ldots, n-1\}$, soit $n!$ feuilles ; sinon, il est facile de voir qu'il y a une entrée sur laquelle l'algorithme n'est pas correct. Le pire des cas correspond au chemin le plus long de la racine à une feuille. La longueur (on compte le nombre d'arêtes qu'il faut traverser) de ce chemin est la *hauteur* de l'arbre. Il est aisé de vérifier qu'un arbre binaire de hauteur h peut avoir au plus 2^h feuilles. On doit donc avoir $2^h \geq n!$, soit :

$$h \geq \log_2 n! = \Sigma_{i=1,\ldots,n} \log_2 i \ .$$

On remarque que :

$$\Sigma_{i=1,\ldots,n} \log_2 i \geq \int_1^n \log_2 x \mathrm{d}x \ ,$$

et en calculant l'intégrale on trouve une valeur de l'ordre de $n \log n$.

L'argument présenté fait des hypothèses restrictives sur la forme de l'algorithme. Voici un exemple d'algorithme qui ne respecte pas ses restrictions et qui a une coût *linéaire* si le nombre d'éléments différents qui peuvent apparaître dans la séquence $x_0, \ldots, x_{n-1}$ est linéaire en n. Pour fixer les idées, on suppose que la séquence est mémorisée dans le tableau T et que $0 \leq T[i] \leq 10 \cdot n$, pour $i = 0, \ldots, n-1$. Dans ce cas, on peut en temps linéaire en n :

— allouer un tableau C avec $10 \cdot n$ entiers initialisés à 0,
— parcourir le tableau T et pour chaque éléments $T[i]$ incrémenter $C[T[i]]$ et
— parcourir le tableau C et pour chaque élément $C[i]$ écrire $C[i]$ fois i dans le tableau T.

7.3 Permutations

Une permutation sur l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ est une fonction bijective $p : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$. On représente une telle permutation par un tableau d'entiers de taille n qui contient les entiers $\{0, \ldots, n-1\}$ exactement une fois. Soit id la permutation identité et $\circ$ la composition de permutations. L'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ est un groupe commutatif. En particulier, chaque permutation admet une permutation inverse par rapport à la composition. Un point fixe d'une permutation p est un élément $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $p(i) = i$.

Exercice 4 *Programmez une fonction* C *d'en tête* `void comp(int n, int r[n], int p[n], int q[n])` *qui prend en entrée deux permutations (représentées par les tableaux* `p` *et* `q`*) et écrit dans le premier tableau* `r` *la représentation de la permutation composition '$p \circ q$'.*

Exercice 5 *Programmez une fonction* C *d'en tête* void inv(int n, int p[n], int q[n]) *qui prend en entrée une permutation (représentée par le tableau* p*) et écrit dans le tableau* q *la représentation de la permutation inverse de* p*.*

Exercice 6 *Programmez une fonction* C *d'en tête* int nbpointfixe(int n, int p[n]) *qui prend en entrée une permutation (représentée par le tableau* p*) et retourne le nombre de points fixes de* p*.*

Énumérer les permutations

On considère maintenant le problème de concevoir un programme qui énumère toutes les permutations sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Par exemple, pour $n = 3$ le programme pourrait imprimer :

```
0 1 2
0 2 1
1 0 2
1 2 0
2 0 1
2 1 0
```

Pour préparer le terrain on peut d'abord considérer le problème suivant : énumérer toutes les *fonctions* sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Une fonction sur $\{0, \ldots, n-1\}$ peut être représentée par un tableau avec n éléments qui varient sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Énumérer les fonctions revient alors à énumérer de tels tableaux. On peut suivre l'algorithme suivant : au pas i on écrit dans la cellule i du tableau la valeur j pour $j = 0, \ldots, n-1$. Pour chaque j, on vérifie si $i = n-1$. Si c'est le cas on imprime le tableau et sinon on incrémente i et on recommence. Voici un codage (à compléter) de cet algorithme en C.

```c
void fonct(int g[], int i, int n){
    int j;
    for (j=0;j<n;j++){
        g[i]=j;
        if (i==(n-1)){
            /* imprimer fonction */ }
        else{
            fonct(g,i+1,n);}}}
int main(){
    int n;
    /* lire n */
    int g[n];
    fonct(g,0,n);
    return 0;}
```

Exercice 7 *Programmez une fonction* C *qui vérifie si une fonction sur* $\{0, \ldots, n-1\}$ *est une permutation. Modifiez le programme ci-dessus pour qu'il imprime seulement les permutations.*

Le programme pour énumérer les permutations dérivé de l'exercice 7 n'est pas particulièrement efficace car il énumère toutes les fonctions sur $\{0, \ldots, n-1\}$ pour ensuite imprimer seulement les permutations. En général, on aura n^n fonctions et seulement $n!$ permutations. Par exemple, pour $n = 7$, on a $7^7 = 823543 >> 5040 = 7!$.

Une approche plus efficace consiste donc à détecter aussi tôt que possible les fonctions partiellement spécifiées qui n'ont aucune chance de devenir des permutations. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction partiellement spécifiée sur $\{0,\ldots,n-1\}$ puisse devenir une permutation est qu'il n'y ait pas un élément répété dans l'image de la fonction (pour construire une permutation il faut utiliser les éléments dans $\{0,\ldots,n-1\}$ exactement une fois). On va donc introduire un deuxième tableau dans lequel on va se souvenir des éléments déjà utilisés dans la construction d'une permutation. Une programmation possible est la suivante.

```
1  void perm(int p[], short f[], int i, int n){
2      int j;
3      for (j=0;j<n;j++){
4          if (f[j]){
5              f[j]=0;      /* j n'est plus disponible */
6              p[i]=j;
7              if (i==(n-1)){
8                  /* imprimer permutation */}
9              else{
10                 perm(p,f,i+1,n);}
11             f[j]=1;     /* j à nouveau disponible */ }}}
12 int main(){
13     int n;
14     /* lire n */
15     int g[n];
16     short f[n];
17     int j;
18     for (j=0;j<n;j++){
19         f[j]=1;}        /* tous j disponibles */
20     perm(p,f,0,n);
21     return 0;}
```

Encore une autre possibilité est de supposer qu'au début le tableau contient une permutation. Ensuite on fait varier un indice i de 0 à $n-1$, un indice j entre i et $n-1$. Pour chaque couple (i,j), on échange l'élément d'indice i avec celui d'indice j, on appelle la fonction d'énumération et on échange encore.

```
1  void perm(int t[],int n, int i){
2      if (i==(n-1)){
3          /* imprimer t */}
4      else{
5          int j;
6          for(j=i;j<n;j++){
7              /* échanger t[i] et t[j] */
8              perm(t,n,i+1);
9              /* échanger t[i] et t[j] */}}}
```

Remarque 8 *Comme pour le problème du déplacement de la tour d'Hanoi (section 5.2) et du tri par fusion (section 7.1), la simplicité de ces programmes repose sur l'utilisation d'une fonction* récursive. *Le lecteur est invité à modifier les programmes afin de tracer tous les appels à la fonction* perm.

Chapitre 8

Types structure et union

Le langage C comporte un certain nombre de types primitifs. Aussi les tableaux et les pointeurs nous permettent de créer des nouveaux types. Par exemple, avec `int a[];` on déclare `a` comme un tableau d'entiers. Dans ce chapitre, on va introduire des nouvelles façons de construire des types.

8.1 Structures

Souvent on a besoin d'*agréger des données de types différents*. Par exemple, le nom (string) et l'âge (int) d'un patient. On pourrait définir un nouveau *type produit* :

$$\text{fiche} = \text{string} \times \text{int} \ .$$

Un élément de type fiche serait donc un *couple*. En utilisant les *projections* on pourrait accéder au premier et deuxième composant. En programmation, on préfère donner des *noms mnémoniques* aux projections. On parle alors de *structures* (en C) ou d'*enregistrements* (*records* en anglais) dans d'autres langages.

La déclaration du type fiche en C pourrait prendre la forme suivante où l'on suppose que 10 caractères suffisent pour représenter un nom :

```
1 struct fiche {char nom[10]; int age;};
```

Si x est une valeur de type struct fiche on peut accéder au premier composant avec x.nom et au deuxième avec x.age. On insiste sur le fait que le nom du type est struct fiche et non pas fiche. Cependant, il est possible d'utiliser le nom fiche en posant :

```
1 typedef struct fiche fiche;
```

La *valeur* d'une variable de type fiche est son contenu et non pas l'adresse de mémoire où ce contenu est mémorisé. De ce point de vue, les variables de type structure se comportent comme les variables de type primitif (int, float,...) et non pas comme les variables de type tableau. Si l'on souhaite utiliser une fonction pour modifier une structure on doit soit passer l'adresse de la structure (comme dans (1)) soit recevoir une copie modifiée de la structure (comme dans (2)). Si on procède comme dans (3), la structure de la fonction appelante n'est pas modifiée. Ainsi, dans (4) le nom imprimé sera georges.

```
1 fiche f(fiche p){
2     strcpy(p.nom,"frank");
```

```
3       return p;}
4   void g(fiche *p){
5       strcpy((*p).nom,"georges");}
6   void main(){
7       fiche p;
8       strcpy(p.nom,"marius");
9       p.age=27;
10      p=f(p);                                          \\(1)
11      g(&p);                                           \\(2)
12      f(p);                                            \\(3)
13      printf("nom=%s,age=%d\n",(p.nom),(p.age));}  \\(4)
```

8.2 Rationnels

Dans cet exemple on illustre l'utilisation du type structure. On utilise le type :

```
1   struct rat{int num; int den;};
2   typedef struct rat rat;
```

pour représenter les nombres rationnels avec les conditions suivantes : (1) le champ num représente le numérateur et le champ den le dénominateur, (2) le champ num est un entier et le champ den est toujours un entier positif et (3) si le champ num est différent de 0 alors le plus grand commun diviseur des champs num et den est 1. Dans la suite un *rationnel* est une valeur de type struct rat qui respecte ces conditions. En particulier, une fonction qui prend en argument un rationnel n'a pas à vérifier ces conditions et une fonction qui rend comme résultat un rationnel doit assurer ces conditions. L'intérêt de cette représentation des rationnels par rapport à celle usuelle qui utilise les flottants est qu'en l'absence de débordements les 4 opérations arithmétiques peuvent être calculées de façon exacte (sans approximations).

Exercice 8 *Programmez une fonction d'en tête* void imp_rat(rat r) *qui prend en argument un rationnel et l'imprime (d'une façon agréable à lire) sur la sortie standard. Ensuite, programmez les fonctions suivantes qui déterminent si un rationnel est égal à un autre rationnel et si un rationnel est plus petit ou égal qu'un autre rationnel.*

```
short eq(rat r, rat s)      // égalité
short leq(rat r, rat s)     // plus petit ou égal
```

Il est utile d'avoir une fonction build qui prend deux nombres entiers n et d avec $d \neq 0$ et rend comme résultat un rationnel qui correspond à $\frac{n}{d}$. Une façon élégante de résoudre ce problème est d'utiliser la fonction pgcd considérée dans l'exemple 4. Dans la suite on suppose aussi que abs(n) est la valeur absolue de l'entier n.

```
1   rat build(int n, int d){
2       assert (d!=0);
3       rat r;
4       if (n==0){
5           r.num=0;
6           r.den=1;
7           return r;}
8       int div = pgcd(abs(n), abs(d));
9       if (d<0){
```

```
10          n=-n;
11          d=-d;}
12      if (div>1){
13          n=n/div;
14          d=d/div;}
15      r.num =n;
16      r.den=d;
17      return r;}
```

On termine cet exemple avec la programmation de 4 opérations arithmétiques sur les nombres rationnels : la somme, l'inverse additive (l'opposé), la multiplication et l'inverse multiplicative (si elle existe).

```
1  rat sum(rat r, rat s){
2      int d = r.den * s.den;
3      int n = r.num * s.den + s.num * r.den;
4      return build(n,d);}
5  rat op(rat r){
6      r.num= -r.num;
7      return r;}
8  rat mul(rat r, rat s){
9      int n= r.num * s.num;
10     int d = r.den * s.den;
11     return build(n,d);}
12 rat inv(rat r){
13     assert (r.num != 0);
14     return(build(r.den,r.num));}
```

8.3 Points et segments

On peut imbriquer les déclarations de type. En particulier, on peut déclarer des types structures qui contiennent des types structures. On développe un exemple qui illustre cette possibilité.

Un point (rationnel) dans l'espace cartésien en dimension 2 est représenté par une valeur de type :

```
1  struct point {rat x; rat y;};
2  typedef struct point point;
```

et un segment (rationnel) est représenté par une valeur de type :

```
1  struct segment {point q1; point q2;};
2  typedef struct segment segment;
```

Les champs `q1` et `q2` correspondent aux points qui déterminent les deux extrémités du segment. Ces extrémités font partie du segment et on peut avoir des segments dégénérés où les deux extrémités coïncident.

On commence par programmer une fonction `allign` qui prend en argument 3 points et retourne 1 s'ils sont alignés (il y a une droite qui passe par les 3 points) et 0 autrement. La fonction utilise une fonction `eqp` pour vérifier l'égalité de deux points et elle distingue 3 cas. Dans (1), au moins deux points sont égaux et donc les 3 points sont alignés. Dans (2), `p1` et `p2` ont la même abscisse et donc les points sont alignes si et seulement si `p3` a la même

abscisse que p1. Dans (3), on sait que les 3 points sont différents et p1 et p2 n'ont pas la même abscisse. On peut donc calculer la droite qui passe par p1 et p2 et vérifier si p3 est sur la droite.

```
short allign(point p1, point p2, point p3){
    if (eqp(p1,p2) || eqp(p1,p3) || eqp(p2,p3)){              //(1)
        return 1;}
    if (eq(p1.x,p2.x)){                                       //(2)
        return eq(p1.x,p3.x);}
    rat a = mul(sum(p2.y,op(p1.y)),inv(sum(p2.x,op(p1.x)))); //(3)
    rat b = sum(p1.y,op(mul(a,p1.x)));
    return eq(p3.y, sum(mul(a,p3.x),b));}
```

Ensuite, on programme une fonction dist qui prend en argument deux points et calcule leur distance Euclidienne exprimée en tant que valeur de type float.

```
float dist(point p1, point p2){
    rat ry = sum(p2.y, op(p1.y));
    rat rx = sum(p2.x,op(p1.x));
    rat r = sum(mul(ry,ry),mul(rx,rx));
    float f = (float)(r.num)/(float)(r.den);
    return sqrt(f);}
```

On illustre la combinaison de tableaux et de structures en programmant une fonction mindist qui prend en argument un tableau de n points ($n \geq 2$) et retourne la distance Euclidienne minimale entre deux points du tableau.

```
float mindist(int n, point t[n]){
    assert(n>=2);
    float min=dist(t[0],t[1]);
    int i,j;
    for(i=0; i<n;i++){
        for (j=i+1; j<n;j++){
            float d= dist(t[i],t[j]);
            if (d<min){
                min=d;}}}
    return min;}
```

Pour un autre exemple de combinaison de tableaux et de structures on programme le calcul du barycentre de n points $p_1, \ldots, p_n$ avec la même masse. On rappelle que dans ce cas le barycentre est égal à la somme (vectorielle) des points multipliée par le scalaire $\frac{1}{n}$.

```
point barycentre(int n, point t[n]){
    point s;
    s.x=build(0,1); s.y=build(0,1);
    int i;
    for (i=0;i<n;i++){
        s.x=sum(t[i].x,s.x);
        s.y=sum(t[i].y,s.y);}
    rat r = build(1,n);
    s.x=mul(s.x,r);
    s.y=mul(s.y,r);
    return s;}
```

Enfin on programme une fonction app qui prend en argument un segment et un point et rend 1 si le point est sur le segment (extrémités comprises) et 0 autrement. Pour résoudre ce

problème, on utilise la propriété suivante : si $x, y \in \mathbf{R}^n$ sont deux vecteurs de nombres réels alors $z \in \mathbf{R}^n$ est dans le segment déterminé par x, y si et seulement si $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. On distingue 3 cas. Dans (1), p1 = p2 et donc il faut que p = p1. Dans (2), p1 et p2 sont différents mais ont la même abscisse ; on calcule le λ en utilisant les ordonnées. Dans (3), on est dans la situation symétrique où p1 et p2 sont différents et n'ont pas la même abscisse ; on peut donc calculer le λ en utilisant les abscisses.

```
short app(point p, segment seg){
    point p1=seg.q1;
    point p2=seg.q2;
    if (eqp(p1,p2)){                                          //(1)
        return eqp(p1,p);}
    rat lam;
    if (eq(p1.x,p2.x)){                                       //(2)
        lam = mul(sum(p.y, op(p2.y)), inv(sum(p1.y,op(p2.y))));}
    else {                                                    //(3)
        lam = mul(sum(p.x, op(p2.x)), inv(sum(p1.x,op(p2.x))));}
    return (leq(build(0,1),lam) && leq(lam,build(1,1)));}
```

8.4 Unions

Parfois on souhaite disposer d'une variable qui peut prendre une valeur de types différents. Par exemple, le nom ou l'âge d'un patient. On pourrait définir un nouveau *type union (disjointe)* :

$$\mathsf{fiche} = \mathsf{string} + \mathsf{int}\ .$$

Un élément de type fiche serait alors soit un string soit un int. A nouveau, on préfère donner des *noms mnémoniques*. Voici une déclaration possible du type fiche en C :

```
union fiche {char nom[10] ; int age;} ;
```

Comme pour les structures, si x a type union fiche on accède à sa valeur en écrivant x.nom ou x.age. Aussi la valeur d'une variable de type union est son contenu (pas son adresse).

Du point de vue de l'utilisation de la mémoire, il peut être intéressant d'utiliser un type union au lieu d'un type structure. Par exemple, pour mémoriser une valeur de type union fiche il faut 10 octets alors que pour mémoriser une valeur de type struct fiche il faut $14 = 10 + 4$ octets.

Dans le langage C, les types unions ne protègent pas le programmeur de certains erreurs. En effet, rien nous empêche d'écrire :

```
union fiche x;
(x.nom)[0]='b';
x.age=x.age+1;
```

En général, le compilateur ne sait pas prévoir si une variable de type union fiche contiendra un tableau de caractères ou un entier. En principe, il est possible de : (i) intégrer dans une valeur de type union une information qui nous permet de déduire son type et (ii) vérifier au moment de l'exécution la cohérence des opérations qu'on effectue sur des valeurs de type union.

Exemple 27 *On suppose qu'une figure est soit un cercle soit un triangle qu'on représente avec les types suivants.*

```
struct point {float x; float y;};
typedef struct point point;
struct cercle {point centre; float rayon;};
typedef struct cercle cercle;
struct triangle {point p1; point p2; point p3;};
typedef struct triangle triangle;
```

On programme une fonction qui prend en argument une figure et retourne son perimètre ; la programmation de la fonction distance dist *est omise.*

```
enum lfig {CERCLE, TRIANGLE};
typedef enum lfig lfig;
union ufig {cercle c; triangle t;};
typedef union ufig ufig;
struct figure {lfig l; ufig u;};
typedef struct figure figure;
float perim(figure f){
    switch(f.l){
        case CERCLE: return 2 * M_PI * f.u.c.rayon;
        case TRIANGLE: return dist(f.u.t.p1,f.u.t.p2)+
                              dist(f.u.t.p1,f.u.t.p3)+
                              dist(f.u.t.p2,f.u.t.p3);
        default: exit(1);}}
```

Et voici deux appels possibles à la fonction perim *:*

```
figure f;
f.l=CERCLE;
f.u.c.centre.x=0;
f.u.c.centre.y=0;
f.u.c.rayon=1;
printf("%f\n",perim(f));
f.l=TRIANGLE;
f.u.t.p1.x=1;
f.u.t.p2.x=0;
f.u.t.p3.x=-1;
f.u.t.p1.y=0;
f.u.t.p2.y=1;
f.u.t.p3.y=0;
printf("%f\n",perim(f));
```

Chapitre 9

Pointeurs

Dans les chapitres précédents on a évoqué l'utilisation de pointeurs (ou adresses de mémoire) dans le cadre de l'utilisation de la fonction scanf (section 2.4) et pour le passage de tableaux comme arguments d'une fonction (section 6.2). Dans ce chapitre, on va examiner d'autres utilisations possibles des pointeurs en C.

9.1 Pointeurs de variables

On a déjà vu que l'opérateur & permet de récupérer l'adresse d'une variable. Donc si x est une variable &x est l'adresse associée à la variable. On peut aussi bien appliquer l'opérateur & à un élément d'un tableau comme dans &(x[3]). Par contre, l'application de l'opérateur & à une entité qui n'a pas une adresse associée produit une erreur. Par exemple &3 n'est pas une expression correcte.

Il existe aussi un deuxième opérateur '*', dit de déréférencement, qui étant donné une adresse permet de récupérer le contenu de l'adresse. En particulier, si x est une variable alors l'évaluation de l'expression $*(\&x)$ donne exactement le même résultat que l'évaluation de la variable x.

Le langage C a une notation un peu particulière pour indiquer les types des pointeurs. Par exemple, plutôt que dire : 'la variable p a le type des pointeurs à int', en C on dit : 'le déréférencement de la variable p a le type int'. Ainsi, la déclaration de la variable p a la forme :

int * p .

De la même façon, pour déclarer un tableau d'entiers on écrit :

int a[]

et pour déclarer une fonction f qui prend en argument un pointeur à un entier et retourne un pointeur à un entier on écrit :

int * f(int * p){...}

On va maintenant considérer différentes utilisation des pointeurs de variables.

Exemple 28 *Dans* 1, p *est un pointeur d'entier qui reçoit l'adresse de* x *dans* 2. *Dans* 3, *le contenu de l'adresse* p *(donc la valeur de* x*) est affecté à* y *et donc dans* 4 *on imprime* 1. *Dans* 5, p *prend l'adresse de* z[0] *et donc dans* 6, *on affecte à* z[0] *la valeur* 1 *qu'on imprime dans* 7.

```
1  main(){
2      int x=1, y=2, z[10], *p;
3      p=&x;
4      y=*p;
5      printf("y=%d\n",y);
6      p=&z[0];
7      *p=1;
8      printf("z[0]=%d\n",*p);}
```

Exemple 29 *La fonction* f *déclare* x *et* y *comme des pointeurs d'entiers. Ainsi,* f *est capable de permuter le contenu des variables* a *et* b *de la fonction appelante* main.

```
1  void f(int *x, int*y){
2      int aux;
3      aux=*x;
4      *x=*y;
5      *y=aux;}
6  main(){
7      int a=1, b=2;
8      f(&a,&b);
9      printf("a %d\n",a);
10     printf("b %d\n",b);}
```

Exemple 30 *La fonction* f *retourne comme résultat un pointeur à sa variable locale* x. *Il convient d'éviter ce type de programme ! La* fonction appelante *ne devrait jamais accéder les variables locales de la* fonction appelée *car ces variables risquent fort d'être compromises quand la fonction appelée retourne. La situation inverse est par contre admissible et on en a déjà vu un exemple avec la fonction* scanf.

```
1  int *f(){
2      int x=1;
3      return &x;}
4  main(){
5      int *p=f();
6      printf("*p=%d\n",*p);}
```

9.2 Pointeurs de tableaux

En C, on peut utiliser les pointeurs pour manipuler les tableaux. Ainsi, les fonctions suivantes ont le même effet :

```
1  void f(int a[]){
2      a[3]=5;}
3  void g(int *p){
4      *(p+3)=5;}
```

La notation pour les tableaux semble plus lisible et autant que possible elle est à notre avis à préférer. Une particularité de C est de permettre une forme limitée d'arithmétique sur les pointeurs. En particulier, il est possible :

— d'obtenir un pointeur en additionnant un pointeur avec un entier.
— d'obtenir un entier en calculant la différence de deux pointeurs.

Ainsi si b et h sont des pointeurs alors l'expression $b + (h - b)/2$ dénote un pointeur alors que l'expression $(b + h)/2$ est refusée par le compilateur.

Exemple 31 *On programme une fonction qui effectue une recherche dichotomique d'un entier* x *sur un segment de mémoire censé contenir une suite croissante de* n *entiers à partir de l'adresse* t.

```
1  int dicho(int *t,int n,int x){
2      int *b=t;
3      int *h=t+(n-1);
4      while(1){
5          int *m=b+(h-b)/2;
6          if (*m==x){
7              return 1;}
8          if ((*m<x)&&(m!=h)){
9              b=m+1;
10             continue;}
11         if ((*m>x)&&(m!=b)){
12             h=m-1;
13             continue;}
14         return 0;}}
```

9.3 Pointeurs de char

La bibliothèque *ctype.h* contient un certain nombre de fonctions qui permettent de classifier et manipuler les valeurs de type char : caractères alphabétiques, minuscules, majuscules, chiffres, espaces,... Notez que la frontière entre caractères et entiers est assez floue. Par exemple, les fonctions en question acceptent en argument et retournent des valeurs de type int.

Les pointeurs sont souvent utilisés pour manipuler des *suites de caractères*. Plusieurs langages ont un type de base string et des fonctions de bibliothèque. En C, on préfère exposer les *détails de la représentation* : ainsi une suite de caractères est un *pointeur de* char qui se termine par un caractère spéciale $'\backslash 0'$. De façon équivalente, c'est un *tableau de* char dont la fin est marquée par $'\backslash 0'$. L'inconvénient de cette approche 'bas niveau' est que c'est à la charge du programmeur d'allouer des tableaux assez grands !

Exemple 32 *Dans* 4 *on utilise la directive* %s *pour lire une chaîne de caractères. La chaîne ne doit pas dépasser* 10 *caractères (en comptant aussi le symbole spécial* \0*). Ce programme utilise deux fonctions de la bibliothèque* string.h*, à savoir* strcpy *(copie) et* strcat *(concaténation). Dans* 7*, on copie* i *dans* o *et dans* 8 *on concatène* middle *à* o*. De même, dans* 9 *on concatène* i *à* o*. Enfin, dans* 10 *on imprime* o *avec la directive* %s*. Ce type de programmation est* fragile *à cause des débordements possibles des tableaux de caractères qui ne sont pas remarqués par le compilateur. Ainsi, il est possible que dans* 10 *on imprime aussi le contenu du tableau* b *qui à priori n'a rien à voir avec le contenu du tableau* o*.*

```
1  main(){
2      char i[10];
3      printf("Entrez une chaine\n");
4      scanf("%s",i);
5      char o[20];
```

```
6       char b[10]="philippe";
7       strcpy(o,i);
8       strcat(o,"middle");
9       strcat(o,i);
10      printf("%s\n",o);}
```

Exercice 9 *Programmez une fonction qui prend en argument un mot (représenté par une pointeur de caractères) et le remplace par le mot inverse. Par exemple, abacus est remplacé par sucaba. Programmez une fonction qui prend en argument deux mots et retourne* 1 *si le premier précède le deuxième dans l'ordre de l'annuaire téléphonique et* 0 *autrement.*

9.4 Fonctions de fonctions et pointeurs de fonctions

Il n'est pas rare de rencontrer des fonctions qui prennent des *fonctions comme argument* et/ou qui rendent une *fonction comme résultat*. Par exemple, en analyse les opérations de dérivation et d'intégration prennent une fonction en argument et rendent une fonction comme résultat. Dans certains langages de programmation, il est possible d'écrire et de typer directement ces fonctions d'*ordre supérieur*. Dans le langage C, on considère qu'une fonction est l'adresse d'un segment de code et on utilise les *pointeurs de fonction* pour manipuler ces adresses. [1]

Exemple 33 *Voici une fonction* intmap *qui attend en argument un pointeur de fonction* f *de* int *vers* int *et un tableau de* n *entiers et applique la fonction* f *à chaque élément du tableau.*

```
1  void intmap(int(*f)(int), int n, int t[n]){
2      int i;
3      for(i=0;i<n;i++){
4          t[i]=(*f)(t[i]);}}
```

On peut appeller la fonction intmap *en lui passant en argument, par exemple, une fois une fonction pour élever au carré et une autre fois une fonction pour élever au cube comme dans le code suivant.*

```
1  int square(int x){
2      return x*x;}
3  int cube(int x){
4      return x*x*x;}
5  void main(){
6      int t[5] = {4,4,1,0,3};
7      intmap(square,5,t);
8      (...)
9      intmap(cube,5,t);
10     (...)}
```

Exemple 34 *On peut adapter la fonction* intmap *de l'exemple précédent aux chaînes de caractères. Voici une fonction* stringmap *qui attend un pointeur de fonction* f *de* char *vers* char*, un pointeur à une chaîne de caractères* c *et une longueur* l *et applique la fonction* f *à chaque caractère en prenant en compte la longueur* l *et le caractère spécial qui marque la fin de la chaîne.*

1. En général, ce point de vue est insuffisant et il est necéssaire d'ajouter de l'information pour représenter l'environnement dans lequel la fonction est définie.

```
1 void stringmap(char(*f)(char), char * c, int l){
2     unsigned i=0;
3     while((i<l)&&(*(c+i)!='\0')){
4         *(c+i)=(*f)(*(c+i));
5         i++;}}
```

9.5 Fonctions génériques et pointeurs vers void

Les fonctions intmap et stringmap des exemples 33 et 34 sont suffisamment similaires pour envisager d'écrire une seule fonction map. On parle alors de fonctions *génériques* ou *polymorphes*. Certains langages de programmation, ont un système de typage assez puissant pour exprimer les caractéristiques communes de intmap et stringmap. En C, le mécanisme de base pour écrire des fonctions génériques consiste à utiliser un pointeur vers void en sachant que :

— tout pointeur est converti implicitement à un pointeur vers void,
— tout pointeur vers void peut être converti explicitement par le programmeur à un pointeur d'un type arbitraire.

Par exemple, la fonction swap ci-dessous prend un tableau de pointeurs vers void et permute les premiers deux pointeurs du tableau. On peut déclarer un tableau tint de pointeurs d'entiers et appeler swap((void *)tint) et aussi déclarer un tableau de pointeurs de caractères tchar et appeler swap((void *)tchar).

```
1 void swap(void * t[2]){
2     void * aux;
3     aux=t[0];
4     t[0]=t[1];
5     t[1]=aux;}
```

En général, le programmeur utilise l'opérateur de cast pour autoriser certaines manipulations. Dans ce cas, c'est à la charge du programmeur de s'assurer que l'utilisation des pointeurs est cohérente. Considérons le programme suivant.

```
1 int void_inc(void  *p){
2     int x=*(int*)(p);
3     return x+1;}
4 void main(){
5     int y=1;
6     printf("%d\n", void_inc(&y));
7     char a='a';
8     printf("%d\n", void_inc(&a));}
```

Dans 2, la fonction void_inc prétend que p pointe vers un entier mais dans 8 la fonction main lui passe en argument un pointeur vers un caractère. Ainsi, avec mon compilateur le programme imprime 2 et 75780194 ! Cet exemple montre qu'en faisant des cast, le programmeur peut introduire des erreurs de typage qui ne seront pas détectés par le compilateur.

Exemple 35 *Avec les reserves évoquées ci-dessus, voici une façon de programmer et d'utiliser une fonction* map *générique.*

```
1 void mapgen(void * tab, int n, size_t t, void (*f)(void *)){ //(1)
2     int i;
```

```
3       for(i=0;i<n;i++){
4           f(tab+(i*t));}}
5   void square(void *x){                                   //(2)
6       int *a=(int *)x;
7       *a=(*a)*(*a);}
8   void main(){
9       int a[3]={4,5,6};
10      mapgen(a,3,sizeof(int),square);}                    //(3)
```

Dans (1)*, la fonction* mapgen *attend un pointeur (vers un tableau)* tab*, le nombre d'éléments* n *du tableau, leur taille (en octets)* t *et un pointeur de fonction* f *qui attend un pointeur et ne retourne pas de résultat (la fonction* f *agit donc par effet de bord). Pour utiliser la fonction* mapgen *pour élever au carré un tableau d'entiers, on commence par déclarer dans* (2) *une fonction* square *du type attendu par* mapgen*. La fonction convertit explicitement un pointeur vers* void *en pointeur vers* int *et ensuite élève au carré son contenu. Notez que dans* (3) *le compilateur ne fait pratiquement aucune vérification ; c'est l'utilisateur qui doit assurer la cohérence des arguments fournis à* mapgen*.*

Exemple 36 *On aimerait écrire une fonction de* tri *qui prend en argument un tableau d'éléments de type* T *et un prédicat de comparaison* cmp : T × T → Bool *et qui trie le tableau par ordre croissant d'après l'ordre défini par le prédicat. Il s'agit donc de combiner la notion de pointeur de fonction avec celle de fonction générique. On illustre l'approche dans le cadre de la fonction de tri* qsort *qui se trouve dans la bibliothèque* stdlib.h*. Le type de la fonction* qsort *est le suivant :*

```
1   void  qsort(void *base, size_t n, size_t size,
2               int (*cmp)(const void *,const void *))
```

- base *pointe à un tableau (du moins on l'espère car son type est pointeur vers* void*).*
- size_t *est un type prédéfini d'entiers non-signés. La fonction* sizeof(T) *donne la taille (en octets) d'une valeur de type* T*.*
- n *est la taille du tableau.*
- size *est la taille d'un élément du tableau.*
- const *indique que l'argument n'est pas modifié (est constant).*
- cmp *prend deux arguments et rend une valeur* négative*,* 0 *ou* positive *si le premier est* plus petit*,* égal *ou* plus grand *que le second.*

Il est possible d'appliquer la fonction de tri qsort *à des tableaux de type différent et avec des prédicats de comparaison différents. Par exemple, pour trier de façon croissante un tableau d'entiers avec l'ordre standard on peut déclarer une fonction de comparaison* cmp_int *et un tableau d'entiers* t *et appeler la fonction* qsort*. Mais on peut aussi déclarer une fonction de comparaison sur les caractères* cmp_char *avec un ordre alphabétique décroissant et un tableau de caractères* a *et y appliquer la même fonction* qsort*.*

```
1   int cmp_int(const void  *p,const void *q){
2       int x=*(const int*)(p);
3       int y=*(const int*)(q);
4       if (x<y){
5           return -1;}
6       else {
7           if (x==y){
8               return 0;}
```

```
9           else {
10              return 1;}}}
11  int cmp_char(const void *p, const void *q){
12      char x=*(const char*)(p);
13      char y=*(const char*)(q);
14      if (x>y){
15          return -1;}
16      else {
17          if (x==y){
18              return 0;}
19          else{
20              return 1;}}}
21  void main(){
22      int t[5] = {4,4,1,0,3};
23      qsort(t, (size_t)5, sizeof(int),cmp_int);
24      char a[4] = {'a', 'd', 'c', 'a'};
25      qsort(a, (size_t)4, sizeof(char), cmp_char);}
```

9.6 Pointeurs de fichiers

Les pointeurs de fichiers permettent de gérer les entrées sorties en utilisant des fichiers plutôt que l'écran comme on l'a fait jusqu'à maintenant.

Par exemple, supposons que l'on souhaite lire les entrées d'un fichier input et imprimer les sorties dans un fichier output.

Une première solution consiste à utiliser les opérateurs de redirection de Unix comme dans :

```
./a.out < input > output
```

Une deuxième solution consiste à utiliser les opérateurs C de la bibliothèque stdio.h qui remplacent l'entrée standard par le fichier input et la sortie standard par output. Cette deuxième solution est plus flexible et elle ne dépend pas du système d'exploitation. Voici un exemple de programme.

```
1  void main(){
2      int x; FILE * f;
3      f=fopen("input","r");          //f pointe vers input
4      fscanf(f,"%d",&x);
5      fclose(f);                     //f ne pointe plus vers input
6      f=fopen("output","w");         //f pointe vers output
7      fprintf(f,"%d\n",x+1);
8      fclose(f);}                    //f ne pointe plus vers output
```

Supposons maintenant que l'on souhaite passer à l'exécutable des *arguments*. Par exemple, les noms des fichiers qu'il doit lire/écrire comme dans :

```
./a.out input output
```

Jusqu'à maintenant, on a supposé que la fonction main ne prend par d'arguments. Cependant, il est possible de déclarer des arguments pour cette fonction comme dans l'exemple suivant.

```
1 void main(int argc, char *argv[]){
2     int x; FILE * f;
3     f=fopen(argv[1],"r");
4     fscanf(f,"%d",&x);
5     fclose(f);
6     f=fopen(argv[2],"w");
7     fprintf(f,"%d\n",x+1);
8     fclose(f);}
```

La variable argc représente le nombre d'arguments qu'on passe à l'exécutable (2 dans notre exemple) et la variable argv est un tableau de chaînes de caractères (techniquement un tableau de pointeurs de char). Par convention, le premier élément de ce tableau argv[0] est réservé pour le nom de l'exécutable. Les noms des fichiers input et output qu'on passe en argument à l'exécutable a.out sont donc mémorisés dans argv[1] et argv[2] respectivement.

Exercice 10 *Voici un exercice qui permet d'utiliser les différents aspects des pointeurs décrits dans ce chapitre. Il s'agit de reprogrammer la fonction* sort *de* Unix.

- *Ouvrez un fichier* input.
- *Comptez le nombre de lignes dans le fichier* input *et le nombre maximum de caractères par ligne.*
- *Allouez un tableau qui contient tous les caractères du fichier et un tableau qui contient les pointeurs au debut de chaque ligne dans le premier tableau.*
- *Utilisez la fonction de bibliothèque* qsort *pour trier le tableau de pointeurs en suivant l'ordre alphabétique.*
- *Imprimez les lignes ordonnées dans un fichier* output.

Chapitre 10

Listes et gestion de la mémoire

En C, il est possible de déclarer des types *structure* qui contiennent des types pointeurs à la structure qu'on est en train de déclarer. Il s'agit d'une forme de définition *récursive* (au niveau des types plutôt qu'au niveau des fonctions). Ce type de déclarations ouvre la possibilité de représenter des données avec des formes plus ou moins élaborées : des *listes*, des *arbres*, des *graphes*,... Dans ce chapitre introductif, on se limitera à considérer les *listes* qu'on peut visualiser comme des suites d'éléments constitués d'une valeur et d'un pointeur vers le prochain élément de la suite. Il est naturel de considérer des listes dont la taille varie dynamiquement pendant le calcul et dans ce contexte on est amené à reconsidérer le modèle mémoire de C. Il est aussi naturel d'adapter aux listes les algorithmes qui utilisent les tableaux et de représenter des ensembles finis comme des listes.

10.1 Listes

En C, on peut déclarer par exemple :

```
1 struct node{int val; struct node *next;};
2 struct tnode{int tval; struct tnode *left; struct tnode *right;};
```

La structure node contient un champ next qui est un pointeur à une structure node et la structure tnode contient deux champs left et right qui sont des pointeurs à une structure tnode. On peut utiliser node pour représenter des listes et on verra plus tard qu'on peut utiliser tnode pour représenter des arbres binaires. En C on peut voir une liste non vide (d'entiers) comme une collection de valeurs de type struct node avec adresses $\ell_1, \ldots, \ell_n$ telle qu'il existe une permutation π sur $\{1, \ldots, n\}$ avec la propriété que :

$$\begin{array}{ll} \ell_{\pi(1)} \to \mathsf{next} & = \ell_{\pi(2)} \\ \ell_{\pi(2)} \to \mathsf{next} & = \ell_{\pi(3)} \\ \cdots & \\ \ell_{\pi(n-1)} \to \mathsf{next} & = \ell_{\pi(n)} \\ \ell_{\pi(n)} \to \mathsf{next} & = \mathsf{NULL} \end{array}$$

La notation $\ell \to$ next indique le contenu du champ next de la structure node mémorisée à l'adresse ℓ. On note qu'en C on peut écrire p−> val à la place de (∗p).val.

La valeur NULL est un pointeur (adresse) prédéfini de C. Le pointeur NULL habite tous les types pointeur mais c'est une erreur d'essayer d'accéder un champ du pointeur NULL. Par exemple, le programme suivant compile mais produit une erreur au moment de l'exécution car dans (1) on cherche à lire le champ val de NULL.

```
1 void main(){
2     struct node {int val; struct node *next;} ;
3     struct node x,y;
4     x.val=3;
5     y.val=4;
6     x.next = &y;
7     printf("%d", (*(x.next)).val);
8     x.next = NULL;
9     printf("%d",(*(x.next)).val);}                    //(1)
```

10.2 Allocation de mémoire

Les listes permettent une gestion de la mémoire plus flexible. Supposons que l'on doit lire et mémoriser une suite d'entiers dont on ne connaît pas le nombre à l'avance. Une approche possible serait d'allouer un tableau... mais comment décider la taille du tableau ? On risque de ne pas avoir un tableau assez grand ou d'utiliser seulement une petite partie du tableau. Une solution plus flexible consiste à allouer une structure qui par exemple a le type :

```
1 struct tabnode{int t[1000]; struct tabnode * next;};
```

Une telle structure peut mémoriser jusqu'à 1000 entiers et au cas où elle serait saturée il est possible d'allouer une autre structure du même type et de la connecter à la précédente. De cette façon on pourra continuer à lire et mémoriser la suite d'entiers tant que la mémoire (virtuelle) de l'ordinateur contient un segment suffisant à contenir une valeur de type struct tabnode (typiquement 4004 octets). On peut remarquer qu'on paye un petit prix pour cette flexibilité : environ 1 octet sur 1000 est utilisé pour mémoriser les pointeurs du champ next.

Dans notre exemple, on doit allouer dynamiquement (pendant le calcul) des structures de type tabnode. En C, pour *allouer* une structure on utilise la fonction malloc de la bibliothèque stndlib.h. [1] Il convient d'encapsuler la fonction malloc dans une fonction C. Par exemple, pour allouer une structure de type node on peut utiliser la fonction suivante.

```
1 struct node {int val; struct node * next;};
2 typedef struct node node;
3 node *allocate_node(int v){
4     node *p=malloc(sizeof(node));
5     (p->val)=v;
6     (p->next)=NULL;
7     return p;}
```

La fonction sizeof est une autre fonction de bibliothèque qui prend en entrée un type et retourne un nombre naturel qui indique le nombre d'octets nécessaires pour mémoriser une valeur du type en question. Par example, pour le type node ce nombre est typiquement 8. La fonction malloc retourne un pointeur vers void qui est l'adresse de base du segment de mémoire alloué. Remarquons aussi que la fonction allocate_node initialise les champs val et next de la structure.

1. D'autres fonctions avec des fonctionnalités comparables sont calloc et realloc.

10.3 Récupération de mémoire

Le langage C n'a *pas de ramasse miettes* (*garbage collector*, en anglais). La récupération de la mémoire allouée avec malloc est *à la charge du programmeur* et elle est possible avec la fonction de bibliothèque free. [2]

Si p est un pointeur à un bloc de mémoire (par exemple, un pointeur à une structure) alors free(p) a l'effet de libérer le bloc et donc de le rendre réutilisable dans les prochains appels à malloc.

Il est *catastrophique* :

— d'appeler free(p) et ensuite d'accéder au bloc pointé par p en lecture ou écriture.

— d'exécuter plusieurs fois free(p).

Utilisez free seulement si vous n'avez *pas assez de mémoire* et si vous êtes sûrs que l'élément libéré ne sera *pas utilisé* dans la suite du calcul.

Remarque 9 *L'introduction de* malloc *et* free *nous oblige à* raffiner *notre* modèle de la mémoire*. On peut maintenant distinguer* 3 zones de mémoire*.*

— *Une* zone statique *où l'on mémorise les* données globales *dont la vie termine avec la terminaison du programme.*

— *Une* pile *où l'on mémorise les* données locales *à un appel de fonction dont la vie termine avec le retour de la fonction. La machine s'occupe de récupérer automatiquement cet espace mémoire.*

— *Un* tas *où le programmeur alloue de la mémoire avec* malloc *et la récupère avec* free*.*

10.4 Tri par insertion avec des listes

Une suite finie d'éléments se représente aisement comme une liste et dans ce cadre on peut adapter aux listes les algorithmes développés pour les tableaux. On considère le cas du tri par insertion (section 7.1). On suppose la déclaration du type struct node ci-dessus. La fonction isort prend une liste d'entiers et la trie par ordre croissant en utilisant la fonction auxiliaire d'insertion ins. On fait un calcul *en place* (*in place*, en anglais) à savoir on n'alloue pas des nouvelles structures mais on se limite à modifier les pointeurs des champs next des structures existantes. Le nombre d'opérations élémentaires dans cette version du tri par insertion sur les listes est toujours quadratique dans le pire des cas dans le nombre d'éléments à trier.

```
1  node * ins(node * list, node * n){
2      assert(n!=NULL);
3      if (list==NULL){
4          (n->next)=NULL;
5          return n;};
6      if ((list->val)>=(n->val)){
7          (n->next)=list;
8          return n;};
9      (list->next)=ins(list->next,n);
10         return list;}
11 node * isort(node * list){
12     if (list==NULL){
13         return list;};
14     return ins(isort(list->next), list);}
```

2. Alternativement, on peut utiliser des bibliothèques, voir par exemple [BW88].

10.5 Ensembles finis comme listes

On considère le problème de représenter les sous-ensembles finis d'un certain ensemble ordonné (et pas forcement fini). Dans la suite nous traiterons des ensembles finis de nombres entiers avec l'ordre standard. Les opérations dont l'on souhaite disposer sur ces ensembles finis sont les suivantes :

— création de l'ensemble vide (emp).
— insertion d'un élément (ins).
— test d'appartenance d'un élément (mem).
— élimination d'un élément (rem).
— impression de l'ensemble (pri).

On choisit de représenter un ensemble fini par une liste. Ce choix à l'avantage de la simplicité mais d'autres solutions plus efficaces (arbres binaires de recherche, tables de hachage, listes à enjambements,...) sont possibles.

Comme dans la section 10.1, nous ferons l'hypothèse que chaque noeud est représenté par une structure avec 2 champs avec noms val pour une valeur entière et next pour un pointeur. En C, on va supposer la déclaration de type structure suivante :

```
1 struct node{int val; struct node *next;};
2 typedef struct node node;
```

On rappelle aussi la fonction qui alloue une structure node en utilisant la fonction malloc.

```
1 node *allocate_node(int v){
2     node *p=(node *)(malloc(sizeof(node)));
3     (*p).val=v;
4     (*p).next=NULL;
5     return p;}
```

On va supposer que les entiers dans l'ensemble sont mémorisés dans la liste par ordre croissant. Un escamotage qui permet de simplifier la programmation des opérations consiste à créer deux noeuds sentinelles qui contiennent des entiers non-standard $-\infty$ et $+\infty$. En pratique, on peut utiliser les constantes INT_MIN et INT_MAX de la bibliothèque limits.h. La liste qui correspond à l'ensemble vide va donc contenir deux noeuds avec valeurs INT_MIN et INT_MAX. La fonction C qui permet de créer l'ensemble vide est la suivante.

```
1 node * emp(){
2     node *head = allocate_node(INT_MIN);
3     node *tail = allocate_node(INT_MAX);
4     (*head).next=tail;
5     return head;}
```

Les deux opérations plus compliquées sont celles pour insérer et éliminer. Elles ont une structure assez similaire qui consiste à faire glisser deux pointeurs pred et curr dans la liste jusqu'à trouver le point où l'action d'insertion ou d'élimination doit avoir lieu. On remarquera que l'insertion utilise la fonction malloc et l'élimination la fonction free.

```
1 void ins(int v, node *list){
2     node *pred=list;
3     node *curr=(list->next);
4     while ((curr->val)<v){
5         pred=curr;
6         curr=(curr->next);}
```

```
7       if((curr->val)!=v){
8           node * new=allocate_node(v);
9           (new->next)=curr;
10          (pred->next)=new;}
11       return;}
12  short rem(int v, node *list){
13      node *pred=list;
14      node *curr=(list->next);
15      while ((curr->val)<v){
16          pred=curr;
17          curr=(curr->next);}
18      if((curr->val)==v){
19          (pred->next)=(curr->next);
20          free(curr);} //FREE
21      return 0;}
```

Exercice 11 *Programmez les fonctions pour tester l'appartenance et pour imprimer un ensemble.*

Exercice 12 *Reprogrammez les fonctions* ins *et* rem *en supposant que maintenant on n'a pas de noeuds sentinelles et que donc l'ensemble vide correspond à la liste vide.*

Exercice 13 *On souhaite représenter des ensembles d'entiers avec au plus n éléments. Fixez une représentation de ces ensembles par des tableaux d'entiers et étudiez la mise en oeuvre des opérations* emp, ins, mem, rem *et* pri *évoquées au début de cette section.*

Exercice 14 *Un multiensemble est un ensemble où chaque élément peut être dupliqué un certain nombre de fois. Formellement, un multiensemble sur un ensemble support A est une fonction $m : A \to \mathbf{N}$. Le nombre naturel $m(a)$ indique le nombre de copies disponibles de l'élément a ; on dit aussi la* multiplicité *de a. Un multiensemble m est* fini *si $\{a \in A \mid m(a) > 0\}$ est fini. On peut effectuer sur les multiensembles finis des opérations similaires à celles évoquées pour les ensembles finis. La différence est que l'opération d'insertion augment de 1 la multiplicité d'un élément et l'opération d'élimination la diminue de 1 (si elle est positive). On prend le support A comme l'ensemble des entiers. Proposez une représentation des multiensembles d'entiers par des listes.*

Chapitre 11

Piles et queues

On introduit deux exemples élémentaires de *structures de données* : les piles et les queues. Une structure de données est un peu l'analogue informatique d'une structure algébrique (groupes, anneaux,...) : on y trouve des données et un certain nombre de fonctions pour les manipuler. Un principe de base de la modularisation des programmes consiste à concevoir des structures de données dans lesquelles on distingue une représentation *externe* visible à l'utilisateur et une représentation *interne* qui devrait être invisible à l'utilisateur. Dans ce contexte, les structures de données constituent un élément essentiel pour la *modularisation* d'un programme. On présente une technique de programmation qui permet de réaliser cette idée en C et on termine en discutant deux applications des structures de données introduites.

11.1 Piles et queues

On considère des *suites finies* sur un ensemble support A (par exemple les nombres entiers) avec opérations pour insérer et éliminer un élément de la suite. Dans ce contexte, on distingue deux structures de données : la *pile* et la *queue*. Dans les deux cas, on peut supposer que l'opération d'insertion consiste à prolonger la suite d'un élément. Ainsi l'insertion d'un élément a dans la suite $a_0, \ldots, a_{n-1}$ produit la suite $a_0, \ldots, a_{n-1}, a$. La différence apparaît alors dans l'opération d'extraction. Dans une *pile*, l'élément extrait est le dernier de la suite (si la suite est non vide) ; donc le dernier élément inséré est le premier à être extrait (*last-in first-out (LIFO)*, en anglais). Dans une *queue*, l'élément extrait est le premier de la suite (si la suite est non vide) ; donc l'élément extrait est le premier inséré (*first-in first-out (FIFO)*, en anglais).

Si on connaît le nombre maximum d'éléments dans une pile (ou dans une queue) et si ce nombre est raisonnable alors on peut stocker les éléments dans un *tableau*. Autrement, on peut utiliser une *liste*. Il est assez facile de mettre en oeuvre les opérations d'insertion et d'extraction en *temps constant* ; c'est à dire avec un nombre d'opérations élémentaires qui ne dépend pas du nombre d'éléments dans la structure. On va commenter les 4 cas possibles.

Pile comme liste

On dispose d'une variable top de type pointeur à un noeud de la liste. On peut créer une pile en initialisant top à NULL. Pour insérer un élément, on alloue avec malloc un nouveau noeud qui contient l'élément et on l'insère au sommet de la liste. Pour extraire un élément, on vérifie d'abord que top $\neq$ NULL et dans ce cas on récupère le premier noeud de la liste.

Pile comme tableau

On dispose d'un tableau p et d'une variable top de type entier qui contient l'indice de la première cellule libre du tableau. On peut créer une pile en déclarant le tableau et en initialisant top à 0. Pour insérer un élément on l'écrit dans p[top] et on incrémente top. Pour extraire un élément on vérifie d'abord que top > 0 et si c'est le cas on décrémente top et on retourne p[top].

Queue comme liste

On dispose de deux pointeurs aux noeuds de la liste : head et tail. On peut créer une queue en initialisant head et tail à NULL. On insère un élément en allouant un noeud qui est pointé par tail. On élimine un élément en récupérant le noeud pointé par head (s'il existe) et en faisant pointer head au noeud suivant (ou à NULL). Si nécessaire on mettra à jour tail aussi. Le lecteur remarquera que pour réaliser les opérations en temps constant il est important de disposer d'un deuxième pointeur (tail), d'insérer à la fin de la liste et d'éliminer à son sommet. Par exemple, pour éliminer un noeud à la fin de la liste on est obligé de parcourir toute la liste ; une opération qu'on ne sait pas faire en temps constant.

Queue comme tableau

On dispose de deux variables de type entier head et tail et d'un compteur count aussi de type entier. On peut créer une queue en allouant un tableau q avec n cellules et en initialisant head, tail et count à 0. Les éléments de la queue vont être mémorisés dans les cellules du tableau comprises entre head et tail (strictement) étant entendu qu'on compte modulo n. Ainsi si n=10, head=7 et tail=2 les éléments de la queue se trouvent dans q[7],q[8],q[9],q[0],q[1]. La fonction ins retourne une valeur 0 ou 1 pour indiquer si la queue est déjà *pleine*. La fonction rem retourne une constante INT_MIN pour indiquer que la queue est *vide*.

```
1  short ins(int x){
2      assert(n>=1);
3      short r;
4      if (count==n){
5        r=0;}
6      else{
7        q[tail]=x;
8        tail=(tail+1)%n;
9        count++;
10       r=1;}
11     return r;}
12 int rem(){
13     int r;
14     if (count==0){
15         r=INT_MIN;}
16     else{
17         r=q[head];
18         head=(head+1)%n;
19         count--;}
20     return r;}
```

11.2 Modularisation

En C, pour pallier à l'absence d'un mécanisme de définition d'une interface on effectue un découpage (assez pénible) du programme en fichiers et on décore certaines fonctions et variables avec le mot static.

Une déclaration de variable ou de fonction qui est précédée par le mot static est visible seulement dans le fichier où se trouve la déclaration. Par ailleurs, une variable static déclarée dans une fonction est initialisée une seule fois et elle garde sa valeur d'un appel au suivant. Ainsi elle se comporte comme une sorte de variable globale qui est visible seulement par la fonction.

Comme exemple, on considère la construction d'un module pour une pile d'entiers. On commence par définir un fichier stack.h qui contient les éléments suivants :

```
1 #ifndef STACK_H
2 #define STACK_H
3 typedef int item;
4 extern void init_stack(int);
5 extern short empty_stack();
6 extern void insert_stack(item);
7 extern item elim_stack();
8 #endif
```

Le fichier stack.h pourrait être importé par d'autres fichiers plusieurs fois et dans ce cas les lignes $1, 2, 8$ assurent que les définitions dans le fichier stack.h seront prises en compte une seule fois. Ces lignes ne sont pas vraiment utiles dans l'exemple en question mais c'est une bonne pratique de les mettre dans les fichiers .h pour éviter des ennuis dans des situations plus compliquées.

Dans 3, on déclare le type item des éléments qui vont constituer la pile ; dans notre cas il s'agit d'entiers. Dans $4-7$, on déclare les prototypes des fonctions pour la gestion de la pile qu'on qualifie de fonctions extern.

On associe au fichier stack.h un fichier stack.c qui contient la mise en oeuvre de la pile. Par exemple, le fichier stack.c pourrait être le suivant. Notez que dans (1) on inclut le fichier stack.h. Un fichier, disons user.c qui voudrait utiliser les fonctions de la pile devrait aussi contenir cette directive.

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <assert.h>
4  #include "stack.h"                    \\(1)
5  static item * stack=NULL;
6  static int head=-1;
7  static int size=-1;
8  void init_stack(int m){
9      if(head==-1){
10         stack=malloc(sizeof(item)*m);
11         head=0;
12         size=m;}}
13 short empty_stack(){
14     if(head==0){
15         return 1;}
16     if(head>0){
17         return 0;}
```

```
18      assert(0);}
19  void insert_stack(item d){
20      assert(head<(size-1));
21      if(head>=0){
22          stack[head]=d;
23          head++;}}
24  item elim_stack(){
25      assert(head>0);
26      head--;
27      return stack[head];}
```

On a maintenant 3 fichiers à traiter : stack.h, stack.h, user.c. En principe, la commande cc -o user user.c stack.c suffit à produire un exécutable user. Cependant, il n'est pas rare de se trouver dans des situations où il y a beaucoup plus de fichiers. Dans ces cas, il est recommandé de déclarer les dépendances entre les fichiers dans un fichier Makefile et de laisser la commande make s'occuper de la compilation. Dans le cas en question, le contenu du fichier Makefile pourrait être le suivant :

```
CC=gcc
CFLAGS=-Wall -std=c11
LDLIBS= -lm
ALL = user
user : user.o stack.o
user.o : user.c
stack.o : stack.c
```

La ligne CC spécifie le compilateur, la ligne CFLAGS les paramètres de compilation, la ligne LDLIBS les bibliothèques à charger, la ligne ALL le nom de l'exécutable et les lignes suivantes expriment les dépendances. Les fichiers .o sont des fichiers intermédiaires entre le code source et l'exécutable. Ces fichiers sont générés à partir des fichiers source et ils sont ensuite combinés (on dit aussi liés) pour produire l'exécutable. [1]

11.3 Applications

On discute deux exemples d'application des structures *pile* et *queue*.

Exemple 37 *On a vu dans la section 1.2 que l'interprétation d'un programme* C *utilise une pile de blocs d'activation : à chaque appel de fonction on empile le bloc de la fonction appelée et à chaque retour de fonction on dépile le bloc qui se trouve au sommet de la pile. En particulier, cette pile permet de comprendre le fonctionnement des fonctions* récursives *(chapitre 5).*

En principe, il est possible de se passer des appels récursifs mais le prix à payer est une gestion explicite de la pile. Pour illustrer la méthode on reprend l'exemple de la tour d'Hanoï (section 5.2).

```
1   void hanoi (int n, int p1, int p2){
2       int p3=troisieme(p1,p2);
3       if(n==1){
4           imprimer(p1,p2);}
5       else {
6           hanoi(n-1,p1,p3);
```

1. Ceci est juste un petit aperçu des possibilités offerte par l'outil make.

```
7           imprimer(p1,p2);
8           hanoi(n-1,p3,p2);}
9       return;}
```

Pour transformer cette fonction récursive *en une fonction* itérative *(avec des boucles mais sans appels récursifs), on va introduire une pile qui contient des triplets* (n, p, p') *où* n *est la hauteur de la tour qu'on veut déplacer et* p *et* p' *sont deux pivots différents. On va donc redéfinir le type* item *du fichier* stack.h *de la section précédente comme suit :*

```
1 struct han {int hauteur; int pivot1; int pivot2;};
2 typedef struct han item;
```

On est maintenant prêt à introduire la version itérative de la fonction hanoi. *Dans* (1) *on initialise une pile assez grande (exercice !), dans* (2) *on insère dans la pile le triplet qui correspond au problème initial, à partir de* (3)*, tant que la pile est non-vide, on extrait un problème et on distingue deux situations :*

- *si la tour a hauteur* 1 *on imprime directement la solution,*
- *sinon on empile trois sous-problèmes ; le lecteur remarquera que l'ordre d'empilement est* inversé *par rapport à l'ordre des appels récursifs dans la fonction* hanoi.

```
1  static void hanoi_it(int n, int p1, int p2){
2      init_stack(2*n);                                    //(1)
3      item d={n,p1,p2};
4      insert_stack(d);                                    //(2)
5      while(!(empty_stack())){                            //(3)
6          item c=elim_stack();
7          if (c.hauteur==1){
8              imprimer(c.pivot1,c.pivot2);}
9          else{
10             int p3=troisieme(c.pivot1,c.pivot2);
11             item b1={c.hauteur-1, p3, c.pivot2};
12             insert_stack(b1);
13             item b2={1,c.pivot1,c.pivot2};
14             insert_stack(b2);
15             item b3={c.hauteur-1, c.pivot1, p3};
16             insert_stack(b3);}}}
```

Exemple 38 *On considère* n *villes* $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ *et on s'intéresse au nombre minimum de vols qui sont nécessaires pour connecter la ville* v_0 *aux villes* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$*. On dispose d'un tableau de tableaux d'entiers* c *tel que*

$$\mathsf{c[i][j]} = \begin{cases} 1 & \textit{s'il y a un vol direct de } v_i \textit{ à } v_j \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Le problème est de calculer un tableau d'entiers d *tel que* $d[i]$ *est le nombre minimum de vols nécessaires à connecter la ville* v_0 *à la ville* v_i*. On appelle ce nombre l'éloignement de* v_i *de* v_0*. Par convention, ce nombre est* 0 *si* $i = 0$ *et* INT_MAX *si* $i \neq 0$ *et il est impossible d'aller de* v_0 *à* v_i*. Un algorithme possible est le suivant.*

1. *On initialise le tableau* d *comme suit :*

$$\mathsf{d[i]} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i = 0 \\ \mathsf{INT\_MAX} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

2. *On initialise une* queue *qui contient la ville* 0.
3. *Tant que la* queue *n'est pas vide :*
   (a) *on extrait une ville* v_i *de la queue ; soit* $d = \mathsf{d}[\mathsf{i}]$.
   (b) *on calcule l'ensemble :*

$$V = \{v_j \mid \mathsf{c}[\mathsf{i}][\mathsf{j}] = 1 \text{ } et \text{ } \mathsf{d}[\mathsf{j}] = \mathsf{INT\_MAX}\}$$

   (c) *pour tout* v_j *dans* V*, on pose* $\mathsf{d}[\mathsf{j}] = d + 1$ *et on insère* v_j *dans* queue.

L'intérêt de la structure queue *dans cet exemple est qu'elle nous permet d'examiner les villes accessibles par ordre d'éloignement croissant. Notez aussi que chaque ville est insérée dans la queue au plus une fois et qu'à cette occasion son éloignement est déterminé. Vérifiez que si l'on remplace la* queue *par une* pile*, l'algorithme décrit ci-dessus n'est pas correct.*

Chapitre 12

Preuve et test de programmes

Dans ce chapitre on introduit la problématique de la *preuve* et du *test* de programmes. On évoquera quelques idées générales sans aller dans les détails. En effet, il faudrait un cours entier pour traiter le sujet de façon systématique car la *pratique* de la preuve d'algorithmes et de programmes passe par l'étude d'un certains nombre de méthodes de *déduction automatique* et par l'apprentissage d'au moins un *assistant de preuve*.

12.1 Preuve d'algorithmes

On considère qu'un algorithme est une description mathématique d'un procédé de calcul et qu'un programme est la mise-en-oeuvre de ce procédé dans un langage de programmation. On s'attend donc à que la preuve d'un algorithme soit plus facile que la preuve du programme correspondant car il faut se soucier de moins de détails. Notamment, on n'a pas besoin d'un modèle formel de l'exécution du programme. On s'intéresse d'abord à la preuve d'algorithmes dont voici les ingrédients principaux.

- Un modèle abstrait des *états* du calcul dont certains sont identifiées comme états terminaux.
- Des *règles de calcul* pour transformer les états.
- Une preuve que si on part d'un état avec une certaine propriété (la *pré-condition*) et on itère les règles de calcul alors si on arrive à un état terminal on satisfait une autre propriété (la *post-condition*). Cette partie de la preuve s'articule autour de la définition d'un *invariant*. En première approximation, un invariant est un ensemble d'états dont on ne peut pas sortir en appliquant les règles de calcul.
- Une preuve qu'à partir d'un état qui satisfait la pré-condition on arrivera bien à un état terminal (l'algorithme *termine*). Cette partie de la preuve se base sur l'interprétation du calcul dans un *ordre bien fondé*. Un ordre bien fondé est un ordre dans lequel toute suite strictement décroissante est finie.

On aborde les différentes notions évoquées (états, règles de calcul, invariant, interprétation dans un ordre bien fondé) dans le cadre d'un exemple concret : le tri par insertion.

Modèle des données On fixe un ensemble Σ avec un ordre total. On modélise la suite des valeurs à trier comme un mot $w \in \Sigma^*$. On écrit ϵ pour le mot vide, $w \cdot w'$ pour la concaténation de mots et $|w|$ pour la longueur d'un mot.

Spécification On voit le tri par insertion comme une fonction isort sur les mots. Cette fonction doit satisfaire la propriété suivante : pour toute séquence $w \in \Sigma^*$, $\mathsf{isort}(w)$ est

une *séquence croissante* et une *permutation* de w.

Sous-spécification Pour décrire le calcul de la fonction isort on introduit une fonction d'insertion :

$$\mathsf{ins} : \Sigma \times \Sigma^* \to \Sigma^* \ .$$

Cette fonction doit satisfaire la propriété suivante : pour tout $a \in \Sigma$, pour toute *séquence croissante* w, $\mathsf{ins}(a, w)$ est une *séquence croissante* et une *permutation* de $a \cdot w$.

Algorithme pour ins On décrit un algorithme pour l'insertion par récurrence sur la longueur de la séquence w en entrée :

$$\begin{array}{ll} \mathsf{ins}(a, \epsilon) & = a \\ \mathsf{ins}(a, b \cdot w) & = \begin{cases} a \cdot b \cdot w & \text{si } a \leq b \\ b \cdot \mathsf{ins}(a, w) & \text{autrement.} \end{cases} \end{array}$$

Algorithme pour isort Dans le même style, on décrit un algorithme pour le tri :

$$\begin{array}{ll} \mathsf{isort}(\epsilon) & = \epsilon \\ \mathsf{isort}(a \cdot w) & = \mathsf{ins}(a, \mathsf{isort}(w)) \ . \end{array}$$

Ces définitions sont assez concrètes pour induire des règles de calcul. Par exemple, le tri du mot $3 \cdot 2 \cdot 1$ pourrait correspondre aux étapes de calcul suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathsf{isort}(3 \cdot 2 \cdot 1) & \to \mathsf{ins}(3, \mathsf{isort}(2 \cdot 1)) \\ \to \mathsf{ins}(3, \mathsf{ins}(2, \mathsf{isort}(1))) & \to \mathsf{ins}(3, \mathsf{ins}(2, \mathsf{ins}(1, \mathsf{isort}(\epsilon)))) \\ \to \mathsf{ins}(3, \mathsf{ins}(2, \mathsf{ins}(1, \epsilon))) & \to \mathsf{ins}(3, \mathsf{ins}(2, 1)) \\ \to \mathsf{ins}(3, 1 \cdot \mathsf{ins}(2, \epsilon)) & \to \mathsf{ins}(3, 1 \cdot 2) \\ \to 1 \cdot \mathsf{ins}(3, 2) & \to 1 \cdot 2 \cdot \mathsf{ins}(3, \epsilon) \\ \to 1 \cdot 2 \cdot 3 \ . & \end{array}$$

Le prédicat 'séquence croissante' On considère maintenant une définition formelle des prédicats évoqués dans la spécification. Le prédicat séquence croissante est les plus petit prédicat unaire sur les mots qui satisfait les conditions suivantes :

$$\frac{}{ord(\epsilon)} \qquad \frac{}{ord(a)} \qquad \frac{a \leq a' \quad ord(a' \cdot w)}{ord(a \cdot a' \cdot w)}$$

Le prédicat 'permutation' La formalisation de la relation de permutation n'est pas aussi directe. On peut définir :

— Une fonction $\mathsf{elim}(a, w)$ qui *élimine* la première occurrence de a dans la séquence w (si elle existe).

— Un prédicat *occurrence* $occ(a, w)$ qui vérifie si a est dans la séquence w.

— Une prédicat binaire *plongement* $pl(w, w')$ tel que :

$$\frac{}{pl(\epsilon, w)} \qquad \frac{pl(w, \mathsf{elim}(a, w')) \qquad occ(a, w')}{pl(a \cdot w, w')}$$

et enfin définir la permutation comme un plongement dans les deux sens :

$$perm(w, w') \equiv (pl(w, w') \wedge pl(w', w)) \ .$$

Remarque 10 *On notera qu'il est aussi facile de se tromper dans la description de l'algorithme que dans sa spécification. Dans notre cas, l'algorithme est comparable en taille et complexité à sa spécification. Par ailleurs, la façon de spécifier a un impact sur la preuve !*

Preuve de correction La preuve de correction d'un algorithme se décompose souvent en deux parties : une preuve de terminaison du calcul et une preuve qu'un certain prédicat est un invariant (est préservé) par le calcul. Dans notre cas, la preuve de terminaison est très simple et elle se résume à l'observation que les fonctions ins et isort sont bien définies par récurrence sur la taille du mot en entrée. On verra dans la section 12.2 des preuves de terminaison plus compliquées. Concernant la formalisation de l'invariant, on s'attend, entre autres, qu'à chaque état du calcul on manipule une permutation de la suite initiale d'éléments (voir l'exemple de calcul ci-dessus). Plus précisément, on peut montrer par récurrence sur $|w|$:

$$\forall\, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma \ \ (\ ord(w) \text{ implique } (ord(\mathsf{ins}(a,w)) \text{ et } perm(a \cdot w, \mathsf{ins}(a,w))))) \ ) \ .$$

Ensuite, on dérive par récurrence sur $|w|$:

$$\forall\, w \in \Sigma^* \ \ (\ ord(\mathsf{isort}(w)) \text{ et } perm(w, \mathsf{isort}(w)) \ ) \ .$$

12.2 Terminaison

Dans ces notes de cours, les preuves de terminaison sont assez *directes*. Cependant, en général le problème de savoir si un programme termine est *indécidable* et il est aussi possible de construire des programmes simples dont la terminaison est un *problème ouvert*.

Exemple 39 *Voici un* problème difficile *connu comme fonction* 91 *de McCarthy. La fonction suivante termine-t-elle ?*

```
1 int f(int n){
2     if (n > 100){
3         return n - 10;}
4     else {
5         return f(f(n+11));}}
```

Exemple 40 *La fonction suivante, connue comme fonction de Collatz, termine-t-elle ? Il s'agit d'un* problème ouvert.

