Notes de cryptographie

Roberto M. Amadio

Notes de cryptographie

Roberto M. Amadio
Université de Paris

3 janvier 2022

Table des matières

Notation

Ensembles

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbf{N}$	nombres naturels
$\mathbf{Z}$	nombres entiers
$\mathbf{Q}$	nombres rationnels
$\mathbf{R}$	nombres réels
$\cup, \cap$	union, intersection de deux ensembles
$\bigcup, \bigcap$	union, intersection d'une famille d'ensembles
X^c	complémentaire de X
$\mathcal{P}(X)$	sous-ensembles de X
$\mathcal{P}_{fin}(X)$	sous-ensembles finis de X
Y^X	fonctions de X dans Y
$\sharp X$	cardinal de X
R^*	clôture réflexive et transitive d'une relation binaire R

Arithmétique

$\mathbf{Z}_n$	entiers modulo n
$\mathbf{Z}_n^*$	groupe multiplicatif des entiers modulo n
$\lvert a \rvert$	valeur absolue
$\equiv$	congruence
a/b	quotient division entière
$a \mod b$	reste de la division entière (ou module)
$a \mid b$	a divise b

Algèbre linéaire

$A, B, \ldots$	matrices
$adj(A)$	matrice adjointe
$det(A)$	déterminant
A^{-1}	matrice inverse

Probabilité

Ω	ensemble des expériences
$\mathcal{A}$	ensemble des événements
$P(A)$	probabilité d'un événement
$P(A \mid B)$	probabilité conditionnelle
X, Y	variables aléatoires discrètes (v.a.d)
$\Delta(X, Y)$	distance statistique
$\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$	famille de v.a.d. (*ensemble*)
$\sim$	équivalence calculatoire de familles de v.a.d.

Complexité asymptotique

f est $O(g)$	$\exists n_0, k \geq 0\ \forall n \geq n_0\ (f(n) \leq k \cdot g(n))$
f polynomiale	$\exists d \geq 0\ f$ est $O(n^d)$
f négligeable	$\forall d \geq 0\ f$ est $O(n^{-d})$

Cryptographie

$\mathcal{P}$	textes clairs
$\mathcal{C}$	textes chiffrés
$\mathcal{K}$	clefs
(G, E, F)	système pour la confidentialité
(G, Mac, V)	système pour l'intégrité (MAC)
$\oplus$	ou exclusif
$\mathcal{G}$	générateur pseudo-aléatoire de nombres (PRG)
$\mathcal{F}$	générateur pseudo-aléatoire de fonctions (PRF)

Chapitre 1

Introduction

La *crypto-logie* se décompose en deux activités : la *crypto-graphie* qui est l'art de chiffrer les communications et la *crypto-analyse* qui est l'art d'analyser les communications chiffrées. En pratique, dans ces notes on utilise le terme *cryptographie* pour se référer aux deux activités.

La cryptographie a une longue histoire pimentée par beaucoup d'anecdotes amusantes (lire par exemple [Sin99]). Pendant longtemps elle a été traitée comme une activité mystérieuse mais un changement radical est intervenu autour de 1980 avec la diffusion des ordinateurs, l'intérêt commercial et une certaine consolidation mathématique (système DES, système RSA, liaison avec la théorie de la complexité, ...) Techniquement, il s'agit d'une discipline à l'intersection de différents domaines scientifiques comme la théorie des nombres, le calcul des probabilités, la théorie de l'information et du codage et la théorie de la complexité du calcul.

Dans ce chapitre, on présente un certain nombre de systèmes cryptographiques qui ont une valeur historique et qui servent comme introduction au sujet. Tous ces systèmes ont des défauts importants qui les rendent inutilisables en pratique mais l'analyse de ces défauts nous permettra d'apprécier les difficultés du sujet et de raffiner nos méthodes.

1.1 Une première définition de système cryptographique

A quoi sert un système cryptographique ? Une première tâche élémentaire consiste à assurer la *confidentialité* d'une communication.

- A souhaite envoyer un *message* à B sur un *canal* où un attaquant C peut *écouter* (*eavesdrop* en anglais).
- A et B se mettent d'accord sur une méthode pour *chiffrer* et *déchiffrer* le message.
- A *chiffre* le message clair avant de l'envoyer.
- B *déchiffre* le message chiffré après l'avoir reçu.

On peut déjà distinguer une première question : comment définir le fait que l'attaquant C, qui a accès au message chiffré, n'obtient pas d'information significative sur le contenu du message clair ?

Par ailleurs, on peut envisager nombreuses variations. En effet l'hypothèse *minimale* est que l'attaquant C a accès au texte chiffré (*texte chiffré connu*). Un attaquant plus puissant peut avoir accès à un certain nombre de couples composés de textes clairs et de leurs chiffrements (*texte clair connu*). Par exemple, l'attaquant peut savoir que tout message chiffré commence d'une certaine façon. Un attaquant encore plus puissant peut choisir les textes clairs dont connaître le chiffrement (*texte clair choisi*) et/ou les textes chiffrés dont connaître

le déchiffrement (*texte chiffré choisi*). Par exemple, l'attaquant arrive à confondre un participant honnête pour qu'il fournisse en bonne foi les chiffrements et/ou les déchiffrements souhaités.

L'attaquant C pourrait être *actif* dans le sens que non seulement il peut lire tous les messages qui passent sur un canal mais il peut aussi en effacer et en générer certains. En présence d'un attaquant actif, il convient de se soucier non seulement de la *confidentialité* des messages échangés mais aussi de leur *intégrité*. Le récepteur B du message doit avoir une méthode pour s'assurer que le message a bien été émis par A et qu'il ne s'agit pas, par exemple, d'un message produit par l'attaquant C.

La confidentialité et l'intégrité sont les deux propriétés fondamentales qui doivent être assurées par un système cryptographique. Cependant, dans certaines situations d'autres propriétés apparaissent. Dans un système de vote électronique, on souhaite garantir une forme d'*anonymat* : l'observation du vote ne devrait pas permettre de révéler comment un participant a voté. Dans un système de commerce électronique, le *vendeur* doit avoir une façon de prouver que l'*acheteur* a bien passé une commande ; on parle de propriété de *non-répudiation*.

On introduit maintenant une première définition de système cryptographique qui sera raffinée dans les chapitres suivants. On se focalisera en particulier sur des systèmes cryptographiques qui visent à assurer la *confidentialité*. On verra dans le chapitre 6, que la méthodologie et les outils développés s'adaptent assez facilement au problème de l'*intégrité*.

Définition 1 (système cryptographique) *Un système cryptographique est composé d'un vecteur $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, G, E, D)$ où :*

- *$\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ sont des ensembles finis (non-vides) qui représentent, respectivement, l'ensemble des textes clairs, des textes chiffrés et des clefs.*
- *G, E, D sont des fonctions de type :*

$$G : 1 \to \mathcal{K} \ , \quad E : \mathcal{P} \times \mathcal{K} \to \mathcal{C} \ , \quad D : \mathcal{C} \times \mathcal{K} \to \mathcal{P} \ ,$$

qui représentent respectivement la génération d'une clef, le chiffrement d'un texte clair avec une clef et le déchiffrement d'un texte chiffré avec une clef. On suppose :

$$\forall\, k_1 \in \mathcal{K} \ \exists\, k_2 \in \mathcal{K} \ \forall\, p \in \mathcal{P} \ \ D(E(p, k_1), k_2) = p \ .$$

En d'autres termes, toute fonction de chiffrement $E(\_, k_1)$ a une inverse a gauche $D(\_, k_2)$.

Remarque 1

1. *L'existence d'une inverse à gauche de toute fonction de chiffrement $E(\_, k)$ implique que la fonction $E(\_, k)$ doit être injective. Si l'on fixe un texte chiffré et une clef il y a donc au plus un texte clair qui correspond au texte chiffré.*
2. *On suppose que tous les ensembles sont finis. Pour chiffrer un message de longueur arbitraire il faudra donc concevoir une méthode pour le découper en morceaux et le chiffrer.*
3. *Les fonctions de génération de clef G et de chiffrement E peuvent être probabilistes ce qui veut dire que ces fonctions ont accès à un générateur de bits aléatoires et qu'elles peuvent s'en servir pour manipuler leur flot de contrôle. Dans les systèmes* pratiques *considérés dans ces notes les fonctions G et E seront toujours probabilistes.*

4. *Les algorithmes de chiffrement et de déchiffrement sont publiques. La sécurité du système repose seulement sur le fait qu'une certaine clef n'est pas connue par l'attaquant.*
5. *La définition est clairement* incomplète *car elle n'impose aucun standard de sécurité. Par exemple, d'après cette définition on pourrait toujours prendre* $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ *et supposer que les fonctions* $E(\_, k)$ *et* $D(\_, k)$ *sont la fonction identité.*

1.2 Systèmes symétriques et asymétriques

On distingue deux types principaux de systèmes cryptographiques : les systèmes symétriques (ou à clef privée) et les systèmes asymétriques (ou à clef publique).

Dans les systèmes symétriques, il est facile de calculer la clef de déchiffrement à partir de la clef de chiffrement (et vice versa). Leur utilisation typique est la suivante :

1. A génère de façon aléatoire une nouvelle clef k,
2. A communique la nouvelle clef k à B en utilisant un canal sûr,
3. A et B échangent des messages en utilisant la clef k.

Parmi les systèmes symétriques utilisés actuellement, on peut citer ceux basés sur les fonctions DES et AES [DR02]. En général, ces systèmes permettent un chiffrement et déchiffrement rapide et ils assurent une sécurité convenable avec des 'petites' clefs (de l'ordre de 10^2 bits). Tous les systèmes historiques sont des systèmes symétriques car l'idée de système asymétrique est apparue seulement autour de 1980. Un inconvénient de ces systèmes est qu'un canal sûr est nécessaire pour initialiser la communication. Par ailleurs, pour chaque correspondant, il faut maintenir une clef secrète.

Dans les systèmes asymétriques, les clefs de chiffrement et déchiffrement sont différentes et il est *difficile* de calculer l'une à partir de l'autre. Leur utilisation typique est la suivante :

1. B génère un couple de clefs (k_1, k_2) telles que :

$$\forall\, p \in \mathcal{P} \;\; D(E(p, k_1), k_2) = p \;,$$

2. B rend k_1 publique et maintient k_2 secrète,
3. A peut apprendre la clef publique k_1, chiffrer des messages avec k_1 et les envoyer à B ; dans ce cas, seulement B sera capable de déchiffrer ces messages en utilisant la clef secrète k_2.

Parmi les exemples de systèmes asymétriques, on peut cite le système *RSA* [RSA78] et le système d'El Gamal [Gam85]. Un avantage des systèmes asymétriques est qu'il ne faut pas se soucier de garder secrète la clef de chaque correspondant (la clef est publique). Néanmoins, il faut s'assurer de l'authenticité de la clef utilisée. Ainsi si A veut envoyer un message à B il doit être sûr d'utiliser la clef publique de B. Un inconvénient des systèmes asymétriques par rapport aux systèmes symétriques est que souvent ils demandent des calculs plus compliqués et une clef plus grande (de l'ordre de 10^3 bits). Cependant, on peut combiner un système asymétrique avec un système symétrique (on parle de chiffrement *hybride*) de façon à avoir la flexibilité du système asymétrique combinée avec l'efficacité du système symétrique. Aussi des systèmes asymétriques introduits plus récemment qui sont basés par exemple sur les courbes elliptiques, les réseaux de nombres,... permettent de réduire la taille des clefs.

On retrouve la distinction entre symétrique et asymétrique aussi dans les systèmes conçus pour assurer l'*intégrité*. L'idée générale est d'attacher au message transmis une *étiquette* qui permet de vérifier à la fois l'*origine* du message et son *intégrité*.

— Dans les systèmes symétriques, l'étiquette est générée à l'aide d'une clef sécrète qui est partagée par l'émetteur et le récepteur du message. On parle de *codes d'authentification de messages* (en anglais, *message authentification codes ou MAC*).

— Dans les systèmes asymétriques, l'émetteur a un couple de clefs dont l'une est publique et l'autre est privée. L'émetteur se sert de la clef privée pour produire l'étiquette et tout récepteur du message peut utiliser la clef publique pour vérifier son intégrité. On parle de *signatures digitales*.

1.3 Mode dictionnaire (ECB)

Dans la suite du chapitre, on va présenter un certain nombre de systèmes cryptographiques historiques. Par défaut, on fera l'hypothèse qu'un texte clair est un mot sur l'alphabet français (et anglais) $\Sigma = \{A, B, \ldots, Z\}$; ou de façon équivalente, un mot sur $\mathbf{Z}_{26}$ (les entiers modulo 26). Par ce choix, on fait l'hypothèse que : espaces, ponctuations, lettres minuscules et majuscules sont ignorées. Ainsi *I wake up early* devient *IWAKEUPEARLY*. Ceci n'est pas très gênant tant que le texte clair correspond à un texte en langue naturelle car les langues naturelles sont très redondantes et il est assez facile de retrouver les espaces dans le texte.

Dans les systèmes présentés l'espace des texte clairs et des texte chiffrés est constitué de mots sur l'alphabet Σ de longueur n :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \Sigma^n \qquad n \geq 1 \ .$$

On ne traite que des systèmes symétriques et les fonctions de chiffrement et de déchiffrement sont des *permutations* sur Σ^n. Pour chiffrer un texte clair composé de m caractères, on applique un *bourrage* pour obtenir un texte clair de longueur $m' \geq m$ où $m' = \ell \cdot n$ est un multiple de n. On obtient donc un message $M = M_1 \cdots M_\ell$ composé de ℓ blocs de n caractères que l'on chiffre en appliquant la fonction E_k bloc par bloc :

$$E(M, k) = E(M_1, k) \cdots E(M_\ell, k) \ .$$

De façon similaire, le déchiffrement d'un texte composé de ℓ blocs de n caractères consiste à appliquer la fonction $D(\_, k)$ bloc par bloc et à éliminer le bourrage. Dans ce contexte, on dit qu'on chiffre les blocs en *mode ECB* (pour *electronic codebook mode*). En français, on parle aussi de *mode dictionnaire* car à chaque bloc de texte clair correspond un bloc de texte chiffré. [1]

En l'absence d'autres informations sur le texte clair, le bourrage peut se faire de la façon suivante : si m n'est pas un multiple de n on complète le dernier bloc avec les caractères $XY \cdots Y$ et si m est un multiple de n alors on ajoute un bloc avec les caractères $XY \cdots Y$ (le choix des caractères X et Y est arbitraire). Ainsi après déchiffrement du message on obtient un texte qui termine avec un mot de la forme $XY \cdots Y$ que l'on peut ignorer car il ne fait pas partie du message initiale. [2]

1. D'autres modes de transmission seront abordés dans la suite du cours, notamment le mode chaîné (*CBC*) et le mode compteur (*CTR*).

2. Ce système de bourrage permet une attaque sur texte clair connu, mais de toute façon les systèmes historiques que l'on présente ont d'autres faiblesses...

1.4 Exemples de systèmes mono-alphabétiques

On donne des exemples de systèmes historiques dans lesquels le chiffrement se fait caractère par caractère d'après une fonction sur l'alphabet Σ. On appelle ces systèmes mono-alphabétiques : un caractère est toujours chiffré de la même façon, indépendamment de sa position dans le texte. Dans un système mono-alphabétique, le diagramme de distribution des caractères du chiffrement est identique, à une permutation près, à celui du texte clair.

Système de César

Dans ce système un bloc est composé d'un caractère et une clef est aussi un caractère. Ainsi on a :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbf{Z}_{26} \ .$$

Pour une clef $k \in \mathbf{Z}_{26}$ on définit :

$$E(p,k) = (p+k) \mod 26, \quad D(c,k) = (c-k) \mod 26 \ .$$

En appliquant les propriétés de l'arithmétique modulaire on vérifie :

$$\begin{aligned} D(E(p,k),k) &= ((p+k) \mod 26 - k) \mod 26 \\ &= (p+k-k) \mod 26 \\ &= p \ . \end{aligned}$$

On suppose que l'attaquant sait quand un texte suffisamment long est un texte significatif (par exemple, il sait que le texte clair est rédigé dans une certaine langue naturelle). Dans ce cas, il peut monter une attaque par énumération sur le texte chiffré. Étant donné un message chiffré $c = c_1 \dots c_n$ il essaye les 26 clefs $k \in \mathbf{Z}_{26}$ et il calcule :

$$(c_1 - k) \mod 26 \cdots (c_n - k) \mod 26 \ .$$

La morale de cette attaque est que dans un système cryptographique l'espace des clefs doit être assez grand.

Système par substitution

On élargit l'espace des clefs. Soient :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbf{Z}_{26} \ , \quad \mathcal{K} = \{\pi : \mathbf{Z}_{26} \to\colon \mathbf{Z}_{26} \mid \pi \text{ permutation}\} \ .$$

Étant donnée une permutation π, on définit :

$$E(p,\pi) = \pi(p) \ , \quad D(c,\pi) = \pi^{-1}(c) \ .$$

On note qu'à partir de π il est facile de calculer la permutation inverse π^{-1}. On vérifie que :

$$D(E(p,\pi),\pi) = \pi^{-1}(\pi(p)) = p \ .$$

On a donc un système cryptographique symétrique avec 26! clefs possibles et une attaque par énumération semble difficile. Cependant, la fréquence des lettres dans les langages naturels a

Lettre	Anglais	Français
e	12,7	17,8
a	8,2	8,2
o	7,5	5,7
i	7,0	7,3
t	9,1	7,3
s	6,3	8,3

TABLE 1.1 – Fréquence des lettres les plus communes en anglais et en français

été bien étudiée. Par exemple, la table 1.1 donne la fréquence des lettres les plus communes en anglais et en français.

Étant donné un texte suffisamment long qui est le chiffrement d'un texte clair en anglais ou en français, la lettre qui est présente le plus souvent correspond probablement à e, et ainsi de suite... Comme les langages naturels sont redondants, dès qu'un nombre limité de substitutions ont été déterminées, il est possible de deviner celles qui restent. Par ailleurs, il y a des statistiques aussi sur la fréquence de digrammes et de tri-grammes. Par exemple, THE est un tri-gramme qu'on trouve souvent en anglais.

Système affine (en dimension 1)

Dans le système de César, on a considéré les caractères comme des entiers modulo 26 et on a vu le chiffrement comme une fonction de la forme $x \mapsto (x+k) \bmod 26$. On va maintenant considérer des transformations affines de la forme :

$$x \mapsto (ax + b) \mod 26 \ .$$

On sait que cette transformation est inversible si et seulement si $pgcd(a, 26) = 1$ (voir proposition 24). Il en suit qu'on a $12 \cdot 26 = 312$ choix possibles pour la clef $(a, b) \in \mathbf{Z}_{26}^* \times \mathbf{Z}_{26}$. Il s'agit d'un petit nombre et donc ce système est aussi sujet à une attaque par énumération. Par ailleurs, il y a une deuxième faiblesse : la fonction de chiffrement est affine et ce fait permet de monter une attaque sur texte clair connu comme illustré dans l'exercice suivant.

Exemple 1 *On sait qu'un système affine avec clef (a, b) envoie E sur R et S sur H et on cherche à obtenir la valeur de la clef. On dérive des hypothèses un système composé de deux congruences :*

$$\begin{cases} (4a + b \equiv 17) & \mod 26 \\ (18a + b \equiv 7) & \mod 26 \end{cases}$$

De la première on dérive $(b \equiv 17 - 4a) \mod 26$ et en remplaçant dans la deuxième on a :

$$(18a + 17 - 4a \equiv 7) \mod 26 \ . \tag{1.1}$$

Donc $(14a \equiv 16) \mod 26$ qui implique $(7a \equiv 8) \mod 13$. On calcule $(7^{-1} \equiv 2) \mod 13$ et on dérive $(a \equiv 3) \mod 13$. On peut faire appel à la proposition 18 ou vérifier par une analyse exhaustive qu'il y a exactement 2 solutions pour la congruence (1.1), à savoir $a = 3$ ou $a = 16$ et dans les deux cas on a $b = 5$.

1.5 Systèmes affines (en dimension n)

On peut généraliser le système affine en dimension 1 à une dimension n. Ceci permet d'élargir l'espace des clefs et complique les attaques sur texte chiffré. Cependant tous ces systèmes sont faibles par rapport à une attaque sur texte clair connu.

Système de Vigenère

Le système de Vigenère généralise le système de César en dimension n. On prend :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (\mathbf{Z}_{26})^n \ ,$$

et on pose :

$$E(\vec{p}, \vec{k}) = (\vec{p} + \vec{k}) \mod 26 \ , \quad D(\vec{c}, \vec{k}) = (\vec{c} - \vec{k}) \mod 26 \ .$$

Il s'agit d'un premier exemple de *système poly-alphabétique* : un caractère peut être transformé dans des caractères différents selon sa position dans le texte.

On considère des attaques sur le texte chiffré de ce système. Le nombre de clefs est maintenant $(26)^n$, ce qui est déjà considérable pour $n = 10$. Ainsi une attaque par énumération semble inefficace. On note que si l'on connaît la période n, alors on peut disposer le texte sur n colonnes. Par exemple, si le texte chiffré est :

XUOLMABDHJKZWJM...

et on sait que $n = 5$, on peut disposer le texte de la façon suivante :

$$\begin{array}{lllll} X & U & O & L & M \\ A & B & D & H & J \\ K & Z & W & J & M \ldots \end{array}$$

On sait que les lettres sur la même colonne dépendent du même décalage et on peut donc appliquer une analyse de fréquence : la lettre la plus fréquente dans une colonne correspond probablement à la lettre la plus fréquente dans le langage naturel. On peut ainsi déterminer le décalage correspondant. Pour déterminer la longueur n de la clef, on pourrait essayer d'énumérer les longueurs possibles $n = 1, 2, 3, \ldots$ de façon croissante, mais il est possible de réduire fortement les possibilités. Une première approche attribuée à Kasinski (1860) est la suivante :

1. On cherche dans le texte chiffré des répétitions du même mot (le plus long le mieux).
2. On calcule les distances entre les occurrences de chaque mot répété. Si un mot répété vient du chiffrement du même mot à partir de la même position alors les distances doivent être des multiples de la période n.
3. On calcule le *pgcd* des distances de mots répétés. On s'attend à que la période n soit parmi les diviseurs du *pgcd*.
4. On applique l'analyse de fréquence en supposant la période égalè à un des diviseurs du *pgcd*.

Une méthode alternative pour le calcul de la période utilise un *indice de coïncidence* qu'on va définir. Soit n_i le nombre d'occurrences de la lettre i dans un texte avec n lettres. On a

donc $n = \Sigma_{i=0,\ldots,25}\ n_i$. Si l'on tire 2 lettres parmi les n, la probabilité que les deux lettres soient i est donc :

$$p_i = \frac{\binom{n_i}{2}}{\binom{n}{2}} \qquad i = 0, \ldots, 25\ .$$

L'*indice de coïncidence* (IC) est obtenu en additionnant ces probabilités pour toutes les lettres :

$$IC = \Sigma_{i=0,\ldots,25}\ p_i\ .$$

On remarque que l'indice est *invariant par substitution* des lettres, et donc en particulier par décalage. Il se trouve que les textes dans un langage naturel donné ont un indice de coïncidence caractéristique. Par exemple, pour l'anglais, le français et l'allemand on s'attend à avoir un IC de $0,065$, $0,074$ et $0,072$, respectivement. La méthode pour retrouver la longueur de la clef est donc la suivante : on dispose le texte sur un nombre croissant de colonnes jusqu'à arriver à une situation où toutes les colonnes ont un indice de coïncidence proche de celui du langage naturel du texte clair.

Système par transposition (ou permutation)

Le système par transposition (on dit aussi par permutation) comme le système par substitution utilise une permutation comme clef. La différence est que dans le système par substitution on a une permutation sur $\mathbf{Z}_{26}$ qu'on applique lettre par lettre (on a un système mono-alphabétique) alors que dans le système par transposition on à une permutation sur $\{1, \ldots, n\}$ qu'on applique au texte chiffré par blocs de n lettres (on a un système poly-alphabétique). On a donc :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \Sigma^n\ , \quad \mathcal{K} = \{\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \pi \text{ permutation}\}\ .$$

Si π^{-1} est la permutation inverse de π on a :

$$E((x_1, \ldots, x_n), \pi) \ = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})\ , \qquad D((x_1, \ldots, x_n), \pi) \ = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(n)})\ .$$

De façon plus algébrique, on peut considérer que les fonctions de chiffrement correspondent à des matrices $n \times n$ qui sont obtenues de la matrice identité en permutant les lignes. Par exemple, la permutation :

$$\pi(1) = 2 \quad \pi(2) = 3 \quad \pi(3) = 1\ ,$$

correspond à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans un chiffrement par transposition la fréquence des lettres dans le texte chiffré est la même que dans le texte clair. Ainsi il est facile de voir si le chiffrement d'un texte en langue naturelle a été obtenu avec un chiffrement par transposition. Une attaque sur texte chiffré peut utiliser un dictionnaire pour éliminer rapidement les permutations qui génèrent des suites de lettres impossibles. Par ailleurs, on peut sélectionner certains digrammes ou trigrammes qu'on s'attend à trouver dans le texte clair et ensuite chercher des permutations qui maximisent leur fréquence dans le texte chiffré. Enfin, si un texte clair est connu, on peut chercher son anagramme dans le texte chiffré.