```
1 void collatz(int n){
2     if (n>1){
3         if (n%2==0){
4             collatz(n/2);}
5         else {
6             collatz(3*n+1);}}}
```

Une stratégie générale pour prouver la terminaison d'un programme est d'interpréter ses états de calcul dans un ensemble bien fondé.

Définition 2 (ensemble bien fondé) *Un* ensemble bien fondé *(*well-founded *en anglais) est un couple* $(W, >)$ *où :*

1. W *est un* ensemble.
2. $>\subseteq W \times W$ *est une* relation transitive.
3. *Il n'existe* pas de séquence infinie $w_0 > w_1 > w_2 > \cdots$ *dans* W *(en particulier, pour tout* $w \in W$, $w \not> w$ *!)*

Exemple 41 *Voici des exemples d'ensembles bien fondés.*
- *L'ensemble* $\mathbf{N}$ *des* nombres naturels *avec l'ordre standard*
- *L'ensemble* $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.
- *L'ensemble* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *avec l'*ordre produit.
- *L'ensemble des* formules *du calcul propositionnel ordonnées selon leur taille.*

Et des non-exemples.
- *L'ensemble* $\mathbf{Z}$ *des nombres* entiers *avec l'ordre standard.*
- *L'ensemble des nombres* rationnels positifs *avec l'ordre standard.*
- *L'ensemble*

$$A = \bigcup \{\mathbf{N}^k \mid k \geq 1\} \ ,$$

avec un ordre $>$ *tel que :*

$$(y_1, \ldots, y_m) > (x_1, \ldots, x_n) \text{ ssi } \exists\ k \leq min(n, m)\ (x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1}, y_k > x_k) \ .$$

Comment prouver la terminaison d'un programme ? Revenons au modèle d'exécution du programme. Un *état* décrit, à un niveau d'abstraction adapté, la configuration de la machine à un certain moment du calcul. Le *calcul* (déterministe) d'un programme à partir d'un état initial peut donc être vu comme une suite (éventuellement infinie si le programme boucle) d'états. Soit A l'*ensemble des états possibles* et pour $a, a' \in A$ écrivons $a \to a'$ si le programme va *avec un pas de calcul* de l'état a à l'état a'.

Une *condition suffisante (et nécessaire)* pour montrer la terminaison du programme est de trouver un *ordre bien fondé* $(W, >)$ et une *interprétation* $\mu : A \to W$ telle que :

$$a \to a' \text{ implique } \mu(a) > \mu(a') \ .$$

En effet, dans ce cas un *calcul infini* : $a_0 \to a_1 \to a_2 \cdots$, implique *une suite descendante infinie* ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que $(W, >)$ est bien fondé : $\mu(a_0) > \mu(a_1) > \mu(a_2) > \cdots$

Exemple 42 *Considérons la terminaison de programmes* while *de la forme suivante (inspirée par la recherche dichotomique) :*

```
while(u > l + 1){
    r = (u + l)/2;
    if(b){
        u = r; }
    else{
        l = r; }}
```

Ici on suppose que les variables u, l, r *prennent comme valeurs des* nombres naturels *et que la* condition logique b *donne toujours un résultat et ne modifie pas* u, l, r.

Pour montrer la terminaison il suffit de montrer que la boucle while *est exécutée un nombre fini de fois. L'exécution du* corps de la boucle *dépend et affecte les variables* l, r, u. *Donc on peut supposer qu'un* état *est un* triplet de nombres naturels $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$, x, y, z *étant les valeurs des variables* l, r, u.

Si $z > (x + 1)$ *et selon la branche* then *ou* else *suivie, une itération de la boucle engendre les transformations suivantes :*

$$\begin{array}{lcll} (x, y, z) & \to & (x, (x + z)/2, (x + z)/2) & \textit{(branche then)} \\ (x, y, z) & \to & ((x + z)/2, (x + z)/2, z) & \textit{(branche else)} \end{array}$$

Prenons comme ordre bien fondé *les* nombres naturels *avec l'ordre standard et définissons :*

$$\mu(x, y, z) = (z - x) \ .$$

Il est un exercice *(facile) de vérifier que si* $z > (x + 1) \geq 1$ *alors :*

$$\begin{array}{lcll} (z-x) & > & \mu(x, (x+z)/2, (x+z)/2) & = (x+z)/2 - x \\ (z-x) & > & \mu((x+z)/2, (x+z)/2, z) & = z - (x+z)/2 \ . \end{array}$$

Donc si le programme bouclait on aurait une suite descendante infinie dans $\mathbf{N}$ *ce qui est impossible !*

Exercice 15 *Considérez la relation suivante sur* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *:*

$$(x, y) >_l (x', y') \text{ si } x > x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y > y') \ .$$

Montrez que :

1. *La relation* $>_l$ *est* transitive.
2. *L'ensemble* $\{(x, y) \mid (2, 2) >_l (x, y)\}$ *est* infini.
3. *Néanmoins* $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, >_l)$ *est un ordre* bien fondé. [1]

Exercice 16 *Les programmes* while *suivants terminent-t-ils en supposant que les variables varient sur les nombres naturels positifs ?*

```
while(m ≠ n){
    if(m > n){
        m = m − n;}
    else{
        n = n − m;}}
```

```
while(m ≠ n){
    if(m > n){
        m = m − n;}
    else{
        h = m;
        m = n;
        n = h;}} .
```

12.3 Preuve de programmes

Est-ce raisonnable de considérer les fonctions isort et ins de la section 12.1 comme des programmes ? La réponse est positive si les mots sont un type primitif. Par exemple, voici les fonctions ins et isort dans un langage fonctionnel de la famille ML.

```
let rec ins a x = match x with
  [] -> [a];
| b::w -> if (a<=b) then a::b::w else b::(ins a w);;

let rec isort x = match x with
  []   -> []
| a::w -> ins a (isort w) ;;
```

Considérons maintenant la mise-en-oeuvre de l'algorithme de tri par insertion dans le langage C en supposant que les éléments à trier sont mémorisés dans un tableau partagé. Dans ce cas, chaque fonction spécifie une série de transformations qui modifient le tableau. Par exemple, voici les fonctions ins et isort en C

1. $>_l$ est un exemple d'*ordre lexicographique.*

```
1  void ins(int a[], int n, int j){
2      int k=a[j];
3      int i=j+1;
4      while (i<n && k>a[i]){
5          a[i-1]=a[i];
6          i++;}
7      a[i-1]=k;}
8  void isort(int a[], int n){
9      int j;
10     for (j=n-2;j>=0;j--){
11         ins(a,n,j);}}
```

La spécification et la preuve sont similaires mais il y a maintenant *beaucoup plus de détails* dont il faut se soucier ! Par exemple, considérons la fonction ins. Il *n'est pas vrai* qu'à chaque pas de calcul, le tableau a contient une permutation de son contenu initial. Si on fait ins(a, 4, 0) sur le tableau {5,1,4,10} on a :

5	1	4	10
1	1	4	10
1	4	4	10
1	4	5	10

Il faut donc *trouver un invariant plus général* pour mener à bien la preuve.

Dans certains domaines (logiciels critiques), on assiste à l'introduction de techniques de preuve formelle de programmes. Ces preuves comportent un grand nombre de détails et elles sont développées en utilisant des *assistants de preuve*. Par exemple, l'outil Frama-C, développé au CEA (`http://frama-c.com/`), est un assistant de preuve spécialisé pour traiter des programmes C. Un assistant de preuve comporte un certain nombre de stratégies qui permettent d'automatiser la synthèse de certaines portions relativement simples de la preuve et d'un petit programme qui est capable de vérifier la correction de l'intégralité de la preuve.

12.4 Test de programmes

Il faut prendre la preuve d'algorithmes et de programmes avec un grain de sel. Voici quelques raisons pour se méfier.

— On fait des erreurs dans la *spécification du problème*.

— La preuve de certains algorithmes sont de nature *très combinatoire* (on oublie des cas...).

— Le passage de la spécification et modèle de l'algorithme à la spécification et modèle du programme entraîne de nombreux *erreurs* (choix des structures de données,...) et *approximations* (flottants,...)

— Par ailleurs, le modèle de programmation peut être *ambigu* (les manuels sont informels...) et/ou pas forcement cohérent avec la *mise-en-oeuvre*.

Pour toutes ces raisons, en pratique il faut toujours *tester* le programme. Le *but* du test est de trouver des erreurs ; en général le test ne peut pas prouver la correction d'un programme. Notez que ce principe implique qu'il n'y a pas de réponse claire à la question : à quel moment peut-on arrêter de tester un programme ? En général, ça dépend du temps dont on dispose.

Un avantage et un inconvénient du test est que ce qu'on teste est le *code compilé* sur *une certaine machine*. Le même programme avec un compilateur et/ou une machine différents pourrait avoir un comportement différent.

On peut remarquer que le travail fait pour la preuve de l'algorithme est souvent bénéfique pour le test. En particulier, pour tester il faut une *spécification* de ce que le programme est censé faire. Pour certains tests (*white box*), il est aussi utile d'avoir un *modèle du langage de programmation*, à savoir un modèle de comment le programme exécute. Par exemple, pour tester tous les branchements du programme. La construction du modèle est un travail pour les *experts*. Il doit être *simple* et en même temps permettre de *prédire* correctement le comportement d'une grande partie des programmes.

Une bonne pratique consiste à garder au moins un test pour chaque erreur trouvée dans le programme et à exécuter à nouveau ce test à chaque modification du programme ; dans ce contexte on parle de *test de non-régression*.

Une autre bonne pratique consiste à *automatiser la génération et la vérification des tests*. Par exemple, dans le cas du tri par insertion on pourrait générer des permutations aléatoires avec la méthode de la section 7.3 et vérifier le résultat en utilisant un autre algorithme de tri ou alors en gardant une bijection entre les éléments dans le tableau en entrée et ceux dans le tableau trié.

Une fois qu'on a acquis une certaine confiance en la correction fonctionnelle du programme, on s'attachera à tester sa *performance*. Par exemple, on chronomètre le temps d'exécution et l'occupation de mémoire sur des entrées de taille croissante. Pour des programmes qui allouent dynamiquement de la mémoire dans le tas (voir chapitre 10), on cherchera aussi à détecter des *fuites de mémoire*, à savoir des situations dans lesquelles des segments de mémoire qui ne sont plus utilisés par le programme ne sont pas récupérés.

En général, le programme qu'on teste va interagir avec d'autres programmes qui ne respectent pas forcement sa spécification. Ainsi il est utile de tester le comportement du programme sur des entrées qui ne sont pas prévues par la spécification. On dira qu'un programme est *robuste* s'il est capable de continuer à fonctionner dans un environnement hostile.

Chapitre 13

Complexité asymptotique

On introduit la notion de complexité asymptotique d'un algorithme. Il s'agit d'une mesure qui n'est pas très sensible aux détails de la mise en oeuvre et qui permet d'avoir une première estimation de l'efficacité d'un algorithme.

On considère aussi des méthodes probabilistes pour *tester* la correction et l'efficacité d'un programme et on évoque des notions alternatives de complexité (complexité moyenne et complexité amortie).

13.1 O-notation

Définition 3 (O-notation) *Soient $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ deux fonctions sur les nombres naturels. On dit que f est $O(g)$ si :*

$$\exists\, k, n_0 \geq 0 \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; f(n) \leq k \cdot g(n) \;.$$

Exemple 43 *Voici des exemples et des non-exemples.*

3457	*est*	$O(1)$
$25 \cdot n + 32$	*est*	$O(n)$
$7 \cdot n \cdot \log n + 1$	*est*	$O(n \cdot \log_2 n)$
$n \cdot \sqrt{n} - 50$	*n'est pas*	$O(n \cdot \log n)$
3^n	*n'est pas*	$O(2^n + n^5)$.

Définition 4 (fonction de coût) *Soit A un algorithme qui termine. On associe à A une fonction de côut $c_A : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que, pour tout n, $c_A(n)$ est le coût maximal d'une exécution de l'algorithme A sur une entrée de taille au plus n.*

Typiquement, la taille d'une entrée est le nombre de bits nécessaires à sa représentation et le coût d'une exécution est le *temps* mesuré comme le nombre d'*étapes élémentaires* de calcul. Ce qui constitue une étape élémentaire dépend du modèle de calcul. Par exemple, on peut considérer qu'un accès à la mémoire principale ou la multiplication de deux entiers sur 64 bits prennent un temps borné par une constante. D'autre part, dans certaines applications les données ne peuvent pas tenir en mémoire principale ou alors on est amené à traiter des entiers avec un grand nombre de chiffres. Dans ces cas, le coût de ces opérations sera fonction de la taille de la mémoire nécessaire à l'exécution du programme ou de la taille des entiers à

traiter, respectivement. On remarque que la fonction c_A est bien définie car A termine et il y a un nombre fini d'entrées possibles de taille au plus n. On note aussi que par définition c_A est croissante : si $n \leq n'$ alors $c_A(n) \leq c_A(n')$.

Définition 5 (complexité asymptotique) *Un algorithme A est $O(g)$ si sa fonction de coût c_A est $O(g)$.*

Remarque 11 *La notation O nous donne une* information synthétique sur l'efficacité *d'un algorithme/programme. Mais notez que :*

- *Il s'agit d'une* borne supérieure*.*
- *On considère le* pire des cas*.*
- *On* cache les constantes*. Un algorithme qui prend $3n^2$* msec *est utilisable, un algorithme qui prend $2^{80}n$* msec *ne l'est pas.*
- *Le coût d'une opération élémentaire sur une* vraie machine *peut varier grandement. Par exemple on peut avoir un facteur 10^2 entre un* cache hit *(la donnée est en mémoire* cache*) et un* cache miss *(elle n'y est pas). Les optimisations effectuées par le compilateur peuvent avoir un impact important sur la complexité observée.*
- *Dans les calculs en virgule flottante, on doit aussi se soucier de la stabilité numérique des opérations.*

Pour toutes ces raisons, dans les applications, la borne O doit être confortée par une analyse plus fine *et des* tests*.*

Exemple 44 (tri) *Considérons les algorithmes de tri étudiés dans le chapitre 7 et supposons que les affectations, les branchements, les comparaisons et les opérations arithmétiques prennent un temps constant $O(1)$. Cette hypothèse est raisonnable si les données qu'on trie on une taille bornée ; par exemple on manipule des nombres flottants sur 64 bits. Dans ce cas, les analyses esquissées permettent d'affirmer que les algorithmes de tri à bulles et de tri par insertion ont une complexité $O(n^2)$ alors que l'algorithme de tri par fusion a une complexité $O(n \log n)$.*

Exemple 45 (analyse recherche dichotomique) *On considère la fonction* dicho *suivante :*

```
1  int dicho(int n, int t[n], int v){
2      int i=0;
3      int j=n-1;
4      while (1){
5          int m=(i+j)/2;
6          int vm=t[m];
7          if (vm==v){
8              return m;}
9          else{
10             if (vm<v && m<j){
11                 i=m+1;}
12             else{
13                 if (vm>v && i<m){
14                     j=m-1;}
15                 else{
16                     return -1;}}}}}
```

Supposons qu'on appelle dicho *en lui passant en argument un tableau* t *non vide d'entiers triés par ordre croissant et un entier* v*. Le lecteur peut vérifier que dans ce cas la fonction*

effectue une recherche dite dichotomique *de la valeur* v *dans le tableau* t. *Si elle trouve* v *elle retourne sa position dans le tableau et sinon elle retourne* -1.

Que peut-on dire sur la complexité asymptotique de la fonction ? La taille de l'entrée est proportionnelle au nombre d'éléments du tableau t. *Il s'agit donc de compter en fonction de* n *et dans le pire des cas, le nombre de pas élémentaires que la fonction va effectuer avant de retourner le résultat.*

On remarque que la fonction contient des affectations, des branchements, des opérations arithmétiques et une boucle while. *Comme pour les algorithmes de tri de l'exemple précédent, on peut faire l'hypothèse que chaque affectation, branchement et opération arithmétique prend un temps constant et dans ce cas déterminer la complexité asymptotique de la fonction revient à déterminer en fonction de* n *combien de fois la boucle* while *peut être exécutée dans le pire des cas. Initialement on a* $i = 0$ *et* $j = \mathsf{len}(\mathsf{t}) - 1$. *Donc* $i \leq j$. *A chaque itération de la boucle si on ne termine pas alors on passe d'un intervalle de recherche* $[i, j]$ *à un intervalle qui est soit* $[i, m-1]$ *soit* $[m+1, j]$, *où* $m = (i+j)/2$ *et on sait que dans le premier cas* $i \leq m-1$ *et dans le deuxième* $m+1 \leq j$.

Si on définit la taille *d'un intervalle* $[i, j]$ *comme* $(j - i)$ *on peut dire que la taille de l'intervalle de recherche est au moins divisée par deux à chaque itération. Comme on parle ici de la division* entière, *il faut travailler un petit peu pour avoir un argument rigoureux. Par exemple, si on pose* $j = i + k$ *on a :*

— $(i+j)/2 - 1 - i = i + (k/2) - 1 - i = (k/2) - 1 \leq (k/2) = (j-i)/2$.

— $j - (i+j)/2 - 1 = i + k - i - (k/2) - 1 = k - (k/2) - 1 \leq (k/2) = (j-i)/2$.

On sait aussi que quand la taille de l'intervalle tombe à 0 *le programme termine certainement. Donc le nombre d'itérations dans le pire des cas est de l'ordre de* $\log_2 n$ *et on peut résumer l'analyse en disant que sur un tableau de données triées et de taille bornée la recherche dichotomique d'un élément a complexité* $O(\log n)$.

13.2 Opérations arithmétiques

On analyse la complexité de certaines opérations arithmétiques où l'on suppose que les entrées des opérations sont des nombres naturels de taille arbitraire représentés en base 2. Donc la taille d'un nombre m est approximativement $\log_2 m$ (la taille de 10^3 est approximativement 10 et la taille de 10^6 est approximativement 20).

Addition

L'algorithme pour l'addition du primaire consiste à propager la retenue de droite à gauche et a un complexité $O(n)$. Si on additionne les chiffres binaires a_i et b_i avec retenue r_i on obtient un chiffre s_i pour la somme et une retenue r_{i+1} comme spécifié dans le tableau suivant :

a_i	b_i	r_i	s_i	r_{i+1}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1

Pour la retenue initiale on pose $r_0 = 0$ et notez qu'en général il faut $n+1$ bits pour représenter la somme de deux nombres de n bits ; par exemple, $110+101 = 1011$. L'algorithme consiste donc à itérer le calcul de s_i, r_{i+1} à partir de a_i, b_i, r_i pour $i = 0, \ldots, n-1$. Chaque itération prend un temps constant et on peut donc affirmer que l'algorithme est $O(n)$. Avec un choix approprié de la représentation des nombres, on peut utiliser le même algorithme pour les nombres entiers et donc traiter la soustraction.

Multiplication

L'algorithme pour la multiplication du primaire consiste à multiplier le premier nombre par chaque chiffre du deuxième nombre et ensuite à additionner les résultats en effectuant un décalage approprié. Par exemple :

$$\begin{array}{rl} 110 & \times \\ 101 & = \\ \hline 110 & \\ 0000 & \\ 11000 & \\ \hline 11110 & \end{array}$$

En base 2, la multiplication d'un nombre x par un chiffre (0 ou 1) produit soit 0 soit x. L'essentiel du calcul consiste donc à effectuer $n-1$ additions entre n nombres qui ont respectivement $n, n+1, \ldots, 2n-1$ chiffres. On vient de voir que l'addition est linéaire dans les nombres de chiffres ; on peut donc conclure que cet algorithme pour la multiplication est $O(n^2)$. Notez que la représentation du résultat de la multiplication peut demander $2n$ bits ; par exemple, $11 \times 11 = 1001$.

Exponentiation

Considérons maintenant la situation pour la fonction d'*exponentiation*. Avec n bits on représente les nombres dans l'intervalle $[0, 2^n - 1]$. Si on prend $x \in [0, 2^n - 1]$ on aura $2^x \in [1, 2^{2^n-1}]$ et il faudra environ 2^n bits pour représenter le résultat. Avec une représentation standard des nombres, tout algorithme qui calcule la fonction exponentielle prendra au moins un temps exponentiel. En effet la simple écriture du résultat peut prendre un temps exponentiel.

Soient a et e des nombres naturels. Combien de multiplications faut il pour calculer l'exposant a^e ? Un algorithme possible est de calculer :

$$a_1 = a,\ a_2 = (a_1 \cdot a),\ \cdots,\ a_e = (a_{e-1} \cdot a)\ .$$

Cet algorithme effectue $e-1$ multiplications ce qui est *exponentiel* dans $\log_2 e$ (à savoir la taille de e !). Mais il y a une autre méthode de calcul dites des *carrés itérés*. Soit

$$e = \Sigma_{i=0,\ldots,k}\ e_i 2^i$$

l'*expansion binaire* de e. Donc $e_i \in \{0, 1\}$. On applique les *propriétés de l'exposant* pour dériver :

$$a^e \quad = a^{\Sigma_{i=0,\ldots,k}\ e_i 2^i} \quad = \Pi_{i=0,\ldots,k}(a^{2^i})^{e_i} \quad = \Pi_{0 \le i \le k, e_i = 1}(a^{2^i})\ .$$

On a alors l'*algorithme* suivant :

1. On calcule a^{2^i} pour $0 \leq i \leq k$. En remarquant que
$$a^{2^{i+1}} = (a^{2^i})^2 \ .$$
Ainsi k opérations de multiplication (ou élévation au carré) sont nécessaires.
2. On détermine a^e comme le produit des a^{2^i} tels que $e_i = 1$. Au plus k *multiplications* sont nécessaires.

On arrive ainsi à une situation qui semble contradictoire : le calcul de l'exposant est forcement *exponentiel* mais on peut le calculer avec un nombre *linéaire* de multiplications. Le fait est que les multiplications opèrent sur des données dont la taille peut doubler à chaque itération. Donc à la dernière itération on peut devoir multiplier deux nombres dont la taille est exponentielle en la taille des données en entrée. Mais tout n'est pas perdu ! On peut contrôler la taille des données si l'on passe à l'arithmétique modulaire. L'exposant modulaire :

$$(a^e) \ mod \ m$$

prend en entrée 3 entiers : la base a, l'exposant e et le module m. On suppose $0 \leq a, e \leq m$. Pour représenter l'entrée on a donc besoin d'environ $3 \cdot k$ bits où $k = \log_2 m$. La *multiplication* de deux nombres de k bits demande $O(k^2)$. Le calcul du *reste* de la division d'un nombre de $2k$ bits (la multiplication de 2 nombres de k bits) par un nombre de k bits (le module) peut aussi se faire en $O(k^2)$. Le calcul de l'exposant modulaire demande au plus $2k$ multiplications et calculs du reste. On doit donc effectuer $O(k)$ opérations dont le coût est $O(k^2)$ ce qui donne $O(k^3)$.

Exemple 46 *On souhaite calculer* 3^{25} *mod* 7*. Dans la suite, toutes les congruences sont modulo* 7*. En base* 2*, la représentation de* 25 *est* 11001*. On calcule les carrés itérés :*

$$3^{2^0} \equiv 3, \quad 3^{2^1} \equiv 2, \quad 2^{2^2} \equiv 4, \quad 2^{2^3} \equiv 2, \quad 2^{2^4} \equiv 4,$$

et on multiplie les carrés qui correspondent aux 1 *de la représentation en base* 2*, soit :*

$$3^{25} \equiv 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3^1 \equiv 4 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 3 \ .$$

Remarque 12 *La borne* $O(k^3)$ *est une* borne supérieure*. En effet, on peut faire un peu mieux. Par exemple, avec l'algorithme de Karatsuba on peut multiplier deux nombres de k chiffres en* $O(k^{1,59})$*, au lieu de* $O(k^2)$*. Par ailleurs, l'algorithme présenté est* pratique *; il est couramment utilisé dans les applications cryptographiques avec* $k \approx 10^3$*.*

13.3 Tests de correction et de performance

Génération aléatoire de nombres

Il est très utile de générer de façon automatique et aléatoire les entrées d'un programme. Par ailleurs, certains programmes dits *probabilistes* ont besoin de nombres aléatoires pendant le calcul. En pratique, tout langage de programmation dispose d'un générateur de nombres (plus ou moins) aléatoires.

En C, la bibliothèque ⟨stdlib.h⟩ contient une fonction rand() qui génère un nombre "aléatoire" compris entre 0 et RAND_MAX (≥ 32767). En pratique, si $n << \text{RAND\_MAX}$ et on cherche un nombre "aléatoire" dans l'intervalle $[0, n-1]$, on calcule rand()%n.

Techniquement la fonction rand est basée sur une *congruence linéaire* et génère *toujours la même suite* (SIC). Si l'on veut changer la suite générée il faut initialiser un *germe* en exécutant par exemple la commande :

srand((unsigned)(time(NULL)));

qui va faire dépendre la suite du *temps courant* (time est une fonction de la bibliothèque ⟨time.h⟩).

La qualité des générateurs aléatoires des langages de programmation est très variable. En particulier, le générateur du langage C qu'on vient de décrire rend service pour le *test* ou la *simulation* mais il n'est *pas du tout* adapté aux applications cryptographiques.

Permutations aléatoires

On rencontre souvent le problème suivant : à partir d'un générateur aléatoire de nombres, il faut concevoir un programme qui génère des structures avec une certaine distribution. Ici on considère le problème de générer des permutations avec une distribution uniforme. On va représenter une permutation $p : I_n \to I_n$, où $I_n = \{0, \ldots, n-1\}$, par un tableau p qui contient chaque entier dans I_n exactement une fois.

Premier essai Considérez la fonction `permall` suivante qui génère une permutation d'un tableau. On suppose que randint(0, n − 1) nous donne un entier dans I_n avec une *distribution uniforme*.

```
1 void permall (int t[],int n){
2     int i;
3     for (i=0;i<n;i++){
4         int j=(rand()%n);
5         int temp=t[i];
6         t[i]=t[j];
7         t[j]=temp;}}
```

La fonction `permall` génère-t-elle une permutation avec une distribution uniforme ? La réponse est négative !

Analyse

- Chaque chemin d'exécution demande la génération de n nombres entiers dans I_n.
- On a donc n^n chemins possibles et chaque chemin a probabilité $\frac{1}{n^n}$.
- Comme on a $n!$ permutations, si la distribution était uniforme on devrait avoir $\frac{1}{n!} = \frac{k}{n^n}$ pour $k \in \mathbf{N}$. Soit : $n^n = kn!$
- Contradiction ! Par exemple, en prenant $n = 3$.

Deuxième essai Considérez la fonction `permplace` suivante :

```
1 void permplace (int t[],int n){
2     int i;
3     for (i=0;i<n;i++){
4         int j=(rand()%(n-i))+i;
5         int temp=t[i];
6         t[i]=t[j];
7         t[j]=temp;}}
```

Analyse Une *k-séquence* d'un ensemble X de cardinalité n ($n \geq k$) est une liste de k-éléments différents de X. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k-séquences d'un ensemble de n éléments, car :

$$n \cdots n-k+1 = \binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

On suppose que les éléments du tableau `t` sont tous différents. On montre par *récurrence* sur $k = 0, 1, \ldots, n$ que la propriété suivante est satisfaite à la k-ème itération de la boucle `for`.

Proposition 3 *Pour toute k-séquence S de l'ensemble* $\{\texttt{t[0]}, \ldots, \texttt{t[n-1]}\}$ *on a* $\texttt{t[0]} \cdots \texttt{t[k-1]} = S$ *avec probabilité* $\frac{(n-k)!}{n!}$.

Preuve. Pour $k = 0$, S est la séquence vide et $\texttt{t[0]} \cdots \texttt{t[k-1]}$ est aussi la séquence vide. Par ailleurs $\frac{(n-0)!}{n!} = 1$.

On suppose la propriété vraie pour $k < n-1$. Soit $S = S'v$ une $(k+1)$-séquence. On sait que $\texttt{t[0]} \cdots \texttt{t[k-1]} = S'$ avec probabilité $\frac{(n-k)!}{n!}$. Par ailleurs, on a $\texttt{t[k]} = v$ avec probabilité $\frac{1}{n-k}$ puisque l'élément est choisi parmi les $n-k$ qui ne sont pas déjà dans S'. Donc la probabilité que $\texttt{t[0]} \cdots \texttt{t[k]} = S$ est :

$$\frac{(n-k)!}{n!} \frac{1}{n-k} = \frac{(n-(k+1))!}{n!} .$$

On peut donc conclure que la fonction `permplace` génère une permutation du tableau avec une probabilité uniforme : chaque n-séquence est générée avec probabilité $\frac{1}{n!}$. □

Mesurer le temps d'exécution

En C, on peut utiliser la fonction clock() de la librairie time.h pour estimer le temps d'exécution d'un programme comme dans l'exemple suivant :

```
1 clock_t begin = clock();
2 /* tri fusion */
3 clock_t end = clock();
4 double time_spent = (double)(end - begin) / CLOCKS_PER_SEC;
```

Exemple 47 (test performance tri) *Supposons que l'on souhaite comparer les performances de l'algorithme de tri par insertion et du tri par fusion (chapitre 7) En supposant une distribution uniforme des entrées, on peut utiliser la fonction* permplace *pour générer les entrées. Par exemple, supposons que pour des tableaux de taille n on effectue m tests. Pour avoir un sens de comment le temps de calcul varie avec la taille des tableaux on va commencer avec des tableaux de petite taille et ensuite on va doubler la taille à chaque cycle de tests tant que le temps de réponse reste raisonnable. A titre indicatif, on peut prendre $m = 10$ et faire varier n entre 2^5 et 2^{15}.*

13.4 Variations sur la notion de complexité

Pour l'instant on s'est limité à étudier la complexité dans le *pire des cas*. On rappelle que ceci veut dire que le coût $c_A(n)$ est le *coût maximal* sur une entrée de taille au plus n. Il y a des situations dans lesquelles le pire des cas n'est pas forcement très significatif.

Une approche alternative consiste à considérer le *cas moyen*. Ceci revient à faire des hypothèses sur la distribution des entrées (comme on l'a fait dans le test de performance des algorithmes de tri) et ensuite à calculer la moyenne (ou espérance) des coûts.

Exemple 48 *Supposons disposer d'un tableau P qui contient les nombres premiers compris entre 2 et p. Si on tire un nombre x compris entre 2 et p^2 combien de divisions faut-il faire pour savoir s'il est premier ? Ici on suppose qu'on considère les nombres premiers du tableau P par ordre croissant. Dans le* pire des cas*, si le nombre est premier et proche de p^2 le nombre de divisions est environ la taille du tableau P. Cependant si on suppose que le nombre est tiré avec probabilité uniforme on s'attend à faire beaucoup moins de divisions. Par exemple, pour les nombres pairs une seule division suffira !*

Une deuxième approche consiste à considérer le coût d'une suite d'opérations au lieu d'une seule opération et à considérer le coût d'une opération comme la moyenne arithmétique des coûts dans le pire des cas des opérations de la suite. Dans ce cas on parle de *complexité amortie*. Notez qu'on ne fait pas d'hypothèse sur la distribution des entrées et plus en général le calcul des probabilités ne joue pas de rôle dans la complexité amortie. On considère toujours *le pire des cas* mais par rapport à une *longue suite d'opérations* plutôt qu'à une seule opération.

Exemple 49 *On considère un tableau de m éléments dans lequel on peut effectuer les opérations suivantes :*

- *lire un élément,*
- *modifier un élément,*
- *ajouter un élément à la fin du tableau.*

On suppose que initialement on alloue un segment de mémoire qui peut contenir $n = 1$ éléments et que chaque fois que le nombre d'éléments m dépasse la capacité du segment n on double la capacité du segment. Le coût d'une opération sans dépassement est 1 et le coût d'une opération avec dépassement est la taille du segment (on imagine qu'il faut copier tous les éléments dans un segment deux fois plus grand). On considère une suite de p opérations dont le coût est $c_1, \ldots, c_p$. Que peut-on dire sur la moyenne arithmétique des coûts, à savoir :

$$\frac{1}{p}(\Sigma_{i=1,\ldots,p}\ c_i)$$

dans le pire des cas pour p qui tend vers ∞ ? Tant qu'on effectue des opérations de lecture et modification la moyenne des coûts est 1. Pour trouver le pire des cas on a intérêt à maximiser le nombre d'opérations d'ajout qui sont potentiellement coûteuses. Considérons donc une suite d'opérations d'ajout où par simplicité $p = 2^k$. On obtient :

$$\Sigma_{i=1,\ldots,2^k}\ c_i < 2^k + \Sigma_{i=0,\ldots,k-1}\ 2^i = 2^k + (2^k - 1) \approx 2p\ .$$

Donc la moyenne arithmétique tend vers 2 et on peut considérer que le coût amorti *de chaque opération est constant (on paye 2 pour chaque opération).*

Chapitre 14

Problèmes

14.1 Chiffrement par permutation

On suppose $2 \leq m \leq n$. Pour chiffrer un texte composé de n caractères avec une permutation sur l'ensemble $\{0, \ldots, m-1\}$ on procède de la façon suivante.

Phase de bourrage On complète le texte à chiffrer de façon à que sa longueur soit un multiple de m. Si n est un multiple de m on ajoute au texte les caractères $XY \cdots Y$ où Y est répété $m-1$ fois. Sinon, on ajoute au texte les caractères $XY \cdots Y$ où Y est répété $m-r-1$ fois et $r = n \mod m$ (notez que dans ce cas $0 < r < m$ et $m - r - 1 \geq 0$). Par exemple, si $n = 4$, $m = 3$ et le texte est $ABCD$ alors on est dans le deuxième cas avec $r = 1$ et on ajoute le texte XY pour obtenir $ABCDXY$.

Phase de chiffrement Après le bourrage, la longueur du texte à chiffrer est un multiple de m. On applique la permutation au texte par blocs de m caractères pour obtenir un texte chiffré qui a autant de caractères que le texte après bourrage. En continuant l'exemple précédent, si la permutation est $1, 2, 0$ on obtient comme texte chiffré $CABYDX$.

Déchiffrement Le déchiffrement d'un texte obtenu de cette façon est calculé en appliquant la permutation inverse au texte chiffré par blocs de m caractères et ensuite en éliminant la partie terminale du texte de la forme $XY \cdots Y$. Dans notre exemple, la permutation inverse est $2, 0, 1$ et si on l'applique à $CABYDX$ par blocs de 3 on obtient $ABCDXY$ et après élimination de XY on revient au texte d'origine $ABCD$.

1. Programmez une fonction d'en-tête `int lonbourrage(int n, int m)` qui calcule la longueur d'un texte composé de n caractères après bourrage relativement à une permutation sur $\{0, \ldots, m-1\}$.
2. Programmez une fonction d'en-tête `void bourrage(int n, char t[n], int l, char bt[l], int m)` qui prend en argument un tableau `t[n]` qui contient le texte et un tableau `bt[l]` non-initialisé dont la longueur `l` est exactement celle prévue par la fonction `lonbourrage` relativement à `m`. La fonction écrit dans le tableau `bt[l]` le texte obtenu de `t[n]` après bourrage.
3. Programmez une fonction d'en-tête `void chif(int l, char bt[l], int m, int perm[m])` qui prend en argument un texte après bourrage (par rapport à `m`) représenté par le tableau

bt[l] et une permutation représentée par le tableau perm[m] et écrit le chiffrement du texte dans le tableau bt[l].

4. Programmez une fonction d'en-tête void invperm(int m, int perm[m]) qui calcule la permutation inverse de celle reçue en entrée dans le tableau perm[m] et écrit le résultat dans le tableau perm[m].
5. Programmez une fonction d'en-tête int dechif(int l, char t[l], int m, int perm[m]) qui prend en argument un texte après chiffrement représenté par le tableau t[l] et la permutation utilisée pour le chiffrer représentée par le tableau perm[m] et écrit dans le tableau t[l] le texte après déchiffrement. La fonction dechif rend aussi comme résultat l'indice du dernier caractère significatif dans le tableau.

14.2 Chaînes additives

Une *chaîne additive* est une séquence $x_0, \ldots, x_k$ telle que $x_0 = 1$ et chaque élément x_i de la séquence avec $i \geq 1$ est égal à la somme de deux nombres qui le précèdent dans la séquence :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}\ \ \exists\, j, \ell < i\ \ x_i = x_j + x_\ell$$

Par exemple, $1, 2, 4, 5, 9$ est une chaîne additive car $x_1 = x_0 + x_0$, $x_2 = x_1 + x_1$, $x_3 = x_0 + x_2$ et $x_4 = x_2 + x_3$.

1. Écrire une fonction lire qui prend en entrée un entier k et un tableau t d'entiers (avec au moins $k + 1$ entiers) et qui effectue l'opération suivante : lit $k + 1$ entiers de la console et les mémorise dans le tableau t aux positions $0, 1, \ldots, k$.
2. Écrire une fonction verifie_aux qui prend en entrée un entier i positif et un tableau t d'entiers (avec au moins $i+1$ entiers aux positions $0, 1, \ldots, i$) et qui rend la valeur 1 si

$$\exists\, j, \ell\ \ (\ 0 \leq j \leq \ell < i\ \ \text{et}\ \ \mathsf{t}[i] = \mathsf{t}[j] + \mathsf{t}[\ell]\ )$$

   et 0 autrement. Estimez la complexité asymptotique de verifie_aux en fonction de i.
3. Écrire une fonction verifie qui prend en entrée un entier k (positif ou nul) et un tableau t d'entiers (avec au moins $k + 1$ entiers aux positions $0, 1, \ldots, k$) et qui rend la valeur 1 si t[0], ..., t[k] est une chaîne additive et 0 autrement. Estimez la complexité asymptotique de verifie en fonction de k. Vous devez utiliser la fonction verifie_aux.
4. Une *chaîne additive pour un entier* n est une chaîne additive dont le dernier élément est n. On dénote par $|n|$ le nombre de bits nécessaires à représenter le nombre n en base 2. Montrez que tout entier $n \geq 1$ admet une chaîne additive de longueur inférieure à $2 \cdot |n|$. Calculez une chaîne additive pour $n = 25$.
5. Une chaîne additive $x_0, \ldots, x_k$ est *croissante* si on a $x_i < x_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, k - 1$. Une chaîne additive pour n est *optimale* s'il n'existe pas une chaîne additive plus courte pour n. Montrez que tout entier $n \geq 1$ admet une chaîne additive croissante et optimale de longueur inférieure à $2 \cdot |n|$.
6. Calculez la longueur d'une chaîne additive optimale pour $n \in \{1, \ldots, 10\}$. Vous devez expliquer la méthode utilisée et répondre à la question suivante : quel est le plus petit nombre $n \geq 1$ qui a deux chaînes additives croissantes et optimales différentes ?

7. Écrire une fonction chaîne qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et un tableau t qui contient au moins $2 \cdot |n|$ éléments et qui mémorise aux positions $t[0], \ldots, t[k]$ ($k \leq 2 \cdot |n|$) une chaîne additive croissante pour n. En plus du code, vous devez fournir : (i) une description de l'exécution de l'algorithme pour $n = 25$, et (ii) une estimation de sa complexité asymptotique en fonction de $|n|$.
8. Soient a, n, m entiers avec $2 \leq a, n \leq m$ et soit $x_0, \ldots, x_k$ une chaîne additive pour n. Montrez qu'on peut calculer l'exposant modulaire $(a^n) \mod m$ en effectuant k multiplications modulo m.
9. La séquence de Fibonacci (en supposant $F(0) = 1$) est un cas particulier de chaîne additive. On sait que $F(15) = 987$. Combien de multiplications modulo m faut-il pour calculer $(a^{F(15)}) \mod m$ avec la méthode du carré itéré ? Peut-on faire mieux ?
10. Écrire une fonction opt qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et retourne la longueur d'une chaîne additive optimale pour n. En plus du code, vous devez donner la trace des appels de fonction à partir de l'appel opt(4).
11. Écrire une fonction opt_print qui prend en entrée un entier $m \geq 1$ et imprime la longueur d'une chaîne additive optimale pour les nombres compris entre 1 et m. Par exemple, si $m = 4$, la sortie aura la forme :

```
opt(1) = 1
opt(2) = 2
opt(3) = 3
opt(4) = 3
```

14.3 Remplissages de grilles

On considère une grille 5×5 où chaque *position* est déterminée par un nombre compris entre 0 et 24 selon le schéma suivant :

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Par exemple, l'angle SW de la grille correspond à la position 20. A partir de chaque position, on peut aller vers N,S,W,E en sautant 2 positions ou vers NE, NW, SE, SW en sautant 1 position. Bien sûr ces déplacements sont possibles seulement si on ne sort pas de la grille. Ainsi de la position 12 (le centre de la grille) on a 4 déplacements possibles (à savoir $0, 4, 20, 24$) et dans toutes les autres positions on en a que 3 (par exemple de 5 on peut aller dans $8, 17, 20$). Une *trajectoire* à partir de la position p est une suite de déplacements qui commence à la position p, qui ne passe jamais deux fois par la même position et qui termine à une position où on ne peut plus se déplacer sans aller dans une position déjà visitée. La *longueur* d'une trajectoire est le nombre de positions visitées et clairement ce nombre ne peut pas excéder 25. On *représente une trajectoire* par un tableau d'entiers int t[25] avec la convention que les positions visitées sont dans l'ordre $t[0], t[1], t[2], \ldots$ et que si la trajectoire comporte i positions avec $i < 25$ alors $t[i] = -1$ (et donc les valeurs après le premier -1 ne sont pas significatives). Par exemple, le tableau de 25 entiers suivant représente une trajectoire de longueur 13 qui commence à la position 0 et termine à la position 23 :

```
t_0={0,12,20,5,8,16,1,13,10,22,14,11,23,-1,0,37,-2,3,41,5,6,77,8,9,10}
```

1. Écrire 2 fonctions ligne et colonne qui prennent en entrée une position et donnent comme résultat la ligne et la colonne qui correspondent à la position, respectivement. Par convention on compte les lignes et les colonnes à partir de 0.
2. Écrire une fonction depl qui prend en entrée une position p et un tableau int d[5] et écrit dans le tableau d les positions vers lesquelles on peut se déplacer à partir de la position p en ajoutant une valeur -1 à la fin. Par exemple, si $p = 5$ alors on écrira les valeurs $8, 17, 20, -1$ dans $d[0], d[1], d[2], d[3]$, respectivement.
3. On représente les positions déjà visitées par un tableau short v[25] tel que $v[i]$ vaut 0 si la position n'a pas été visitée et 1 autrement. écrire une fonction depl_adm qui prend en entrée une position p, les positions déjà visitées (représentées par un tableau de short) et un tableau int d[5] et écrit dans le tableau d les positions vers lesquelles on peut se déplacer à partir de la position p et qu'on a pas déjà visité en ajoutant une valeur -1 à la fin. Par exemple, si $p = 5$, $v[8] = 1$, $v[17] = 0$ et $v[20] = 1$ alors on écrira les valeurs $17, -1$ dans $d[0], d[1]$, respectivement.
4. Écrire une fonction verifie qui prend en entrée un tableau d'entiers de 25 éléments et qui rend 1 si le tableau représente une trajectoire et 0 autrement.
5. Pouvez-vous estimer le nombre de trajectoires possibles à partir d'une position initiale donnée ? Pensez-vous que ce nombre est bien plus petit que $25! = 25 \cdot 24 \cdots 2$?
6. Écrire une fonction imprime qui prend en entrée une trajectoire et l'imprime comme une grille 5×5. Par exemple, la trajectoire t_0 ci-dessus doit être imprimée de la façon suivante :

1	7			
4			5	
9	12	2	8	11
	6			
3		10	13	

7. Écrire un fonction gen qui prend en entrée une position initiale et génère une *trajectoire aléatoire* à partir de cette position en utilisant la stratégie suivante : elle calcule les déplacements possibles à partir de la dernière position et il en sélectionne un avec probabilité uniforme. Vous ferez l'hypothèse qu'un appel à rand()%m vous donne un entier dans $\{0, \ldots, m-1\}$ avec une probabilité uniforme.
8. Écrire un fonction echantillon qui prend en entrée une position initiale et un entier n et qui calcule n trajectoires en utilisant la stratégie aléatoire décrite au point précédent. A la fin du calcul, la fonction imprime la *longueur moyenne* des n trajectoires ainsi que *une plus longue* et *une plus courte* trajectoire parmi celles calculées.
9. Écrire une fonction max qui prend en entrée une position initiale, énumère les trajectoires valides à partir de cette position et imprime une *trajectoire de longueur maximale*. En particulier, si votre fonction trouve une trajectoire de longueur 25 elle doit l'imprimer et terminer.
10. Écrire une fonction C min qui prend en entrée une position initiale, énumère les trajectoires valides à partir de cette position et imprime une *trajectoire de longueur minimale*. Votre fonction devrait écarter rapidement les trajectoires qui sont au moins aussi longues que celles déjà trouvées.

14.4 Tournoi à élimination directe

La *configuration initiale* d'un tournoi à élimination directe est décrite par un tableau t de type int t[n] où $n = 2^k$, $k \geq 1$ et chaque cellule contient le nom d'un joueur (dans notre cas un entier). Un tel tournoi se joue en k tours et au tour i, pour $i = 1, \ldots, k$, on joue 2^{k-i} parties. Vous disposez d'une fonction play d'en-tête short play(int x, int y) qui renvoie 0 si x gagne et 1 si y gagne. On écrit $t[i] \leftrightarrow t[j]$ si $t[i]$ joue contre $t[j]$ avec $i < j$ et dans ce cas on suppose que le gagnant est mémorisé dans $t[i]$. Ainsi la structure des parties d'un tournoi est la suivante :

$$
\begin{array}{ll}
t[0] \leftrightarrow t[1], t[2] \leftrightarrow t[3], t[4] \leftrightarrow t[5], \ldots, t[n-2] \leftrightarrow t[n-1] & \text{(tour 1)} \\
t[0] \leftrightarrow t[2], t[4] \leftrightarrow t[6], \ldots, t[n-4] \leftrightarrow t[n-2] & \text{(tour 2)} \\
t[0] \leftrightarrow t[4], \ldots, t[n-8] \leftrightarrow t[n-4] & \text{(tour 3)} \\
\ldots & \\
t[0] \leftrightarrow t[n/2] & \text{(tour } k\text{)}
\end{array}
$$

1. Programmez en C une fonction tournoi d'en-tête void tournoi(int k, int n, int t[n]) qui simule le tournoi en se basant sur les hypothèses décrites ci-dessus. À la fin du calcul $t[0]$ est donc le nom du gagnant du tournoi.
2. En supposant que le coût d'un appel à la fonction play est $O(1)$ en temps, déterminez la complexité asymptotique en temps de la fonction tournoi.
3. On suppose maintenant que les identités des joueurs correspondent aux entiers $\{0, \ldots, n-1\}$ et qu'on dispose d'un tableau score de type float score[n] qui associe à chaque joueur son score. Programmez en C une fonction ranking d'en-tête void ranking(int n, float score[n], int position[n]). La fonction reçoit (i) le nombre de joueurs n, (ii) le tableau avec leur score score et (iii) un tableau vide position, et écrit dans ce dernier les noms des joueurs d'après leur score. Ainsi à la fin du calcul le tableau position représente une permutation sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que :

   $$\text{score[position[0]]} \geq \text{score[position[1]]} \geq \cdots \geq \text{score[position[n} - 1\text{]]} \ .$$

   Par exemple, pour $n = 4$ voici un tableau score possible et le contenu du tableau position à la fin du calcul :

	0	1	2	3
score	5, 4	2, 7	3, 1	7, 8
position	3	0	2	1

   Vous pouvez allouer des tableaux auxiliaires d'un type approprié et utiliser une fonction auxiliaire de tri sur ces tableaux sans la programmer.
4. On suppose maintenant que le tableau position de type int position[n] contient les noms des joueurs ordonnés d'après leur score. Programmez une fonction affect d'en-tête void affect(int k, int n, int position[n], int t[n]) qui affecte les joueurs au tableau t qui représente la configuration initiale du tournoi en respectant la règle suivante pour $i = 1, \ldots, k$:

   Règle : les premiers 2^i joueurs ne peuvent pas se rencontrer avant le tour $k - i + 1$,

   ce qui revient à dire que les premiers 2 joueurs ne peuvent pas se rencontrer avant la finale (tour k), les premiers 4 avant les demi-finales (tour $k-1$) et ainsi de suite. Par exemple, en supposant $position[i] = i$ pour $i = 0, 1, \ldots, 15$ (ce qui revient à dire que 0

est le nom du joueur avec le meilleur score et 15 le nom du joueur avec le pire score) on peut avoir l'affectation suivante pour le tableau t qui représente la configuration initiale du tournoi :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t[i]$	0	8	4	9	2	10	5	11	1	12	6	13	3	14	7	15

5. L'affectation de la question 4 est déterminée par le score des joueurs, ce qui est ennuyeux, car tant que le score des joueurs ne change pas on joue toujours le même tournoi. On souhaite introduire une composante aléatoire dans cette affectation tout en respectant la règle de la question 4. Vous disposez maintenant d'une fonction perm d'en-tête void perm(int i, int j, int r[]). Si $i \leq j$ et i, j sont dans le domaine de définition du tableau r alors la fonction perm permute les éléments r[i], r[i + 1], . . . , r[j] avec une probabilité uniforme. Programmez une variante de la fonction affect, disons affect_alea, qui a le même en-tête, respecte toujours la règle de la question 4, mais utilise la fonction perm pour introduire une composante aléatoire dans la génération du tableau initial. Par rapport à l'exemple de la question 4, la fonction affect_alea doit pouvoir générer aussi le tableau :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t[i]$	0	10	5	9	3	8	7	11	1	15	4	13	2	14	6	12

14.5 Motifs et empreintes

Un *texte* est une suite de $n \geq 1$ caractères représentés par un tableau de valeurs de type char. Un *motif* est aussi un suite de $m \leq n$ caractères représentés par un tableau de valeurs de type char. Une *occurrence* d'un motif dans un texte est un nombre naturel qui indique une position dans le texte à partir de laquelle les caractères du texte coïncident avec ceux du motif. Par exemple, les occurrences du motif *bra* dans le texte *abracadabra* sont exactement 1 et 8. On notera que ici $m = 3$, $n = 11$ et qu'on compte les positions de gauche à droite à partir de 0. Les occurrences d'un motif peuvent se 'superposer'. Par exemple, les occurrences du motif *bb* dans *abbba* sont 1 et 2.

1. Programmez une fonction d'en-tête
   `short check(int m, char motif[m], int n, char texte[n], int pos)`
   qui prend en argument un motif, un texte et une position pos et qui rend 1 si pos est une occurrence du motif dans le texte et 0 autrement.
2. Programmez une fonction d'en-tête
   `void occurrences(int m, char motif[m], int n, char texte[n])`
   qui prend en argument un motif et un texte et imprime sur la sortie standard toutes les occurrences du motif dans le texte.
3. Analysez la complexité asymptotique de votre programme en fonction de m et n.

L'entier $M =$ 2147483647 est l'entier le plus grand que l'on peut représenter en C avec le type int (sur 32 bits). Le plus grand entier p tel que $p^2 \leq M$ est 46340. Par ailleurs on pose $B = 256$.

4. Programmez les fonctions suivantes :
   4.1 Une fonction injective d'en-tête int ci(char c) qui prend en argument une valeur de type char et rend comme résultat un entier dans l'intervalle $[0, 255]$.

4.2 Une fonction d'en-tête `int mod(int x, int p)` qui prend en argument un entier x et un entier positif p et rend comme résultat $x \mod p$, à savoir l'unique entier r dans l'intervalle $[0, p-1]$ tel que pour un q nombre entier, $x = q \cdot p + r$. NB Dans le langage C, la fonction % sur les entiers peut rendre comme résultat un entier négatif.

4.3 Une fonction d'en-tête `int puis(int m, int p)` qui prend en argument les entiers `m` et `p` et rend comme résultat $B^{m-1} \mod p$.

Soit $w \equiv x_0 \cdots x_{m-1}$ une suite de m caractères. Si x est un caractère soit $ci(x)$ l'entier qui lui est associé dans l'intervalle $[0, 255]$ (voir question 4.1). L'empreinte $e(w)$ de la suite est un entier modulo p défini par :

$$e(w) = (\Sigma_{i=1,\ldots,m} B^{m-i} \cdot ci(x_{i-1})) \mod p \ . \tag{14.1}$$

Par exemple, si $m = 3$ et $w = x_0x_1x_2$ on a :

$$e(w) = (B^2 \cdot ci(x_0) + B \cdot ci(x_1) + ci(x_2)) \mod p \ .$$

5. Est-ce possible d'avoir deux suites de longueur m qui ont la même empreinte ?
6. Programmez une fonction d'en-tête : `int emp(int m, int k, char t[], int p)` qui prend en argument un tableau de `char` défini aux positions $t[k], \ldots, t[k+m-1]$ ainsi que le module `p` et rend comme résultat l'empreinte de la suite $t[k], \ldots, t[k+m-1]$. Le calcul doit être organisé de façon à éviter tout débordement.
7. Soit e l'empreinte de la suite $t[k], \ldots, t[k+m-1]$ et soit $b = B^{(m-1)} \mod p$. On suppose que les opérations de multiplication, addition et calcul de l'opposé modulo p prennent un temps constant $O(1)$. Supposons que l'on souhaite calculer l'empreinte e' de la suite $t[k+1], \ldots, t[k+m]$. Expliquez comment effectuer ce calcul en $O(1)$ à partir des entiers e, b, p, $t[k]$, $t[k+m]$.
8. Programmez une fonction d'en-tête :
   `void empreintes(int n, char t[n], int m)`
   qui prend en entrée un texte de n `char` et un entier $m \leq n$ et imprime sur la sortie standard les empreintes des suites $t[i] \cdots t[i+m-1]$ pour $i = 0, \ldots, n-m$. Votre fonction doit optimiser le temps de calcul en utilisant la méthode évoquée à la question 7.
9. Programmez une fonction d'en-tête
   `void occurrences_emp(int m, char motif[m], int n, char texte[n])`
   qui prend en argument un motif et un texte et imprime sur la sortie standard toutes les occurrences du motif dans le texte. Votre fonction doit utiliser la notion d'empreinte pour optimiser le temps de calcul. En particulier dans la situation où l'empreinte du motif est différente de toutes les empreintes des suites $t[i] \cdots t[i+m-1]$ pour $i = 0, \ldots, n-m$, la complexité de la fonction doit être $O(n)$.
10. Supposons maintenant que le texte contient $n - m$ occurrences du motif et que $m = n/2$. Quelle est complexité asymptotique (en fonction de n) de la fonction `occurrence_emp` dans ce cas ?

Deuxième partie

Algorithmique

Chapitre 15

La structure de données tas (*heap*)

Soit H un ensemble fini d'éléments que l'on peut comparer avec un *ordre total*. On cherche une façon de représenter H qui nous permet d'effectuer (au moins) les *opérations* suivantes de façon efficace :

— *insertion* d'un élément dans H,

— *élimination* du plus grand élément de H.

Si l'on garde H totalement ordonné alors on peut extraire un élément en $O(1)$ mais l'insertion d'un élément est en $O(n)$. D'autre part, si on ignore l'ordre alors on peut insérer en $O(1)$ et extraire en $O(n)$. En moyenne, on s'attend à faire autant d'insertions que d'éliminations et donc les deux solutions demandent un temps linéaire dans le nombre d'éléments dans H. La structure *tas* (ou *heap* en anglais) [1] qu'on va introduire dans ce chapitre va nous permettre d'effectuer ces opérations en temps *logarithmique*.

Le tas est un premier exemple de *structure de données* non triviale. De telles structures sont un *outil essentiel* dans la conception d'algorithmes efficaces.

15.1 Arbres binaires

La clef pour obtenir un temps logarithmique est de stocker l'ensemble H dans un *arbre* de façon à ce que les opérations d'insertion et d'élimination demandent l'examen d'une seule branche de l'arbre. On obtient une borne logarithmique en observant que la taille de chaque branche est logarithmique dans le nombre d'éléments de l'arbre.

On commence par définir exactement ce qu'on entend par arbre. L'ensemble T des *arbres binaires* est défini *inductivement*. Si, par exemple, on veut définir des arbres binaires dont les *noeuds* ont une valeur *entière* on posera la définition suivante.

Définition 6 (arbres binaires) *L'ensemble T est le plus petit ensemble tel que :*

— $\mathsf{nil} \in T$ *(l'*arbre vide*).*

— *Si $t_1, t_2 \in T$ et $n \in \mathbf{Z}$ alors $(n, t_1, t_2) \in T$.*

De tels arbres se prêtent bien à une *représentation graphique*. Si $t = (n, t_1, t_n) \in T$, on dit que t_1 et t_2 sont respectivement *le sous-arbre gauche et droite* de t. Dans la représentation

1. La structure tas (*heap*) que l'on discute ici se nomme aussi *queue de priorité* et ne devrait pas être confondue avec la mémoire tas (*heap*) dont il est question dans l'exécution de programmes avec allocation dynamique ; il s'agit simplement d'un cas d'homonymie !

graphique, on associe à t un noeud qui contient la valeur n et qui est connecté par une arête gauche et une arête droite aux représentations graphiques de t_1 et t_2, respectivement. Le noeud associé à t est le *père* des noeuds associés au noeuds t_1 et t_2 (qui eux sont les fils). Le premier noeud généré dans cette construction est désigné en tant que *racine* de l'arbre. Par convention, on ne représente pas les arbres vides (nil) et on dit qu'un noeud qui n'a pas de sous-arbres (non-vides) est une *feuille*. Le noeud racine est une feuille si et seulement si l'arbre comporte un seul noeud. Typiquement, on dessine les arbres à l'envers, c'est-à-dire avec les feuilles en bas et la racine en haut.

Dans la suite un *arbre* est un arbre d'après la définition ci-dessus. Techniquement, il s'agit d'arbres *enracinés* (on désigne un noeud racine), binaires (un noeud a au plus deux fils), ordonnés (on distingue le fils gauche du fils droit) et avec des *valeurs* associées aux noeuds. [2]

Définition 7 (hauteur) *La* hauteur h *d'un arbre est le nombre d'arêtes qu'il faut traverser dans le chemin le plus long de la racine à une feuille.*

Proposition 4 *Un arbre de hauteur h a entre $(h+1)$ et $2^{(h+1)}-1$ noeuds.*

Preuve. Pour avoir un chemin avec h arêtes il faut $(h+1)$ noeuds. D'autre part, on maximise le nombre de noeuds en supposant que chaque noeud qui n'est pas une feuille a deux fils. On atteint ainsi la borne supérieure (preuve par récurrence sur h). □

Définition 8 (arbre plein) *Un arbre est* plein *si tous les noeuds qui ne sont pas des feuilles ont deux fils.*

Définition 9 (arbre complet) *Un arbre est* complet *s'il est plein et toutes les feuilles sont à la même profondeur (la longueur du chemin de la racine à une feuille est constant).*

Définition 10 (positions) *On peut compter les* positions *des noeuds d'un arbre de la façon suivante (par convention, on compte de* 1*) :*

Niveau	*Position*
0	1
1	2, 3
2	4, 5, 6, 7
3	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
...	...
h	$2^h, \ldots, (2^{h+1}-1)$

Définition 11 (arbre quasi-complet) *Un arbre avec n noeuds est* quasi-complet *si ses noeuds occupent (exactement) les positions $1, \ldots, n$.*

On peut représenter un arbre quasi-complet avec des pointeurs. Si l'on connaît le nombre maximal de noeuds dans l'arbre une solution plus économe en mémoire est d'utiliser un tableau. En effet, un *arbre quasi-complet avec n noeuds* est en correspondance bijective avec un *tableau de n éléments* dont les cellules $1, \ldots, n$ contiennent les valeurs associées aux noeuds :

2. On utilisera cette notion d'arbre aussi dans le chapitre 19 (arbres binaires de recherche) et la section 22.2 (compression de Huffman). Par contre dans les chapitres 24 et 25 (sur les graphes) on introduira une autre notion d'arbre.

— Les *fils* du noeud en position i (s'ils existent) sont dans les positions $2i$ et $2i+1$.
— Le *père* d'un noeud en position $i > 1$ est en position $i/2$.
— Un arbre quasi-complet avec n noeuds a *hauteur* $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$ et ses *feuilles* sont aux positions $(n/2)+1, \ldots, n$ ($\lfloor x \rfloor$ est l'arrondi à l'inférieur de x).

15.2 Tas et opérations sur le tas

Définition 12 (tas) *Un* tas *est un arbre quasi-complet où chaque noeud a une valeur* supérieure ou égale *à celle des fils.*

Remarque 13 *Une définition duale est possible où l'on stipule que le père a une valeur inférieure ou égale à celle des fils. Si l'on veut distinguer les deux situations on parlera de* max-tas *et de* min-tas*. Dans la suite on se focalise sur les max-tas (la racine contient la valeur la plus grande). Tout ce qu'on fait peut être adapté de façon évidente aux min-tas.*

On fait l'hypothèse que l'on dispose d'un *tableau* a avec n cellules numérotées de 1 à n et d'une variable m qui enregistre le nombre de cellules occupées. On a donc $0 \leq m \leq n$ et on peut représenter de cette façon tous les arbres quasi-complets avec m éléments. On décrit maintenant la mise-en-oeuvre des opérations principales et leur complexité.

Insertion Possible seulement si $m < n$. On incrémente m, on ajoute l'élément inséré au fond du tableau et on le fait remonter autant que nécessaire en le comparant à son père. La comparaison et éventuellement l'échange avec le père se fait en $O(1)$. Le nombre de comparaisons est borné par la hauteur de l'arbre. On a donc un coût $O(\log m)$.

Élimination Possible seulement si $0 < m$. On récupère l'élément en position 1. Si $m > 1$ on place l'élément en position m en position 1 et on le fait descendre autant que nécessaire dans l'arbre en le permutant avec son fils le plus grand. On décrémente m. A nouveau, la comparaison et éventuellement l'échange avec le fils se fait en $O(1)$. Le nombre de comparaisons est borné par la hauteur de l'arbre. On a donc un coût $O(\log m)$.

Dans la mise en oeuvre de l'opération d'élimination, il convient de définir une fonction *récursive heapify* qui effectue le travail suivant : en supposant que $t = (n, t_1, t_2)$ est un arbre quasi-complet et t_1, t_2 sont des tas elle transforme t dans un tas. En pratique, la fonction *heapify* prend en argument l'indice i de la racine de l'arbre quasi-complet et suppose que les sous-arbres de racine $2 \cdot \mathsf{i}$ et $2 \cdot \mathsf{i} + 1$, s'ils existent, sont des tas. Ainsi dans l'opération d'élimination, la phase de descente de l'élément en position 1 est réalisée par un appel heapify(1).

Plus en général, la fonction *heapify* peut être utilisée pour programmer une fonction *build-heap* qui transforme un tableau de m éléments en un tas. On sait que les éléments en position $m/2+1, \ldots, m$ sont des feuilles (et donc des tas). Il suffit donc d'appliquer la fonction *heapify* aux éléments qui se trouvent aux positions $m/2, m/2-1, \ldots, 1$. Dans ce cas, à chaque application de *heapify*(i) on sait que les sous-arbres dont les racines sont aux positions $2i$ et $2i+1$ sont déjà des tas et on fait en sorte que le sous-arbre de racine i le devienne aussi. Cette opération *build-heap* effectue $m/2$ appels à la fonction *heapify*. Le coût de chaque appel dépend de la hauteur de l'arbre. A priori, on sait que cette hauteur est bornée par $\log m$ et donc le coût de *build-heap* est $O(m \cdot \log m)$. Cependant, on va voir qu'une analyse plus fine permet d'avoir une borne $O(m)$.

Proposition 5 *L'application de la fonction build-heap à un tableau de m éléments a un coût $O(m)$.*

PREUVE. Comme on l'a déjà remarqué, le coût de *heapify* est au plus la hauteur h de l'arbre et $h \leq \log_2 m$. Mais cette borne n'est pas très satisfaisante car la plus part des noeuds ne sont *pas très hauts*!

Niveau	Position	Coût
0	1	h
1	$2, 3$	$(h-1)$
2	$4, 5, 6, 7$	$(h-2)$
3	$8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$	$(h-3)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
h	$2^h, \ldots, (2^{h+1}-1)$	0

On doit évaluer :

$$\Sigma_{i=0,\ldots,h}\ 2^i(h-i) \quad = \quad 2^h \Sigma_{i=0,\ldots,h}\ \tfrac{(h-i)}{2^{(h-i)}} \quad = \quad 2^h \Sigma_{i=0,\ldots,h}\ \tfrac{i}{2^i}\ .$$

On sait que $\Sigma_{i=0,\ldots,h}\ \frac{1}{2^i}$ est une *constante* (série géométrique). On montre que $\Sigma_{i=0,\ldots,h}\ \frac{i}{2^i}$ est une *constante* aussi. On sait que pour $0 \leq x < 1$:

$$\Sigma_{i=0,\ldots,\infty}\ x^i = \frac{1}{1-x}\ .$$

Si on *dérive*, on obtient (un théorème d'analyse assure ici que la dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées) :

$$\Sigma_{i=1,\ldots,\infty}\ i \cdot x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\ .$$

Si on *multiplie* par x et on *pose* $x = \frac{1}{2}$:

$$\Sigma_{i=0,\ldots,h}\ \frac{i}{2^i} \ \leq \ \Sigma_{i=1,\ldots,\infty}\ \frac{i}{2^i} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2\ .$$

□

Remarque 14 *Dans notre analyse, on s'est limité à l'efficacité de chaque opération dans le pire des cas. Pour d'autres structures de données, d'autres analyses peuvent être plus pertinentes. Par exemple, on peut s'intéresser à l'efficacité d'une suite de n opérations (on parle d'*analyse amortie*). La raison est qu'il peut y avoir une dépendance entre les opérations. Par exemple, on peut imaginer qu'une opération coûteuse peut avoir lieu seulement si beaucoup d'opérations pas chères ont eu lieu auparavant.*

15.3 Applications

Tri par tas (*heapsort*)

En utilisant la structure tas on peut concevoir un (autre) algorithme qui trie un tableau de n éléments en $O(n \cdot \log n)$ dans le pire des cas.

— L'algorithme prend en entrée un tableau `a` avec n éléments aux positions $1, \ldots, n$.

— On appelle la fonction *build-heap* sur ce tableau avec un coût : $O(n)$. L'élément plus grand se trouve alors en a[1]. On pose $m = n$ (m est le nombre d'éléments dans le tas).
— On itère $n - 1$ fois pour un coût total qui est $O(n \log n)$:
  1. on échange a[1] avec a[m].
  2. on décrémente m et on applique heapify(1).
— A la fin de l'itération les éléments sont triés par ordre croissant.

Queue de priorité

Dans la *simulation* d'un système à événements discrets, chaque événement a une *date* (la date à laquelle l'événement doit avoir lieu). On place les événements dans un *min-heap* (le plus petit est au sommet).

Un *pas de simulation* consiste à éliminer du tas l'événement au sommet (le plus proche dans le futur) et à insérer dans le tas un nombre (qu'on suppose borné) de nouveaux événements (avec les nouvelles dates). Ainsi, dans un tas de taille m, chaque pas de simulation prend $O(\log m)$.

Codage, graphes

On trouvera d'autres utilisations de la structure tas dans la suite du cours. Notamment dans la construction de l'arbre de codage de Huffman (section 22.2) et dans la recherche des plus courts chemins dans un graphe (section 25.3).

15.4 Problème

15.4.1 Un tas en dimension 2

Soit T un tableau $m \times n$ qui contient des entiers ou un symbole spécial ∞ qui est plus grand que n'importe quel entier. On dit que le tableau est *bien formé* si chaque ligne lue de gauche à droite et chaque colonne lue du haut vers le bas donne une suite croissante (mais pas forcement strictement croissante). Un tableau bien formé peut donc contenir r entiers pour $0 \leq r \leq mn$. Voici un exemple de tableau bien formé 4×4 qui contient 8 entiers :

2	3	5	14
4	8	16	∞
12	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞

1. Proposez des conditions pour vérifier en $O(1)$ si un tableau bien formé est : (i) *vide*, (ii) *plein*.
2. Proposez un algorithme en $O(m+n)$ pour *extraire un élément minimum* d'un tableau bien formé non-vide. Vous devez illustrer votre algorithme en utilisant le tableau ci-dessus et expliquer pourquoi votre algorithme est bien en $O(m+n)$.
3. *Programmez* la fonction C qui correspond à l'algorithme d'extraction. Vous ferez l'hypothèse que le symbole ∞ est représenté par la constante `INT_MAX` et que le tableau contient des entiers strictement plus petits que `INT_MAX`.
4. Proposez un algorithme en $O(m+n)$ pour *insérer un entier* dans un tableau bien formé non-plein.
5. *Programmez* la fonction C qui correspond à l'algorithme d'insertion (mêmes hypothèses que pour l'extraction).
6. Supposons maintenant $n = m$. Proposez un algorithme pour *trier* n^2 entiers en $O(n^3)$ qui utilise les fonctions d'extraction et d'insertion aux points 3. et 4. (bien sûr, une solution qui fait appel à un des algorithmes de tri étudiés dans le cours n'est pas valide !). Comparez la complexité asymptotique dans le pire de cas de votre algorithme à celles du tri par insertion et du tri par fusion.

Chapitre 16

Diviser pour régner et relations de récurrence

Diviser pour régner (*divide and conquer* en anglais, *divide et impera* en latin) est une stratégie générale pour la conception d'algorithmes.

— Si le problème est *petit* le résoudre directement.
— Sinon, *découper* le problème en sous-problèmes de taille comparable (si possible).
— *Résoudre* les sous-problèmes en appliquant la même stratégie.
— *Dériver* une solution pour le problème de départ.

L'analyse de complexité d'algorithmes conçus en suivant cette stratégie revient à expliciter la fonction qui satisfait une certaine relation de récurrence. Dans ce chapitre on donne une méthode pour résoudre une certaine classe de relations de récurrence et on décrit des algorithmes qui appliquent la stratégie diviser pour régner.

16.1 Problèmes et relations de récurrence

On suppose que l'on peut exprimer la solution d'un problème de taille n en fonction de :

1. La solution de a *problèmes* de *taille* n/b ($a \geq 1$ et $b > 1$)
2. Un *travail de division et combinaison* des solutions de sous-problèmes qui coûte $O(n^c)$ avec $c \geq 0$.

La complexité $C(n)$ de l'algorithme sur une entrée de taille n est alors déterminée par une *récurrence* de la forme :

$$\begin{array}{rcl} C(n) & = & a \cdot C(n/b) + O(n^c) \ , \\ C(0) & = & O(1) \ . \end{array} \tag{16.1}$$

Notation La notation $O(g)$ dénote un ensemble de fonctions qui sont bornées au sens asymptotique par la fonction g. En pratique, on abuse souvent cette notation. Par exemple, on écrit $C(n) = O(g)$ pour dire que la fonction $C(n)$ est dans $O(g)$. On écrit aussi $C(n)+O(g)$ pour indiquer une fonction qui est bornée au sens asymptotique par une fonction de la forme $C(n) + k \cdot g(n)$. Ainsi la récurrence (16.1) ci-dessus dit qu'ils existent $n_0, k_1, k_2 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{array}{rcl} C(n) & \leq & a \cdot C(n/b) + k_1 \cdot n^c \\ C(0) & \leq & k_2 \ . \end{array}$$

Exemple 50 *Considérons la recherche dichotomique dans un tableau ordonné.*
- *Si le tableau a* 1 élément *on le compare à l'élément recherché et on termine.*
- *Sinon, on compare l'élément recherché avec l'élément au* milieu *du tableau.*
- *S'ils sont* égaux *on termine.*
- *Sinon on* itère *la recherche sur une* moitié du tableau.

On a donc :

$$C(n) = C(n/2) + O(1) \ .$$

Exemple 51 *On considère un algorithme de tri par fusion (*mergesort*) qui opère sur un tableau.*
- *Si le tableau a* taille 1*, le tableau est trié.*
- *Sinon, on sépare le tableau en* deux parties égales *et on les trie.*
- *Ensuite on fait une* fusion *des deux tableaux triés.*

La phase de division prend $O(1)$ *et la phase de fusion* $O(n)$*. On dérive donc une relation de récurrence :*

$$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + O(n) \ .$$

Exemple 52 *On veut* multiplier x *et* y *entiers sur* n *chiffres (pour simplifier supposons* n *pair). L'algorithme usuel est* quadratique *en* n*. On peut écrire* x *et* y *comme :*

$$\begin{aligned} x &= a \cdot 10^m + b \\ y &= c \cdot 10^m + d \ , \end{aligned}$$

où a, b, c, d *sont maintenant des entiers sur* $m = n/2$ chiffres*. On remarque :*

$$x \cdot y = ac \cdot 10^{2m} + (ad + bc)10^m + bd \ .$$

Ceci suggère un algorithme diviser pour régner *où une multiplication de taille* n *est réduite à* 4 *multiplications de taille* $n/2$ *plus des additions et des décalages (pour implémenter la multiplication par une puissance de* 10*). On obtient donc :*

$$C(n) = 4 \cdot C(n/2) + O(n) \ .$$

Hélas, on a toujours une complexité quadratique *(technique de preuve à suivre) et un* algorithme plus compliqué*. Probablement la* mise-en-oeuvre *donnera un algorithme* moins efficace *que l'algorithme standard... Mais on peut faire* mieux *! Voici une vieille* remarque *(Gauss) qui a été exploitée par A. Karatsuba [KO62] :*

$$(ad + bc) = (a + b)(c + d) - ac - bd \ .$$

On peut donc calculer le facteur de 10^m *avec* 1 multiplication *(plus* 4 *additions) au lieu de* 2 multiplications*. Ce qui donne :*

$$C(n) = 3 \cdot C(n/2) + O(n) \ .$$

Cette fois il y a un gain significatif *(justification à suivre) et une bonne mise en oeuvre donne une méthode de multiplication plus efficace pour des nombres assez grands (environ* 500 *bits).*

Exemple 53 *C'est un peu la* même histoire *que pour la multiplication d'entiers mais en* dimension 2 *! On veut* multiplier deux matrices A, B *de dimension* $n \times n$ *(n pair). L'*algorithme standard *est* $O(n^3)$. *Une stratégie* diviser pour régner *commence par décomposer* A *et* B *en :*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

où A_{ij} *et* B_{ij} *ont dimension* $n/2 \times n/2$. *Ensuite on* calcule *:*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} \\ C_{12} &= A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ C_{21} &= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \\ C_{22} &= A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \ . \end{aligned}$$

On vérifie que : $C = A \cdot B$. *On a donc un* coût *:*

$$C(n) = 8 \cdot C(n/2) + O(n^2) \ .$$

Encore une fois, ceci est plus compliqué *que l'algorithme standard et a la* même complexité asymptotique. *Cependant, V. Strassen [Str69] a montré que l'on peut s'en sortir avec* 7 *multiplications (détails non-triviaux dans [CLRS09]). On a donc :*

$$C(n) = 7 \cdot C(n/2) + O(n^2) \ .$$

Ce qui mène à une amélioration significative *de la complexité asymptotique et même à un* algorithme pratique *pour* n *de l'ordre de* 10^2 *(voir [CLRS09]). Une petite course à la* meilleure borne asymptotique *a suivi. Actuellement le* record *est autour de* $O(n^{2,3})$ *mais l'algorithme en question n'est pas du tout pratique ! Rappelons au passage que si l'on travaille avec les flottants, il faut aussi évaluer la* stabilité numérique *de l'algorithme.*

16.2 Solution de relations de récurrence

Proposition 6 *Pour borner la solution de la relation de récurrence :*

$$C(n) = a \cdot C(n/b) + O(n^c), \quad C(0) = O(1),$$

il suffit de considérer le ratio *:*

$$r = \frac{a}{b^c} \ .$$

A savoir :

$$\begin{aligned} &\textit{si } r = 1 \quad \textit{alors } C(n) = O(n^c \cdot \log n) \ , \\ &\textit{si } r < 1 \quad \textit{alors } C(n) = O(n^c) \ , \\ &\textit{si } r > 1 \quad \textit{alors } C(n) = O(n^{\log_b a}) \ . \end{aligned}$$

Remarque 15 *Ce qu'on présente est une* version a-b-c *(ou* $\frac{a}{b^c}$*) d'un théorème plus général dû à* Akra-Bazzi *[AB98] qu'on appelle aussi* master theorem.

Avant de procéder avec la preuve, considérons l'application de la proposition aux exemples.

Dichotomie $a = 1, b = 2, c = 0, r = 1$	$C(n) = 1 \cdot C(n/2) + O(1)$ $C(n) = O(\log n)$
Fusion $a = 2, b = 2, c = 1, r = 1$	$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + O(n)$ $C(n) = O(n \log n)$
Karatsuba $a = 3, b = 2, c = 1, r > 1$	$C(n) = 3 \cdot C(n/2) + O(n)$ $C(n) = O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1,6})$
Strassen $a = 7, b = 2, c = 2, r > 1$	$C(n) = 7 \cdot C(n/2) + O(n^2)$ $C(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2,8})$
Plus rare $a = 2, b = 2, c = 2, r < 1$	$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + O(n^2)$ $C(n) = O(n^2)$

Preuve de la proposition 6

Pour simplifier la notation, on suppose que :
— n est une puissance de b.
— k borne les constantes du *cas terminal* et du *travail de division et de combinaison*. On a donc :

$$\begin{aligned} C(n) &\leq a \cdot C(n/b) + k \cdot n^c \ , \\ C(0) &\leq k \ . \end{aligned}$$

Considérons maintenant le travail de division et de combinaison qu'on effectue à chaque niveau :

niveau	travail
0	$a^0 \cdot k \cdot n^c$
1	$a^1 \cdot k \cdot (n/b^1)^c$
$\cdots$	$\cdots$
j	$a^j \cdot k \cdot (n/b^j)^c$
$\cdots$	$\cdots$
$\log_b n$	$a^{\log_b n} \cdot k \cdot (n/b^{\log_b n})^c$

Il en suit que le *travail* t_j au *niveau* j est :

$$t_j = k \cdot n^c \cdot r^j$$

où $r = \frac{a}{b^c}$. Le *ratio* fait donc son apparition ! On distingue maintenant les 3 cas.

$r = 1$: travail constant à chaque niveau On a :

$$t_j = k \cdot n^c \ .$$

En additionnant le ($\log_b n + 1$ niveaux) on obtient :

$$C(n) = O(n^c \log n) \ .$$

$r < 1$: le travail du niveau 0 domine On a :

$$\begin{aligned} \Sigma_{j=0,\ldots,\log_b n} t_j &= k \cdot n^c \cdot \Sigma_{j=0,\ldots,\log_b n} r^j \\ &\leq k \cdot n^c \cdot \tfrac{1}{1-r} \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$C(n) = O(n^c) \ .$$

$r > 1$ **: le travail des feuilles domine** D'abord on remarque pour $h = \log_b n$:

$$\Sigma_{j=0,\ldots,h} r^j = \frac{r^{h+1} - 1}{r - 1} \leq r^h \frac{r}{r - 1} \ .$$

Donc pour $k' = r/(r-1)$ on a :

$$\Sigma_{j=0,\ldots,\log_b n} t_j \leq k \cdot n^c \cdot r^h \cdot k' \ .$$

En explicitant h et r :

$$k \cdot k' \cdot n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = k \cdot k' \cdot n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{n^c} \ .$$

Rappel : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Donc :

$$C(n) = O(a^{\log_b n}) = O(n^{\log_b a}) \ .$$

Notez que $a^{\log_b n}$ est le *nombre de feuilles.* □

Remarque 16 *La proposition 6* s'applique *si l'on divise un problème de taille n dans un nombre a de sous-problèmes qui ont la même taille n/b. Elle* ne s'applique pas*, par exemple, au* tri rapide *car les sous-problèmes n'ont pas forcement la même taille.*

Exercice 17 *On peut représenter un nombre entier de taille arbitraire comme une liste de chiffres en base B. Par simplicité, supposons $B = 10$. Programmez les opérations d'addition et multiplication de l'école primaire ainsi que la multiplication de Karatsuba et déterminez le nombre de chiffres nécessaires pour que la multiplication de Karatsuba soit plus efficace que la multiplication de l'école primaire en pratique.*

16.3 Problème

16.3.1 Recherche des deux points les plus rapprochés

On s'intéresse au problème suivant : on reçoit en entrée un tableau p qui contient n points distincts dans $\mathbf{R}^2$ et on souhaite calculer la distance euclidienne minimale entre deux points. On suppose : (i) que les points sont des valeurs de type struct point {double x; double y;}, (ii) qu'on peut ignorer les erreurs d'approximation dûs au calcul sur les flottants des opérations arithmétiques et de l'opération d'extraction de la racine carrée et (iii) que les dites opérations sont effectuées en temps constant.

1. Programmez une fonction d'en-tête :
   `double dp(int n, struct point p[n])`
   qui prend en argument un entier $n \geq 2$ et un tableau de n points distincts et retourne comme résultat la distance euclidienne minimale entre deux points distincts. Votre fonction devrait avoir une complexité asymptotique en temps en $O(n^2)$.
2. Dans la suite, on suppose disposer d'une fonction d'en-tête :
   `void trifusion(int n,struct point t[n],short coord)`
   qui prend en argument un tableau t avec n points et le trie par ordre croissant par rapport à la première composante (si coord est 1) ou la deuxième composante (si coord est 2). On développe maintenant une approche *diviser pour régner*. Supposons que xord est un tableau de points et $i < j$ deux nombres naturels tels que $\mathsf{xord}[i].x \leq \cdots \leq \mathsf{xord}[j].x$ (première composante croissante). On dénote par $dp(i,j)$ la distance minimale entre deux points dans l'ensemble $P_{i,j} = \{\mathsf{xord}[i], \ldots, \mathsf{xord}[j]\}$. Si $j - i$ est petit on peut appliquer l'algorithme de la question 1. Sinon, soient $m = (i+j)/2$, $xm = \mathsf{xord}[m].x$ et
   $$d = min\{\, dp(i,m),\, dp(m+1,j)\} \ .$$
   La valeur d est donc une *borne supérieure* à $dp(i,j)$. Pour calculer $dp(i,j)$ il reste à déterminer la distance minimale entre un point dans $\{\mathsf{xord}[i], \ldots, \mathsf{xord}[m]\}$ et un point dans $\{\mathsf{xord}[m+1], \ldots, \mathsf{xord}[j]\}$. Soit $B(xm,d,i,j)$ l'ensemble des points dans $P_{i,j}$ tels que la distance de leur abscisse de xm est au plus d.[1] Programmez une fonction points_bande d'en-tête :
   ```
   struct bande {int low; int high;};
   struct bande points_bande(int i, int j, struct point xord[], double d)
   ```
   qui calcule l'ensemble $B(xm,d,i,j)$. Plus précisement, points_bande retourne une valeur b de type struct bande telle que $B(xm,d,i,j) = \{\mathsf{xord}[b.low], \ldots, \mathsf{xord}[b.high]\}$. Analysez la complexité asymptotique de la fonction points_bande.
3. Soit p un point dans $B(xm,d,i,j)$. Bornez le nombre de points qu'on peut trouver dans $B(xm,d,i,j)$ dont l'ordonnée est à une distance au plus d de l'ordonnée de p. Question auxiliaire/suggestion : combien de points à une distance au moins d peut-on mettre dans un carré dont le côté mesure d ?
4. Programmez une fonction d'en-tête :
   `double dpbande(struct bande b, struct point xord[], double d)`
   qui calcule la distance minimale entre deux points distincts (s'ils existent) dans $B(xm,d,i,j)$. Analysez la complexité asymptotique de la fonction dpbande.

1. Les points dans $B(xm,d,i,j)$ sont donc dans une bande de largeur $2 \cdot d$ centrée autour de la droite composée des points dont l'abscisse est xm.

5. Soit C une fonction sur les nombres naturels qui satisfait la récurrence :

$$C(0) = 1, \quad C(n) = 2 \cdot C(n/2) + n \cdot \log_2 n \quad (\text{si } n \geq 1).$$

   Trouvez :
   — Un nombre naturel minimal k tel que $f(n) = n^k$ et $C(n)$ est $O(f)$.
   — Un nombre naturel minimal k tel que $g(n) = n \cdot (\log_2 n)^k$ et $C(n)$ est $O(g)$.
6. D'après ce que vous avez appris, pensez-vous qu'une approche *diviser pour régner* permet d'améliorer la complexité $O(n^2)$ de la question 1 ?

Chapitre 17

Transformée de Fourier rapide

Un polynôme peut être représenté par ses coefficients ou par un ensemble de points. On peut voir la transformée (discrète) de Fourier comme une méthode pour passer de la représentation par coefficients à celle par points alors que la transformée *inverse* de Fourier passe des points aux coefficients. Un algorithme direct permet de mettre en oeuvre ces opérations en $O(n^2)$. En choisissant les points comme les racines n-aires de l'unité, il est possible, en suivant une stratégie diviser pour régner (voir chapitre 16), de réduire la complexité à $O(n \cdot log(n))$ [CT65]. Dans ce cas, on parle de transformée (ou transformée inverse) *rapide* (*Fast Fourier Transform* ou *FFT* en anglais). Cet algorithme joue un rôle très important, par exemple, dans le traitement numérique du signal.

17.1 Polynômes et matrice de Vandermonde

Soit $p(x) = \Sigma_{k=0,\ldots,n-1} a_i x^i$ un polynôme sur un corps. On peut évaluer un polynôme dans un point en effectuant $O(n)$ multiplication et additions. En particulier, on peut utiliser la règle de Horner :

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_1 + \cdots + (xa_n)\cdots)) \tag{17.1}$$

Il en suit qu'on peut évaluer $p(x)$ en n points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en $O(n^2)$.

Définition 13 (matrice Vandermonde) *La matrice de Vandermonde V_n pour les points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ est définie par :*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{17.2}$$

Des manipulations standards d'algèbre linéaire permettent d'expliciter le déterminant de la matrice V_n.

Fait 1 *Le déterminant de la matrice de Vandermonde V_n est :*

$$det(V_n) = \Pi_{0 \leq i < j \leq (n-1)} (x_j - x_i) \ . \tag{17.3}$$

Il suit que si les points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont différents alors la matrice V_n est inversible.

Proposition 7 *Soient (x_k, y_k) des couples de points pour $k = 0, \ldots, n-1$ et avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Alors il existe unique un polynôme $p(x)$ de degré au plus $n-1$ tel que $p(x_k) = y_k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.*

PREUVE. L'assertion que $p(x_k) = y_k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ est équivalente à la condition $V_n a = y$, où V_n est la matrice de Vandermonde relative aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ et $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ sont les coefficients du polynôme à déterminer. Comme V_n est inversible on doit avoir $a = (V_n)^{-1} y$. □

Il est possible d'expliciter le polynôme en question en utilisant l'interpolation de Lagrange.

Définition 14 (polynôme interpolant) *Soient (x_k, y_k) des couples de points pour $k = 0, \ldots, n-1$ et avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On définit le polynôme interpolant par :*

$$\ell(x) = \Sigma_{i=0,\ldots,n-1} y_i \, \frac{\Pi_{j \neq i}(x - x_j)}{\Pi_{j \neq i}(x_i - x_j)} \ .$$

Proposition 8 *Le polynôme $\ell(x)$ a degré au plus $(n-1)$ et il satisfait : $\ell(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, (n-1)$.*

PREUVE. Il est clair que le degré est au plus $n-1$ et on vérifie que :

$$\frac{\Pi_{j \neq i}(x - x_j)}{\Pi_{j \neq i}(x_i - x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x = x_k \neq x_i \ . \end{cases}$$

□

On peut aussi dériver le fait qu'un polynôme non-nul de degré $n-1$ a au plus $n-1$ racines différentes.

Proposition 9 *Un polynôme $p(x)$ de degré $n-1$ qui n'est pas nul partout admet au plus $n-1$ points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tels que $p(x_k) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.*

PREUVE. Si on avait n points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ alors on pourrait construire la matrice de Vandermonde V_n relativement à ces points et dériver $V_n a = 0$ où $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ sont les coefficients du polynôme. Il en suit que $a = (V_n)^{-1} 0 = 0$ contre l'hypothèse que $p(x) \neq 0$. □

Opérations et représentation de polynômes

On peut représenter un polynôme de degré $n-1$ par ses coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ou par sa valeur dans n points $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Il est possible de passer d'une représentation à l'autre en $O(n^2)$. En particulier, la *transformée de Fourier* est le passage des coefficients aux points ce qui revient à calculer $y = V_n a$ où V_n est la matrice de Vandermonde pour les points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ est le vecteur des coefficients. La *transformée de Fourier inverse* est le passage des points aux coefficients ce qu'on peut faire en calculant les coefficients du polynôme interpolant (définition 14).

On discute les avantages et les inconvénients de ces représentations par rapport à 3 opérations fondamentales : la somme, l'évaluation dans un point et le produit.

Somme Les deux représentations permettent de calculer la somme de deux polynômes en temps linéaire : on additionne les coefficients et les ordonnées des points, respectivement.

Évaluation L'évaluation d'un polynôme dans un point est possible en temps linéaire avec la représentation par coefficients (règle de Horner). Dans la représentation par points, on peut évaluer dans un point le polynôme interpolant de Lagrange mais ce calcul est $O(n^2)$.

Produit Le produit de deux polynômes est possible en $O(n)$ avec la représentation par points (on multiplie les ordonnées des points). A noter que le produit de deux polynômes de degré au plus $n-1$ a degré au plus $2n-2$ et que pour déterminer ce polynôme il faut connaître sa valeur en $2n-1$ points. Donc pour calculer le produit 'par points' il faut connaître $2n-1$ points des polynômes à multiplier.

Dans la représentation par coefficients, le calcul des coefficients du polynôme produit est lié à l'opération de *convolution*. Si $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ sont les coefficients de deux polynômes de degré au plus $n-1$ alors les coefficients du polynôme produit de degré au plus $2n-2$ sont :

$$c_k = \Sigma\{a_i \cdot b_j \mid i+j=k, 0 \leq i,j \leq (n-1)\} \qquad k = 0, \ldots, 2n-2 \ . \tag{17.4}$$

Ce calcul est $O(n^2)$.

17.2 Le cercle unitaire complexe

On considère maintenant le corps des nombres complexes et on dénote par $\mathbf{i}$ la valeur de coordonnées $(0,1)$ sur le plan complexe, à savoir une des racines carrées de -1. Si $x = a + \mathbf{i}b$ est un nombre complexe on dénote par $\overline{x} = a - \mathbf{i}b$ son conjugué. Les points qui se trouvent sur le cercle de centre $(0,0)$ et rayon 1 s'expriment par :

$$\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta \ . \tag{17.5}$$

La valeur θ représente l'angle qui détermine le point sur le cercle. Ainsi la fonction est périodique de période 2π. En suivant Euler, la fonction s'exprime aussi comme :

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta \ .$$

La multiplication de deux points sur le cercle revient à additionner les angles :

$$e^{\mathbf{i}\theta_1} \cdot e^{\mathbf{i}\theta_2} = e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{17.6}$$

La valeur complexe $(1,0)$ est donc l'unité pour la multiplication :

$$e^{\mathbf{i}(2\pi)n} = 1 \qquad n \in \mathbf{Z} \ . \tag{17.7}$$

Par ailleurs, chaque élément a une inverse :

$$e^{\mathbf{i}\theta} \cdot e^{\mathbf{i}(-\theta)} = 1 \ . \tag{17.8}$$

On remarquera que :

$$e^{\mathbf{i}(-\theta)} = \cos(-\theta) + \mathbf{i}\sin(-\theta) = \cos(\theta) - \mathbf{i}\sin(-\theta) \ ,$$

est le point symétrique par rapport à l'abscisse et correspond au conjugué de $e^{\mathbf{i}\theta}$.

Il suit de ces considérations que les points $e^{\mathbf{i}\theta}$ forment un *groupe abelien*.

On peut construire un *sous-groupe* avec n éléments en considérant les points de la forme :

$$\omega^0, \ldots, \omega^{(n-1)} \qquad \text{où } \omega = e^{\mathbf{i}(2\pi)/n} \ .$$

On remarquera que $(\omega^k)^n = 1$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. En d'autres termes, les ω^k sont exactement les racines du polynôme $p(x) = x^n - 1$. Par ailleurs, chaque ω^k a une inverse multiplicative :

$$(\omega^k)(\omega^{-k}) = (\omega^k)(\omega^{(n-k)}) = 1 \ .$$

Proposition 10 *Soit $n = 2^h$ avec $h \geq 1$ et soit $X = \{\omega^k \mid k = 0, 1, \ldots, (n-1)\}$ l'ensemble des racines n-aires de l'unité. Alors si l'on pose :*

$$X^2 = \{x^2 \mid x \in X\} = \{\omega^{2k} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\} \ ,$$

on a que $\sharp X^2 = \sharp X/2 = n/2$.

Ainsi on a 2 racines quadratiques, 4 racines cubiques,...

17.3 Transformée rapide

On va montrer qu'en choisissant les n points comme les racines n-aires de l'unité il est possible de calculer la transformée de Fourier en $O(nlog(n))$. Pour obtenir ce résultat, on utilise une technique *diviser pour régner* : pour calculer un polynôme de degré au plus $n-1$ on va évaluer deux polynômes de degré au plus $n/2-1$ qui sont construits en prenant les coefficients pairs et impairs, respectivement du polynôme de départ :

$$p(x) \quad = \Sigma_{k=0,\ldots,n-1} a_k x^k \quad = p_0(x^2) + x \cdot p_1(x^2) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_0(x) & = \Sigma_{k=0,\ldots,n/2-1} a_{2k} x^k \\ p_1(x) & = \Sigma_{k=0,\ldots,n/2-1} a_{2k+1} x^k \ . \end{array} \right.$$

Cette décomposition est toujours possible mais elle est avantageuse seulement si on peut réduire le nombre de points sur lesquels le polynômes p_0 et p_1 doivent être évalués. En particulier, si on pose $n = 2^h$ et on prend X comme l'ensemble des racines n-aires de l'unité on sait que $\sharp X^2 = \sharp X/2$. Donc pour évaluer un polynôme de degré $n-1$ sur les racines n-aires de l'unité il suffit d'évaluer deux polynômes de degré $n/2-1$ sur les racines $n/2$-aires de l'unité et ensuite combiner les résultats avec un coût linéaire. On a donc une relation de récurrence :

$$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + n \ ,$$

et on sait que $C(n)$ est $O(n \cdot log(n))$ (chapitre 16). A noter qu'il est essentiel de prendre comme points les racines n-aires de l'unité. A défaut on ne pourrait pas garantir que les carrés de ces valeurs constituent un ensemble de cardinale $n/2$.

Transformée inverse rapide

Il se trouve qu'on peut appliquer la même méthode pour calculer la transformée inverse. Ce fait repose sur une caractérisation de la matrice inverse de Vandermonde. Soit V_n la matrice de Vandermonde construite à partir des points :

$$x_k = \omega^k, \qquad k = 0, \ldots, n-1 \ .$$

Soit $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ le vecteur des coefficients d'un polynôme de degré au plus $n-1$, soit $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ le vecteur des points et soit $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ le vecteur des images des points. On a :

$$V_n a = y \ . \tag{17.9}$$

Proposition 11 *Dans les hypothèses ci dessous, la matrice inverse de V_n est*

$$(V_n)^{-1} = \frac{1}{n}\overline{V_n}$$

où $\overline{V}_n$ est la matrice obtenue en prenant les conjugué de tous les éléments de V_n.

PREUVE. On a pour $j, k, \ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$V_n[j,k] = \omega^{jk} \ , \qquad \overline{V}_n[k,\ell] = \omega^{-k\ell} \ .$$

On observe que :

$$\Sigma_{k=0,\ldots,n-1}\omega^{jk}\omega^{-kj} = \Sigma_{k=0,\ldots,n-1}\omega^{(jk-jk)} = \Sigma_{k=0,\ldots,n-1}1 = n \ ,$$

et que pour $j \neq \ell$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{k=0,\ldots,n-1}\omega^{jk}\omega^{-k\ell} &= \Sigma_{k=0,\ldots,n-1}(\omega^{(j-\ell)})^k \\
&= \tfrac{1-(\omega^{(j-\ell)})^n}{1-\omega^{(j-\ell)}} \\
&= \tfrac{1-\omega^{n(j-\ell)}}{1-\omega^{(j-\ell)}} \\
&= \tfrac{0}{1-\omega^{(j-\ell)}} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Donc $V_n \cdot \overline{V}_n = n \cdot I_n$, où I_n est la matrice identité de dimension n. Il suit que : $(V_n)^{-1} = \frac{1}{n}\overline{V}_n$. □

La matrice $\overline{V}_n$ est la matrice de Vandermonde relativement aux points $x_k = \omega^k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Ces points sont aussi les racines n-aires de l'unité. La différence entre V_n et $\overline{V}_n$ est que dans V_n on énumère les racines à partir de 1 en sens antihoraire alors que dans $\overline{V}_n$ on procède en sens horaire.

Exemple 54 *Pour $n = 4$, les matrices V_n et $\overline{V}_n$ sont, respectivement :*

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \ , \qquad \overline{V}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^2 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \end{bmatrix} \ .$$

On peut donc appliquer le même algorithme diviser pour régner en $O(n \cdot log(n))$ pour calculer $\overline{V}_n y$. Ensuite on obtient a en divisant le vecteur résultat par n.

Exercice 18 *Soient $A, B \subseteq \mathbf{N}$ deux ensembles de nombres naturels. On définit leur somme cartésienne par $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. On suppose qu'il existe une constante $k \geq 1$ telle que si A et B ont n éléments alors ces éléments sont bornés par $k \cdot n$. On suppose aussi que les ensembles A et B sont représentés par 2 listes de nombres naturels. Proposez un algorithme pour calculer une liste qui représente $A + B$.*

17.4 Problème

17.4.1 Transformée de Fourier dans un corps fini

On peut adapter les idées de la transformée (rapide) de Fourier à un corps fini [Pol71]. Plutôt que travailler sur la racine n-ième de l'unité dans le corps complexe on considère, par exemple, un élément qui a les mêmes propriétés dans le corps $\mathbf{Z}_p$ des entiers modulo un nombre premier p. Dans cette approche, on manipule des entiers plutôt que des flottants et tous les calculs sont exacts. On décrit un contexte (parmi d'autre) dans lequel l'approche s'applique.

Soient $n = 2^\ell \geq 2$, $a = (a_0, \ldots, a_{n/2-1})$ et $b = (b_0, \ldots, b_{n/2-1})$ deux vecteurs de nombres entiers où l'on suppose $0 \leq a_i, b_j \leq m$. On se propose de calculer le vecteur *convolution* $c = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ tel que :

$$c_k = \Sigma_{i+j=k, 0 \leq i,j \leq n/2-1}\ a_i \cdot b_j \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

On note qu'on a toujours $c_{n-1} = 0$.

1. Montrez que $0 \leq c_k \leq m^2(n/2)$, pour $k = 0, \ldots, n-1$.

On cherche un nombre premier p tel que $p = (k \cdot n + 1) > m^2(n/2)$. L'existence d'un tel nombre est garantie par un théorème de Dirichlet (si $pgcd(a, b) = 1$ alors la droite $ax + b$ contient une infinité de nombres premiers).

2. Programmez une fonction qui prend en entrée les paramètres m et n et retourne le plus petit nombre premier de la forme $kn + 1$ tel que $k \geq m^2/2$.

Soit $(\mathbf{Z}_p)^* = \{1, \ldots, p-1\}$. Un élément de $g \in (\mathbf{Z}_p)^*$ est un générateur si $(\mathbf{Z}_p)^* = \{g^i \mid i \in (\mathbf{Z}_p)^*\}$. On sait aussi que les générateurs ne sont pas rares.

3. Montrez que si g est un générateur alors $\omega = g^k$ est une racine n-ième de l'unité au sens où :

$$(\omega^i \not\equiv 1) \mod p \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } (\omega^n \equiv 1) \mod p\ . \tag{17.10}$$

4. Programmez une fonction qui tire au hasard des éléments dans $\{2, \ldots, p-1\}$ jusqu'à tomber sur un élément ω qui satisfait la condition 17.10 et qui retourne la tuple $\Omega = (1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$.
5. On considère a et b comme les coefficients de polynômes de degré $n/2-1$. En d'autres termes, on considère les polynômes :

$$p_a(x) = \Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1} a_i x^i \quad \text{et} \quad p_b(x) = \Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1} b_i x^i\ .$$

Programmez une fonction qui calcule dans $\mathbf{Z}_p$:

$$d_i = p_a(\omega^i), \quad e_i = p_b(\omega^i), \quad f_i = c_i \cdot d_i, \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1\ .$$

6. Programmez une fonction qui calcule l'inverse multiplicative $1/n$ de n dans $\mathbf{Z}_p$ (c'est-à-dire l'unique élément $x \in \mathbf{Z}_p$ tel que $(nx \equiv 1) \mod p$).
7. Programmez une fonction qui détermine la convolution recherchée $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ en calculant la transformée inverse du vecteur $(f_0, \ldots, f_{n-1})$, à savoir :

$$c_k = \Sigma_{j=0,\ldots,n-1}\ f_j \cdot (\omega)^{-kj}, \qquad k = 0, \ldots, n-1\ .$$

Il y a plusieurs pistes pour continuer cet exercice. Par exemple : (i) on peut appliquer les techniques de transformée *rapide* et (ii) on peut voir a et b comme des nombres et utiliser la transformée pour calculer leur *produit*.

Chapitre 18

Algorithmes probabilistes

On peut introduire une *composante aléatoire* dans la *conception* et/ou l'*analyse* d'un algorithme. On distingue :

Algorithme probabiliste On considère un algorithme qui à certains moments du calcul *joue à pile ou face* pour déterminer son prochain état. On définit une v.a.d. X qui associe à chaque exécution possible (sur une entrée fixée) son *coût d'exécution* et on cherche à calculer son espérance $E[X]$.

Analyse en moyenne On fait une *hypothèse sur la distribution* des entrées. On définit une v.a.d. X qui associe à chaque entrée son *coût d'exécution* et on cherche à calculer son espérance $E[X]$.

Dans ce chapitre, on présente 3 exemples majeurs de l'approche probabiliste : le tri rapide, un test de primalité et un test d'identité de polynômes. Dans les chapitres suivants, on présentera d'autres exemples de conception et/ou d'analyse probabiliste en relation avec certaines structures de données (arbres binaires de recherche, tables de hachage,...).

18.1 Probabilité de terminaison et temps moyen de calcul

Générateurs (pseudo-)aléatoires

Dans un *algorithme probabiliste*, on peut invoquer une fonction qu'on appelle *générateur aléatoire* qui produit un nombre dans $\{0, 1\}$ avec une *probabilité uniforme*.

En pratique, dans un langage de programmation on fait appel à une fonction de bibliothèque qui approche de façon plus ou moins fidèle le comportement d'un générateur aléatoire. En particulier en C, on génère un entier dans l'intervalle $[0, \mathsf{RAND\_MAX}]$ avec la fonction rand. Sur mon ordinateur, $\mathsf{RAND\_MAX} = 2,147,483,647$ et on considère que $\mathsf{rand}()\%2$ est un bit aléatoire avec probabilité uniforme. La fonction rand produit (de façon déterministe) une suite de nombres à partir d'un *germe* qui est crée par la fonction srand. Typiquement on utilise une fonction système time pour éviter de générer toujours le même germe. [1]

```
1 srand((unsigned)(time(NULL))); // initialisation suite
2 ...rand();...rand();...        // appels fonction rand
```

1. Cette utilisation de la fonction rand est adaptée aux simulations, les tests de programmes,... mais elle n'est pas du tout recommandée pour les applications cryptographiques.

Dans les analyses, on fera l'hypothèse que les résultats d'une suite d'invocations du générateur sont *indépendants*. Donc la probabilité d'obtenir une suite $w \in \{0,1\}^*$ est $2^{-|w|}$.

Fixons un *algorithme* A (ou un programme) et une *entrée* i de l'algorithme. Une *exécution* de $A(i)$ est une *suite d'états* traversées par l'algorithme à partir de la configuration initiale (voir chapitre 12) Si l'exécution *termine* alors la suite est *finie* sinon elle est *infinie* (dénombrable). Dans les algorithmes *déterministes* l'exécution est unique, mais dans les algorithmes *probabilistes* on peut avoir plusieurs exécutions (pour la même entrée).

Probabilité de terminaison

Soit Ω l'ensemble des *exécutions finies* de $A(i)$. Pour tout $\omega \in \Omega$ on définit :

$rnd(\omega) \in \{0,1\}^*$	les bits aléatoires utilisés dans ω
$r(\omega) = \|rnd(\omega)\|$	longueur $rnd(\omega)$
$p(\omega) = 2^{-r(\omega)}$	'probabilité' de l'exécution de ω.

La *'probabilité' que l'algorithme A termine sur l'entrée i* est alors :

$$\Sigma_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \Sigma_{\omega\in\Omega} 2^{-r(\omega)} \ .$$

Par extension, on dit qu'un algorithme A *termine avec probabilité* 1 si pour toute entrée il termine avec probabilité 1. La fonction p n'est pas forcement une probabilité, mais au moins on a la propriété suivante.

Proposition 12

$$\Sigma_{\omega\in\Omega} p(\omega) \leq 1 \ .$$

Preuve. Si w, w' sont deux *mots*, on écrit $w \leq w'$ si w est un *préfixe* de w'. Si $\omega \neq \omega'$ alors $rnd(\omega) \not\leq rnd(\omega')$. Donc :

$$R = \{rnd(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \ ,$$

est un ensemble de mots $\{0,1\}^*$ qui sont *incomparables par rapport au préfixe*. Par exemple : $R = \{1, 01, 001, 0001, \ldots\}$.

D'abord on montre que si R est *fini* alors :

$$\Sigma_{w\in R} 2^{-|w|} \leq 1 \ .$$

Par *récurrence* sur $\sharp R$ et la *longueur du mot* le plus long dans R.

— Si $R = \{w\}$ alors $P(R) = 2^{-|w|} \leq 1$.

— Si $\sharp R > 1$ alors on définit : $R_i = \{w \mid iw \in R\}$, $i = 0, 1$. R_i est encore un ensemble de *mots incomparables* et par hypothèse de récurrence :

$$P(R) = \frac{1}{2}P(R_0) + \frac{1}{2}P(R_1) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ .$$

Si maintenant R est *dénombrable* on pose :

$$R_n = \{w \in R \mid |w| \leq n\} \ .$$

Comme $R_n \subseteq R_{n+1}$:

$$\Sigma_{w\in R_n} 2^{-|w|} \leq \Sigma_{w\in R_{n+1}} 2^{-|w|} \leq 1 \ .$$

Donc :

$$\Sigma_{w\in R}2^{-|w|} = \lim_{n\to+\infty}\Sigma_{w\in R_n}2^{-|w|} \leq 1 \ .$$

□

Si $\Sigma_{\omega\in\Omega}p(\omega) = 1$ alors on peut définir un *espace de probabilité discret* :

$$(\Omega, 2^{\Omega}, P)$$

avec pour $A \subseteq \Omega$, $P(A) = \Sigma_{\omega\in A}p(\omega)$. Remarquons qu'un algorithme qui termine avec probabilité 1 *n'est pas* un algorithme dont toutes les exécutions sont finies (mais les exécutions infinies ont probabilité 0).

Temps moyen de calcul

Supposons que l'algorithme A sur l'entrée i *termine avec probabilité* 1. Alors on peut définir une v.a.d. C qui associe à chaque exécution finie un *coût*. Par exemple on peut prendre :

$$C(\omega) = |\omega| \ ,$$

en considérant que la *longueur de l'exécution* correspond en gros au *temps de calcul*. Ensuite on peut calculer l'espérance $E[C]$ qui est donc le *coût moyen de l'algorithme A sur l'entrée i* :

$$E[C] = \Sigma_{\omega\in\Omega}\ |\omega| \cdot 2^{-r(\omega)} \ .$$

En résumant, pour un algorithme probabiliste A avec entrée i, soit Ω l'ensemble des *exécutions finies* et pour $\omega \in \Omega$ soit $r(\omega)$ le nombre de bits aléatoires utilisés dans ω. Alors :

— La *probabilité de terminaison* est :

$$\Sigma_{\omega\in\Omega}\ 2^{-r(\omega)} \ .$$

— Le *temps moyen de calcul* est :

$$\Sigma_{\omega\in\Omega}\ |\omega| \cdot 2^{-r(\omega)} \ .$$

Exemples

On applique les notions présentées à une série d'exemples académiques avant de passer à des exemples plus intéressants.

Exemple 55 *On étudie la terminaison et le coût moyen de la fonction suivante.*

```
1 void proba1(){
2         while (1) {if ((rand()%2)==1){break;} }}
```

Analyse *On* suppose *que :*

$$P(\texttt{rand()\%2} == \texttt{1}) = \frac{1}{2} \ .$$

La probabilité de terminer exactement à la n-ième itération *est :*

$$\frac{1}{2^n} \ .$$

Donc la probabilité de terminer dans les premières n itérations *est :*

$$\Sigma_{i=1,\ldots,n}\frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n} \ ,$$

et la probabilité de terminer tout court *est :*

$$\Sigma_{i=1,\ldots,\infty}\frac{1}{2^i} = 1 \ .$$

On reconnaît ici une distribution géométrique *avec paramètre* $\frac{1}{2}$. *Le* coût moyen *de l'algorithme est donc* 2 *(itérations).*

Exemple 56 *On considère maintenant la fonction suivante.*

```
1  void proba2(){
2      long n=1;
3      short stop=0;
4      while (!stop){
5          stop=1;
6          int i;
7          for (i=0;i<n;i++){
8              if ((rand()%2)==1){
9                  stop=0;
10                 break;}}
11         n=n+1;}}
```

Analyse *On se* souvient *que :*

$$\begin{array}{ll}(a) & 1+x \leq e^x, \\ (b) & \Sigma_{i=1,\ldots,n}\frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n} \ .\end{array}$$

La probabilité p_n *de* terminer exactement à la n-ième itération *est :*

$$p_n = (\Pi_{i=1,\ldots,(n-1)}(1 - \frac{1}{2^i})) \cdot \frac{1}{2^n} \ .$$

En utilisant (a) *et* (b) *on a pour* $n \geq 1$ *:*

$$(\Pi_{i=1,\ldots,n}(1 - \frac{1}{2^i})) \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \ .$$

Donc pour $n = 1$ *on a* $p_1 = 1/2$ *et pour* $n \geq 2$ *on a :*

$$p_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}2^n} \ .$$

Il suit que la probabilité de terminer *est :*

$$\begin{array}{l}\Sigma_{n=1,\ldots,\infty}p_n \\ \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot (\Sigma_{i=2,\ldots,\infty}\frac{1}{2^i}) \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{e}+1}{2\sqrt{e}} \approx 0,8 < 1 \ .\end{array}$$

Et donc la probabilité de boucler *est significative !*

Exemple 57 *Et encore une fonction.*

```
1  void proba3(int m){
2      long k=0;
3      while (k<m){
4          if ((rand()%2)==1){
5              k=k+1;}}}
```

Analyse *Pour terminer on doit tirer m fois* 1. *Il s'agit de la distribution* binomiale négative. *Donc :*

1. `proba3` termine avec probabilité 1.
2. *Le* coût moyen *est :* $2m$.

A noter cette fonction dépend de l'entrée et que son coût est exponentiel *dans le nombre de bits nécessaires à représenter l'entrée* `m`.

Exemple 58 *Enfin, on considère la fonction suivante.*

```
1  void proba4(){
2      int n=1;
3      while (!((rand()%2)==1)){
4          n=n+1;}
5      short stop=0;
6      while (!stop){
7          stop=1;
8          int i;
9          for (i=0;i<n;i++){
10             if ((rand()%2)==1){
11                 stop=0;}}}}
```

Analyse *D'abord on suit une* distribution géométrique *et on affecte à la variable n un entier* $i \geq 1$ *avec probabilité* 2^{-i}. *La boucle* `for` *laisse* `stop` *à* `true` *avec probabilité* $p_n = \frac{1}{2^n}$. *La deuxième boucle* `while` *correspond donc aussi à une* distribution géométrique *avec paramètre* p_n. *La* probabilité de terminaison est donc 1 *:*

$$\begin{aligned}&\Sigma_{n=1\ldots,\infty} 2^{-n}(\Sigma_{k=1,\ldots,\infty}(1-p_n)^{(k-1)}p_n)\\&= \Sigma_{n=1\ldots,\infty} 2^{-n}(1)\\&= 1\ .\end{aligned}$$

On considère maintenant le temps moyen de calcul *en comptant les itérations des* 2 *boucles* `while` *et en faisant abstraction du fait que les entiers représentables par le type* `int` *de* `C` *sont bornés par* `2,147,483,647`. *Soient* C_1 *et* C_2 *les v.a.d.* coût *qui correspondent à la première et à la deuxième boucle* `while`. *On a :*

$$\begin{aligned}P(C_1 = n) &= \tfrac{1}{2^n}\\E[C_1] &= 2\\E[C_2|C_1 = n] &= 2^n\ .\end{aligned}$$

On calcule (en utilisant les propriétés des v.a.d. conditionnelles) :

$$\begin{aligned} E[C_2] &= \Sigma_{n=1,\ldots,\infty} E[C_2 \mid C_1 = n] \cdot P(C_1 = n) \\ &= \Sigma_{n=1,\ldots,\infty} 2^n \cdot 2^{-n} \\ &= \Sigma_{n=1,\ldots,\infty} 1 \\ &= \infty \ . \end{aligned}$$

Le coût moyen est donc infini *!*

Exercice 19 *Considérez la fonction* C *suivante qui effectue une recherche 'aléatoire' d'un élément dans un tableau.*