Système de Hill

Dans ce système la fonction de chiffrement est déterminée par une *fonction linéaire inversible* sur $\mathbf{Z}_{26}^n$ ou de façon équivalente par une matrice $A \in \mathbf{Z}_{26}[n,n]$ avec un déterminant inversible. Dans ce cas, le chiffrement est simplement la multiplication (modulo 26) de la matrice par un vecteur de n lettres :

$$E(\vec{x}, A) = (A\vec{x}) \mod 26 \ .$$

Attaque par texte clair connu

Le système de Vigenère, le système par transposition et le système de Hill sont des exemples de systèmes affines en dimension n sur $\mathbf{Z}_m$. La clef d'un tel système est une matrice inversible $A \in \mathbf{Z}_m[n,n]$ et un vecteur $b \in \mathbf{Z}_m^n$. Le chiffrement est calculé par :

$$E(\vec{x}, (A,b)) = (A\vec{x} + b) \mod m \ .$$

Les systèmes affines sont sujets à une attaque sur texte clair connu. En effet, si l'attaquant connaît $n+1$ textes clairs w_i et les textes chiffrés correspondants $c_i = (Aw_i + b) \bmod m$, $i = 0, \ldots, n$ alors il peut appliquer la méthode suivante.

1. Soit W une matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les différences $(w_i - w_0) \bmod m$, pour $i = 1, \ldots, n$.
2. Soit C une matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les différences $(c_i - c_0) \bmod m$, pour $i = 1, \ldots, n$.
3. On remarque que $c_i - c_0 \equiv A(w_i - w_0) \bmod m$. Ainsi on a $(AW \equiv C) \bmod m$.
4. Si, avec un peu de chance, $det(W)$ est premier avec m, alors soit w' son inverse et soit $W^{-1} = w' adj(W)$ (voir appendice A.5). Alors :

$$(\ A \equiv CW^{-1}\ ) \mod m \quad \text{et} \quad (b \equiv (c_0 - Aw_0)) \mod m \ .$$

Exemple 2 *On suppose savoir qu'un système de Hill sur* $(\mathbf{Z}_{26})^2$ *chiffre HAND avec FOOT et on cherche à déterminer la clef, soit une matrice* A *de dimension* 2×2 *sur* $\mathbf{Z}_{26}$*. Comme un chiffrement de Hill est une fonction linéaire on sait que* $A0 = 0$ *et on peut appliquer la méthode avec* $w_0 = c_0 = 0$*. On obtient :*

$$W = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 19 \end{bmatrix} \quad det(W) = 21, \quad pgcd(21, 26) = 1 \ .$$

Donc W *est inversible et il reste à calculer* $A = CW^{-1}$*.*

1.6 Un exemple de protocole cryptographique

On a déjà mentionné que les systèmes cryptographiques ont plusieurs applications qui vont bien au delà de la simple tâche de protéger la confidentialité d'un message. En général, à partir d'un certain nombre de fonctionnalités cryptographiques de base on peut construire des protocoles qui assurent des fonctionnalités plus compliquées.

	A		B
(1)	$[x_1 \leftarrow \mathbf{Z}_m : B!f(x_1)]$	$\rightarrow$	$A?y_1$.
(2)	$B?x_2$.	$\leftarrow$	$[y_2 \leftarrow \{0,1\} : A!y_2]$
(3)	$B!x_1$.	$\rightarrow$	$A?y_3$.

(4)	if ($x_1 \mod 2 = x_2$)
	then LOSE
	else WIN
			if ($f(y_3) = y_1$) then
			if ($y_3 \mod 2 = y_2$)
			then WIN
			else LOSE

TABLE 1.2 – Un protocole pour jouer à pile ou face au téléphone

On présente (de façon informelle) un exemple d'une telle situation. L'objectif est de concevoir un protocole pour jouer à pile ou face au téléphone en se basant sur la notion de *fonction à sens unique*[3] et *résistante aux collisions*.

De façon informelle, on dispose d'une fonction $f : D \rightarrow D$ sur un (grand) domaine fini D telle que :

1. Étant donné x, il est *facile* de calculer $f(x)$.
2. Étant donné y, il est *difficile* de trouver x tel que $f(x) = y$ (inversion difficile).
3. Il est *difficile* de trouver $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ (collision difficile).

Pour l'instant, on suppose que facile veut dire en temps polynomial et difficile veut dire qu'on ne connaît pas un algorithme polynomial (ce qui est plus faible que de dire qu'un algorithme polynomial n'existe pas !). Par ailleurs, on fait les hypothèses suivantes :

— A et B veulent jouer à pile ou face au téléphone.
— La ligne de téléphone est 'sécurisée' : A et B sont sûrs de parler entre eux.
— A et B se mettent d'accord pour utiliser une fonction f avec les propriétés décrites ci-dessus.
— A et B ne se font pas confiance (ils viennent de divorcer et doivent décider qui garde la maison...).

Pour décrire le protocole, il convient de fixer un peu de notation :

— $x \leftarrow D$: on affecte à x une valeur aléatoire du domaine D. Par exemple, si $D = \mathbf{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$ alors $x \leftarrow \mathbf{Z}_m$ affecte à x une valeur dans $\mathbf{Z}_m$ choisie avec probabilité uniforme.
— $A!exp$: on envoie à A un message qui résulte de l'évaluation de l'expression exp.
— $B?x$: on reçoit de B un message dont la valeur est affectée à la variable x.

Avec cette notation, la table 1.2 présente un protocole pour jouer à pile ou face au téléphone.

On ne présente pas une analyse formelle de ce protocole. Mais les questions suivantes expliquent en partie sa conception.

1. On suppose que B a la capacité d'inverser f. Comment B peut-il tricher (en effectuant un calcul additionnel) ?
2. On suppose que A a la capacité de trouver des collisions dans f. Comment A peut-il tricher (en effectuant un calcul additionnel) ?

3. Un résultat central de la cryptographie qui sera évoqué dans les chapitres suivants est que l'existence d'une fonction à sens unique est une condition nécessaire et suffisante à l'existence de systèmes cryptographiques 'pratiques et sûrs'.

3. On suppose que le générateur aléatoire de A est biaisé alors que celui de B est équitable. Par exemple, A choisit plus souvent un nombre pair. Les chances que A gagne sont-elles affectées ? Quid si le générateur de B est biaisé et celui de A est équitable ?
4. Maintenant on suppose que les générateurs de A et de B sont biaisés. Les chances que A gagne sont-elles affectées ?

1.7 Sommaire

On a introduit de façon informelle les notions de système cryptographique (pour la confidentialité) et de fonction à sens unique résistante aux collisions. On a décrit un certain nombre de systèmes cryptographiques historiques basés sur les notions de permutation et de fonction affine ainsi qu'un exemple de protocole cryptographique qui repose sur la notion de fonction à sens unique. Tous les systèmes historiques présentés sont sujets à des attaques.

Chapitre 2

Confidentialité parfaite

Tous les systèmes historiques discutés dans le chapitre 1 sont sujets à des attaques. Est-ce possible de construire un système cryptographique pour lequel on peut *prouver* qu'aucune attaque est possible ? Pour répondre à cette question, il faudra d'abord définir exactement ce qui compte comme une attaque.

2.1 Système à masque jetable

Pour plus de simplicité, on travaille sur un alphabet binaire $\Sigma = \{0,1\}$. Si le texte clair est rédigé en langage naturel on pourra toujours coder les lettres de l'alphabet en binaire en utilisant, par exemple, un des codages standard (ASCII, ISO,...).

On considère un système cryptographique dans lequel la clef est au moins aussi longue que le message à chiffrer. Ainsi si le texte clair a longueur au plus n on prend :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \{0,1\}^n \ .$$

Pour chiffrer et déchiffrer on utilise la fonction logique binaire $\oplus$ (*xor* ou *ou exclusif*) :

$$\oplus : \{0,1\}^2 \to \{0,1\} \ ,$$

dont on rappelle la table de vérité :

x_1	x_2	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

On étend la fonction *xor* à des vecteurs de n bits :

$$\oplus : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n \ ,$$

en appliquant le *xor* coordonnée par coordonnée. Ensuite, le système à masque jetable (*one-time pad* en anglais) est défini par :

$$\begin{array}{ll} E(\_,k) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n \ , & E(p,k) = p \oplus k \ , \\ D(\_,k) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n \ , & D(c,k) = c \oplus k \ . \end{array}$$

On rappelle que le *xor* est associatif et commutatif et que, pour tout $x \in \{0,1\}$, $x \oplus x = 0$ et $x \oplus 0 = x$. Ainsi :

$$D(E(p,k),k) = (p \oplus k) \oplus k = p \ .$$

On va montrer que ce système assure une forme de confidentialité maximale qu'on appelle confidentialité parfaite.

2.2 Confidentialité parfaite

Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, G, E, D)$ un système cryptographique (définition 1). On va construire un *espace de probabilité* discret $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur ce système et l'utiliser pour définir une notion de confidentialité parfaite.

On prend comme ensemble des expériences Ω les produit cartésien $\mathcal{P} \times \mathcal{K}$ et on suppose que tout sous-ensemble de Ω est un événement. Ainsi l'ensemble des événements est : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On va utiliser les abréviations suivantes :

— $(p,k) \equiv \{(p,k)\}$ est l'événement où le texte clair p est chiffré avec la clef k.
— $p \equiv \{(p,k) \mid k \in \mathcal{K}\}$ est l'événement où le texte clair p est chiffré.
— $k \equiv \{(p,k) \mid p \in \mathcal{P}\}$ est l'événement où la clef k est utilisée pour chiffrer un texte clair.
— $c \equiv \{(p,k) \mid E(p,k) = c\}$ est l'événement où le texte chiffré est c.

On fait deux hypothèses :

1. Les événements p et k sont *indépendants*, c'est-à-dire

$$P(p \cap k) = P(p,k) = P(p) \cdot P(k) \ .$$

   Cette hypothèse est très naturelle car en général le choix de la clef ne dépend du texte clair.

2. L'attaquant connaît $P(p)$, pour tout texte clair $p \in \mathcal{P}$. Cette hypothèse est en faveur de l'attaquant qui a une connaissance parfaite de la fréquence de tout texte clair (de longueur n).

La définition de confidentialité parfaite repose sur la notion de probabilité conditionnelle. On rappelle que la probabilité de l'événement A conditionnée sur l'événement B (avec $P(B) > 0$) s'écrit $P(A \mid B)$ et qu'on a :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ .$$

Définition 2 (confidentialité parfaite) *Un système cryptographique assure la* confidentialité parfaite *si le fait d'observer un texte chiffré c ne fournit aucune information (probabiliste) sur le texte clair correspondant p. En d'autres termes, si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $c \in \mathcal{C}$ avec $P(c) > 0$ on a : $P(p \mid c) = P(p)$.*

Remarque 2 *Le fait que $P(p \mid c) = P(p)$ implique que p et c sont indépendants car :*

$$\frac{P(p \cap c)}{P(c)} = P(p) \quad \textit{implique} \quad P(p \cap c) = P(p) \cdot P(c) \ .$$

Exemple 3 *Soient* $\mathcal{P} = \{0, 1\}$, $\mathcal{K} = \{A, B\}$, $\mathcal{C} = \{a, b\}$. *La* fonction de chiffrement *est définie par :*

p	k	$E(p,k)$
0	A	a
1	A	b
0	B	b
1	B	a

La probabilité des textes clairs p, *des* clefs k *et la probabilité dérivée du* texte chiffré c *:*

p	$P(p)$
0	1/4
1	3/4

k	$P(k)$
A	1/4
B	3/4

c	$P(c)$
a	10/16
b	6/16

Les autres probabilités dérivées *:*

p	c	$P(p \cap c)$	$P(p \cap c)/P(c)$
0	a	1/16	1/10
1	a	9/16	9/10
0	b	3/16	1/2
1	b	3/16	1/2

Ce système n'a assure pas la confidentialité parfaite. Par exemple, on suppose que l'attaquant voit le texte chiffré a. *La probabilité que le* texte clair *est* 1 *est* 9/10. *Ce qui est* différent *de* 3/4 *qui est la probabilité qu'un texte clair est* 1.

2.3 Caractérisation de la confidentialité parfaite

La proposition suivante due à Shannon [Sha49] fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la confidentialité parfaite.

Proposition 1 *Soit* $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, G, E, D)$ *un* système cryptographique *tel que* $\sharp\mathcal{P} = \sharp\mathcal{C} = \sharp\mathcal{K}$ *et pour tout* $p \in \mathcal{P}$ *et* $c \in \mathcal{C}$, $P(p), P(c) > 0$. *Alors le système assure la* confidentialité parfaite *si et seulement si :*

1. *les clefs sont sélectionnées avec une probabilité* uniforme *:* $P(k) = 1/\sharp\mathcal{K}$,
2. $\forall\, p, c\ \exists! k\, (E(p,k) = c)$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Pour tout texte clair p, on doit avoir :

$$\sharp\{E(p,k) \mid k \in \mathcal{K}\} = \sharp\mathcal{C}\ .$$

S'il y avait un texte chiffré c qui diffère de $E(p,k)$ pour tout k, alors

$$P(c \mid p) = 0 \neq P(c) > 0\ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse de confidentialité parfaite. Pourquoi ? Ainsi pour tout texte clair p et texte chiffré c il existe unique $k(p,c) \in \mathcal{K}$ tel que $E(p, k(p,c)) = c$. Maintenant, on démontre que $P(k(p,c))$ est *constante* par rapport à p, ce qui implique que $P(k(p,c)) = 1/\sharp\mathcal{K}$.

Pour démontrer cette propriété, on *calcule* :

$$\begin{aligned} P(p) &= P(p \mid c) && \text{(par confidentialité parfaite)} \\ &= \frac{P(c \mid p) \cdot P(p)}{P(c)} && \text{(par Bayes)} \\ &= \frac{P(k(p,c)) \cdot P(p)}{P(c)} && \text{(par définition).} \end{aligned}$$

Ainsi $P(k(p,c)) = P(c)$ pour tout texte clair p. Et on note que : $\{k(p,c) \mid p \in \mathcal{P}\} = \mathcal{K}$. Pourquoi ?
($\Leftarrow$) Il suffit d'observer que :

$$\begin{aligned} P(p \mid c) &= \frac{P(p) \cdot P(c \mid p)}{P(c)} && \text{(par Bayes)} \\ &= \frac{P(p) \cdot P(k(p,c))}{\Sigma_{q \in \mathcal{P}} P(q) \cdot P(k(q,c))} && \text{(par hyp. (2))} \\ &= \frac{P(p) \cdot (\sharp\mathcal{K})^{-1}}{(\sharp\mathcal{K})^{-1} \cdot (\Sigma_{q \in \mathcal{P}} P(q))} && \text{(par hyp. (1))} \\ &= P(p)\ . \end{aligned}$$

□

Corollaire 1 *Le système à masque jetable avec choix uniforme des clefs assure la confidentialité parfaite.*

Preuve. On vérifie sur $\{0,1\}$ que $\forall\, c, p\ \exists!\, k\, (p \oplus k = c)$. Ceci se généralise de suite à $\{0,1\}^n$. □

Exemple 4 *Après tout, le système de l'exemple 3 assure la confidentialité parfaite à condition de choisir les clefs avec une probabilité uniforme.*

Remarque 3 *Le système à masque jetable demande une clef aussi longue que le message ce qui n'est pas du tout pratique. Malheureusement cette condition est nécessaire pour obtenir une confidentialité parfaite. On suppose qu'on dispose d'un* système cryptographique *tel que :*

- $\sharp\mathcal{K} < \sharp\mathcal{P}$.
- *Pour tout* $p \in \mathcal{P}$, $P(p) > 0$.

On a donc moins de clés que de textes à chiffrer. *Or un tel système* ne peut pas assurer la confidentialité parfaite. *En effet soit* $c = E(p,k)$ *avec* $P(k) > 0$. *Il doit exister* $p' \in \mathcal{P}$ *tel que pour tout* $k' \in \mathcal{K}$, $p' \neq D(c,k')$. *Il suit que* $0 = P(p' \mid c) \neq P(p') > 0$.

Remarque 4 *Le système à masque jetable assure la* confidentialité parfaite *mais il* ne garantit pas l'intégrité *du message. Par exemple, un attaquant peut* complémenter *les bits du message chiffré. Dans ce cas, le récepteur, après déchiffrement du message, va accepter un message qui est le complémentaire du message originale.*

2.4 Sommaire

On a introduit une notion de confidentialité parfaite qui repose sur la notion de probabilité conditionnelle : le chiffrement est parfait si l'observation du texte chiffré nous apprend rien sur la distribution du texte clair. On obtient ce type de confidentialité avec des systèmes dans lesquels la distribution des textes chiffrés est uniforme. Le prix à payer est qu'il faut avoir autant de clefs que de textes à chiffrer.

Chapitre 3

Distance statistique et équivalence calculatoire

Le système à masque jetable assure la confidentialité parfaite en faisant en sorte que la distribution des chiffrements d'un texte clair soit toujours uniforme. Ainsi les distributions des chiffrements de deux textes clairs de même longueur sont *identiques*. Dans les chapitres suivants, on s'intéresse à une notion de confidentialité plus faible dans l'espoir de pouvoir construire des systèmes cryptographiques *sûrs et pratiques* qui ont cette propriété. Dans ce chapitre, on se pose la question de comment comparer deux distributions. On commence par définir une *distance* entre distributions qu'on appelle *distance statistique*. Cette notion sera ensuite combinée avec deux autres notions : celle d'*algorithme de décision calculable en temps polynomial* (PPT) et celle de fonction *négligeable* pour arriver enfin à une notion d'*équivalence calculatoire* de (familles de) variables aléatoires discrètes. Il s'agit d'un petit tour de force qui, dans l'état actuel de nos connaissances, semble inévitable pour arriver à donner une définition robuste et rigoureuse des propriétés de sécurité (dont la confidentialité et l'intégrité).

3.1 Distance statistique

On dénote par $X, Y, \ldots$ des variables aléatoires discrètes (v.a.d) dont l'image est contenue dans un ensemble fini R.

Définition 3 (distance statistique) *Soient $X, Y : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini. On définit leur distance statistique par :*

$$\Delta(X, Y) = \frac{1}{2}\Sigma_{x \in R}|P(X = x) - P(Y = x)| \ .$$

Si $X : \Omega \to R$ est une v.a.d., soit $f_X : R \to [0, 1]$ la distribution associée qui est définie par $f_X(x) = P(X = x)$. La fonction Δ ne dépend que des distributions associées aux v.a.d. et sur les distributions elle est une distance. [1]

Proposition 2 *Soient $X, Y, Z : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini. Alors :*

1. $\Delta(X, Y) \in [0, 1]$.

1. Il s'agit d'un cas particulier de la distance induite par la norme-1 sur les fonctions.

2. $\Delta(X,Y) = 0$ *ssi* $f_X = f_Y$.
3. $\Delta(X,Y) = \Delta(Y,X)$.
4. $\Delta(X,Z) \leq \Delta(X,Y) + \Delta(Y,Z)$.

La preuve est un exercice simple. La caractérisation suivante de la distance Δ utilise le fait que R est fini.

Proposition 3 *Soient $X, Y : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini. Alors :*

$$\Delta(X,Y) = max_{R' \subseteq R} |P(X \in R') - P(Y \in R')| \ .$$

Preuve. Soient :

$$\begin{aligned} R_X &= \{x \in R \mid P(X=x) > P(Y=x)\} \ , \\ R_Y &= \{x \in R \mid P(X=x) < P(Y=x)\} \ , \\ R_Z &= \{x \in R \mid P(X=x) = P(Y=x)\} \ . \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} &1 = \Sigma_{x \in R} P(X=x) \\ &= \Sigma_{x \in R_X}(P(Y=x) + (P(X=x) - P(Y=x))) + \Sigma_{x \in R_Y} P(X=x) + \Sigma_{x \in R_Z} P(X=x) \\ &= \Sigma_{x \in R_X} P(Y=x) + \Sigma_{x \in R_Y}(P(X=x) + (P(Y=x) - P(X=x))) + \Sigma_{x \in R_Z} P(Y=x) \\ &= \Sigma_{x \in R} P(Y=x) = 1 \ . \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \delta_X &= \Sigma_{x \in R_X} |P(X=x) - P(Y=x)| \ , \\ \delta_Y &= \Sigma_{x \in R_Y} |P(Y=x) - P(X=x)| \ , \end{aligned}$$

et on dérive que $\delta_X = \delta_Y$ et

$$\Delta(X,Y) = \frac{1}{2}(\delta_X + \delta_Y) = \delta_X = \delta_Y \ .$$

On remarque aussi que :

$$\delta_X = |P(X \in R_X) - P(Y \in R_X)| = |P(X \in R_Y) - P(Y \in R_Y)| = \delta_Y \ .$$

Donc en prenant $R' = R_X$ (ou de façon équivalente $R' = R_Y$) on obtient :

$$\Delta(X,Y) = |P(X \in R') - P(Y \in R')| \ .$$

Soit maintenant $R' \subseteq R$. On partitionne R' en 3 ensembles : $R'_X = R' \cap R_X$, $R'_Y = R' \cap R_Y$ et $R'_Z = R' \cap R_Z$ et on montre que :

$$\begin{aligned} &|P(X \in R') - P(Y \in R')| \\ &\leq max(|P(X \in R'_X) - P(Y \in R'_X)|, |P(X \in R'_Y) - P(Y \in R'_Y)|) \\ &\leq max(\delta_X, \delta_Y) \\ &= \Delta(X,Y) \ . \end{aligned}$$

□

Considérons maintenant la situation où l'on compose les v.a.d. X, Y avec une fonction $f : R \to R'$.

Proposition 4 *Soient $X, Y : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini et $f : R \to R'$ une fonction (avec R' fini). Alors on abrège $\Delta(f \circ X, f \circ Y)$ en $\Delta_f(X, Y)$ et on a :*

$$\Delta_f(X, Y) \leq \Delta(X, Y) \ .$$

PREUVE. Par la proposition 3, on sait que :

$$\Delta(f \circ X, f \circ Y) = max_{R' \subseteq R} |P(f \circ X \in R') - P(f \circ Y \in R')| \ .$$

Si le max est atteint pour R', on pose $R'' = f^{-1}(R')$ et on obtient :

$$\Delta(f \circ X, f \circ Y) \quad = |P(X \in R'') - P(Y \in R'')| \quad \leq \Delta(X, Y) \ .$$

□

Supposons maintenant que $R' = \{0, 1\}$. Donc la fonction f prend un échantillons d'une v.a.d. et produit une valeur 0 ou 1.