```
1  int rs (int x, int n, int t[n]){
2      short check[n];
3      int i;
4      for (i=0;i<n;i++){
5          check[i]=0;}
6      int count=0;
7      while (count < n){
8           int i=(rand()%n);
9           if (t[i]==x){
10              return i;}
11          if (!check[i]){
12              check[i]=1;
13              count++;}}
14     return -1;}
```

Calculez (de façon exacte ou approchée) le nombre moyen d'appels à la fonction rand *dans les cas suivants :*

1. *Le tableau contient l'élément cherché* 1 *fois.*
2. *Le tableau contient l'élément cherché* k *fois.*
3. *Le tableau ne contient pas l'élément cherché.*

18.2 Tri rapide (*quicksort*)

On considère un algorithme dit de *tri rapide* (*quicksort*, en anglais) [Hoa61]. [2]

Algorithme de partition

Le tri rapide est basé sur une fonction de *partition* qui prend en entrée un ensemble fini de valeurs X et une valeur *pivot* v et génère l'ensemble X_1 des valeurs dans X strictement inférieurs à v et l'ensemble X_2 des valeurs dans X supérieurs ou égales à v. Supposons que X contienne n valeurs. Si X est représenté par une liste alors il est clair que l'on peut produire les deux listes qui représentent les ensembles X_1 et X_2 en $O(n)$. Si X est représenté par un tableau a alors il est remarquable que l'on peut générer X_1 et X_2 en temps $O(n)$ et sans effectuer d'allocation de mémoire (en anglais, on dit aussi que l'algorithme travaille *in place*). Supposons que les éléments de l'ensemble à partitionner sont mémorisés dans les cellules d'indice compris entre i et j avec $i < j$ On itère :

2. Cet algorithme est dans une *top* 10 d'algorithmes du XX siècle (voir `https://www.siam.org/pdf/news/637.pdf`).

1. Tant que a[i] $< v$ on incrémente i. Si i 'croise' j on sort de l'itération.
2. Tant que $v \leq$ a[j] on décrémente j. Si j 'croise' i on sort de l'itération.
3. Si on arrive à ce point, on doit avoir a[i] $\geq v$ et a[j] $< v$. On permute a[i] avec a[j] et on reprend l'itération (pas 1).

Il est facile de modifier l'algorithme pour qu'à la fin de la partition il retourne l'indice à partir duquel on trouve les éléments plus grands ou égaux que le pivot (et une valeur conventionnelle s'il y en a pas). Dans la suite, on appelle cet indice le *point de partition*.

Algorithme de tri

On considère maintenant l'application de l'algorithme de partition au problème du tri. On suppose que les données à trier sont stockées dans un tableau a dans les positions comprises entre min et max et on prend a[max] comme pivot. Si min = max on a rien à faire ! Sinon :

— soit k le point de partition par rapport au pivot,
— si k<max on échange a[k] avec a[max] ; on met donc le pivot au point de partition,
— si nécessaire, on calcule récursivement qsort(min,k-1) et qsort(k+1,max).

Complexité dans le pire des cas et en moyenne

Le pire des cas est quand toutes les partitions sont *déséquilibrées*. Par exemple, si le tableau est *déjà ordonné* (SIC). Dans ce cas, le coût est *quadratique*. Pourtant, le qsort est un algorithme de choix pour effectuer le tri. Par exemple, il est dans la bibliothèque standard de C. Le fait est qu'en *moyenne* l'algorithme a une complexité $O(n \log n)$ (qui est bien meilleure que quadratique !). Par ailleurs, l'opération de partition est efficace (en temps et en mémoire).

Il y a deux façons d'analyser le comportement moyen du tri rapide. La première façon (qui est celle étudiée dans la suite) est de le transformer dans un algorithme probabiliste qui à chaque appel récursif choisit le pivot de façon aléatoire. Dans cette approche on ne fait pas d'hypothèse sur la distribution des données en entrée. Ce qu'on montre est que pour toute entrée, en choisissant les pivots de façon aléatoire on aura un coût moyen en $O(n \log n)$. Une deuxième façon de procéder est de supposer une distribution uniforme des données. Dans ce cas, on peut garder la version déterministe de l'algorithme (par exemple celle dans laquelle le pivot est toujours l'élément le plus à droite) et montrer que le coût moyen (sur toutes les entrées) est $O(n \log n)$. L'analyse de cette deuxième approche est similaire à celle de la première et elle est omise.

Tri rapide : version probabiliste

La seule différence dans la version probabiliste du tri rapide est que pour trier les positions comprises entre min et max on commence par tirer un indice i tel que min $\leq$ i $\leq$ max avec probabilité uniforme et on permute a[i] avec a[max]. Le pivot est donc choisi avec une probabilité uniforme.

Analyse du tri rapide probabiliste

On suppose tous les éléments à trier *différents*. Pour simplifier la notation on dénote ces éléments par $1, 2, \cdots, n$. Par exemple, 2 est le deuxième plus petit élément. Au début du tri sa position est arbitraire mais à la fin du tri on sait qu'il sera en deuxième position

à partir de gauche. Comme souvent dans les algorithmes de tri, on considère que le coût est proportionnel au nombre de comparaisons et on s'attache donc à compter le *nombre de comparaisons* effectuées *en moyenne* par l'algorithme. Ce nombre dépend du *choix aléatoire des pivots*. On représente un calcul par la suite des pivots choisis. Soit Ω l'ensemble de ces suites. On définit une *v.a.d.* X qui associe à chaque suite le nombre de comparaisons effectuées par le tri rapide. Le *but* est de calculer l'espérance $E[X]$.

Remarque 17 *Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i < j$ deux éléments à trier. Dans toute exécution, i et j sont comparés au plus un fois. En effet, l'algorithme compare un pivot aux autres éléments d'une partition. Donc pour comparer i et j il faut que l'un des deux soit un pivot et l'autre se trouve dans la même partition. Par ailleurs, dans la suite du calcul le pivot ne sera plus comparé à un autre élément (à la fin de la partition le pivot se trouve à la bonne place).*

On va maintenant utiliser une technique standard du calcul des probabilités : on exprime la v.a.d. X comme une somme de v.a.d. de Bernoulli dont on sait calculer l'espérance. Ensuite on utilise la linéarité de l'espérance pour dériver l'espérance de X. Pour $\omega \in \Omega$ une suite de comparaisons, on *définit* :

$$X_{i,j}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont comparés dans } \omega \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On *observe* :

$$X = \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j} \ .$$

Et par *linéarité* :

$$E[X] = \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} E[X_{i,j}] \ .$$

Il reste donc à calculer $E[X_{i,j}]$.

Définition 15 (probabilité de comparaison) *On note $P(i, j, n) = E[X_{i,j}]$ la probabilité que i et j sont* comparés *dans un tri rapide avec n éléments, où $1 \leq i < j \leq n$.*

Une première remarque est que $P(i, j, n)$ satisfait une relation de récurrence.

Proposition 13 *La fonction $P(i, j, n)$ satisfait :*

$$\begin{array}{lll} P(1,2,2) & = 1 & \\ P(i,j,n) & = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot (& \Sigma_{k=1,\ldots,(i-1)} \ P(i-k, j-k, n-k) \ + \\ & & \Sigma_{k=(j+1),\ldots,n} P(i,j,k-1) \ ) \ . \end{array}$$

Preuve. Pour comparer i à j, soit on prend le pivot dans $\{i, j\}$ soit on le prend avant i ou après j. □

Une deuxième remarque (assez surprenante) est que $P(i, j, n)$ ne dépend pas de n.

Proposition 14

$$P(i, j, n) = \frac{2}{(j - i + 1)} \ .$$

PREUVE. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$ on a bien $P(1,2,2) = \frac{2}{2-1+1} = 1$. Plus en général : $P(i, i+1, n) = 1$. Pour $n+1 > 2$ on a :

$$\begin{aligned} P(i,j,n+1) &= \tfrac{2}{n+1} + \tfrac{1}{n+1}(\quad \Sigma_{k=1,\ldots,(i-1)}\ P(i-k, j-k, n+1-k) + \\ &\qquad\qquad \Sigma_{k=(j+1),\ldots,n+1} P(i,j,k-1)\ ) \\ &= \tfrac{2}{n+1} + \tfrac{1}{n+1}(\quad \Sigma_{k=1,\ldots,(i-1)}\ \tfrac{2}{j-i+1} + \\ &\qquad\qquad \Sigma_{k=(j+1),\ldots,n+1}\ \tfrac{2}{j-i+1}\ ) \\ &= \tfrac{2}{n+1} + \tfrac{1}{n+1} \quad \tfrac{2(n-j+i)}{j-i+1} \\ &= \tfrac{2}{j-i+1}\ . \end{aligned}$$

□

Proposition 15 *$E[X]$ est $O(n \log n)$.*

PREUVE. On calcule :

$$\begin{aligned} E[X] &= \Sigma_{i=1,\ldots,(n-1)} \Sigma_{j=i+1,\ldots,n} \tfrac{2}{(j-i+1)} \\ &= 2 \cdot (\Sigma_{i=1,\ldots,n-1} (\Sigma_{k=1,\ldots,(n-i)} \tfrac{1}{(k+1)})) \\ &\leq 2 \cdot (\Sigma_{i=1,\ldots,n-1} (\Sigma_{k=1,\ldots,n} \tfrac{1}{k}))\ . \end{aligned}$$

On approxime la somme par un intégral pour obtenir :

$$\Sigma_{x=2,\ldots,m} \frac{1}{x} < \int_1^m \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \log m\ .$$

Donc $\Sigma_{k=1,\ldots,n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n$ et :

$$E[X] \leq 2 \cdot (n-1)(\log n + 1)$$

soit $E[X]$ est $O(n \log n)$. □

Exercice 20 *Le problème de la médiane est le suivant : on dispose d'un tableau* non-ordonné *de n éléments et on souhaite déterminer le k-*ème élément *du tableau trié où $1 \leq k \leq n$. On peut résoudre ce problème en $O(n \log n)$ en triant le tableau et en retournant le k-ème élément du tableau trié. Il est facile de voir que pour $k = 1$ ou $k = n$ on a un algorithme en $O(n)$; il s'agit de trouver le minimum ou le maximum du tableau, respectivement. Proposez un algorithme probabiliste pour le problème de la médiane qui utilise la* fonction de partition *; une variante de l'analyse du tri rapide permet de montrer qu'en* moyenne *l'algorithme qui en résulte a une complexité $O(n)$.*

18.3 Test de primalité

Dans le cas du tri rapide le nombre maximum de comparaisons est borné par une valeur qui ne dépend pas de la suite de bits aléatoires ; l'algorithme *termine*. En général, on peut concevoir des algorithmes probabilistes où cette propriété n'est pas satisfaite. Dans ce cas on cherchera à montrer que l'algorithme *termine avec probabilité* 1. Certains algorithmes

probabilistes (dits de *Montecarlo*) s'ils terminent peuvent fournir des *réponses incorrectes*. On cherche alors à borner la probabilité d'une réponse incorrecte et dans certains cas favorables on peut montrer qu'en itérant l'algorithme un certain nombre de fois sur la même entrée on obtient une réponse incorrecte avec une probabilité négligeable en pratique (par exemple une probabilité d'erreur inférieure à 2^{-100}). Parmi les algorithmes qui tombent dans cette catégorie, on étudie un test de primalité dans cette section et un test pour l'identité de deux polynômes dans la suivante.

Rappels d'arithmétique

Pour $n \geq 2$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_n &= \{0, 1, \ldots, n-1\}, \\ \mathbf{Z}_n^* &= \{a \in \mathbf{Z}_n \mid pgcd(a, n) = 1\} \ . \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbf{Z}_n$ avec les opérations d'addition et multiplication modulaire est un anneau et l'ensemble $\mathbf{Z}_n^*$ avec l'opération de multiplication modulaire est un groupe (le *groupe multiplicatif*). Si n est premier alors $\mathbf{Z}_n^* = \{1, \ldots, n-1\}$ et $\sharp\mathbf{Z}_n^* = (n-1)$. Le résultat suivant est connu comme *petit théorème de Fermat*.

Proposition 16 *Si n est premier et $a \in \mathbf{Z}_n^*$ alors $(a^{(n-1)} \equiv 1) \mod n$.*

Preuve. Soit $k = min\{i > 0 \mid (a^i \equiv 1) \mod n\}$ et soit :

$$A = \{a^0, a^1, \ldots, a^{k-1}\} \ ,$$

où il est entendu que les exposants sont modulo n. Si $k = (n-1)$ on a terminé. Sinon on, va montrer que $(n-1)$ est un multiple de k, disons $(n-1) = k \cdot m$, et par les propriétés de l'exposant on a :

$$a^{n-1} = (a^k)^m = 1^m = 1 \ .$$

On montre d'abord que $\sharp A = k$. En effet, si $0 \leq i < j \leq (k-1)$ alors $a^i \neq a^j$. Autrement, $a^{(j-i)} = 1$ et $(j-i) < k$.

Si $k < (n-1)$ alors on peut trouver $b_1 \in (\mathbf{Z}_n^* \backslash A)$. On considère l'ensemble :

$$A_1 = \{a^0 b_1, a^1 b_1, \ldots, a^{k-1} b_1\} \ .$$

À nouveau, $\sharp A_1 = k$. Car si $0 \leq i < j \leq (k-1)$ et $a^i b_1 = a^j b_1$ alors $a^i = a^j$. D'autre part, $A \cap A_1 = \emptyset$. Car si $a^i = a^j b_1$ alors $b_1 \in A$. Si $A \cup A_1 = \mathbf{Z}_n^*$ on a montré que $(n-1) = 2k$. Sinon on choisit $b_2 \in \mathbf{Z}_n^* \backslash (A \cup A_1)$ et on itère le même raisonnement. □

Test de Fermat

La proposition 16 suggère une méthode pour *tester* la primalité d'un nombre $n \geq 2$. Choisir $a \in \{2, \ldots, n-1\}$ et vérifier :

$$(a^{(n-1)} \equiv 1) \mod n \ . \tag{18.1}$$

Pour calculer l'exposant modulaire on utilise la méthode du *carré itéré* (présentée dans le chapitre 13).

Soit n un nombre qui n'est pas premier. Le problème est maintenant d'estimer la probabilité qu'en choisissant un nombre $a \in \{2, \ldots, n-1\}$ on obtient :

$$(a^{(n-1)} \not\equiv 1) \mod n \ . \tag{18.2}$$

On appelle un tel nombre a un *témoin* de la non-primalité de n.

Proposition 17 *Soient $n \geq 2$ et $a \in \{2, \ldots, n-1\}$*

1. *Si $pgcd(a, n) \neq 1$ alors $(a^{(n-1)} \not\equiv 1) \mod n$.*
2. *Si n n'est pas premier et si n admet un témoin $a \in \mathbf{Z}_n^*$ alors au moins la moitié des éléments dans $\{2, \ldots, n-1\}$ sont des témoins de la non-primalité de n.*

PREUVE. (1) On remarque : (i) si $(a^{n-1} \equiv 1) \mod n$ alors $pgcd(a^{n-1}, n) = 1$ et (ii) si d divise a et n alors d divise a^{n-1} et n.

(2) D'abord on observe que si $a \in \mathbf{Z}_n^*$ est un témoin et $d \in \mathbf{Z}_n^*$ ne l'est pas alors $(ad) \in \mathbf{Z}_n^*$ est un témoin. En effet, on a :

$$((ad)^{n-1} \equiv a^{n-1}d^{n-1} \equiv a^{n-1} \not\equiv 1) \mod n \ .$$

Ensuite, on montre que si $a \in \mathbf{Z}_n^*$ est un témoin et $d, d' \in \mathbf{Z}_n^*$ ne le sont pas alors ad et ad' sont deux témoins différents. Supposons $1 \leq d < d' < n$. Alors $(ad \equiv ad') \mod n$ implique $\exists\, c \ a(d'-d) = cn$. Comme $1 \leq (d'-d) < n$, a doit contenir un facteur de n ce qui contredit $a \in (Z_n)^*$. Il suit que si $a \in (Z_n)^*$ est un témoin alors dans $(Z_n)^*$ il y a au moins autant de témoins que de non-témoins. Par ailleurs, par (1), tous les éléments dans $Z_n \backslash (Z_n)^*$ sont des témoins. □

Limitations du test de Fermat

Un nombre de Carmichael est un nombre n qui n'est pas premier et qui n'a pas de témoin de non-primalité qui est premier avec n. On sait qu'il y a une infinité de nombres de Carmichael mais qu'ils sont rares. Le plus petit nombre de Carmichael est $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ et parmi les premiers 10^{15} nombres environ 10^5 sont des nombres de Carmichael. On sait aussi qu'en *pratique* le test de Fermat a une chance raisonnable de tomber sur un témoin de non-primalité pour un nombre de Carmichael (à savoir sur un nombre qui n'est pas premier avec le nombre de Carmichael). Par exemple, il y a 240 nombres compris entre 2 et 560 qui ne sont pas premiers avec 561. On peut donc dire que le test de Fermat est un test simple et pratique avec une petite limitation théorique.

Avec un peu plus de travail, on peut concevoir des tests de primalité plus sophistiqués (par exemple, le test de Miller-Rabin [Mil76, Rab80]) qui sont encore plus efficaces que le test de Fermat et qui n'ont aucune difficulté théorique avec les nombres de Carmichael. Par ailleurs, depuis [AKS04], on connaît aussi un test de primalité *déterministe* et polynomial en temps mais en pratique les tests probabilistes sont plus efficaces.

Exercice 21 *Les tests de primalité sont aussi utilisés pour* générer *des grands nombres premiers (typiquement des nombres avec 10^3 chiffres). En effet, on sait que les nombres premiers ne sont pas rares : il y a environ $\frac{n}{\log n}$ nombres premiers parmi les premiers n nombres. Il suffit donc de tirer un nombre (impair) au hasard un certain nombre de fois jusqu'à tomber sur un nombre qui passe le test de primalité. Programmez une fonction probabiliste qui trouve un nombre premier de 512 bits avec une probabilité d'erreur inférieure à 2^{-100} (en ignorant les difficultés liées aux nombres de Carmichael). Estimez le nombre moyen de tirages qu'il faut effectuer avant de tomber sur un nombre (probablement) premier.*

18.4 Identité de polynômes

Soient p et q deux *polynômes* (en plusieurs indéterminées). On cherche à déterminer s'ils sont *identiques*, ou de façon équivalente à savoir si le polynôme $p - q$ est zéro partout. Une façon de résoudre ce problème est d'écrire les polynômes p et q comme *somme de monômes* et d'en comparer les coefficients. Cette approche peut demander un nombre *exponentiel* de multiplications. Par exemple, considérez le polynôme :

$$\Pi_{i=1,\ldots,n}(x_i + x_{i+1}) \ .$$

Par contre, l'évaluation d'un polynôme sur un point demande un nombre de multiplications qui est *linéaire* dans la taille du polynôme. La stratégie pour déterminer si un polynôme est zéro partout consiste donc à l'évaluer sur un certain nombre de points choisis de façon aléatoire. On a donc besoin d'estimer la probabilité de tomber sur un zéro du polynôme. Le point de départ est un résultat standard sur les racines d'un polynômes.

Proposition 18 *Soit $p(x)$ un polynôme dans une indéterminée x et de degré d. Si $p(x) \neq 0$ alors $p(x)$ admet au plus d racines différentes.*

Preuve. On peut utiliser la proposition 9 qui passe par les matrices de Vandermonde. On présente ici une preuve alternative par récurrence sur d. Si $d = 0$ alors $p(x)$ est constant et si $p(x) \neq 0$ alors il a 0 racines. Si $d > 0$ et $p(a) = 0$ alors par la propriété de la division sur les polynômes ils existent uniques $p'(x)$ et $r(x)$ tels que $p(x) = p'(x)(x - a) + r$, le degré de $p'(x)$ est $d - 1$ et le degré de r est 0. De plus on doit avoir : $p(a) = r = 0$. Par hypothèse de récurrence, $p'(x)$ a au plus $d - 1$ racines et donc $p(x)$ a au plus d racines. □

Notation Soit X un ensemble fini. On utilise la notation $x \leftarrow X$ pour affecter à la variable x un élément de l'ensemble X avec probabilité uniforme.

Corollaire 1 *Soit $p(x) \neq 0$ un polynôme avec une indéterminée x et degré d sur un corps F. Soit $F' \subseteq F$ tel que $\sharp F' = f$. Alors :*

$$P(a \leftarrow F' : p(a) = 0) \leq \frac{d}{f} \ .$$

Preuve. Le polynôme a au plus d racines dans F et donc au plus d racines dans F'. □

Par exemple, si l'on prend $f = 2d$ la probabilité de tomber sur une racine du polynôme est au plus $1/2$. Si l'on répète le test 100 fois en choisissant des éléments $a_1, \ldots, a_{100}$ de F' de façon indépendante alors si $p(a_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ on peut affirmer que $p = 0$ avec une probabilité d'erreur bornée par 2^{-100}. Ce résultat se généralise à des polynômes en plusieurs indéterminées (un résultat connu aussi comme *lemme de Schwartz-Zippel*).

Proposition 19 *Soit $p(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ un polynôme en m indéterminées $x_1, \ldots, x_m$ avec d comme degré maximal de chaque indéterminée. Le polynôme étant sur un corps F, soit $F' \subseteq F$ tel que $\sharp F' = f$. Alors :*

$$P(a_1, \ldots, a_m \leftarrow F' : p(a_1, \ldots, a_m) = 0) \leq \frac{m \cdot d}{f} \ .$$

PREUVE. Par récurrence sur m. Pour $m = 1$ on applique le corollaire 1. Pour $m > 1$ on peut réécrire $p(x_1, \ldots, x_m)$ en factorisant la variable x_1 :

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \Sigma_{i=0\ldots,d}\ x_1^i \cdot p_i(x_2, \ldots, x_m)\ . \tag{18.3}$$

Comme $p \neq 0$ il existe j tel que $p_j \neq 0$. Tirons $a_1, a_2, \ldots, a_m$ avec probabilité uniforme. On pose :

$$p'(x_1) = p(x_1, a_2, \ldots, a_m)\ .$$

Si $p(a_1, \ldots, a_m) = 0$ alors on a deux situations possibles :

1. $p_i(a_2, \ldots, a_m) = 0$ pour $i = 0, \ldots, d$.
2. $\exists\, i\ \ p_i(a_2, \ldots, a_m) \neq 0$ et $p'(a_1) = 0$ (avec $p'(x_1) \neq 0$ car $p_i(a_2, \ldots, a_m) \neq 0$).

La probabilité de la première situation est bornée par :

$$P(a_2, \ldots, a_m \leftarrow F' : p_j(a_2, \ldots, a_m) = 0) \leq \frac{d \cdot (m-1)}{f}\ ,$$

et la probabilité de la deuxième est bornée par :

$$P(a_1 \leftarrow F' : p'(a_1) = 0) \leq \frac{d}{f}\ ,$$

et on conclut en observant :

$$\frac{d \cdot (m-1)}{f} + \frac{d}{f} = \frac{d \cdot m}{f}\ .$$

□

Exemple 59 *Les polynômes ont une propriété remarquable : s'ils sont différents alors ils sont différents presque partout. Cette propriété est souvent utilisée pour* amplifier *les différences entre deux structures discrètes (par exemple, dans le cadre des codes correcteurs d'erreurs). On donne un petit exemple de cette application. Considérez les* expressions booléennes *suivantes :*

$$A = (\neg x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \neg x_2) \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2\ ,\quad B = (\neg x_1 \cdot x_2 + x_1) \cdot x_3\ .$$

Dans une expression booléenne, les variables varient sur l'ensemble $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. *Les symboles* $\neg$, $\cdot$ *et* $+$ *indiquent la négation, la conjonction et la disjonction logique, respectivement. On aimerait savoir si pour toute affectation de valeurs booléennes aux variables,* A *et* B *produisent toujours le même résultat.*

Si on échantillonne x_1, x_2, x_3 *dans* $\mathbf{2}$ *de façon uniforme, la probabilité de distinguer ces expressions est* $1/2^3$ *(il y a une seule affectation qui distingue les deux expressions). Il se trouve qu'on peut voir ces expressions comme des polynômes. Pour ce faire, on replace la négation* $\neg x$ *par* $(1 - x)$ *et la conjonction et la disjonction par le produit et la somme, respectivement. On obtient ainsi :*

$$p_A = ((1 - x_1) \cdot x_2 + x_1 \cdot (1 - x_2)) \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2\ ,\quad p_B = ((1 - x_1) \cdot x_2 + x_1) \cdot x_3\ .$$

Les expressions en question sont dans une classe d'expressions pour laquelle on peut montrer que deux expressions sont équivalentes ssi elles induisent le même polynôme. Ainsi, pour distinguer A *et* B, *on peut échantillonner* x_1, x_2, x_3 *dans* $\mathbf{Z}_7 = \{0, 1, \ldots, 6\}$ *et dans ce cas la probabilité de distinguer* p_A *de* p_B *est* $216/343$ *!*

Remarque 18 *C'est un problème ouvert important de savoir s'il existe un algorithme* déterministe *polynomial en temps pour décider de l'identité de deux polynômes à plusieurs variables.*

18.5 Problèmes

18.5.1 Majorité

On cherche à déterminer si parmi les n entiers d'un tableau il y en a un qui paraît $k > n/2$ fois. On appelle un tel élément *majoritaire*. On commence avec un algorithme *probabiliste*.

1. Programmez une fonction check d'en tête :

   $$\mathsf{short\ check(int\ n,\ int\ t[n],\ int\ m)}$$

   qui retourne 1 si m paraît plus que $n/2$ fois dans le tableau t et 0 autrement.
2. On suppose que le tableau t contient un élément majoritaire m. Estimez la probabilité qu'avec ℓ tirages dans le tableau t (indépendants et avec probabilité uniforme) on ne tire jamais m.
3. On suppose la déclaration de type : struct result{short maj; int m}. Programmez une fonction (probabiliste !) pmajority d'en tête :

   $$\mathsf{struct\ result\ pmajority(int\ n,\ int\ t[n])}$$

   de complexité en temps $O(n)$ telle que la fonction rend la structure $\{1, \mathsf{m}\}$ si le tableau t contient un élément majoritaire m et la structure $\{0, -1\}$ sinon. Dans ce dernier cas, le tableau peut quand même contenir un élément majoritaire avec une probabilité inférieure à $(1/2^{30})$.

On cherche maintenant à concevoir un algorithme *déterministe* pour le même problème. Soit $t_1, \ldots, t_n$ une séquence de n entiers. On définit les séquences $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ par $c_0 = 0$ et

$$(c_{i+1}, v_{i+1}) = \begin{cases} (1, t_{i+1}) & \text{si } c_i = 0 \\ (c_i + 1, v_i) & \text{si } c_i > 0, t_{i+1} = v_i \\ (c_i - 1, v_i) & \text{si } c_i > 0, t_{i+1} \neq v_i \end{cases}$$

4. Montrez que si m est majoritaire dans $t_1, \ldots, t_n$ et $c_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ alors $t_1 = v_1 = \cdots = v_n = m$ et $c_n > 0$.
5. Montrez que si m est majoritaire dans $t_1, \ldots, t_n$ alors $c_n > 0$ et $v_n = m$.
6. Programmez une fonction dmajority d'en tête :

   $$\mathsf{struct\ result\ dmajority(int\ n,\ int\ t[n])}$$

   de complexité en temps $O(n)$ telle que la fonction rend la structure $\{1, \mathsf{m}\}$ si le tableau t contient un élément majoritaire m et la structure $\{0, -1\}$ sinon.

18.5.2 Tests probabilistes et polynômes

Un fichier est une suite finie de caractères ASCII (donc on peut voir un caractère comme un nombre entier dans l'intervalle $[0, 127]$). Alice a un fichier $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ et Bob un fichier $B = (b_0, \ldots, b_{m-1})$. Alice et Bob se font confiance mais ils sont éloignés et ils aimeraient savoir si leurs fichiers sont identiques.

1. Alice pourrait commencer par communiquer la longueur de son fichier à Bob et si la longueur des deux fichiers est la même Bob pourrait envoyer son fichier à Alice. Combien de bits Alice et Bob échangent-ils dans le pire des cas ?

Supposons que Alice et Bob sont prêts à tolérer une petite probabilité d'erreur en échange d'une réduction substantielle du nombre de bits échangés. Alice et Bob se mettent d'accord sur un nombre premier p tel que $max(128, n^2) \leq p \leq n^3$ et vont calculer dans le corps $\mathbf{Z}_p$ des nombres entiers modulo p. Alice tire avec probabilité uniforme un élément $r \in \mathbf{Z}_p$ et envoie à Bob le couple :

$$(r, p_A) \quad \text{où } p_A = \Sigma_{i=0,\ldots,n}\ a_i r^i\ .$$

Bob calcule à sont tour $p_B = \Sigma_{i=0,\ldots,n} b_i r^i$ et considère les fichiers identiques si $p_A = p_B$ et différents sinon.

2. Quelle est la probabilité que $p_A = p_B$ si $A = B$?
3. Donner une borne supérieure à la probabilité que $p_A = p_B$ si $A \neq B$.
4. On suppose que les fichiers à traiter contiennent 1 Giga de caractères. Estimez, le nombres de bits échangés dans ce cas.

On suppose maintenant que Alice et Bob doivent calculer le produit de deux matrices A, B à coefficients dans $\mathbf{Z}_q$, pour q nombre premier, et de dimension $n \times n$. Alice dispose d'un processeur très puissant et communique à Bob le résultat C de son calcul. Le processeur de Bob n'arrive pas à calculer le produit, néanmoins Bob aimerait être rassuré sur la validité du résultat. Pour ce faire Bob tire avec probabilité uniforme un élément $r \in \mathbf{Z}_p$, pose $x = (r^0, \ldots, r^{n-1})$ et calcule en $O(n^2)$ les produits $A(Bx)$ et Cx.

5. Bornez la probabilité que $AB \neq C$ et $A(Bx) = Cx$.
6. Supposons que $q = 2^{31} - 1$. Pour quelles valeurs de n Bob peut-il supposer que la probabilité d'erreur de son test est au plus 2^{-20} ?

Chapitre 19

Arbres binaires de recherche

Soit A un ensemble fini d'éléments que l'on peut comparer avec un *ordre total*. On cherche une façon de représenter A qui nous permet d'effectuer (au moins) les *opérations* suivantes de façon efficace :

— *insertion* d'un élément dans A,
— *test d'appartenance*,
— *élimination* d'un élément de A.

Si l'on représente un ensemble avec n éléments comme une liste (ordonnée ou non-ordonnée) ces opérations coûtent $O(n)$. On va étudier une représentation basée sur des arbres binaires de recherche (*binary search trees* en anglais, *ABR* en abrégé) qui permet d'effectuer les opérations en $O(h)$ où h est la hauteur de l'arbre qui représente l'ensemble.

19.1 Opérations

Définition 16 (ABR) *Un ABR est un arbre dans le sens de la définition 6 et qui en plus satisfait la condition suivante : la valeur de chaque noeud est supérieure à la valeur de chaque noeud dans le sous-arbre gauche et est inférieure à la valeur de chaque noeud dans le sous-arbre droit.*

On fait l'hypothèse que chaque noeud est représenté par une structure avec 3 champs :

val	valeur
left	pointeur fils gauche
right	pointeur fils droit

Un ABR vide nil est typiquement représenté par un pointeur NULL. On étudie un certain nombre d'opérations dont la programmation est directe si l'on utilise les appels récursifs. Avec l'exception de l'opération d'impression qui est linéaire dans la *taille* de l'ABR, toutes les autres opérations sont linéaires dans la *hauteur* de l'ABR.

Impression L'impression par ordre croissant d'un ABR correspond à une visite en profondeur d'abord et de gauche à droite de l'arbre. Récursivement :
— On imprime le sous-arbre gauche.
— On imprime le noeud.
— On imprime le sous-arbre droit.

Insertion Pour insérer un élément x on navigue dans l'ABR jusqu'à trouver :

— soit x : dans ce cas on ne fait rien.
— soit la feuille nil où il faut placer x.

Appartenance Pour déterminer si un élément x est dans l'ABR on navigue dans l'arbre jusqu'à trouver :
— soit x : dans ce cas on peut rendre un pointeur au noeud.
— soit nil : dans ce cas on peut rendre un pointeur NULL.

Minimum Pour trouver le minimum de l'ABR il suffit de suivre toujours le branchement gauche jusqu'à trouver un noeud dont le fils gauche est nil.

Élimination du minimum Pour éliminer l'élément minimum on commence par suivre le branchement gauche jusqu'à trouver un noeud dont le fils gauche est nil. Ensuite on remplace ce noeud par son fils droit (il peut être nil).

Élimination Pour éliminer un élément x dans l'ABR on navigue dans l'arbre jusqu'à trouver :
— soit nil et on ne fait rien.
— soit x et on distingue 3 *cas* :
  — x a *0 fils*. Le père (s'il existe) de x va pointer vers NULL.
  — x a *1 fils*. Le père (s'il existe) de x va pointer vers le fils de x.
  — x a *2 fils*. On transforme l'arbre comme suit :

$$(x, l, r) \to (\mathsf{min}(r), l, \mathsf{mindel}(r))$$

à savoir le minimum du sous-arbre droit remplace x et on élimine le minimum du sous-arbre droit alors que le sous-arbre gauche n'est pas modifié. Une solution symétrique où on modifie le sous-arbre gauche est possible. Il est aussi possible de combiner en une seule opération la recherche du minimum avec son élimination.

D'autres opérations comme la recherche de l'élément maximum et la recherche du successeur (ou du prédécesseur) d'un élément donné peuvent être réalisées en suivant les mêmes idées. On peut aussi se compliquer un peu la tâche en implémentant toutes les opérations sans appels récursifs et/ou en gérant explicitement la *récupération de la mémoire*.

19.2 Hauteur moyenne d'un arbre

Le *pire des cas* est quand un arbre est fortement *déséquilibré* (à la limite une liste). On va montrer qu'*en moyenne* la hauteur d'un arbre généré de façon aléatoire par une suite d'insertions est *logarithmique* dans sa taille. Malheureusement, l'analyse ne couvre pas la situation qu'on trouve en pratique où l'on mélange les opérations d'insertion et d'élimination. Pour cette raison, on trouve dans la littérature des représentations plus sophistiquées (arbres bicolores ou arbres AVL) qui implémentent les opérations d'insertion et d'élimination de façon à garder les arbre *équilibrés*.

Définition 17 (somme hauteurs) *Si T est un* arbre binaire de recherche *(ABR) on dénote par $P(T)$ la somme des hauteurs de ses noeuds (la racine a hauteur 0 et $P(T) = 0$ si T est vide).*

Remarque 19 *Si T est une* liste *alors $P(T)$ est $O(n^2)$ et si T est un* arbre complet *alors $P(T)$ est $O(n \log n)$.*

Définition 18 (génération aléatoire) *Soit S_n l'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ avec éléments $\pi,\pi',\ldots$ On suppose qu'un ABR avec n noeuds est* généré *de la façon suivante : on produit une permutation $\pi \in S_n$ avec probabilité uniforme et on insère dans l'arbre vide $\pi(1),\ldots,\pi(n)$. On dénote par T_π l'ABR obtenu.*

Définition 19 (moyenne somme hauteurs) *On dénote par $P(n)$ la moyenne des $P(T_\pi)$ (définition 17) :*

$$P(n) = \frac{1}{n!}(\Sigma_{\pi\in S_n} P(T_\pi)) \ .$$

Par exemple, pour $n = 3$ on a $3! = 6$ ABR possibles. Parmi ces ABR, il y en a 4 avec $P(T) = 3$ et 2 avec $P(T) = 2$. On a donc $P(3) = 8/3$. Notre objectif est de trouver une *borne supérieure* pour la fonction $P(n)$. Si T est un ABR *non-vide* alors on dénote par T_g et T_d les *sous-arbres* gauche et droit (qui peuvent être vides). On vérifie aisément la proposition suivante.

Proposition 20 *Si T est un ABR non-vide avec n noeuds alors :*

$$P(T) = P(T_g) + P(T_d) + (n-1) \ .$$

La proposition suivante nous donne une façon d'exprimer la fonction $P(n)$ par récurrence.

Proposition 21

$$P(n) = \begin{cases} 0 & si\ n = 1 \\ \frac{1}{n}(\Sigma_{i=1,\ldots,n}(P(i-1) + P(n-i) + (n-1))) & si\ n > 1 \ . \end{cases}$$

Preuve. Le cas $n = 1$ est clair. Si $n > 1$ on argumente comme suit. Si on tire π de façon uniforme on a pour $1 \leq i \leq n$:

$$P(\pi(1) = i) = \frac{1}{n} \ .$$

A noter que $\pi(1) = i$ veut dire que i est à la racine de l'arbre généré T. Ensuite l'arbre de gauche T_g (de droite T_d) résultera d'une permutation de $i-1$ éléments ($n-i$ éléments). On applique la proposition 20. □

On dérive que la hauteur moyenne est logarithmique.

Proposition 22 *La hauteur moyenne d'un noeud est $O(\log n)$.*

Preuve. Si $n > 1$ alors on dérive de la proposition 21 que :

$$P(n) = \frac{2}{n}(\Sigma_{k=1,\ldots,n-1} P(k)) + (n-1) \ .$$

On cherche une fonction $f(n)$ telle que $0 = P(1) \leq f(1)$ et

$$\frac{2}{n}(\Sigma_{k=1,\ldots,n-1} f(k)) + (n-1) \leq f(n) \ . \tag{19.1}$$

Si on prend $f(n) = 2n\log n$, on satisfait la première condition car $f(1) = 0$. Par ailleurs, on a :

$$\Sigma_{k=1,\ldots,n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \ .$$

En utilisant le fait que : $\int x\log x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}(2\log x - 1)$, on vérifie la deuxième condition (19.1). On peut donc montrer par récurrence que $P(n) \leq f(n) = 2n\log n$. Il suit que la hauteur de chaque noeud est en moyenne $O(\log n)$. □

19.3 Problèmes

19.3.1 Arbres binaires de recherche et tableaux

On se place dans le cadre des arbres binaires de recherche (ABR) utilisés pour représenter des ensembles ordonnés finis. On suppose le type struct node et la fonction allocat_node suivants :

```
struct node {int val; struct node * left; struct node * right;};
struct node *allocate_node(int v){
   struct node *p=(struct node *)(malloc(sizeof(struct node)));
   (p->val)=v; (p->left)=NULL; (p->right)=NULL;  return p;}
```

1. Écrire une fonction tree2tab d'en tête :

   $$\mathsf{int\ tree2tab(struct\ node} * \mathsf{\ tree, int\ n, int\ tab[n])}$$

   La fonction prend en entrée un pointeur tree à un ABR et un tableau tab (non-initialisé) de taille n. Ensuite la fonction écrit les entiers dans l'ABR dans le tableau tab par *ordre croissant* et rend comme résultat le nombre d'entiers dans l'ABR. Vous pouvez faire l'hypothèse que le nombre d'entiers dans l'ABR est au plus n.
2. Par convention, soit -1 la hauteur d'un ABR vide. *Définition ABR équilibré* : un ABR vide est équilibré et un ABR non-vide est équilibré si les sous-arbres gauche et droit de la racine sont équilibrés et ont une hauteur qui diffère au plus de 1.
   Écrire une fonction tab2tree d'en tête :

   $$\mathsf{struct\ node} * \mathsf{\ tab2tree(int\ i, int\ j, int\ tab[])}$$

   La fonction prend en entrée un tableau tab et deux indices i et j tels que : (i) $\mathsf{i} \leq \mathsf{j}$, (ii) $\mathsf{tab[i]}, \ldots, \mathsf{tab[j]}$ sont définis et (iii) $\mathsf{tab[i]} < \cdots < \mathsf{tab[j]}$ Ensuite la fonction construit un ABR *équilibré* qui contient les entiers $\mathsf{tab[i]}, \ldots, \mathsf{tab[j]}$ et rend un pointeur à la racine de l'ABR. Vous devez expliquer pourquoi l'ABR calculé est équilibré.
3. Proposez un algorithme en $O(n)$ (en temps) pour calculer un ABR équilibré qui résulte de la fusion de deux ABR (pas forcement équilibrés) de taille n.

19.3.2 Calcul du centre d'un arbre

Un *arbre* est un graphe, non-dirigé, acyclique et connecté. Soit T un arbre avec $N = \{0, \ldots, n-1\}$ comme ensemble des noeuds. On suppose $n \geq 2$. La *distance* $d(i,j)$ entre deux noeuds $i, j \in N$ est le nombre d'arêtes qu'il faut traverser pour aller de i à j (rappel : dans un arbre le chemin existe et est unique). Si i est un noeud, son *dégré* $deg(i)$ est le nombre de noeuds qui lui sont adjacents. L'*excentricité* d'un noeud $i \in N$ dans T est :

$$ex_T(i) = max\{d(i,j) \mid j \in N\} \ .$$

Le *centre* d'un arbre T est l'ensemble de noeuds :

$$C_T = \{i \in N \mid ex_T(i) \text{ est minimale}\} \ .$$

Les *feuilles* d'un arbre T sont les éléments de l'ensemble :

$$L_T = \{i \in N \mid deg(i) \leq 1\} \ .$$

1. Montrez les propriétés suivantes :

   A Si tous les noeuds de l'arbre T sont des feuilles alors tous les noeuds sont dans le centre C_T.

   B Sinon, soit T' l'arbre obtenu en éliminant de T tous les noeuds qui sont des feuilles (et les arêtes relatives). Alors le centre de l'arbre T coïncide avec le centre de l'arbre T'.

2. Dérivez des propriétés A et B un algorithme qui prend en entrée un arbre T représenté par une table de listes d'adjacence et retourne comme résultat une liste qui contient (exactement une fois) les noeuds dans le centre de l'arbre. Illustrez le calcul de votre algorithme sur un arbre avec une petite dizaine de noeuds.
3. Programmez l'algorithme comme une fonction center d'en-tête :

   $$\mathsf{struct\ node\ *\ center(int\ n, struct\ node\ *\ tadj[n])}$$

   La fonction center prend en entrée une table de listes d'adjacence qui représente l'arbre et retourne le pointeur à la liste des noeuds qui se trouvent dans le centre de l'arbre. On admet les définitions suivantes.

```
struct node {int val; struct node * next;};
struct node *allocate_node(int v){
    struct node *p=(struct node *)(malloc(sizeof(struct node)));
    (p->val)=v; (p->next)=NULL; return p;};
struct node * insert(int i, struct node * list){
    struct node * q = allocate_node(i); (q->next)=list;   return q;};
```

4. Analysez la complexité asymptotique de votre mise-en-oeuvre en fonction de n (le nombre de noeuds).

Chapitre 20

Tables de hachage

Les tables de hachage (*hash tables* en anglais) sont une autre structure de données qui permet une mise en oeuvre efficace des opérations de recherche, insertion et élimination sur un ensemble fini d'éléments. Dans une table d'hachage, la recherche d'un élément commence par un accès direct à un tableau en utilisant une *fonction de hachage* et continue avec la visite d'une liste qui peut être représentée de façon explicite avec des pointeurs (*table avec chaînage*) ou de façon implicite avec une fonction de sondage (*table avec adressage ouvert*).

20.1 Fonctions de hachage

En général, une fonction de hachage est une fonction *facile à calculer* qui envoie un ensemble U de grande taille dans un ensemble $T = \{0, \ldots, m-1\}$ de taille beaucoup plus réduite. On appelle un élément $x \in U$ une *clé*.

Dans les applications aux *tables de hachage*, il s'agit par exemple d'envoyer une chaîne de caractères (le nom d'une personne) sur l'indice d'une table de taille m. La *propriété idéale* dans ce cas est : pour tout $x \in U$ et $i \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$P(h(x) = i) = \frac{1}{m} \ .$$

Dans ce cas, on dit que la fonction de hachage est *uniforme*.

Remarque 20 *Dans les applications à la* cryptographie*, on pose des conditions beaucoup plus sévères. Il doit être impossible (en pratique) de (i) trouver une* collision *: $x \neq y$ tel que $h(x) = h(y)$ et (ii) trouver une* image inverse *: pour y donné, trouver x tel que $h(x) = y$. Même si on a une fonction de hachage* uniforme*, il suffit de la calculer sur environ $\sqrt{m}$ valeurs pour avoir une probabilité d'environ $\frac{1}{2}$ de trouver une collision (c'est le* paradoxe des anniversaires *!). Dans les* applications cryptographiques*, il faut donc choisir un m assez grand pour qu'on ne puisse pas calculer $\sqrt{m}$ fois la fonction de hachage dans un temps raisonnable. Typiquement, $m = 2^{256}$ (SHA-2). Bien sûr, pour l'*application aux tables de hachage*, on a des valeurs beaucoup plus petites.*

20.2 Tables de hachage avec chaînage

Une table de hachage est une *structure de données* qui sert à représenter un ensemble $X \subseteq U$ avec les opérations standard (voir listes, arbres, listes à enjambements) :

Opérations	Description
hmem(x)	appartenance
hins(x)	insère un élément
hrem(x)	enlève un élément

Soient $n = \sharp X$ et m la *taille de la table*. Le *facteur de charge* est

$$\alpha = n/m$$

On suppose que l'accès à un élément de la table se fait en *temps constant*. L'*objectif* est de réaliser les opérations en $O(\alpha)$ en moyenne.

Remarque 21 *En programmation, on cherche souvent le* bon compromis *entre* temps d'exécution *et* espace mémoire*. Dans le cas des tables de hachage, on utilise* plus de mémoire *pour accélérer (en moyenne) le temps d'accès à une liste d'éléments (les* listes à enjambements *suivent une philosophie similaire ainsi que les* techniques de mémoïsation *qui sont discutées dans la section 23.1). Dans d'autres situations, on préfère, par exemple,* recalculer une valeur *plutôt que la garder en mémoire.*

Tables de hachage avec chaînage

Dans une table de hachage avec chaînage, la *fonction de hachage* nous donne une adresse de la table qui contient un *pointeur à une liste d'éléments*. Le coût du calcul dépend de la *longueur de la liste*. Il faut faire en sorte que les listes aient une *longueur comparable* (en moyenne). Si c'est le cas, le *coût* est proportionnel au facteur de charge α.

Une heuristique pour la fonction de hachage

Le but est d'avoir une fonction de hachage *uniforme*. A savoir, $h : U \to T$ telle que pour $k_1, k_2 \in U$ la *probabilité de collision est* $1/m$ *avec* $m = \sharp T$. Une *heuristique* possible est :

— voir une clé $k \in U$ comme un entier,

— choisir m *premier* et pas trop proche d'une puissance de 2 et définir :

$$h(k) = k \mod m \ .$$

Choix probabiliste de la fonction hachage

Un utilisateur malicieux pourrait dégrader les performances d'une table de hachage en proposant des données qui génèrent un grand nombre de collisions. On peut se défendre contre ce type d'attaque en choisissant la fonction de hachage de *façon aléatoire* (et en gardant ce choix secret). Cette stratégie rappelle celle adoptée dans le tri rapide pour se défendre contre un choix défavorable des données à trier.

Avec un choix aléatoire, on peut alors garantir qu'*en moyenne* le hachage est *uniforme*, c'est à dire la probabilité d'une collision de deux clés est au plus $1/m$. Il se trouve qu'il suffit d'échantillonner les fonctions de hachage parmi certaines fonctions affines en arithmétique modulaire qui peuvent être représentées de façon compacte.

Construction

— Soient $k_1, k_2 \in U$ avec $k_1 \neq k_2$.

— On construit un *ensemble de fonctions de hachage* $\mathcal{H}$ tel qu'en tirant avec probabilité uniforme $h \in \mathcal{H}$ on a :

$$P(h(k_1) = h(k_2)) \leq 1/m \ . \tag{20.1}$$

— D'abord, on cherche p *premier* tel que $\sharp U \leq \sharp \mathbf{Z}_p$. On peut donc voir toute clé comme un entier modulo p et on prend les fonctions de la forme : [1]

$$x \mapsto ((ax+b) \mod p) \mod m \qquad a \in \mathbf{Z}_p^*, b \in \mathbf{Z}_p \ .$$

— Soit :

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p \mid f(x) = (ax+b) \mod p, a \in (\mathbf{Z}_p)^*, b \in Z_p\} \ .$$

On a $\sharp\mathcal{F} = p(p-1)$.

— Soit :

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \mid x \neq y\} \ .$$

On a aussi $\sharp\mathcal{P} = p(p-1)$.

— Soit $i : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$:

$$i((a,b)) = ((ak_1+b) \mod p, \ (ak_2+b) \mod p) \ .$$

On vérifie que i est *injective*. Donc si on tire $f \in \mathcal{F}$ de façon uniforme on obtient un élément dans $\mathcal{P}$ avec une probabilité uniforme.

— Soit :

$$\mathcal{H} = \{((\_) \mod m) \circ f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_m \mid f \in \mathcal{F}\} \ .$$

— La *probabilité d'une collision* est donc la probabilité qu'en tirant deux points $x \neq y$ dans $\mathbf{Z}_p$ avec une probabilité uniforme on a :

$$(x \equiv y) \mod m \ .$$

— Si l'on fixe $x \in \mathbf{Z}_p$, le *nombre d'éléments* $z \in \mathbf{Z}_p$ tels que $x \neq z$ et $(x \equiv z) \mod m$ est au plus $\lceil p/m \rceil - 1$.

— On remarque (écrivez p comme $km + r$) :

$$\lceil p/m \rceil - 1 \leq \frac{(p+m-1)}{m} - 1 = \frac{(p-1)}{m} \ .$$

Donc si on tire au hasard un élément différent de x, la probabilité d'une collision est au plus :

$$\frac{p-1}{m(p-1)} = \frac{1}{m} \ .$$

En d'autres termes, si on tire au hasard $(a,b) \in (\mathbf{Z}_p)^* \times \mathbf{Z}_p$:

$$P(((ak_1+b) \mod p \equiv (ak_2+b) \mod p) \mod m) \leq \frac{1}{m} \ .$$

1. On note au passage qu'en prenant les fonctions de la forme $x \mapsto (ax+b) \mod m$ avec $a \in \mathbf{Z}_m^*$ et $b \in \mathbf{Z}_m$ on n'obtient pas la propriété attendue (20.1) : si $(k_1 \equiv k_2) \mod m$ alors les valeurs hachées coïncident.

20.3 Tables de hachage avec adressage ouvert

On considère un deuxième schéma de mise en oeuvre d'une table de hachage.
— La *fonction de hachage* donne une adresse de la table.
— A partir de cette adresse une deuxième *fonction de sondage* (*probing* en anglais) donne une *suite d'adresses de la table* à visiter.
— La fonction de sondage doit permettre de visiter *toutes les adresses* de la table.

L'*élimination* d'un élément dans une table avec adressage ouvert est compliquée. Une solution populaire consiste à remplacer l'élément par une valeur spéciale DELETED. Une *insertion* peut avoir lieu dans une place marquée DELETED. Une *recherche* doit continuer après un élément DELETED. Les cellules DELETED entraînent une *dégradation des performances* et en général on évite l'approche avec adressage ouvert si l'utilisation de la structure comporte des éliminations.

Conception de la fonction de sondage

On discute deux approches à la conception de la fonction de sondage : le sondage *linéaire* et le *double hachage*.

Dans le *sondage linéaire*, on va parcourir :

$$h(k) \mod m, (h(k)+1) \mod m, \ldots, (h(k)+(m-1)) \mod m \ .$$

Cette approche a tendance à créer des *longues chaînes*.

Une approche plus sophistiquée utilise une technique de *double hachage*. A savoir, on introduit une deuxième fonction :

$$h_{aux} : U \to (\mathbf{Z}_m)^* \ ,$$

et on calcule pour $a = h_{aux}(k)$:

$$h(k), (h(k)+a) \mod m, \ldots, (h(k)+(m-1)a) \mod m \ .$$

Si m est *premier*, il suffit de prendre $m' = (m-1)$ et

$$a = h_{aux}(k) = (k \mod m') + 1 \in (\mathbf{Z}_m)^* \ ,$$

car $x \mapsto ax + b : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_m$ est *injective* si $a \in (\mathbf{Z}_m)^*$.

Analyse de l'hachage ouvert

On suppose une fonction de *hachage uniforme* et un *facteur de charge* $\alpha = n/m < 1$. On cherche à déterminer le *nombre moyen* de sondages pour conclure qu'un élément *n'est pas* dans l'ensemble. Soit X la v.a.d. qui *compte le nombre de sondages*. On montre que :

$$E[X] \leq \frac{1}{1-\alpha} \ .$$

Soit A_i l'événement où l'on *sonde pour la i-ème fois une cellule occupée*. On a $(X \geq 1) = \Omega$ et pour $2 \leq i \leq n$:

$$(X \geq i) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1} \ .$$

En utilisant la *probabilité conditionnelle* :

$$\begin{aligned} P(X \geq i) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \\ &\quad \cdots P(A_{i-1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{i-2}) \ . \end{aligned}$$

On dérive, en utilisant l'hypothèse d'*hachage uniforme* :

$$\begin{aligned} P(X \geq i) &= \tfrac{n}{m} \tfrac{n-1}{m-1} \cdots \tfrac{n-i+2}{m-i+2} \\ &\leq (\tfrac{n}{m})^{i-1} \\ &= \alpha^{i-1} \ . \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E[X] &\leq \Sigma_{i=1,\ldots,\infty} i \cdot P(X = i) \\ &= \Sigma_{i=1,\ldots,\infty} i \cdot (P(X \geq i) - P(X \geq i+1)) \\ &= \Sigma_{i=1,\ldots,\infty} P(X \geq i) \\ &\leq \Sigma_{i=1,\ldots,\infty} \alpha^{i-1} \\ &= \Sigma_{i=0,\ldots,\infty} \alpha^{i} \\ &= \tfrac{1}{1-\alpha} \ . \end{aligned}$$

Exemple 60 *Dans l'approche avec adressage ouvert, on* épargne la mémoire *pour les pointeurs mais la cardinalité de l'ensemble représenté est* bornée *par la taille de la table et* DELETED dégrade *les performances. Avec toutes ces réserves, considérons une situation où l'adressage ouvert se compare favorablement au chaînage.*

Supposons qu'une clé et un pointeur prennent le même espace *et que les problèmes associés aux bornes et aux* DELETED *ne se posent pas. Si une table de* hachage avec chaînage *a un facteur de charge* $\alpha = 2$ *on utilise* m *cellules pour la table et* $4m$ *cellules pour les listes. Avec l'*adressage ouvert*, on peut donc avoir un facteur de charge* $\alpha' = 2/5$ *et une recherche qui échoue effectue en moyenne* $\frac{1}{1-2/5} = 5/3 < 2$ *sondages.*

En conclusion, mentionnons 2 variations possibles sur le thème des tables de hachage : les tables *dynamiques* et les tables *parfaites*.

Dans les tables de hachage *dynamiques*, on prévoit la possibilité d'élargir ou réduire *dynamiquement* la taille de la table de hachage de façon à garder le *facteur de charge* dans un certain intervalle. De plus, dans certaines applications on souhaite élargir ou réduire de façon *incrémentale*. En d'autres termes, on répartit le travail de gestion des tables dynamiques sur toutes les opérations de façon à garantir la réactivité du système.

Parfois, on connaît à l'avance les n éléments qui peuvent être dans l'ensemble. On peut alors allouer une table de taille n et garantir un temps d'accès constant dans le *pire des cas* (plutôt qu'en moyenne). On parle dans ce cas de tables de hachage *parfaites*.

20.4 Problèmes

20.4.1 Analyse d'une fonction d'hachage

La fonction de hachage suivante est attribuée à Dan Bernstein ; elle est assez populaire pour sa simplicité et son efficacité. La fonction prend en entrée une chaîne de caractères et produit en sortie un entier dans l'intervalle $[0, 2^{32} - 1]$.

```
unsigned int hash(unsigned char *p){
    unsigned int h = 5381;
    unsigned int c;
    while (c = *p++){
        h= ((h << 5) + h) + c;}
    return h;}
```

1. Explicitez la fonction mathématique h calculée par hash (au besoin, il faudra consulter la documentation de C et/ou faire des tests).
2. Supposons qu'on va calculer h sur des chaînes de caractères de la forme $x\_1, x\_2, x\_3, \ldots$ (par exemple, il pourrait s'agir de variables générées par un compilateur). Que peut-on dire sur la séquence $h(x\_1), h(x\_1), h(x\_3), \ldots$?
3. Trouvez deux chaînes de caractères s_1 et s_2, chacune composées de 2 caractères telle que $h(s_1) = h(s_2)$.
4. Pour tout $n \geq 1$, expliquez comment construire 2^n chaînes de caractères composées de $2n$ caractères sur lesquelles la fonction h est constante.
5. Trouvez une chaîne de caractères s aussi courte que possible telle que $h(s) = 0$.

20.4.2 Table de hachage et n-grammes

Soit T un texte en langue naturelle composé de mots. Une n-gramme dans le texte est une suite de n mots consécutifs dans le texte. Par exemple, si le texte est

to be or not to be this

alors les 2-grammes sont *to_be*, *be_or*, *or_not*, *not_to*, *be_this*. Étant donné un texte et une (petite) valeur de n on souhaite construire une table de hachage dont les clefs sont les n-grammes. La valeur associée à une clef/un n-gramme est la liste des mots qui peuvent suivre le n-gramme dans le texte. On suppose que si un mot apparaît plusieurs fois alors il est répété dans la liste.

1. Programmez une fonction build_table qui prend en argument le nom d'un fichier qui contient le texte T et un nombre naturel $n \geq 1$ et retourne comme résultat la table de hachage qu'on vient de décrire. On fera l'hypothèse que le nombre de n-grammes ne dépasse pas 2^{32} et qu'on peut donc adapter la fonction de hachage décrite dans le problème 20.4.1.

La table de hachage est une sorte de modèle probabiliste du texte. Pour chaque n-gramme on a une liste de mots candidats à suivre le n-gramme et on peut voir la liste comme une distribution de probabilité sur les mots. Dans notre petit exemple, le 2-gramme *to_be* peut être suivi par le mot *or* ou *this*.

Une application possible de la table de hachage est la construction d'un texte aléatoire qui s'inspire du style du texte. On fixe ou on choisit au hasard un n-gramme G dans la table

(typiquement $n \in \{2, 3\}$). Ensuite pour générer un texte de $m - n$ mots on itère un nombre suffisant de fois les opérations suivantes :

- on choisit au hasard un mot v parmi ceux associés à G,
- on génère le mot v,
- on construit un nouveau n-gramme G' en prenant les derniers $n - 1$ mots de G et en lui ajoutant le mot v.
- si G' est dans la table alors on pose $G = G'$ et on itere. Sinon on prend comme prochain G un n-gramme de la table choisi au hasard.

2. Programmez une fonction `gen_text` qui prend en argument la table de hachage pour les n-grammes, le nombre m de mots à générer et le nom d'un fichier et et qui écrit dans le fichier m mots générés d'après la méthode décrite ci-dessus.
3. Testez la fonction `gen_text` sur le texte d'un roman de votre écrivain préféré.

Chapitre 21

Listes à enjambements (*skip lists*)

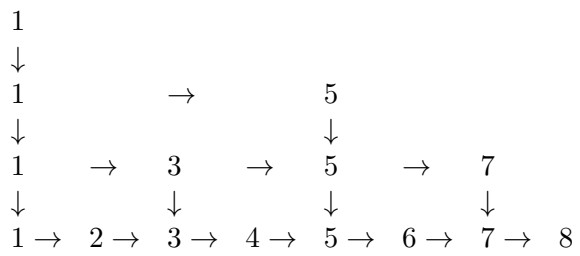
Les listes à enjambements (*skip lists*) sont une structure de données introduite par W. Pugh [Pug90] à base de listes doublement chaînées à plusieurs étages. Il s'agit d'une structure de données 'probabiliste' dans le sens que certaines décisions sur la configuration des listes sont prises de façon probabiliste. On obtient ainsi une mise en oeuvre relativement simple des opérations standards de recherche, insertion et élimination, tout en assurant une complexité en temps logarithmique avec une probabilité élevée.

21.1 Listes à enjambements

Considérons une liste ordonnée L_0 avec n éléments. Pour l'instant on se focalise sur la recherche d'un élément dans la liste. On sait que la complexité de cette opération est $O(n)$. Supposons maintenant qu'on ajoute une deuxième liste L_1 pour accélérer la recherche. Dans cette deuxième liste on va mémoriser une fraction des éléments de la liste L_0. L'idée est que la liste L_0 est une ligne locale qui dessert toutes les stations alors que la liste L_1 est une sorte de ligne rapide qui nous permet d'avancer rapidement jusqu'à un certain point où on peut être obligé d'emprunter la ligne locale L_0. Une configuration 'optimale' consiste à mettre dans la liste L_1 $\sqrt{n}$ éléments de la liste L_0 qui sont espacés de $\sqrt{n}$. Par exemple, si la liste L_0 contient les éléments $1, 2, \ldots, 15, 16$, on va insérer dans la liste L_1 les éléments $1, 5, 9, 13$. Dans la recherche d'un élément on va visiter au plus $\sqrt{n}$ noeuds dans la liste L_1 et au plus $\sqrt{n}$ noeuds dans la liste L_0. Donc, dans le pire des cas, on visite $2 \cdot \sqrt{n}$ noeuds et on a une complexité en $O(\sqrt{n})$.

On peut aussi ajouter une ligne 'TGV' L_2. Dans ce cas, L_1 va contenir $n^{2/3}$ éléments de L_0 espacés de $\sqrt[3]{n}$ et L_2 va contenir $\sqrt[3]{n}$ éléments de L_1 espacés de $\sqrt[3]{n}$. Par exemple, si L_0 contient les éléments $1, 2, \ldots, 27$, alors L_1 contient les éléments $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$, et L_2 contient les éléments $1, 10, 19$. La recherche va donc visiter au plus $3 \cdot \sqrt[3]{n}$ noeuds, soit $O(\sqrt[3]{n})$. En général, on peut imaginer de construire la liste L_{i+1} à partir de la liste L_i en sélectionnant un élément sur deux. Ce processus s'arrête forcement après $log_2(n)$ étapes et il permet la recherche d'un élément en temps $O(log(n))$ d'une façon qui rappelle la recherche dichotomique ou la recherche dans un arbre binaire ordonné. Par exemple, si L_0 contient les

éléments $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ alors on obtient :



21.2 Approche probabiliste

On va maintenant discuter la conception des opérations d'insertion et d'élimination. A priori ces opérations risquent de déséquilibrer les listes et ainsi d'augmenter la complexité. Il se trouve qu'une approche probabiliste à l'opération d'insertion permet une mise-en-oeuvre simple dont on peut garantir l'efficacité avec une probabilité élevée.

On fait l'hypothèse que les listes $L_0, \ldots, L_k$ sont ordonnées de façon croissante et qu'elles contiennent un noeud sentinelle avec une valeur non-standard $-\infty$. Le point d'entrée de la structure est le noeud $-\infty$ de la liste L_k (la plus haute). Initialement, la structure est donc composée d'une seule liste composée à son tour d'un noeud qui contient la valeur $-\infty$.

Chaque noeud contient 2 champs pointeurs right et down et un champ val qui contient sa valeur (par exemple un entier). Si le noeud se trouve dans la liste L_i alors le champ right pointe à l'élément suivant dans la liste L_i, s'il existe, et le champ down au noeud avec la *même valeur* dans la liste L_{i-1} si elle existe.

Recherche Un algorithme de *recherche* d'un noeud avec valeur x à partir du point d'entrée ℓ pourrait être le suivant :

1. Si $\ell = \mathsf{NULL}$: on rend NULL comme résultat.
2. Sinon, si $\ell \to \mathsf{val} = x$: on rend ℓ comme résultat.
3. Sinon, soient $\ell_r = (\ell \to \mathsf{right})$ et $\ell_d = (\ell \to \mathsf{down})$.
   3.1 si $\ell_r = \mathsf{NULL}$: $\ell = \ell_d$ et on itère.
   3.2 Sinon, si $x < (\ell_r \to \mathsf{val})$: $\ell = \ell_d$ et on itère.
   3.3 Sinon, si $x \geq (\ell_r \to \mathsf{val})$: $\ell = \ell_r$ et on itère.

Élimination Pour *éliminer* une valeur x de la structure on va effectuer une recherche jusqu'à trouver (si elle existe) l'occurrence de x dans la liste de niveau le plus élevé (sinon, il n'y a rien à faire). Pendant cette recherche on maintient un pointeur pred de façon telle que si on trouve la valeur x dans un noeud n alors pred pointe au prédécesseur de n. Ensuite, on élimine le noeud correspondant ainsi que tous les noeuds qui contiennent la même valeur jusqu'à la liste L_0. Pour ce faire, la première fois on utilise le pointeur pred et pour les niveaux inférieurs, on cherche le prédécesseur du noeud $(\mathsf{n} \to \mathsf{down})$ à partir du noeud $(\mathsf{pred} \to \mathsf{down})$. Il suit de la définition de la fonction d'insertion (à suivre), que le nombre moyen d'arêtes entre $(\mathsf{pred} \to \mathsf{down})$ et $(\mathsf{n} \to \mathsf{down})$ est 2.

Insertion Pour *insérer* une valeur x dans la structure il faut d'abord effectuer une recherche pour déterminer l'endroit où x doit être inséré dans la liste L_0 (si pendant la recherche on trouve x, il n'y a rien à faire). Pendant cette recherche on maintient dans une *pile* P les

derniers éléments visités dans chaque liste ; ces éléments sont les prédécesseurs potentiels des noeuds créés qui vont contenir la valeur x.

Après la phase de recherche, on va créer un noeud n qui contient la valeur x, on extrait le premier élément de la pile P et on l'utilise pour insérer n dans la liste L_0.

Ensuite on passe à la *phase probabiliste*. On joue à pile ou face et tant qu'on tire pile on effectue les opérations suivantes.

— Si la pile P est vide on ajoute un nouveau niveau à la structure avec un noeud qui contient la valeur non-standard $-\infty$. Ce noeud devient le nouveau point d'entrée de la structure et il est inséré dans la pile.

— On extrait le premier élément de la pile P et on l'utilise pour insérer un nouveau noeud qui contient x.

Exemple 61 *On considère l'insertion de la valeur* 7 *dans la liste suivante où on utilise des indices en exposant pour distinguer les occurrences de la même valeur (en pratique les exposants sont des pointeurs).*

$$\begin{array}{ccccccccc} -\infty^1 & & \rightarrow & & 10^2 & & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\ -\infty^3 & \rightarrow & 5^4 & \rightarrow & 10^5 & \rightarrow & 15^6 \end{array}$$

A la fin de la phase de recherche, la pile P *correpond à* $(-\infty^1, 5^4)$*. On va donc insérer* 7 *entre* 5^4 *et* 10^5 *et* P *devient* $(-\infty^1)$*. Ensuite commence la phase probabiliste. Si on tire pile, on va insérer* 7 *entre* $-\infty^1$ *et* 10^2*. Et si on tire encore pile, on va ajouter un nouveau niveau et obtenir la structure suivante.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} -\infty^9 & & \rightarrow & & 7^9 & & & & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & & & \\ -\infty^1 & & \rightarrow & & 7^8 & \rightarrow & 10^2 & & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ -\infty^3 & \rightarrow & 5^4 & \rightarrow & 7^7 & \rightarrow & 10^5 & \rightarrow & 15^6 \end{array}$$

21.3 Analyse

Chaque élément qui a été inséré dans la liste a été ajouté à la liste L_0 et ensuite il a été propagé aux listes supérieurs avec une probabilité fortement décroissante. Soit X_j, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ une v.a.d. qui indique la hauteur atteinte par le j-ème élément de la structure. On a :

$$P(X_j \geq k) \leq 2^{-k} \ .$$

Soit H une v.a.d. qui représente la hauteur de la structure (le nombre de listes). On a :

$$H = max\{X_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\} \ ,$$

et en utilisant la borne union on dérive :

$$P(H \geq k) \leq \Sigma_{j=1,\ldots,n} P(X_j \geq k) = n \cdot 2^{-k} \ .$$

Si l'on prend $k = 2 \cdot log_2(n)$ on obtient que :

$$P(H \geq 2 \cdot log_2(n)) \leq \frac{1}{n} \ ,$$

et plus en général si $k = c \cdot log_2(n)$ on a :

$$P(H \geq c \cdot log_2(n)) \leq \frac{1}{n^{(c-1)}} \ .$$

On peut conclure qu'avec une haute probabilité la structure aura une hauteur logarithmique dans le nombre d'éléments qu'elle contient.

Cherchons maintenant à évaluer le nombre de noeuds visités dans la recherche d'un élément. Une recherche peut être visualisée comme une suite de mouvements vers la droite (en suivant le pointeur right) ou vers le bas (en suivant le pointeur down). Dans le cas le plus défavorable, la recherche nous conduit jusqu'à la liste de base L_0. Considérons maintenant les noeuds visités en ordre inverse, à partir donc du dernier qui se trouve dans la liste L_0. Avec probabilité $1/2$ un de ces noeuds, se trouvant, disons, dans la liste L_i, a un noeud avec la même valeur dans la liste L_{i+1} et il s'agit du noeud suivant dans le chemin inversé. On a donc un chemin (inversé) qui à chaque étape monte au niveau supérieur avec probabilité $1/2$ et reste au même niveau avec probabilité $1/2$. Par ailleurs, on sait qu'avec probabilité au moins $1 - 1/n$ on a au plus $2log_2(n)$ niveaux et qu'en moyenne un chemin qui monte $2log_2(n)$ niveaux a longueur $4log_2(n)$.

On esquisse un raffinement possible de cette analyse qui cherche à quantifier la probabilité qu'on s'écarte de la moyenne. Soit N la v.a.d. qui compte le nombre de fois qu'on reste au même niveau. On sait que N est la somme de v.a.d. de Bernoulli indépendantes et que dans une telle situation N est fortement concentrée autour de son espérance. Supposons qu'on effectue $m = 8log_2(n)$ tirages. On a donc :

$$N = \Sigma_{i=1,\ldots,8log_2(n)} X_i \ ,$$

où X_i est une v.a.d. de Bernoulli. L'espérance de N est $E[N] = 4log_2(n)$. La borne de Chernoff est une inégalité qui s'applique à la somme de v.a.d. de Bernoulli indépendantes (la section 21.4 contient une preuve de la borne). Intuitivement, la borne dit que la probabilité que la somme s'écarte de la moyenne diminue de façon exponentielle. Parmi les nombreuses formulations qu'on trouve dans la littérature, on utilise la suivante :

$$P(N \geq c_N E[N]) \leq e^{-kE[N]} \ , \tag{21.1}$$

où $k = c_N ln(c_N) - c_N + 1$. Si l'on prend $c_N = 3/2$ on a $k \approx 0,1$ et donc :

$$P(N \geq 6log_2(n)) \leq n^{-0,4} \ . \tag{21.2}$$

Cette borne implique que si on fait $8log_2(n)$ tirages avec probabilité au moins $(1 - n^{-0,4})$ on va remonter jusqu'à la liste sommitale. On peut conclure l'analyse en combinant les deux bornes.

$$\begin{aligned} P((H < 2log_2(n)) \cap (N < 6log_2(n))) &= 1 - P((H \geq 2log_2(n)) \cup (N \geq 6log_2(n))) \\ &\geq 1 - (P(H \geq 2log_2(n)) + P(N \geq 6log_2(n))) \\ &\geq 1 - (\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^{0,4}}) \ . \end{aligned}$$

En pratique, les listes à enjambements sont compétitives avec les arbres binaires équilibrés tout en ayant une mise-en-oeuvre plus simple. A noter, qu'il est aussi possible de concevoir des listes à enjambements *déterministes* [MPS92] qui garantissent une complexité des opérations considérées en temps $O(log(n))$ dans le pire des cas.

21.4 Borne de Chernoff

Dans cette section on propose une preuve élémentaire de la borne de Chernoff (21.1). On commence par introduire une borne connue comme inégalité de Markov.

Proposition 23 (Markov) *Soit X une v.a.d. avec* valeurs non-négatifs *et espérance $E[X]$. Alors pour tout $a > 0$:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a} \ .$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} a \cdot P(X \geq a) &= a \cdot (\Sigma_{x \geq a} P(X = x)) \\ &\leq \Sigma_{x \geq a} x \cdot P(X = x) \\ &\leq \Sigma_{x < a} x \cdot P(X = x) + \Sigma_{x \geq a} x \cdot P(X = x) \quad (X \text{ non négative}) \\ &= E[X] \ . \end{aligned}$$

□

Proposition 24 (Chernoff) *Soit X une v.a.d. qui est la somme de n v.a.d. X_i* indépendantes *telles que $im(X_i) \in \{0, 1\}$, $P(X_i = 1) = p_i$, pour $i = 1, \ldots, n$ et $\mu = E[X]$.*

1. *Si $\delta > 0$ alors :*
$$P(X > (1 + \delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1 + \delta)^{(1+\delta)}} \right)^{\mu}$$
2. *Si $0 < \delta < 1$ alors :*
$$P(X < (1 - \delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{(1-\delta)}} \right)^{\mu}$$

PREUVE. (1) Pour un $t > 0$ qu'on va fixer à la fin de l'argument, on considère la v.a.d. e^{tX}. Comme la fonction e^{tx} est strictement monotone on a :

$$P(X > (1 + \delta)\mu) = P(e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu})$$

Comme e^{tX} et $(1+\delta)\mu$ sont positifs on peut appliquer l'inégalité de Markov (proposition 23) :

$$P(e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu}) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} \ .$$

Ensuite on calcule une borne supérieure pour l'espérance $E[e^{tX}]$:

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= E[\Pi_{i=1,\ldots,n} e^{tX_i}] && (\text{car } X = \Sigma_{i=1,\ldots,n} X_i) \\ &= \Pi_{i=1,\ldots,n} E[e^{tX_i}] && (\text{car } X_i \text{ indépendantes}) \\ &= \Pi_{i=1,\ldots,n} (1 - p_i) + e^t p_i \\ &= \Pi_{i=1,\ldots,} 1 + (e^t - 1) p_i \\ &\leq \Pi_{i=1,\ldots,n} e^{(e^t - 1)p_i} && (\text{car } 1 + x \leq e^x) \\ &= e^{(e^t - 1)\mu} \ . && (\text{car } \mu = \Sigma_{i=1,\ldots,n} p_i) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à choisir le bon t ; on prend $t = ln(1 + \delta)$ et on dérive l'assertion.

(2) On suppose $t < 0$ et donc :

$$P(X < (1 - \delta)\mu) = P(e^{tX} > e^{(1-\delta)\mu}) \ .$$

On développe un argument similaire et à la fin on pose $t = ln(1 - \delta)$. □

Remarque 22 *Pour obtenir la borne (21.1) de l'analyse de la section 21.3, on prend $c_N = (1 + \delta)$.*

Chapitre 22

Algorithmes gloutons

Un algorithme *glouton* (*greedy* en anglais) est un algorithme qui cherche une solution à un problème en suivant un critère d'optimum local. En général cette approche peut être vue comme une *heuristique* mais dans certains cas elle permet de trouver la solution de façon *optimale* et *efficace*. En particulier, dans le cadre 'continu' de l'*optimisation convexe*, on sait qu'un optimum local coïncide toujours avec l'optimum global. Dans un cadre 'discret', on présente deux exemples de cette situation favorable qui concerne la recherche d'une sous-séquence contiguë maximale et la recherche d'une compression optimale. Le chapitre 25 proposera aussi deux autres exemples dans le cadre des graphes pondérés.

22.1 Sous-séquence contiguë maximale

On considère le problème de la sous-séquence contiguë maximale (abrégé en *SCM*).

Entrée Une séquence $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbf{Z}$.

Sortie Un couple (i, j) tel que :

$$s_{i,j} = max\{s_{\ell,m} \mid 1 \leq \ell \leq m \leq n\} \ ,$$

où : $s_{\ell,m} = \Sigma_{k=\ell,\ldots,m} x_k$.

Une interprétation possible du problème SCM est la suivante : on joue n tours et x_i représente le gain ou la perte au tour i ($i \in \{1, \ldots, n\}$). On cherche à déterminer la série de tours (=sous-séquence contiguë) dans laquelle on gagne le plus (ou on perd le moins...).

Remarque 23 *Dans la suite on se focalise sur le calcul de $s_{i,j}$ et on laisse comme exercice le problème de calculer le couple (i, j) associé.*

On fait l'hypothèse que la séquence est mémorisée dans un *tableau* ce qui permet d'accéder chaque élément du tableau en *temps constant*. Pour calculer le résultat il faut au moins lire chaque élément de la séquence. Donc on ne peut pas faire mieux que $O(n)$. On va *pratiquer* une approche 'directe' et une approche 'diviser pour régner' avant d'arriver à l'approche 'gloutonne'.

Approche directe

On calcule :

$$\begin{array}{lll} s_{1,1}, \quad s_{2,2}, \quad \cdots \quad , s_{n,n} & (n \text{ longueur } 1) \\ \quad s_{1,2}, \quad \cdots \quad , s_{n-1,n} & (n-1 \text{ longueur } 2) \\ \qquad \cdots & \cdots \\ \qquad s_{1,n} & (1 \text{ longueur } n) \end{array}$$

et on remarque que :

$$s_{i,j+1} = s_{i,j} + x_{j+1} \ .$$

Le *coût total* est donc :

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

A savoir : $O(n^2)$ en *temps*.

Exercice 22 *Montrez qu'on peut calculer la SCM en utilisant une quantité linéaire de mémoire.*

Approche diviser pour régner

Que se passe-t-il si on cherche à *diviser le problème en* 2 comme dans la recherche dichotomique ou le tri par fusion ? On fixe un peu de notation.

- $SCM(i,j)$ est le problème de déterminer une *SCM* entre i et j.
- $SCMD(i,j)$ est le problème de déterminer une *SCM* entre i et j et qui *termine à* j (à *D*roite).
- $SCMG(i,j)$ est le problème de déterminer une *SCM* entre i et j et qui *commence à* i (à *G*auche).

Remarque 24 *Soit $m = (i+j)/2$. Pour calculer $SCM(i,j)$ (où $i < j$) on calcule :*

- $v_1 = SCM(i,m)$.
- $v_2 = SCM(m+1,j)$.
- $v_3 = SCMD(i,m)$ *et* $v_4 = SCMG(m+1,j)$.

et on prend :

$$max\{v_1, v_2, v_3 + v_4\} \ .$$

On remarque pour $i < j$:

$$SCMD(i,j) = max\{x_j, x_j + SCMD(i,j-1)\} \ .$$

Il en suit que le calcul de $SCMD(i,j)$ est $O(j-i)$. Et de même pour *SCMG*. On retrouve la récurrence du *tri par fusion* (chapitre 16) :

$$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + n \ .$$

Soit un coût $O(n \log n)$. Est-ce possible de faire mieux ?

Approche gloutonne

On abrège :

$$m_i = SCMD(1, i) \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n \ .$$

La remarque suivante est attribuée à J. Kadane [Ben84] :

— Le max parmi $m_1, \ldots, m_n$ nous donne une solution à $SCM(1, n)$. En effet une SCM entre 1 et n va bien terminer à un i tel que $1 \leq i \leq n$ et la *même SCM* va être une solution pour le problème $SCMD(1, i)$.

— On sait déjà qu'on peut calculer m_{i+1} à partir de m_i en *temps constant* car :

$$m_{i+1} = max\{m_i + x_{i+1}, x_{i+1}\} \ .$$

On peut donc résoudre le problème en $O(n)$ ce qui est *optimal*.

Exercice 23 *Programmez les* 3 *approches et testez leur efficacité.*

22.2 Compression de Huffman

On considère un problème de *compression* de l'information. On fixe un *alphabet fini* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ avec m symboles. On suppose que chaque symbole de l'alphabet paraît avec *probabilité* p_i, $i = 1, \ldots, m$. On cherche une fonction $C : A \to 2^*$ qui associe à chaque symbole un *code binaire* tel que :

— le codage est *décodable* : pour tout mot $b \in 2^*$ il existe au plus un mot $w \in A^*$ tel que $C(w) = b$.

— On *minimise la longueur moyenne* du codage d'un symbole, à savoir la quantité :

$$\Sigma_{i=1,\ldots,m}\ p_i \cdot |C(a_i)| \ .$$

On peut voir $b \in 2^*$ comme un chemin dans un arbre binaire et l'ensemble des codes $\{C(a_1), \ldots, C(a_n)\}$ comme le plus petit *arbre binaire* qui contient les chemins associés aux codes.

Définition 20 (propriété du préfixe) *Un codage a la* propriété du préfixe *(ou est préfixe) si deux codes différents ne sont jamais l'un le préfixe propre de l'autre.*

Dans la représentation à arbre d'un codage préfixe, les *codes sont exactement les feuilles de l'arbre*. Le *décodage d'un codage préfixe est simple* : on lit le code de gauche à droite et on décode dès qu'on reconnaît le code d'un symbole. Il se trouve que sans perte de généralité on peut se *restreindre aux codage préfixes* ! En d'autres termes, on peut toujours trouver un codage qui est optimal et préfixe.

Exercice 24 *Soit* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *On considère* 3 *candidats pour la fonction* C *:*

	P	C_1	C_2	C_3
1	0,5	0	0	0
2	0,3	1	10	01
3	0,1	00	110	011
4	0,1	01	111	111

Questions. (1) Quels codes sont décodables *? (2) Quels codes sont* préfixes *? (3) Quelle est la* longueur moyenne *du codage d'un symbole ?*

On reformule le problème de la façon suivante : construire un arbre binaire T avec m feuilles (=codes) et affecter les probabilités des m symboles aux m feuilles de façon à minimiser la longueur moyenne des chemins de la racine aux feuilles (qu'on dénote par $\ell(T)$).

Exercice 25 *Montrez que :*

1. *On peut supposer que l'arbre est* plein *(un noeud est une feuille ou a 2 fils).*
2. *Si la (distribution de) probabilité des symboles est* uniforme *alors on peut supposer que l'arbre optimal est* quasi-complet *(voir définition 11).*
3. *Il y a des distributions pour lesquelles la solution optimale est une* liste.

On va introduire deux transformations de l'arbre T.

Transformation 1 Soit T un *arbre* avec m feuilles avec probabilités $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$. Soit T' l'arbre obtenu comme suit :

> on prend un noeud avec deux fils qui sont des feuilles de probabilité q_1 et q_2 ($q_1 \leq q_2$) qui est à *distance maximale* de la racine. On *"permute"* q_1 avec p_1 et p_2 avec q_2 (cas dégénérés laissés en exercice).

On *vérifie* que :

$$\ell(T') \leq \ell(T) \ .$$

Transformation 2 Prenez l'arbre T' de la transformation 1 et dérivez un arbre T'' en *remplaçant* le noeud avec feuilles p_1 et p_2 par un *seul noeud* qui est une feuille de probabilité $p_1 + p_2$. On *vérifie* que :

$$\ell(T') = \ell(T'') + (p_1 + p_2)$$

On utilise ces deux transformations pour montrer que la construction suivante produit un codage préfixe optimal [Huf52].

Construction de Huffman On associe aux probabilités $p_1, \ldots, p_m$, avec $p_1 \leq \cdots \leq p_m$, un *arbre* T_m avec m feuilles comme suit :

— Si $m = 1$ on a une feuille avec poids p_1.
— Si $m = 2$ on a 3 noeuds dont deux feuilles de poids p_1 et p_2.
— Si $m > 2$ on construit un arbre T_{m-1} pour les probabilités :

$$p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_m \ ,$$

> ensuite on obtient l'arbre T_m en *remplaçant* la feuille de poids $p_1 + p_2$ avec un noeud avec deux feuilles de poids p_1 et p_2.

On a donc :

$$\ell(T_m) = \ell(T_{m-1}) + (p_1 + p_2) \ .$$

Remarque 25 *On reconnaît dans cette construction une stratégie gloutonne : pour résoudre le problème pour $p_1, \ldots, p_m$ avec $p_1 \leq \cdots \leq p_m$ on va résoudre le problème pour $p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_m$ et ensuite expanser la feuille associée à $p_1 + p_2$.*

Proposition 25 *La construction de Huffman donne un* code préfixe optimal.

PREUVE. Par *récurrence* sur m. Les cas $m = 1$ et $m = 2$ sont clairs. Si $m > 2$ on sait par récurrence que l'arbre T_{m-1} pour $p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_m$ est *optimal* et que :

$$\ell(T_m) = \ell(T_{m-1}) + (p_1 + p_2) \ .$$

Par *contradiction*, supposons T optimal pour $p_1, \ldots, p_m$ et $\ell(T) < \ell(T_m)$. On applique la *transformation 1* à T et on obtient un arbre T' avec $\ell(T') \leq \ell(T)$. Ensuite, on applique la *transformation 2* à T' et on obtient un arbre T'' avec $\ell(T') = \ell(T'') + (p_1 + p_2)$. On a donc :

$$\ell(T'') + (p_1 + p_2) = \ell(T') \leq \ell(T) < \ell(T_m) = \ell(T_{m-1}) + (p_1 + p_2) \ ,$$

qui *contredit l'optimalité* de T_{m-1} $(\ell(T'') < \ell(T_{m-1}))$! □

Mise en oeuvre

On considère des arbres où chaque noeud contient la *somme des probabilités* des feuilles accessibles depuis le noeud (donc la racine de l'arbre contient la somme des probabilités des feuilles de l'arbre). Initialement, on a m *arbres* constitués d'une seule feuille avec probabilités $p_1, \ldots, p_m$. On maintient les arbres dans un *min-tas* (chapitre 15), ordonnés d'après les valeurs des racines. A chaque étape, on *extrait* les deux arbres plus petits t_1 et t_2 du tas et on y *insère* un nouveau arbre obtenu en ajoutant un *noeud* qui pointe à t_1 et t_2 et dont la probabilité est la somme des probabilités de t_1 et t_2. On répète cette opération $m - 1$ *fois* pour obtenir l'arbre T_m.

Exercice 26 *Déterminez la complexité asymptotique de la fonction qui construit l'arbre T_m.*

Remarque 26 *La construction de Huffman s'applique aussi dans les cas où :*

1. *on associe aux symboles des* poids *(des nombres non-négatifs) plutôt que des probabilités.*
2. *on utilise pour le codage au lieu d'un alphabet binaire un alphabet avec $k > 2$ symboles.*

22.3 Problèmes

22.3.1 Affectation stable

Soient E un ensemble d'étudiants et T un ensemble de tuteurs. On suppose que ces ensembles sont finis et ont la même cardinalité $n \geq 1$. Chaque étudiant classe (strictement) les tuteurs et chaque tuteur classe (strictement) les étudiants. On écrit $t >_e t'$ si l'étudiant e préfère strictement le tuteur t au tuteur t' et on écrit $e >_t e'$ si le tuteur t préfère strictement l'étudiant e à l'étudiant e'. Une affectation *complète* a est une fonction bijective des étudiants aux tuteurs : $a : E \to T$. Une affectation complète a est *stable* si pour tout couple $(e, t) \in E \times T$ tel que $a(e) = t'$ et $a(e') = t$ on a : (i) si $t >_e t'$ alors $e \not>_t e'$ et (ii) si $e >_t e'$ alors $t \not>_e t'$.

On représente les préférences des étudiants par une matrice pe de dimension $n \times n$ et les préférences des tuteurs par une matrice pt de dimension $n \times n$ aussi. On suppose $E = T = \{0, \ldots, n-1\}$ et on indique les préférences avec un nombre compris entre 0 et $n-1$ avec la convention que 0 est le premier choix et $n-1$ le dernier (l'ordre est donc inversé par rapport à l'ordre usuel sur les nombres naturels). Ainsi on a $pe[e][t] = r$ si et seulement si l'étudiant e place le tuteur t au rang r. Et de même $pt[t][e] = r$ si et seulement si le tuteur t place l'étudiant e au rang r. On représente une affectation complète par un tableau de n entiers différents qui varient dans T.

Par exemple, supposons $E = T = \{0, 1, 2\}$ avec les préférences suivantes (dans cet exemple les matrices des préférences coïncident !).

$$pe = pt = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'affectation où chaque étudiant a son premier choix ($a[0] = 1, a[1] = 2, a[2] = 0$) est stable. Par ailleurs, si on prend le premier choix des tuteurs on a aussi une affectation stable. Il y a aussi une troisième affectation stable où chaque étudiant et chaque tuteur a son deuxième choix. Les autres trois affectations possibles ne sont pas stables.

1. Programmez une fonction d'en-tête :

   $$\mathsf{void\ imprimer(int\ n, int\ a[n])}$$

   qui imprime à l'écran l'affectation complète `a`.
2. Programmez une fonction d'en-tête :

   $$\mathsf{void\ pref2rang(int\ n, int\ pe[n][n], int\ er[n][n])}$$

   qui prend en entrée la matrice préférence des étudiants et initialise la matrice `er` de façon telle que `er[e][r] = t` si et seulement si `pe[e][t] = r`. En d'autres termes, `er[e][r]` est le tuteur qui se retrouve au rang `r` dans le classement de l'étudiant `e`.
3. Programmez une fonction d'en-tête :

   $$\mathsf{short\ verif\_cmp(int\ n, int\ a[n])}$$

   qui retourne `1` si l'affectation représentée par le tableau `a` est complète, et `0` autrement.
4. Programmez une fonction d'en-tête :

   $$\mathsf{short\ verif\_stable(int\ n, int\ pe[n][n], int\ pt[n][n], int\ a[n])}$$

   qui retourne `1` si l'affectation représentée par le tableau `a` est complète et stable par rapport aux matrices `pe` et `pt` et `0` autrement.

5. Programmez une fonction d'en-tête

$$\mathsf{void\ gen\_stable(int\ n, int\ pe[n][n], int\ pt[n][n])}$$

qui énumère les affectations complètes jusqu'à en trouver une qui est stable et dans ce cas elle l'imprime à l'écran.

Le problème abordé est connu comme problème des *mariages stables*. L'algorithme mis en oeuvre par la fonction gen_stable pour trouver une affectation stable n'est pas efficace. Cependant, il y un algorithme plus efficace (Gale-Shapley (1962)).

— Chaque *étudiant* contacte les tuteurs par *ordre décroissant de préférence* et *au plus une fois*.

— Un *tuteur* t contacté par l'*étudiant* e répond toujours de la façon suivante :
  — s'il n'a pas d´étudiant il *accepte* (e est affecté à t).
  — s'il a un étudiant e' qu'il préfère à e, il *réfuse* et e *continue* sa recherche,
  — s'il a un étudiant e' et il préfère e à e', il *accepte* (e est affecté à t et e' *reprend sa recherche*).

6. Montrez que :
   — chaque tuteur est engagé avec au plus un étudiant et à chaque changement sa préférence augmente strictement.
   — chaque étudiant propose au plus une fois à chaque tuteur, le nombre de propositions est donc au plus n^2,
   — à la fin de l'algorithme chaque étudiant a un tuteur et l'affectation calculée est stable.
7. Définissez des structures de données qui permettent une execution de l'algorithme en $O(n^2)$.

22.3.2 Optimisation de requêtes

Une requête est un intervalle $[a, b]$ où a, b sont des entiers et $a \leq b$. Deux requêtes $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ sont en *conflit* si $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$. On dit qu'un ensemble R de requêtes est *cohérent* s'il ne contient pas deux requêtes en conflit.

1. Programmez une fonction C d'en tête short coh(int a1, int b1, int a2, int b2) qui renvoie 1 si $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$ et 0 autrement.

On cherche maintenant à concevoir un algorithme qui reçoit en entrée n requêtes $R = \{[a_i, b_i] \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ et calcule un sous-ensemble $R' \subseteq R$ *cohérent* et de *cardinalité maximale*. Dans ce cas, on dit que R' est une solution optimale.

2. On considère la stratégie suivante : on ordonne de façon croissante les requêtes d'après leur *taille* :

$$[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n] \text{ avec } (b_1 - a_1) \leq \cdots \leq (b_n - a_n)$$

et on pose :

$$\begin{array}{lll} R'_0 & = \emptyset & \\ R'_{i+1} & = \left\{ \begin{array}{ll} R'_i \cup \{[a_{i+1}, b_{i+1}]\} & \text{si } R'_i \cup \{[a_{i+1}, b_{i+1}]\} \text{ est cohérent} \\ R'_i & \text{autrement} \end{array} \right. & \\ R' & = R'_n & \end{array}$$

Montrez que R' n'est pas toujours une solution optimale.

3. On considère la stratégie suivante : on ordonne de façon croissante les requêtes d'après leur *deuxième composante* :

$$[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n] \text{ avec } b_1 \leq \cdots \leq b_n$$

et on pose :

$$\begin{array}{lll} R'_0 & = \emptyset & \\ R'_{i+1} & = \left\{ \begin{array}{ll} R'_i \cup \{[a_{i+1}, b_{i+1}]\} & \text{si } R'_i \cup \{[a_{i+1}, b_{i+1}]\} \text{ est cohérent} \\ R'_i & \text{autrement} \end{array} \right. & \\ R' & = R'_n & \end{array}$$

3.1 Montrez qu'il y a toujours une solution optimale qui contient $[a_1, b_1]$.
3.2 Montrez que R' est toujours une solution optimale.
3.3. Estimez la complexité asymptotique en temps d'une fonction qui calcule R' à partir d'un tableau de requêtes ordonnées d'après leur deuxième composante.

On *généralise* le problème en supposant qu'une requête est maintenant un couple $([a, b], w)$ où w est le *poids de la requête* ($w > 0$) et que l'objectif est de rendre un sous-ensemble R' des requêtes R qui est *cohérent* et qui *maximise* la somme des poids des requêtes qui le composent.

4. Montrez que dans ce cas les stratégies proposées aux points 2. et 3. ne donnent pas toujours une solution optimale.
5. Programmez une fonction C d'en tête `int sup(int n, int t[n], int x)` qui prend en entrée un tableau t de n entiers ordonnés de façon croissante et un entier x et rend le plus grand indice j tel que $t[j] < x$ et -1 si un tel indice n'existe pas. Est-il possible de résoudre ce problème en temps $O(\log n)$? Expliquez.
6. On suppose avoir ordonné les requêtes par :

$$([a_1, b_1], w_1), \ldots, ([a_n, b_n], w_n) \qquad b_1 < \cdots < b_n$$

On définit pour $j = 1, \ldots, n$:

$$pred(j) = max\{i \mid 1 \leq i < j, b_i < a_j\}$$

où par convention $max(\emptyset) = 0$. Proposez un algorithme pour calculer $pred(j)$ pour $j = 1, \ldots, n$. Est-il possible d'effectuer ce calcul en temps $O(n \log n)$? Expliquez.
7. Soit $R_j = \{([a_i, b_i], w_i) \mid 1 \leq i \leq j\}$ pour $j = 1, \ldots, n$. Soit O_j le poids maximal d'une solution du problème R_j où par convention on pose : $O_0 = 0$. Montrez :

$$O_{j+1} = max(w_{j+1} + O_{pred(j+1)}, O_j)$$

8. Proposez un algorithme en temps $O(n \log n)$ pour résoudre le problème généralisé (avec poids).

Chapitre 23

Programmation dynamique

La *programmation dynamique* est une branche de l'*optimisation combinatoire* popularisée par R. Bellman [Bel54]. [1] En *programmation dynamique*, on déduit la solution optimale d'un problème en combinant les solutions optimales d'une série de *sous problèmes* et ces sous-problèmes sont en *nombre raisonnable* (polynomial). [2]

23.1 Techniques de programmation

On peut voir la programmation dynamique comme une sorte de généralisation de la méthode diviser pour régner discutée dans le chapitre 16. Si dans la méthode diviser pour régner on a plutôt *partitionné* un problème de taille n en un nombre constant de sous-problèmes, dans le cas de la programmation dynamique on va *recouvrir* le problème avec un nombre de sous-problèmes qui dépend de n.

La conception d'un algorithme de programmation dynamique peut se décomposer en deux phases. Dans la première, on développe une récurrence et dans la deuxième on conçoit une façon efficace de la calculer.

Dans cette section on esquisse quelques considérations générales sur cette deuxième phase. Pour fixer les idées, on suppose que le calcul d'une fonction `f` dans un point `x` demande le calcul préalable de `f` dans $p(|x|)$ points, où p est un polynôme et $|x|$ est la taille de `x`. Dans ce contexte, on distingue 3 approches.

Calcul descendant (top-down)

On définit une fonction récursive. Disons :

```
int f(x){int r; P; return r}
```

où l'on suppose que `P` ne contient *pas de* `return` et n'a *pas d'effet de bord* visible. Le *coût* est souvent *exponentiel* car on recalcule `f` plusieurs fois sur les mêmes points. Un exemple typique est la programmation récursive de la fonction de Fibonacci :

```
1 int fibo(int n){
2     int r;
3     if (n==0){
```

1. La terminologie répond à une logique 'commerciale' plutôt que 'scientifique'...
2. Le terme *programmation* est utilisé ici comme synonyme de *planification*.

```
4           r=0;}
5       else{
6           if (n==1){
7               r=1;}
8           else{
9               r=fibo(n-2)+fibo(n-1);}} ;
10      return r;}
```

Calcul descendant avec mémoïsation

On *transforme* la fonction récursive en utilisant une *table de hachage* T qui *mémoïse* le graphe de la fonction.

```
int f(x){
    int r;
    r=value(T,x);
    if (undefined(r)){
        P;
        insert(T,x,r);}
    return r;}
```

Chaque point est calculé *une fois*. La table T contient à la fois la clé (l'entrée) et la valeur de la fonction qui est récupérée avec la fonction value. Le prédicat undefined nous dit si la fonction a été déjà calculée sur l'entrée x et à défaut la fonction insert insère la valeur calculée. Il est possible de remplacer la table de hachage par une autre structure de données. Par exemple, par un arbre binaire de recherche ou une liste à enjambements.

Exercice 27

1. *Appliquer la transformation au calcul de la suite de Fibonacci.*
2. *Vous disposez d'un générateur aléatoire dans* $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. *Pour effectuer une simulation vous avez besoins de tirer des fonctions dans* $[\mathbf{2}^{128} \to \mathbf{2}^{128}]$ *avec probabilité uniforme. Comment faire ?*
3. *Quid si l'on veut simuler une permutation sur* $\mathbf{2}^{128}$ *?*

Calcul ascendant (bottom-up)

On *réorganise* le calcul de façon à que le calcul de f(x) soit précédé par le calcul de tous les f(y) où y est *'plus petit'* que x. Ce calcul est typiquement stocké dans une *table*.

23.2 Calcul d'une plus longue sous-séquence commune

Soient α, β des *mots* (=séquences finies) sur un alphabet. On dénote par $|\alpha|$ la longueur de la séquence et par ϵ la séquence de longueur 0.

Définition 21 (sous-séquence) *α est un* sous-séquence *de β si l'on obtient α de β en supprimant un certain nombre d'éléments de la séquence.*

Définition 22 (lcs) *On écrit $lcs(\alpha, \beta)$ pour l'ensemble des* plus longues sous-séquences communes *(*longest common subsequence*, en anglais, abrégé en lcs) des mots α et β.*

Remarque 27 *L'ensemble $lcs(\alpha, \beta)$ est toujours non-vide et peut contenir plusieurs éléments. Par exemple, considérez les mots ABC et ACB. En général, le nombre d'éléments dans $lcs(\alpha, \beta)$ peut augmenter de façon exponentielle et le but est juste de calculer un élément de l'ensemble.*

Exemple 62

$$\alpha = ACCGGTCGAGTGCGCGGAAGCCGGCCGAA$$
$$\beta = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$
$$GTCGTCGGAAGCCGGCCGAA \in lcs(\alpha, \beta)$$

Définition 23 (llcs) *On définit une fonction llcs par $llcs(\alpha, \beta) = |\gamma|$ pour $\gamma \in lcs(\alpha, \beta)$.*

On peut voir la fonction *llcs* comme une *mesure de la similarité* de deux séquences (par exemple, deux séquences d'ADN). Nombreuses variations existent : problème de l'*alignement de séquences*, *distance d'édition*,...

Proposition 26 *La longueur de la plus longue sous-séquence commune satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{ll} llcs(\epsilon, \alpha) & = llcs(\alpha, \epsilon) = 0 \\ llcs(a\alpha, a\beta) & = 1 + llcs(\alpha, \beta) \\ llcs(a\alpha, b\beta) & = \mathsf{max}(llcs(a\alpha, \beta), llcs(\alpha, b\beta)) \ , \qquad a \neq b \ . \end{array}$$

Preuve. La première équation est évidente. Pour les suivantes, il est clair que la partie gauche est supérieure ou égale à la droite.

Montrons que $llcs(a\alpha, a\beta) \leq 1 + llcs(\alpha, \beta)$. Soit $\gamma \in llcs(a\alpha, a\beta)$; γ doit être de la forme $a\gamma'$ sinon ce n'est pas une lcs. De plus on peut supposer que γ' est une sous-séquence de α et de β. Donc $|a\gamma'| = 1 + |\gamma'| \leq 1 + llcs(\alpha, \beta)$.

Montrons que $llcs(a\alpha, b\beta) \leq max(llcs(a\alpha, \beta), llcs(\alpha, b\beta))$. Soit $\gamma \in lcs(a\alpha, b\beta)$. Les cas possibles sont :

— $\gamma = \epsilon$. Immédiat.
— $\gamma = a\gamma'$, γ' sous-séquence de α et $a\gamma'$ sous-séquence de β. Alors : $|\gamma| \leq llcs(a\alpha, \beta)$.
— $\gamma = b\gamma'$, $b\gamma'$ sous-séquence de α et γ' sous-séquence de β. Alors : $|\gamma| \leq llcs(\alpha, b\beta)$.
— $\gamma = c\gamma'$, $c \notin \{a, b\}$, γ sous-séquence de α et de β. Alors : $|\gamma| \leq llcs(\alpha, \beta)$. □

On peut utiliser la fonction *llcs* pour calculer une *lcs*. En effet, on a :

$$\begin{array}{lll} \{\epsilon\} = lcs(\epsilon, \alpha) = lcs(\alpha, \epsilon) & & \\ lcs(a\alpha, a\beta) & = \{a\gamma \mid \gamma \in lcs(\alpha, \beta)\} & \\ lcs(a\alpha, b\beta) & = \left\{ \begin{array}{ll} lcs(a\alpha, \beta) & \text{si } llcs(a\alpha, \beta) > llcs(\alpha, b\beta) \\ lcs(\alpha, b\beta) & \text{si } llcs(a\alpha, \beta) < llcs(\alpha, b\beta) \\ lcs(a\alpha, \beta) \cup lcs(\alpha, b\beta) & \text{autrement} \end{array} \right. \end{array}$$

Si *llcs* a été pré-calculée, le calcul d'une *lcs* est linéaire en $max(|\alpha|, |\beta|)$. Dans le dernier cas (autrement), il suffit de calculer soit un élément de $lcs(a\alpha, \beta)$ soit un élément de $lcs(\alpha, b\beta)$ On se focalise maintenant sur le calcul de la fonction *llcs* et on considère les 3 méthodes évoquées dans la section 23.1. Supposons $|\alpha| = n$ et $|\beta| = m$. La proposition 26 nous dit qu'il faut calculer *llcs* sur $O(nm)$ points.

— Un calcul *descendant récursif* va appeler la fonction *llcs* un nombre exponentiel de fois. Pour vous en convaincre, considérez la récurrence suivante.

$$\begin{array}{ll} C(n,0) & = C(0,n) = 1 \\ C(n+1,m+1) & = C(n,m+1) + C(n+1,m) \geq 2 \cdot C(n,m)\ . \end{array}$$

— Un calcul *descendant récursif va mémoïser* $O(nm)$ valeurs avant de rendre un résultat. Ensuite le calcul d'une *lcs* se fait en $O(max(m,n))$.

— Si $\alpha = \gamma \cdot \gamma'$ on dit que le mot γ' est un *suffixe* du mot α. Dans le *calcul ascendant* on calcule *llcs* sur tous les couples de suffixes de α et de β. Par exemple, si $\alpha = aba$, $\beta = bca$ et $n = m = 3$ on aura 9 couples de suffixes (non-vides) possibles. Si on dénote par (i,j) le couple composé du suffixe qui commence en position i pour α et en position j pour β on a la situation suivante :

$$\begin{array}{lll} (1,3) & (2,3) & (3,3) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) \\ (1,1) & (2,1) & (3,1)\ . \end{array}$$

La calcul commence avec le couple $(3,3)$ et procède de droite à gauche et du haut vers le bas jusqu'à arriver au couple $(1,1)$. Une fois que le calcul du tableau est terminé, le calcul de *lcs* se fait en $O(max(m,n))$.

Remarque 28 *Le calcul ascendant calcule* toutes *les cellules du tableau alors que le calcul descendant avec mémoïsation en calcule un* sous-ensemble. *Le cas le plus favorable pour le calcul descendant est si* $\alpha = \beta$ *et le pire est si* α *et* β *n'ont pas de caractères communs. En général, le calcul descendant avec mémoïsation est excellent pour un* prototypage efficace *alors que le calcul ascendant est utilisé (si besoin) pour une* optimisation *plus poussée.*

23.3 Algorithme CYK

Une *grammaire* est une façon de spécifier un *langage formel*, à savoir un ensemble de mots sur un alphabet. Les grammaires sont classifiées selon la *forme des règles* utilisées. Dans les *grammaires algébriques* (*context-free* en anglais ou *hors-context* en franglais), les règles ont la forme :

$$A \to A_1 \cdots A_n$$

avec l'*interprétation* suivante : toute occurrence du symbole A peut être remplacée par les symboles $A_1, \ldots, A_n$. Des *sous-classes des grammaires algébriques* (par exemple *LR(1)*) sont utilisées pour spécifier la *syntaxe* des langages de programmation et des outils automatiques (par exemple Yacc) construisent un *programme d'analyse syntaxique* (le *parseur* en franglais) à partir de la grammaire.

On va considérer les grammaires en *forme normale de Chomsky* (FNC). Toute grammaire algébrique peut être transformée en une grammaire en FNC équivalente (à quelques détails près).

Définition 24 (forme normale de Chomsky) *Une* grammaire *en forme normale de Chomsky (FNC) est spécifiée par :*

— *Un ensemble fini* $\mathcal{N}$ *de* symboles non-terminaux *avec un* symbole initial $S \in \mathcal{N}$.

— *Un ensemble fini* Σ *de* symboles terminaux.
— *Une ensemble fini de* règles $\mathcal{R}$ *qui ont la forme :*

$$A \to a \quad ou \quad A \to BC$$

avec $A, B, C \in \mathcal{N}$ *et* $a \in \Sigma$.

Exemple 63 *Voici un exemple de grammaire FNC qui décrit les suites de parenthèses 'bien formées'.*

$\mathcal{N}$	$= \{S, L, R, A\}$	*Non-terminaux*
Σ	$= \{(,)\}$	*Terminaux (ou alphabet)*
S	$\to LR$	*Règles*
S	$\to SS$	
S	$\to LA$	
A	$\to SR$	
L	$\to ($	
R	$\to)$	

Par exemple, le mot $()(())$ *est généré de la façon suivante :*

$$\begin{array}{llllll} S & \to SS & \to LRS & \to (RS & \to ()S & \to ()LA \\ & \to ()(A & \to ()(SR & \to ()(LRR & \to ()((RR & \to ()(()R \quad \to ()(()) \ . \end{array}$$

Problème On considère le problème de la *reconnaissance de mots* par une grammaire. A savoir, pour toute grammaire G en FNC on cherche un algorithme qui prend en entrée un mot w sur l'alphabet Σ et décide s'il est possible de générer w à partir du symbole initial S de la grammaire.

Notation Comme dans la section précédente on dénote par $|w|$ la *longueur* du mot w. On dénote aussi par $w[i, j]$ le *sous-mot* de w compris entre les positions i et j ($1 \leq i \leq j \leq |w|$). On écrit $G(A, i, j)$ ssi le symbole A de la grammaire G peut générer $w[i, j]$. Avec cette notation, le *problème à résoudre* est équivalent à savoir si $G(S, 1, |w|)$. La proposition suivante nous donne une stratégie pour calculer $G(A, i, j)$.

Proposition 27 *Pour toute grammaire* G *en FNC et* w *mot.*
— $G(A, i, i)$ *ssi* $A \to w[i, i]$ *est un règle dans* $\mathcal{R}$.
— *Si* $i < j$,

$$G(A, i, j) = \bigvee_{\substack{A \to BC \in \mathcal{R} \\ k = i, \ldots, j-1}} (\ G(B, i, k) \ \wedge \ G(C, k+1, j) \ )$$

On considère maintenant l'application des 3 stratégies évoquées dans la section 23.1.

Calcul descendant (top-down)

On définit une fonction récursive d'après la proposition 27. On commence par appeler $G(S, 1, n)$. Le coût est exponentiel.

Calcul descendant avec mémoïsation

On définit une fonction récursive d'après la proposition 27 qui utilise en plus une *table de hachage* T (par exemple).

— A chaque *appel* de $G(A, i, j)$ on regarde d'abord si le résultat est déjà dans T.

— Sinon, à chaque *retour* de $G(A, i, j)$ on *mémoïse* le résultat dans T.

Le coût est cubique si l'accès à la table est en $O(1)$. On a $O(n^2)$ points à calculer et le travail pour chaque point est $O(n)$. [3]

Calcul ascendant (bottom-up)

En supposant $\mathcal{N} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $S = A_1$ et $|w| = n$, on ordonne le calcul comme suit :

$$\begin{gathered} G(A_1,1,1),\ldots\ldots,G(A_1,n,n),\ldots,G(A_m,1,1),\ldots\ldots G(A_m,n,n) \\ G(A_1,1,2),\ldots,G(A_1,n-1,n),\ldots,G(A_m,1,2),\ldots G(A_m,n-1,n) \\ \cdots,\ldots,\cdots,\ldots,\cdots,\ldots,\cdots \\ G(A_1,1,n) \end{gathered}$$

Le coût est aussi cubique. L'algorithme est connu comme algorithme CYK en référence aux noms des concepteurs (Cocke, Younger et Kasami).

Exercice 28 *Un* graphe dirigé étiqueté avec racine *est un tuple* (N, A, r, L) *où :*

— N *est l'ensemble (fini) des* noeuds*,*

— $r \in N$ *est la* racine*,*

— $A \subseteq N \times N$ *est l'ensemble des* arêtes*,*

— $L : A \to \Sigma$ *étiquette chaque arête avec un symbole d'un* alphabet Σ. [4]

Proposez un algorithme qui pour chaque mot fini $w = a_1 \ldots a_n$ *sur* Σ *détermine s'il y a un chemin dans le graphe qui commence par la racine et passe par des arêtes étiquetées par* $a_1, \ldots, a_n$*.*

Exercice 29 *Soient* A_i *des* matrices *de dimension* $d_{i-1} \times d_i$ *pour* $i = 1, \ldots n$*. On suppose que le* produit *de deux matrices de dimension* $x \times y$ *et* $y \times z$ *prend* $O(xyz)$*. Comment peut-on déterminer la* façon optimale d'associer *les matrices pour calculer* $A_1 \cdots A_n$ *? Par exemple, si* $n = 3$ *le nombre de multiplications est :*

$$\begin{array}{ll} \textit{Association à gauche :} & d_0d_1d_2 + d_0d_2d_3 \\ \textit{Association à droite :} & d_0d_1d_3 + d_1d_2d_3 \end{array}$$

Pour $d_0 = 10$*,* $d_1 = 1$*,* $d_2 = 10$*,* $d_3 = 1$*, associer à gauche coûte* 10 fois plus cher *que associer à droite.*

Exercice 30 *On dispose de* n *objets dont le poids est* $p_1, \ldots, p_n$ *et la valeur est* $v_1, \ldots, v_n$*. La charge maximale du sac à dos est* M*. Le problème est de déterminer quels objets emporter en respectant la limite de poids et en maximisant la valeur. On peut formuler les problème comme suit :*

$$max\ \Sigma_{i=1,\ldots,n} x_i v_i \qquad \Sigma_{i=1,\ldots,n} x_i p_i \leq M \qquad x_i \in \{0,1\}$$

3. Pour l'analyse syntaxique des langages de programmation, on utilise des grammaires algébriques particulières (*LR(1)*) qui admettent un algorithme de reconnaissance en $O(n)$.

4. Il s'agit d'un cas particulier d'*automate fini non-déterministe* (AFN) dans lequel chaque état est accepteur.

Soit $opt(i, m)$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ la valeur maximale qu'on peut emporter en ne dépassant pas le poids m et en supposant qu'on peut choisir parmi les premiers i objets. Exprimez $opt(i, m)$ par une récurrence et dérivez un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème.

23.4 Problèmes

23.4.1 Plus longue sous-séquence croissante

Soit $x_0, \ldots, x_{n-1}$ une séquence de n entiers. Les *sous-séquences croissantes* ont la forme $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ où :

$$0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq (n-1) \text{ et } \; x_{i_1} \leq \cdots \leq x_{i_k} \; .$$

On cherche à programmer un algorithme qui prend en entrée une séquence représentée par un tableau d'entiers et qui imprime à l'écran une plus longue sous-séquence croissante.

1. Soit $ls(i)$ pour $i = 0, \ldots, n-1$ la longueur de la plus longue sous-séquence croissante qui termine avec x_i. Clairement $ls(0) = 1$. Montrez qu'on peut calculer $ls(i+1)$ en fonction de $ls(0), \ldots, ls(i)$ et estimez en fonction de n la complexité asymptotique du temps de calcul nécessaire au calcul de $ls(i)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Programmez une fonction lsf d'en tête : void lsf(int n, int x[n], int ls[n]), qui prend en entrée une séquence de longueur n représentée par le tableau x et écrit dans le tableau ls les valeurs $ls(0), \ldots, ls(n-1)$.
3. Programmez une fonction plsc d'en tête : void plsc(int n, int x[n]), qui prend en entrée une séquence de longueur n représentée par le tableau x et imprime sur la sortie standard (écran) une plus longue sous-séquence.

23.4.2 Distance d'édition

Soit Σ un ensemble fini avec éléments $a, b, \ldots$ qu'on appelle *caractères*. Un mot α est une suite finie de caractères On dénote par ϵ la suite vide et par $|\alpha|$ le nombre de caractères qui composent la suite α. Par convention, le premier caractère de la suite est en position 1, le deuxième en position 2, ... On considère les *opérations* suivantes sur un mot α :

rem(i) si $1 \leq i \leq |\alpha|$, on efface le i-ème caractère avec un coût 2.

ins(i,a) si $1 \leq i \leq |\alpha| + 1$ on déplace les caractères des positions $i, \ldots, |\alpha|$ aux positions $i+1, \ldots, |\alpha|+1$ et on insère le caractère a à la position i avec un coût 2.

rpl(i,a) Si $1 \leq i \leq |\alpha|$ on remplace le caractère en position i par le caractère a avec un coût 3.

Si o est une opération on dénote par $p(o)$ la position sur laquelle l'opération opère et par $C(o)$ son coût. Par exemple, $p(\text{rpl}(5, a)) = 5$ et $C(\text{rpl}(5, a)) = 3$. Notez que si la position n'est pas dans les bornes indiquées l'opération n'a pas d'effet sur le mot et son coût est 0. Soient α et β deux mots. On définit :

$d(\alpha, \beta)$ comme le coût minimal d'une suite d'opérations qui permet de transformer le mot α en le mot β.

1. Montrer que d est bien une *distance*. En particulier, pour tout α, β, γ mots : (i) $d(\alpha, \beta)$ est un nombre naturel, (ii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$, (iii) $d(\alpha, \beta) = 0$ ssi $\alpha = \beta$ et (iv) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$.
2. Soit $\sigma = o_1, \ldots, o_n$ une suite d'opérations et soit $\sigma_i = o_1, \ldots, o_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Soit α_i le mot obtenu en appliquant la séquence σ_i au mot α. On définit $C(\sigma_i) = \Sigma_{j=1,\ldots,i} C(o_j)$. Montrez que si $C(\sigma_{i+1}) = d(\alpha, \alpha_{i+1})$ alors $C(\sigma_i) = d(\alpha, \alpha_i)$.

3. On dit qu'une suite d'opérations $o_1, \ldots, o_m$ est *standard* si $p(o_1) \leq \cdots \leq p(o_m)$. Montrez que pour tout mot α et pour toute suite d'opérations $o_1, \ldots, o_m$ qui aboutit au mot β avec un coût c on peut trouver une suite d'opérations standard $o'_1, \ldots, o'_n$ qui aboutit aussi au mot β avec $n \leq m$ et avec un coût $c' \leq c$ (il suffit donc d'éditer de gauche à droite).
4. On suppose les propriétés suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{aligned} d(\epsilon, \alpha) &= 2|\alpha| \\ d(\alpha a, \beta a) &= d(\alpha, \beta) \\ d(\alpha a, \beta b) &= \min\{2 + d(\alpha, \beta b), 2 + d(\alpha a, \beta), 3 + d(\alpha, \beta)\} \end{aligned}$$

   On suppose aussi avoir mémorisé les mots α et β dans deux tableaux de `char`, `a` et `b` de taille `m` et `n` respectivement. Écrire une fonction `C distance` qui calcule $d(\alpha, \beta)$. Votre programme doit être assez efficace pour traiter des mots avec au moins 10^3 caractères.

Chapitre 24

Graphes

Les graphes sont des structures omniprésentes en informatique dont les listes et les arbres sont des cas particuliers. Dans ce chapitre, on introduit les méthodes principales pour représenter les graphes finis et pour les visiter.

24.1 Représentation

Définition 25 (graphe dirigé) *Un* graphe dirigé *est un couple* $G = (N, A)$ *où* N *est l'ensemble des* noeuds *et* $A \subseteq N \times N$ *est l'ensemble des* arêtes.

Convention On s'intéresse aux graphes finis et on fixe $n = \sharp N$ pour la cardinalité des noeuds et $m = \sharp A$ pour la cardinalité des arêtes. Dans un graphe dirigé, on a :

$$0 \leq m \leq n^2 \ .$$

Si m est linéaire en n on dira que le graphe est *creux* (*sparse* en anglais) et si m s'approche de n^2 on dira qu'il est *dense*.

Variantes On trouve dans la littérature une grande variété de définitions dont voici certaines.

- Graphes non-dirigés : dans ce cas les arêtes ne sont pas dirigées. On a donc : $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
- Graphes étiquetés : les noeuds ou les arêtes ont des valeurs associés (voir, par exemple, les tas du chapitre 15 et les ABR du chapitre 19).
- Multi-graphes : plusieurs arêtes entre deux noeuds permises.
- Hyper-graphes : une arête peut connecter plus que 2 noeuds.

Terminologie Voici des terminologies souvent utilisées.

- Deux noeuds sont *adjacents* s'il y a une arête qui les connecte.
- Le *degré* d'un noeud est le nombre de noeuds qui lui sont adjacents. Pour un graphe dirigé on distingue le *degré entrant* et le *degré sortant*.
- Un *chemin* dans un graphe est une suite de noeuds $i_1, \ldots, i_k$ tel que $(i_j, i_{j+1}) \in A$ pour $j = 1, \ldots, k-1$. On dit que $k-1$ est la *longueur* du chemin.
- Un chemin est *simple* s'il n'y a pas de répétition de noeuds. Donc dans un chemin simple on a au plus n noeuds.

— Un *circuit* est un chemin de longueur positive dont le premier et dernier noeud sont identiques (pour un graphe non-dirigé il faut préciser qu'on ne peut pas utiliser la même arête 2 fois).
— Un graphe *acyclique* est un graphe sans circuits.
— S'il y à un chemin de i à j on dit que i est *connecté* à j. Dans le cas des graphes dirigés, on dit que deux noeuds sont *fortement connectés* si i est connecté à j et j à i.
— La relation de connexité forte est une relation d'équivalence et on appelle *composantes fortement connexes* ses classes d'équivalence.

Les arbres sont un cas particulier de graphes. On se place dans le cadre des graphes *non-dirigés*.

Proposition 28 *Soit $G = (N, A)$ un graphe non-dirigé avec n noeuds. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est connecté et acyclique,*
2. *G est connecté et a $n - 1$ arêtes,*
3. *G a $n - 1$ arêtes et est acyclique,*
4. *il existe un chemin unique qui connecte chaque couple de noeuds.*

PREUVE. La proposition est triviale si $n = 1$. Ce cas représente la base des préuves par récurrence qui sont esquissées dans la suite. Si $n \geq 2$ alors on remarque que tout graphe connecté et acyclique doit contenir au moins deux noeuds de degré 1. On appelle ces noeuds feuilles. Pour trouver deux feuilles, il suffit de prendre un chemin maximal dans G et de considérer les extrémités du chemin.

On prouve que 1. implique 2. et 3. par récurrence sur n. Pour le pas de récurrence, soit i une feuille de G et soit G' le graphe obtenu de G en supprimant la feuille i. G' est toujours connecté et acyclique et par hypothèse de récurrence a $n - 2$ arêtes. Donc G a $n - 1$ arêtes.

On prouve que 2. implique 4. Si on a deux chemins qui connectent deux noeuds on a une boucle et si on a une boucle alors $n - 1$ arêtes ne suffisent pas pour connecter n noeuds.

On prouve que 3. implique 4. Pour le pas de récurrence, on remarque que G doit avoir au moins un noeud i qui est une feuille. Soit G' le graphe obtenu de G en supprimant la feuille i. G' a $n-1$ noeuds, $n-2$ arêtes et il est acyclique. Donc par hypothèse de récurrence G' est connecté et par définition G est connecté aussi.

On prouve que 4. implique 1. G est connecté car on suppose l'existence d'un chemin entre chaque couple de noeuds. Par ailleurs, G doit être acyclique autrement on a deux chemins entre deux noeuds du graphe. □

On peut prendre une de ces conditions comme définition d'*arbre*. On remarquera que ces arbres diffèrent des arbres utilisés dans les chapitres 15 et 19. En effet, dans les arbres dont il est question ici, il n'y a pas de racine, les arêtes sont non-dirigées et non-ordonnées (on ne distingue pas entre arête gauche et arête droite) et le nombre de noeuds adjacents n'est pas borné.

Soit $G = (N, A)$ un graphe dirigé avec $N = \{1, \ldots, n\}$. Les deux représentations principales qu'on va considérer sont les *matrices d'adjacence* et les *listes d'adjacence*.

Matrice d'adjacence Une matrice M $n \times n$ de booléens telle que :

$$M[i, j] = 1 \text{ ssi } (i, j) \in A \ .$$

Liste d'adjacence Un tableau T de taille n tel que l'entrée $T[i]$ pointe à une liste qui contient exactement les noeuds j tels que $(i, j) \in A$.

On utilisera surtout les listes d'adjacence dont la *taille* est $O(n + m)$ par opposition au $O(n^2)$ d'une matrice d'adjacence ce qui est avantageux dans les graphes creux.

Remarque 29 *Si le graphe est non-dirigé alors la matrice d'adjacence est symétrique et en pratique il suffit de manipuler le triangle supérieur (ou inférieur) de la matrice. La représentation d'un graphe non-dirigé avec une liste d'adjacence peut poser des problèmes d'efficacité dans certains cas. Par exemple, supposons que la liste $T[i]$ contient le noeud j et qu'on souhaite éliminer l'arête $\{i, j\}$ du graphe. Dans ce cas, on doit aussi éliminer i de la liste $T[j]$ et pour réaliser cette opération en temps constant l'introduction de pointeurs additionnels peut être nécessaire. Par exemple, on peut faire en sorte que chaque élément j dans la liste d'adjacence du noeud i pointe vers l'élément i dans la liste d'adjacence du noeud j.*

Exercice 31 *Soit $G = (N, A)$ un graphe non-dirigé avec n noeuds et m arêtes. Si $i \in N$ est un noeud on dénote avec $deg(i)$ son degré, à savoir le nombre de noeuds adjacents. Prouvez que $\Sigma_{i \in N} deg(i) = 2m$.*

Les deux exercices qui suivent utilisent la représentation par matrice d'adjacence.

Exercice 32 *Un* puit *(*sink *en anglais) dans un graphe dirigé est un noeud avec degré entrant $n-1$ et degré sortant 0. On suppose que le graphe est représenté par une matrice d'adjacence M et que le temps d'accès à un élément de la matrice est $O(1)$. Soient $i, j \in N$ avec $i \neq j$. On remarque la propriété suivante : si i est un puit alors $M[j, i] = 1$ et $M[i, j] = 0$. Proposez un algorithme en $O(n)$ (on ne peut pas regarder toutes les arêtes !) qui décide s'il y a un noeud puit dans le graphe et dans ce cas donne sa position.*

Exercice 33 *Soit M la* matrice d'adjacence *d'un graphe. Soit :*

$$M^0 = I \ , \quad M^{k+1} = M^k M \ .$$

1. *Montrez que $M^k[i, j]$ est égal au* nombre de chemins *entre i et j de longueur k.*
2. *Quid si on travaille avec des matrices dans $\{0, 1\}$ avec comme addition et multiplication la disjonction et la conjonction logique, respectivement ?*

24.2 Visite d'un graphe

On introduit un algorithme pour visiter un graphe à partir d'un noeud désigné comme racine. On fait l'hypothèse que pour chaque noeud i on dispose d'un bit de marquage mark[i] qui est initialement à 0.

Entrée Un graphe et un noeud racine $r \in N$.

Algorithme

```
W={r}
while not(empty(W))
    i=remove(W)
    if not(mark[i])
        mark[i]=true
        for j in adj_list(i)
            if not(mark[j])
                insert(j,W)
```

Analysons cet algorithme. Pour l'instant on suppose que W est un *multi-ensemble* et que remove enlève un élément du multi-ensemble. En spécialisant la structure W, on pourra mettre en oeuvre différentes stratégies de visite (en largeur, en profondeur,...).

— Chaque fois qu'on insère un élément dans W on a une arête (i, j) tel que le noeud i vient d'être marqué et le noeud j n'est pas marqué.

Le nombre d'insertions est borné par m (nombre d'arêtes) !

— Chaque noeud inséré dans W est accessible depuis la racine. Donc chaque noeud marqué est accessible depuis la racine.

— Chaque noeud accessible depuis la racine est marqué. En effet soit $(r, i_1), \ldots, (i_k, j)$ un chemin de longueur minimal vers un noeud qui n'est pas marqué par l'algorithme. Mais alors i_k est accessible avec un chemin plus court et il est marqué. Donc j sera inséré dans W et il sera marqué car l'algorithme termine avec W vide. Contradiction.

Stratégies de visite Les *stratégies de visite* dépendent de la mise-en-oeuvre de remove et insert. Les 2 stratégies principales sont :

En largeur (*breadth-first*)	W est une *queue* (*first-in first out*)
En profondeur (*depth-first*)	W est une *pile* (*last-in first-out*)

Chaque stratégie a des applications intéressantes (voir suite). On rappelle que si W est une *queue* ou une *pile* les opérations remove et insert coûtent $O(1)$.

24.3 Visite en largeur et distance

On peut utiliser la recherche en largeur pour calculer la longueur du chemin le plus court entre le noeud racine et les autres noeuds (qu'on abrège en *distance*). Pour ce faire, on *initialise un tableau* d comme suit :

$$d(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = r \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases}$$

L'algorithme de recherche est *modifié* comme suit où W est une *queue* :

```
W={r}
while not(empty(W))
    i=remove(W)
    for j in adj_list(i)
         if d[j]==max_int
             d[j]=d[i]+1
             insert(j,W)
```

Propriété L'algorithme est $O(n+m)$ car on examine chaque arête au plus une fois et à la fin de l'algorithme $d[i]$ est la *distance* de r à i ($+\infty$ si i n'est pas accessible depuis r). Le fait qu'on utilise une *queue* assure qu'un noeud 'proche' de r est toujours traité avant un noeud 'éloigné' de r.

24.4 Visite en profondeur et tri topologique

Dans ce cas W est une *pile*. Alternativement, on peut obtenir le même effet en utilisant la *pile implicite* qui gère les appels récursifs et on obtient l'algorithme suivant.

```
dfs(i)
    if not(mark[i])
        mark[i]=1
        for j in adj_list(i)
            if not(mark[j])
                dfs(j)
```

Remarque 30 *Il est possible d'effectuer une visite en profondeur* sans pile et sans récursion. *Il suffit de réserver dans chaque noeud un nombre de bits* logarithmique dans le degré du noeud. *Ensuite on utilise une technique d'*inversion de pointeurs *:*

— *si on descend en profondeur, on inverse le pointeur pour se souvenir d'où on vient.*

— *si on remonte, on remet le pointeur à sa place.*

Ce type d'algorithme (connu comme algorithme de Schorr-Waite*) est utilisé lorsque la mémoire est précieuse. E.g., dans un ramasse miettes (*garbage collector*, en anglais).*

On considère maintenant une application de la visite en profondeur au problème dit du *tri topologique*.

Définition 26 (tri topologique) *Un* tri topologique *d'un graphe* dirigé $G=(N,A)$ *avec* n *noeuds est une fonction* $\ell : N \to \{1,\dots,n\}$ *telle que :*

$$(i,j) \in A \text{ implique } \ell(i) < \ell(j) \ .$$

Un tri topologique est une façon de *linéariser* l'ordre partiel induit par les arêtes. La linéarisation :

— est *unique* ssi le graphe est une *liste*,

— *existe* ssi le graphe est *acyclique*.

Pour calculer un tri topologique d'un graphe acyclique il suffit d'enrichir la version récursive de la fonction dfs comme suit.

— On ajoute un *tableau* ℓ et un *compteur* count qui est initialisé à n.

— La fonction dfs est modifiée pour qu'avant le retour d'un appel dfs(i) on enregistre dans ℓ[i] la position du noeud i dans le tri en on décrémente count (si au lieu de la récursion on utilise une pile, la même idée s'applique).

```
dfs(i)
    if not(mark[i])
        mark[i]=1
        for j in adj_list(i)
            if not(mark[j])
```

```
6                   dfs(j)
7           l[i]=count
8           count=count-1
```

— Comme le graphe peut être *disconnecté*, pour avoir un tri complet il faut dans le pire des cas appeler dfs sur tous les noeuds.

```
1 dfs_loop()
2     i=1
3     while (count>0 and i<=n)
4         dfs(i)
5         i=i+1
```

— Si l'on ne sait pas à l'avance si le graphe est acyclique on peut quand même calculer le tableau ℓ et ensuite *vérifier la condition* :

$$(i,j) \in A \text{ implique } \ell[i] < \ell[j]$$

Elle sera satisfaite ssi le graphe est acyclique. On a donc un algorithme efficace pour savoir si un graphe est acyclique.

Les exercices suivants explorent des notions classiques de théorie des graphes.

Exercice 34 *Soit $G = (N, E)$ un* graphe non-dirigé. *G est* k-coloriable *s'il y a une fonction $c : N \to \{1, \ldots, k\}$ telle que si les noeuds i et j sont adjacents alors $c(i) \neq c(j)$. Il est* facile *de décider si un graphe est* 1*-coloriable et* difficile *(*NP*-complet) de décider s'il est k-coloriable pour $k \geq 3$. Programmez une fonction (efficace !) qui décide si un graphe est* 2-coloriable.

Exercice 35 *Un* circuit simple *dans un graphe non-dirigé est un chemin qui revient au point de départ sans jamais passer deux fois par la même arête. Un* circuit Eulerien *est un circuit simple qui passe par chaque arête du graphe.*

— *Montrez qu'un graphe* non-dirigé connecté *a un* circuit Eulerien *ssi chaque noeud a* degré pair.

— *Programmez un* algorithme *qui construit un circuit Eulerien pour un graphe connecté G avec noeuds de degré pair comme suit.*

1. *Il construit au hasard un* circuit simple γ.
2. *Tant que* γ n'est pas un circuit Eulerien *:*
   (a) *Il cherche un* noeud i *dans* γ *avec une arête* $\{i, j\}$ *pas encore dans* γ.
   (b) *Il construit un* circuit *simple* γ' *à partir de* $\{i, j\}$ *avec les arêtes qui ne sont pas dans* γ.
   (c) *Il combine* γ *et* γ' *pour obtenir un* nouveau circuit simple γ.

24.5 Problèmes

24.5.1 Clôture transitive

Soit $G = (N, A)$ un graphe dirigé avec $N = \{1, \ldots, n\}$ et $A \subseteq N \times N$. On suppose que l'ensemble des arêtes est représenté par une matrice d'adjacence, qu'on dénote aussi par A, de dimension $n \times n$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$. Le problème qu'on considère dans la suite est le calcul de la matrice A^+ qui représente la *clôture transitive* de A. On utilisera aussi A^* pour (la matrice qui représente) la *clôture réflexive et transitive*.

On dénote par $A[i, j]$ l'élément de la matrice A à la ligne i et à la colonne j. Par ailleurs, on étend les opérations de disjonction logique '$+$' et conjonction logique '$\cdot$' aux matrices comme suit :

$$\begin{array}{ll}(B + C)[i, j] & = B[i, j] + C[i, j] \\ (B \cdot C)[i, j] & = \Sigma_{k=1,\ldots,n} B[i, k] \cdot C[k, j]\end{array}$$

1. On définit la séquence :
$$A_1 = A \qquad A_{k+1} = A_k \cdot A$$
Montrez que $A_k[i, j] = 1$ si et seulement si il y a un chemin de i à j dont la longueur est exactement k.
2. Dérivez un algorithme en $O(n^d)$ pour calculer A^+ et donnez votre estimation de d.
3. On définit maintenant une nouvelle séquence où I est la matrice identité :
$$A_0 = A + I \qquad A_{k+1} = A_k \cdot A_k$$
Montrez que $A_k[i, j] = 1$ si et seulement si il y a un chemin de i à j dont la longueur est au plus 2^k.
4. Dérivez un algorithme en $O(n^d \mathsf{log}(n))$ pour calculer A^* et donnez votre estimation de d.
5. Proposez un algorithme en $O(n^d)$ pour calculer A^+ à partir de A et A^* et donnez votre estimation de d.
6. On écrit $G(i, j, 0)$ si $(i, j) \in A$. Pour $k \in N$, on écrit $G(i, j, k)$ si (i) $(i, j) \in A$ ou (ii) $(i, i_1), \ldots, (i_\ell, j) \in A$ avec $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ (en d'autres termes, il y a un chemin de i à j qui passe par $\{1, \ldots, k\}$).
Montrez la *propriété suivante* :
$$G(i, j, k + 1) \quad \text{ssi} \quad G(i, j, k) \text{ ou } (G(i, k + 1, k) \text{ et } G(k + 1, j, k))$$
7. Dérivez un algorithme $O(n^d)$ pour calculer A^+ et donnez votre estimation de d.
8. Montrez que :
$$G(i, k, k) = G(i, k, k - 1) \qquad \text{et} \qquad G(k, j, k) = G(k, j, k - 1)$$
9. Dérivez un algorithme avec la même complexité que le précèdent mais qui utilise une seule matrice $n \times n$ (il effectue tous les calculs sur place).
10. Écrire la fonction C qui correspond à l'algorithme optimisé de la question précédente.

24.5.2 Diagrammes de décision binaire

Soit $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs binaires et $V = \{x_m, \ldots, x_1\}$, $m \geq 0$, un ensemble fini de variables avec un ordre total $x_m < x_{m-1} < \ldots < x_1$. Par convention, on suppose aussi que $x_1 < 0$ et $x_1 < 1$. Un *diagramme de décision binaire* (qu'on abrège en *BDD*) par rapport à cet ordre est un *graphe dirigé* avec un ensemble fini de noeuds N, un ensemble d'arêtes $A \subseteq N \times N$ et qui satisfait les propriétés suivantes :

- Un noeud $n \in N$ est désigné comme noeud *racine* et tout noeud est accessible depuis la racine.
- Chaque noeud n a une *étiquette* $v(n) \in V \cup \{0, 1\}$.
- Si $v(n) \in V$ alors le noeud n a deux arêtes sortantes vers les noeuds qu'on désigne par $b(n)$ et $h(n)$.
- Si $v(n) \in \{0, 1\}$ alors le noeud n n'a pas d'arête sortante.
- Il y a au plus un noeud étiqueté par 0 et au plus un noeud étiqueté par 1.
- Pour tout noeud n, si $v(n) \in V$ alors $v(n) < v(b(n))$ et $v(n) < v(h(n))$ (on traverse les noeuds par ordre croissant des étiquettes). Notez que cette condition force l'*acyclicité* du graphe.

On associe à un BDD β une fonction unique $f_\beta : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$ qui prend en argument un vecteur de m valeurs binaires et retourne une valeur binaire. Pour calculer la sortie de $f_\beta(c_m, \ldots, c_1)$, $c_i \in \mathbf{2}$ pour $i = 1, \ldots, m$, on se place au noeud racine de β et on progresse dans le BDD jusqu'à arriver à un noeud étiqueté par 0 ou 1. La valeur de l'étiquette est alors la sortie de la fonction. La règle de progression est que si on se trouve dans le noeud n et $v(n) = x_i$ alors on se déplace vers $b(n)$ si $c_i = 0$ (b pour bas) et vers $h(n)$ (h pour haut) si $c_i = 1$. Par construction, le chemin existe et est unique.

1. Dessinez un BDD avec 9 noeuds qui définit la fonction $f : \mathbf{2}^3 \to \mathbf{2}$ suivante :

$c_3c_2c_1$	000	001	010	011	100	101	110	111
$f(c_3, c_2, c_1)$	0	0	0	1	0	1	0	1

   Vous allez suivre les conventions suivantes : la racine est en haut et les arêtes d'un noeud n à un noeud $b(n)$ ($h(n)$) sont des lignes pointillées (continues). Notez qu'en allant de la racine vers les feuilles on rencontre des étiquettes croissantes d'après l'ordre défini ci dessus.

2. On va représenter un noeud d'un BDD par des valeurs de type :

   ```
   struct node {int label; struct node * b; struct node * h;};
   ```

   une variable x_i, $i = m, \ldots, 1$ est représentée par l'entier négatif $-i$ et une valeur binaire 0 ou 1 par les entiers 0 et 1 respectivement (avec ces conventions, l'ordre sur les entiers coïncide avec l'ordre défini sur les étiquettes). Un BDD sera représenté par un pointeur à la racine du graphe. Programmez une fonction alloc_node d'en-tête struct node * alloc_node(int x) qui alloue un struct node avec malloc, initialise le champ label à x et les champs b et h à NULL et retourne un pointeur au noeud.

3. A partir de maintenant, vous ferez l'hypothèse que l'expression rand()%n donne un entier dans $\{0, \ldots, n-1\}$ avec probabilité uniforme et dans un temps constant $O(1)$. Comment peut-on choisir une fonction $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$, $m \geq 0$ avec probabilité uniforme ? Programmez une fonction d'en-tête

struct node * gen_bdd(int m) qui prend en argument un entier non-négatif m et retourne un pointeur à un BDD qui représente une fonction $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$ choisie avec probabilité uniforme.

4. Une fonction $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$, $m \geq 0$ est *symétrique* si elle est invariante par permutation de ses arguments, c'est à dire pour toute permutation $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ et pour tout $c_m, \ldots, c_1 \in \mathbf{2}$ on a $f(c_m, \ldots, c_1) = f(c_{\sigma(m)}, \ldots, c_{\sigma(1)})$. Montrez qu'une fonction $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$ est symétrique si et seulement si il y a une fonction $g : \{0, \ldots, m\} \to \mathbf{2}$ telle que $f(c_m, \ldots, c_1) = g(\Sigma_{i=m,\ldots,1} c_i)$.
5. Programmez une fonction d'en-tête struct node * gen_sbdd(int m) qui prend en argument un entier non-négatif $m \geq 0$ et retourne un pointeur à un BDD qui représente une fonction *symétrique* $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$ choisie avec probabilité uniforme.
6. Soit β un BDD. La *simplification (S1)* consiste à trouver un noeud n dans β tel que $v(n) \in V$ et $b(n) = h(n) = n'$ et à : (i) rédiriger vers n' toutes les arêtes vers n, et (ii) éliminer le noeud n. Le nouveau BDD obtenu définit toujours la même fonction. Programmez une fonction d'en-tête : struct node * simplify1(struct node * bdd) qui prend en argument le pointeur vers un BDD β et retourne un pointeur vers un BDD qui définit la même fonction et dans lequel la simplification (S1) ne s'applique pas. Avant de programmer la fonction, vous expliquerez son fonctionnement sur l'exemple de la question 1 et vous analyserez sa complexité asymptotique en temps.
7. Soit β un BDD. La *simplification (S2)* consiste à trouver deux noeuds différents n, n' dans β tels que $v(n) = v(n') \in V$, $b(n) = b(n')$ et $h(n) = h(n')$ et à : (i) rédiriger vers n toutes les arêtes vers n' et (ii) éliminer le noeud n'. Un *BDD réduit* est un BDD où les simplifications (S1) et (S2) sont impossibles. Donnez une borne supérieure au nombre de noeuds d'un BDD réduit qui représente une fonction symétrique $f : \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}$.
8. Programmez une fonction d'en-tête struct node * simplify(struct node * bdd) qui prend en argument un pointeur vers un BDD β et retourne un pointeur vers un BDD *réduit* qui définit la même fonction. Avant de programmer la fonction, vous expliquerez son fonctionnement sur l'exemple de la question 1 et vous analyserez sa complexité asymptotique en temps. Pour répondre à cette question il peut être utile de disposer d'une table de hachage et sachiez qu'il est possible de résoudre le problème en traversant le BDD une seule fois.

Chapitre 25

Graphes pondérés

Soit $G = (N, A)$ un graphe *non-dirigé* $G = (N, A)$ *connecté* et où les arêtes ont un *poids non-négatif* :

$$w : A \to \mathbf{R}^+ \ .$$

Définition 27 (ARM) *Un arbre de recouvrement minimum (ARM) pour un graphe G est un arbre qui est un sous-graphe de G qui contient tous les noeuds de G et dont la somme des poids des arêtes est minimum.*

Définition 28 (PCC) *Un arbre des plus courts chemins dans un graphe G depuis un noeud désigné comme source (PCC) est un arbre qui est un sous-graphe de G qui contient tous les noeuds de G et dont les chemins du noeud source aux autres noeuds sont les plus courts.*

Il n'y a pas de perte de généralité à supposer que la solution aux problèmes ARM et PCC sont des arbres. En effet si on a un graphe qui est une solution optimale on peut toujours élaguer certaines arêtes jusqu'à obtenir un arbre.

Notez aussi que l'ARM et le PCC peuvent différer. Par exemple, considérez le graphe :

$$n_1 \overset{2}{-} n_2 \overset{2}{-} n_3 \quad n_1 \overset{3}{-} n_3 \ .$$

Alors, l'ARM est $\{\{n_1, n_2\}, \{n_2, n_3\}\}$ mais le PCC depuis n_1 est $\{\{n_1, n_2\}, \{n_1, n_3\}\}$.

Dans ce chapitre, on va introduire des algorithmes efficaces (quasi-linéaires) pour résoudre ces problèmes qui utilisent une *stratégie gloutonne* (chapitre 22) et la structure de données *tas* (chapitre 15).

25.1 Algorithme de Prim pour le recouvrement minimum

On présente l'algorithme de Prim [Pri57] pour calculer l'ARM d'un graphe.

Initialisation On partitionne N en N_1, N_2 avec $\sharp N_1 = 1$. L'arbre T est vide.

On itère $n-1$ fois

— Parmi les arêtes $\{i, j\}$ avec $i \in N_1$ et $j \in N_2$, soit $\{i_0, j_0\}$ une qui *minimise* :

$$w(\{i, j\}) \ .$$

— On pose :

$$N_1 = N_1 \cup \{j_0\},\ N_2 = N_2 \backslash \{j_0\},\ T = T \cup \{\{i_0, j_0\}\} \ .$$

Argument Voici l'argument pour prouver que la stratégie gloutonne calcule bien l'ARM.

— D'abord on remarque que si on a un *arbre* et on ajoute une arête on a un *circuit* et si on enlève une arête quelconque du circuit on a à nouveau un *arbre*.
— L'algorithme de Prim construit un *arbre* en ajoutant $n-1$ arêtes, disons $a_1, \ldots, a_{n-1}$.
— Soit a_i la *première arête* qui est incompatible avec un ARM. Disons que a_i connecte les noeuds $j \in N_1$ et $k \in N_2$.
— Soit T un ARM qui contient les arêtes $a_1, \ldots, a_{i-1}$.
— On obtient une *contradiction* en montrant que T peut être transformé en un ARM qui contient les arêtes $a_1, \ldots, a_i$.
— Ajoutons l'arête a_i à T. On a donc un *circuit*.
— Dans le circuit il doit y avoir au moins *une autre arête* a qui connecte un noeud dans N_1 avec un noeud dans N_2.
— Par définition de l'algorithme de Prim, le *poids* de a_i est inférieur ou égal au poids de a.
— Donc si on enlève l'arête a on obtient à nouveau un arbre et même un *ARM*. L'arête a_i n'est donc pas la première qui pose problème. Contradiction.

25.2 Algorithme de Dijkstra pour les plus courts chemins

On présente l'algorithme de Dijkstra [Dij59] pour calculer le PCC depuis un noeud racine.

Initialisation On partitionne N en N_1, N_2 avec $\sharp N_1 = 1$. L'arbre T est vide. On suppose que N_1 contient le *noeud source* s. La fonction L associe le *poids du chemin* de la source à un noeud dans N_1. Au début on a $L(s) = 0$.

On itère $n-1$ fois

— Parmi les arêtes $\{i, j\}$ avec $i \in N_1$ et $j \in N_2$, soit $\{i_0, j_0\}$ une qui *minimise* :

$$L(i) + w(\{i, j\}) \ .$$

— On pose :

$$\begin{array}{ll} N_1 = N_1 \cup \{j_0\}, & N_2 = N_2 \backslash \{j_0\}, \\ T = T \cup \{\{i_0, j_0\}\}, & L(j_0) = L(i_0) + w(\{i_0, j_0\}) \ . \end{array}$$

Argument Voici l'argument pour prouver que la stratégie gloutonne calcule bien l'arbre PCC.

— Chaque fois qu'on calcule $L(j_0) = L(i_0) + w(\{i_0, j_0\})$, $L(j_0)$ est bien le *poids du plus court chemin* de la racine à j_0.
— En effet un plus court chemin γ de la racine à j_0 doit comprendre une arête qui connecte un noeud $k \in N_1$ avec un noeud $k' \in N_2$.
— On a :

$$\begin{array}{lll} w(\gamma) & \geq L(k) + w(\{k, k'\}) & \text{(par hyp. de récurrence)} \\ & \geq L(i_0) + w(\{i_0, j_0\}) & \text{(par construction)} \end{array}$$

Remarque 31 *La* visite en largeur *étudiée dans la section 24.2 nous donne déjà les plus courts chemins quand le poids de chaque arête est* 1. *On pourrait imaginer la transformation*

suivante d'un graphe pondéré avec des nombres naturels en un graphe ordinaire : on transforme une arête de poids n en n arêtes de poids 1 *en introduisant des noeuds intermédiaires. Le problème avec cette transformation est qu'elle est* exponentielle *dans le nombre de bits nécessaires à représenter les poids.*

Remarque 32 *L'algorithme de Prim pour le calcul de l'ARM s'applique aussi en présence de poids* négatifs*. Par contre, la stratégie gloutonne pour le calcul des PCC est* myope*. Exemple :*

$$n_1 \overset{5}{-} n_2 \overset{-3}{-} n_3 \qquad n_1 \overset{3}{-} n_3 \ .$$

25.3 Une autre application de la structure tas (cas de Dijkstra)

On va analyser la complexité de l'algorithme de Dijkstra dans le cas où on utilise la structure tas (chapitre 15).

- On maintient un *tas*. Chaque élément du tas est composé de : (i) un *noeud*, (ii) une estimation de sa *distance* de la racine, (iii) une estimation du noeud prédécesseur.
- Notez qu'à partir d'une table de prédécesseurs il est facile de construire les listes d'adjacence qui représentent l'arbre des PCC.
- Les éléments du tas sont ordonnés par ordre croissant par rapport à la distance (on a donc un *min-tas*).
- On maintient aussi un *tableau* T avec autant d'éléments que de noeuds. Chaque élément contient un pointeur à la position du noeud dans le tas (donc *chaque modification* de la position d'un élément dans le tas doit être enregistrée dans le tableau).

Remarque 33 *Le tas contient des* noeuds *pas des* arêtes *!*

Complexité de l'algorithme de Dijkstra Avec ces *structures de données* on peut en $O(\log n)$:

- Extraire le *min du tas*.
- *Mettre à jour* (diminuer) l'estimation de la distance d'un élément du tas et de son prédécesseur. Ceci est possible car le tableau T nous donne un *accès direct* à la position de l'élément dans le tas et ensuite il suffit de permuter avec le père autant que nécessaire.

Avec un peu de travail, on obtient une *complexité* $O(m \log n)$.

Remarque 34 *Des arguments similaires s'appliquent à l'*algorithme de Prim*.*

25.4 Problème

25.4.1 Algorithme de Kruskal pour le calcul d'un arbre de recouvrement

Soit $G = (N, A)$ un graphe non dirigé connecté avec $n = \sharp N$ et $m = \sharp A$ (n noeuds et m arêtes). Dans la suite, on suppose que G est réprésenté par un tableau avec n entrées où l'entrée i pointe à la liste des noeuds adjacents au noeud i. On se réfère au tableau en question comme *tableau des listes d'adjacence*. Un *arbre* est un graphe non dirigé *connecté* et *acyclique*. Un *arbre de recouvrement* pour G est un sous-graphe de G qui est un arbre avec n noeuds. On considère l'algorithme A suivant :

> Entrée : le graphe G représenté par un tableau des listes d'adjacence.
>
> Calcul :
> $T = \emptyset$ (le sous-graphe vide)
> $a_1, \ldots, a_m$ énumeration des arêtes de G
> for $(i = 1; i <= m; i++)\{$
> if$(T \cup \{a_i\}$ acyclique$)\{T = T \cup \{a_i\}\}$
>
> Sortie : T .

1. Montrez que l'algorithme A calcule un arbre de recouvrement (à défaut, vous pouvez supposer ce résultat).

On suppose les déclarations suivantes :