Proposition 5 *Soient $X, Y : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini et $f : R \to \{0, 1\}$ une fonction. Alors :*

$$\Delta_f(X, Y) = |P(f \circ X = 1) - P(f \circ Y = 1)| = |P(f \circ X = 0) - P(f \circ Y = 0)| \ .$$

PREUVE. Soient $p = P(f \circ X = 1)$ et $q = P(f \circ Y = 1)$. Alors :

$$\begin{aligned} \Delta_f(X, Y) \quad &= \tfrac{1}{2}(|p - q| + |(1 - p) - (1 - q)|) \\ &= |p - q| \\ &= |P(f \circ X = 1) - P(f \circ Y = 1)| \ . \end{aligned}$$

□

Proposition 6 *Soient $X, Y : \Omega \to R$ v.a.d. avec R fini. Alors il existe $f : R \to \{0, 1\}$ telle que :*

$$\Delta(X, Y) = \Delta_f(X, Y) \ .$$

PREUVE. Par la proposition 3, on sait que :

$$\Delta(X, Y) = max_{R' \subseteq R} |P(X \in R') - P(Y \in R')| \ .$$

Il suffit donc de prendre f comme la fonction caractéristique de l'ensemble R' qui maximise la différence :

$$\Delta(X, Y) = |P(X \in R') - P(Y \in R')| = |P(f_{R'} \circ X = 1) - P(f_{R'} \circ Y = 1)| \ .$$

□

Exemple 5 *Soit X une v.a.d. qui échantillonne n-bits avec* probabilité uniforme *et soit $Y = X^c$. Soit π_1 la fonction qui prend une suite de n-bits et retourne le* premier bit *(la première projection). On a :*

$$\Delta_{\pi_1}(X, Y) = |P(\pi_1 \circ X = 1) - P(\pi_1 \circ Y = 1)| = 0 \ .$$

Donc la distance statistique des v.a.d. $\pi_1 \circ X$ *et* $\pi_1 \circ Y$ *est* 0 *alors que les v.a.d.* $\pi_1 \circ X$ *et* $\pi_1 \circ Y$ *diffèrent avec probabilité* 1*, à savoir :* $P(\pi_1 \circ X \neq \pi_1 \circ Y) = 1$*. Plus en général, on a que la distance statistique des v.a.d.* X *et* Y *est* 0 *:*

$$\Delta(X, Y) = \frac{1}{2}\Sigma_{x \in 2^n} |P(X = x) - P(Y = x)| = 0 \ .$$

Cependant, la situation change si, par exemple, on suppose que X *échantillonne* n*-bits avec une* probabilité $3/4$ *que le premier bit soit* 1*. Dans ce cas on a :*

$$|P(\pi_1 \circ X = 1) - P(\pi_1 \circ Y = 1)| = 1/2 \ .$$

Exemple 6 *Certaines propriétés de sécurité sont formalisées comme un* jeu*. On discute un exemple dans le contexte traité dans ce chapitre. Soient* $X_0, X_1 : \Omega \to R$ *v.a.d. On évalue l'efficacité (on parle aussi d'avantage) d'un test* $f : R \to \{0, 1\}$ *qui cherche à distinguer un échantillon de* X_0 *d'un échantillon de* X_1*. Pour ce faire, on imagine que* f *reçoit avec probabilité* $1/2$ *un échantillon de* X_0 *et avec probabilité* $1/2$ *un échantillon de* X_1 *et que le test 'gagne' s'il devine l'origine de l'échantillon. Remarquons qu'un test qui répond* 1 *avec probabilité* p *et* 0 *avec probabilité* $(1 - p)$ *a une probabilité* $1/2$ *de gagner. Ainsi si* q *est la probabilité que le test gagne on s'intéresse à la quantité* $|q - 1/2|$ *: plus cette quantité est grande plus le test est efficace. Pour formaliser le jeu, on introduit une nouvelle v.a.d.* Z*. L'idée est que chaque échantillon a maintenant un marqueur* 0 *ou* 1 *qui permet de déterminer son origine. Ce marqueur est invisible au test mais il nous permet de savoir si le test a déterminé correctement l'origine de l'échantillon. Ainsi on définit* $\Omega' = \Omega \times \{0, 1\}$*,* $R' = R \times \{0, 1\}$ $Z : \Omega' \to R'$ *v.a.d. telle que* $Z(\omega, i) = (X_i(\omega), i)$ *et* $P(Z = (x, i)) = \frac{1}{2}P(X_i = x)$*. Ensuite, la fonction Test est définie par :*

$$\begin{array}{ll} f \times id : R' \to (\{0,1\} \times \{0,1\}) & (f \times id)(x, i) = (f(x), i) \\ eq : (\{0,1\} \times \{0,1\}) \to \{0,1\} & eq(i, j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \\ Test = eq \circ (f \times id) \circ Z \ . & \end{array}$$

On va montrer que :

$$|P(Test = 1) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}|P(f \circ X_0 = 1) - P(f \circ X_1 = 1)| = \frac{1}{2}\Delta_f(X_0, X_1) \ . \qquad (3.1)$$

Cette équation est remarquable car elle nous dit que l'efficacité du test f *est la moitié de la distance statistique des v.a.d.* $f \circ X_0$ *et* $f \circ X_1$*. Soient* $p_i = P(f \circ X_i = 1)$ *pour* $i = 0, 1$*. On calcule* $P(Test = 1)$ *en conditionnant sur* i *:*

$$P(Test = 1) \ = \frac{1}{2} \cdot (P(f \circ X_0 = 0) + P(f \circ X_1 = 1)) \ = \frac{1}{2} \cdot ((1 - p_0) + p_1) \ .$$

Il suit que :

$$|P(Test = 1) - \tfrac{1}{2}| \ = |\tfrac{1}{2}((1 - p_0) + p_1) - \tfrac{1}{2}| \ = \tfrac{1}{2} \cdot |p_0 - p_1| \ .$$

3.2 Temps probabiliste polynomial

Une façon d'affaiblir la notion de confidentialité parfaite est de limiter le pouvoir de l'attaquant. Par exemple, on s'attend à qu'un attaquant ne puisse pas énumérer tous les

chiffrements d'un message donné. Pour définir la notion d'attaquant 'raisonnable', on peut se baser sur l'idée qu'un algorithme efficace est un algorithme qui calcule en temps polynomial. On rappelle brièvement les définitions.

Définition 4 (O-notation) *Soient $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ deux fonctions sur les nombres naturels. On dit que f est $O(g)$ si :*

$$\exists\, k, n_0 \geq 0 \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; f(n) \leq k \cdot g(n) \;.$$

Définition 5 (fonction de coût) *Soit A un algorithme qui termine et $c_A : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction telle que $c_A(n)$ est le coût maximal d'une exécution de l'algorithme A sur une entrée de taille au plus n.*

Typiquement, la taille d'une entrée est le nombre de bits nécessaires à sa représentation et le coût d'une exécution est le *temps* mesuré comme le nombre d'*étapes élémentaires* de calcul. [2]

Définition 6 (algorithme polynomial) *Un algorithme A est polynomial (en temps) s'il existe $d \geq 0$ tel que sa fonction de coût c_A est $O(n^d)$.*

Définition 7 (algorithme PPT) *Un* algorithme PPT *(*probabilistic polynomial time*) est un algorithme qui calcule en* temps polynomial *dans la taille de son entrée et qui peut utiliser pendant le calcul un* générateur de bits aléatoires non biaisé*.*

Si les seuls résultats de l'algorithme PPT sont 0 ou 1 on parle aussi d'*algorithme de décision PPT*. Dans la suite du cours, on fera l'*hypothèse* qu'un attaquant raisonnable est un algorithme de décision PPT.

Remarque 5

1. *On ne sait pas si le fait d'avoir accès à une source aléatoire augmente vraiment le pouvoir de l'attaquant. Dans le doute, on donne cette possibilité à l'attaquant.*
2. *La notion d'algorithme efficace repose sur l'idée que la complexité asymptotique d'un algorithme est une fonction de la taille de l'entrée. Pour la même raison la notion d'attaquant raisonnable sera typiquement fonction de la taille de la clef du système cryptographique. On va donc analyser non pas un système cryptographique mais une famille de systèmes cryptographiques indexés, par exemple, sur la taille de la clef.*
3. *Dans certaines définitions qui vont suivre, on considère un algorithme A qui peut utiliser la fonction g comme un oracle. On dénote cet algorithme par A^g. Il n'y a rien de mystérieux dans la notion d'oracle. La fonction g est comme une fonction de bibliothèque dont on connaît la fonctionnalité mais pas le code. L'algorithme prépare une entrée x pour g, appelle g et obtient (en temps constant) la réponse $g(x)$. Par exemple, la fonction g pourrait être une fonction de chiffrement qui dépend d'une clef secrète k. Dans ce cas, un attaquant A^g est un algorithme qui peut chiffrer un nombre polynomial de textes clairs sans pour autant connaître la clef secrète k.*

2. La notion d'étape élémentaire dépend du modèle de calcul mais il s'avère que la notion de temps polynomial est assez robuste pour ne pas dépendre de ce choix.

3.3 Fonctions négligeables

En complexité asymptotique, on sait que la composition séquentielle de deux algorithmes 'efficaces' (c'est à dire PPT) est encore un algorithme efficace. Cette propriété est basée sur l'observation que la composition de deux polynômes est encore un polynôme. On souhaite suivre une approche similaire pour définir une notion de 'quantité négligeable'. En particulier, on s'attend à que la somme de deux quantités négligeables soit encore négligeable, et pour avoir une telle propriété il convient de voir une quantité négligeable comme une fonction.

Définition 8 *Une fonction* $\epsilon : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *est* négligeable *si pour tout* $k \geq 0$, ϵ *est* $O(n^{-k})$. *En d'autres termes :*

$$\forall\ k \geq 0\ \exists\ c, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\ \ (\ \epsilon(n) \leq \tfrac{c}{n^k}\ )\ .$$

De façon plus *informelle*, on dit que *pour tout polynôme*, ϵ *décroît plus vite que l'inverse du polynôme*. La proposition suivante montre que les fonctions négligeables ont certaines propriétés de stabilité ; ces propriétés permettent ensuite d'avoir une notion d'équivalence de (familles de) v.a.d. qui est robuste.

Proposition 7

1. *Si* ϵ_1 *et* ϵ_2 *sont* négligeables *alors* $\epsilon_1 + \epsilon_2$ *est* négligeable.
2. *Si* ϵ *est* négligeable *et* p *est un* polynôme *dans une variable alors* $\epsilon'(n) = p(n) \cdot \epsilon(n)$ *est encore* négligeable.

PREUVE. (1) Soient c_1, n_1, c_2, n_2 les constantes pour ϵ_1 et ϵ_2. Il suffit de prendre $c = 2 \cdot max(c_1, c_2)$, $n = max(n_1, n_2)$.

(2) Soit $p(n) \leq c_1 n^{k_1}$ pour $n \geq n_1$. Prenons $k' = k + k_1$. On a c_2, n_2 tel que . $\epsilon(n) \leq c_2/n^{k+k_1}$. Donc pour tout $n \geq max(n_1, n_2)$ on a $p(n)\epsilon(n) \leq c_1 c_2/n^k$. □

3.4 Équivalence calculatoire

Considérons le *chiffrement d'un message* m. Ce chiffrement dépend du *paramètre de sécurité* n. De plus, si l'on fixe le paramètre de sécurité, le chiffrement va dépendre du *choix aléatoire de la clé*. Pour un n *fixé*, le chiffrement du message m est donc une *variable aléatoire discrète* (v.a.d.) X_n ; et si n est *variable*, le chiffrement du message m est *une famille de v.a.d.*

$$\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{(famille de v.a.d.)}$$

En anglais, on dit *probability ensemble* ou simplement *ensemble*.

Définition 9 *On dit que deux* familles de v.a.d. $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *et* $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *sont* équivalentes *(au sens calculatoire) et on écrit* $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ *si pour tout* algorithme de décision *PPT A (polynomial en n) la fonction :*

$$\epsilon(n) = \Delta_A(X_n, Y_n) = |P(A \circ X_n = 1) - P(A \circ Y_n = 1)|$$

est négligeable.

Remarque 6 *1. Ici on suppose implicitement que les v.a.d. X_n, Y_n sont définies sur un même espace de probabilités Ω_n et que leurs images sont contenues dans un ensemble fini R_n dont les éléments ont une taille polynomial en n. On suppose aussi que l'algorithme de décision A reçoit en argument le paramètre de sécurité n et connaît donc le domaine R_n dont il va examiner un échantillon.*

2. La notion d'équivalence calculatoire est évidemment réflexive et symétrique. Pour montrer sa transitivité on utilise le fait que la somme de deux fonctions négligeables est négligeable. Donc le choix de considérer des familles *de v.a.d. et de mesurer leur proximité par une* fonction *et essentiel pour pouvoir définir une relation d'équivalence. Par exemple, si on avait dit que deux v.a.d sont proches si leur distance statistique est inférieure à 2^{-80} on n'aurait pas une relation d'équivalence sur les v.a.d. ($\Delta(X,Y) \leq 2^{-80}$ et $\Delta(Y,Z) \leq 2^{-80}$ n'implique pas $\Delta(X,Z) \leq 2^{-80}$).*

La notion d'équivalence calculatoire se base sur l'analyse d'*un seul échantillon* de la v.a.d. Que se passe-t-il si l'on peut disposer de *m échantillons indépendants* ? Et bien rien ne change tant que :

— le nombre d'échantillons est borné par un polynôme dans le paramètre de sécurité.
— il y a un algorithme PPT pour échantillonner la v.a.d. (on dit que la v.a.d. est échantillonnable).

La *preuve* de ce fait consiste à construire des familles de v.a.d. *hybrides* qui interpolent les deux familles qui nous intéressent (on parle d'*argument hybride*). On considère une situation *simplifiée* dans laquelle on traite deux v.a.d. (au lieu de deux familles de v.a.d.) et l'on considère un algorithme de décision (au lieu d'un algorithme de décision PPT).

Proposition 8 (argument hybride) *Soient X, Y deux v.a.d.* échantillonnables *telles que pour tout A algorithme de décision :*

$$\Delta_A(X,Y) = |P(A \circ X = 1) - P(A \circ Y = 1)| \leq \epsilon \ .$$

Alors les v.a.d. (X,X) et (Y,Y) (on échantillonne 2 fois de façon indépendante) ont la propriété que pour tout A' algorithme de décision :

$$\Delta_{A'}((X,X),(Y,Y)) \leq 2 \cdot \epsilon \ .$$

Preuve. On utilise l'*inégalité triangulaire* :

$$\begin{aligned}&\Delta_{A'}((X,X),(Y,Y))\\ &= |\ P(A' \circ (X,X) = 1) - P(A' \circ (X,Y) = 1) + P(A' \circ (X,Y) = 1) - P(A' \circ (Y,Y) = 1)\ |\\ &\leq \Delta_{A'}((X,X),(X,Y)) + \Delta_{A'}((X,Y),(Y,Y)) \ .\end{aligned}$$

Si on pose $A_1 = A' \circ (X, \_)$, on a encore un algorithme de décision (hyp. X échantillonnable) et

$$\Delta_{A'}((X,X),(X,Y)) = \Delta_{A_1}(X,Y) \leq \epsilon \ .$$

De *façon similaire*, si on pose $A_2 = A' \circ (\_, Y)$ alors on dérive :

$$\Delta_{A'}((X,Y),(Y,Y)) = \Delta_{A_2}(X,Y) \leq \epsilon \ .$$

□

Dans le cas général, on suppose que l'algorithme de décision A' reçoit $p(n)$ échantillons indépendants qui viennent soit de la v.a.d. X_n soit de la v.a.d. Y_n et on montre que la probabilité de les distinguer est bornée par $\epsilon'(n) = p(n) \cdot \epsilon(n)$ où $\epsilon(n)$ est une fonction négligeable. Par la proposition 7(2), on peut donc conclure que la borne $\epsilon'(n)$ est aussi négligeable.

Les *définitions de sécurité* qui vont suivre (1-confidentialité, CPA-confidentialité, intégrité...) sont des *variations* sur la notion d'équivalence ; on dispose de deux familles de v.a.d. et on demande à que toute *fonction PPT* ait une probabilité négligeable de les distinguer. Dans ce contexte, les *preuves de sécurité* consistent à montrer que si deux familles de v.a.d. sont équivalentes alors deux autres familles le sont aussi.

3.5 Sommaire

La notion de distance statistique peut être utilisée pour mesurer la différence entre les chiffrements possibles de deux messages. Si la distance est 0, on se retrouve dans une situation de confidentialité parfaite. L'affaiblissement de cette notion passe par un mélange délicat de la notion d'attaquant PPT et de fonction négligeable et mène à la notion d'équivalence calculatoire de familles de v.a.d. Cette notion constitue le fondement des constructions cryptographiques présentées dans les prochains chapitres.

Chapitre 4

Générateurs pseudo-aléatoires de nombres (*PRG*) et 1-confidentialité

On utilise la notion d'équivalence calculatoire (chapitre 3) pour définir la notion de générateur pseudo-aléatoire de nombres (PRG pour *pseudo-random number generator*). Il s'agit d'une fonction qui est capable de produire de façon efficace une 'longue' suite de bits à partir d'une 'petite' suite de bits aléatoires de façon telle que la suite longue est équivalente au sens du chapitre 3 à une suite de bits aléatoires.

On peut utiliser un PRG pour construire une variante 'pratique' du système à masque jetable (chapitre 2) : la clef du système est la petite suite et pour chiffrer on fait le xor du message avec la longue suite générée par le PRG à partir de la clef. Dans un tel système, les distributions des chiffrements de deux messages de même longueur sont équivalentes. Il s'agit d'un affaiblissement de la notion de confidentialité parfaite qu'on appelle 1-confidentialité.

4.1 PRG

Un *générateur pseudo-aléatoire de nombres* (PRG) est une famille de fonctions. La fonction d'indice n prend n bits (aléatoires) et produit $\ell(n) > n$ bits qui semblent aléatoires à un *attaquant PPT*.

Définition 10 (PRG) *Un PRG est une famille de fonctions :*

$$\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{\ell(n)} \qquad n \in \mathbf{N}, \ell(n) > n \ ,$$

telle que les deux familles de v.a.d suivantes sont équivalentes :

$$X_n = [k \leftarrow 2^n : \mathcal{G}_n(k)] \sim [x \leftarrow 2^{\ell(n)} : x] = Y_n \ .$$

et les fonctions $\mathcal{G}_n$ sont calculables en temps polynomial déterministe.

Explicitons la différence entre X_n et Y_n. Soit $y \in 2^{\ell(n)}$. Alors :
— $P(X_n = y)$ est la probabilité qu'en tirant k dans 2^n avec probabilité uniforme on obtient $\mathcal{G}_n(k) = y$
— $P(Y_n = y) = \frac{1}{2^{\ell(n)}}$.

On peut remarquer que $\sharp im(\mathcal{G}) \leq 2^n$. Ainsi une attaque (non polynomiale) pourrait être la suivante : sur un échantillon y, si $y \notin im(\mathcal{G})$ alors on est sûr que l'échantillon vient de Y_n et pas de X_n.

L'état de l'art est qu'on sait construire un PRG à partir de n'importe quel PRG tel que $\ell(n) \geq n+1$ et aussi à partir d'une fonction à sens unique (intuition dans la section 1.6 et définition 12 à suivre). Par contre, on ne sait pas si ces objets existent (SIC). Néanmoins la définition de PRG est intéressante car elle nous donne une méthode pour montrer qu'une certaine famille de fonctions n'est *pas* un PRG. Il suffit de définir un algorithme PPT qui arrive à distinguer avec une probabilité non-négligeable la fonction en question de la distribution uniforme. En pratique, on commence par utiliser des batteries de tests disponibles dans le domaine public (par exemple, les *tests Diehard*).

Exemple 7 *Considérons la fonction $\mathcal{M}_n$ qui prend en entrée n bits $x_0 \cdots x_{n-1}$ les considère comme la représentation en base 2 d'un nombre $x \in [0, 2^n - 1]$ et produit en sortie $2n$ bits $y_0 \cdots y_{2n-1}$ bits qui correspondent à la représentation en base 2 du nombre x^2. La famille $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas un PRG. Par exemple, pour distinguer avec une propriété non négligeable la suite produite par la fonction M_n d'une suite aléatoire, on peut vérifier si la suite représente le carré d'un nombre naturel.*

4.2 1-Confidentialité

On va réviser la définition 1 de système cryptographique et introduire une notion de 1-confidentialité basée sur la notion d'équivalence calculatoire.

Plutôt qu'un système cryptographique, on considère une *famille* de systèmes cryptographiques indexés sur un paramètre de sécurité n. Pour fixer les idées on peut supposer que ce paramètre n est le nombre de bits nécessaires à la représentation d'une clef. Pour chaque n on a donc un espace de clefs $\mathcal{K}_n$ (typiquement n bits), un espace de textes clairs $\mathcal{P}_n$ et un espace de textes chiffrés $\mathcal{C}_n$. On suppose que la taille d'un texte clair dans $\mathcal{P}_n$ ou d'un texte chiffré dans $\mathcal{C}_n$ est polynomiale en n. Les algorithmes G, E et D pour générer une clef, chiffrer et déchiffrer sont aussi indexés sur n. On a donc :

$$\begin{array}{ll} G_n : 1 \to \mathcal{K}_n & (\textit{générateur}), \\ E_n : \mathcal{P}_n \times \mathcal{K}_n \to \mathcal{C}_n & (\textit{chiffrement}), \\ D_n : \mathcal{C}_n \times \mathcal{K}_n \to \mathcal{P}_n & (\textit{déchiffrement}), \end{array}$$

tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}, k \in \mathcal{K}_n, p \in \mathcal{P}_n : D_n(E_n(p,k),k) = p$. On suppose que les algorithmes G, E et D sont PPT.

On souhaite maintenant définir dans quel sens cette famille de systèmes assure la confidentialité. Dans le système à *masque jetable*, les distributions des chiffrements de deux messages différents sont *identiques*. Il en suit que le chiffrement d'un message ne dévoile aucune information sur le message clair. On introduit un affaiblissement de cette notion que l'on appelle *confidentialité pour 1 message* (abrégé en 1-confidentialité). L'idée est que les distributions des chiffrements de deux message différents (de même taille) sont équivalentes.

Définition 11 (1-confidentialité) *Soient $m_n, m'_n \in \mathcal{P}_n$ avec $|m_n| = |m'_n|$ deux familles de messages de même longueur qui peuvent être générées par un algorithme PPT. On définit deux familles de v.a.d. par :*

$$\begin{array}{ll} X_n & = [k \leftarrow G_n(1) : (m_n, m'_n, E_n(m_n, k))] \\ Y_n & = [k \leftarrow G_n(1) : (m_n, m'_n, E_n(m'_n, k))] \ . \end{array}$$

La v.a.d X_n diffère de la v.a.d. Y_n par le fait que sa troisième composante est un chiffrement de m_n plutôt que de m'_n. On dit que le système assure la 1-confidentialité si :

$$\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \ .$$

En développant la définition d'équivalence, on dérive que pour tout algorithme PPT A la fonction :

$$\epsilon(n) = |P(A \circ X_n = 1) - P(A \circ Y_n = 1)|$$

est négligeable. Intuitivement, un algorithme efficace n'arrive pas à distinguer les chiffrements de deux messages de même longueur.

Un PRG nous donne une suite de bits qui semble aléatoire. Si on utilise cette suite dans un système à masque jetable, on obtient un système qui assure la 1-confidentialité.

Proposition 9 *Si l'on dispose d'un* PRG $\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{\ell(n)}$ *(à ne pas confondre avec les générateur de clé) alors on peut construire un système qui assure la* 1-confidentialité *de messages de longueur $\ell(n)$ en définissant :*

$$\begin{array}{ll} E(m,k) & = \mathcal{G}_n(k) \oplus m \quad k \in 2^n, m \in 2^{\ell(n)} \\ D(c,k) & = \mathcal{G}_n(k) \oplus c \quad k \in 2^n, c \in 2^{\ell(n)} \ . \end{array}$$

Preuve. Soient m_1, m_2 deux messages de longueur $\ell(n)$. On sait que (masque jetable) :

$$U_{\ell(n)} \oplus m_1 = U_{\ell(n)} \oplus m_2 \ .$$

Par ailleurs, on doit avoir pour $i = 1, 2$:

$$(\mathcal{G} \circ U_n) \oplus m_i \sim U_{\ell(n)} \oplus m_i$$

autrement, $\mathcal{G}$ n'est pas un PRG. □

Remarque 7 *Dans une utilisation pratique du système, les deux agents qui partagent la clef $k \in 2^n$ peuvent échanger plusieurs messages $m_1, \ldots, m_k$ à condition que la taille total de ces messages n'excède pas $\ell(n)$. Pour ce faire, chaque agent doit garder un compteur pour savoir quelle portion de la suite $\mathcal{G}_n(k)$ utiliser. Comme pour le système à masque jetable, il faut veiller à ne jamais utiliser la même portion du masque pour deux messages différents.*

Remarque 8 *L'affirmation que la probabilité d'attaque est* négligeable *doit être prise avec un grain de sel...*

- *La probabilité d'attaque est négligeable si un PRG existe.*
- *La probabilité d'attaque est négligeable si l'attaquant réel est conforme au modèle 'mathématique'. Par exemple, notre modèle fait abstraction des aspects physiques (émissions électromagnétique, temps de réponse,...) ou logiciels (analyse des accès à la mémoire,...)*
- *En pratique, on peut convenir du fait que la probabilité d'attaque doit être inférieure à 2^{-80}. Il faut alors s'assurer que le paramètre de sécurité qui garantit un tel niveau de sécurité a une taille raisonnable. En particulier, deux systèmes qui assurent une probabilité d'attaque* négligeable *ne sont pas forcement équivalents en pratique. On trouve le même phénomène en algorithmique : le tri à bulles et le le tri rapide sont deux algorithmes* efficaces *(polynomiaux) pour trier un tableau, mais si on veut trier un tableau avec plus que 10^6 éléments le tri rapide est beaucoup plus 'pratique' que le tri par insertion.*

Remarque 9 *Le '1' dans la définition de 1-confidentialité est là pour nous rappeler qu'on fait l'hypothèse (restrictive) que l'attaquant manipule 1 seul chiffrement. Si, par exemple, l'attaquant connaît le chiffrement c d'un message m et si la fonction de chiffrement est* déterministe *alors l'attaquant n'aura pas de mal à distinguer le chiffrement de m du chiffrement d'un message m' différent de m.*

4.3 PRG : théorie et pratique

En *théorie*, on peut construire un *PRG* à partir d'une *fonction à sens unique* (voir [KL07]).