```
struct node {int name; struct node * next;};
struct edge {int name1; int name2; struct edge * enext;};
struct edge *allocate_edge(int n1, int n2){
   struct edge *p=(struct edge *)(malloc(sizeof(struct edge)));
   (p->name1)=n1; (p->name2)=n2; (p->enext)=NULL;  return p;}
struct node * tabnode[n];
```

2. Programmez une fonction d'en tête :
   `struct edge * enum_edge(int n, struct node * tabnode[n])`
   qui prend en argument le nombre de noeuds et le tableau des listes d'adjacence et retourne un pointeur à une liste qui contient toutes les arêtes du graphe (exactement une fois). Analysez la complexité asymptotique de votre fonction.
3. Programmez une fonction d'en tête :
   `short accessible(int n, struct node * tabnode[n], int i, int j)`
   qui prend en argument le nombre de noeuds, le tableau des listes d'adjacence et deux noeuds i et j et retourne 1 si les noeuds sont connectés dans le graphe et 0 autremenet.
4. En utilisant vos reponses aux questions 2 et 3, analysez la complexité d'une mise en oeuvre de l'algorithme A en fonction de m et n Est-ce possible d'avoir une borne $O(n^3)$? Et une borne $O(n^2)$?

La terminologie suivante est (assez) standard. Soit $N = \{0, \ldots, n-1\}$ un ensemble fini non vide. Une *partition* P de N est un ensemble $\{S_1, \ldots, S_k\}$ tel que $\bigcup_{i=1,\ldots,k} S_i = N$, $S_i \neq \emptyset$ et $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On appelle chaque élément de P une *classe d'équivalence*. On introduit une structure de données pour représenter les partitions de N et qui permet d'exécuter deux opérations :

— equal(i,j) décide si les éléments i et j sont dans la même classe d'équivalence de la partition.
— union(i,j) génère une nouvelle partition dans laquelle les classes d'équivalence de i et j sont fusionnées.

On suppose les déclarations de type suivantes :

```
struct eqclass {int count; struct node * head;};
struct eqclass * belongs[n];
```

On utilise ces déclarations de la façon suivante :
— une struct eqclass sert à représenter une classe d'équivalence : nombre d'éléments dans la classe et pointeur au premier struct node d'une liste qui contient les éléments de la classe.
— le tableau belong sert à affecter à chaque élément de N sa classe d'équivalence (un pointeur vers une struct eqclass).

5. Décrivez (avec un dessein de préférence) une représentation possible de la partition suivante :
$$P = \{\{0,3\},\{1,2,4\},\{5,6\}\} \ ,$$
qui utilise les struct class et le tableau belong ci-dessus. Aussi expliquez les opérations qu'il faut faire pour implémenter l'opération equal(0,1) et l'opération union(2,5).
6. Peut-on implementer la fonction equal en temps $O(1)$ et la fonction union en temps $O(n)$? Expliquez.
7. Programmez une fonction d'en-tête short equal(int n, struct eqclass $*$ belong[n], int i, int j) qui prend en entrée le nombre de noeuds n, le tableau belong et deux noeuds i et j et retourne 1 si les deux noeuds sont dans la même classe d'équivalence et 0 autrement.
8. Programmez une fonction d'en-tête void union(int n, struct eqclass $*$ belong[n], int i, int j) qui prend en entrée le nombre de noeuds n, le tableau belong et deux noeuds i et j et fait l'union des classes d'équivalence de i et j (on supposera que i n'est pas dans la même classe que j).

Considérons la situation où à partir de la partition $P = \{\{0\},\{1\},\ldots,\{n-1\}\}$ on effectue $n-1$ opérations union. Supposons aussi que chaque fois qu'on fait l'union de deux classes d'équivalencce de la partition on effectue un travail qui est linéaire dans la taille de la classe d'equivalence plus petite (les éléments de la classe plus petite rejoignent ceux dans la classe plus grande).

9. Montrez que le coût de $(n-1)$ opérations union est $O(n \log n)$. Suggestion : combien de fois un elément de $N = \{0,\ldots,n-1\}$ peut-il changer de classe d'équivalence' ?
10. Comment peut-on utiliser la structure de données présentée dans le contexte de l'algorithme A ? Quelle est la complexité de l'algorithme A dans ce cas ?
11. Supposons que les arêtes du graphe G sont pondérées par des poids non-négatifs. Est-ce possible d'adapter l'algorithme A de façon à qu'il calcule un arbre de recouvrement de poids minimal ? Expliquez.

Chapitre 26

Flot maximum et coupe minimale

On peut voir un graphe comme un réseau de transport et les pondérations des arêtes comme une mesure de la capacité de transport de chaque arête. Si on fixe un noeud 'source' et un noeud 'destination' une question naturelle est celle de maximiser la quantité que l'on peut transporter de l'origine à la destination. En termes plus techniques, on considère le problème de maximiser le *flot* (définition à suivre) dans un graphe dont les arêtes ont des capacités bornées (problème MaxFlot).

Il se trouve que ce problème admet un problème *dual* qui consiste à rechercher une *coupe* minimale du graphe. Cette notion de *coupe* minimale est aussi facile à motiver. Par exemple, si toutes les capacités des arêtes sont identiques, une coupe minimale du graphe consiste à déterminer le nombre minimum d'arêtes qu'il faut couper pour disconnecter le noeud source du noeud destination. On a ici un premier exemple de *dualité* en optimisation combinatoire. Typiquement cette dualité prend la forme suivante : un problème de maximisation admet un problème dual de minimisation tel que les solutions des deux problèmes, si elles existent, alors elles coïncident. En particulier, dans ce chapitre on montrera que le flot maximum coïncide avec la coupe minimale [FF56].

Ce résultat de dualité couplé avec la notion de *chemin augmentant* est la base pour la conception d'algorithmes efficaces (polynomiaux) pour le problème MaxFlot. Le problème MaxFlot est aussi intéressant pour d'autres raisons.

— Le problème peut être formalisé comme un problème d'*optimisation linéaire* (chapitre 27) à savoir un problème de maximisation d'une fonction linéaire sujette à des contraintes linéaires.

— Quand les capacités sont des entiers, le problème MaxFlot peut aussi être vu comme un problème d'*optimisation linéaire en nombre entièrs*, à savoir un problème d'optimisation linéaire où en plus on demande à que les solutions soient des entiers. Dans ce contexte, le problème MaxFlot a la propriété remarquable que le maximum du problème d'optimisation linéaire coïncide avec le maximum du problème d'optimisation linéaire en nombres entièrs.

26.1 Flots et coupes

Définition 29 (capacité) *Soit N un ensemble fini (de noeuds). Une capacité est une fonction $c : N^2 \to \mathbf{R}^+$ qui associe un nombre non négatif à chaque couple de noeuds.*

Une capacité est une fonction. Par extension, on parlera aussi de capacité d'une arête et

dans ce cas il s'agira d'un nombre réél positif. Si on prend comme ensemble des arêtes :

$$A = \{(i,j) \in N^2 \mid c(i,j) > 0\} \ ,$$

on obtient un graphe dirigé et pondéré (voir chapitre 25). [1] Par exemple, si une arête modélise un tuyau alors la capacité peut correspondre au nombre de litres par second qui peuvent transiter dans le tuyau. Pour d'autres exemples, on peut s'inspirer des réseaux électriques ou routiers.

On distingue deux noeuds différents s (source) et d (destination) et on s'intéresse à la question de trouver le 'flot' maximum de s à d que le réseau peut supporter.

Définition 30 (flot) *Un flot est une fonction $f : N^2 \to \mathbf{R}$ qui satisfait les 3 conditions suivantes :* [2]

anti-symétrie $\forall i,j \in N \ (f(i,j) = -f(j,i))$.

conservation $\forall i \in N \backslash \{s,d\} \ \Sigma_{j \in N} \ f(i,j) = 0$.

capacité $\forall i,j \in N \ (f(i,j) \leq c(i,j))$.

L'intuition est que $f(i,j)$ décrit la quantité de flot *net* qui peut aller de i à j. La première condition exprime le fait que le flot de i à j doit être l'opposé du flot de j à i. Cette condition implique qu'on a toujours $f(i,i) = 0$. La deuxième condition est un principe de conservation du flot : pour tous les noeuds sauf s et d, le flot 'entrant' doit être égal au flot 'sortant'. Enfin la troisième condition impose un flot compatible avec la capacité de l'arête. On note en particulier que pour tout $(i,j) \in N^2$ on doit avoir :

$$-\, c(j,i) \leq f(i,j) \leq c(i,j) \ . \tag{26.1}$$

Exemple 64 *Supposons un graphe avec deux noeuds et les capacités (non nulles) suivantes : $c(s,d) = 4$ et $c(d,s) = 2$. Alors tout flot f doit satisfaire :*

$$f(d,d) = f(s,s) = 0, \quad f(s,d) \leq 4, \quad f(d,s) \leq 2, \quad f(s,d) = -f(d,s) \ .$$

On remarque que $f(s,d)$ exprime le flot net entre s et d et qu'il peut y avoir plusieurs façons de réaliser concrètement un tel flot. Par exemple, pour réaliser $f(s,d) = 2$ on peut imaginer que s envoie x à d pour $2 \leq x \leq 4$ et d envoie $(x-2)$ à s.

Définition 31 (coupe) *Une coupe est une partition de l'ensemble de noeuds N en deux ensembles A et B tels que $s \in A$ et $d \in B$.*

Définition 32 (capacité d'une coupe) *La capacité $c(A,B)$ d'une coupe (A,B) est :*

$$c(A,B) = \Sigma_{i \in A, j \in B} \ c(i,j) \ .$$

De façon similaire, si f est un flot on pose $f(A,B) = \Sigma_{i \in A, j \in B} \ f(i,j)$. Il se trouve que cette quantité dépend du flot mais pas de la coupe.

Proposition 29 *Soit f un flot. Alors :*

1. On remarquera qu'on retient dans l'ensemble A seulement les couples avec capacité strictement positive.
2. On retrouve ces mêmes conditions dans d'autres contextes ; par exemple dans l'étude de circuits électriques on parle des *lois de Kirchoff*.

1. *la valeur $f(A, B)$ est constante (ne dépend pas du choix de la coupe),*
2. *$f(A, B) \leq c(A, B)$.*

PREUVE. (1) On pose :

$$|f| = f(\{s\}, N \backslash \{s\}) \ .$$

On montre que pour toute coupe (A, B), $f(A, B) = |f|$. On procède par récurrence sur $\sharp A$. Le cas $\sharp A = 1$ suit de la définition de $|f|$. Sinon soit (A, B) une coupe avec $A = A' \cup \{i\}$ et $i \neq s$. Par hypothèse de récurrence, on sait :

$$|f| = f(A', B \cup \{i\}) = f(A', B) + f(A', \{i\}) \ .$$

D'autre part, $f(A, B) = f(A', B) + f(\{i\}, B)$. Par anti-symétrie, $f(A', \{i\}) = -f(\{i\}, A')$ et par conservation, $f(\{i\}, A') + f(\{i\}, B) = 0$. Donc $f(A', \{i\}) = f(\{i\}, B)$ et on peut conclure que $|f| = f(A, B)$.
(2) Par la condition sur la capacité. □

On peut donc définir la valeur $|f|$ d'un flot comme le flot $f(A, B)$ par rapport à une coupe (A, B) quelconque :

$$|f| = f(A, B) \quad (A, B) \text{ coupe} \tag{26.2}$$

Définition 33 (problème flot maximum) *Le problème du flot maximum est le problème de déterminer pour toute capacité donnée $c : N^2 \to \mathbf{R}^+$, un flot de valeur maximale.*

Définition 34 (problème coupe minimale) *Le problème de la coupe minimale est le problème de trouver pour toute capacité donnée $c : N^2 \to \mathbf{R}^+$, une coupe de capacité minimale.*

26.2 Chemin augmentant et graphe résiduel

Soit f un flot pour le graphe dirigé G construit à partir d'un ensemble de noeuds N et de la capacité c. On définit la *capacité résiduelle* comme la fonction $r = c - f$ (qui est bien une capacité d'après la définition 29). La capacité résiduelle sur une arête (i, j) représente donc l'augmentation maximale du flot $f(i, j)$. On définit aussi le *graphe résiduel* comme le graphe G_f construit à partir du même ensemble de noeuds et la capacité résiduelle r. Dans le graphe G_f l'ensemble des arêtes est :

$$A_f = \{(i, j) \mid r(i, j) > 0\} = \{(i, j) \mid c(i, j) - f(i, j) > 0\} \ .$$

Notez que le graphe G_f peut avoir une arête que le graphe initial G n'a pas. Par exemple, on pourrait avoir $c(i, j) = 3$, $f(i, j) = 1$ et $c(j, i) = 0$. Dans ce cas, $r(i, j) = (3 - 1) = 2$ et $r(j, i) = (0 - (-1)) = 1$.

Définition 35 (chemin augmentant) *Un chemin augmentant est un chemin simple dans le graphe résiduel G_f qui va du noeud source s au noeud destination d.*

Définition 36 (obstruction) *L'obstruction d'un chemin augmentant est la plus petite capacité qu'on trouve sur le chemin.*

Proposition 30 *Soit f un flot pour le graphe G et soit G_f le graphe résiduel.*

1. *La fonction f' est un flot pour G_f ssi $f + f'$ est un flot pour G.*
2. *Si $f + f'$ est un flot maximum pour G alors f' est un flot maximum pour G_f.*
3. *Si f, f' sont des flots alors $|f \pm f'| = |f| \pm |f'|$.*
4. *Si f est un flot et f^m est un flot maximum pour G alors la valeur d'un flot maximum dans G_f est $|f^m| - |f|$.*

PREUVE. Par manipulation élémentaire des propriétés de symétrie, conservation et capacité d'un flot (définition 30). □

Proposition 31 *Soit f un flot pour le graphe G. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il y a une coupe (A, B) telle que $|f| = c(A, B)$.*
2. *f est un flot maximum.*
3. *Il n'y a pas de chemin augmentant dans le graphe résiduel G_f.*

PREUVE. (1) ⇒ (2) Par la proposition 29, on sait que si f' est un flot alors :

$$|f'| \leq c(A, B) = |f| \ .$$

Le flot f est donc maximum. Notez aussi que la coupe (A, B) doit être minimale car pour toute coupe (A', B') on a :

$$c(A, B) = |f| \leq c(A', B') \ .$$

(2) ⇒ (3) Par contradiction, on suppose disposer d'un chemin augmentant dans G_f. Soit $d > 0$ la capacité plus petite dans ce chemin. On peut alors construire un flot f' dans G_f en posant :

$$f'(i, j) = \begin{cases} d & \text{si } (i, j) \text{ est dans le chemin} \\ -d & \text{si } (j, i) \text{ est dans le chemin} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par la proposition 30, on dérive que $f + f'$ est un flot dans G et $|f + f'| = |f| + d > |f|$. Donc f n'est pas un flot maximum.
(3) ⇒ (1) S'il n'y a pas de chemin augmentant dans G_f alors on peut construire une coupe (A, B) où A est l'ensemble des noeuds accessibles depuis s et $B = N \backslash A$. Dans cette coupe il n'y a pas d'arête de A dans B ce qui veut dire que pour $i \in A$ et $j \in B$ on a $r(i, j) = c(i, j) - f(i, j) = 0$. Donc $c(i, j) = f(i, j)$ et $f(A, B) = c(A, B)$. □

La proposition 31 est la base pour la conception d'un algorithme qui calcule le flot maximum en itérant la construction du graphe résiduel et la recherche d'un chemin augmentant. Dans une mise en oeuvre, on peut garder la capacité c constante et mettre à jour le flot f. La capacité résiduelle r est alors obtenue comme différence entre la capacité c et le flot f.

On dit qu'une capacité (ou un flot) est *entière* si son image est contenue dans les entiers. Supposons que la capacité est *entière*. Que peut-on dire sur le flot maximum ? Une première remarque est que la valeur du flot maximum est un entier car il est égal à la capacité d'une coupe minimale. Une deuxième remarque est qu'on peut toujours construire un flot maximum entier : si on commence avec un flot nul alors à chaque itération l'obstruction sera entière et le flot calculé ainsi que la capacité résiduelle seront entiers.

L'algorithme qu'on vient d'esquisser est correct et efficace (polynomial) à condition d'éviter certains écueils. Clairement on dispose d'algorithmes efficaces pour calculer un chemin augmentant. Une première stratégie pourrait donc consister à démarrer avec un flot nul et à itérer la recherche d'un chemin augmentant jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus. Si les capacités sont des entiers cette stratégie termine avec le flot maximum. Cependant on peut trouver des suites de chemins augmentants dont la longueur est exponentielle dans le nombre de bits nécessaires à représenter les capacités.

Exemple 65 *Soient* $M >> 0$ *et* $N = \{s, 1, 2, d\}$ *avec* $c(s,1) = c(s,2) = c(1,d) = c(2,d) = M$, $c(1,2) = 1$ *et* $c(i,j) = 0$ *autrement. Si on prend comme chemin augmentant* $s \overset{M}{\to} 1 \overset{1}{\to} 2 \overset{M}{\to} d$, *on obtient comme capacité résiduelle* r *:* $r(s,1) = r(2,d) = M - 1$, $r(1,s) = r(d,2) = 1$, $r(1,2) = 0$ *et* $r(2,1) = 1$, $r(s,2) = r(1,d) = M$ *et* $r(i,j) = 0$ *autrement. Maintenant on prend comme chemin augmentant :* $s \overset{M}{\to} 2 \overset{1}{\to} 1 \overset{M}{\to} d$. *En continuant de la sorte, on peut construire* $2 \cdot M$ *graphes résiduels avant de converger.*

Si les capacités sont des nombres irrationnels, on peut construire un exemple encore plus pathologique dans lequel on produit une suite infinie de chemins augmentants ; les augmentations suivent une loi géométrique et leur somme converge vers une valeur finie qui peut être aussi éloignée que l'on le souhaite du flot maximum. Cependant, ce contre-exemple a un impact limité car en pratique les capacités sont très souvent exprimées par des entiers ou des rationnels et dans ce dernier cas on peut toujours se ramener à un problème avec capacités entières en multipliant toutes les capacités par le plus petit dénominateur commun.

Avec des capacités entières, une stratégie simple (il y en a d'autres) qui permet d'obtenir une complexité polynomiale consiste à choisir toujours un chemin augmentant de longueur minimale [EK72]. Un tel chemin peut être calculé en effectuant une visite en largeur du graphe résiduel (section 24.3) et ce calcul se fait en temps linéaire dans le nombre d'arêtes. La recherche dans ce domaine est encore très dynamique ; actuellement les meilleurs algorithmes ont des complexités 'quasi-linéaires' dans le nombre d'arêtes.

Exemple 66 (problème du couplage maximum) *Soit* $G = (N, A)$ *un graphe non-dirigé biparti. On a donc* N_1, N_2 *tels que* $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ *et pour chaque arête* $\{n, n'\} \in A$ $n \notin N_1$ *ou* $n' \notin N_1$ *(les noeuds sont en deux éléments différents de la partition). On peut imaginer, par exemple, que* N_1 *est un ensemble d'employés et* N_2 *un ensemble de tâches et qu'une arête* $\{n, n'\}$ *avec* $n \in N_1$ *et* $n' \in N_2$ *représente le fait que l'employé* n *peut effectuer la tâche* n'. *La* contrainte *est que chaque employé peut effectuer au plus une tâche et chaque tâche peut être effectuée au plus par un employé. L'*objectif *est de maximiser le nombre d'employés occupés ou de façon équivalente le nombre de tâches effectuées. Il s'agit donc de déterminer un sous-ensemble de l'ensemble* A *des arêtes aussi grand que possible et avec la propriété que chaque noeud se trouve au plus dans une arête. On dit aussi qu'on cherche un couplage maximum d'un graphe biparti et il est entendu que la valeur d'un couplage est le nombre d'arêtes qu'il contient.*

Il se trouve qu'on peut reformuler ce problème comme un problème de flot maximum. Pour ce faire, on ajoute à l'ensemble des noeuds N *un noeud source* s *et un noeud destination* d *et on définit une capacité* $c : (N \cup \{s, d\})^2 \to \mathbf{R}^+$ *telle que* $c(i,j) = 1$ *si* $i = s$ *et* $j \in N_1$ *ou si* $i \in N_2$ *et* $j = d$ *ou si* $i \in N_1$, $j \in N_2$ *et* $\{i, j\} \in A$ *; autrement,* $c(i,j) = 0$. *On vérifie que le flot maximum de ce problème correspond au maximum du problème de couplage. D'une part, tout couplage produit un flot dont la capacité est égal au nombre d'arêtes dans le couplage.*

D'autre part, on sait qu'il existe un flot maximum entier et on vérifie que tout flot entier f produit un couplage dont la valeur est égale à celle du flot. En effet, le flot entier f doit satisfaire pour $i \in N_1$:

$$f(s,i) = \Sigma_{j \in N_2} f(i,j) \quad \text{où } f(s,i), f(i,j) \in \{0,1\}$$

et de façon symétrique pour $j \in N_2$:

$$f(j,d) = \Sigma_{i \in N_1} f(i,j) \quad \text{où } f(j,d), f(i,j) \in \{0,1\} \ .$$

Il suit que pour tout $i \in N_1$ il existe au plus un $j \in N_2$ tel que $f(i,j) = 1$ et pour tout $j \in N_2$ il existe au plus un $i \in N_1$ tel que $f(i,j) = 1$. Donc si on prend $C = \{\{i,j\} \mid i \in N_1, j \in N_2 \text{ et } f(i,j) = 1\}$ on a un couplage dont la valeur est égale à celle du flot.

26.3 Problèmes

26.3.1 Problème de circulation et flot maximum

Un problème de *circulation* (abrégé en problème C dans la suite) est défini par : (i) N un ensemble fini de noeuds, (ii) une capacité $c : N^2 \to \mathbf{R}^+$ et (iii) une contrainte $b : N \to \mathbf{R}$.

L'idée générale est qu'un noeud $i \in N$ est un *producteur* si $b(i) > 0$, un *consommateur* si $b(i) < 0$ et un *commutateur* si $b(i) = 0$. Le problème est de savoir s'il existe un transfert possible des producteurs aux consommateurs qui respecte la capacité du réseau et le principe de conservation du flot. Plus formellement on cherche à savoir s'il existe une fonction flot $f : N^2 \to \mathbf{R}$ qui satisfait :

— $f(i,j) = -f(j,i)$ pour $(i,j) \in N^2$,
— $f(i,j) \leq c(i,j)$ pour $(i,j) \in N^2$ et
— $\Sigma_{j \in N} f(i,j) = b(i)$ pour $i \in N$.

On remarquera que le problème C est *différent* du problème du flot maximum (abrégé en problème FM dans la suite) : (i) il n'y a pas de noeud source et de noeud destination, (ii) la dernière condition ci dessus généralise celle pour le problème FM et (iii) on ne cherche pas à maximiser le flot mais juste à savoir si un flot existe.

1. Montrez que si $f : N^2 \to \mathbf{R}$ est un flot pour le problème C alors la somme des b_i positifs qu'on dénote par B est l'opposé de la somme des b_i négatifs :

$$B = \Sigma\{b(i) \mid i \in N, b(i) > 0\} = -\Sigma\{b(i) \mid i \in N, b(i) < 0\} \ .$$

On cherche à transformer le problème C en un problème FM. Pour ce faire, on associe au problème C ci-dessus le problème FM suivant : (i) on ajoute à l'ensemble des noeuds N deux nouveaux noeuds s (source) et d (destination) et (ii) on définit une fonction capacité c' sur $N \cup \{s,d\}$ par :

$$c'(i,j) = \begin{cases} c(i,j) & \text{si } (i,j) \in N^2 \\ b(j) & \text{si } i = s, j \in N, b(j) > 0 \quad \text{(source-producteur)} \\ -b(i) & \text{si } i \in N, j = d, b(i) < 0 \quad \text{(consommateur-destination)} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

2. Considerez le problème C suivant : $N = \{1,2,3,4\}$, $c(1,2) = c(1,3) = 3$, $c(2,3) = c(2,4) = c(3,4) = 2$ et $c(i,j) = 0$ autrement ; $b(1) = b(2) = 3$, $b(3) = -2$ et $b(4) = -4$. Ce problème a-t-il une solution ?
3. Construisez le problème FM associé au problème C de la question 2. et calculez un flot maximum pour ce problème.

On considère maintenant un problème C arbitraire et le problème FM associé. Prouvez ou donnez un contrexemple aux assertions suivantes.

4. La quantité B de la question 1. est une borne supérieure à la valeur du flot maximum du problème FM associé.
5. Si f' est un flot (pas forcement maximum) pour le problème FM associé alors f' restreint à N^2 est un flot pour le problème C.
6. Si f est un flot pour le problème C alors on peut étendre f à $N \cup \{s,d\}$ pour qu'il devienne un flot maximum pour le problème FM associé (le flot étendu coïncide avec f sur N^2).
7. Si f' est un flot maximum pour le problème FM associé alors la restriction de f' à N^2 est un flot pour le problème C.

8. Le problème C a une solution ssi le problème FM associé admet une solution avec valeur du flot égale à B.

26.3.2 Mise en oeuvre du calcul du flot maximum

On se propose de programmer l'algorithme qui calcule le flot maximum en utilisant une stratégie qui consiste à sélectionner autant que possible un chemin augmentant de longueur minimale. On suppose que le graphe a n noeuds. Dans un premier temps, on considère une représentation du graphe basée sur les matrices d'adjacence. En particulier, on suppose les tableaux suivants :

```
int capacity[n][n];
int flow[n][n];
int pred[n];
```

Le tableau capacity contient l'entrée de l'algorithme et précise la capacité entre chaque couple de noeuds. Ce tableau n'est pas modifié pendant le calcul. Le tableau flow représente le flot entre chaque couple de noeuds. Il est initialisé à 0 et il est mis à jour à chaque itération de l'algorithme. A chaque itération la valeur :

```
capacity[i][j]-flow[i][j]
```

représente la capacité du graphe residuel entre les noeuds i et j. Notez que plutôt que calculer une nouvelle capacité comme dans l'algorithme décrit dans le chapitre 26, dans cette mise en oeuvre on met à jour le flot à chaque itération et on calcule la capacité residuelle comme la différence entre la capacité initiale et le flot courant.

Le tableau pred est initialisé avec une valeur par défaut à chaque itération. Pendant la recherche d'un chemin augmentant, on enregistre dans pred[i] le premier noeud par lequel on atteint i à partir du noeud source (s'il existe) étant entendu que le pred[source] est une valeur conventionnelle comme -1.

1. Programmez une fonction :

   ```
   int bfs(int source, int dest)
   ```

   qui cherche un chemin de longueur minimale entre le noeud source et le noeud dest dans le graphe residuel et ce faisant garde à jour le tableau pred. Il s'agit d'adapter l'algorithme de visite en largeur d'un graphe qui utilise une queue. A la fin du calcul, la fonction bfs retourne 1 si un tel chemin existe et 0 sinon.

2. Programmez une fonction

   ```
   int max_flow(int source, int dest)
   ```

   qui initialise le flot à 0 et ensuite itère l'appel à bfs tant qu'un chemin augmentant existe. Chaque fois qu'un chemin augmentant existe, la fonction détermine son *obstruction* en utilisant le tableau pred et ensuite met à jour le tableau flot. Si un chemin augmentant n'existe pas, la fonction termine en retournant la valeur du flot maximum.

3. On considère maintenant la situation dans laquelle le graphe est creux. Dans ce cas la représentation du graphe par une matrice d'adjacence est particulièrement inefficace. Adaptez votre programme pour qu'il travaille avec des listes d'adjacence et effectuez des tests sur des graphes creux pour comparer la performance des deux solutions.

Troisième partie

Optimisation linéaire

Chapitre 27

Optimisation linéaire

Un problème d'*optimisation linéaire* est un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur un ensemble décrit par un ensemble d'inégalités linéaires (dans certains textes, on appelle polyèdre un tel ensemble). Dans ce chapitre, on définit le problème d'optimisation linéaire ainsi que son problème *dual*, on esquisse une stratégie algorithmique élémentaire pour sa solution et on décrit un certain nombre de situations qui peuvent être analysées à l'aide de l'optimisation linéaire.

27.1 Optimisation convexe et linéaire

Il est instructif de voir l'optimisation *linéaire* comme un cas particulier de l'optimisation *convexe*.

Définition 37 (ensemble convexe) *Un ensemble $S \subseteq \mathbf{R}^n$ est* convexe *si pour tout $x, y \in S$ et $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \ .$$

Le point $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(x-y) + y$ se trouve sur le segment déterminé par les points x et y. Ainsi un ensemble S est convexe si tout segment qui connecte deux points de l'ensemble est contenu dans S.

Exercice 36 *Montrez que l'intersection d'ensembles convexes est convexe.*

Définition 38 (fonction convexe) *Soient S un ensemble convexe dans $\mathbf{R}^n$ et $f : S \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si pour tout $x, y \in S$ et $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \ .$$

On dit aussi que f est concave si $-f$ est convexe.

Dans une fonction convexe, le segment qui connecte deux points du graphe de la fonction domine la fonction.

Exemple 67 *Si $g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont des fonctions convexes pour $i = 1, \ldots, m$ alors l'ensemble suivant est convexe :*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \ .$$

Définition 39 (problème d'optimisation convexe) *Soient S un ensemble convexe et $f : S \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Le problème d'optimisation associé est le problème de trouver (s'il existe) un $x \in S$ qui minimise la fonction f :*

$$min\ \{f(x) \mid x \in S\}\ .$$

Un élément dans l'ensemble convexe S est dit admissible.

Une propriété remarquable d'un problème d'optimisation convexe est que si un élément est un minimum dans son *voisinage immédiat* alors il est aussi un minimum de tout l'ensemble S. Une situation idéale pour appliquer une stratégie *gloutonne*.

Dans un problème d'optimisation convexe on peut adopter la stratégie suivante : on démarre avec un élément admissible $x_0 \in S$ et à chaque étape on vérifie si dans le voisinage immédiat de x_i il y a un élément admissible $x_{i+1} \in S$ tel que $f(x_{i+1}) < f(x_i)$. Si un tel élément n'existe pas on sait que x_i est une solution minimale, et sinon on continue la recherche à partir de x_{i+1}.

Pour formaliser la notion de voisinage immédiat on rappelle des notions standards de topologie.

Définition 40 (norme et distance euclidienne) *Si $x \in \mathbf{R}^n$ on dénote par $\|x\|$ sa* norme euclidienne *(ou norme 2) :*

$$\|x\| = \sqrt{\Sigma_{i=1,\ldots,n}\ x_i^2}\ . \tag{27.1}$$

On dérive de la norme la distance euclidienne*, pour $x, y \in \mathbf{R}^n$:*

$$\|x - y\| = \sqrt{\Sigma_{i=1,\ldots,n}\ (x_i - y_i)^2}\ .$$

Définition 41 (boule) *Soient S un ensemble convexe, $x \in S$ et $\epsilon > 0$. On définit la boule de centre x et rayon ϵ par :*

$$B(x, S, \epsilon) = \{y \in S \mid \|y - x\| \leq \epsilon\}\ .$$

Définition 42 (minimum local) *Soit S un ensemble convexe et $f : S \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On dit que $x \in S$ est un minimum local s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, S, \epsilon)$ on a $f(x) \leq f(y)$.*

Proposition 32 *Soient S un ensemble convexe, $f : S \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et $x \in S$ un minimum local. Alors x est aussi un minimum de la fonction f sur S.*

Preuve. Soit $y \in S$ un autre élément de S. On veut montrer $f(y) \geq f(x)$. On sait que pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in S\ .$$

En particulier, on peut toujours prendre $\lambda \in]0, 1[$ pour que :

$$\|z - x\| \leq \epsilon\ .$$

On peut cerner $f(z)$ de la façon suivante :

$$f(x) \leq f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)\ .$$

L'inégalité gauche utilise l'hypothèse que x est un minimum local et l'inégalité droite l'hypothèse que f est convexe. Comme $(1-\lambda) > 0$, on dérive :

$$f(x) = \frac{(1-\lambda)f(x)}{(1-\lambda)} \leq f(y) \ .$$

□

Remarque 35 *La proposition 32 est fausse si on remplace la recherche d'un minimum avec la recherche d'un maximum. Dans une fonction convexe, on peut avoir un maximum local qui n'est pas un maximum global. Si l'on s'intéresse à la propriété duale pour le maximum il faut prendre une fonction concave.*

Définition 43 (fonctions affines et linéaires) *Une fonction affine sur* $\mathbf{R}^n$ *est une fonction* f *de la forme :*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ a_i x_i + b \ .$$

Si $b = 0$ *on dit aussi que la fonction est linéaire.*

Définition 44 (optimisation linéaire) *Un problème d'*optimisation linéaire [1] *est un problème d'optimisation convexe (définition 39) où l'ensemble convexe* S *est spécifié par un ensemble fini d'inégalités (voir exemple 67) :*

$$g_i(x) \leq 0 \ , \quad g_i \text{ fonction affine}, i = 1, \ldots, m,$$

et la fonction f *à optimiser (on dit aussi la fonction* objectif*) est une fonction affine.* [2]

Remarque 36 *Une fonction affine est à la fois convexe et concave. Donc pour une fonction affine sur un ensemble convexe* S *un minimum (maximum) local est aussi un minimum (maximum) sur* S*.*

27.2 Modélisation

Il est possible de donner plusieurs formulations équivalentes d'un problème d'optimisation linéaire. Pour fixer les idées, on suppose que le problème est le suivant :

$$max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \ , \tag{27.2}$$

où $c, x, 0 \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$ sont des vecteurs et A est une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si le problème a cette forme on dit qu'il est en forme *canonique*. Un avantage de la forme canonique est que sa forme duale dont il sera question dans la suite est facilement mémorisable (dans certains textes, on prend cette forme duale comme problème canonique ; il s'agit alors d'un problème de minimisation).

Si le problème n'est pas en forme canonique, il est souvent possible de le transformer en cette forme en utilisant un sous-ensemble des remarques suivantes.

— La minimisation de la fonction $c^T x$ est équivalente à la maximisation de la fonction $(-c)^T x$.

1. On dit aussi problème de *programmation linéaire* où il faut comprendre 'programmation' comme 'planification' ; il s'agit d'une terminologie un peu désuète mais qui est encore largement utilisée.

2. Notez que optimiser la fonction affine $a^T x + b$ est équivalent à optimiser la fonction linéaire $a^T x$.

— Une contrainte de la forme $a^T x \geq b$ est équivalente à la contrainte $(-a)^T x \leq -b$.
— Une contrainte de la forme $a^T x = b$ est équivalente aux contraintes $a^T x \leq b$ et $(-a)^T x \leq -b$.
— Une contrainte de la forme $a^T x \leq b$ est équivalente aux contraintes $a^T x + y = b$ et $y \geq 0$, où y est une nouvelle variable.
— Une contrainte de la forme $a^T x = b$ (qui ne suppose pas $x \geq 0$) est équivalente aux contraintes $a^T(x' - x'') = b$ et $x', x'' \geq 0$ où x, x' sont des nouvelles variables.

On passe en revue des exemples de problèmes d'optimisation linéaire et on illustre leur formalisation dans un logiciel.

Un réseau de distribution d'énergie électrique

On suppose un graphe dirigé (N, A) où N est partitionné en 3 ensembles P, C, U qui représentent respectivement des sites de production, de commutation et d'utilisation d'énergie électrique. On suppose aussi que $A \subseteq (P \times C) \cup (C \times U)$ et que les arêtes représentent les connexions entre les sites de production et de commutation et entre les sites de commutation et d'utilisation. On fixe des *constantes* avec l'interprétation suivante :

c_i	$i \in P$	(coût production)
b_i	$i \in P$	(capacité production)
b_i	$i \in U$	(besoin utilisation)
$b_{i,j}$	$(i,j) \in A$	(capacité connexion)

On introduit aussi des *variables* $x_{i,j}$, pour $(i,j) \in A$ qui représentent la quantité d'énergie électrique transmise sur la connexion (i,j). On cherche à minimiser le coût de production :

$$\Sigma_{i \in P}\ c_i(\Sigma_{(i,j) \in A} x_{i,j})$$

sous les contraintes suivantes :

$0 \leq x_{i,j} \leq b_{i,j}$	$(i,j) \in A$	(capacités des connexions)
$\Sigma_{(i,j) \in A}\ x_{i,j} \leq b_i$	$i \in P$	(capacité production)
$\Sigma_{(i,j) \in A}\ x_{i,j} = \Sigma_{(j,k) \in A}\ x_{j,k}$	$j \in C$	(préservation du flot)
$\Sigma_{(i,j) \in A}\ x_{i,j} \geq b_j$	$j \in C$	(besoins)

Il est facile de raffiner le modèle tout en gardant un problème d'optimisation linéaire. Par exemple on peut : (i) avoir un réseau de commutation à plusieurs niveaux, (ii) faire varier les capacités de production et les besoins d'utilisation en fonction d'un temps (discret) et (iii) stocker l'énergie pour la réutiliser plus tard.

Modélisation en PULP

On introduit très brièvement la bibliothèque PULP qui est un module compatible avec python3 qui permet de formuler et résoudre des problèmes d'optimisation linéaire (entière).

On suppose l'installation de python3, du module PULP et une connaissance basique du langage python. La page `https://coin-or.github.io/pulp/main/index.html` contient les informations nécessaires.

On illustre notre propos en écrivant un programme python qui va modéliser et résoudre un simple problème de flot maximum (chapitre 26). Soit $N = \{0, \ldots, n-1\}$ un ensemble fini de

noeuds. On suppose qu'on dispose d'une fonction $c : N^2 \to \mathbf{R}^+$ qui associe à chaque couple de noeuds différents la *capacité* d'un *tuyau* qui connecte le noeud i au noeud j ; notez que la capacité est toujours une valeur non-négative. Par convention on prend le noeud 0 comme *source* et le noeud $n-1$ comme *destination*. L'objectif est de déterminer le *flot maximum* que le réseau peut supporter du noeud source au noeud destination.

Pour tout couple de noeuds (i, j) avec $i < j$ on introduit une *variable* $x_{i,j}$ qui représente le flot *net* de i à j. Si $j < i$ alors le flot net de j à i est l'opposé du flot net de i à j et si $i = j$ alors le flot net est nul. Le flot doit respecter la capacité du réseau, et on a donc les contraintes :

$$-c(j,i) \leq x_{i,j} \leq c(i,j) \qquad \text{pour } i < j \ . \tag{27.3}$$

On note que si $i < j$ et $c(i, j) = c(j, i) = 0$ alors ces contraintes forcent $x_{i,j} = 0$.

L'objectif est de maximiser le flot du noeud source vers les autres noeud, ce qui revient à maximiser la fonction linéaire :

$$max\ \Sigma_{0<j}\ x_{0,j} \tag{27.4}$$

Enfin il faut exprimer un principe de conservation du flot pour tout noeud j différent du noeud source et du noeud destination :

$$\Sigma_{i<j}\ x_{i,j} = \Sigma_{j<k}\ x_{j,k} \qquad \text{pour } j \in N \backslash \{0, n-1\}. \tag{27.5}$$

On va maintenant formaliser ce problème en PULP pour un petit graphe avec juste 4 noeuds. Pour commencer on importe les fonctions du module PULP :

```
from pulp import *
```

Ensuite on décrit la fonction capacité par une matrice.

```
n=4                                  #nombre noeuds
cap=[n*[0] for i in range(n)]        #capacité
cap[0][1]=10
cap[0][2]=10
cap[1][2]=1
cap[1][3]=10
cap[2][3]=10
```

On va maintenant *créer un problème* problem en utilisant un constructeur d'objets du module PULP qui s'appelle LpProblem et qui prend en paramètre le nom du problème (ici "maxflow") et le type (ici LpMaximize). On écrira LpMinimize si on veut minimiser.

```
problem=LpProblem("maxflow",LpMaximize)
```

Ensuite on passe à la *création de variables*. Pour ce faire, on utilise un constructeur d'objets qui s'appelle LpVariable et qui prend comme paramètres une syntaxe concrète pour visualiser la variable (ici le résultat de la fonction var(i,j)), une borne inférieure (ici 0.0), une borne supérieure (ici cap[i][j]) et le type de variable (ici LpContinuous). On utilisera LpInteger si la variable doit prendre des valeurs entières. Si on n'a pas de borne inférieure ou supérieure on met une valeur par défaut None.

```
x=[n*[None] for i in range(n)]
def var(i,j):
    return "x_"+str(i)+","+str(j)
for i in range(n):
    for j in range(i+1,n):
        if not(i==0 and j==3):
            x[i][j]=LpVariable(var(i,j),0.0,cap[i][j],LpContinuous)
```

L'étape suivante consiste à déclarer la fonction objectif du problème problem qui est une fonction linéaire dans les variables introduites. En général on peut construire d'abord un tableau qui contient les termes de la somme et ensuite utiliser la fonction lpSum pour les additionner. On remarque que PULP est configuré pour interpréter correctement une expression symbolique qui mélange des valeurs numériques avec des variables.

```
T=[1*x[0][1],1*x[0][2]]
problem += lpSum(T)
```

Après avoir ajouté la fonction objectif au problème, on peut introduire autant de contraintes additionnelle que l'on veut. Dans notre petit exemple, on a juste deux équations pour la conservation du flot.

```
problem += x[0][1] == x[1][2] + x[1][3]
problem += x[0][2] + x[1][2] == x[2][3]
```

On passe maintenant aux phases d'inspection du modèle, calcul de la solution et visualisation. Avec la méthode writeLP on peut écrire dans un fichier (ici maxflowpulp.lp) ce que le système a retenu de nos déclarations. Il convient de lire le fichier pour vérifier qu'il contient bien les données attendues. Ensuite on lance la solution du problème avec la méthode solve, et on peut imprimer, par exemple, sur la sortie standard le statut de la solution, la valeur des variables et la valeur de la fonction objectif.