Définition 12 (fonction à sens unique) *On dénote par 2^* les mots finis sur l'alphabet $\{0,1\}$. Une fonction $f : 2^* \to 2^*$ est à* sens unique *si elle est :*

1. facile à calculer*, à savoir calculable en PPT,*
2. difficile à inverser*, pour tout $g : 2^* \to 2^*$ PPT, la fonction*

$$\epsilon(n) = P[x \leftarrow 2^n : f(g(f(x))) = f(x)]$$

est négligeable*.*

De façon plus informelle, on dit que la probabilité de trouver une image inverse est négligeable.

La construction d'un PRG à partir d'une fonction à sens unique n'est pas très efficace. Par ailleurs, l'existence d'une fonction à sens unique est un problème ouvert.

Une preuve d'existence d'une fonction à sens unique aurait un impact majeur dans la théorie de la complexité du calcul. On dénote par P la classe des problèmes de décision qui admettent un algorithme polynomial déterministe (voir définition 6). Par ailleurs, on dénote par NP la classe des problèmes de décision pour lesquels on sait *vérifier* la correction d'une solution positive en temps polynomial déterministe.

Un exemple typique de problème dans P est le problème de l'*évaluation d'une formule* du calcul propositionnel : on prend une formule et une affectation de valeurs booléennes aux variables de la formule et on décide si l'évaluation de la formule par rapport à l'affectation est 0 ou 1.

Un exemple typique de problème dans NP est le problème de la *satisfiabilité d'une formule* : on prend en entrée une formule du calcul propositionnel et on décide si elle est satisfiable. On ne connaît pas d'algorithme polynomial pour décider ce problème, mais on peut vérifier une solution positive du problème, c'est-à-dire une affectation qui satisfait la formule, en temps polynomial en utilisant l'algorithme pour l'évaluation d'une formule.

Proposition 10 *Si une fonction à sens unique existe alors $\mathsf{P} \subset \mathsf{NP}$ (inclusion stricte).*

Preuve. On donne une idée de l'argument. Soit f une fonction candidate à être une fonction à sens unique. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il y a une polynôme p tel que si $f(x) = y$ alors $|x| \leq p(|y|)$ où $|x|$ et $|y|$ sont les tailles de x et y, respectivement. On montre que si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ alors on a un algorithme efficace pour calculer l'*image inverse* de f. On remarque que le *langage* suivant est dans NP :

$$L_f = \{(z, y) \mid \exists\, x \ \ (z \text{ préfixe } x \text{ et } f(x) = y)\} \ .$$

Pour *vérifier* que $(z, y) \in L_f$ il suffit de fournir un x (dont la taille est polynomiale en celle de y) tel que z est un prefixe de x et $f(x) = y$ (la valeur x joue ici le rôle de 'temoin', exactement comme une affectation est un temoin de la satisfiabilité d'une formule). Si maintenant $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ et $f(x) = y$ on a un algorithme efficace pour trouver une image inverse de y : (1) on sait que $(\epsilon, y) \in L_f$ et (2) si $(z, y) \in L_f$ et $f(z) \neq y$ alors on cherche $i \in \{0, 1\}$ tel que $(zi, y) \in L_f$ et on itère (2). □

Remarque 10 *La condition* $\mathsf{P} \subset \mathsf{NP}$ *est seulement* nécessaire *à l'existence d'une fonction à sens unique. On ne sait pas construire une fonction à sens unique en supposant* $\mathsf{P} \subset \mathsf{NP}$.

On sait construire une *fonction à sens unique* à partir de :
— Un *PRG*.
— Un système cryptographique qui assure la 1-*confidentialité*.
— Un système qui assure l'*authentification (MAC)* (chapitre 6, à venir).

Donc l'existence d'une fonction à sens unique est une condition *nécessaire et suffisante* pour garantir les propriétés de confidentialité et intégrité de la 'cryptographie moderne'... A défaut d'avoir des preuves on a des *fonctions candidates* au titre de fonction à sens unique dont voici une petite liste.

— Le *produit* de deux nombres premiers de taille comparable. Pour inverser, il faut *factoriser* (définition A.3).
— L'*exposant modulaire*. Pour inverser, il faut calculer le *logarithme discret*.
— Le problème de la *somme de sous-ensembles* : pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Z}$ et $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ on considère la fonction :

$$(x_1, \ldots, x_n, J) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \Sigma_{i \in J} x_i) \ .$$

Pour inverser $(x_1, \ldots, x_n, y)$ il faut trouver $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\Sigma_{i \in J} x_i = y$. Contrairement aux deux problèmes précédents, on sait que ce problème est NP-complet. [1]

En *pratique*, on utilise des *constructions spécialisées* de PRG comme RC4, Fortuna,... ou alors on utilise des fonctions comme AES qui seront discutées dans le chapitre 7.

4.4 Sommaire

Les notions de PRG et de 1-confidentialité reposent sur la notion d'équivalence calculatoire. On peut adapter le système à masque jetable pour construire un système cryptographique qui assure la 1-confidentialité à partir d'un PRG. L'existence de PRG et de systèmes qui assurent la 1-confidentialité est un problème ouvert. Ce qu'on sait est qu'un PRG existe ssi une fonction à sens unique existe et que l'existence d'une telle fonction implique que $\mathsf{P} \subset \mathsf{NP}$. Donc, il semble que pour bâtir une fondation solide de la cryptographie il faut commencer par régler le problème ouvert le plus célèbre de l'informatique.

1. Si on trouve un algorithme efficace pour ce problème alors on a un algorithme efficace pour tous les problèmes de la classe NP.

Chapitre 5

Générateurs pseudo-aléatoires de fonctions (*PRF*) et CPA-confidentialité

Dans ce chapitre on introduit la notion de générateur pseudo-aléatoire de *fonction* (*PRF* pour *pseudo-random function generator*). Comme pour la notion de PRG, la notion de PRF repose sur la notion d'équivalence calculatoire. Il est facile de dériver un PRG d'un PRF et il est aussi possible, mais pas aussi simple, de dériver un PRF d'un PRG. Donc, du moins d'un point de vue théorique, on peut voir un PRF comme une abstraction cryptographique qui peut être mise-en-oeuvre avec un PRG. On utilise cette abstraction pour construire des systèmes cryptographiques qui assurent un niveau supérieur de confidentialité qu'on appelle CPA-confidentialité (*CPA* pour *chosen plain-text attack*). Comme le nom le suggère de tels systèmes doivent résister à des attaques sur texte clair choisi. En particulier, on fera l'hypothèse que l'attaquant à accès à la fonction de chiffrement (mais pas à la clef). Le système cryptographique qui assure la CPA-confidentialité à partir d'un PRF utilise à nouveau certaines idées du système à masque jetable. Par ailleurs le système peut être généralisé à des messages composés d'un nombre variable de blocs. Pour ce faire, on va introduire deux nouveaux modes de transmission (après le mode dictionnaire ou *ECB* de la section 1.3) : le mode compteur (*CTR*) et le mode chaîné (*CBC*).

5.1 Fonctions (pseudo-)aléatoires

Une *fonction* de type $[2^n \to 2^n]$ est spécifiée par un tableau qui associe n bits à chaque entrée spécifiée aussi par n bits. *Tirer une fonction* dans $[2^n \to 2^n]$ avec probabilité uniforme revient donc à tirer $n \cdot 2^n$ bits de façon indépendante et avec probabilité uniforme. La génération de $n \cdot 2^n$ bits est évidemment un processus dont le coût est exponentiel en n mais souvent on a besoin de connaître la valeur de la fonction seulement dans un nombre réduit de points. Dans ce cas, la génération peut être incrémentale en utilisant une technique de mémoïsation. On garde dans une structure de données (par exemple, une table de hachage) les valeurs de la fonction déjà calculées (on les mémoïse). Chaque fois qu'on souhaite calculer la fonction dans un point x on vérifie si la valeur de la fonction sur ce point est déjà mémoïsée dans la structure. Si c'est le cas, on rend la valeur en question, sinon on génère n bits et on les associe au point x dans la structure.

Un *générateur pseudo-aléatoire de fonctions* (PRF pour *pseudo-random function generator*) est une famille de fonctions :

$$\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n] \ , \qquad n \in \mathbf{N} \ ,$$

qui associe à n bits une fonction dans $[2^n \to 2^n]$ qui *semble aléatoire* à un algorithme de décision PPT et telle que le calcul de $\mathcal{F}_n(x)(y)$ est efficace (polynomial en n). La formalisation de cette idée fait face à une difficulté : un algorithme de décision A PPT *n'a pas le temps* d'examiner l'intégralité d'une fonction $f \in [2^n \to 2^n]$ présentée en tant que tableau. Pour régler cette question on fait appel à la notion d'oracle (voir remarque 5(3)). On suppose que l'algorithme A a la possibilité d'*appeler* une fonction $g : 2^n \to 2^n$ (coût de chaque appel $O(1)$) un nombre (forcement) polynomial de fois et d'enregistrer la valeur calculée. On dénote un tel algorithme PPT qui utilise g comme un oracle par A^g.

Définition 13 (PRF) *On dit que* $\mathcal{F}$ est un PRF *si pour tout algorithme de décision PPT* A^g *(donc qui utilise une fonction* $g \in [2^n \to 2^n]$ *comme oracle) on a que la fonction :*

$$\epsilon(n) = |P(X_n = 1) - P(Y_n = 1)|$$

est négligeable où pour $n \in \mathbf{N}$ *on définit :*

$$X_n \ = [k \leftarrow 2^n : A^{\mathcal{F}_n(k)}] \ , \qquad Y_n \ = [f \leftarrow [2^n \to 2^n] : A^f] \ .$$

On remarque que l'image des v.a.d. X_n et Y_n est l'ensemble $\{0, 1\}$.

— $P(X_n = 1)$ est la probabilité qu'en tirant k avec probabilité uniforme dans 2^n l'algorithme de décision A retourne 1 en utilisant l'oracle $\mathcal{F}_n(k)$.

— $P(Y_n = 1)$ est la probabilité qu'en tirant une fonction f avec probabilité uniforme dans $[2^n \to 2^n]$ l'algorithme de décision A retourne 1 en utilisant l'oracle f.

On note qu'un PRF $\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]$ induit un PRG $\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{\ell \cdot n}$ en posant :

$$\mathcal{G}_n(k) = \mathcal{F}_n(k)(0)\mathcal{F}_n(k)(1) \cdots \mathcal{F}_n(k)(\ell - 1) \ ,$$

à condition que $\ell \leq 2^n$. Vice versa on peut construire un PRF à partir d'un PRG qui double la taille :

$$\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{2n} \ .$$

Pour un n fixé, on dénote par $G_0(x)$ ($G_1(x)$) la moitié gauche (droite) de $\mathcal{G}_n(x)$.

Fait 1 *On peut construire un PRF :*

$$\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n] \qquad n \in \mathbf{N} \ ,$$

à partir d'un PRG $\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{2n}$ *en définissant :*

$$\mathcal{F}_n(k)(x_1 \cdots x_n) = G_{x_n}(\cdots(G_{x_1}(k))\cdots) \ .$$

Cette construction est due à *Goldreich-Goldwasser-Micali* [GGM86]. En *pratique*, on utilise des constructions comme AES qui sont efficaces et qui *semblent* se comporter comme un PRF (mais on n'a pas de preuve !) Ce qu'on sait est qu'à partir d'un PRF, on peut construire (de façon efficace) des systèmes qui garantissent un haut niveau de confidentialité et d'intégrité.

5.2 CPA-Confidentialité

La notion de 1-confidentialité (section 4.2) nous a permis d'illustrer comment la notion d'équivalence calculatoire peut être utilisée pour définir la propriété de confidentialité d'un système cryptographique. Cependant, la propriété de 1-confidentialité est trop faible. Par exemple, elle ne dit pas ce qui se passe si le même message est chiffré deux fois. Pour cette raison, on *renforce* la notion de 1-confidentialité en supposant que l'attaquant a *accès à la fonction de chiffrement* (mais pas à la clé). Techniquement, on dénote par $A^{E(\_,k)}$ un *algorithme de décision PPT* qui peut appeler la *fonction de chiffrement* $E(\_,k)$. Comme dans la définition 11, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a un espace de clefs $\mathcal{K}_n$, de textes clairs $\mathcal{P}_n$ et de textes chiffrés $\mathcal{C}_n$ avec une fonction G_n pour générer les clefs, une fonction E_n pour chiffrer et une fonction D_n pour déchiffrer.

On définit deux familles de v.a.d. dont l'image varie sur $\{0,1\}$ et qui dépendent de deux paramètres :

— Un algorithme PPT pour générer pour tout n un couple de textes clairs $m_n, m'_n \in \mathcal{P}_n$ avec $|m_n| = |m'_n|$.

— Un algorithme de décision PPT A^g qui a accès à un oracle g.

Les v.a.d. sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_n &= [k \leftarrow G_n(1) : A^{E_n(\_,k)} \circ (m_n, m'_n, E_n(m_n,k))] \\ Y_n &= [k \leftarrow G_n(1) : A^{E_n(\_,k)} \circ (m_n, m'_n, E_n(m'_n,k))] \ . \end{aligned}$$

La v.a.d X_n diffère de la v.a.d. Y_n par le fait que sa troisième composante est un chiffrement de m_n plutôt que de m'_n.

On dit que le système cryptographique assure la CPA-confidentialité si pour toute séquence de textes clairs avec les propriétés précisées ci dessous et pour tout algorithme de décision PPT A^g la fonction :

$$\epsilon(n) = |P(X_n = 1) - P(Y_n = 1)|$$

est négligeable.

Cette définition diffère de la définition 11 par le fait que l'attaquant PPT A a accès à la fonction de chiffrement. Dans la littérature on trouve plusieurs variantes de cette définition. Par exemple [KL07] en propose une basée sur un *jeu* qui s'inspire du jeu qu'on a déjà décrit dans l'exemple 6 en relation avec la notion de distance statistique. Voici une description du jeu :

1. On génère une clef k avec G.
2. L'adversaire PPT, qui utilise $E(\_,k)$ comme un oracle, génère deux messages m_0, m_1 de la même taille avec $m_0 \neq m_1$.
3. L'adversaire reçoit un chiffrement $c = E(m_b, k)$ où $b \in \{0,1\}$ est choisi avec probabilité uniforme.
4. L'adversaire PPT, qui utilise $E(\_,k)$ comme un oracle, décide si c est un chiffrement de m_0 ou de m_1.
5. La probabilité que l'adversaire PPT répond correctement est $1/2$ à une quantité négligeable près (on dit aussi que l'avantage de l'adversaire est négligeable).

Remarque 11 *Pour avoir la CPA-confidentialité, la fonction de chiffrement doit être* probabiliste *(et la probabilité d'obtenir le même texte en chiffrant 2 fois le même message*

négligeable). En effet, si $E(\_, k)$ *est* déterministe*, à partir du triplet* (m, m', c) *il suffit de calculer* $E(m, k)$ *et de le comparer à* c *pour savoir si* c *est le chiffrement de* m *ou de* m'*.* [1]

On va utiliser un PRF pour concevoir un système cryptographique qui assure la CPA-confidentialité. On considère d'abord le cas où tous les messages ont la même longueur n.

Proposition 11 *Soit* $\{\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]\}_{n\in\mathbf{N}}$ *un* PRF*. Le système suivant assure la CPA-confidentialité. Pour* chiffrer *un message de taille* n *on définit :*

$$E(m, k) = [r \leftarrow 2^n : (r, \mathcal{F}_n(k)(r) \oplus m)]$$

et pour déchiffrer (r, c) *on définit :*

$$D((r, c), k) = \mathcal{F}_n(k)(r) \oplus c \ .$$

Preuve. On se limite à présenter les idées principales, voir [KL07] pour une formalisation. D'abord une remarque préliminaire. Si l'on sait que $E(m, k) = (r, c)$ alors on connaît $\mathcal{F}_n(k)(r)$ car :

$$\mathcal{F}_n(k)(r) = c \oplus m \ .$$

On suppose disposer du triplet :

$$(m, m', (r, c))$$

où l'on sait que (r, c) est un chiffrement de m ou de m'. Alors si on trouve m'' avec un chiffrement (r, c'') on peut calculer $\mathcal{F}_n(k)(r)$ et donc $c \oplus \mathcal{F}_n(k)(r) \in \{m, m'\}$. Donc la probabilité de tirer 2 fois le même r doit être *négligeable*.

La structure de la preuve est la suivante :

— On montre qu'on obtient la *CPA-confidentialité* en supposant que $f \in [2^n \to 2^n]$ est tirée de *façon aléatoire*.

— Ensuite on remplace f par $\mathcal{F}_n(k)$ est on dérive d'une *attaque à la CPA-confidentialité* une *attaque au PRF* (argument par *réduction*).

L'observation principale est la suivante :

— On suppose que $f : 2^n \to 2^n$ est choisie avec *probabilité uniforme* et $E(m_i, k) = (r_i, c_i)$ pour $i = 1, \ldots, \ell$.

— Si $r_i \neq r_j$ pour $i \neq j$ alors les $f(r_i)$ sont des suites de n *bits indépendants* et tirés avec *probabilité uniforme*.

— On est dans la situation du *masque jetable* où le chiffré ne donne aucune information sur le texte clair.

— Il faut donc se soucier juste du cas où un $r_i = r_j$ avec $i \neq j$ (remarque préliminaire). Mais on peut calculer un chiffrement (=consulter l'oracle) au plus un nombre polynomial $q(n)$ de fois et la probabilité de tirer un r *fixé* est au plus $q(n)/2^n$ qui est *négligeable*. □

Remarque 12 *Il ne suffit pas d'avoir un PRF pour garantir la CPA-confidentialité, il faut aussi utiliser un schéma correct ! Par exemple, les PRF utilisés en pratique (DES, AES)*

1. Une alternative qui n'est pas considérée dans la suite est d'avoir des fonctions de chiffrement dont la sortie dépend d'un état.

donnent une permutation *pseudo-aléatoire avec son inverse. Il est alors tentant d'utiliser les fonctions de chiffrement et déchiffrement suivantes :*

$$E(m,k) = \mathcal{F}_n(k)(m) \ , \qquad D(c,k) = (\mathcal{F}_n(k))^{-1}(c) \ .$$

Mais dans le système dérivé le chiffrement n'est pas probabiliste *et donc on ne peut pas garantir la CPA-confidentialité.*

Remarque 13 *Dans la littérature, on trouve des formalisations de la notion de confidentialité qui sont encore plus restrictives. On notera en particulier la notion de* CCA-Confidentialité *(*CCA *pour* chosen ciphertext attack*) qui permet à l'attaquant un accès* limité *à la fonction de déchiffrement : à savoir l'attaquant peut déchiffrer autant de messages qu'il le souhaite avant d'essayer de distinguer les chiffrements de deux messages (de même longueur). En pratique, on réalise la notion de CCA-confidentialité en combinant les systèmes qui assurent la CPA-confidentialité avec ceux qui assurent l'intégrité des messages (chapitre 6).*

5.3 PRF et mode compteur (*CTR*)

On s'intéresse maintenant au chiffrement de *messages de longueur arbitraire*. On suppose avoir un système pour chiffrer des blocs de n bits. Pour chiffrer un message m on le *découpe* en k blocs de n bits :

$$m = m_1 \cdots m_k \ .$$

Si $|m|$ est un multiple de n alors on *ajoute un bloc* m_{k+1} qui contient le mot $10\cdots0$ (par exemple). Autrement, on *complète le dernier bloc* m_k avec un mot de la forme $10\cdots0$. Pour retrouver les bits originaux il suffit de regarder à droite du dernier bloc et d'éliminer le mot de la forme $10\cdots0$ (cette technique de bourrage est similaire à celle présentée dans la section 1.3).

On suppose que $\{\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]\}_{n\in\mathbf{N}}$ est un *PRF* et que après bourrage le message à chiffrer m a la forme $m_1 \cdots m_k$ où chaque bloc est composé de n bits et $1 \leq k < 2^n$. On dénote avec $+$ l'addition modulo 2^n de deux nombres de n bits.

Fait 2 *On obtient un système cryptographique qui assure la CPA-confidentialité pour des messages de longueur variable en définissant la fonction de* chiffrement *par :*

$$E(m_1 \cdots m_\ell), k) = [r \leftarrow 2^n : r \cdot \mathcal{F}_n(k)(r+1) \oplus m_1 \cdots \mathcal{F}_n(k)(r+\ell) \oplus m_\ell]$$

et la fonction de déchiffrement *par :*

$$D(r \cdot c_1 \cdots c_\ell, k) = c_1 \oplus \mathcal{F}_n(k)(r+1) \cdots c_k \oplus \mathcal{F}_n(k)(r+\ell)$$

Remarque 14 *En pratique, il faut veiller à renouveler périodiquement la clé. Par exemple, avec un bloc de taille* 64 *le nombre de blocs qu'on peut chiffrer est de l'ordre de* 2^{30}.

Attaque sur le mode compteur

On considère maintenant une attaque sur le mode compteur. Cette attaque demande un nombre considérable de message chiffrés. Soient :

$$m = m_1 \cdots m_q \ , \qquad m' = m'_1 \cdots m'_q \ ,$$

et soit $(r, c_1, \ldots, c_q)$ le chiffrement de m (ou de m'). On chiffre ℓ messages composés de q blocs.

$$E(m_t, k) = r_t \cdot c_{t,1} \cdots c_{t,q} \ , \qquad t = 1, \ldots, \ell \ .$$

On reçoit un chiffré avec un r tel que, par exemple, $r + i = r_t$ et $0 \leq i < q$ (le segment $[r, r + q - 1]$ intersecte le segment $[r_t, r_t + q + 1]$). Alors :

$$\begin{array}{ll} c_{i+1} & = \mathcal{F}_n(k)(r + i + 1) \oplus m_{i+1} \\ c_{t,1} & = \mathcal{F}_n(k)(r_t + 1) \oplus m_{t,1} = \mathcal{F}_m(k)(r + i + 1) \oplus m_{t,1} \\ \mathcal{F}_m(k)(r_t + 1) & = \mathcal{F}_n(k)(r + i + 1) = c_{t,1} \oplus m_{t,1} \\ m_{i+1} & = c_{i+1} \oplus \mathcal{F}_n(k)(r + i + 1) \ . \end{array}$$

Il faut donc calculer la probabilité que deux segments de longueur q dans un intervalle de longueur 2^n s'*intersectent*. Cette probabilité est bornée par $2q/2^n$. Si on chiffre ℓ messages on a ℓ segments de longueur q. La probabilité que le chiffrement d'un message intersecte un de ces segments est bornée par $\ell \cdot 2q/2^n$.

5.4 Mode chaîné (*CBC*)

On présente un mode chaîné (*CBC* pour *cypherblock chaining*) pour traiter des messages composés de plusieurs blocs. Ce mode peut être utilisé à la fois pour chiffrer un message et pour calculer son *MAC* (ou code d'authentification, voir chapitre 6). Le mode *CBC* utilise l'opération d'ou exclusif (*xor*). Pour cette raison, on suppose que les textes clairs et chiffrés utilisent un alphabet binaire $\Sigma = \{0, 1\} = 2$. Le calcul dépend d'un vecteur d'initialisation $IV \in 2^n$. Ce vecteur peut être *public*. Dans certains cas, IV peut être fixé une fois pour toutes. Dans d'autres situations, il doit être choisi de façon aléatoire à chaque utilisation du mode CBC.

Soit k une clef et $E(\_, k)$ une permutation sur 2^n. A partir d'un message m composé de t blocs de n bits $m = m_1 \cdots m_t$ on définit une suite de $t + 1$ blocs $c_0 \cdot c_1 \cdots, c_t$ par :

$$\begin{array}{ll} c_0 & = IV \ , \\ c_{j+1} & = E(c_j \oplus m_{j+1}, k) \ , \qquad j = 0, \ldots, t - 1 \ . \end{array}$$

Si $D(\_, k)$ est l'inverse de la fonction $E(\_, k)$ il est possible d'inverser le processus en effectuant le calcul suivant :

$$\begin{array}{ll} n_0 & = IV \ , \\ n_{j+1} & = D(c_{j+1}, k) \oplus c_j \ , \qquad j = 0, \ldots, t - 1 \ . \end{array}$$

On a $n_j = m_j$, car :

$$n_{j+1} = D(E(m_{j+1} \oplus c_j, k), k) \oplus c_j = m_{j+1} \oplus c_j \oplus c_j = m_{j+1} \ .$$

5.5 Confidentialité CPA en mode CBC

Fait 3 *Si le PRF génère une* permutation pseudo-aléatoire *(PRP) avec son inverse alors on peut utiliser le* mode CBC *pour obtenir un système avec confidentialité CPA.*

$$\begin{aligned} E(m_1 \cdots m_\ell, k) &= [r \leftarrow 2^n; c_0 = r; c_1 = \mathcal{F}_n(k)(c_0 \oplus m_1); \cdots; \\ &\qquad c_\ell = \mathcal{F}_n(k)(c_{\ell-1} \oplus m_\ell) \ : c_0 \cdot c_1 \cdots c_\ell] \\ D(c_0 \cdots c_\ell, k) &= [m_1 = c_0 \oplus (\mathcal{F}_n(k))^{-1}(c_1); \ldots; \\ &\qquad m_\ell = c_{\ell-1} \oplus (\mathcal{F}_n(k))^{-1}(c_1) \ : m_1 \cdots m_\ell] \ . \end{aligned}$$

Remarque 15 *On suppose que l'attaquant a une façon pour prédire le prochain vecteur d'initialisation r' utilisé dans un chiffrement en mode CBC. On montre que dans ce cas il peut proposer deux messages m et m' et deviner si le chiffrement correspond au chiffrement de m ou de m'. On dénote par $\mathbf{0}$ un bloc composés de 0. L'attaquant commence par calculer le chiffrement du bloc $\mathbf{0}$, à savoir :*

$$E(\mathbf{0}, k) = (r, \mathcal{F}(k)(\mathbf{0} \oplus r)) = (r, \mathcal{F}(k)(r)) \ .$$

Ainsi il apprend la valeur de $\mathcal{F}(k)$ sur r. Maintenant, il prédit que le prochain vecteur d'initialisation utilisé sera r' et propose deux messages : un message $m = r \oplus r'$ et un message $m' \neq m$ choisi avec probabilité uniforme. Ensuite il obtient un chiffrement soit de m soit de m' qui a la forme (r', c). L'attaquant a une façon pour distinguer ces deux situations car s'il s'agit d'un chiffrement du message m alors on doit avoir :

$$\mathcal{F}(k)(r' \oplus (r \oplus r')) = \mathcal{F}(k)(r) = c \ ,$$

d'autre part avec une haute probabilité $(r' \oplus m') \neq r$ et $\mathcal{F}(k)(r' \oplus m') \neq c$.

5.6 Schéma de Feistel

On vient de voir que pour le mode CBC on a besoin de générer une *permutation* pseudo-aléatoire. Le schéma de Feistel permet de transformer un générateur de fonctions en un générateur de permutations et sous certaines conditions [LR88] on peut montrer que si le générateur de fonctions est un PRF alors le générateur de permutations est un PRP.

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet binaire. On fixe :

— Une méthode pour associer à une clef k, une fonction $f(\_, k) : 2^t \to 2^t$. A noter que $f(\_, k)$ n'est pas forcement injective !

— Un nombre de tours r.

— Une méthode pour générer d'une clef k, r clefs de tour $k_1, \ldots, k_r$.

Le schéma de Feistel est une fonction de chiffrement (et déchiffrement) qui opère sur des blocs de longueur $2t$ en r tours.

Chiffrement

— On divise le texte clair p en deux moitiés $L_0 R_0$.

— On définit pour $i = 1, \ldots, r$:

$$L_i R_i = R_{i-1}(L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)) \ .$$

— On pose :

$$E(p,k) = L_r R_r \ .$$

Déchiffrement

— Pour $L_i R_i = R_{i-1}(L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i))$ on dérive :

$$\begin{aligned} R_{i-1}L_{i-1} &= L_i(R_i \oplus f(R_{i-1}, k_i)) \\ &= L_i(R_i \oplus f(L_i, k_i)) \ . \end{aligned}$$

— Étant donné un bloc de texte chiffré c, on le divise en $L_r R_r$ et on calcule $L_i R_i$ pour $i = r-1, \ldots, 0$ en utilisant les clefs $k_r, \ldots, k_1$.

— Alors :

$$D(c,k) = L_0 R_0 \ .$$

Remarque 16 *On peut déchiffrer même si les fonctions $f(\_, k_i)$ ne sont pas injectives ; dans le déchiffrement on n'a pas à calculer l'inverse de $f(\_, k_i)$!*

5.7 Sommaire

Un PRF est une famille de fonctions $\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]$ telle qu'un adversaire PPT ne peut pas distinguer avec probabilité non-négligeable une fonction générée d'une fonction tirée avec probabilité uniforme. On peut dériver un PRG d'un PRF et construire un PRF à partir d'un PRG. Un système assure la CPA-confidentialité si un adversaire PPT qui a accès à la fonction de chiffrement n'arrive pas à distinguer les chiffrements de deux messages de même longueur. On utilise un PRF pour construire des systèmes cryptographiques qui assurent la CPA-confidentialité. En particulier, pour traiter des messages composés d'un nombre variable de blocs on peut utiliser le mode compteur (*CTR*) ou le mode chaîné (*CBC*).

Chapitre 6

Intégrité

On considère le problème suivant : Bob connaît la signature d'Alice. S'il reçoit une lettre avec la signature d'Alice il est confiant que la lettre a été rédigée par Alice. On souhaite avoir une mécanisme similaire pour les documents électroniques, par exemple les contrats électroniques, les transactions bancaires, ... A noter que la signature doit permettre de vérifier à la fois l'*origine* du message et son *intégrité*. Il y a *deux mécanismes principaux* :

— Les *codes d'authentification de messages* (*message authentification codes, MAC*) pour les systèmes *symétriques*.

— Les *signatures digitales* pour les systèmes *asymétriques*.

Dans ce chapitre on s'intéresse au premier mécanisme.

6.1 Codes d'authentification de messages (MAC)

Très souvent, les systèmes qui assurent la *confidentialité* d'un message ne garantissent pas son *intégrité*. Par exemple, le *masque jetable* (section 2.1) garantit une confidentialité parfaite mais pour complémenter les bits du *message reçu* il suffit de complémenter les bits du *message chiffré*. En effet, si $x \oplus k = c$ alors $\overline{c} \oplus k = \overline{x}$.

Pour un autre exemple, on considère un message composé de plusieurs blocs : $m = m_1 \cdots m_\ell$. Dans ce cas, le chiffrement du message, basé sur un PRP et en mode CBC (voir section 5.4), a la forme :

$$(c_0 = r, c_1 = \mathcal{F}(k)(c_0 \oplus m_1), \ldots, c_\ell = \mathcal{F}(k)(c_{\ell-1} \oplus m_\ell)) \ .$$

Si l'on *remplace* r par r' le récepteur obtient :

$$m'_1 = (\mathcal{F}(k))^{-1}(c_1) \oplus r', m_2 = (\mathcal{F}(k))^{-1}(c_2) \oplus c_1, \ldots m_\ell = (\mathcal{F}(k))^{-1}(c_\ell) \oplus c_{\ell-1} \ .$$

Donc l'*intégrité du premier bloc est compromise*.

En général, si toute suite de bits d'une certaine longueur est *admissible*, on peut juste générer une suite de bits et prétendre que c'est un texte chiffré.

Pour traiter la propriété d'intégrité, on suit un chemin similaire à celui parcouru pour la propriété de confidentialité, à savoir on définit quand un système assure l'intégrité et ensuite on montre comment construire un tel système en supposant l'existence d'un PRF.

Pour garantir l'intégrité, l'idée de base est d'attacher à un message une étiquette (ou *tag*). Dans le cadre de la cryptographie symétrique, l'émetteur et le récepteur partagent une clef

secrète. A partir du message et de la clef l'émetteur construit une étiquette et à partir du message, de l'étiquette et de la clef le récepteur vérifie l'intégrité du message.

Définition 14 (MAC) *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{K}$ des ensembles finis qui représentent respectivement les textes clairs, les étiquettes (ou* MAC *ou* tags*) et les clefs. Un système qui assure l'intégrité est composé de trois algorithmes PPT : G, Mac et V avec les types et les fonctionnalités suivantes :*

$$\begin{array}{ll} G : 1 \to \mathcal{K} & \textit{(générateur de clef)} \\ Mac : \mathcal{P} \times \mathcal{K} \to \mathcal{T} & \textit{(générateur MAC)} \\ V : \mathcal{P} \times \mathcal{K} \times \mathcal{T} \to \{0,1\} & \textit{(vérificateur MAC)} \end{array}$$

tels que :

$$\forall\, k, m, t \;\; V(m,k,t) = 1 \textit{ ssi } t = Mac(m,k) \;.$$

De plus, le système doit satisfaire la propriété suivante : tout attaquant PPT qui connaît les MAC d'un nombre (polynomial) de messages $m_1, \ldots, m_\ell$ a une probabilité négligeable *de produire un MAC* valide *pour un message m différent de $m_1, \ldots, m_\ell$.*

Remarque 17 *Pour formaliser la définition, on peut introduire une fonction :*

$$M_{m,k} : \mathcal{P} \times \mathcal{K} \to \mathcal{T} \;,$$

telle que $M_{m,k}(m)$ est une étiquette choisie avec probabilité uniforme et $M_{m,k}(m') = Mac(m',k)$ si $m \neq m'$. Ensuite on suppose que l'attaquant PPT a accès à la fonction $M_{m,k}$ en tant que oracle (comme dans la définition de CPA-confidentialité) et que son but est de produire une étiquette valide pour m.

6.2 CBC-MAC

Si un *PRF* existe alors on peut construire un *MAC sûr* (en pratique, on peut utiliser AES). Une construction possible est d'*adapter le mode de transmission CBC* :

1. A partir d'une clef k on dérive *deux clefs* k_1 et k_2.
2. On décompose le message m en ℓ blocs $m = m_1 \cdots m_\ell$ et on calcule le *dernier bloc* du mode CBC par rapport à la *clef* k_1 :

$$\begin{array}{ll} c_0 & = 0 \qquad \text{(le vecteur d'initialisation est fixé !)} \\ c_{j+1} & = \mathcal{F}(k_1)(c_j \oplus m_{j+1}) \quad j = 0, \ldots, \ell - 1 \;. \end{array}$$

3. Ensuite on *chiffre* c_ℓ (le dernier bloc) avec la deuxième clef :

$$Mac(m,k) = \mathcal{F}(k_2)(c_\ell) \;.$$

   Pour *vérifier*, il suffit de refaire le calcul et de comparer le résultat au MAC associé au message. Notez que dans la vérification on n'a pas besoin de calculer l'inverse de $\mathcal{F}(k)$. Pour cette raison, CBC-MAC peut utiliser un PRF (et non pas un PRP comme dans le schéma pour la confidentialité CPA décrit dans la section 5.4).

Il y a aussi d'autres schémas pour construire un MAC. Par exemple, *HMAC* et *NMAC* qui utilisent les *fonctions de hachage.*[1] Dans toutes ces méthodes, les fonctions *Mac* qui génèrent les codes d'authentification ne sont pas probabilistes (contrairement aux fonctions de chiffrement).

1. Ces fonctions ont des propriétés similaires aux fonctions à sens unique et resistantes aux collisions décrites dans la section 1.6

Attaque sur CBC-MAC simplifié

L'utilisation de deux clefs dans le calcul du *Mac* sert à *éviter l'attaque suivante*.

— On suppose qu'on utilise un *CBC-MAC faible* qui utilise une seule clef (dans le calcul du MAC ci dessus, l'étape 3 est omise).

— On suppose aussi que $m = m_1 \cdots m_\ell$, $\ell \geq 2$ et qu'on connaît les CBC-MAC (faibles) $c_{\ell-1}$ de $m_1 \cdots m_{\ell-1}$ et c_ℓ de $m_1 \cdots m_\ell$.

— On peut alors construire le message suivant composé de $\ell + 1$ blocs :

$$m' = m \cdot (m_\ell \oplus c_\ell \oplus c_{\ell-1}) \ .$$

— Et on remarque qu'on sait calculer son CBC-MAC (faible) :

$$\mathcal{F}(k_1)(c_\ell \oplus m_\ell \oplus c_\ell \oplus c_{\ell-1}) = \mathcal{F}(k_1)(m_\ell \oplus c_{\ell-1}) = c_\ell \ .$$

Piège (CBC-MAC)

On a vu qu'un PRP en mode CBC *n'assure pas* la *CPA-confidentialité* si le vecteur d'initialisation est *prévisible* (section 5.5). On pourrait donc penser que dans la mise-en-oeuvre du CBC-MAC il convient de choisir le vecteur d'initialisation de façon aléatoire. Or il se trouve qu'avec un *choix aléatoire*, CBC-MAC *n'assure pas l'authentification* ! Cet exemple illustre bien la nécessite de *prouver* la sécurité d'un schéma (même si très souvent en cryptographie la preuve repose sur certaines conditions). Voici une attaque sur CBC-MAC avec choix aléatoire du vecteur d'initialisation.

— D'abord, on remarque que si le vecteur d'initialisation est aléatoire alors le MAC doit *inclure* ce vecteur.

— Pour des messages composés d'*un bloc*, le MAC prend la forme suivante :

$$Mac(m, k) = (r, \mathcal{F}(k)(r \oplus m)) \ .$$

— Alors : $(\overline{r}, \mathcal{F}(k)(r \oplus m))$ est un *MAC valide* pour $\overline{m}$ car : $\overline{r} \oplus \overline{m} = r \oplus m$.

6.3 Combiner confidentialité et intégrité

On peut imaginer différentes façons de *combiner* un schéma qui assure la *confidentialité* avec un *MAC* :

1. Chiffrement suivi par MAC : $[c = E(m, k) : (c, Mac(c, k'))]$.
2. Chiffrement et MAC : $(E(m, k), Mac(m, k'))$.
3. MAC suivi par chiffrement : $E((m, Mac(m, k')), k)$.

Le premier schéma (à savoir chiffrement suivi par MAC) est le plus *robuste*. Par exemple, dans le deuxième schéma la valeur $Mac(m, k')$ pourrait dévoiler des informations sur le texte clair m et dans le troisième le récepteur va déchiffrer un message sans savoir s'il est authentique. En tout cas, une règle générale est qu'il ne faut *pas* utiliser la même clef pour le chiffrement et le MAC (donc $k \neq k'$). Une autre bonne pratique d'ingénierie est de coupler tout système pour la *confidentialité* avec un système qui assure l'*intégrité* des messages échangés.

6.4 Sommaire

A partir d'un *PRF* $\mathcal{F}$, on peut construire un MAC qui assure la propriété d'intégrité de la façon suivante où l'on dénote par *ext* une fonction qui extrait d'une clef un couple de clefs :

$$\begin{aligned} Mac(m_1 \cdots m_\ell, k) \quad &= [(k_1, k_2) = ext(k); c_0 = 0; c_1 = \mathcal{F}(k_1)(c_0 \oplus m_1); \ldots; \\ &\quad c_\ell = \mathcal{F}(k_1)(c_{\ell-1} \oplus m_\ell) : \mathcal{F}(k_2)(c_\ell)] \ . \end{aligned}$$

Pour des textes composés d'un nombre fixe de blocs l'utilisation de deux clefs différentes (k_1 et k_2) est redondante.

C'est une bonne pratique de construire des systèmes qui assurent la confidentialité et l'intégrité. Une façon robuste de combiner les systèmes pour chiffrer et pour authentifier est de chiffrer d'abord et ensuite de calculer le *Mac* du message chiffré en utilisant deux clefs différentes. On trouve dans la littérature des définitions de confidentialité CCA (*chosen ciphertext attack*) qui sont encore plus restrictives que la confidentialité CPA et qui imposent l'utilisation de mécanismes pour garantir l'intégrité.

Chapitre 7

Permutations pseudo-aléatoires : pratique

Parmi les fonctions $f : 2^n \to 2^n$ il y a $(2^n)!$ permutations. Une notation pour représenter une permutation aléatoire a besoin de $\log_2((2^n)!) \approx n2^n$ bits. Un générateur de permutations pseudo-aléatoires *pratique* ne génère qu'un petit nombre de permutations parmi celles possibles. Par exemple, 2^n permutations parmi les $(2^n)!$ possibles. Dans ce cas, les permutations générées peuvent être représentées de façon compacte.

Les définitions de PRG et PRF suggèrent un standard avec lequel mesurer les réalisations pratiques de générateurs pseudo-aléatoires de permutations (PRP). Le *critère idéal* est qu'il doit être difficile de distinguer une permutation aléatoire d'une permutation générée par la méthode. Plus pratiquement, la *recherche de la clé* (=germe) de la permutation pseudo-aléatoire doit essentiellement demander une recherche exhaustive.

Il est possible de construire des PRP dont la sécurité repose sur la difficulté de problèmes bien étudiés comme le problème de la factorisation du produit de deux grands nombres premiers. Malheureusement, ces constructions ne sont pas aussi efficaces que celles qui sont utilisées en pratique comme DES et AES et qui sont basées sur un mélange savant de quelques fonctions simples à calculer (permutations, substitutions,...). L'évaluation de la sécurité de ces générateurs est *empirique* : on montre que les meilleures méthodes d'analyse *connues* ne marchent pas. En d'autres termes, toute attaque (connue) va prendre un temps proportionnel à 2^n où n est la taille de la clef. Ainsi on peut distinguer deux écoles (qui parfois s'ignorent) : celle qui met l'accent sur la *sécurité prouvée* et celle qui s'intéresse à la *sécurité empirique*. En caricaturant un petit peu, on pourrait dire que dans la première école on vous dit que :

> si les lois de la mécanique quantique sont valides alors pour ouvrir ce coffre il faut au moins 10^6 Joules.

Alors que dans la deuxième école on vous dit que :

> les 10 meilleurs lasers en commerce consomment au moins 10^6 Joules pour ouvrir ce coffre.

Dans ce chapitre, on se limite à donner une description approximative de la structure de DES et AES. Le livre [DR02] contient une discussion approfondie de la sécurité (empirique) d'AES.

7.1 DES

DES (*Data encryption standard*) est un système formalisé autour de 1977 qui utilise le schéma de Feistel (section 5.6). Soient $\mathcal{P} = \mathcal{C} = 2^{64}$ et soit $\mathcal{K} = 2^{56}$. Une clef est complétée à 64 bits en insérant 8 bits aux positions : $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64$. Ces bits sont utilisés pour détecter et corriger 1 erreur. Dans DES, on utilise $r = 16$ tours. On pose $t = 64/2 = 32$ bits. Les clefs de tour sont sur 48 bits.

Fonction d'expansion

DES utilise une fonction d'expansion $Ex : 2^{32} \to 2^{48}$ qui est spécifiée par le tableau suivant. On remarquera qu'en première et dernière colonne on trouve des bits de l'entrée qui paraissent aussi dans les colonnes centrales.

32	1	2	3	4	5
4	5	6	7	8	9
8	9	10	11	12	13
12	13	14	15	16	17
16	17	18	19	20	21
20	21	22	23	24	25
24	25	26	27	28	29
28	29	30	31	32	1

S-boites

DES utilise aussi une série de *S-boites* (S-boxes) qui sont des fonctions (non-affines) $S_i : 2^6 \to 2^4$, $i = 1, \ldots, 8$. Par exemple, la boite S_1 est spécifiée par le tableau suivant :

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]
[0]	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
[1]	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
[2]	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
[3]	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

On remarquera que les valeurs dans chaque ligne sont *différentes*. Le calcul de la sortie d'une S-boite se passe de la façon suivante. Soit l'entrée $B = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$. Alors :

— $i = (b_1b_6)_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ détermine l'indice de la ligne.

— $j = (b_2b_3b_4b_5)_2 \in \{0, \ldots, 15\}$ détermine l'indice de la colonne.

Le résultat est la valeur de coordonnées (i, j) exprimée en base 2. Par exemple, pour déterminer $S_1(001011)$ on calcule :

$$i = (01)_2 = 1, \quad j = (0101)_2 = 5, \quad S_1[1, 5] = 2, \quad S_1(001011) = 0010.$$

Remarque 18 *La composition de l'expansion et des S-boites est bien une* permutation *sur* 2^{32}*. En effet, si on applique l'expansion le 1er et 6ème bits sont redondants. Ensuite on applique un xor qui est une fonction injective. Enfin la S-boite va utiliser le 1er et 6ème bit pour associer de façon injective 4 bits aux 4 bits centraux.*

Calcul de $f(R_{i-1}, k_i)$

$R' := Ex(R_{i-1})$	(Expansion R_i à 48 bits)
$B_1 \cdots B_8 := R' \oplus k_i$	(B_i a 6 bits)
$C_i := S_i(B_i), i = 1, \ldots, 8$	(C_i a 4 bits)
$P(C_1 \cdots C_8)$	(P pour une permutation sur 32 bits)

A noter qu'avant de commencer les 16 tours, DES applique une permutation initiale à ne pas confondre avec la permutation P qui est spécifiée par le tableau suivant :

16	7	20	21
29	12	28	17
1	15	23	26
5	18	31	10
2	8	24	14
32	27	3	9
19	13	30	6
22	11	4	25

Génération de clefs de tour

On dispose des fonctions suivantes :

$$f_1 : 2^{64} \to 2^{28} \times 2^{28} \ , \quad f_2 : 2^{28} \times 2^{28} \to 2^{48} \ ,$$

et des fonctions de décalage :

$$shift_i \text{ pour } i = 1, \ldots, 16 \ .$$

Alors, état donné une clef k, on calcule :

$$\begin{array}{lll} C_0 D_0 & = f_1(k), & \\ C_i & = shift_i(C_{i-1}), \quad D_i = shift_i(D_{i-1}), & \qquad i = 1, \ldots, 16, \\ k_i & = f_2(C_i D_i) \ . & \end{array}$$

Remarque 19 *Permutation, expansion, S-boites, générateurs de clefs sont spécifiées par certaines tables fixées. Si on veut implémenter* DES*, il faut faire référence à ces tables, autrement, l'intérêt de ces tables est limité car on ne dispose pas d'une théorie qui justifie clairement leur définition.*

Triple DES

L'espace des clefs dans DES est relativement petit (2^{56} clefs possibles). Pour améliorer la sécurité du système, une première approche pourrait être de considérer un *chiffrement double*. Une clef est un couple de clefs (k_1, k_2). Pour chiffrer, on calcule :

$$E(m, (k_1, k_2)) = E(E(m, k_1), k_2) \ ,$$

et pour déchiffrer, on calcule :

$$D(c, (k_1, k_2)) = D(D(c, k_2), k_1) \ .$$

Pour que cette approche ait une chance de marcher, il faut au moins supposer qu'étant données les clefs k_1, k_2, il est 'improbable' qu'il y ait une clef k telle que : $E(\_, k_2) \circ E(\_, k_1) = E(\_, k)$. Cette propriété est fausse pour les fonctions affines (voir exercice B.2), mais peut être vérifiée par d'autres classes de fonctions. Par exemple, si les fonctions $E(\_, k_1)$ et $E(\_, k_2)$ sont des polynômes de dégrée 2 il est improbable que leur composition soit un polynôme de dégrée 2. Avec cette hypothèse, on pourrait espérer qu'une attaque par recherche complète contre le système à chiffrement double demanderait 2^{2n} essais .... Malheureusement, une *attaque au milieu* (*meet in the middle attack*) est possible. En effet, en connaissant un certain nombre de couples texte clair-texte chiffré, on peut réduire l'espace de recherche. On suppose connaître :

$$c_i = E(E(p_i, k_1), k_2), \quad i = 1, 2 \ .$$

Alors, il faut que :

$$E(p_i, k_1) = D(c_i, k_2), \quad i = 1, 2 \ .$$

Pour toutes les clefs k, on calcule (on a besoin d'une mémoire de taille 2^n) :

$$E(p_1, k) \ .$$

Pour toutes les clefs possibles k', on calcule :

$$D(c_1, k') \ ,$$

et on vérifie si $E(p_1, k) = D(c_1, k')$. Alors on peut tomber sur $k = k_1$ et $k' = k_2$. Pour améliorer la confiance dans le résultat, on vérifie :

$$E(p_2, k) = D(c_2, k') \ .$$

Évidemment, le plus de couples texte clair-texte chiffré le mieux.

A cause de l'attaque au milieu, le chiffrement double n'est pas utilisé. Une approche différente qui évite l'attaque décrite est de *chiffrer-déchiffrer-chiffrer*. On définit :

$$c = E(D(E(p, k_1), k_2), k_1) \ , \quad p = D(E(D(c, k_1), k_2), k_1) \ .$$

Ceci est connu comme *chiffrement triple* et il s'agit de la méthode standard pour 'améliorer' la sécurité de DES sans changer l'algorithme. A noter que si $k_1 = k_2$ alors le chiffrement triple est la même chose que le chiffrement standard.