```
problem.writeLP("maxflowpulp.lp")
problem.solve()
print("Status:", LpStatus[problem.status])
for v in problem.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)
print("Total value of flow = ", value(problem.objective))
```

Interpolation en norme 1

On considère n points dans le plan réel $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Un problème classique consiste à déterminer une droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la norme du vecteur différence :

$$\|(ax_0 + b - y_0, \ldots, ax_{n-1} + b - y_{n-1})\| \ .$$

Une approche standard se base sur la norme euclidienne (définition 40). Il s'agit alors de minimiser une somme de carrés :

$$min \ \Sigma_{i=0,\ldots,n-1} \ (ax_i + b - y_i)^2 \ . \tag{27.6}$$

Ce problème admet une solution par la méthode des moindres carrés (voir, par exemple, [CLRS09][chapitre 28]) et de plus son calcul passe par la solution d'un système d'équations linéaires.

Parfois on préfère utiliser la norme 1 et minimiser une somme de valeurs absolues :

$$min \ \Sigma_{i=0,\ldots,n-1} \ |ax_i + b - y_i| \ . \tag{27.7}$$

La fonction valeur absolue n'est pas linéaire mais dans ce cas il est quand même possible de reformuler le problème comme un problème d'optimisation linéaire. On introduit les variables

$z_0, \ldots, z_{n-1}$ et on pose :

$$\begin{array}{l} min\ \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ z_i \\ z_i \geq (ax_i + b - y_i) \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ z_i \geq -(ax_i + b - y_i) \quad i = 0, \ldots, n-1 \end{array} \tag{27.8}$$

Proposition 33 *Si (a, b) est optimal pour le problème (27.7) alors $(a, b, z_0, \ldots, z_{n-1})$ avec $z_i = |ax_i + b - y_i|$, pour $i = 0, \ldots, n-1$, est optimal pour le problème (27.8). D'autre part, si $(a, b, z_0, \ldots, z_{n-1})$ est optimal pour le problème* (27.8) *alors (a, b) est optimale pour le problème (27.7).*

Preuve. Soit (a, b) optimal pour le problème (27.7). Clairement, $(a, b, z_0, \ldots, z_{n-1})$ avec $z_i = |ax_i + b_i|$, pour $i = 1, \ldots, n$, est une solution pour le problème (27.8). On montre qu'elle est optimale. Soit $(a', b', z'_0, \ldots, z'_{n-1})$ une autre solution. Alors :

$$\begin{array}{lll} \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ z'_i & \geq \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ |a'x_i + b' - y_i| & \text{(contrainte problème (27.8))} \\ & \geq \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ |ax_i + b - y_i| & \text{((a, b) optimale)} \\ & = \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ z_i & \text{(par définition z_i).} \end{array}$$

D'autre part, soit $(a, b, z_0, \ldots, z_{n-1})$ optimale pour le problème (27.8). Alors pour tout (a', b') on doit avoir :

$$\Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ |ax_i + b - y_i| \leq \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\ |a'x_i + b' - y_i|\ .$$

Autrement, en prenant $z'_i = |a'x_i + b' - y_i|$ on obtient une contradiction. □

27.3 Élimination de Fourier-Motzkin

On décrit une méthode connue comme élimination de Fourier-Motzkin ([Fou27, Mot52]) qui permet de résoudre un système d'inégalités linéaires. La méthode en question rappelle la méthode d'élimination de Gauss qui permet de résoudre un système d'équations linéaires (voir, par exemple, [CLRS09][chapitre 28]) mais on verra qu'elle est beaucoup moins efficace. En pratique, pour des grands systèmes d'inégalités on utilise d'autres méthodes telles que la méthode du simplexe décrite dans le chapitre 28.

Considérons un système S en n variables et m inégalités de la forme :

$$\Sigma_{j=1,\ldots,n}\ a_{i,j}x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{27.9}$$

et supposons que l'on souhaite *éliminer* la variable x_1. Ceci veut dire que l'on veut construire un nouveau système S' en $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_{n-1}$ tel que $(v_2, \ldots, v_n)$ est une solution du système S' ssi il existe v_1 tel que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une solution du système S. En termes géométriques, ceci veut dire qu'on peut voir les solutions de S' comme une *projection* des solutions de S.

Pour ce faire on va classer les inégalités (27.9) comme suit : négative si $a_{i,1} < 0$, positive si $a_{i,1} > 0$ et neutre si $a_{i,1} = 0$. Une inégalité négative se réécrit comme :

$$x_1 \geq \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - \Sigma_{j\geq 2}\ a_{i,j}x_j) \qquad \text{(inégalité négative)}$$

et une inégalité positive se réécrit comme :

$$x_1 \leq \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - \Sigma_{j\geq 2}\ a_{i,j}x_j) \qquad \text{(inégalité positive).}$$

On remarque que les inégalités négatives produisent des bornes inférieures pour x_1 et les inégalités positives des bornes supérieures et clairement pour avoir une solution il faut que le maximum des bornes inférieures soit plus petit ou égal au minimum des bornes supérieures. Si on utilise les fonctions minimum ou maximum on sort du cadre des inégalités linéaires mais il y a une façon détournée d'exprimer la même condition. A savoir on construit un nouveau systèmes S' dans lequel on a toutes les inégalités neutres et une sorte de produit des inégalités négatives avec les inégalités positives. Plus précisément si Neg (Pos) sont les indices des inégalités négatives (positives) alors pour tout $i \in Neg$ et pour tout $k \in Pos$ on ajoute à S' une inégalité de la forme :

$$\frac{1}{a_{i,1}}(b_i - \Sigma_{j\geq 2}\ a_{i,j}x_j) \leq \frac{1}{a_{k,1}}(b_k - \Sigma_{j\geq 2}\ a_{k,j}x_j)$$

qui ne dépend pas de x_1. Ceci veut dire que les $\sharp Neg + \sharp Pos$ inégalités sont remplacées par $\sharp Neg \cdot \sharp Pos$ inégalités qui ne dépendent pas de la variable x_1. En d'autres termes, à chaque itération le nombre de variables diminue de 1 mais le nombre d'inégalités peut augmenter de façon quadratique. C'est la raison pour laquelle la méthode a une complexité exponentielle.

Exemple 68 *On considère le système d'inégalités linéaires :*

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 & \leq & 10 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 & \leq & 9 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 & \leq & -7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \leq & 12 \end{cases}$$

Dans ce système on a 2 *inégalités positives,* 2 *inégalités négatives et* 0 *inégalités neutres par rapport à* x_1 *:*

$$\begin{cases} x_1 & \leq & 5 + (5/2)x_2 - 2x_3 \\ x_1 & \leq & 3 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 & \geq & 7 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 & \geq & -4 + (2/3)x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Pour éliminer x_1*, on considère les combinaisons possibles des inégalités positives et négatives :*

$$\begin{cases} 7 + 5x_2 - 2x_3 & \leq & 5 + (5/2)x_2 - 2x_3 \\ 7 + 5x_2 - 2x_3 & \leq & 3 + 2x_2 - x_3 \\ -4 + (2/3)x_2 + 2x_3 & \leq & 5 + (5/2)x_2 - 2x_3 \\ -4 + (2/3)x_2 + 2x_3 & \leq & 3 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

Si on itère l'élimination de variables on obtient une suite $S = S_1, S_2, \ldots, S_n$ où le système S_i dépend des variables $x_i, \ldots, x_n$. Ensuite, on peut procéder par *remplacement* pour trouver une solution du système : (i) pour le système S_n qui dépend seulement de la variable x_n il est facile de calculer une solution v_n (si elle existe !) et (ii) en ayant calculé les valeurs $v_n, \ldots, v_{i+1}$ des variables $x_n, \ldots, x_{i+1}$, on remplace les dites variables par les valeurs dans le système S_i et on détermine une valeur v_i pour la variable x_i.

27.4 Dualité

Il se trouve que tout problème d'optimisation linéaire a un *problème dual*.[3] Cette propriété joue un rôle important dans la conception d'algorithmes pour l'optimisation linéaire et par ailleurs elle donne une façon systématique de reformuler un problème en passant par son problème dual. Souvent, la formulation duale donne un point de vue nouveau sur le problème.

Définition 45 (problème dual) *Le problème* dual *d'un problème en forme canonique (27.2) est :*

$$min\ \{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}\ . \tag{27.10}$$

Dans ce contexte, on appelle le problème (27.2) primal.

On a donc la correspondance suivante :

Primal	Dual
$max\ c^T x$	$min\ b^T y$
$Ax \leq b$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$.

Vérifions que le dual du dual est équivalent au problème de départ. En effet le problème dual (27.10) est équivalent à :

$$max\ \{-b^T y \mid -A^T y \leq -c, y \geq 0\}\ .$$

Dont le dual par définition est :

$$min\ \{-c^T x \mid (-A^T)^T x \geq -b, x \geq 0\}\ .$$

qui est équivalent au problème primal (27.2). On énonce une première propriété dite *dualité faible*.

Proposition 34 (dualité faible) *Soient x admissible pour le problème primal (27.2) et y admissible pour le problème dual (27.10). Alors : $c^T x \leq b^T y$.*

Preuve. On observe : $c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T (Ax) \leq y^T b = b^T y$. A noter qu'on utilise l'hypothèse que $x, y \geq 0$. □

En d'autres termes, tout élément admissible du problème primal (dual) donne une borne inférieure (supérieure) pour la solution (si elle existe) du problème dual (primal).

Un problème primal (dual) peut :

1. avoir une solution admissible et optimale,
2. avoir une solution admissible mais pas de maximum (minimum) et
3. ne pas avoir de solution admissible.

3. Le concept de problème dual n'est pas propre à l'optimisation linéaire ; on retrouve ce concept aussi dans des problèmes d'optimisation convexe plus généraux que l'optimisation linéaire.

La proposition 34 montre que si le primal (dual) est dans le cas 2 alors le dual (primal) est forcement dans le cas 3. Par ailleurs, la proposition 34 nous donne aussi un critère *suffisant* pour l'optimalité. Si x est admissible pour le primal, y est admissible pour le dual et $b^T y = c^T x$ alors x est optimal pour le primal et y est optimal pour le dual.

Un *résultat fondamental* de la théorie de la dualité en optimisation linéaire affirme que si on a une solution optimale pour le primal (dual) alors on a aussi une solution optimale pour le dual (primal) et les fonctions objectif coïncident sur ces solutions optimales. On appelle ce résultat *dualité forte* et on réfère le lecteur au problème 27.5.7 pour une preuve et à [MG07] pour plusieurs autres preuves possibles. Il suit qu'il est *impossible* que le primal (dual) ait une solution optimale et le dual (primal) en ait pas et il est aussi *impossible* que la fonction de coût sur la solution optimale du primal soit strictement inférieure à la fonction de coût sur la solution optimale du dual. Une dernière situation *possible* est que primal et dual n'aient pas de solutions admissibles (cas 3). En résumant on a 4 cas *possibles* (sur 9) : $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ et $(3,3)$. De plus, dans le cas $(1,1)$ les fonctions de coût sur les solutions optimales coïncident. Un autre corollaire intéressant du résultat fondamental est qu'on peut réduire le problème d'optimisation linéaire (27.2) à la solution du système d'inégalités linéaires suivant :

$$b^T y \leq c^T x, Ax \leq b, A^T y \geq c, x, y \geq 0 \ . \tag{27.11}$$

Trouver une solution optimale est aussi difficile que déterminer l'existence d'une solution admissible.

Exemple 69 *Voici* 4 *petits exemples qui illustrent les* 4 *situations possibles pour le problème primal et son dual.*

max = min	*primal non-borné*	*dual non-borné*	*primal et dual non-admissibles*
$b = c = (1,1)$	$b = c = (1,1)$	$b = c = (-1,-1)$	$b = c = (-1,1)$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

27.5 Problèmes

27.5.1 Interpolation en norme ∞

On considère à nouveau le problème d'interpolation de la section 27.2, mais cette fois on suppose qu'on cherche à minimiser la plus grande différence :

$$min \ (\ max_{i=0,\ldots,n-1} |ax_i + b - y_i| \ )$$

ce qui revient à adopter une norme ∞.

1. Formalisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.
2. Formulez et prouvez l'analogue de la proposition 33.
3. Visualisez le résultat en norme 1 et en norme ∞ en utilisant le module matplotlib.

27.5.2 Un problème de production

On s'intéresse à la planification de la production d'un certain produit non périssable sur une suite $1, 2, \ldots, n$ de jours. On dispose des données (constantes) suivantes :

— d_i est la demande (prévue) du produit le jour i,
— p est la capacité maximale de production par jour, s est la capacité maximale de stockage et c_s est le coût de stockage par unité de produit. Initialement on suppose que le stock est nul.
— c_i est le coût de production par unité de produit le jour i. De plus tout changement de la quantité produite entre deux jours consécutifs entraîne un coût qui est proportionnel à la valeur absolue de la différence entre les quantités produites multipliée par une constante c_δ. En d'autres termes, si x_i et x_{i+1} représentent la production le jour i et le jour $i+1$ alors il faut ajouter à la fonction objectif la quantité $c_\delta|x_i - x_{i+1}|$.

Le problème est de planifier la production de façon à satisfaire la demande tout en minimisant les coûts.

1. Formulez le problème comme un problème d'optimisation linéaire.
2. Utilisez un logiciel d'optimisation linéaire pour tester votre modèle dans des cas pour lesquels vous pouvez prévoir la forme de la solution optimale (ou sa non-existence).

27.5.3 Un problème de séparation

On a n points rouges et n points verts dans le plan réel.

1. Est-il possible de tracer une droite qui sépare les points au sens où tous les points de la même couleur sont du même côté de la droite ?
2. Si une telle droite existe, est-il possible d'en choisir une qui est à mi-chemin entre le point rouge et le point vert les plus proches ?
3. Il peut être impossible de séparer les points avec une droite. Dans ce cas, est-il possible de trouver un polynôme de degré $2, 3, \ldots$ qui sépare les points ?
4. Si on est dans $\mathbf{R}^n$ ($n > 2$), peut-on pourrait remplacer la droite par un hyperplan affine de la forme $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a^T x = b\}$?

Montrez que ces problèmes peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation linéaire. Pour la question 2., on peut s'inspirer de la remarque suivante. Si a, b sont des nombres réels avec $a \leq b$ et on cherche une valeur x qui sépare a, b on peut poser les contraintes $a \leq x$ et $x \leq b$. Si en plus on veut que x soit équidistant de a, b on peut ajouter une variable y qu'on cherche à maximiser sous les contraintes $a \leq x - y$ et $x + y \leq b$.

5. Testez la méthode sur des données qui vous semblent susceptibles d'avoir une lois de séparation simple et visualisez le résultat en utilisant le module matplotlib de python3.

27.5.4 Mise en oeuvre de la méthode de Fourier-Motzkin

Mettez en oeuvre la méthode de Fourier-Motzkin qui permet de décider si un système d'inégalités a une solution et dans ce cas d'en calculer une. Pour éviter les erreurs d'arrondi, on peut utiliser le module fractions de python3. On suppose qu'un système $Ax \leq b$ à n variables est représenté par une matrice de dimension $m \times (n+1)$.

1. Programmez une fonction qui à partir de la représentation du système $Ax \leq b$ avec $n \geq 2$ variables calcule la représentation du système dans lequel on élimine la première variable. Les solutions $(v_2, \ldots, v_n)$ du nouveau système sont exactement les tuples telles que il existe v_1 tel que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une solution du système de départ.
2. Si on itère $n-1$ fois la fonction précédente on obtient n systèmes $S_1, \ldots, S_n$ tels que S_i dépend des variables $x_i, \ldots, x_n$, pour $i = 1, \ldots, n$. En particulier, le système S_n

dépend seulement d'une variable. Programmez une fonction qui calcule une solution d'un système qui dépend d'une seule variable. Pour la suite du problème, il sera utile de retourner la plus grande solution possible (si elle existe) et autrement une solution arbitraire.

3. Programmez une fonction qui prend en argument un système S_i du point précédent et des valeurs $v_{i+1}, \ldots, v_n$, remplace les variables $x_{i+1}, \ldots, x_n$ par ces valeurs et produit un système qui dépend seulement de la variable x_i.
4. Programmez une fonction qui prend en argument les systèmes $S_1, \ldots, S_n$ et calcule une solution $(v_1, \ldots, v_n)$ du système S_1 (si elle existe) telle que pour $i = n, \ldots, 1$, v_i est une solution du système S_i après remplacement des variables $x_{i+1}, \ldots, x_n$ par les valeurs $v_{i+1}, \ldots, v_n$.
5. Testez votre solution (on peut utiliser l'exemple 68).
6. Montrez qu'on peut utiliser cette mise-en-oeuvre pour résoudre un système d'optimisation linéaire en forme canonique : $max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$. Suggestion : ajoutez une variable z et la contrainte $z - c^T x \leq 0$.

27.5.5 Lemme de Farkas

Soient A une matrice de dimension $m \times n$ et b un vecteur de dimension m.

1. Le résultat suivant est un simple résultat d'algèbre linéaire connu comme alternative de Fredholm. Prouvez qu'exactement un des systèmes suivants a une solution (on utilise $\oplus$ pour le ou exclusif) :

$$\exists x \ (Ax = b) \quad \oplus \quad \exists y \ (y^T A = 0, y^T b \neq 0) \ .$$

2. On cherche maintenant à adapter le résultat au cas où on a un système d'*inégalités*. Pour commencer, prouvez que s'il existe y non-négatif tel que $y^T A = 0$ et $y^T b < 0$ alors le système d'inégalités $Ax \leq b$ n'a pas de solution.
3. On peut appliquer la méthode de Fourier-Motzkin pour éliminer une variable, d'un système d'inégalités $Ax \leq b$ et obtenir ainsi un système $A'x \leq b'$. Montrez qu'il existe une matrice *non-négative* Y tel que $A' = YA$ et $b' = Yb$.
4. On peut itérer la méthode de Fourier-Motzkin sur le système $Ax \leq b$ pour éliminer une suite de variables et obtenir ainsi un système $A'x' \leq b'$. Montrez qu'il existe une matrice *non-négative* Y tel que $A' = YA$ et $b' = Yb$.
5. On peut itérer la méthode de Fourier-Motzkin sur le système $Ax \leq b$ jusqu'à éliminer *toutes* les variables et obtenir ainsi un système $0 \leq b'$. Par le point précédent, on sait qu'il existe une matrice non-négative Y tel que $YA = 0$ et $b' = Yb$. Montrez que le système de départ $Ax \leq b$ n'a pas de solution ssi une composante du vecteur b' est négative.
6. Montrez que si le système d'inégalités $Ax \leq b$ n'a pas de solution alors il existe un y non-négatif tel que $y^T A = 0$ et $y^T b < 0$.
7. Conclure que parmi les deux systèmes d'inégalités suivants il y en a exactement un qui a une solution (lemme de Farkas) :

$$\exists x \ (Ax \leq b) \quad \oplus \quad \exists y \geq 0 \ (y^T A = 0, y^T b < 0) \ .$$

8. Considérez le système d'inégalités $Ax \leq b$ où :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculez un vecteur y non-négatif tel que $y^T A = 0$ et $y^T b < 0$.

9. Dérivez la variante suivante du lemme de Farkas : parmi les deux systèmes d'inégalités suivants il y en a exactement un qui a une solution :

$$\exists x \geq 0 \ (Ax = b) \quad \oplus \quad \exists y \ (y^T A \geq 0, y^T b < 0) \ .$$

Cette variante a une jolie interprétation géométrique : soit le vecteur b est dans le cône généré par les colonnes de la matrice A soit il y a un vecteur y qui forme un angle aigu avec les dites colonnes et un angle obtus avec b (et le plan orthogonal à y sépare b du cône).

27.5.6 Recette pour le problème dual

On considère un problème d'optimisation linéaire dans lequel on cherche à maximiser $\Sigma_{j=1,\ldots,n} c_j x_j$ avec des contraintes de la forme :

$$\begin{array}{ll} a_i x \ op \ b_i, & op \in \{\leq, \geq, =\}, \qquad i = 1, \ldots, m \\ x_j \ rel, & rel \in \{\leq 0, \geq 0, \in \mathbf{R}\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Soit A la matrice $m \times n$ avec lignes $a_1, \ldots, a_m$ et soient $a'_1, \ldots, a'_n$ les colonnes de la même matrice A. Justifiez les règles suivantes pour obtenir le problème dual : on cherche à minimiser $\Sigma_{i=1,\ldots,m} b_i y_i$ avec les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_i \geq 0 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ y_i \leq 0 & \text{si } a_i x \geq b_i \\ y_i \in \mathbf{R} & \text{si } a_i x = b_i \end{array} \right. \quad i = 1, \ldots, m \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y a'_j \geq c_j & \text{si } x_j \geq 0 \\ y a'_j \leq c_j & \text{si } x_j \leq 0 \\ y a'_j = c_j & \text{si } x_j \in \mathbf{R} \end{array} \right. \quad j = 1, \ldots, n$$

27.5.7 Preuve dualité forte

Soit :

$$max\{c^T x \mid Ax \leq b\} \tag{27.12}$$

un problème d'optimisation linéaire.

1. Montrez que le problème dual du problème (27.12) s'exprime par :

$$min\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\} \tag{27.13}$$

2. Montrez que le problème (27.12) est équivalent au problème suivant où z est une nouvelle variable :

$$max\{z \mid z - c^T x \leq 0, Ax \leq b\} \tag{27.14}$$

3. On considère un système d'inégalités $A'x' \leq b'$ où :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \quad b' = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Expliquez comment utiliser Fourier-Motkin pour éliminer les variables x (voir problème 27.5.5) et dériver un système de contraintes :

$$\begin{cases} d_1 z + 0x & \leq & e_1 \\ \cdots & \leq & \cdots \\ d_k z + 0x & \leq & e_k \end{cases} \tag{27.15}$$

qui est la projection sur z du système de contraintes $A'x' \leq b'$ et tel que $d_i \in \{-1, 0, 1\}$, pour $i = 1, \ldots, k$,

4. Soient :

$$m \quad = max\{-e_i \mid d_i = -1, i = 1, \ldots, k\}, \qquad M \quad = min\{e_i \mid d_i = 1, i = 1, \ldots, k\} \ ,$$

où, comme d'habitude, $max\ \emptyset = -\infty$ et $min\ \emptyset = +\infty$. Montrez que : (i) le problème (27.14) est admissible ssi $m \leq M$ et (ii) le problème (27.14) admet un maximum ssi $m \leq M < +\infty$ et dans ce cas le maximum est M.

5. On suppose maintenant que le problème primal (27.12) et le problème dual (27.13) sont tous les deux admissibles. Montrez que dans ce cas le problème primal (27.12) admet un maximum.

6. Dans les hypothèses du point précédent, on veut montrer que le problème dual admet un minimum qui coïncide avec le maximum du primal. Appliquez le problème 27.5.5 pour conclure qu'il existe une matrice non-négative Y telle que YA', Yb' produisent le système 27.15. En particulier, montrez qu'il existe un vecteur $y \geq 0$ tel que :

$$y^T A = c \quad y^T b = M \ .$$

7. Considérez le problème $max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ où :

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Appliquez la méthode de Fourier-Motzkin pour calculer le maximum M du problème. Ensuite trouvez un vecteur y non-négatif tel que $y^T A = c$ et $y^T b = M$.

8. Dérivez la propriété de dualité *forte* pour un système en forme canonique. En d'autre termes, montrez que si les problèmes $max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ et $min\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}$ ont des solutions admissibles alors le maximum du premier problème et le minimum du deuxième problème existent et coïncident.

Chapitre 28

Algorithme du simplexe

On introduit une notion de forme standard (ou 'équationnelle') d'un problème d'optimisation linéaire et une notion de *solution basique* pour ce problème. Il se trouve que si un problème admet une solution (optimale) alors il admet une solution basique (optimale). L'algorithme du simplexe est une méthode pour passer d'une solution basique à une autre en cherchant d'améliorer la fonction objectif.

Il est possible de montrer que les solutions basiques correspondent aux sommets du polyèdre qui définit l'ensemble des solutions admissibles. Si on prend ce point de vue géométrique alors on peut dire que l'algorithme du simplexe se déplace d'un sommet à un autre du polyèdre jusqu'à atteindre une solution (et un sommet) optimale si elle existe.

28.1 Forme équationnelle (ou standard) et solutions basiques

On peut toujours reformuler un problème (27.2) en forme canonique en un problème de la forme :

$$max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\} \ . \tag{28.1}$$

On appelle cette forme *standard*; comme il est facile de confondre 'canonique' et 'standard', certains auteurs appellent aussi cette forme *équationnelle* tout en mettant en garde sur le fait que dans une forme équationnelle on a quand même les inégalités $x \geq 0$. Pour se réduire à la forme équationnelle, on introduit des *variables d'écart* $x' \geq 0$ et on remplace $Ax \leq b$ par $Ax + Ix' = b$, où I est la matrice identité.

On suppose maintenant qu'on a un problème dans la forme (28.1) et sans perte de généralité on suppose aussi que A est une matrice $m \times n$ de rang m; on peut toujours se ramener à cette forme en appliquant la méthode d'élimination de Gauss. Si $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ alors on dénote par A_I la matrice obtenue de A en supprimant les colonnes dont les indices ne sont pas dans I. Si $x \geq 0$ est une solution du système $Ax = b$ alors on dénote par $pos(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i > 0\}$ et si $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ alors on dénote par x_I le vecteur obtenu en supprimant les composantes de x dont l'indice n'est pas dans I.

Définition 46 (solution basique) *Une solution $x \geq 0$ du système $Ax = b$ est basique si les colonnes de la matrice $A_{pos(x)}$ sont linéairement indépendantes.*

Proposition 35 *Si x est une solution basique alors il y a un ensemble $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sharp I = m$, $pos(x) \subseteq I$, A_I est inversible et $x_I = (A_I)^{-1} b$.*

PREUVE. Les colonnes avec indice dans $pos(x)$ sont linéairement indépendantes et comme $rang(A) = m$ il est toujours possible d'ajouter des colonnes de façon à avoir m colonnes linéairement indépendantes. On prend I comme l'ensemble des indices des colonnes sélectionnées et la solution x doit satisfaire $A_I x_I = b$, soit $x_I = (A_I)^{-1} b$. □

Les solutions basiques sont déterminées par m colonnes de A qui sont linéairement indépendantes. Un système de contraintes linéaires $Ax = b, x \geq 0$ peut avoir une infinité de solutions mais parmi ces solutions il y en a un nombre fini (au plus $\binom{n}{m}$) qui sont des solutions basiques. La proposition suivante montre que dans la recherche d'une solution *optimale* on peut se restreindre aux solution basiques.

Proposition 36 *Si le problème (28.1) a une solution alors il a une solution basique et s'il a une solution optimale alors il a une solution basique optimale.*

PREUVE. Soit x une solution telle que $I = pos(x)$ et $\sharp I$ est minimum. Si les colonnes de A_I sont linéairement indépendantes alors x est basique et sinon on a un vecteur $v \neq 0$ tel que $A_I v = 0$ et on va dériver une contradiction. On peut supposer qu'il y a une composante de v qui est négative ; sinon on prend $-v$. En ajoutant des composantes nulles pour les indices qui ne sont pas dans I on a un vecteur $w \neq 0$ tel que $Aw = A_I v = 0$.

On considère maintenant un vecteur $x(t) = x + tw$. On remarque que :

$$Ax(t) = A(x + tw) = Ax + tAw = b \ .$$

Comme une composante de w est négative si on augmente t une composante de $x(t)$ tombe à 0 et on a $\sharp pos(x(t)) < \sharp pos(x)$. Contradiction.

Supposons maintenant qu'on a une solution *optimale* x telle que $I = pos(x)$ et $\sharp I$ est minimum. Si les colonnes de A_I sont linéairement indépendantes on a une solution basique optimale. Sinon, comme dans le cas précédent, on dérive un $w \neq 0$ avec une composante négative tel que $Aw = 0$ et on produit une contradiction. On pose $x(t) = x + tw$, on remarque que

$$c^T x(t) = c^T x + t(c^T w)$$

et on considère la valeur de $c^T w$. Si $c^T w = 0$ alors en faisant varier t on diminue le nombre de composantes différentes de 0 tout en restant optimal. Contradiction. Si $c^T w > 0$ alors pour un $t > 0$ on obtient une solution meilleure que la solution optimale. Contradiction. Si $c^T w < 0$ alors $c^T(-w) > 0$. Si $-w$ a une composante négative on arrive à une contradiction comme comme dans le cas précédent. Si toutes les composantes de $-w$ sont non-négatives alors $x(t)$ est toujours admissible pour $t \geq 0$ et la fonction objectif va à $+\infty$ pour $t \to +\infty$; ceci contredit l'existence d'une solution optimale. □

Exemple 70 *Soit $c = (1, 1)$. On suppose d'abord $A = (1, -1)$ et $b = 0$. Dans ce cas le problème a une solution mais pas de solution optimale. Par exemple $x = (1, 1)$ est une solution qui n'est pas basique. Si on prend $w = (-1, -1)$ on peut considérer $x(t) = (1, 1) + t(-1, -1)$ et obtenir une solution basique $(0, 0) = x(1)$. On suppose maintenant $A = (1, 1)$ et $b = 1$. Dans ce cas une solution optimale mais pas basique est $(1/2, 1/2)$. Si on prend $w = (1, -1)$ on peut considérer $x(t) = (1/2, 1/2) + t(1, -1)$ et obtenir une solution basique $(1, 0) = x(1/2)$.*

28.2 D'une solution basique à une autre

On a vu dans la section précédente, que tout problème dans la forme canonique (27.2) peut être réécrit comme un problème :

$$max\{c_0 + c^T x \mid Ax + x' = b, x \geq 0, x' \geq 0\} \ .$$

Pour des raisons techniques, on introduit ici une constante additive c_0 dans la fonction objectif qui est donc une fonction affine plutôt qu'une fonction linéaire. On va aussi supposer que $b \geq 0$ (on verra dans la section 28.4 comment relâcher cette condition). Dans ce cas $(x, x') = (0, b)$ est une solution *basique* du problème et on dit aussi que les variables x' sont *basiques* et les variables x *non-basiques*. On remarque que les variables basiques sont déterminées par les non-basiques car $x' = b - Ax$ et que la fonction objectif dépend seulement des variables non-basiques.

Si $c \leq 0$ alors $(0, b)$ est une solution basique optimale. En effet si on augmente les variables non-basiques la valeur de la fonction objectif ne peut pas augmenter.

Sinon soit e l'indice d'une variable non-basique tel que $c_e > 0$. Ceci veut dire que si on augmente x_e la valeur de la fonction objectif augmente. Si x_i est une variable basique on doit avoir :

$$x_i = b_i - a_{i,e} x_e \geq 0$$

Si $a_{i,e} \leq 0$ cette contrainte est toujours respectée et si $a_{i,e} > 0$ il faut que $x_e \leq b_i / a_{i,e}$. On a donc deux possibilités :

1. $a_{i,e} \leq 0$ pour toutes les variables basiques x_i. Dans ce cas il n'y a pas de limite à l'augmentation de x_e et de la fonction objectif. Le problème est non borné et il n'a pas de solution optimale.
2. Sinon on a au moins une variable basique qui minimise la quantité $\frac{b_i}{a_{i,e}}$. Soit x_s une telle variable. On peut donc augmenter x_e jusqu'à la valeur $\frac{b_s}{a_{s,e}}$ et mettre à 0 la variable x_s. On sait que $a_{s,e} > 0$ et on va utiliser cette valeur comme un *pivot* (dans le sens de la méthode d'élimination de Gauss) pour faire entrer x_e parmi les variables basiques et faire sortir x_s des variables basiques.

Pour effectuer les calculs, il est utile d'organiser les données dans un *tableau* qui initialement a la forme suivante :

-	c_1	$\cdots$	c_n	0	$0 \cdots$	0	$-c_0$
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	$0 \cdots$	0	b_1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	0	$0 \cdots$	1	b_m

Dans la première ligne on trouve les coefficients de la fonction objectif et l'*opposé* de la valeur de la fonction objectif. Le fait de garder l'opposé de la fonction objectif a une justification technique : elle permet de traiter de façon uniforme toutes les opérations de pivot.

Dans les m lignes suivantes on trouve dans la première colonne une variable basique, dans les $n + m$ colonnes suivantes les coefficients multiplicatifs des variables et dans la dernière colonne le vecteur b. On remarquera que les variables basiques correspondent à une sous-matrice identité de dimension $m \times m$.

Par exemple, supposons que x_1 est la variable entrante, x_{n+m} la variable sortante et $a_{m,1} > 0$ est le pivot. On effectue les opérations suivantes.

1. On divise la ligne de la variable sortante par le pivot et dans la première colonne on remplace la variable sortante par la variable entrante. On appelle le résultat la *nouvelle ligne du pivot.*
2. On additionne à la première ligne des coefficients $c_1, \ldots, c_{n+m}$ la nouvelle ligne du pivot multipliée par $-c_1$.
3. Pour $k = 1, \ldots, m-1$ on additionne à la ligne de x_{n+k} la nouvelle ligne du pivot multipliée par $-a_{k,1}$.

Les pas 1. et 3. sont des manipulations standard d'un systèmes d'équations linéaires dont on sait qu'elle préservent l'ensemble des solutions. On verra dans l'exemple suivant une justification du pas 2.

Exemple 71 *Voici un exemple de problème canonique, de sa transformation en forme équationnelle et de sa représentation comme tableau.*

$max\ 3x_1 + x_2 + 2x_3$	$max\ 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$	
$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$	$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30$	
$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$	$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 24$	
$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$	$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 36$	
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	

-	3	1	2	0	0	0	0
x_4	1	1	3	1	0	0	30
x_5	2	2	5	0	1	0	24
x_6	*4*	1	2	0	0	1	36

Les variables basiques sont x_4, x_5, x_6 *et la solution basique associée est* $(0, 0, 0, 30, 24, 36)$. *Pour maximiser la fonction objectif, on peut décider d'augmenter* x_1 *de* 0 *à* 9 *et dans ce cas* x_6 *passe de* 36 *à* 0 *et la fonction objectif de* 0 *à* 27. *On a donc* x_1 *comme variable entrante,* x_6 *comme variable sortante et* 4 *comme pivot.*

Il s'agit maintenant d'effectuer des transvections pour que le pivot soit remplacé par 1 *et les autres nombres sur la colonne du pivot par* 0. *Notez au passage que ce faisant on va créer une colonne identique à la colonne de la variable sortante. Dans notre cas, on divise la quatrième ligne (celle du pivot) par* 4 *et ensuite on l'additionne aux trois premières lignes en la multipliant par* -3,-1 *et* -2, *respectivement pour obtenir. Justifions la manipulation de la première ligne. On cherche à maximiser* $3x_1+x_2+2x_3$ *en sachant que* $x_1+x_2/4+x_3/2+x_6/4 = 9$. *On va donc remplacer* x_1 *par* $9 - x_2/4 - x_3/2 - x_6/4$ *dans la fonction objectif pour obtenir une nouvelle fonction objectif de la forme* $27 + x_2/4 + x_3/2 - 3x_6/4$. *Comme les variables non basiques sont nulles, la valeur de la fonction objectif est* 27 *et le coefficient* $-c_0$ *dans le tableau est* -27.

-	0	1/4	1/2	0	0	$-3/4$	-27
x_4	0	3/4	5/2	1	0	$-1/4$	21
x_5	0	*3/2*	4	0	1	$-1/2$	6
x_1	1	1/4	1/2	0	0	1/4	9

On peut maintenant prendre x_2 *comme variable entrante (par exemple) et* x_5 *comme variable sortante pour obtenir :*

-	0	0	$-1/6$	0	$-1/6$	$-2/3$	-28
x_4	0	0	1/2	1	$-1/2$	0	18
x_2	0	1	8/3	0	2/3	$-1/3$	4
x_1	1	0	$-1/6$	0	$-1/6$	1/3	8

Comme tous les coefficients c_i, $i = 1, \ldots, 6$ *sont non-positifs on a une solution basique optimale* $(8, 4, 0, 18, 0, 0)$ *avec un maximum de* 28.

Exemple 72 *Pour visualiser le passage d'une solution basique à une autre on considère le problème canonique suivant :*

$$max\{x_1 + x_2 \mid x_1 \leq 2, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0\} \ .$$

On transforme en forme équationnelle et on calcule le tableau qui correspond au sommet $(0, 0)$ *du polyèdre :*

-	1	1	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	1
x_5	1	1	0	0	1	2

Une possibilité est de choisir x_1 *comme variable entrante et* x_5 *comme sortante. Ceci produit le tableau suivant qui correspond au sommet* $(2, 0)$ *qui est optimal.*

-	0	0	0	0	-1	-2
x_3	0	-1	1	0	-1	0
x_4	0	1	0	1	0	1
x_1	1	1	0	0	1	2

Une autre possibilité est de choisir x_2 *comme variable entrante et* x_4 *comme sortante. Dans ce cas on se déplace vers le sommet* $(0, 1)$ *qui n'est pas optimal.*

-	1	0	0	-1	0	-1
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	1
x_5	1	0	0	-1	1	1

Dans l'étape suivante on prend x_1 *comme entrante et* x_5 *comme sortante en on se déplace vers le sommet* $(1, 1)$ *qui est optimal et différent du sommet optimal trouvé dans le premier cas.*

-	0	0	0	0	-1	-2
x_3	0	0	1	1	-1	1
x_2	0	1	0	1	0	1
x_1	1	0	0	-1	1	1

28.3 Vue matriciale du pivot et solution duale

On peut voir un tableau T comme une matrice de dimension $(m + 1) \times (m + n + 1)$. Chaque opération de pivot correspond à multiplier à gauche par une matrice P de dimension $(m+1) \times (m+1)$ dont la première colonne a la forme $(1, 0, \ldots, 0)^T$. On note que si on a deux matrices P et P' avec cette propriété alors leur produit a aussi cette propriété. Supposons qu'à partir du tableau T on effectue k pivots pour arriver à un tableau T_{opt} qui représente une solution optimale. On a donc :

$$P_k \cdot (\cdots (P_1 T) \cdots) = (P_1 \cdots P_k) \cdot T = T_{opt} \ .$$

Il est intéressant d'expliciter un peu plus la structure de $P = (P_1 \cdots P_k)$, T et T_{opt} :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -y^T \\ 0 & A_B^{-1} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \\ A & I & b \end{bmatrix} \quad T_{opt} = \begin{bmatrix} c^T - y^T A & -y^T & -y^T b \\ A_B^{-1} A & A_B^{-1} & A_B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Dans P, on a mis en évidence un vecteur $-y$ de dimension m et une matrice A_B^{-1} de dimension $m \times m$. La pertinence du choix des noms sera expliqué ci-dessous. Dans T on a mis en évidence le vecteur de coût c du problème canonique de dimension n, le vecteur 0 de dimension m des variables d'écart, la valeur initiale 0 de la fonction objectif, la matrice A de dimension $m \times n$ du problème canonique, la matrice identité I de dimension $m \times m$ qui correspond aux variables d'écart et le vecteur b de dimension m qui correspond aux termes constants du problème canonique. La matrice T_{opt} étant le produit de P par T, ses composantes sont déterminées par celles de P et T. En particulier, on a un vecteur $c^T - y^T A$ de dimension n, un vecteur $-y$ de dimension m une valeur $-y^T b$, une matrice $A_B^{-1} A$ de dimension $m \times n$, une matrice A_B^{-1} de dimension $m \times m$ et un vecteur $A_B^{-1} b$ de dimension m. Comme T_{opt} est optimale on sait que les coefficients de coût son non-positifs. On a donc $c^T - y^T A \leq 0$ et $-y \leq 0$. En d'autres termes, y est une solution admissible du problème dual :

$$y^T A \geq c, \quad y \geq 0 \ ,$$

et son opposé est lisible dans T_{opt} : il s'agit des coefficients de coût des variables d'écart. Notons au passage, que ceci justifie le choix de la notation $-y$. Par ailleurs, $-y^T b$ est l'opposé de la fonction objectif du problème dual et il est identique à l'opposé de la fonction objectif du problème primal. Par la propriété de dualité faible, y doit être une solution optimale du problème dual et combiné avec la solution primale il constitue un certificat qu'on peut facilement vérifier du fait qu'on a bien trouvé une solution optimale.

Considérons maintenant les lignes de T_{opt} qui suivent la première. On sait que dans T_{opt} les colonnes des variables basiques (de la solution optimale) forment la matrice identité. On dérive que si on dénote par A_B la matrice $m \times m$ qui correspond à ces colonnes dans T alors la sous-matrice $m \times m$ de P qui multiplie à droite A_B transforme A_B en la matrice identité. Il doit donc s'agir de l'inverse multiplicative de A_B et c'est pour cette raison qu'on a décidé de l'appeler A_B^{-1}. En conclusion, si B est la base de la solution optimale alors la méthode du tableau calcule entre autres l'inverse de A_B et de plus cette inverse est visible dans le tableau T_{opt} dans les colonnes des variables d'écart.

Exemple 73 *On reprend l'exemple 71. Dans ce cas les matrices sont :*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ 0 & \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{1,3} \\ 0 & \overline{a}_{2,1} & \overline{a}_{2,2} & \overline{a}_{2,3} \\ 0 & \overline{a}_{3,1} & \overline{a}_{3,2} & \overline{a}_{3,3} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{bmatrix}$$

$$T_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/6 & 0 & -1/6 & -2/3 & -28 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 4 \\ 1 & 0 & -1/6 & 0 & -1/6 & 1/3 & 8 \end{bmatrix}$$

On a donc comme solution duale optimale $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1/6, 2/3)$ *; et les matrices* A_B *et* A_B^{-1} *sont :*

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

On remarque qu'on prend les variables basiques dans l'ordre x_4, x_2, x_1. Avec cet ordre, les colonnes associées aux variables dans la matrice T_{opt} constituent la matrice identité.

28.4 Solution basique initiale

Pour démarrer l'algorithme du simplexe on a besoin d'une solution basique. On présente une méthode pour en trouver une ou pour montrer qu'elle n'existe pas. Considérons un problème en forme équationnelle :

$$max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\} \ . \tag{28.2}$$

Comme il s'agit d'équations, on peut supposer sans perte de généralité que $b \geq 0$. Si A est une matrice $m \times n$ alors on peut ajouter m variables x' et générer un problème toujours en forme équationnelle :

$$max\{-\mathbf{1}^T x' \mid Ax + x' = b, x, x' \geq 0\} \ , \tag{28.3}$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur de 1. On remarque que pour ce problème $(x, x') = (0, b)$ est une solution basique. Par ailleurs, la valeur de la fonction objectif étant bornée par 0, il doit y avoir une solution basique optimale.

Proposition 37 *Le problème (28.2) a une solution admissible si et seulement si le problème auxiliaire (28.3) a une solution optimale avec valeur de la fonction objectif égale à* 0.

PREUVE. ($\Rightarrow$) Si x est admissible pour (28.2) alors $(x, 0)$ est admissible pour (28.3) et comme la valeur de la fonction objectif est 0 il doit s'agir d'une solution optimale.
($\Leftarrow$) Si la valeur de la fonction objectif du problème auxiliaire (28.3) est 0 alors on doit avoir $x' = 0$ et donc x est une solution pour le problème (28.2). □

Pour démarrer l'algorithme du simplexe sur le problème auxiliaire (28.3), on réécrit la fonction objectif en fonction des variables non-basiques :

$$-\mathbf{1}^T x' = -\mathbf{1}^T (b - Ax) \ .$$

Si l'algorithme termine avec une valeur négative de la fonction objectif alors on sait que le problème de départ (28.2) n'a pas de solution. Si par contre la valeur de la fonction objectif est 0 alors on doit avoir $x' = 0$ et x est une solution du problème de départ (28.2) qui peut être utilisée pour construire une solution basique. En effet x a au plus m composantes qui ne sont pas 0 et ces composantes correspondent à des colonnes de A qui sont linéairement indépendantes. Pour construire une solution basique il suffit d'ajouter des colonnes à $A_{pos(x)}$ jusqu'à obtenir une matrice $m \times m$ inversible.

Exemple 74 *On considère le problème équationnel :*

$$max\{x_1 + 2x_2 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\} \ .$$

On modifie le signe de la première équation, on ajoute les variables x_4, x_5 et on calcule la fonction de coût en fonction de x_1, x_2, x_3 pour obtenir le problème suivant en forme de tableau :

-	1	3	0	0	0	6
x_4	-1	2	-1	1	0	5
x_5	2	$\boxed{1}$	1	0	1	1

Un pas de simplexe produit une solution optimale avec une valeur négative de la fonction objectif. Le problème de départ n'a donc pas de solution.

-	-5	0	-3	0	-3	3
x_4	-5	0	-3	1	-2	3
x_2	2	1	1	0	1	1

On laisse comme exercice le problème de trouver une situation dans laquelle certaines variables auxiliaires restent dans la base de la solution optimale du problème auxiliaire avec une valeur nulle.

28.5 Complexité

La complexité en temps des opérations effectuées pour passer d'une solution basique à une autre est $O(m \cdot n)$. Si les coefficients initiaux sont rationnels alors il est possible d'effectuer tous les calculs en restant dans l'ensemble des nombres rationnels. Il est aussi possible de montrer que la croissance des nombres rationnels calculés est modérée (polynomiale dans la taille initiale).

Il y a des situations dans lesquelles l'opération de pivot n'augmente pas la fonction objectif. Cependant comme on l'a déjà remarqué il y a au plus $\binom{n}{m}$ solutions basiques et il est possible de donner un critère de sélection (critère de Bland) de la variable entrante et sortante qui assure qu'on ne boucle jamais sur la même solution basique. Le critère consiste à ordonner de façon totale les indices des variables et à choisir toujours la variable entrante et sortante avec le plus petit indice parmi celles qui satisfont les conditions de sélection. Le critère de Bland assure la *terminaison* de l'algorithme.

Il se trouve qu'on peut effectivement construire des problèmes d'optimisation linéaire pour lesquels le nombre de solutions basiques traversées par l'algorithme du simplexe est exponentiel dans la dimension du problème. Ces problèmes sont assez artificiels et en pratique le nombre d'itérations de l'algorithme du simplexe croit plutôt de façon *linéaire*. Donc l'algorithme du simplexe est un algorithme exponentiel dans le pire des cas qui est efficace en 'pratique'. Des analyses de complexité comme l'analyse lissée (*smoothed analysis*) essayent d'expliquer ce phénomène [ST04].

L'algorithme du simplexe a été mis au point autour de 1950 par George Dantzig [Dan48]. Le premier algorithme polynomial en temps pour l'optimisation linéaire a été proposé par [Kha79] en utilisant une méthode de l'ellipsoïde complètement différente de celle du simplexe. En pratique, cet algorithme n'est pas compétitif avec l'algorithme du simplexe. Un deuxième algorithme polynomial dit des *points intérieurs* a été proposé par [Kar84]. A ce jour, les mises en oeuvre de cette méthode sont compétitives avec l'algorithme du simplexe.

La plupart des systèmes disponibles pour la solution de problèmes d'optimisation linéaire utilisent des nombres flottants et donc des erreurs d'approximation peuvent se produire pendant le calcul. Dans ce cas, un calcul des erreurs est nécessaire pour estimer la fiabilité de la solution. Un nombre important de problèmes pratiques d'optimisation linéaire produisent des matrices creuses et dans ces cas des techniques spécifiques de mise en oeuvre peuvent améliorer

l'efficacité de façon significative. Au moment où j'écris ces notes, les meilleurs systèmes non-commerciaux peuvent traiter des problèmes avec environ $10^5 - 10^6$ contraintes et autant de variables. Le texte [MG07] dont on s'est largement inspiré est une excellente introduction au sujet.

28.6 Problèmes

28.6.1 Écart complémentaire

On considère un problème en forme canonique :

$$max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

et son problème dual $min\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}$. On suppose aussi que x est une solution admissible pour le primal et y une solution admissible pour le dual. On dénote avec $A[i, \_]$ et $A[\_, j]$ la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice A, respectivement. Pour chaque ligne $i = 1, \ldots, m$, on a un écart $b_i - A[i, \_]x \geq 0$ et une variable duale $y_i \geq 0$. De la même façon, pour chaque colonne $j = 1, \ldots, n$, on a un écart $A[\_, j]y - c_j \geq 0$ et une variable primale $x_j \geq 0$. La condition de l'*écart complémentaire* (*complementary slackness*, en anglais) affirme que ou bien l'écart de la contrainte est nul ou bien la variable associée à la contrainte est nulle :

$$(b_i - A[i, \_]x)y_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{et} \quad (A[\_, j]y - c_j)x_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Montrez que x, y (admissibles) sont des solutions optimales pour le problème primal et dual, respectivement ssi la condition de l'écart complémentaire est vérifiée.

28.6.2 Jeux à somme nulle et théorème minimax

On considère un jeu à deux joueurs qu'on va appeler *Max* et *Min*. *Max* peut choisir parmi m coups et *Min* parmi n coups. On suppose une matrice A de dimension $m \times n$ telle que le coefficient $a_{i,j}$ représente le gain de *Max* quand *Max* joue le coup i et *Min* le coup j. Le gain de *Max* est toujours l'opposé du gain de *Min* et pour cette raison on parle de jeu à somme nulle.

Une distribution de probabilité sur les coups de *Max* est un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_m)$ tel que $\Sigma_{i=1,\ldots,m} x_i = 1$ et $x_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, m$. De façon similaire une distribution de probabilité sur les coups de *Min* est un vecteur $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tel que $\Sigma_{j=1,\ldots,n} y_j = 1$ et $y_j \geq 0$ pour $j = 1, \ldots, n$.

1. Vérifiez que si on fixe une distribution x pour *Max* et une distribution y pour *Min* alors en moyenne le gain de *Max* est $x^T Ay$.
2. Supposons que *Max* annonce sa distribution x à l'avance. Dans ce cas *Min* cherche à minimiser le gain de *Max* : $min_y \ x^T Ay$. De façon symétrique si *Min* annonce sa distribution y à l'avance alors *Max* cherche à maximiser : $max_x \ x^T Ay$. Prouvez que pour toutes distributions x et y :

   $$min_y \ x^T Ay \leq x^T Ay \leq max_x \ x^T Ay \ ,$$

   et dérivez de ce fait l'inégalité :

   $$max_x(min_y x^T Ay) \leq min_y(max_x x^T Ay) \ . \tag{28.4}$$

3. Supposons que *Max* a annoncé sa distribution x. Pour trouver une distribution y qui minimise le gain de *Max*, *Min* considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$min\{(x^T A)y \mid \Sigma_{j=1,\ldots,n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\} \ . \tag{28.5}$$

Montrez que ce problème peut être simplifié en :

$$min\{x^T a_j \mid j = 1, \ldots, n\} \ , \tag{28.6}$$

où a_j est la j-ème colonne de la matrice A (la proposition 48 peut être utile).

4. Montrez que le calcul de $max_x(min_y \ x^T Ay)$ peut s'exprimer par le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$max\{x_0 \mid A^T x - \mathbf{1}x_0 \geq 0, \mathbf{1}x = 1, x \geq 0\} \ . \tag{28.7}$$

5. Supposez maintenant que *Min* annonce sa distribution y. En suivant un raisonnement symétrique conclure que le calcul de $min_y(max_x \ x^T Ay)$ se réduit au problème d'optimisation linéaire suivant :

$$min\{y_0 \mid Ay - \mathbf{1}y_0 \leq 0, \mathbf{1}y = 1, y \geq 0\} \ . \tag{28.8}$$

6. En utilisant le problème 27.5.6, vérifiez que le problème (28.8) est le dual du problème (28.7) et concluez que l'inégalité (28.4) est en effet une égalité (connue comme théorème minimax pour les jeux à somme nulle).
7. On considère la matrice de gain suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculez une distribution optimale pour *Max* et pour *Min* en utilisant les problèmes (28.7) et (28.8), respectivement. Quel est le gain attendu pour *Max* et pour *Min* ?

28.6.3 Mise en oeuvre simplexe

Mettez en oeuvre l'algorithme du simplexe décrit dans ce chapitre 28. En particulier, programmez les fonctions suivantes.

1. Une fonction qui construit le tableau initial à partir de la forme canonique en supposant $b \geq 0$.
2. Les fonctions qui permettent de calculer la variable entrante et la variable sortante. En option, vous pouvez implémenter le *critère de Bland* qui consiste à sélectionner toujours la variable avec le plus petit indice parmi celles éligibles.
3. Une fonction qui effectue les opérations de mise à jour du tableau par rapport au pivot désigné.
4. Une fonction qui coordonne l'exécution des fonctions précédentes et qui calcule la solution optimale d'un problème en forme canonique si elle existe et à défaut précise que le problème est non-borné.
5. Adaptez votre programme pour qu'il utilise la représentation exacte des nombres rationnels disponible dans le module fractions de python3 et visualise le tableau obtenu à la fin du calcul (on peut tester les exemples 71 et 72).

28.6.4 Recherche solution basique initiale

On se propose d'intégrer la recherche d'une solution basique initiale à l'algorithme du simplexe. Comme dans le problème 28.6.3, on suppose que initialement le problème est en forme canonique :

$$max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \tag{28.9}$$

mais cette fois on suppose que $b \not\geq 0$. On considère la méthode suivante :

- On ajoute au problème (28.9) les variables d'écart y_i de façon à obtenir une forme équationnelle.
- Pour chaque ligne i avec $b_i < 0$, on multiplie la ligne i par -1 et on ajoute une *nouvelle* variable d'écart z_i. On obtient ainsi une forme équationnelle et une solution basique admissible avec comme variables basiques les nouvelles variables d'écart z_i et les variables d'écart y_i qui correspondent aux $b_i \geq 0$.
- On exprime la fonction de coût auxiliaire $\mathbf{1}^T z$ en fonction des variables non-basiques et on introduit dans le tableau une nouvelle ligne qui représente cette fonction de coût (il y a donc deux lignes pour deux fonctions de coût).
- On exécute l'algorithme du simplexe par rapport à la fonction de coût auxiliaire. Quand on arrive à la solution optimale on a 3 possibilités.
  - L'optimum de la fonction auxiliaire est strictement négatif : le problème de départ (28.9) n'a pas de solution admissible.
  - L'optimum de la fonction auxiliaire est 0 et les variables z_i ne sont pas parmi les variables basiques : on a une solution basique admissible du problème de départ (28.9) ; on supprime les colonnes des variables z_i et la ligne de la fonction de coût auxiliaire et on applique l'algorithme du simplexe.
  - L'optimum de la fonction auxiliaire est 0 mais certaines variables z_i sont basiques avec valeur nulle : on remplace chaque variable z_i par une variable x_j ou y_k non-basique tout en gardant les valeurs de ces variables à 0. Ensuite on procède comme dans le point précédent.

1. Appliquez l'algorithme qu'on vient de décrire au problème :

$$max\{x_1 + 2x_2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 3, x_1 - 2x_2 \leq -1, x_1, x_2 \geq 0\} \ . \tag{28.10}$$

2. Généralisez votre mise-en-oeuvre de l'algorithme du simplexe (problème 28.6.3) pour qu'elle traite aussi les problèmes canoniques de la forme 28.9 avec un vecteur b arbitraire. Testez sur le problème (28.10).

28.6.5 Algorithme dual

On considère un problème d'optimisation dans la forme équationnelle suivante :

$$max\{c_N^T x_N \mid x_B + A_N x_N = b, x_B, x_N \geq 0\} \tag{28.11}$$

Ce problème se représente directement comme un tableau. On suppose que $c_N \leq 0$. Dans ce cas si $b \geq 0$, $x_B, x_N = b, 0$ est une solution optimale du problème. On s'intéresse à la situation où $b \not\geq 0$. Dans ce cas, on a une solution basique *non-admissible*. Un pas de l'algorithme *dual* du simplexe procède comme suit :

- on sélectionne un $b_i < 0$,

— on cherche j tel que :

$$c_j/a_{i,j} = min\{c_k/a_{i,k} \mid a_{i,k} < 0\} \ ,$$

si pour tout j, $a_{i,j} \geq 0$ alors le problème n'a pas de solution,

— on effectue un pivot par rapport à $a_{i,j}$.

On rappelle que dans l'algorithme 'primal' on cherche une colonne j avec $c_j > 0$ et ensuite une ligne i avec $a_{i,j} > 0$ et qui minimise le ratio $b_i/a_{i,j}$. Dans l'algorithme 'dual' qu'on vient de décrire, on cherche un ligne i avec $b_i < 0$ et ensuite une colonne j avec $a_{i,j} < 0$ et qui minimise le ratio $c_j/a_{i,j}$. Le pas de pivot 'primal' cherche à rendre le vecteur de coût non-positif tout en gardant le vecteur b non-négatif. Le pas de pivot 'dual' cherche à rendre le vecteur b non-négatif tout en gardant le vecteur de coût non-positif. On considère une application de l'algorithme dual au tableau :

-	-3	-1	0	0	0
x_3	-1	-1	1	0	-1
x_4	-2	-3	0	1	-2

(28.12)

On choisit x_4 comme sortante et x_2 comme entrante. On dérive :

-	$-7/3$	0	0	$-1/3$	$2/3$
x_3	$-1/3$	0	1	$-1/3$	$-1/3$
x_2	$2/3$	1	0	$-1/3$	$2/3$

On choisit x_4 comme entrante et x_3 comme sortante. On dérive :

-	-2	0	-1	0	1
x_4	1	0	-3	1	1
x_2	1	1	-1	0	1

qui est optimale et donne comme solution $(x_1, x_2) = (0, 1)$ avec -1 comme valeur de la fonction objectif.

1. On se propose de vérifier que l'algorithme dual est rien d'autre que l'algorithme primal sur le problème dual exécuté sur le tableau du problème primal. Vérifiez que :
   — le problème (28.11) est équivalent au problème en forme canonique suivant :

   $$max\{c_N^T x_N \mid A_N x_N \leq b, x_N \geq 0\} \ , \tag{28.13}$$

   — le problème dual de (28.13) peut s'écrire comme :

   $$max\{y^T(-b) \mid -A_N^T y + z = -c_N, y, z \geq 0\} \ , \tag{28.14}$$

   — l'algorithme *dual* décrit ci-dessus revient à appliquer l'algorithme primal sur le problème (28.14) en utilisant le tableau du problème primal (28.11).
2. Mettez en oeuvre l'algorithme dual en adaptant la stratégie adoptée dans le problème 28.6.3 pour l'algorithme primal. Testez sur le tableau (28.12).

Chapitre 29

Optimisation linéaire en nombres entiers

Un problème d'*optimisation (ou programmation) linéaire en nombres entiers* est un problème d'optimisation linéaire tel que :

$$max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \ , \tag{29.1}$$

avec *en plus* les contraintes suivantes :

— les coefficients dans c, A et b sont *rationnels*,

— certaines composantes du vecteur x doivent être *entières*.

Parfois, on parle aussi d'optimisation linéaire *mixte* si seulement un sous-ensemble strict des composantes de x doivent être entières. Il s'agit d'un problème difficile à la fois en théorie et en pratique.

Exercice 37 *1. Considérez le problème canonique :*

$$max\{x + y \mid 3x + 8y \leq 24, 3x - 4y \leq 6, x, y \geq 0\}$$

Dessinez les solutions admissibles *et déterminez une* solution optimale *pour les* 4 *cas : x, y rationnels, x, y entiers, x rationnel, y entier, x entier, y rationnel.*

2. Considérez le problème suivant :

$$max\{x \mid x, y \geq 0 \ entiers, \frac{(x-1)}{(n-2)} \leq y \leq \frac{x}{n}\}$$

où $n \geq 3$ est un entier. Déterminez en fonction de n la distance *entre la solution du problème en* nombres entiers *et son* relâchement.

29.1 Modélisation

On présente un petit nombre d'exemples qui illustrent comment les contraintes en nombres entiers ouvrent des nouvelles possibilités de modélisation.

Problème SAT

On suppose que le lecteur est familier avec le calcul propositionnel. Une formule du calcul propositionnel est *satisfaisable* s'il existe une affectation de valeurs booléennes aux variables de la formule qui rendent la formule vraie. On dit qu'elle est en *forme normale conjonctive (CNF)* si elle est la conjonction de disjonctions de littéraux, où un littéral est ou bien une variable booléenne ou bien sa négation. Le problème de déterminer les formules en CNF qui sont satisfaisables est NP-complet et ce problème admet une simple réduction au problème de savoir si un système linéaire en nombres entiers a une solution.

— On traduit chaque variable booléenne x de la formule comme une variable *entière* x avec les inégalités $0 \leq x \leq 1$.
— On traduit la négation d'une variable booléenne $\neg x$ par $(1 - x)$.
— A chaque clause $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ de la formule on associe l'inégalité :

$$\underline{\ell}_1 + \cdots + \underline{\ell}_n \geq 1$$

où ℓ_i est un littéral et $\underline{\ell}_i$ sa traduction, pour $i = 1, \ldots, n$.
— La conjonction de clauses devient le système d'inégalités associées plus les inégalités sur les variables.
— La CNF est satisfaisable ssi le système d'inégalités associé admet une solution entière.

Remarque 37 *1. L'hypothèse que les variables sont entières est essentielle. Par exemple, considérez une CNF où chaque clause contient exactement deux littéraux différents. On peut* toujours *trouver une solution au système d'inégalités associé si on affecte à toutes les variables le nombre rationnel* $1/2$.

2. On peut utiliser une fonction objectif quadratique *pour forcer* $x_i \in \{0, 1\}$ *pour* $i = 1, \ldots, n$. *Si on minimise la fonction*

$$min\ \Sigma_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_i^2)$$

avec codification de la CNF par des contraintes linéaires selon la méthode qu'on vient de présenter alors on a que le minimum *du problème est* 0 *ssi la CNF est* satisfaisable.

Contraintes alternatives

Considérons deux systèmes d'inégalités : $A_1 x \leq b_1$ et $A_2 x \leq b_2$. On aimerait exprimer la contrainte que x satisfait ou bien le premier ou bien le deuxième système. En termes géométriques, on souhaite que x appartienne à l'union des polyèdres décrits par le premier et le deuxième système (qui en général n'est pas un polyèdre).

On dénote par $\mathbf{k}$ un vecteur de constantes $(k, \ldots, k)$ et on fait l'hypothèse qu'en pratique tout x intéressant satisfait :

$$A_i x \leq b_i + \mathbf{k}, \quad i = 1, 2\ .$$

On introduit une variable entière $\delta \in \{0, 1\}$ et on réécrit les contraintes de la façon suivante :

$$A_1 x \leq b_1 + \delta\mathbf{k}\ , \qquad A_2 x \leq b_1 + (1 - \delta)\mathbf{k}\ .$$

Si $\delta = 0$ alors on a $A_1 x \leq b_1$ et $A_2 x \leq b_2 + \mathbf{k}$ qui est toujours satisfait d'après notre hypothèse. De façon symétrique, si $\delta = 1$ on a $A_2 \leq b_2$ et $A_1 x \leq b_1 + \mathbf{k}$.

Exemple 75 (module) *On veut exprimer la contrainte $z = |x|$. Ceci revient à dire :*

$$x \leq 0, z + x \leq 0, -z - x \leq 0 \quad ou \quad -x \leq 0, z - x \leq 0, -z + x \leq 0 \ .$$

On transforme, pour $\delta \in \{0, 1\}$, en :

$$x \leq \delta k, z + x \leq \delta k, -z - x \leq \delta k \quad et \quad -x \leq (1-\delta)k, z - x \leq (1-\delta)k, -z + x \leq (1-\delta)k \ .$$

Exemple 76 (max) *On veut exprimer la contrainte $z = max(x, y)$. Ceci revient à dire :*

$$x - y \leq 0, z - y \leq 0, y - z \leq 0 \quad ou \quad y - x \leq 0, z - x \leq 0, x - z \leq 0 \ .$$

On transforme, pour $\delta \in \{0, 1\}$, en :

$$x - y \leq \delta k, z - y \leq \delta k, y - z \leq \delta k \quad et \quad y - x \leq (1-\delta)k, z - x \leq (1-\delta)k, x - z \leq (1-\delta)k \ .$$

Fonctions affines par morceaux

On suppose que f est une fonction affine par morceaux. La fonction peut être décrite par un ensemble de points $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \mathbf{R}^2$ où $a_1 < \cdots < a_n$. Graphiquement, la fonction f connecte avec un segment le point (a_i, b_i) avec le point (a_{i+1}, b_{i+1}), pour $i = 1, \ldots, n-1$. On sait que toute valeur x dans l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ peut être exprimée comme une combinaison convexe des extrémités de l'intervalle :

$$x = \lambda a_i + (1 - \lambda) a_{i+1}, \qquad \text{pour } \lambda \in [0, 1] \ .$$

En utilisant cette représentation de x on peut exprimer $f(x)$ par :

$$f(x) = \lambda b_i + (1 - \lambda) b_{i+1} \ .$$

On peut voir tout point x dans l'intervalle $[a_1, a_n]$ comme une combinaison convexe des points $a_1, \ldots, a_n$:

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_n a_n, \text{où } \Sigma_{i=1,\ldots,n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \ .$$

Si on prend la combinaison convexe des points $b_1, \ldots, b_n$:

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \ ,$$

on n'obtient pas forcement $f(x)$. Pour ce faire, il faut forcer la propriété qu'au plus deux coefficients λ_i consécutifs sont différents de zéro. On peut exprimer cette propriété en introduisant $n - 2$ variables $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n-2$ et en ajoutant les contraintes :

$$\lambda_i \leq \delta_i, \quad \Sigma_{j=i+2,\ldots,n} \ \lambda_i \leq (1 - \delta_i) \qquad (i = 1, \ldots, n-2). \tag{29.2}$$

Si au plus deux coefficients λ_i sont positifs et ces coefficients sont consécutifs alors on peut satisfaire les contraintes (29.2). Par exemple, si $\lambda_i > 0$ et $\lambda_{i+1} = (1 - \lambda_i) > 0$ avec $i < n - 2$ alors on pose $\delta_i = \delta_{i+1} = 1$ et $\delta_j = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$.

D'autre part, si les contraintes (29.2) sont satisfaites alors il y a au plus deux coefficients positifs et ces coefficients sont consécutifs. En effet soit $i = min\{j \mid \lambda_j > 0\}$. Si $i \in \{n-1, n\}$ l'assertion est vraie. Si $i \leq (n-2)$ alors on doit avoir $\lambda \leq \delta_i = 1$ et donc :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+2} = \cdots = \lambda_n = 0 \ .$$

29.2 Contraintes en nombres entiers et relâchement

On illustre la différence entre un problème avec contraintes en nombres entiers et son relâchement linéaire. Soit $G = (N, A)$ un graphe fini non-dirigé. Un ensemble de noeuds $X \subseteq N$ est :

- un *recouvrement* si pour tout $e \in A$, $X \cap e \neq \emptyset$; de plus il est minimum s'il a un nombre *minimum* de noeuds et *minimal* si on ne peut pas supprimer un noeud sans perdre la propriété d'être un recouvrement.
- *indépendant* si pour tout $x, y \in X$ ($\{x, y\} \notin A$) ; de plus il est *maximum* s'il a un nombre maximum de noeuds et *maximal* si on ne peut pas ajouter un noeud sans perdre la propriété d'indépendance.

Exemple 77 *On prend un graphe $G = (N, A)$ avec la forme d'une étoile avec un noeud 0 au centre et tous les autres noeuds autour, à savoir $N = \{0, \ldots, n\}$ et $A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \ldots, \{0, n\}\}$. Dans ce cas $\{0\}$ est un recouvrement minimum et $\{1, \ldots, n\}$ un recouvrement minimal. Notez aussi que $\{1, \ldots, n\}$ est un ensemble indépendant maximum et $\{0\}$ un ensemble indépendant maximal. On va montrer que ceci n'est pas un hasard.*

Proposition 38 *Soit $G = (N, A)$ un graphe fini non-dirigé et $X \subseteq N$. Alors X est un recouvrement (minimal, minimum) ssi $N \backslash X$ est indépendant (maximal, maximum).*

Preuve. ($\Rightarrow$) Si X est un recouvrement et $x, y \in (N \backslash X)$ alors $\{x, y\} \notin A$ car autrement X ne recouvre pas $\{x, y\}$. Supposons en plus que X est minimal. On veut montrer que $N \backslash X$ est maximal. Soit $x \in X$. S'il n'y a pas d'arête entre x et $(N \backslash X)$ alors $X \backslash \{x\}$ est encore un recouvrement. Contradiction. Supposons en plus que X est minimum. On sait que $\sharp N = \sharp X + \sharp(N \backslash X)$. Donc $(N \backslash X)$ est maximum.

($\Leftarrow$) Si $(N \backslash X)$ est indépendant et $\{x, y\} \in A$ alors $x \in X$ ou $y \in X$ et donc $X \cap \{x, y\} \neq \emptyset$. On laisse au lecteur les autres cas. □

On peut formuler les problèmes du recouvrement minimum et de l'ensemble indépendant maximum en introduisant les variables $x_n \in \{0, 1\}$ pour $n \in N$ et en posant :

$$\begin{array}{l|l} \textit{min } \Sigma_{n \in N}\ x_n & \textit{max } \Sigma_{n \in N}\ x_n \\ x_n + x_m \geq 1 \quad \{n, m\} \in A & x_n + x_m \leq 1 \quad \{n, m\} \in A \end{array}$$

Pour obtenir un problème d'optimisation linéaire, il est naturel de relâcher les contraintes sur les variables en supposant $0 \leq x_n \leq 1$ pour $n \in N$. La qualité de la solution du problème relâché par rapport au problème d'origine est très différente selon que l'on considère la question du recouvrement minimum ou de l'ensemble indépendant maximum.

Pour le premier problème on peut montrer qu'à partir de la solution du problème relâché, on peut dériver par arrondi un recouvrement qui a au plus deux fois plus de noeuds que le recouvrement minimum.

Proposition 39 *Soit x un optimum pour le problème du recouvrement minimum et soit y un optimum pour le problème relâché. On définit pour $n \in N$:*

$$z_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } y_n \geq 1/2 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Alors z est une solution du problème du recouvrement et en plus $\Sigma_{n \in N}\ z_n \leq 2 \cdot \Sigma_{n \in N}\ x_n$.

PREUVE. Soit $\{n, n'\} \in A$ et y une solution du problème relâché. Alors on doit avoir $y_n + y_{n'} \geq 1$ et donc $y_n \geq 1/2$ ou $y_{n'} \geq 1/2$. Il suit que z est une solution du problème de départ. Maintenant, on remarque que :

$$\begin{aligned} \Sigma_{n\in N}\ x_n &\leq \Sigma_{n\in N}\ z_n \qquad \text{(car } x \text{ est optimal)} \\ &= \Sigma_{n\in N, y_n \geq 1/2}\ 1 \leq 2(\Sigma_{n\in N, y_n\geq 1/2}\ y_n) \leq 2(\Sigma_{n\in N}\ y_n) \\ &\leq 2(\Sigma_{n\in N} x_n) \qquad \text{(car } y \text{ est optimal pour le problème relâché).} \end{aligned}$$ □

29.3 Unimodularité

On étudie une classe de problèmes d'optimisation en nombres entiers qui peuvent être relâchés sans perte de précision et qui comprennent des problèmes classiques en théorie des graphes comme la recherche d'un plus court chemin, un couplage biparti ou un flot maximum.

Définition 47 (unimodulaire et tum) *Soit A une matrice de dimension $m \times n$ à coefficients entiers.*

1. *A est unimodulaire si elle est carrée et $det(A) \in \{1, -1\}$.*
2. *A est totalement unimodulaire (abrégé en* tum*) si le déterminant de chaque sous-matrice carrée est dans $\{0, 1, -1\}$ (en d'autres termes, toute sous-matrice carrée inversible doit être unimodulaire).* [1]

Proposition 40 *Soit A une matrice de dimension $m \times n$ à coefficients entiers.*

1. *Si A est unimodulaire alors A^{-1} est unimodulaire.*
2. *Si A est tum alors les matrices suivantes sont tum aussi :*
   - *la matrice transposée A^T,*
   - *la matrice $[A|-A]$ obtenue en ajoutant à A l'opposé des colonnes de A,*
   - *la matrice $[A|I]$ obtenue en ajoutant à A les colonnes d'une matrice identité $m \times m$.*

PREUVE. (1) On rappelle que :

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)}\, com(A) \quad \text{et} \quad 1 = det(AA^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1})\ , \tag{29.3}$$

où les coefficients de la comatrice $com(A)$ s'expriment comme des déterminants de sous-matrices de A. Donc la matrice A^{-1} est aussi à coefficients entiers et $det(A^{-1}) \in \{1, -1\}$. Il suit que A^{-1} est unimodulaire.

(2) Une sous-matrice carrée B de A^T est la transposée d'une sous-matrice carrée de A et on rappelle que $det(B^T) = B$.

Si on permute deux colonnes de A ou si on change le signe d'une colonne la matrice obtenue reste tum. Une sous-matrice carrée inversible B de $[A|-A]$ peut être vue comme une sous-matrice carrée de A modulo des permutations de colonnes et changements de signe.

Soit B une sous-matrice carrée inversible de $[A|I]$. On peut permuter les lignes de B pour qu'elle ait la forme suivante :

$$B = \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \\ D & I_k \end{array}\right]$$

où C est une sous-matrice carrée de A, 0 est une matrice nulle et I_k une matrice identité ($k \geq 0$). Il suit que $|det(B)| = |det(C)| = 1$. □

1. Une sous-matrice est obtenue d'une matrice en sélectionnant un sous-ensembles de lignes et de colonnes pas forcement contiguës.

Proposition 41 *Soient A une matrice $m \times n$ tum, b un vecteur* à coefficients entiers *de dimension m et c un vecteur (pas forcement entier) de dimension n. Si les problèmes d'optimisation linéaire :*

$$(1) \quad max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad et \quad (2) \quad max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\},$$

admettent une solution (optimale) alors ils admettent une solution (optimale) entière.

PREUVE. On peut simplifier la contrainte $Ax = b$ jusqu'à avoir une matrice de rang m. Ensuite on va montrer que toutes les solutions basiques du problème (1) en forme équationnelle sont entières. En effet, ces solutions s'expriment comme $(A_B)^{-1}b$ où A_B est un sous-ensemble de m colonnes linéairement indépendantes de A. Comme A est tum, A_B est unimodulaire et son inverse aussi (proposition 40(1)). Par la proposition 36, on sait que si le problème (1) a une solution (optimale) alors il a une solution basique (optimale).

Un problème de type (2) est en forme canonique et on sait qu'il se réécrit comme un problème de type (1) en ajoutant des variables d'écart qui correspondent à une matrice identité. Par la proposition 40(2), la matrice $[A|I]$ obtenue est encore tum et on peut appliquer l'argument pour les problèmes de type (1). □

Proposition 42 *Soit A une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$ et qui, sur chaque colonne, contient au plus deux coefficients non-nuls. Alors A est tum si on peut partitionner les lignes de A en deux ensembles L_1, L_2 (pas forcement non-vides) tels que pour toute colonne avec deux coefficients non-nuls :*

- *si les coefficients ont le même signe alors ils sont dans deux lignes séparées par la partition,*
- *si les coefficients ont signes opposés alors ils sont dans deux lignes qui sont dans le même ensemble de la partition.*