7.2 Un exemple de réseau de substitution permutation

En pratique, le chiffrement triple n'est pas très efficace et ceci a motivé la recherche d'un nouveau standard qui a abouti avec la proposition du standard AES (*Advanced Encryption Standard*). Le standard a été spécifié en 1997. Il prévoit des blocs de 128 bits, avec des clefs de 128, 192 ou 256 bits, et avec des contraintes en termes de vitesse, mémoire et simplicité de mise en oeuvre (notamment par des circuits dédiés). Une mise en oeuvre de ce standard a été sélectionnée en 2000 dans une compétition internationale ouverte par un processus de confrontation et d'élimination.

AES utilise (entre autres) l'idée de réseau de substitution-permutation dont on va donner un exemple à petite échelle. Pour chaque $k \in 2^{16}$ on veut définir une fonction $\mathcal{F}(k) : 2^{16} \to 2^{16}$.

Substitution On utilise la première ligne de la première boite de DES (section 7.1) qui est une fonction $S : 2^4 \to 2^4$ spécifiée par le tableau suivant :

Entrée :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Sortie :	E	4	D	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

Permutation Comme permutation on utilise une fonction $P : \{1, \ldots, 16\} \to \{1, \ldots, 16\}$ qui est spécifiée par le tableau suivant :

Entrée :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Sortie :	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15	4	8	12	16

Clef La clef k est aussi sur 16 bits. La clef K_i du tour i pour $i = 1, 2, 3, 4$ est obtenue en effectuant $4 * (i - 1)$ décalages circulaires vers la droite de la clef k. Ainsi si $k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ et $x_i \in 2^4$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, on aura :

$$\begin{array}{lcl} K_1 & = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ K_2 & = & x_4 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ K_3 & = & x_3 \cdot x_4 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ K_4 & = & x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_1 \end{array}$$

Tour Le chiffrement se décompose en 4 tours. Le tour i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, consiste à transformer un bloc $x = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$, où $x_i \in 2^4$ comme suit :

$$\begin{array}{lcll} (y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4) & = & (x \oplus K_i) & \text{(XOR avec la clef)} \\ (w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4) & = & (S(y_1) \cdot S(y_2) \cdot S(y_3) \cdot S(y_4)) & \text{(Substitution)} \\ z & = & P(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4) & \text{(Permutation)} \end{array}$$

Toutes ces transformations sont inversibles et leur mise en oeuvre est le sujet du travail pratique C.4.

7.3 Structure d'AES

On décrit la structure d'AES en ignorant un certain nombre de détails et en se limitant au cas où la clef a 128 bits.

Comme dans les cas déjà étudiés, AES contient une méthode pour générer des clefs de tour. La fonction qui génère ces clefs comporte une composante non-linéaire. A la différence de DES, AES n'utilise pas le schéma de Feistel et il manipule les données au niveau des octets. Les transformations sont donc définies sur 16 octets (soit 128 bits).

AES comporte 10 tours et chaque tour se décompose en 3 phases.

— Application d'une substitution S a chaque octet. La substitution est une fonction non-linéaire $S : 2^8 \to 2^8$. AES utilise une seule substitution et non pas 8 comme DES.

— Application de fonctions linéaires pour *diffuser* les données. Dans cette phase on peut voir les 16 octets comme une matrice 4×4 avec éléments dans 2^8. La diffusion consiste d'abord à décaler de façon circulaire la i-ème ligne de la matrice de i positions vers la gauche, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Ensuite chaque colonne de la matrice obtenue est multipliée par une matrice 4×4 prédéfinie.

— Combinaison des données avec la clef de tour à l'aide d'un ou exclusif.

Comme nous l'avons déjà dit, dans AES les calculs se déroulent au niveau des octets. D'un point de vue conceptuel, on peut expliquer ces calculs comme des opérations arithmétiques

sur un *corps fini* dont les éléments sont en correspondance bijective avec les octets ; le corps en question contient donc exactement 2^8 éléments. On décrit brièvement la structure algébrique de ce corps. [1]

Parmi les propriétés remarquables des corps finis, on a les suivantes :

— un corps fini doit avoir un nombre d'éléments égal à p^n où p est un nombre premier et $n \geq 1$.

— pour chaque nombre de la forme p^n, p premier, $n \geq 1$, il existe à isomorphisme près un seul corps avec p^n éléments.

On montre en appendice (voir corollaire 3), que pour tout nombre premier p, les entiers modulo p forment un *corps* avec comme opérations l'addition et la multiplication modulaire. En particulier, $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ est le plus petit corps. Dans ce corps, l'opération d'addition correspond à l'ou exclusif et l'opération de multiplication à la conjonction.

Il reste donc à voir comment construire un corps avec p^n éléments si p est premier et $n > 1$. Cette question a une réponse assez simple : il suffit de considérer les polynômes de degré au plus $n - 1$ et à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. Dans le cas qui nous intéresse, $p = 2$ et $n = 8$. Un élément du corps est donc un polynôme de la forme :

$$a_7 \cdot x^7 + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \tag{7.1}$$

où les coefficients a_i varient sur $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ et les opérations d'addition et de multiplication ($+$ et $\cdot$) sont celles de $\mathbf{Z}_2$.

Comment additionner et multiplier deux polynômes ? Il se trouve que pour additionner deux polynômes il suffit d'additionner les coefficients modulo 2 ou, de façon équivalente, de calculer le ou exclusif des coefficients. L'opération de multiplication de polynômes s'inspire aussi de la multiplication dans $\mathbf{Z}_p$. Pour calculer le produit de deux nombres dans $\mathbf{Z}_p$, on calcule le produit ordinaire et on retient le reste de la division par p. De la même façon, pour calculer le produit de deux polynômes de degré au plus $n - 1$ et à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$, on commence par calculer le produit des polynômes et ensuite on retient le reste de la division du polynôme obtenu par un polynôme dit *irréductible*. Un polynôme irréductible est un polynôme qui ne s'exprime pas comme le produit de deux polynômes non triviaux. De ce point de vue, la définition d'un polynôme irréductible rappelle celle d'un nombre premier. Dans le cas d'AES, le polynôme irréductible choisi est : $p(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$. Donc pour multiplier deux polynômes de la forme (7.1), on commence par calculer un polynôme de degré au plus 14 et ensuite on retient le reste de la division par $p(x)$. En pratique, dans la mise-en-oeuvre d'AES, on precalcule des tables pour multiplier et pour calculer l'inverse multiplicative.

7.4 Sommaire

La pratique de la construction de générateurs aléatoires de permutations (PRP) tels que DES et AES s'appuie sur un certain nombre d'heuristiques : application d'une opération non-linéaire, permutation pour diffuser les données, combinaison avec une clef de tour,...

Parmi les techniques d'attaque développées pour tester ces systèmes, on distingue les techniques dites *linéaires* qui utilisent une approximation linéaire des fonctions non-linéaires utilisées dans le chiffrement (par exemple, les S-boites de DES) et les techniques dites *différentielles*

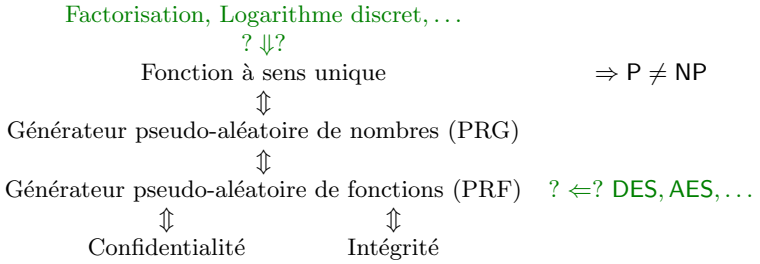
1. La théorie des corps finis est riche en résultats et en applications (voir, par exemple, [McE87]).

qui comparent l'entrée et la sortie de la fonction de chiffrement. Pour DES et AES, ces techniques semblent marcher seulement dans des situations simplifiées (par exemple, avec un nombre de tours réduit).

Chapitre 8

Sommaire : cryptographie symétrique

Le diagramme suivant résume la situation pour la cryptographie symétrique. Les implications ? $\Rightarrow$? sont des *voeux pieux*. Il n'y a pas de preuve et on ne semble pas près d'en avoir une !



La table 8.1 résume les constructions présentées. On trouve dans la littérature des constructions de PRG et PRF dont la sécurité repose sur certains problèmes difficiles de l'arithmétique modulaire. Par exemple, le PRG dans [BBS86] et le PRF dans [NR04]. L'état de l'art est que ces constructions 'prouvées' sont considérablement moins efficaces que celles, par exemple, basées sur AES et pour cette raison elles ne sont pas utilisées en pratique.

1-confidentialité : à partir d'un **PRG** $\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{\ell(n)}$:

$$E(m,k) = \mathcal{G}_n(k) \oplus m$$

CPA-confidentialité : à partir d'un **PRF** $\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]$ en **mode CTR** :

$$E(m_1 \cdots m_\ell, k) = [r \leftarrow 2^n : (r, \mathcal{F}(k)(r+1) \oplus m_1, \ldots, \mathcal{F}(k)(r+\ell) \oplus m_\ell)]$$

Variante possible avec **PRP** et **mode CBC** (voir section 5.5).

Intégrité : à partir d'un **PRF** $\mathcal{F}_n : 2^n \to [2^n \to 2^n]$:

$$Mac(m_1 \cdots m_\ell, k) \quad = \quad \begin{array}{c}[(k_1,k_2) = ext(k); c_0 = 0; c_1 = \mathcal{F}(k_1)(c_0 \oplus m_1); \ldots; \\ c_\ell = \mathcal{F}(k_1)(c_{\ell-1} \oplus m_\ell) : \mathcal{F}(k_2)(c_\ell)]\end{array}$$

CPA-confidentialité + Intégrité : chiffrer et ensuite authentifier, avec 2 clefs différentes.

TABLE 8.1 – Sommaire constructions en cryptographie symétrique

Chapitre 9

Systèmes asymétriques

En 1976, Diffie et Hellman [DH76] proposent une *nouvelle idée*. Chaque utilisateur dispose de deux clefs : une est gardée privée et l'autre est rendue publique. Si Alice veut envoyer un message à Bob elle le chiffre avec la clef publique de Bob. Seulement Bob pourra déchiffer ce message en utilisant sa clef privée. Deux ans plus tard, Rivest, Shamir et Adleman [RSA78] proposent une première *réalisation concrète* de cette idée. Depuis, nombreux systèmes asymétriques ont été proposés. On se limite à présenter le système RSA mentionné ci dessus et le système d'ElGamal [Gam85]. Comme pour les systèmes symétriques, une application naïve des systèmes asymétriques produit des systèmes cryptographiques faibles et inefficaces.

9.1 CPA confidentialité : cas asymétrique

La notion de *confidentialité-CPA* pour les systèmes asymétriques est similaire à celle donnée pour le cas symétrique (section 5.2). Les *différences principales* sont :

— Le générateur de clef G produit un *couple* (pk, sk) et les bits de pk dépendent des bits de sk.

— L'attaquant PPT *connaît* la clef pk, ce qui lui donne aussi accès à la *fonction de chiffrement* $E(\_, pk)$. [1]

On suppose disposer d'un système cryptographique asymétrique qui assure la CPA-confidentialité de messages composés d'un bloc. Comment traite-t-on le chiffrement de messages composés de plusieurs blocs ? Un schéma simple mais inefficace consiste à appliquer le chiffrement bloc par bloc. Ainsi on a :

$$E^{asym}(m_1 \cdots m_\ell, pk) = E^{asym}(m_1, pk) \cdots E^{asym}(m_\ell, pk) \ .$$

Une solution beaucoup plus intéressante consiste à appliquer un schéma hybride qui combine le système asymétrique avec un système symétrique (qui est normalement plus efficace) :

$$E^{hyb}(m_1 \cdots m_\ell, pk) = [k' \leftarrow 2^n : (E^{asym}(k', pk), E^{sym}(m_1 \cdots m_\ell, k'))] \ .$$

Dans le système hybride plus le message à chiffrer est long plus le coût du chiffrement s'approche du coût du système symétrique. On remarque aussi qu'à chaque chiffrement on génère

1. Dans les systèmes asymétriques l'attaquant connaît la fonction de chiffrement. Ainsi on arrive directement à la notion de CPA-confidentialité sans passer par la notion de 1-confidentialité.

une nouvelle clef symétrique et on s'attend à que la probabilité de générer deux fois la même clef est faible. On peut exploiter cette remarque pour montrer que pour construire un système hybride qui assure la CPA-confidentialité il suffit de disposer : (i) d'un système symétrique qui assure la 1-confidentialité et (ii) d'un système asymétrique qui assure la CPA-confidentialité. Ceci implique en particulier qu'on peut utiliser pour le système symétrique un système basé sur un *PRG*.

9.2 Système RSA

Dans le système RSA, on commence par générer deux grands *nombres premiers* p, q. Par exemple, on peut utiliser le test de Miller-Rabin (section A.9). Soit maintenant $n = pq$ le *module*. On choisit e *exposant de chiffrement* tel que $1 < e < \phi(n)$ et $pgcd(e, \phi(n)) = 1$. Ensuite, on calcule d *exposant de déchiffrement* tel que $(ed \equiv 1) \bmod \phi(n)$. L'algorithme d'Euclide nous donne une façon efficace d'effectuer ce calcul. Alors on a :

$$\text{Clef publique} = (e, n) \ , \qquad \text{Clef privée} = (d, n) \ .$$

Comme textes *clairs* et textes *chiffrés* on prend :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \{m \mid 0 \leq m < n\} = \mathbf{Z}_n \ .$$

La fonction de *chiffrement* est définie par :

$$E(m, (e, n)) = m^e \mod n \ ,$$

et pour la calculer on utilise l'algorithme du carré itéré (section A.6). De façon symétrique, la fonction de *déchiffrement* est définie par :

$$D(c, (d, n)) = c^d \mod n \ ,$$

et à nouveau on utilise l'algorithme du carré itéré.

Il reste à vérifier que la fonction de déchiffrement est bien l'inverse à gauche de la fonction de chiffrement.

Proposition 12 *Soient n, e, d comme dans le système RSA. Alors pour tout $m \in \mathbf{Z}_n$ on a :*

$$(m^e)^d \equiv m \mod n \ .$$

PREUVE. On sait :

$$(ed \equiv 1) \mod \phi(n) \ ,$$

ce qui implique : $ed = 1 + l(p-1)(q-1)$. Ainsi :

$$(m^e)^d = m^{ed} = m^{1+l(p-1)(q-1)} = m(m^{(p-1)(q-1)})^l \ .$$

On montre que :

$$(m^{ed} \equiv m(m^{(p-1)})^{(q-1)l} \equiv m) \mod p \ .$$

On considère *deux cas*. Si $p \not| m$ alors on applique le *petit théorème de Fermat*. D'autre part, si $p \mid m$ alors la congruence ci-dessus est *valide* car m est un multiple de p. De la même façon on montre :

$$(m^{ed} \equiv m(m^{(q-1)})^{(p-1)l} \equiv m) \mod q \ .$$

On génère deux grands nombres premiers (*différents !*) p, q. Soit $n = pq$ le *module*.
On choisit e *exposant de chiffrement* tel que $1 < e < \phi(n)$ et $pgcd(e, \phi(n)) = 1$.
L'*exposant de déchiffrement* d est l'inverse de e modulo $\phi(n)$.

Clef Publique $= (e, n)$	Clef Privée $= (d, n)$
$E(m, (e, n)) = m^e \mod n$	$D(c, (d, n)) = c^d \mod n$ pour $m, c \in \mathbf{Z}_n$

TABLE 9.1 – Système RSA (version naïve)

Ainsi :

$$(m^{ed} \equiv m) \mod p \qquad (m^{ed} \equiv m) \mod q \ .$$

Mais en général, pour p, q premiers différents on a :

$$(x_1 \equiv x_2) \mod p \text{ et } (x_1 \equiv x_2) \mod q \quad \text{implique } (x_1 \equiv x_2) \mod pq \ .$$

C'est-à-dire : $p \mid (x_1 - x_2)$ et $q \mid (x_1 - x_2)$ implique $pq \mid (x_1 - x_2)$. □

La table 9.1 résume les ingrédients du système RSA.

Exemple 8 *On choisit comme* premiers $p = 11$ *et* $q = 23$. *Alors le* module *est* $n = pq = 253$ *et*

$$\phi(n) = (p-1)(q-1) = 4 \cdot 5 \cdot 11 \ .$$

Le plus petit exposant *de chiffrement possible est* $e = 3$ *(en général, on ne peut pas avoir* $e = 2$ *car* $\phi(n)$ *est pair !). L'*algorithme d'Euclide *donne* $d = 147$. *L'espace des* textes clairs *et des* textes chiffrés *est* $\{0, 1, \ldots, 252\}$. *Pour* chiffrer *le texte clair* $m = 165$, *on calcule* $165^3 \mod 253 = 110$. *Pour* déchiffrer *le texte chiffré* 110, *on calcule* $110^{147} \mod 253$.

RSA avec bourrage aléatoire

Le système RSA décrit *ne satisfait pas* la propriété de *confidentialité CPA*. Par exemple, la fonction de chiffrement est *déterministe* ! Les systèmes RSA utilisés en pratique (par exemple, PKCS 1.5 ou OAEP) introduisent dans le chiffrement une *composante aléatoire* r qui est concaténée au message à chiffrer m. A titre indicatif, la taille de r est comparable à celle de m.

RSA et factorisation

L'attaquant connaît (e, n). S'il peut factoriser $n = pq$, alors :

1. Il calcule $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.
2. Il calcule d tel que $(ed \equiv 1) \bmod \phi(n)$ et il peut déchiffrer chaque message.

Ainsi RSA est sûr à condition qu'on ne puisse pas factoriser de façon efficace le produit de deux grands nombres premiers. Par ailleurs, on peut montrer que si l'on connaît d alors il y a un algorithme probabiliste pour factoriser n. Ainsi apprendre d est aussi difficile que factoriser n. Cependant, il pourrait y avoir d'autres méthodes pour obtenir de l'information sur le texte clair qui ne nécessitent pas le calcul de d. A l'état de nos connaissances, attaquer RSA pourrait être *plus facile* que factoriser le produit de deux grands nombres premiers.

9.3 Échange de clefs : protocole de Diffie-Hellman

On présente un *protocole* dû à Diffie et Hellman qui permet à deux participants qui partagent seulement de l'*information publique* d'établir une *clef commune secrète*. On verra ensuite comment dériver du protocole un système asymétrique.

1. Alice et Bob se mettent d'accord sur un *grand nombre premier* p et un *générateur* g pour $\mathbf{Z}_p^*$.
2. Alice choisit de façon aléatoire $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et elle calcule et envoie à Bob $A = (g^a) \bmod p$.
3. Bob choisit de façon aléatoire $b \in \mathbf{Z}_p^*$, il calcule et envoie à Alice $B = (g^b) \bmod p$.
4. La *clef commune* $K = g^{ab} \bmod p$ est extraite :

$$K = B^a \mod p \quad \text{(comme Alice calcule } K\text{)}$$

$$K = A^b \mod p \quad \text{(comme Bob calcule } K\text{)}$$

Exemple 9 *On suppose que* $p = 17$, $g = 3$, *Alice choisit* $a = 7$, *et Bob* $b = 4$. *La clef commune générée par le protocole est* $(g^{ab} \equiv 4) \mod 17$.

Le problème de Diffie-Hellman

Le problème de Diffie-Hellman est le suivant :

> étant donné (p, g, A, B) (mais en ignorant le logarithme discret de A et B) peut-on déterminer la clef K ?

Clairement, si on peut calculer le *logarithme discret* de façon efficace alors on peut déterminer K (et résoudre le problème de Diffie-Hellman). Par exemple, on calcule $a = dlog_g(A)$ et $K = (B^a) \bmod p$. Par contre, on *ne sait pas* si la solution du problème de DH est suffisante pour calculer le logarithme discret de façon efficace. La situation est donc similaire à celle décrite pour RSA : à défaut de savoir prouver quelque chose, on se réduit à un problème un peu plus facile.

Attaque de l'homme au milieu (man in the middle)

Le protocole de Diffie-Hellman est conçu pour résister à un attaquant *passif*. Que se passe-t-il si l'attaquant est *actif*, c'est-à-dire s'il peut intercepter et générer des messages ?

— L'attaquant exécute le protocole d'échange de clef avec Alice en jouant le *rôle de Bob* et avec Bob en jouant le *rôle d'Alice*.
— A la fin des deux protocoles, Alice et Bob vont envoyer des messages chiffrés avec deux *clefs connues par l'attaquant*.
— A remarquer que cette attaque n'est pas basée sur une manipulation de l'information publique (g, p). Le problème est l'*authentification* du correspondant.

9.4 Système d'ElGamal

Il s'agit d'un système à *clef publique* basé sur le problème de Diffie-Hellman et effectivement utilisé (par exemple dans la bibliothèque GPG).

$$p \text{ premier }, \quad g \text{ générateur pour } \mathbf{Z}_p^* , \quad a \in \mathbf{Z}_p^*$$
$$\text{Clef publique : } (p, g, A = (g^a) \mod p) \quad \text{Clef privée : } (p, a)$$
$$\text{Texte clair } \mathcal{P} = \mathbf{Z}_p , \quad \text{Texte chiffré } \mathcal{C} = \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$$
$$E(m, (p, g, A)) = [b \leftarrow \mathbf{Z}_{p-1} : (g^b \mod p, (A^b \cdot m) \mod p)]$$
$$D((B, c), (p, a)) = (B^{p-1-a} \cdot c) \mod p$$

TABLE 9.2 – Système d'ElGamal

Génération de la Clef

1. Alice génère un *grand nombre premier* p et un générateur g pour $\mathbf{Z}_p^*$.
2. Ensuite elle choisit de façon aléatoire un *exposant* $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et elle calcule :

$$A = g^a \mod p .$$

La *clef publique* est (p, g, A). La *clef privée* est (p, a).

Chiffrement Bob connaît (p, g, A). Pour chiffrer un message $m \in \mathbf{Z}_p$ pour Alice, il choisit *un exposant aléatoire* $b \in \mathbf{Z}_p^*$ et il calcule (jusqu'ici c'est comme l'échange de clef !) :

$$B = (g^b) \mod p .$$

Pour *chiffrer* m, Bob calcule (remarquez que A^b était la clef dans DH) :

$$c = A^b m \mod p .$$

Ainsi le code chiffré comprend le produit de la clef DH avec m modulo p :

$$E(m, (p, g, A)) = (B, c) .$$

Déchiffrement Alice obtient (B, c) et elle connaît a. Pour calculer m, elle divise c par $B^a \bmod p$ comme suit :

1. Calculer (une fois) $x = p - 1 - a$, $1 \leq x \leq p - 1$.
2. Calculer $B^x c \bmod p$ (ceci est égal à m).

On vérifie que $B^x c \bmod p = m$ pour $x = p - 1 - a$:

$$\begin{aligned} B^x c &\equiv g^{b(p-1-a)} A^b m &&\equiv (g^{p-1})^b (g^{-ab})(g^{ab}) m \\ &\equiv (1)^b (1) m &&\equiv m \mod p . \end{aligned}$$

On remarquera que le chiffrement dans ce système est un algorithme probabiliste. Comme dans le cas symétrique, cela est nécessaire pour assurer la CPA-confidentialité.

Fait 4 *Si le problème de* Diffie-Hellman *est difficile alors le chiffrement d'El-Gamal assure la* CPA confidentialité.

La table 9.2 résume le système cryptographique d'El-Gamal.

9.5 Sommaire

Dans un système de chiffrement asymétrique, on distingue deux clefs dont l'une, publique, sert à chiffrer et l'autre, privée, sert à déchiffrer. Dans ces systèmes il doit être difficile de calculer la clef privée à partir de la clef publique. On a présenté deux systèmes qui mettent en oeuvre cette idée : le système RSA qui est lié à la difficulté de factoriser le produit de deux grands nombres premiers et le système d'ElGamal qui est lié à la difficulté à calculer l'inverse de l'exposant modulaire. [2] En pratique, on peut combiner les systèmes asymétriques avec les systèmes symétriques selon un schéma hybride qui offre les avantages des systèmes asymétriques avec un coût proche des systèmes symétriques.

2. Bien sur, être lié n'est pas la même chose que être équivalent !

Chapitre 10

Hachage et compression

Soit Σ un alphabet donné. Une *fonction de hachage* est une fonction :

$$h : \Sigma^* \to \Sigma^m \qquad \text{(fonction de hachage)} \tag{10.1}$$

Une *fonction de compression* est une fonction :

$$h : \Sigma^{t+m} \to \Sigma^m \quad t \geq 1 \qquad \text{(fonction de compression)} \tag{10.2}$$

Les fonctions de hachage sont utilisées dans plusieurs contextes. En cryptographie, une fonction de hachage doit avoir certaines propriétés particulières (voir le protocole pour jouer à pile ou face au téléphone, section 1.6).

1. Pour un x donné, il devrait être facile de calculer $h(x)$.
2. Pour un y donné, il devrait être difficile de trouver une *image inverse* x telle que $h(x) = y$, c'est-à dire h est à *sens unique* (voir définition 12 pour une formalisation). Par exemple, l'exponentiation modulaire est facile à calculer mais le logarithme discret est difficile (autant qu'on sache...).
3. Pour un x donné, il devrait être difficile de trouver un autre x' tel que $h(x) = h(x')$. Si c'est le cas, on dit que h est *faiblement résistante aux collisions*.
4. Il devrait être difficile de trouver x, x' tels que $x \neq x'$ et $h(x) = h(x')$. Dans ce cas on dit que h est *fortement résistante aux collisions*.

Un exemple dans lequel la résistance faible aux collisions suffit est le suivant : on veut protéger un programme important de toute modification (*e.g.*, le programme qui calcule le chiffrement). Dans ce cas, on peut mémoriser le hachage du programme dans un endroit sûr (par exemple, une *smart card*). Avant d'utiliser le programme, on compare toujours le hachage du programme à la valeur mémorisée dans un endroit sûr. Ceci suppose que h est faiblement résistante aux collisions. On verra dans la suite du cours que la propriété de résistance forte aux collisions trouve des application dans la conception de signatures digitales (chapitre 11).

On peut montrer que les fonctions fortement résistantes aux collisions sont à sens unique (définition 12). L'argument informel est le suivant.

1. On suppose disposer d'un algorithme d'inversion.
2. On choisit x' de façon aléatoire. En utilisant l'algorithme d'inversion, on détermine un x tel que $h(x) = h(x')$.
3. (x, x') va être une collision sauf si $x = x'$, ce qui est peu probable.

10.1 Paradoxe des anniversaires

Pour calibrer une fonction de hachage il est utile de rappeler un fait élémentaire de calcul des probabilités connu comme *paradoxe des anniversaires*.

Combien de personnes faut-il réunir pour que la probabilité de trouver deux personnes avec la même date d'anniversaire soit supérieure ou égale à $1/2$? Soient n le nombre de *jours* dans une année et k le nombre de *personnes*. Une *expérience* est un élément de $\{1,\ldots,n\}^k$. Toutes les expériences ayant la même probabilité, le calcul des probabilités se réduit à un problème de comptage. A savoir il faut *compter* le nombre d'expériences $(d_1,\ldots,d_k)$ telles que $d_i \neq d_j$ si $i \neq j$. Ce nombre est :

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \Pi_{i=0,\ldots,k-1}(n-i) \ .$$

Donc la probabilité q qu'il *n'y ait pas deux personnes* avec la même date d'anniversaire est :

$$q \ = (\tfrac{1}{n^k})\Pi_{i=0,\ldots,k-1}(n-i) \ = \Pi_{i=0,\ldots,k-1}\tfrac{(n-i)}{n} \ = \Pi_{i=1,\ldots,k-1}(1-\tfrac{i}{n}) \ .$$

On *borne supérieurement* $1+x$ par e^x et on dérive :

$$q \ \leq \Pi_{i=1,\ldots,k-1}e^{-\frac{i}{n}} \ = e^{-\Sigma_{i=1,\ldots,k-1}(\frac{i}{n})} \ = e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \ .$$

Pour avoir $q \leq 1/2$, il suffit que :

$$\frac{-k(k-1)}{2n} \leq -\ln(2) \ .$$

On étudie l'*inégalité quadratique* :

$$k^2 - k - 2n\ln(2) \geq 0 \ .$$

On dérive que pour avoir $q \leq 1/2$, il suffit que :

$$k \geq \frac{1+\sqrt{(1+8n\ln(2))}}{2} \ .$$

En particulier, pour $n = 365$, il *suffit* d'avoir $k = 23$ (en général il suffit de prendre $k \approx (1,2)\sqrt{n}$).

On considère maintenant les implications pour les fonctions de hachage. Si $\Sigma = \{0,1\}$, alors le nombre de *valeurs de hachage* (les dates d'anniversaire) est 2^n et l'*inégalité* devient :

$$k \geq \frac{1+\sqrt{1+8\ln(2)2^n}}{2} \ .$$

Ceci signifie que si on calcule un peu moins que $2^{n/2}$ *valeurs* alors la probabilité de trouver une collision est *plus grande que* $1/2$. Actuellement, on *recommande* $n \geq 256$.

10.2 Construction de Merkle-Damgård

On dit qu'une fonction de hachage (ou de compression) est *résistante aux collisions* s'il n'y a pas d'algorithme probabiliste polynomial en temps qui trouve une collision. [1] On ne sait pas si de telles fonctions existent. Cependant, une construction due à Merkle et Damgård [Mer89, Dam89] montre que si les *fonctions de compression existent* alors les *fonctions de hachage existent* aussi.

1. Pour formaliser cette intuition, il faudrait considérer des *familles* de fonctions de hachage.

Proposition 13 *Soit $\Sigma = \{0,1\}$ un alphabet binaire. Soit $c : 2^{t+m} \to 2^m$ est une* fonction de compression résistante aux collisions *avec $t \geq 1$. Alors on peut construire une fonction de hachage résistante aux collisions :*

$$h : \bigcup_{i>t+m} 2^i \to 2^m \ .$$

En supposant $n = |x|$, le nombre d'appels *à c pour calculer $h(x)$ est au plus :*

$$\begin{array}{ll} 1 + \lceil n/(t-1) \rceil & \textit{si } t \geq 2 \\ 2n+2 & \textit{si } t = 1 \ . \end{array}$$

Remarque 20 *En pratique $t \geq 2$ et donc on applique la compression environ n/t fois.*

On présente une construction simplifiée pour $t \geq 64$. Ici on choisit 64 car l'on suppose que 64 bits suffisent pour représenter le nombre de blocs dans le message à hacher.

— Soit $c : 2^{t+m} \to 2^m$ la fonction de compression.
— Soit $x = x_1 \cdots x_n$ la suite de bits à hacher (avec $n = k \cdot t$, x est donc composé de k blocs de t bits).
— On fait le bourrage (*padding*) suivant de x

$$y(x) = x_1 \cdots x_n \cdot 0 \cdots 0 \cdot (k)_2$$

où $0 \cdots 0(k)_2$ est la représentation en base 2 de k (le nombre de blocs de x) avec assez de 0 à gauche pour avoir t bits.
— Ainsi :

$$y(x) = B_1 \cdots B_{k+1} \text{ où } B_i \in 2^t \ .$$

— Soit $H_0 = IV \in 2^m$ un vecteur d'initialisation de m bits.
— Alors on calcule $h(x) = H_{k+1}$ où :

$$H_{i+1} = c(B_{i+1}, H_i) \qquad (i = 0, \ldots, k) \ .$$

On montre que si on sait trouver une collision de h alors on peut trouver dans un temps raisonnable une collision de c.

— Soient x et x' *deux textes* (pas forcement de la même longueur) tels que $h(x) = h(x')$.
— On suppose que x est constitué de k blocs et x' de k' blocs.
— Par *hypothèse* on a $h(x) = H_{k+1} = H'_{k'+1} = h(x')$. Si $k \neq k'$ alors $c(0 \cdots 0(k)_2, H_k) = c(0 \cdots 0(k')_2, H_{k'})$ est une *collision*.
— Sinon on doit avoir $k = k'$. Soit i le *plus grand indice* tel que $B_i \neq B'_i$.

  — Si $H_k \neq H'_k$ on a une *collision*.

  — Sinon $c(B_k, H_{k-1}) = H_k = H'_k = c(B'_k, H'_{k-1})$ et soit $B_k \neq B'_k$ (collision) soit $H_{k-1} \neq H'_{k-1}$ (collision) soit $H_{k-1} = H'_{k-1}$.

  En *itérant*, on voit qu'on arrive forcement au i tel que $B_i \neq B'_i$ et on trouve ainsi une *collision*.

10.3 Compression de Davies-Meyer

On ne sait pas si les fonctions de compression résistantes aux collisions existent. En pratique, on se contente de construire une fonction de compression à partir d'une fonction de *chiffrement*. Par exemple, on suppose que :

$$E : 2^m \times 2^t \to 2^m \ ,$$

est un chiffrement à bloc avec bloc de taille m, clef de taille t et fonction inverse $D : 2^m \times 2^t \to 2^m$. On rappelle qu'avec AES on a : taille du bloc $m = 128$ et taille de la clef $t \in \{128, 192, 256\}$.

En suivant *Davies-Meyer* [MMO85], on dérive une fonction de compression c :

$$c : 2^{t+m} \to 2^m \qquad c(x, y) = E(y, x) \oplus y \ .$$

Si on applique la construction de Merkle-Damgård avec cette fonction de compression on obtient :

$$H_0 = IV \ , \qquad H_{i+1} = c(B_i, H_i) = E(H_i, B_i) \oplus H_i \ .$$

A noter qu'on utilise le bloc B_i du texte à hacher comme clef.

On peut montrer que si les fonctions de chiffrement sont *distribuées de façon uniforme* (une hypothèse forte !) alors la recherche d'une collision demande un *temps* $O(2^{m/2})$ (qui n'est pas mieux que le temps nécessaire à une attaque par force brute !).

D'*autres schémas* similaires existent (Matyas et al., Miyagushi et al.…) mais pas tous les schémas marchent… Par exemple, si l'on pose :

$$c'(x, y) = E(y, x) \qquad \text{(mauvaise compression !)} \ ,$$

il est *facile de trouver une collision* en prenant x, y, x' arbitraires et $y' = D(E(y, x), x')$ car :

$$c'(x, y) = E(y, x) = E(D(E(y, x), x'), x') = c'(x', y') \ .$$

Voici des données sur la taille du hash et la vitesse relative de différentes fonctions de hachage.

Fonction de hachage	longueur du bloc	vitesse relative
MD4	128	1.00
MD5	128	0.68
SHA-1	160	0.28
SHA-2	256, …	0.14

Une collision pour *MD4* peut être trouvée en calculant 2^{20} valeurs de hachage. Une collision de la fonction de compression de *MD5* a été trouvée aussi. Plus récemment (2004), une méthode a été proposée pour trouver une collision dans *SHA-1* en 2^{69} essais. Ceci est 2000 fois plus rapide que les 2^{80} essais demandés par une méthode de recherche complète. Par ailleurs, d'autres avancées ont forcé le passage de *SHA-1* à *SHA-2*. De plus, en 2012 un standard alternatif nommé *SHA-3* a été sélectionné par un processus de compétition ouverte similaire à celui utilisé pour AES.

10.4 Compression CHP

Pour construire une fonction de compression on peut aussi s'inspirer des méthodes de chiffrement développées pour les systèmes asymétriques. En particulier, pour une fonction

de compression proposée par Chaum, van Heijst et Pfitzmann (abrégé en compression CHP) [CvHP91] on peut montrer qu'elle résiste aux collisions si le calcul du *logarithme discret* dans $(\mathbf{Z}_p)^*$ est difficile.

Définition 15 (compression CHP) *Soient p et $q = (p-1)/2$ premiers et a un générateur pour $(\mathbf{Z}_p)^*$. Soit b choisi de façon aléatoire dans $\mathbf{Z}_p^*$. Alors la compression CHP est définie par :*

$$c : \mathbf{Z}_q \times \mathbf{Z}_q \to \mathbf{Z}_p \ , \quad c(x_1, x_2) = a^{x_1} b^{x_2} \mod p \ .$$

Remarque 21 *Comme $q = (p-1)/2$, la taille de (x_1, x_2) est approximativement deux fois la taille de p. Malheureusement cette fonction est basée sur une opération assez lourde (l'exponentiation modulaire) et elle ne semble* pas assez efficace *pour être utilisée en pratique.*

Exemple 10 *On suppose $q = 11$, $p = 23$, $a = 5$, et $b = 4$ et on calcule $c(5, 10)$. On a :*

$$(a^5 = 5^5 \equiv 20) \mod 23, \quad (b^{10} = 4^{10} \equiv 6) \mod 23, \quad (20 \cdot 6 = 120 \equiv 5) \mod 23 \ .$$

Pour réduire le calcul du logarithme discret à la recherche d'une collision on utilise une généralisation du théorème de Bezout (proposition 17) dont la preuve est donnée en appendice qui permet de dériver le corollaire suivant.

Corollaire 2 *Si $2 = pgcd(a, m)$ et $2 \mid b$ alors la congruence $(ax \equiv b) \mod m$ a exactement 2 solutions modulo m.*

PREUVE. Si x' est la solution de :

$$(a/2)x' \equiv (b/2) \mod (m/2) \ ,$$

alors les solutions de la congruence de départ ont la forme :

$$x' + k(m/2) \ ,$$

et il y en exactement 2 dans $\mathbf{Z}_m$. □

Proposition 14 *On peut dériver d'un algorithme efficace pour la recherche d'une collision de la compression CHP un algorithme efficace pour le calcul du logarithme discret.*

PREUVE. Une *collision* est un couple (x_1, x_2) et (x_3, x_4) tel que :

$$(a^{x_1} b^{x_2} \equiv a^{x_3} b^{x_4}) \mod p \ .$$

Ceci implique :

$$(a^{x_1 - x_3} \equiv b^{x_4 - x_2}) \mod p \ .$$

On montre comment à partir d'une telle collision on peut calculer le *logarithme discret* :

$$y = dlog_a(b) \text{ modulo } p \ .$$

Comme $b = a^y$, la congruence précédente donne :

$$(a^{x_1 - x_3} \equiv a^{y(x_4 - x_2)}) \mod p \ .$$

Comme a est un *générateur* pour $(\mathbf{Z}_p)^*$, ceci implique :

$$(x_1 - x_3 \equiv y(x_4 - x_2)) \mod (p-1) \text{ et } (p-1) = 2q \ .$$

La congruence a une solution si et seulement si $g = pgcd(x_4 - x_2, p-1)$ divise $x_1 - x_3$ (par le corollaire 2). On sait que $|x_4 - x_2| < q$ car $x_2, x_4 \in \mathbf{Z}_q$. Comme $p - 1 = 2q$ et q est premier, on dérive que :

$$\begin{cases} g = 1 & \text{si } |x_4 - x_2| \text{ est impair} \\ g = 2 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si $g = 1$ alors la solution modulo $p-1$ de la congruence précédente est unique et peut être calculée. Ceci permet de déterminer le logarithme discret. Si $g = 2$ alors la congruence a deux solutions différentes (voir corollaire 2) modulo $p-1$ et le logarithme discret peut être calculé en essayant les deux. □

Remarque 22 *Les utilisateurs de la fonction de compression CHP doivent se mettre d'accord sur les paramètres a et b. Si un de ces utilisateurs peut choisir b ou s'il peut calculer le logarithme discret de b alors il peut trouver des collisions (exercice !).*

10.5 Sommaire

L'espace d'hachage doit être suffisamment large pour résister à l'*attaque des anniversaires*. En général, il s'agit d'un espace plus grand que pour le chiffrement symétrique. Si vous pouvez *comprimer* alors vous pouvez *hacher* en sécurité grâce à la construction de Merkle-Damgård. Il est possible de construire des fonctions de compression sûres dans un sens théorique. Par exemple, pour la compression CHP on peut montrer que la recherche d'une collision est aussi difficile que le calcul du logarithme discret. Cependant de telles fonctions sont considérées comme trop coûteuses. En pratique, on peut dériver des fonctions de compression des systèmes de *chiffrement symétriques*. Le construction de Davies-Meyer est une façon de procéder. Il y a du progrès du côté des attaquants ce qui entraîne la définition de nouveaux standards : SHA-2, SHA-3,... et l'élargissement de l'espace de hachage $(256, 512, \ldots$ bits)

Chapitre 11

Intégrité : cas asymétrique

On commence par rappeler les idées générales.

— Alice a une *clef publique* pk et une *clef secrète* sk. Pour *signer* un document m elle calcule $Sig(m, sk)$.

— Bob reçoit le couple $(m, Sig(m, sk))$. En utilisant la clef publique pk, il peut vérifier que le message a vraiment été signé par Alice.

Comme pour les *Mac* (cas symétrique), Bob ayant vu un nombre polynomial de messages avec leur signature doit être incapable de produire une signature valide d'Alice pour un nouveau message.

Remarque 23 *Dans ce schéma : la* clef privée *est utilisée quand on* envoie *le message, et la* clef publique *(de l'émetteur) quand on le* reçoit. *C'est juste le* contraire *de ce qui se passe dans les systèmes de chiffrement asymétriques !*

11.1 Signature RSA

On décrit un schéma de signature basé sur le système RSA (voir table 9.1). On remarquera que dans RSA les clefs de 'chiffrement' et de 'déchiffrement' ont les *mêmes* propriétés (chaque clef est l'inverse de l'autre). Les noms se réfèrent à *l'utilisation envisagée* et non pas à des propriétés mathématiques particulières. Voici une première version (faible !) d'un système de signature RSA. Les clefs publique et privée d'Alice sont déterminées comme dans RSA. Alice signe le document m en calculant :

$$s = \mathsf{Sig}(m, (d, n)) = (m^d) \mod n \ .$$

Bob reçoit (m, s) et vérifie si :

$$(s^e \equiv m) \mod n \ .$$

Un attaquant, devrait être capable de calculer la racine e modulo n du document m. On ne connaît pas d'algorithme efficace pour ce problème.

Remarque 24 *Si l'on connaît la signature RSA faible de m_1 et m_2 alors on sait calculer la signature RSA faible de $(m_1 \cdot m_2) \bmod n$. En effet :*

$$Sig(m_1, (d, n)) \cdot Sig(m_2, (d, n)) = Sig(m_1 \cdot m_2, (d, n)) \ .$$

Donc RSA faible ne garantit pas l'intégrité !

Remarque 25 *Comme dans les systèmes de chiffrement à clef publique, il est important que Bob obtienne réellement la clef publique d'Alice. Si, à sa place, Bob reçoit une clef publique produite par un attaquant, alors l'attaquant peut produire des messages arbitraires et faire croire à Bob qu'ils ont été signés par Alice.*

On va maintenant introduire un système de signature RSA plus pratique et plus robuste qui utilise une fonction de hachage. En effet, pour l'instant on a supposé que le message m est un élément de $\mathbf{Z}_n$. Que fait-on si m est un message de longueur arbitraire ? L'approche est de hacher le message avec une fonction h fortement résistante aux collisions (chapitre 10) et ensuite de signer le hachage.

— La signature d'Alice du message m est :

$$s = (h(m)^d) \mod n \ .$$

On remarque que maintenant le message m *ne peut pas être dérivé* de la signature.

— Bob reçoit (x, s) et vérifie :

$$(s^e) \mod n = h(x) \ .$$

Que fait-on si maintenant Alice veut envoyer un message confidentiel et authentifié à Bob ? Une possibilité est de suivre la même approche évoquée dans le cas symétrique (section 6.3) : à savoir d'abord on chiffre et ensuite on signe. Ce qui veut dire que Alice chiffre le message avec la clef publique (chiffrement) de Bob et ensuite elle signe le résultat avec sa clef privée (signature). Bob vérifie la signature avec la clef publique (signature) d'Alice et ensuite déchiffre avec sa clef privée (chiffrement).

Remarque 26 *On suppose que la fonction de hachage résiste aux collisions.*

— *Trouver un message x qui correspond à une signature s, revient à trouver x tel que $h(x) = (s^e) \bmod n$, c'est-à-dire, à déterminer une image inverse de (s^e).*

— *Dans le cas de plagiat qui exploite la propriété multiplicative de RSA (remarque 24), il est improbable que $h(m_1 m_2) = h(m_1)h(m_2)$.*

— *Enfin, on note que remplacer (x, s) par (x', s) revient à trouver x' tel que $h(x) = h(x')$.*

11.2 Sommaire

Les *signatures* sont les systèmes qui garantissent l'intégrité des messages dans le cas asymétrique. Ces systèmes combinent les chiffrements asymétriques avec les fonctions de hachage. On a considéré un système de signature particulièrement simple basé sur le système RSA. Un système de signature basé sur le système d'ElGamal existe aussi et une version optimisée (*DSA* pour *Digital signature algorithm*) est disponible dans le logiciel *PGP*.

Chapitre 12

Sommaire : cryptographie asymétrique

La table suivante résume les constructions présentées dans le cas asymétrique.

Chiffrement hybride :

$$E^{hyb}(m_1 \cdots m_\ell, pk) = [k' \leftarrow 2^n : (E^{asym}(k', pk), E^{sym}(m_1 \cdots m_\ell, k'))] \ .$$

Chiffrement RSA : $n = pq$, $pgcd(e, \phi(n)) = 1$, $(ed \equiv 1) \bmod \phi(n)$, $m =$ message + composante aléatoire (standard *OAEP*) :

$$E(m, (e, n)) = (m^e) \mod n \ .$$

Échange de clef : Diffie-Hellman. g générateur pour $\mathbf{Z}_p^*$. $K = (g^{ab}) \bmod p$, où :

$$\begin{array}{ll} Alice \to Bob : & [a \leftarrow \mathbf{Z}_p^* : (g^a) \mod p] \\ Bob \to Alice : & [b \leftarrow \mathbf{Z}_p^* : (g^b) \mod p] \end{array}$$

Chiffrement El Gamal. g générateur pour $\mathbf{Z}_p^*$:

$$E(m, (p, g, A)) = [b \leftarrow \mathbf{Z}_p^* : ((g^b) \mod p, (A^b \cdot m) \mod p)]$$

Compression Meyer-Davies en utilisant un chiffrement à bloc (par exemple, AES) :

$$c(x, y) = E(y, x) \oplus y \qquad c : 2^{t+m} \to 2^m$$

Hachage Merkle-Damgård. Pour hacher x, à partir de $c : 2^{t+m} \to 2^m$, on fait un bourrage avec insertion de la longueur de x pour obtenir : $y(x) = B_1 \cdots B_{k+1}$ où $B_i \in 2^t$. Ensuite, $h(x) = H_{k+1}$ où $H_0 = IV$ et :

$$H_{i+1} = c(B_{i+1}, H_i) \qquad (i = 0, \ldots, k)$$

Signature RSA avec h fonction de hachage :

$$Sig(m, (d, n)) = (h(m)^d) \mod n$$

Bibliographie

[And01] Ross Anderson. *Security engineering*. Wiley, 2001.

[BBS86] Lenore Blum, Manuel Blum, and Mike Shub. A simple unpredictable pseudo-random number generator. *SIAM J. Comput.*, 15(2) :364–383, 1986.

[BS16] Dan Boneh and Victor Shoup. *A graduate course in applied cryptography*. Pre-print of a book in preparation, 2016.

[Cha81] David Chaum. Untraceable electronic mail, return addresses, and digital pseudonyms. *Commun. ACM*, 24(2) :84–88, 1981.

[CvHP91] David Chaum, Eugène van Heijst, and Birgit Pfitzmann. Cryptographically strong undeniable signatures, unconditionally secure for the signer. In *Advances in Cryptology - CRYPTO '91, 11th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 11-15, 1991, Proceedings*, pages 470–484, 1991.

[Dam89] Ivan Damgård. A design principle for hash functions. In *Advances in Cryptology - CRYPTO '89, 9th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 20-24, 1989, Proceedings*, pages 416–427, 1989.

[DH76] Whitfield Diffie and Martin E. Hellman. New directions in cryptography. *IEEE Trans. Information Theory*, 22(6) :644–654, 1976.

[DMS04] Roger Dingledine, Nick Mathewson, and Paul F. Syverson. Tor : The second-generation onion router. In Matt Blaze, editor, *Proceedings of the 13th USENIX Security Symposium, August 9-13, 2004, San Diego, CA, USA*, pages 303–320. USENIX, 2004.

[DR02] Joan Daemen and Vincent Rijmen. *The Design of Rijndael. AES - The Advanced Encryption Standard*. Springer-Verlag, 2002.

[Gam85] Taher El Gamal. A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Trans. Information Theory*, 31(4) :469–472, 1985.

[GGM86] Oded Goldreich, Shafi Goldwasser, and Silvio Micali. How to construct random functions. *J. ACM*, 33(4) :792–807, 1986.

[KL07] Jonathan Katz and Yehuda Lindell. *Introduction to modern cryptography*. Chapman and Hall CRC Press, 2007.

[LR88] Michael Luby and Charles Rackoff. How to construct pseudorandom permutations from pseudorandom functions. *SIAM J. Comput.*, 17(2) :373–386, 1988.

[McE87] Robert McEliece. *Finite fields for computer scientists and engineers*. Kluwer Academic Publishers, 1987.

[Mer89] Ralph C. Merkle. A certified digital signature. In *Advances in Cryptology - CRYPTO '89, 9th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 20-24, 1989, Proceedings*, pages 218–238, 1989.

[Mil76] Gary L. Miller. Riemann's hypothesis and tests for primality. *J. Comput. Syst. Sci.*, 13(3) :300–317, 1976.