PREUVE. Par récurrence sur la dimension d'une sous-matrice carrée B de A. Toute sous-matrice inversible de dimension 1 est unimodulaire. Si B contient une colonne de 0 alors le déterminant est nul. Si B contient une colonne avec un seul élément non-nul alors on développe le déterminant par rapport à cette colonne et on conclut par hypothèse de récurrence. Si chaque colonne de B contient deux entrées non-nulles alors la somme des lignes dans L_1 est égale à la somme des lignes dans L_2. Donc le déterminant de B est nul. □

Définition 48 (matrice d'incidence) *Soit $G = (N, A)$ un graphe avec $m = \sharp N$ noeuds et $n = \sharp A$ arêtes. La* matrice d'incidence *M_G est une matrice M_G $m \times n$ à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$. Si G est une graphe* dirigé *on a :*

$$M_G[i, (j, k)] = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ -1 & si\ i = k \\ 0 & autrement \end{cases}$$

et si G est un graphe non-dirigé *on a :*

$$M_G[i, \{j, k\}] = \begin{cases} 1 & si\ i \in \{j, k\} \\ 0 & autrement. \end{cases}$$

Proposition 43 *Les matrices d'incidence d'un graphe dirigé ou d'un graphe non-dirigé* biparti *sont tum.*

PREUVE. Par application de la proposition 42. Dans le cas dirigé, on met toutes les lignes dans le même ensemble de la partition et dans le cas non-dirigé la bipartition du graphe détermine celle des lignes. □

Exemple 78 (plus court chemin) *Soit $G = (N, A, c)$ un graphe dirigé pondéré avec $N = \{1, \ldots, n\}$, $A \subseteq N \times N$ et $c : A \to \mathbf{R}^{>0}$ ($\mathbf{R}^{>0}$ sont les nombres réels strictement positifs). Un chemin simple entre le noeud 1 et le noeud n est une suite de noeuds $1, i_2, \ldots, i_k, n$ sans répétitions telle que $(1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_k, n) \in A$. La longueur d'un tel chemin est :*

$$c(1, i_2) + c(i_2, i_3) + \cdots + c(i_k, n) \ .$$

On cherche un chemin simple de longueur minimale et on considère la formulation du problème comme un problème d'optimisation linéaire (en nombres entiers). Pour chaque arête (i, j) on introduit une variable $x_{(i,j)} \in \{0, 1\}$ avec l'idée que $x_{(i,j)} = 1$ ssi l'arête (i, j) fait partie du chemin. On cherche à optimiser

$$min \ \Sigma_{(i,j)\in A} c(i, j) \cdot x_{(i,j)}$$

avec les contraintes *:*

$$\Sigma_{(i,j)\in A} \ x_{(i,j)} - \Sigma_{(k,i)\in A} \ x_{(k,i)} = b_i \ , \quad b_i = \begin{cases} 1 & si \ i = 1 \\ -1 & si \ i = n \\ 0 & autrement \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

Soit $G' = (N, A')$ le sous-graphe de G tel que $A' = \{(i, j) \mid x_{(i,j)} = 1\}$. Les contraintes expriment la condition que pour chaque noeud i dans G', la différence entre arêtes entrantes et arêtes sortantes doit être nulle *sauf pour le noeud 1 qui a une arête sortante en excès et le noeud n qui a une arête entrante en excès.*

Il est immédiat de vérifier que tout chemin simple de 1 à n satisfait ces contraintes. Dans l'autre sens, on va montrer qu'une solution optimale *du problème correspond à un chemin simple de 1 à n. Soit G' le sous-graphe associé a une solution optimale du problème. On remarque que G' ne peut pas contenir de cycles. Autrement, on peut supprimer le cycle et obtenir une solution du problème avec une fonction objectif strictement inférieure (condition $c(i, j) > 0$). Donc G' doit être un graphe dirigé* acyclique*. Considérons un chemin qui part du noeud 1. Il doit y avoir au moins une arête sortante de 1 et ensuite chaque fois qu'on entre dans un noeud différent de n il doit y avoir une arête sortante. Comme on ne peut pas revenir à un noeud déjà visité (acyclicité) le chemin en question doit arriver au noeud n. On a donc un chemin simple de 1 à n et on ne peut pas avoir une arête qui est dans G' mais pas dans le chemin car ceci violerait encore une fois la condition d'optimalité.*

On peut reformuler les contraintes en utilisant la matrice d'incidence M_G du graphe G (définition 48) et le vecteur $\mathbf{d} = (1, 0, \ldots, 0, -1)^T$:

$$M_G \ x = d \ .$$

On peut remplacer l'équation par des inégalités et ajouter les contraintes $x_{(i,j)} \leq 1$ (comme on minimise, ceci n'est pas strictement nécessaire) pour obtenir ($\mathbf{1}$ est un vecteur de 1) :

$$\begin{bmatrix} M_G \\ -M_G \\ I \end{bmatrix} \ x \ \leq \ \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{d} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{29.4}$$

La matrice M_G est tum ; on applique la proposition 42 en mettant toutes les ligne dans le même ensemble de la partition. Par la proposition 40, il suit que : (i) M_G^T est tum, (ii) $[M_G^T \mid -M_G^T]$ est tum et (iii) $[M_G^T \mid -M_G^T \mid I]$ est tum aussi. Cette dernière matrice est la transposée de celle du système (29.4) qui est donc tum. Par la proposition 41, on peut donc relâcher le problème et être assuré de trouver une solution optimale entière si une solution optimale existe (ce qui est le cas ssi il y a un chemin de 1 à n).

Exemple 79 (couplage biparti pondéré) *Soit $G = (N, A, c)$ un graphe non-dirigé biparti et pondéré. On a donc une fonction $c : A \to \mathbf{R}^{>0}$ des arêtes aux réels positifs, une partition des noeuds N en deux ensembles N_0, N_1 et on suppose que chaque arête $a \in A$ est incident sur un noeud dans N_0 et un noeud dans N_1. Un couplage des noeuds dans N_0 avec les noeuds dans N_1, est un sous-ensemble $C \subseteq A$ des arêtes tel que chaque noeud est incident sur au plus une arête dans C. Parmi les couplages, on en cherche un qui maximise la quantité $\Sigma_{a \in C} c(a)$.*

On reformule ces problème comme un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers en introduisant une variables $x_{\{i,j\}} \in \{0, 1\}$, pour chaque arête $\{i, j\} \in A$, avec l'interprétation que $x_{\{i,j\}} = 1$ ssi $\{i, j\}$ est dans le couplage. On cherche donc à optimiser :

$$max\ \Sigma_{a \in A}\ c(a) \cdot x_a\ ,$$

avec les contraintes :

$$\Sigma_{i \in a, a \in A} x_a \leq 1\ , \quad pour\ i \in N\ ,$$

qui expriment la condition que chaque noeud est au plus dans une arête du couplage. Comme dans le cas précédent, on peut exprimer ces contraintes en utilisant la matrice d'incidence M_G du graphe G et ajouter les contraintes $x_{(i,j)} \leq 1$ pour obtenir ($\mathbf{1}$ est un vecteur de 1) :

$$\begin{bmatrix} M_G \\ I \end{bmatrix} \quad x \quad \leq \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{29.5}$$

Notez que dans ce cas la bipartition du graphe induit une bipartition des lignes de la matrice d'incidence M_G. On applique à nouveau les propositions 40 et 42 pour montrer qu'on obtient une matrice tum.

Exemple 80 (flot maximum) *On rappelle la modélisation du problème du flot maximum présentée dans la section 27.2. Soit N un ensemble de noeuds et pour chaque couple de noeuds (i, j) soit $c(i, j)$ la* capacité *(non-négative) de l'arête. Par convention, on désigne 1 comme le noeud* source *et n comme le noeud* destination. *On rappelle que $x(i, j)$ désigne le* flot net *du noeud i au noeud j. On peut se limiter à décrire le flot $x(i, j)$ pour $i < j$ car par définition du flot, $x(i, i) = 0$ et $x(j, i) = -x(i, j)$. On cherche donc à maximiser la quantité :*

$$\Sigma_{j \in N \setminus 1} x(1, j)\ .$$

Le flot doit respecter les contraintes de capacité, à savoir :

$$-c(j, i) \leq x(i, j) \leq c(i, j)\ pour\ 1 \leq i < j \leq n\ ,$$

Il est donc inutile d'analyser un flot $x(i, j)$, $i < j$ tel que $c(i, j) = c(j, i) = 0$ car dans ce cas on sait à priori que $x(i, j) = 0$. Le flot doit respecter la loi de conservation *:*

$$\Sigma_{i<j} x(i, j) = \Sigma_{j<k} x(j, k) \qquad j \in \{2, \ldots, n-1\}\ .$$

Un flot peut avoir des valeurs fractionnaires mais on va montrer que si les capacités sont entières alors on peut toujours trouver un flot optimal en nombres entiers. On remarque qu'on peut exprimer les contraintes énoncées ci-dessus sous forme matriciale. Soit $A = \{(i,j) \mid i < j \text{ et } (c(i,j) > 0 \text{ ou } c(j,i) > 0)\}$. *On considère le graphe dirigé* $G = (N, A)$ *et la matrice d'incidence* M_G. *On ajoute les contraintes sur les capacités et on arrive à conclure que la matrice en question est tum.*

29.4 Systèmes d'équations linéaires en nombres entiers

Il est possible de résoudre en temps polynomial un système d'équations linéaires en nombres entiers (aussi connu comme système d'équations *diophantiennes* linéaires). Donc au moins pour les *équations* on dispose d'un algorithme efficace. Il se trouve que le calcul du plus grand commun diviseur (*pgcd*) avec l'algorithme d'Euclide (étendu) et la notion de matrice unimodulaire jouent un rôle important dans la conception de l'algorithme qu'on va décrire. Soient A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension m. On suppose que A et b ont des coefficients rationnels et on cherche à savoir s'il y a un vecteur x entier tel que $Ax = b$. Sans perte de généralité, on va supposer que le rang de A est m (les lignes de A sont linéairement indépendantes). Aussi, en multipliant A et b par le plus grand commun multiple des dénominateurs on peut se réduire au cas où les coefficients de A et b sont entiers.

Sans la contrainte 'x entier', le système $Ax = b$ peut être résolu avec une méthode standard comme l'élimination de Gauss. Clairement, il peut arriver qu'un système ait une solution sur les rationnels mais pas sur les entiers ; considérez, par exemple, $3x = 7$. Il peut aussi arriver que le système ait une infinité de solutions dans les rationnels et aucune dans les entiers ; par exemple, $3x + 6y = 7$. Plus en général, l'équation $ax + by = c$ a une solution entière ssi $pgcd(a,b)$ divise c. En effet, on sait (théorème de Bezout) que les combinaisons linéaires entières de a et b sont exactement les multiples de $pgcd(a,b)$, où l'on observe la convention que $pgcd(0,0) = 0$. On sait aussi qu'une simple extension de l'algorithme d'Euclide pour le calcul du *pgcd* permet de calculer x, y tel que $ax + by = pgcd(a,b)$.

La version étendue de l'algorithme d'Euclide est l'opération de base qui va nous permettre de résoudre le système en nombres entiers $Ax = b$. Plus précisément, on va utiliser le calcul du *pgcd* pour transformer la matrice A en une forme triangulaire inférieure qu'on appelle forme normale d'Hermite.

Définition 49 (forme normale d'Hermite) *Une matrice* H *de dimension* $m \times n$ *à coefficients entiers non-négatifs est en forme normale d'Hermite si elle a la forme* $[D \mid 0]$ *où* 0 *est une matrice de* 0 *de dimension* $m \times (n - m)$ *et* D *est une matrice carrée et triangulaire* inférieure *de dimension* $m \times m$ *telle que chaque élément sur la diagonale est strictement positif et strictement supérieur aux autres éléments qui se trouvent (à gauche) sur la même ligne.* [2]

Par exemple, la matrice suivante est en forme normale d'Hermite :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

On va voir qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $AU = H$ est en forme normale d'Hermite. La matrice U est construite comme le produit de matrices unimodulaires qui

2. Il existe une version alternative de cette définition dans laquelle on demande à que D soit une matrice triangulaire *supérieure*.

effectuent certaines combinaisons linéaires de colonnes de la matrice A. Pour décrire ces matrices, on dénote par $M(i, j, v_1, v_2, v_3, v_4)$ une matrice de dimension $n \times n$ telle que $1 \leq i < j \leq n$ et qui coïncide avec la matrice identité sauf dans les 4 positions suivantes ($M_{i,j}$ est l'entrée de la matrice qui se trouve à la ligne i et la colonne j) :

$$M_{i,i} = v_1, \quad M_{i,j} = v_2, \quad M_{j,i} = v_3, \quad M_{j,j} = v_4 \ .$$

Proposition 44 *Soient $1 \leq i < j \leq n$ et $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Soient $g = pgcd(a, b) = ax + by$, $q_a = a/g$ et $q_b = b/g$. Alors $M(i, j, x, -q_b, y, q_a)$ est unimodulaire.*

Preuve. Par exemple, pour $n = 5$, $i = 2$ et $j = 4$ la matrice $M(i, j, x, -q_b, y, q_a)$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -q_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & q_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $n = 2$ on a comme déterminant :

$$xq_a - (-q_b)y = \frac{ax + by}{g} = 1 \ .$$

Si $n > 2$ on peut développer par rapport à la première ligne de la matrice en utilisant les règles des déterminants. □

Soient $a_{i,j}$, pour $1 \leq i, j \leq n$ les éléments de la matrice A qu'on veut transformer en forme normale d'Hermite. En particulier, supposons avoir transformé les premières $i-1$ lignes dans la forme souhaitée. Soient $a = a_{i,i}$ et $b = a_{i,j}$ avec $i < j$ et $a_{i,i} \neq 0$ ou $a_{i,j} \neq 0$. Un effet de la multiplication à droite de la matrice A par la matrice $M(i, j, x, -q_b, y, q_a)$ est d'affecter g à $a_{i,i}$ et 0 à $a_{i,j}$. Si on répète l'opération pour tous les $a_{i,j}$ tels que $i < j$ et $a_{i,j} \neq 0$, on met à 0 tous les éléments à droite de la diagonale.

On remarque que parmi les éléments $a_{i,j}$ avec $i \leq j$ il doit y en avoir au moins un non-nul ; autrement le rang de A est inférieur à m. Si tous les éléments $a_{i,j}$ avec $i < j$ sont nuls et et $a_{i,i}$ est négatif alors on peut multiplier la colonne par -1 pour rendre $a_{i,i}$ positif. Cette opération peut aussi être vue comme la multiplication de A par une matrice unimodulaire.

Il reste à traiter les éléments $a_{i,j}$ à gauche de la diagonale ($1 \leq j < i$). Pour ce faire on calcule la division euclidienne :

$$a_{i,j} = qa_{i,i} + r \qquad 0 \leq r < a_{i,i}$$

et on soustrait q fois la colonne i à la colonne j, ce qui s'exprime par une multiplication à droite par la matrice unimodulaire $M(j, i, 1, 0, -q, 1)$.

Exemple 81 *On considère une simple application de la méthode (dans le cas en question, il n'est pas nécessaire de changer de signe et de traiter les éléments à gauche de la diagonale).*

Matrice transformée	*Transformations unimodulaires*	*Pgcd étendu*
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$pgcd(2,3) = 1 = (-1)2 + (1)3$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$pgcd(1,4) = 1 = (-3)1 + (1)4$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$pgcd(2,-2) = 2 = (2)2 + (1)(-2)$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$		

La proposition suivante résume la discussion.

Proposition 45 *Soit A une matrice $m \times n$ à coefficients entiers. Alors on peut calculer une matrice unimodulaire U telle que $H = AU$ est en forme normale d'Hermite.*

On peut montrer que la forme normale d'Hermite est calculable en temps polynomial (voir [Sch86], par exemple). Soit donc $H = AU$ en forme normale d'Hermite. La solution entière d'un système $Hy = b$ est aisée. De plus les solutions de ce système déterminent les solutions du système $Ax = b$.

Proposition 46 *Soit A de dimension $m \times n$ et rang m à coefficients entiers. Soit b un vecteur de dimension m à coefficients entiers. Soit $H = [D|0] = AU$ en forme normale d'Hermite avec U unimodulaire.*

1. *Le système $Hy = b$ a une solution ssi $D^{-1}b$ est entier et dans ce cas les solutions sont les vecteurs de la forme : $[D^{-1}b|z]^T$ où z est un vecteur d'entiers arbitraire de dimension $n - m$.*
2. *Les solutions du système $Ax = b$ sont exactement les vecteurs $U[D^{-1}b|z]^T$.*

PREUVE. (1) D est en forme triangulaire avec des éléments strictement positifs sur la diagonale. Les premières m composantes d'une solution y du système $Hy = b$ sont donc déterminées. Les $n - m$ composantes qui restent peuvent être choisies librement dans les entiers.

(2) Si $Hy = b$ alors $A(Uy) = b$. Donc Uy est une solution du système $Ax = b$. D'autre part, si $Ax = b$ alors $AUU^{-1}x = b$ donc $U^{-1}x$ est une solution du système $Hy = b$ et par (1) on doit avoir $U^{-1}x = [D^{-1}b|z]^T$, soit $x = U[D^{-1}b|z]^T$. □

Exemple 82 *On continue l'exemple 81. Dans ce cas, la matrice U est le résultat de la multiplication des 3 matrices unimodulaires et on a :*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A \cdot U \ .$$

Par exemple, soit $b = (3,4)^T$. Les solutions du système $Hy = b$ ont la forme $(3,2,z)^T$ et celles du système $Ax = b$ ont la forme :

$$U \cdot (3,2,z)^T = (1+z, -1-2z, 1+z)^T \ .$$

29.5 Enveloppe convexe et formulations

On introduit la notion d'enveloppe convexe et on discute son application au problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

Définition 50 (enveloppe convexe) *Soit $S \subseteq \mathbf{R}^n$ un ensemble de points. On dénote par $Conv(S)$ l'enveloppe convexe de S qui est définie par :*

$$Conv(S) = \{\Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i x_i \mid n \geq 1, \Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in S, i = 1,\ldots,n\}$$

Proposition 47 *L'ensemble $Conv(S)$ est le plus petit ensemble convexe qui contient S.*

Preuve. Par définition, $S \subseteq Conv(S)$. On prouve que si S est convexe alors $Conv(S) \subseteq S$. Soit $x = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i x_i$ avec $\Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i = 1$, $\lambda_i \in [0,1]$ et $x_i \in S$ pour $i = 1,\ldots,n$. On montre que $x \in S$ par récurrence sur n. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont immédiats. Si $n > 2$ on pose $\lambda = \Sigma_{i=1,\ldots,n-1}\lambda_i$. Si $\lambda = 0$ alors $x \in S$. Sinon, on remarque que par hypothèse de récurrence :

$$x' = \Sigma_{i=1,\ldots,n-1}(\lambda_i/\lambda)x_i \in S$$

et on conclut en observant que $x = \lambda x' + (1-\lambda)x_n$. Il suit que tout ensemble convexe qui contient S contient $Conv(S)$ aussi. Il reste à montrer que $Conv(S)$ est convexe. On considère deux combinaisons convexes :

$$x = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ \lambda_i x_i, \quad y = \Sigma_{j=1,\ldots,m}\ \mu_j y_j, \quad \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ \lambda_i = \Sigma_{j=1,\ldots,m}\ \mu_j = 1, \quad \lambda_i, \mu_j \in [0,1]\ ,$$

et on remarque que pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ \lambda\lambda_i x_i + \Sigma_{j=1,\ldots,m}\ (1-\lambda)\mu_j y_j \in Conv(S)\ ,$$

car $\lambda\lambda_i, (1-\lambda)\mu_j \in [0,1]$ et $\Sigma_{i=1,\ldots,n}\ \lambda\lambda_i + \Sigma_{j=1,\ldots,m}\ (1-\lambda)\mu_j = 1$. □

Proposition 48 *Soit $S \subseteq \mathbf{R}^n$ un ensemble de points, c un vecteur dans $\mathbf{R}^n$ et $z = sup\{c^T x \mid x \in S\}$. Alors :*

1. *$z = sup\{c^T x \mid x \in Conv(S)\}$.*
2. *Si $\overline{x} \in Conv(S)$ et $c^T\overline{x} = z$ alors il existe $x' \in S$ tel que $c^T x' = z$.*

Preuve. (1) Comme $S \subseteq Conv(S)$ on a que :

$$sup\{c^T x \mid x \in S\} \leq sup\{c^T x \mid x \in Conv(S)\}\ .$$

D'autre part, soit $z = sup\{c^T x \mid x \in S\}$ et soit $S' = \{x \mid c^T x \leq z\}$. On a que S' est convexe et contient S donc $Conv(S) \subseteq S'$ et :

$$sup\ \{c^T x \mid x \in Conv(S)\} \leq sup\{c^T x \mid x \in S'\} \leq z\ .$$

(2) Supposons que $c^T\overline{x} = z$ et $\overline{x} = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i x_i$ avec $\Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i = 1$, $x_i \in S$ et $\lambda_i > 0$ pour $i = 1,\ldots,n$. On a donc :

$$\begin{aligned} z &= c^T\overline{x} = c^T(\Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i x_i) = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\lambda_i c^T x_i \\ &= \lambda_1 c^T x_1 + \Sigma_{i=2,\ldots,n}\lambda_i c^T x_i \leq \lambda_1 c^T x_1 + (1-\lambda_1)z \end{aligned}$$

d'où on dérive que $z \leq c^T x_1$. □

Soit S l'ensemble des points admissibles d'un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers (ou mixte). Par la proposition 48, on peut chercher une solution optimale dans l'ensemble convexe $Conv(S)$. En particulier, si S est un ensemble fini $\{p_1, \ldots, p_n\}$ on peut en principe décrire $Conv(S)$ par un ensemble fini d'inégalités. Par exemple, on a :

$$max\{c^T x \mid x \in S\} = max\{c^T x \mid x = \Sigma_{i=1,\ldots,n} \lambda_i p_i, \Sigma_{i=1,\ldots,n} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \ .$$

On a maintenant un problème d'optimisation linéaire *sans* contraintes en nombres entiers mais la difficulté est que le nombre de points dans S peut être très élevé. Dans ce cas, on cherche un système d'inégalités $Ax \leq b$ qui est plus compact et qui décrit l'enveloppe convexe $Conv(S)$. Or, il n'est pas du tout évident de trouver un tel système ! Quand on le trouve, il a souvent une taille exponentielle et dans certains cas on peut même démontrer que aucun système de taille raisonnable existe. On illustre ces difficultés dans le cadre du problème du couplage maximum d'un graphe (il s'agit d'une généralisation du problème du couplage d'un graphe biparti considéré dans l'exemple 79).

Définition 51 *Soit $G = (N, A)$ un graphe non-dirigé. Un* couplage *est un sous-ensemble d'arêtes $A' \subseteq A$ tel que tout noeud du graphe est incident avec au plus une arête dans A' :*

$$\sharp\{a \in A' \mid i \in a\} \leq 1 \ , \qquad i \in N \ . \tag{29.6}$$

Un couplage maximum *est un couplage qui contient un nombre maximum d'arêtes. Si les arêtes du graphe sont pondérées alors un couplage* pondéré maximum *est un couplage qui maximise la somme des poids des arêtes dans le couplage.*

Pour chaque arête $a \in A$, on peut introduire une variable binaire $x_a \in \{0, 1\}$ et reformuler les contraintes (29.6) par un système d'inégalités :

$$\Sigma\{x_a \mid a \in A, i \in a\} \leq 1 \ , \qquad i \in N \ , \tag{29.7}$$

qui exprime la condition que pour chaque noeud il y au plus une arête dans le couplage incidente au noeud. Les couplages du graphe sont en correspondance bijective avec les affectations $x : A \to \{0, 1\}$ qui satisfont les contraintes (29.7). Bien entendu, il peut y avoir un nombre de couplages qui est exponentiel dans le nombre d'arêtes. Dans le cas d'un graphe biparti (exemple 79), on a vu qu'on peut relâcher les contraintes 29.7. Cette approche ne marche pas pour un graphe non-biparti.

Exemple 83 *Soit $G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$ un graphe en forme de triangle qui n'est pas biparti. On peut remarquer que la matrice d'incidence M_G n'est pas tum. Si on considère le problème relâché :*

$$max\{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

on trouve un maximum de $3/2$ pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$ alors que le maximum du problème entier est clairement 1. Les couplages du graphe correspondent aux vecteurs :

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \tag{29.8}$$

et il est immédiat de vérifier que $(1/2, 1/2, 1/2)$ *n'est pas dans l'enveloppe convexe de ces vecteurs. On peut remarquer que tous les couplages satisfont la contrainte :*

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \tag{29.9}$$

mais pas la solution optimale du problème relâché. Encore mieux, les (x_1, x_2, x_3) *non-négatifs qui satisfont les contraintes (29.7) et la contrainte additionnelle (29.9) sont exactement les combinaisons convexes des vecteurs (29.8) qui correspondent aux couplages.*

Il est possible de généraliser l'exemple 83 en ajoutant aux contraintes (29.7) un nombre *exponentiel* de contraintes de la forme :

$$\Sigma_{a \subseteq N'} x_a \leq \frac{\sharp N' - 1}{2} \qquad N' \subseteq N, \sharp N' \text{ impair.} \tag{29.10}$$

Tout couplage doit satisfaire la condition (29.10) car un couplage sur les noeuds N' ne peut pas contenir plus que $(\sharp N - 1)/2$ arêtes (chaque arête du couplage élimine 2 noeuds). Le fait que la contrainte (29.10) est suffisante pour caractériser le problème du couplage maximum passe par une analyse fine qui mène à un célèbre algorithme polynomial [Edm65]. Il a été montré que tout système d'inégalités $Ax \leq b$ qui correspond à la combinaison convexe des vecteurs de couplage a une taille exponentielle (voir, par exemple, [CCZ14] pour une discussion approfondie de ces aspects).

Le fait que le nombre de contraintes est exponentiel n'est pas forcement rédhibitoire car ces contraintes peuvent être générées de façon incrémentale. Par exemple, une méthode proposée dans [PR82] permet de calculer une contrainte de la forme (29.10) à partir d'une solution optimale non entière du problème relâché. Le calcul de la contrainte passe par le calcul d'une *coupe minimale* d'un graphe associé à la solution.

29.6 Méthode par séparation et évaluation

Une méthode générale pour résoudre un problème d'optimisation linéaire avec contraintes en nombres entiers comme (29.1) consiste à adopter une stratégie de séparation et évaluation (*branch and bound*, en anglais).

Cette stratégie repose sur deux hypothèses :

1. On a un moyen de *partitionner* un problème en sous-problèmes. Par exemple, supposons qu'on a trouvé une solution v du problème (29.1) mais que la composante v_i de la solution *n'est pas* entière. On peut générer deux sous-problèmes : l'un dans lequel on ajoute la contrainte $x_i \leq \lfloor v_i \rfloor$ et l'autre dans lequel on ajoute la contrainte $\lceil v_i \rceil \leq x_i$. Ici on utilise une notation assez standard pour l'arrondi : si x est un nombre réel alors $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x ; et $\lceil x \rceil$ le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x. Clairement les solutions du premier et du deuxième problème sont *disjointes* et toute solution *entière* doit être soit dans le premier soit dans le deuxième ; on a donc une *partition* du problème de départ.
2. On a une façon (efficace) de calculer une *borne supérieure* pour un problème. Par exemple, on peut relâcher les contraintes en nombres entiers et résoudre le problème d'optimisation linéaire.

Le calcul maintient trois informations :

— une borne supérieure U à la solution du problème,
— une borne inférieure L à la solution du problème et
— un ensemble P de problèmes qui pourraient contenir une solution optimale.

Initialement, on peut supposer que $L = -\infty$ et $U = +\infty$, mais en pratique il est souvent possible d'obtenir des bornes plus significatives ce qui permet d'accélérer le calcul. Par ailleurs, P est un ensemble singleton qui contient le problème à résoudre.

Après cette initialisation, tant que P n'est pas vide on itère les étapes suivantes :

1. On extrait un problème p de P, on calcule une solution *relâchée* u de p et on distingue les cas suivants :

   Stop la solution u est entière et aussi bonne que U ($u = U$) : on remplace L par u et on sort de la boucle (L est une solution optimale),

   Skip sinon, la solution u n'est pas meilleure que L ($u \leq L$) : on itère (il est inutile d'explorer d'avantage cette branche),

   Bound sinon, la solution u est entière et meilleure que L ($L < u$) : on met à jour la borne inférieure ($L = u$) et on itère,

   Branch sinon (donc u est non-entière et $L < u \leq U$) : on partitionne u en k sous-problèmes $p_1, \ldots, p_k$, on les ajoute à P et on itère.

2. A la sortie de la boucle on retourne la solution L qui est la meilleure solution entière trouvée après exploration de toutes les possibilités.

On peut visualiser les problèmes générés comme un arbre dont chaque noeud est étiqueté par un problème. Initialement, l'arbre contient un seul noeud racine qui est étiqueté par le problème de départ. Ensuite, si on a un noeud n étiqueté par un problème p et si p génère k sous-problèmes $p_1, \ldots, p_k$ (cas Branch) alors on connecte le noeud n a k noeuds 'fils' $n_1, \ldots, n_k$ étiquetés avec les problèmes $p_1, \ldots, p_k$. Une stratégie populaire pour l'exploration de l'arbre des problèmes est *en profondeur d'abord*. Ceci permet de contrôler la quantité de mémoire utilisée qui est *linéaire* en la profondeur de l'arbre (mais dans le pire des cas, le temps d'exécution sera exponentiel en la profondeur de l'arbre).

Exemple 84 *On considère l'application de la méthode au problème du sac à dos dont il est question aussi dans le problème 29.8.4 :*

$$max\{\Sigma_{i=1,\ldots,n} x_i v_i \mid \Sigma_{i=1,\ldots,n} x_i w_i \leq b, x_i \in \{0,1\}\} \ .$$

Il est facile d'obtenir une borne supérieure et une borne inférieure pour ce problème. D'abord on trie les éléments par ordre de ratio v_i/w_i décroissant*. Pour la* borne supérieure*, on prend les éléments $1, \ldots, k$ tant que $\Sigma_{i=1,\ldots,k} w_i \leq b$ et ensuite on prend une* fraction *de l'élément $k+1$. Pour la* borne inférieure*, on suit la même méthode mais on s'arrête au dernier élément qu'on peut prendre entier.*

Pour explorer les 2^n solutions on peut envisager une variété de stratégies et d'optimisations. Par exemple, on peut considérer les éléments par ratio décroissant et supposer que quand on analyse l'élément en position i on dispose d'une table x avec les choix effectués pour les éléments $1, \ldots, i-1 \leq n-1$, la valeur totale v des éléments retenus et leur poids w. Donc on doit avoir :

$$x_i \in \{0,1\}, \quad \Sigma_{j=1,\ldots,i-1} v_j x_j = v, \quad \Sigma_{j=1,\ldots,i-1} w_j x_j = w \leq b \ .$$

On peut toujours appliquer la méthode du ratio décroissant aux éléments $i, \ldots, n$ avec borne $b-w$. De cette façon, on trouve une borne supérieure u compatible avec les choix déjà effectués qui sont représentés par x_j, pour $j = 1, \ldots, i-1$. Dans le cas Branch*, on va générer :*

— *un seul problème ($x_i = 0$) si $w + w_i > b$ et*

— *deux problèmes ($x_i = 0$ et $x_i = 1$) si $w + w_i \leq b$.*

29.7 Méthode des plans sécants

La méthode des plans sécants (*cutting plane*, en anglais) est basées sur une idée géométrique très simple qu'on va décrire pour le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers ; l'approche peut se généraliser au cas *mixte*. Étant donné un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers, on calcule une solution optimale de son relâchement ; s'il n'y en a pas, le problème en nombres entiers n'a pas de solution non plus. Si la solution trouvée est entière on a trouvé la solution. Autrement on cherche à introduire une inégalité linéaire qui exclut la solution optimale du problème relâché mais pas celle du problème de départ. L'inégalité en question peut être visualisée comme un (hyper-)plan qui sépare la solution du problème relâché des solutions entières du problème de départ.

Si l'intuition géométrique est claire, il n'est pas évident à priori comment calculer en pratique un tel plan. On va discuter une méthode proposée par Gomory [Gom58] qui utilise de façon astucieuse l'algorithme du simplexe. En utilisant la notation pour l'arrondi introduite dans la section 29.6, on observe :

$$0 \leq (x - \lfloor x \rfloor) < 1 \text{ et } x = (x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor \ . \tag{29.11}$$

On rappelle qu'une solution basique optimale du problème relâche s'exprime dans la forme :

$$max\{c_0 + c_N x_N \mid x_B + A_N x_N = b, x_B, x_N \geq 0\}$$

où x_B et x_N sont les variables basiques et non-basiques, respectivement, $c_N \leq 0$ car on a une solution optimale et $b \geq 0$ car la solution $x_B = b, x_N = 0$ doit être admissible. Si b est entier on a une solution. Autrement, il existe une composante i qui est fractionnaire. La ligne i de la contrainte $x_B + A_N x_N = b$ a donc la forme :

$$x_i + \Sigma_{j \in N} a_j x_j = b_i \tag{29.12}$$

qu'on peut réécrire comme :

$$x_i + \Sigma_{j \in N} \lfloor a_j \rfloor x_j - \lfloor b_i \rfloor = (b_i - \lfloor b_i \rfloor) - \Sigma_{j \in N} (a_j - \lfloor a_j \rfloor) x_j \ .$$

On remarque que la partie gauche de l'équation est forcement entière, et la partie droite est forcement inférieure à 1. Donc toute solution entière doit satisfaire l'inégalité :

$$-\Sigma_{j \in N} (a_j - \lfloor a_j \rfloor) x_j \leq -(b_i - \lfloor b_i \rfloor) \ , \tag{29.13}$$

alors que la solution optimale ne la satisfait pas. On peut réécrire l'inégalité comme une équation en introduisant une nouvelle variable d'écart :

$$x_s - \Sigma_{j \in N} (a_j - \lfloor a_j \rfloor) x_j = -(b_i - \lfloor b_i \rfloor), x_s \geq 0 \ .$$

Ceci revient à ajouter une ligne et une colonne au tableau de la solution optimale du problème relâché et à considérer x_s comme variable basique. Le problème est que la solution basique en question n'est pas admissible car $-(b_i - \lfloor b_i \rfloor)$ est négatif. On pourrait penser qu'il faut appliquer une méthode générale pour trouver si elle existe une solution basique admissible d'un problème d'optimisation linéaire (section 28.4) mais il y a une approche beaucoup plus économique qui exploite l'algorithme dual étudié dans le problème 28.6.5. D'après cet algorithme, si $(a_j - \lfloor a_j \rfloor) = 0$ pour $j \in N$ alors le problème en nombres entiers n'a pas de solution. Autrement, on trouve un pivot en calculant k tel que :

$$c_k / -(a_k - \lfloor a_k \rfloor) = min\{c_j / -(a_j - \lfloor a_j \rfloor) \mid -(a_j - \lfloor a_j \rfloor) < 0\} \ .$$

De l'hypothèse que $c_j \leq 0$ pour $j \in N$ on dérive que le minimum en question est non-négatif. Ensuite, on effectue un pas de pivot pour que la variable x_k devienne basique et la variable x_s non-basique. En itérant les pas de pivot, soit on arrive à la conclusion que le problème primal n'a pas de solution soit on arrive à une nouvelle solution optimale. La structure de l'algorithme est donc la suivante :

1. On cherche une solution x avec l'algorithme primal.
2. Tant que x n'est pas entier :
   — On ajoute une contrainte (une coupe de Gomory).
   — Si possible on calcule une nouvelle solution optimale x avec l'algorithme dual et on itère. Sinon, le problème dual est non-borné, on pose $x = 'Insoluble'$ et on sort de la boucle.
3. On retourne x.

Remarque 38 *Une autre façon de générer une coupe est de noter que comme $x_j \geq 0$ on a :*

$$x_i + \Sigma_{j \in N} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq b_i \ . \tag{29.14}$$

Comme la partie gauche est entière on a aussi :

$$x_i + \Sigma_{j \in N} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor \tag{29.15}$$

et cette inégalité exclut la solution optimale. Si on soustrait (29.15) à l'égalité initiale (29.12), on dérive à nouveau la coupe (29.13).

Exemple 85 *On considère le problème :*

$$max\{5x_1 + 8x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \ entières\} \ .$$

Le relâchement du problème est en forme canonique. Si on introduit les variables d'écart x_3, x_4 on a une forme équationnelle et une solution admissible. En appliquant l'algorithme (primal) du simplexe on peut obtenir une solution optimale fractionnaire et le tableau suivant :

-	0	0	$-5/4$	$-3/4$	$-165/4$
x_1	1	0	$9/4$	$-1/4$	$9/4$
x_2	0	1	$-5/4$	$1/4$	$15/4$

Si on introduit une coupe de Gomory et une variable d'écart on dérive :

-	0	0	$-5/4$	$-3/4$	0	$-165/4$
x_1	1	0	$9/4$	$-1/4$	0	$9/4$
x_2	0	1	$-5/4$	$1/4$	0	$15/4$
x_5	0	0	$-1/4$	$1/4$	1	$-1/4$

En appliquant l'algorithme (dual) du simplexe on peut obtenir directement une solution optimale entière et le tableau suivant :

-	0	0	0	-2	-5	-40
x_1	1	0	0	2	9	0
x_2	0	1	0	-1	-5	5
x_3	0	0	1	-1	-4	1

Remarque 39 (efficacité) *La méthode présentée ajoute une variable d'écart et une contrainte chaque fois qu'elle trouve une solution optimale fractionnaire. En pratique, il est possible de contrôler la taille du système qui reste linéaire dans la taille du système de départ [Gom58]. On peut montrer (voir, par exemple [PS82][chapitre 14]) qu'en supposant une arithmétique exacte, la méthode converge à une solution optimale entière ou elle prouve qu'une solution entière n'existe pas. On peut donc penser que la méthode du plan sécant est supérieure à celle qui utilise la stratégie par séparation et évaluation décrite dans la section 29.6. La réalité expérimentale est plus nuancée : la méthode des plans sécants demande souvent un grand nombre d'itérations. Il apparaît qu'on obtient des meilleurs performances en la combinant avec la méthode par séparation et évaluation. On parle alors de méthode par séparation et coupe (*branch and cut*, en anglais). On peut lire [Cor07] pour une perspective historique sur l'évolution de cette approche.*

29.8 Problèmes

29.8.1 Affectation quadratique

On suppose n centres de production $\{1, \ldots, n\}$ et n sites $\{n+1, \ldots, 2n\}$. Pour chaque couple de sites (k, ℓ), on connaît leur distance $d_{k,\ell}$. Pour chaque couple de centres de production (i, j), on connaît la quantité de produit $f_{i,j}$ que i doit envoyer à j. Le coût de cette transmission est proportionnel à $f_{i,j}$ et à la distance des sites auxquels les centres sont affectés. Le problème est d'affecter exactement un centre de production à chaque site de façon à minimiser le coût total de la transmission des produits.

Introduisez les variables $x_{i,k} \in \{0, 1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $k \in \{n+1, \ldots, 2n\}$ avec l'interprétation que $x_{i,k} = 1$ ssi le centre i est affecté au site k.

1. Formulez les contraintes qui expriment le fait que chaque centre est affecté exactement à un site.
2. Explicitez la fonction de coût ; vous devriez tomber sur une fonction quadratique.
3. Si $x, y \in \{0, 1\}$ alors une fonction quadratique $x \cdot y$ peut être représentée par une variable $z \in \{0, 1\}$ sujette aux inégalités linéaires :

$$z \leq x, z \leq y, (x + y) - 1 \leq z \ .$$

Utilisez cette remarque pour transformer le problème quadratique du point 2. en un problème d'optimisation linéaire entière.

4. Vérifiez que tout polynôme à plusieurs variables qui varient sur $\{0, 1\}$ est équivalent à un polynôme qui est une somme de monômes multi-linéaires (chaque variable a exposant 0 ou 1).

29.8.2 Forme normale d'Hermite et transformations unitaires

Mettez en oeuvre l'algorithme décrit dans la section 29.4 pour le calcul d'une forme normale d'Hermite et la solution d'un système d'équations linéaires en nombres entiers. Dans la suite on propose des pistes pour la solution du problème.

1. Recherchez (et au besoin mettez en oeuvre) une description de l'algorithme étendu d'Euclide qui à partir de a et b, calcule x et y tels que $pgcd(a, b) = ax + by$.
2. A partir de la matrice A de dimension $m \times n$, construisez une matrice U de dimension $n \times n$ qui est initialement la matrice identité.

Pour transformer A en forme normale d'Hermite on multiplie A à droite par une série de matrices unimodulaires. Pratiquement, il s'agit à chaque étape de modifier 1 ou 2 colonnes de la matrice A. On effectue exactement les mêmes manipulations sur la matrice U et de cette façon à la fin du calcul de la forme normale d'Hermite H on aura aussi calculé la matrice unimodulaire U telle que $AU = H$. Les questions 3–6 qui suivent proposent une décomposition de cette tâche.

3. Programmez une fonction qui combine les colonnes i et j pour $i < j$ de façon à rendre l'élément $a_{i,j}$ nul. Cette fonction va utiliser l'algorithme d'Euclide étendu.
4. Programmez une fonction qui inverse le signe de la colonne i.
5. Programmez une fonction qui manipule la colonne j avec $j < i$ de façon à remplacer $a_{i,j}$ par le reste de la division de $a_{i,j}$ par $a_{i,i}$.
6. Programmez une fonction qui utilise les trois fonctions précédentes pour calculer une forme normale d'Hermite H et une matrice unimodulaire U telle que $AU = H$.
7. Pour un vecteur b donné, programmez une fonction qui va résoudre le système $Hy = b$ si possible et qui ensuite calcule les solutions Uy du système $Ax = b$. Testez sur les exemples 81 et 82.

29.8.3 Formulations pour l'arbre de recouvrement minimum

Soit $G = (N, A)$ un graphe non-dirigé avec une pondération des arêtes $w : A \to \mathbf{R}^+$. Le problème de l'arbre de recouvrement minimum (abrégé en ARM) consiste à chercher un arbre qui recouvre tous les noeuds du graphe et dont la somme des poids des arêtes est minimum. Ce problème peut être résolu avec des algorithmes spécialisés quasi linéaires (chapitre 25). Ici on s'intéresse à sa formulation en tant que problème d'optimisation linéaire en nombres entiers et au relâchement de la formulation. On commence par introduire les variables binaires $x_a \in \{0, 1\}$ pour $a \in A$ avec l'interprétation que $x_a = 1$ ssi a est dans l'arbre de recouvrement optimal. La fonction linéaire à minimiser est :

$$\Sigma_{a \in A}\ w(a) \cdot x_a\ .$$

Il s'agit maintenant d'imposer des contraintes qui assurent que le choix des arêtes correspond bien à un arbre. On va utiliser deux caractérisations possibles d'un arbre. On suppose que le graphe G a n noeuds et que T est un sous-graphe de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

— T est un arbre de recouvrement,

— T a $n-1$ arêtes et il est connecté,
— T a $n-1$ arêtes et il est acyclique.

1. Formulez la condition que T a $n-1$ arêtes comme une contrainte linéaire (on appelle cette condition (C1)).
2. Une façon d'exprimer que T est connecté est de dire que dans toute partition non-triviale des noeuds $S, N\backslash S$ avec $\emptyset \subset S \subset N$ il y a au moins une arête qui connecte un noeud dans S avec un noeud dans $N\backslash S$. Formulez cette condition comme un ensemble de contraintes linéaires (on appelle cette condition (C2)). Combien de contraintes faut-il introduire en fonction de n ?
3. Une façon d'exprimer que T est acyclique est de dire que dans tout sous-ensemble de noeuds S tel que $\emptyset \subset S \subset N$ le nombre d'arêtes dans S est borné par $\sharp S - 1$. Formulez cette condition comme un ensemble de contraintes linéaires (on appelle cette condition (C3)). Combien de contraintes faut-il introduire en fonction de n ?
4. On a maintenant deux formulations du problème de l'ARM comme problème d'optimisation en nombres entiers en utilisant les conditions (C1+C2) ou les conditions (C1+C3). On s'intéresse au relâchement de ces conditions (on remplace $x_a \in \{0,1\}$ par $0 \leq x_a \leq 1$). Pouvez vous montrer que toute solution de (C1+C3) est une solution de (C1+C2) ?
5. On considère un graphe $G = (N, A)$ avec :

$$N = \{1,2,3,4,5\} \text{ et } A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\} \ ,$$

qu'on peut visualiser comme un carré avec un triangle sur un côté. On peut supposer que le poids de toutes les arêtes est 1. Calculez :
— le poids d'un ARM de G,
— le minimum du problème relâché basé sur les conditions (C1+C2),
— le minimum du problème relâché basé sur les conditions (C1+C3).

6. Calculez le problème dual du problème relâché basé sur les conditions (C1+C3).
7. Comparez les ensembles suivants :
— l'enveloppe convexe des vecteurs qui correspondent à des ARM,
— les vecteurs admissibles pour les conditions (C1+C2),
— les vecteurs admissibles pour les conditions (C1+C3).

Pour une généralisation de ces observations lire, par exemple, [CCZ14][théorème 4.25].

29.8.4 Problème du sac à dos

On s'intéresse à l'évaluation de différentes stratégies de solution du problème du sac à dos :

$$max\{\Sigma_{i=1,\ldots,n}\ v_i x_i \mid \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ w_i x_i \leq b, x_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,n\} \ . \tag{29.16}$$

On suppose $n \geq 1$, $0 < v_i$ et $0 < w_i \leq b$ pour $i = 1,\ldots,n$. On peut penser aux coefficients v_i et w_i comme la valeur et le poids de l'objet i, respectivement, pour $i = 1,\ldots,n$. L'objectif est de choisir parmi n objets ceux qui maximisent la valeur tout en respectant la limite de poids b.

Bornes supérieures et inférieures

Il est facile d'obtenir des bornes supérieures et inférieures pour ce problème. Supposons que les objets soient triés par ordre de ratio v_i/w_i décroissant. Pour obtenir une borne supérieure on peut relâcher le problème en permettant d'emporter une fraction d'un objet. On calcule une solution optimale du problème relâché (et une borne supérieure du problème en nombres entiers (29.16)) en considérant les objets dans l'ordre jusqu'à atteindre le poids limite. On peut aussi suivre la même stratégie gloutonne pour calculer une solution et une borne inférieure pour le problème en nombres entiers (29.16). Programmez les fonctions qui permettent de calculer les bornes supérieures et inférieures.

Séparation et évaluation

On peut se servir des bornes supérieures et inférieures pour explorer l'ensemble des 2^n solutions possibles en suivant une approche par séparation et évaluation. Programmez une telle approche. Notez que le langage python impose des limites sur la profondeur de la récursion et que même si on peut redéfinir ces limites l'efficacité du programme est assez limitée. Pour cette raison il peut être intéressant de transformer votre programme récursif en un programme itératif avec gestion explicite de la pile.

Programmation dynamique

Considérez pour $i = 0, \ldots, n$ les ensembles :

$$S_i = \{(v, w) \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, i\}(v = \Sigma_{i \in I}\ v_i, w = \Sigma_{i \in I}\ w_i \leq b)\} \tag{29.17}$$

On a $S_0 = \{(0, 0)\}$ car pour $i = 0$ on a $I = \emptyset$ et la somme de l'ensemble vide est 0 par convention. On peut représenter un ensemble S_i comme une liste triée par ordre de valeur croissante. De plus pour chaque valeur v dans la liste, il suffit de garder le couple (v, w) dont le poids est minimum. Par exemple, l'ensemble : $S = \{(3, 6), (1, 5), (3, 4), (1, 4)\}$ peut être représenté par la liste $[(1, 4), (3, 4)]$. Mais cette représentation peut encore être réduite en remarquant que le couple $(1, 4)$ est superflu car avec le couple $(3, 4)$ on a plus de valeur pour le même poids. On peut donc stipuler que la *représentation* d'un ensemble S_i est une *liste* :

$$[(v_1, w_1), \ldots, (v_k, w_k)]$$

avec la propriété que $v_1 < \cdots < v_k$ et $w_1 < \cdots < w_k$. En supposant cette représentation le calcul de S_{i+1} à partir de S_i est assez efficace. D'abord on calcule la représentation de :

$$S'_i = \{(v + v_{i+1}, w + w_{i+1}) \mid (v, w) \in S_i, w + w_{i+1} \leq b\}$$

et ensuite on obtient S_{i+1} en calculant en temps linéaire une *fusion* de S_i et S'_i (fusion dans un sens proche du tri par fusion). La solution optimale du problème est le dernier élément de la représentation de S_n.

Changement d'échelle

Le nombre d'éléments dans la représentation des ensembles S_i est borné par $V = 1 + \Sigma_{i=1,\ldots,n}\ v_i$. On peut réduire ce nombre en effectuant une division euclidienne (entière) des valeurs v_i par une constante μ. On obtient donc un nouveau problème de sac à dos avec

valeurs v_i/μ pour $i = 1, \ldots, n$; les poids w_i et la borne b ne sont pas modifiés. Le changement d'échelle réduit la taille des S_i et permet d'accélérer le calcul. Si on multiplie la solution optimale du problème dérivé par μ on obtient une borne inférieure à la valeur du problème de départ (29.16). Il n'est pas difficile de montrer que la différence entre les deux valeurs est au plus $n\mu$.

Comparaisons

Définissez un certain nombre de paramètres qui caractérisent le générateur de problèmes. Par exemple, on peut fixer une taille maximale des valeurs et en fonction de cette taille fixer le nombre n d'éléments. Ensuite, on peut choisir une distribution des valeurs et des poids (par exemple, une distribution uniforme ou une distribution fortement concentrée autour de la moyenne) et on peut aussi décider s'il y a une corrélation entre valeurs et poids. Enfin, on peut fixer la borne b sur le poids.

En faisant varier vos paramètres, étudiez le comportement des 4 méthodes décrites (borne inférieure, séparation et évaluation, programmation dynamique et programmation dynamique avec changement d'échelle) par rapport à la vitesse, la consommation de mémoire et la précision du résultat obtenu. L'objectif est d'identifier une ou plusieurs "situations naturelles" qui permettent de distinguer les 4 approches.

Rédigez un rapport qui décrit vos conclusions et qui s'appuie sur un programme de test ; le rapport peut prendre la forme d'un Jupyter notebook. [3]

29.8.5 Plans sécants

Mettez en oeuvre la méthode des plans sécants en utilisant les solutions des problèmes 28.6.3 (algorithme primal) et 28.6.5 (algorithme dual). Donc :

- on commence avec un problème canonique avec $b \geq 0$,
- on calcule une solution optimale avec l'algorithme primal,
- Tant que la solution n'est pas entière :
  - on ajoute une coupure,
  - on applique l'algorithme dual pour trouver une nouvelle solution optimale.

Pour assurer la convergence de l'algorithme, il est recommandé d'utiliser le module fractions qui permet d'éviter les erreurs d'arrondi. Testez votre solution sur l'exemple 85.

29.8.6 Logistique du dernier kilomètre

Votre entreprise souhaite développer une nouveau logiciel d'aide à la décision dans le domaine de la 'logistique du dernier kilomètre'.

Un premier problème

Comme étape préliminaire on vous demande d'évaluer différents algorithmes disponibles dans un contexte simplifié. On suppose qu'il faut servir n clients qui sont distribués de façon uniforme sur une grille carrée de taille $n^2 \times n^2$ (deux clients peuvent se trouver à la même position de la grille). La distance entre deux clients qui se trouvent aux coordonnées (i, j) et (k, ℓ) est $|k-i|+|\ell-j|$ (aussi connue comme distance de Manhattan). Le centre de distribution

3. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Jupyter`

se trouve (environ) au centre du carré et le problème est de trouver un circuit qui part du centre de distribution passe par chaque client exactement une fois et revient au centre de distribution en couvrant une distance qui est aussi petite que possible. Il est donc question ici du problème classique du commis voyageur avec une distance métrique (abrégé dans la suite en Δ-TSP). Les algorithmes seront implémentés en python3 et PULP est la seule bibliothèque autorisée. Les approches qu'on vous propose d'analyser et qu'on décrit de façon sommaire dans la suite sont les suivantes :

— programmation dynamique,
— optimisation linéaire en nombres entiers,
— recherche locale,
— approximation.

Adapter ces approches aux problèmes de logistique dont il est question fait partie de votre *travail de modélisation*. Pour chaque approche vous allez :

— déterminer de façon expérimentale la taille de problèmes que vous pouvez traiter en moins d'une minute avec un ordinateur premier prix,
— pour les méthodes qui peuvent retourner une solution non-optimale, analyser de façon expérimentale la qualité de la solution obtenue.

Vous aurez sans doute besoin de :

— une fonction qui prend en entrée le paramètre n et génère un problème de façon aléatoire,
— une fonction qui vérifie que le circuit retourné comme solution est bien une solution (pas forcement optimale) du problème,
— une fonction qui calcule la différence entre la solution trouvée et la solution optimale (ou une borne inférieure/supérieure de la solution optimale si la taille du problème ne permet pas de calculer une solution optimale).

Dans la suite, on dénote par $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des noeuds d'un graphe complet et par 1 un noeud fixé dans N. Si $i, j \in N$ alors on dénote par $d(i, j)$ leur distance.

Programmation dynamique

Soit $X \subseteq N\backslash\{1\}$. Pour $j \in N\backslash X$ on dénote par $t(X, j)$ la longueur d'un parcours de longueur minimale qui démarre du noeud 1, passe exactement une fois par chaque élément de X et termine au noeud j. On remarque que :

$$t(\emptyset, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 = j \\ d(1, j) & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par ailleurs, si $X \neq \emptyset$ alors on a la récurrence :

$$t(X, j) = min\{t(X\backslash\{i\}, i) + d(i, j) \mid i \in X\} \ .$$

La solution optimale de Δ-TSP est donc $t(N\backslash\{1\}, 1)$. On note qu'il est facile d'adapter les équations de façon à calculer un circuit optimal en plus du coût minimum. Par ailleurs, les techniques standards de la programmation dynamique permettent d'éviter de recalculer plusieurs fois la fonction t sur les mêmes arguments. Il va sans dire que toute estimation de l'efficacité de cette approche suppose une mise-en-oeuvre d'une de ces techniques.

Optimisation linéaire en nombres entiers

On formule le problème Δ-TSP comme un problème d'optimisation linéaire sur les entiers et on demande à un solveur (dans notre cas PULP) de trouver une solution en appliquant un mélange savant de *branch and cut*. On sait que l'efficacité du solveur peut dépendre fortement de la formulation du problème ; on en présente une largement documentée dans la littérature.

On commence par introduire $n \cdot (n-1)$ variables entières $x_{i,j}$ pour $i, j \in N$ et $i \neq j$ avec l'interprétation suivante : $x_{i,j} = 1$ si le noeud j suit immédiatement le noeud i dans le circuit et $x_{i,j} = 0$ autrement. Avec cette interprétation, la quantité qu'on souhaite minimiser est :

$$\Sigma_{i,j \in N, i \neq j}\ d(i,j) \cdot x_{i,j}\ . \tag{29.18}$$

Dans un circuit on doit avoir la propriété que chaque noeud $i \in N$ a exactement un successeur et un prédécesseur immédiat. On exprime cette propriété avec les $2 \cdot n$ équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Sigma_{j \in N, i \neq j}\ x_{i,j} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ \Sigma_{i \in N, i \neq j}\ x_{i,j} = 1 & j = 1, \ldots, n\ . \end{array} \tag{29.19}$$

On remarque que les équations plus les $n \cdot (n-1)$ inégalités $x_{i,j} \geq 0$ impliquent que $0 \leq x_{i,j} \leq 1$. On remarque aussi que le problème de minimisation avec les contraintes en question peut être vu comme un problème de couplage pondéré dans un graphe biparti avec $2 \cdot n$ noeuds et on sait que le relâchement sur les rationnels de ce problème admet toujours une solution optimale entière (la matrice des contraintes est tum).

Malheureusement les contraintes (29.19) ne suffisent pas pour exprimer le fait que l'on souhaite calculer un *seul* circuit qui passe par tous les noeuds. En effet, il est parfaitement possible de satisfaire les contraintes (29.19) en utilisant plusieurs circuits disjoints qui recouvrent tous les noeuds dans N. En général, la "solution" qu'on obtient est une borne inférieure de la solution optimale du problème Δ-TSP.

Si on veut exclure tout circuit avec 2 éléments qui ne passe pas par le noeud 1 on peut ajouter les contraintes :

$$\Sigma_{i \in N \setminus X, j \in X}\ x_{i,j} \geq 1 \quad \sharp X = 2, X \subseteq N \setminus \{1\}$$

Il y a un nombre quadratique en n de ces contraintes. Et si on veut exclure les circuits avec 3 éléments on a un nombre cubique en n de ces contraintes,... Si on veut exclure tout circuit qui ne passe pas par 1 on doit produire un nombre *exponentiel* de contraintes de la forme :

$$\Sigma_{i \in N \setminus X, j \in X}\ x_{i,j} \geq 1 \quad \sharp X \geq 2, X \subseteq N \setminus \{1\} \tag{29.20}$$

Clairement si n n'est pas petit, on doit envisager une méthode pour générer les contraintes à la demande (voir par exemple [PR91]). Ici on discute une autre façon d'exclure les circuits qui ne passent pas par 1 qui s'exprime avec un nombre quadratique en n de contraintes. [4]

On introduit des nouvelles variables u_i pour $i = 2, \ldots, n$ (notez qu'il n'y a pas de variable u_1 !) avec l'intuition que u_i exprime le "potentiel" du noeud i dans le circuit. Pour fixer les idées on peut identifier le potentiel u_i avec la position du noeud i dans le circuit mais on verra qu'on n'a pas besoin d'être aussi spécifique.

4. L'expérience suggère que cette méthode n'est pas très adaptée pour des problèmes de grande taille (voir, par exemple, [CCZ14][page 63]) mais elle est plus simple à mettre en oeuvre que celle basée sur les contraintes (29.20).

On introduit les $(n-1)\cdot(n-2)$ contraintes suivantes :

$$u_i - u_j + x_{i,j}\cdot(n-1) \leq (n-2) \qquad 2 \leq i,j \leq n, i \neq j \tag{29.21}$$

D'abord on va voir que ces contraintes interdisent tout circuit qui ne passe pas par le noeud 1. En effet soit $i_1,\ldots,i_k,i_1$ un tel circuit. Alors $x_{i_1,i_2} = \cdots = x_{i_{k-1},i_k} = x_{i_k,i_1} = 1$ et les contraintes (29.21) se simplifient en :

$$\begin{array}{lcl} u_{i_1} - u_{i_2} + (n-1) & \leq & (n-2) \\ \cdots & \leq & \cdots \\ u_{i_{k-1}} - u_{i_k} + (n-1) & \leq & (n-2) \\ u_{i_k} - u_{i_1} + (n-1) & \leq & (n-2)\ . \end{array}$$

Si on additionne ces contraintes on dérive $k(n-1) \leq k(n-2)$, $k \geq 2$ qui n'a pas de solution. Donc tout circuit doit passer par le noeud 1 et par la contrainte (29.19) le noeud 1 a exactement un prédécesseur et un successeur immédiat. Il y a donc un seul circuit qui passe par tous les noeuds.

Il faut maintenant vérifier que les contraintes (29.21) n'excluent pas des solutions admissibles. Considérons un circuit qui passe par tous les noeuds $1, i_2, \ldots, i_n, 1$. On peut satisfaire les contraintes (29.21) en posant $u_{i_2} = 1, \ldots, u_{i_n} = (n-1)$. En effet, si $x_{i,j} = 0$ la contrainte devient :

$$u_i - u_j \leq (n-2)$$

qui est satisfaite car $u_i, u_j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Et si $x_{i,j} = 1$ alors la contrainte devient $u_i - u_j + (n-1) \leq (n-2)$ soit :

$$u_j \geq u_i + 1\ .$$

On note que dans la modélisation il faut juste imposer que les variables $x_{i,j}$ sont des variables entières non-négatives alors que les variables u_i peuvent varier librement sur les rationnels (les contraintes $1 \leq u_i \leq (n-1)$ ainsi que les contraintes u_i entier ne sont pas nécessaires).

Recherche locale

Soit $\gamma = x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ un circuit qui part de x_1 visite chaque noeud exactement une fois et retourne à x_1. Un circuit γ' est dans le voisinage $N(\gamma)$ de γ si γ' a la forme suivante pour $1 \leq i < i+2 \leq j \leq n$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j, x_{j-1}, \ldots, x_{i+1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, x_1$$

Par exemple, si $\gamma = 1,2,3,4,5,1$, $i = 2$ et $j = 4$ alors $\gamma' = 1,2,4,3,5,1$. Si $d(\gamma) = \Sigma_{i=1,\ldots,n-1}\ d(i,i+1) + d(n,1)$ est le coût du circuit de départ, le coût de γ' est :

$$d(\gamma') = d(\gamma) - d(i,i+1) - d(j,j+1) + d(i,j) + d(i+1,j+1)\ .$$

On peut vérifier que :

- $N(\gamma)$ contient $n(n-3)/2$ éléments,
- les circuits dans $N(\gamma)$ sont exactement les circuits qu'on peut obtenir de γ en supprimant deux arêtes qui ne partagent pas de noeuds et ensuite en ajoutant deux nouvelles arêtes de façon à reconstituer un nouveau circuit,
- le choix des deux arêtes à supprimer détermine l'opération à faire pour reconstituer le circuit.

En ayant défini une notion de voisinage, l'algorithme de recherche locale peut être formulé très simplement :

1. on génère un circuit γ (par exemple, de façon aléatoire),
2. tant qu'il existe un $\gamma' \in N(\gamma)$ tel que $d(\gamma') < d(\gamma)$ on remplace γ par γ',
3. on retourne le circuit γ.

On note que si la convergence de l'algorithme est trop lente on peut utiliser un *time-out* et si elle est rapide on peut répéter l'expérience avec un autre circuit initial. Dans les deux cas, le circuit retourné par l'algorithme n'est pas forcement optimal.

Approximation

On cherche à avoir une garantie sur la qualité de la solution obtenue. Pour ce faire, on applique un algorithme classique (Prim, Kruskal,...) pour obtenir un arbre de recouvrement minimum T. On note que le poids de T est une borne inférieure au coût d'un circuit optimal pour Δ-TSP (pourquoi ?). On considère ensuite un parcours préfixe de l'arbre T (on visite les noeuds et ensuite on visite récursivement les fils). Si on ajoute à la fin de ce parcours la racine de l'arbre on obtient un circuit pour Δ-TSP et on vérifie que le coût du parcours est au plus 2 fois le coût de T. Il en suit que le coût du circuit calculé par cette méthode est au plus deux fois le coût du circuit optimal. Il va sans dire qu'il s'agit d'une borne pour le pire des cas ; en pratique la solution trouvée peut être plus proche de la solution optimale. Il y a une autre méthode connue comme *algorithme de Christofides* (voir, par exemple, [PS82]) qui permet de calculer en temps polynomial un circuit dont le coût est au plus $1,5$ fois le coût du circuit optimal ; sa mise en oeuvre est un peu plus compliquée et optionnelle.

Le problème "réel"

Le problème "réel" que le logiciel devra traiter est un peu plus compliqué que celui décrit ci-dessus. On sait que :

— le nombre de clients est de l'ordre de 10^3,
— le centre de distribution dispose d'environ $k \approx 10$ livreurs qui peuvent opérer en parallèle,
— le but est de trouver une stratégie de distribution qui permet aux k livreurs de terminer le travail de distribution le plus tôt possible (donc chaque client est traité exactement par un livreur et le travail termine quand le dernier livreur a terminé son circuit).

On aimerait savoir quelle approche parmi celles évoquées est la plus adaptée au problème "réel". Vous allez choisir l'approche qui vous semble la plus prometteuse parmi les quatre, l'adapter au problème réel et rédiger un rapport qui décrit les résultats de votre expérience ; le rapport peut prendre la forme d'un Jupyter notebook. [5]

5. https://fr.wikipedia.org/wiki/Jupyter

Bibliographie

[AB98] Mohamad Akra and Louay Bazzi. On the solution of linear recurrence equations. *Computational Optimization and Applications*, 10(2) :195–210, 1998.

[AKS04] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nitin Saxena. PRIMES is in P. *Annals of Mathematics*, 160(2) :781–793, 2004.

[Bel54] Richard Bellman. The theory of dynamic programming. *Bulletin of the AMS*, 60(6) :503–516, 1954.

[Ben84] Jon Bentley. Programming pearls : algorithm design techniques. *Communications of the ACM*, 27(9) :865–873, 1984.

[BW88] Hans-Juergen Boehm and Mark Weiser. Garbage collection in an uncooperative environment. *Softw., Pract. Exper.*, 18(9) :807–820, 1988.

[CCZ14] Michele Conforti, Gérard Conuéjols, and Giacomo Zambelli. *Integer programming*. Springer-Verlag, 2014.

[CLRS09] Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to algorithms*. MIT Press, 2009. Troisième édition. Existe aussi en français.

[Cor07] Gérard Cornuéjols. Revival of the Gomory cuts in the 1990's. *Ann. Oper. Res.*, 149(1) :63–66, 2007.

[CT65] James Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19 :297–301, 1965.

[Dan48] George Dantzig. Programming in a linear structure. Technical report, United States Air Force, Washington DC., 1948.

[Dij59] Edsger Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.

[Edm65] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17 :449–467, 1965.

[EK72] Jack Edmonds and Richard M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. ACM*, 19(2) :248–264, 1972.

[FF56] Lester Ford and Delbert Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian journal of mathematics*, 8(3) :399–404, 1956.

[Fou27] Joseph Fourier. Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. 7 :xlvi–lv, 1827.

[Gom58] Ralph Gomory. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs. *Bulletin of the AMS*, 64 :275–278, 1958.

[Hoa61] C. A. R. Hoare. Algorithm 64 : Quicksort. *Commun. ACM*, 4(7) :321, 1961.

[Huf52] David Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9) :1098–1101, 1952.

[Kar84] Narendra Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4) :373–396, 1984.

[Kha79] Leonid Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Akademiia Nauk SSSR. Doklady*, 244 :1093–1096, 1979.

[KO62] Anatoly Karatsuba and Yuri Ofman. Multiplication of many-digital numbers by automatic computers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 145 :293–294, 1962. Traduction dans *Physics-Doklady*, 7 (1963).

[MG07] Jiří Matousek and Bernd Gärtner. *Understanding and using linear programming*. Springer, 2007.

[Mil76] Gary L. Miller. Riemann's hypothesis and tests for primality. *J. Comput. Syst. Sci.*, 13(3) :300–317, 1976.

[Mot52] Theodore Motzkin. *The theory of linear inequalities.* Rand Corporation, 1952.

[MPS92] J. Ian Munro, Thomas Papadakis, and Robert Sedgewick. Deterministic skip lists. In *Proceedings of the Third Annual ACM/SIGACT-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 27-29 January 1992, Orlando, Florida.*, pages 367–375, 1992.

[Pol71] John M. Pollard. The fast Fourier transform in a finite field. *Mathematics of computation*, 25(114) :365–374, 1971.

[PR82] Manfred W. Padberg and M. R. Rao. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Math. Oper. Res.*, 7(1) :67–80, 1982.

[PR91] Manfred Padberg and Giovanni Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Rev.*, 33(1) :60–100, 1991.

[Pri57] Robert Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36(6) :1389–1401, 1957.

[PS82] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimisation.* Prentice-Hall, 1982.

[Pug90] William Pugh. Skip lists : A probabilistic alternative to balanced trees. *Commun. ACM*, 33(6) :668–676, 1990.

[Rab80] Michael O. Rabin. Probabilistic algorithms in finite fields. *SIAM J. Comput.*, 9(2) :273–280, 1980.

[Sch86] Alexander Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* John Wiley and Sons, 1986.

[ST04] Daniel A. Spielman and Shang-Hua Teng. Smoothed analysis of algorithms : Why the simplex algorithm usually takes polynomial time. *J. ACM*, 51(3) :385–463, 2004.

[Str69] Volker Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numer. Math.*, 13 :354–356, 1969.

Index

O-notation, 97
C, 14
écart complémentaire, 237
éditeur de texte, 18
énumérations, 34
équation deuxième degré, 30
équations diophantiennes linéaires, 249
lcs, 180
llcs, 181
break, *33*
clock, *103*
continue, *33*
exit, *33*
fclose, *75*
fopen, *75*
fprintf, *75*
free, *79*
fscanf, *75*
main, *18*
main, *arguments, 75*
make, *86*
malloc, *78*
printf, *26*
return, *33*
scanf, *26*
time, *103*
TSP, *problème, 263*

ABR, fusion, 154
ABR, moyenne somme hauteurs, 153
affectation, 29
affectation quadratique, problème, 258
aiguillage switch, *34*
Alan Turing, 12
algorithme, 11
algorithme de fusion, 57
algorithme de Kruskal, 202
algorithme glouton, 171
algorithme probabiliste de Montecarlo, 144
allocation de mémoire, 77
alternative de Fredholm, 226
approximation, TSP, *266*
arbre binaire de recherche (ABR), 151
arbre de recouvrement minimum, 199, 259
arbre, complet, 116
arbre, hauteur, 116
arbre, plein, 116
arbre, positions, 116
arbre, quasi-complet, 116
arbres binaires, enracinés, ordonnés, 115
automate fini, 184

BDD, 196
Bezout, théorème, 249
bibliothèque PULP, *218*
bloc d'activation, 16
booléens, 23
borne de Chernoff, 168
boucle for, *32*
boucle while, *31*
boule, 216
branchement, 30

calcul nombre d'inversions, 58
calcul propositionnel, 14
capacité, 205
centre d'un arbre, 154
chemin, 189
chemin augmentant, 207
chemin, longueur, 189
chemin, simple, 189
circuit, 190
circuit Eulerien, 194
clôture transitive, 195
classes P *et* NP, *14*
coût moyen, 137
codage préfixe, 173
code ASCII, 11
commentaire, 18
compilateur gcc, *18*
compilation d'un programme C, *18*
compilation, options, 19
complexité amortie, 104
complexité asymptotique, 98
complexité en moyenne, 103
compression de Huffman, 173
conjugué, 131
conversion binaire-décimal, 39
conversions explicites, cast, *27*
conversions implicites, 27
coupe, 206
coupe minimale, problème, 207
couplage biparti pondéré, 248
couplage maximum, problème, 209
couplage, non-biparti, 253
crible d'Ératosthène, 52

degré d'un noeud, 189
diagramme de décision binaire, 196
disjonction de contraintes, 242
distance d'édition, 186
distance euclidienne, 216
distribution binomiale négative, 139
distribution géométrique, 138
dualité faible, 223
dualité forte, 224
dualité forte, preuve, 227

ensemble bien fondé, 91
ensemble convexe, 215
ensemble dénombrable, 11
ensembles finis comme listes, 80
enveloppe convexe, 252
environnement, 15
erreur absolue, 24
erreur d'arrondi, 13
erreur rélative, 24
erreurs d'exécution, 19
erreurs de compilation, 19
Euclide, algorithme, 249
exécution d'un programme C*, 18*

factorisation d'un nombre, 52
Farkas, lemme, 226
Fermat, petit théorème, 144
Fermat, test primalité, 144
flot, 206
flot (valeur), 207
flot maximum, 219, 248
flot maximum, problème, 207
fonction 91*, 91*
fonction (informatique), 16
fonction affine, 217
fonction affine par morceaux, 243
fonction convexe, 215
fonction de coût, 97
fonction de Collatz, 91
fonction de hachage, 157
fonction de sondage, 160
fonction linéaire, 217
fonction maximum, 243
fonction module, 243
fonction, appel et retour, 35
fonction, appel par valeur, 35
fonction, interface, 35
fonctions génériques, 73
fonctions récursives, 43
forme canonique, 217
forme normale d'Hermite, 249
forme normale d'Hermite, mise en oeuvre, 259
forme normale de Chomsky, 182
forme standard (ou équationnelle), 229
Fourier-Motzkin, élimination, 221
Fourier-Motzkin, mise en oeuvre, 225

générateurs (pseudo-)aléatoires, 135
génération aléatoire, 101
Gomory, coupure, 256
grammaire algébrique, 182
grammaire LR(1), 182
graphe, étiqueté, 189
graphe, acyclique, 190
graphe, coloration, 194
graphe, connecté, 190
graphe, creux, 189
graphe, dense, 189
graphe, dirigé, 189
graphe, fortement connecté, 190
graphe, non-dirigé, 189

hyper-graphe, 189

identité de polynômes, 146
impression par diagonale, 54
indépendant, ensemble de noeuds, 244
informatique, 11
intégration numérique, 39
interpolation, norme 1*, 220*
interpolation, norme ∞*, 224*

langage C*, 14*
lemme de Schwartz-Zippel, 146
listes, 77
listes à enjambements, 165

mémoïsation, 46, 180
mémoire, 15
méthode Newton-Raphson, 38
majorité, 148
Markov, inégalité, 169
master theorem, 123
matrice d'incidence, 246
matrice totalement unimodulaire (tum), 245
matrice Vandermonde, 129
matrice Vandermonde, déterminant, 129
Miller-Rabin, test, 145
min-max d'un tableaux, 51
minimax, théorème, 237
minimum local, 216
modularisation, 85
moindres carrés, 220
multi-graphe, 189
multiplication de Karatsuba, 122
multiplication de Strassen, 123

noeuds adjacents, 189
nombre premier, 51
norme euclidienne, 216
norme IEEE 754, 24

obstruction, d'un chemin augmentant, 207
optimisation convexe, 216
optimisation de requêtes, 177

optimisation linéaire, 217
optimisation linéaire en nombres entiers, 241

paradoxe des anniversaires, 157
parenthésage optimal, problème, 184
partition, algorithme, 140
payement d'une somme, 31
permutations, 59
permutations, énumération, 60
permutations, génération, 102
pgcd itératif, 31
pgcd, algorithme d'Euclide, 16
pile blocs d'activation, 16
pile, structure de données, 83
plans sécants, méthode, 256
plus court chemin, 247
plus courts chemins, 199
plus longue sous-séquence commune, 180
plus longue sous-séquence croissante, 186
pointeur de void*, 73*
pointeurs, 69
pointeurs de char*, 71*
pointeurs de fichiers, 75
pointeurs de fonctions, 72
pointeurs de tableaux, 70
pointeurs de variables, 69
points et segments comme structures, 65
polynôme interpolant, 130
polynôme, évaluation de Horner, 129
polynôme, racines, 146
polynômes, évaluation, 43
polynômes, règle de Horner, 44
portée lexicale, 36
probabilité de terminaison, 136
problème de la médiane, 143
problème de séparation, 225
problème dual, 223
problème SAT*, 242*
produit scalaire, 12
programmation dynamique, 179, 261, 263
programmation linéaire, 217
programme, 11

queue, structure de données, 83

récursion terminale, 43
rationnels comme structures, 64
recette, problème dual, 227
recherche aléatoire, 140
recherche dichotomique, 32, 122
recherche locale, TSP*, 265*
reconnaissance de mots, 183
recouvrement, ensemble de noeuds, 244
relâchement, 244
relation de récurrence, solution, 123
relation de récurrence, 121
relations de récurrence, 58
représentation entiers, 21
représentation nombres en base 2, 11

sémantique, 15
séparation et évaluation, méthode, 254
séquentialisation, 29
sac à dos, problème, 184, 255, 260
simplexe, algorithme dual, 239
simplexe, complexité, 236
simplexe, mise en oeuvre, 238
simplexe, solution basique initiale, 235
simplexe, vue matriciale, 233
solution basique, 229
solution basique initiale, mise en oeuvre, 239
somme cartésienne, 133
sous-séquence, 180
sous-séquence contiguë maximale, 171
structures avec pointeurs, 77
structures de données, 83
suite de Fibonacci, 46
syntaxe, 15

table de hachage, 157
table de hachage avec adressage ouvert, 160
table de hachage avec chaînage, 158
tableaux, 49
tableaux, à plusieurs dimensions, 53
tableaux, passage en argument, 50
tas, 117
tas, en dimension 2, 120
tas, build-heap, 117
tas, heapify, 117
test de primalité, 52, 143
test zéro polynôme, 146
théorie de la calculabilité, 13
théorie de la complexité, 13
Thèse de Church-Turing, 13
tour d'Hanoï, 45
tri, 55
tri à bulles, 55
tri par fusion, 56, 122
tri par fusion, complexité, 58
tri par insertion, 56
tri par insertion, avec listes, 79
tri rapide, 140
tri rapide, probabiliste, 141
tri topologique, 193
type bool*, 23*
type FILE*, 75*
type float*, 24*
type int*, 22*
type structure, 63
type union, 67

unimodularité (totale), 245
unimodularité, conditions, 246

variable (informatique), 15
variable globale, 36

variable statique, 85
variables d'écart, 231