[MMO85] S. Matyas, C. Meyer, and J. Oseas. Generating strong one-way functions with cryptographic algorithms. *IBM Technical Disclosure Bulletin*, 27 :5658–5659, 1985.

[Nao91] Moni Naor. Bit commitment using pseudorandomness. *J. Cryptology*, 4(2) :151–158, 1991.

[NR04] Moni Naor and Omer Reingold. Number-theoretic constructions of efficient pseudo-random functions. *J. ACM*, 51(2) :231–262, 2004.

[Rab80] Michael O. Rabin. Probabilistic algorithms in finite fields. *SIAM J. Comput.*, 9(2) :273–280, 1980.

[Rog15] Phillip Rogaway. The moral character of cryptographic work. Cryptology ePrint Archive, Report 2015/1162, 2015. `https://eprint.iacr.org/2015/1162`.

[RSA78] Ronald L. Rivest, Adi Shamir, and Leonard M. Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Commun. ACM*, 21(2) :120–126, 1978.

[Sha49] Claude Shannon. Communication theory of secrecy systems. *Bell System Technical Journal*, 28(4) :656–715, 1949.

[Sha79] Adi Shamir. How to share a secret. *Commun. ACM*, 22(11) :612–613, 1979.

[Sho05] Victor Shoup. *A computational introduction to number theory and algebra*. Cambridge University Press, 2005.

[Sin99] Simon Singh. *The code book*. Harper Collins, 1999.

Index

Annexe A

Rappels d'arithmétique et d'algèbre

Dans ce chapitre on collecte des résultats élémentaires d'arithmétique modulaire et d'algèbre qui sont nécessaires à la compréhension des constructions cryptographiques présentées dans les notes de cours.

Convention On dénote par $\mathbf{Z}$ l'ensemble des nombres entiers et si $m \in \mathbf{Z}$ et $m \geq 1$ on dénote par $\mathbf{Z}_m$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ des entiers modulo m.

A.1 Division et reste

Définition 16 (divisibilité) *Soient $a, b \in \mathbf{Z}$. On dit que a divise b et on écrit $a \mid b$ si $\exists\, c \in \mathbf{Z}$ $ca = b$. De façon équivalente, on dit aussi que b est un multiple de a.*

Proposition 15 *Soient $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Alors :*

1. *$a \mid 0$.*
2. *Si $0 \mid a$ alors $a = 0$.*
3. *Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.*
4. *Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors pour tout $d, e \in \mathbf{Z}$ $(c \mid da + eb)$.*
5. *Si $a \mid b$ et $b \neq 0$ alors $|a| \leq |b|$.*
6. *Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $|a| = |b|$.*

Preuve. (1) On prend $c = 0$. (2) Comme $0c = 0 = a$. (3) $k_1 a = b$ et $k_2 b = c$ implique $k_1 k_2 a = c$. (4) $k_1 c = a$ et $k_2 c = b$ implique $da + eb = dk_1 c + ek_2 c = (dk_1 + ek_2)c$. (5) $ca = b$ et $b \neq 0$ implique $c \neq 0$, $a = ca/c = b/c \leq b$. (6) Pour $a, b \neq 0$ on applique (5) ; et $a = 0$ ssi $b = 0$. □

Notation Si $x \in \mathbf{R}$ alors $\lfloor x \rfloor = max\{a \in \mathbf{Z} \mid a \leq x\}$. Notez que $\lfloor 3, 5 \rfloor = 3$ et $\lfloor -3, 5 \rfloor = -4$.

Proposition 16 *Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $b > 0$. Alors :*

$$\exists! q, r\, (a = qb + r \text{ et } 0 \leq r < b).$$

Preuve. On montre d'abord l'existence. Soit $r = a - \lfloor a/b \rfloor b$. On vérifie : $a = \lfloor a/b \rfloor b + (a - \lfloor a/b \rfloor b)$ et $0 \leq r < b$. Pour l'unicité, on suppose $0 \leq r < b$ et $q \in \mathbf{Z}$ tel que $a = qb + r$. Alors $r = (a - qb)$ et $0 \leq (a - qb) < b$. Comme $b > 0$, on dérive $0 \leq a/b - q < 1$. C'est-à-dire $q \leq a/b < q + 1$ avec $q \in \mathbf{Z}$ et $a/b \in \mathbf{Q}$. Ceci implique que $\lfloor a/b \rfloor = q$, et q ne dépend pas de r. Donc si $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$, avec $0 \leq r_1, r_2 < b$. Alors $q_1 = q_2 = \lfloor a/b \rfloor$. Il suit que : $r_1 = r_2$. □

Notation Dans les hypothèses de la proposition 16, on écrit $a \bmod b$ pour le reste r de la division entière.

A.2 Plus grand commun diviseur (pgcd)

Si $c \mid a$ et $c \mid b$ on dit que c est un diviseur commun de a et b. Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors on sait que les diviseurs de a et b sont bornés en valeur absolue par $max(|a|, |b|)$. Si $a = b = 0$ alors le plus grand commun diviseur n'existe pas car $\forall c \ \ (c \mid 0)$, mais par convention on peut établir que $pgcd(0, 0) = 0$. On arrive donc à la définition suivante.

Définition 17 (pgcd) *Soient $a, b \in \mathbf{Z}$. On définit le plus grand diviseur commun (pgcd) par :*

$$pgcd(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a = b = 0 \\ max\{c \mid (c \mid a)\ et\ (c \mid b)\} & autrement. \end{cases}$$

Notation On pose :

$$k\mathbf{Z} \ = \{kc \mid c \in \mathbf{Z}\} \ , \qquad X + Y \ = \{x + y \mid x \in X \text{ et } y \in Y\} \ .$$

Avec cette notation, $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers obtenus comme combinaisons linéaires de a et b. Le théorème de Bezout affirme que les combinaisons linéaires de deux entiers sont exactement les multiples de leur pgcd.

Proposition 17 *Soient $a, b \in \mathbf{Z}$. Alors :*

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = pgcd(a,b)\mathbf{Z} \ .$$

Preuve. Soient $A = a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ et $I = pgcd(a,b)\mathbf{Z}$. Si $a = b = 0$ alors $A = \{0\} = I$. Donc on suppose $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et on définit :

$$g = min\{xa + yb \mid x, y \in \mathbf{Z}, xa + yb > 0\} \ .$$

Clairement, $g\mathbf{Z} \subseteq a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$. D'autre part, soit $c = ak_1 + bk_2 \neq 0$. On sait que $\exists\, q, r \ \ c = qg + r, 0 \leq r < g$. Donc :

$$\begin{aligned} r \ &= ak_1 + bk_2 - q(ax + by) \\ &= a(k_1 - qx) + b(k_2 - qy) \in a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} \ . \end{aligned}$$

Comme g est le plus petit entier positif, on doit avoir $r = 0$. Donc $c = qg \in g\mathbf{Z}$ et $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} \subseteq g\mathbf{Z}$. Ensuite on montre que $g = pgcd(a, b)$. Comme $a, b \in g\mathbf{Z}$, il suit que $g \mid a$ et $g \mid b$. D'autre part, si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid ax + by = g$. Comme $g \neq 0$, on sait que $|d| \leq g$, donc g est le plus grand commun diviseur. □

Exercice 1

1. *Montrez que l'équation $ax + by = c$ a une solution en x, y ssi $pgcd(a, b) \mid c$.*
2. *Pour tout $a, b \in \mathbf{Z}$, ils existent $x, y \in \mathbf{Z}$ tels que $pgcd(a, b) = ax + by$.*
3. *Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $pgcd(a, b) > 0$. Alors $d \mid a$ et $d \mid b$ implique que $d \mid pgcd(a, b)$.*

Le résultat suivant permet d'élargir le champ d'application de la proposition 17 (Bezout).

Proposition 18 *Soit :*

$$(ax \equiv b) \bmod m \ , \tag{A.1}$$

une congruence et soit $g = pgcd(a, m)$. Alors on a exactement deux cas :

1. *Si g ne divise pas b la congruence n'a pas de solution.*

2. *Sinon, soient* $a' = a/g$, $b' = b/g$ *et* $m' = m/g$ *et soit* x' *la solution unique de la congruence :*

$$(a'x' \equiv b') \mod m' .$$

Alors les solutions de la congruence (A.1) sont exactement celles de la forme $x' + km'$ *modulo* m.

Preuve. La preuve se décompose dans les étapes suivantes.

1. Si $(ax \equiv b) \bmod m$ a une solution alors $g = pgcd(a, m)$ divise b.
   En effet si $ax - b = km$ alors $ax + (-k)m = b$ et par Bezout $b = l \cdot g$.
2. Si $pgcd(a, m) = 1$ alors la congruence $(ax \equiv b) \bmod m$ a une solution unique modulo m.
   Car a a une inverse modulo m et donc $(x \equiv a^{-1}b) \bmod m$.
3. Si $g \mid b$ alors la congruence dérivée $(a'x \equiv b') \bmod m'$ a une solution unique, disons x'.
   Comme $pgcd(a', m') = 1$ on applique 2.
4. Si $g \mid b$ alors $x' + ym'$ est une solution de $ax \equiv b \bmod m$ pour tout $y \in \mathbf{Z}$.
   On remarque :
   $$a(x' + ym') \equiv ax' + aym' \equiv b + a'ym \equiv b \mod m .$$
5. Si $g \mid b$ et $(ax \equiv b) \bmod m$ alors $(x \equiv x') \bmod m'$.
   Alors $(a'x \equiv b') \bmod m'$ et on sait que la solution est unique modulo m'. □

Exemple 11 *La congruence :*

$$(15x \equiv 3) \mod 10$$

n'a pas de solution car $pgcd(15, 10) = 5 \not| 3$. *D'autre part, la congruence :*

$$(15x \equiv 5) \mod 10 ,$$

a plusieurs solutions dont une est celle de la congruence :

$$(3x \equiv 1) \mod 2 ,$$

à savoir $x = 1$ *; et les autres ont la forme* $(1 + k2)$ *pour* $k \in \mathbf{Z}$, *donc :* $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd de façon efficace.

Proposition 19 *Soient* $a, b \in \mathbf{Z}$. *Alors :*

$$pgcd(a, b) = \begin{cases} |a| & si\ b = 0 \\ pgcd(|b|, a \mod |b|) & autrement. \end{cases} \tag{A.2}$$

Preuve. Si $b = 0$ alors on procède par analyse de cas sur a en se rappelant que $pgcd(0, 0) = 0$. Si $b \neq 0$ on sait (proposition 16) que :

$$a = q|b| + (a \mod |b|) . \tag{A.3}$$

On montre que d divise a et b ssi il divise $|b|$ et $a \bmod |b|$. En effet, si d divise b alors il divise $|b|$. L'équation (A.3) se réécrit comme :

$$a + (-q)|b| = a \mod |b| .$$

Et donc d divise $a \bmod |b|$. D'autre part, si d divise $|b|$ alors il divise b. Et par l'équation (A.3) il divise a aussi. On a donc montré que si $b \neq 0$ alors les couples (a, b) et $(|b|, a \bmod |b|)$ ont les mêmes diviseurs. □

Pas 0	Pas 1	Pas $k \geq 1$ pour $r_k \neq 0$
$r_0 = \|a\|$	$r_1 = \|b\|$	$r_{k+1} = r_{k-1} \mod r_k$
	$q_1 = \lfloor r_0/r_1 \rfloor$	$q_{k+1} = \lfloor r_k/r_{k+1} \rfloor$
$x_0 = 1$	$x_1 = 0$	$x_{k+1} = q_k x_k + x_{k-1}$
$y_0 = 0$	$y_1 = 1$	$y_{k+1} = q_k y_k + y_{k-1}$

Quand $r_k = 0$ on retourne : $pgcd(a, b) = r_{k-1}$, $x = (-1)^{k-1} x_{k-1}$ et $y = (-1)^k y_{k-1}$.

TABLE A.1 – Algorithme d'Euclide modifié

k	0	1			
r_k	100	35			
q_k	_	2			
x_k	1	0			
y_k	0	1			
k	0	1	2		
r_k	100	35	30		
q_k	_	2	1		
x_k	1	0	1		
y_k	0	1	2		
k	0	1	2	3	
r_k	100	35	30	5	
q_k	_	2	1	6	
x_k	1	0	1	1	
y_k	0	1	2	3	
k	0	1	2	3	4
r_k	100	35	30	5	0
q_k	_	2	1	6	
x_k	1	0	1	1	
y_k	0	1	2	3	

TABLE A.2 – Application Euclide modifié avec $a = 100$ et $b = 35$ en 4 étapes

Exemple 12 *En appliquant l'équation (A.2), on calcule :*

$$pgcd(-100, -35) \quad = pgcd(35, 30) \quad = pgcd(30, 5) \quad = pgcd(5, 0) \quad = 5 \ .$$

Par Bezout (proposition 17), on sait que pour tout $a, b \in \mathbf{Z}$ on peut trouver $x, y \in \mathbf{Z}$ tels que $pgcd(a, b) = ax + by$. Il est possible de généraliser l'algorithme d'Euclide pour qu'il calcule les coefficients x, y. La généralisation est décrite à la table A.1. Pour montrer sa correction on peut vérifier la récurrence (détails omis) :

$$r_k = (-1)^k x_k a + (-1)^{k+1} y_k b \ .$$

On peut montrer que l'algorithme d'Euclide termine en $O(min(n, m))$, où min est le minimum et n et m sont les nombre de bits nécessaires à représenter a et b, respectivement.

Un exemple d'application de l'algorithme avec $a = 100$ et $b = 35$ est décrite dans la table A.2.

Exercice 2 *Appliquez l'algorithme d'Euclide modifié pour déterminer x, y tels que $pgcd(91, 143) = 91x + 143y$.*

A.3 Nombres premiers

Définition 18 (nombre premier) *Un nombre naturel $p > 1$ est premier s'il admet comme seuls diviseurs positifs 1 et p.*

Chaque nombre naturel $a > 1$ admet une décomposition unique comme produit de nombres premiers.

Proposition 20 *1. Chaque nombre $a > 1$ a un diviseur premier.*

2. Si un premier divise un produit de nombres alors il divise au moins un des facteurs.

3. Si un nombre premier p divise un produit de nombres premiers $q_1 \cdots q_k$ alors il est égal au moins à un des facteurs.

4. Chaque entier $a > 1$ peut être écrit comme un produit de nombres premiers. Cette représentation est unique à permutation de facteurs près.

PREUVE.

1. Immédiat si a est premier. Sinon soit $p > 1$ le plus petit entier qui divise a ; p doit être premier, car si $b \mid p$ et $p > b > 1$ alors $b \mid a$.
2. On suppose $p \mid ab$ et $p \not| a$. Comme p est premier, $pgcd(p, a) = 1$. Donc, $\exists x, y\ (1 = ax + py\ )$. Ainsi $b = abx + pby$. Mais $p \mid abx$ et $p \mid pby$ implique $p \mid b$.
3. Si $k = 1$ alors $p = q_1$. Si $k > 1$ alors par (2) ou bien $p \mid q_1$ ou bien $p \mid q_2 \cdots q_k$ et l'hypothèse de récurrence s'applique.
4. Pour l'existence, on procède par récurrence sur a. Immédiat pour $a = 2$ et pour $a > 2$ premier. Si $a > 2$ n'est pas premier alors il existe p premier tel que $1 < p < a$ et $p \mid a$. On applique l'hypothèse de récurrence à a/p.
   Pour l'unicité, on procède aussi par récurrence sur a. Immédiat pour $a = 2$. Si $a = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_l$ alors p_1 doit être égal à un des q_i et l'hypothèse de récurrence s'applique à q/p_1. □

Il est facile de voir qu'on dispose d'une infinité de nombres premiers.

Proposition 21 *L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.*

PREUVE. Par contradiction. Si $p_1, \ldots, p_n$ sont tous les nombres premiers alors posons :

$$p = p_1 \cdots p_n + 1\ .$$

p ne peut pas être premier car $p > p_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. D'autre part, si p n'est pas premier il doit être divisible par un nombre premier. Mais ceci est aussi impossible car $p \bmod p_i = 1$. □

Il est plus difficile de montrer que les nombres premiers sont abondants. Ce fait dont la preuve est omise, est connu comme le *théorème des nombres premiers* dont voici un énoncé assez précis.

Fait 5 *Soient $n \geq 2$ et $\pi(n) = \sharp\{p \mid p$ premier et $p \leq n\}$. Alors pour $n \geq 17$ on a :*

$$n/log(n) \leq \pi(n) \leq (1,3)(n/log(n))\ .$$

A.4 Congruences et structure des entiers modulo

Définition 19 (congruence) *Soit $a, b, m \in \mathbf{Z}$ avec $m \geq 1$. On dit que a est congru à b modulo m et on écrit $(a \equiv b) \bmod m$ si $m \mid (a - b)$ (ou de façon équivalente $m \mid (b - a)$).*

Proposition 22 *1. La relation $(\_ \equiv \_) \bmod m$ est une relation d'équivalence.*

2. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $(a \equiv b) \bmod m$, (ii) $a = b + km$, et (iii) $a \bmod m = b \bmod m$.

PREUVE.

1. Réflexivité : $m \mid 0$. Symétrie : $m \mid (a - b)$ implique $m \mid (b - a)$. Transitivité : si $m \mid (a - b)$ et $m \mid (b - c)$ alors $m \mid (a - c)$.
2. (i) implique (ii). $\exists k\ \ km = (a - b)$ implique $a = b + km$. (ii) implique (iii). $a \bmod m = b + km \bmod m = b \bmod m$. (iii) implique (i). On suppose $r = a \bmod m = b \bmod m$, $a = q_1 m + r$, $b = q_2 m + r$. Alors $(a - b) = (q_1 - q_2)m$. □

Notation Dans certains textes, on manipule les classes d'équivalence d'entiers modulo m. Dans ces notes de cours, on préfère prendre un représentant par classe d'équivalence, à savoir les éléments de l'ensemble $\mathbf{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$.

L'ensemble $\mathbf{Z}_m$ équipé avec les opérations d'addition et de multiplication (modulo m) est un anneau.

Proposition 23 *Pour tout m entier, $m \geq 1$ la structure $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$ est un anneau.*

PREUVE. On commence par remarquer que si $(a \equiv b) \bmod m$ et $(c \equiv d) \bmod m$ alors : (i) $(-a \equiv -b) \bmod m$, (ii) $(a + c \equiv b + d) \bmod m$, et (iii) $(ac \equiv bd) \bmod m$. L'entier 0 est l'identité de l'addition modulaire. Par ailleurs, l'addition modulaire est associative, commutative et chaque élément a un élément inverse par rapport à l'addition. A savoir, l'inverse de a modulo m est $m - a$. La multiplication modulaire est aussi associative et commutative avec 1 comme élément neutre. Enfin, on peut vérifier la propriété de distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. A savoir, dans $\mathbf{Z}_m$: $a(b + c) = (ab) + (ac)$. □

On vient de voir que tout élément de $\mathbf{Z}_m$ a une inverse additive. La proposition suivante caractérise les éléments de $\mathbf{Z}_m$ qui ont aussi une inverse multiplicative.

Proposition 24 *La congruence $(ax \equiv 1) \bmod m$ a une solution ssi $pgcd(a, m) = 1$,* c'est-à-dire*, a et m sont premiers entre eux. En plus, la solution, si elle existe, est unique.*

PREUVE. On montre d'abord que si la congruence a une solution alors a et m sont premiers entre eux. Soit $(ax \equiv 1) \bmod m$, c'est-à-dire $(ax - 1) = km$. Soit $g = pgcd(a, m)$. Comme $1 = km - ax$, $g \mid m$ et $g \mid a$, on dérive $g \mid 1$, c'est-à-dire $g = 1$. On montre maintenant que si a et m sont premiers entre eux alors la congruence a une solution. Si $g = 1$ alors $\exists\, x, y \;\; 1 = ax + my$. Donc x est une solution de la congruence. Il reste à montrer l'unicité de la solution. Soit $(av \equiv 1) \bmod m$ une autre solution. Alors $(ax \equiv av) \bmod m$. C'est-à-dire $m \mid (a(x - v))$. Comme $m \not| a$, il suit que $m \mid (x - v)$. Donc $(x \equiv v) \bmod m$. □

Remarque 27 *L'algorithme d'Euclide modifié peut être utilisé pour calculer une inverse multiplicative. En effet si $pgcd(a, m) = 1$ alors on trouve x, y tels que $1 = ax + my$. Donc $m \mid (ax - 1)$.*

On rappelle qu'un corps est un anneau dans lequel tous les éléments non-nuls ont une inverse multiplicative.

Corollaire 3 *L'anneau $\mathbf{Z}_m$ est un corps ssi m est premier.*

PREUVE. Si m est premier alors chaque $a \in \mathbf{Z}_m \backslash \{0\}$ a la propriété que $pgcd(a, m) = 1$. D'autre part, si pour tout $a \in \mathbf{Z}_m \backslash \{0\}$ $pgcd(a, m) = 1$ alors m est premier. □

A.5 Algèbre linéaire

Dans cette section, on rappelle la définition de déterminant et de matrice inverse. Soit R un anneau commutatif avec un élément 0 comme unité de l'addition et un élément 1 comme unité de la multiplication. Pour fixer les idées, on peut prendre comme anneau $\mathbf{Z}_m$, les entiers modulo m. Soit $R[m, n]$ la collection des matrices sur R avec m lignes et n colonnes, avec éléments génériques $A, B, \ldots$ Si A est une matrice alors on dénote avec $A[i, j]$ l'élément avec coordonnées (i, j). L'addition et la multiplication de matrices est définie de façon standard. L'ensemble $R[n, n]$ des matrices carrées de dimension n possède une structure d'anneau.

Définition 20 (déterminant) *Le* déterminant *d'une matrice $A \in R[n,n]$ est défini par récurrence :*

$$det(A) = \begin{cases} A[1,1] & si\ n = 1 \\ \Sigma_{j=1,\ldots,n}(-1)^{i+j} A[i,j] \cdot det(A_{i,j}) & si\ n > 1, \end{cases}$$

où $A_{i,j} \in R[n-1, n-1]$ est la matrice qui résulte de A en effaçant la ligne i et la colonne j.

On sait que le déterminant ne dépend pas du choix de la ligne (ou colonne) $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemple 13 *On calcule le déterminant d'une matrice 2×2. On suppose*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Alors en calculant par rapport à la première ligne :

$$A_{1,1} = [a_{2,2}] \quad A_{1,2} = [a_{2,1}] \ .$$

Donc :

$$det(A) \quad = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot A_{1,1} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot A_{1,2} \quad = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \ .$$

Exercice 3 *Donnez une formule pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3.*

Définition 21 (matrice adjointe) *Soit $A \in R[n,n]$. Alors la matrice adjointe $adj(A) \in R[n,n]$ est définie par :*

$$adj(A)[i,j] = (-1)^{i+j} det(A_{j,i}) \ .$$

Fait 6 *Soit $A \in R[n,n]$. L'inverse multiplicative de A existe si est seulement si $det(A)$ a une inverse (multiplicative) dans R et dans ce cas :*

$$A^{-1} = (det(A))^{-1} \cdot adj(A) \ .$$

Exercice 4 *On prend $R = \mathbf{Z}_{11}$ et*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculez l'inverse de A.

Corollaire 4 *Soient $A \in R[n,n]$, $b \in R[n,1]$ et $F(x) = A \cdot x + b$ une fonction affine sur R^n. La fonction F a une inverse si et seulement $det(A)$ a une inverse en R. En particulier, si $R = \mathbf{Z}_m$ alors F est inversible si et seulement si $pgcd(det(A), m) = 1$.*

Remarque 28 *Pour calculer le déterminant et l'inverse multiplicative de façon efficace on peut utiliser des méthodes qui raffinent l'élimination de Gauss (solution de systèmes d'équations linéaires).*

A.6 Exponentiation rapide

Soit $(G, \cdot, 1_G)$ un *monoïde* avec une opération binaire $\cdot$ qui est associative et commutative et un élément neutre 1_G. Si $g \in G$ et e un *entier positif*, on définit l'exposant g^e par :

$$g^0 \quad = 1_G \qquad g^{e+1} \quad = g^e \cdot g \ .$$

La définition suggère une méthode de calcul de l'exposant qui demande un nombre d'opérations exponentiel dans le nombre de bits nécessaires à représenter e. Il se trouve qu'on peut faire beaucoup mieux !

Proposition 25 (carré itéré) *Soit $k+1$ le nombre de bits dans la représentation en base 2 de e. Alors on peut calculer g^e avec au plus $2k$ opérations.*

PREUVE. Soit

$$e = \Sigma_{i=0,\ldots,k} e_i 2^i \ ,$$

l'*expansion binaire* de e. Les *coefficients* e_i appartiennent à l'ensemble $\{0,1\}$ avec $e_k = 1$ si $e > 0$. On observe :

$$\begin{aligned} g^e &= g^{\Sigma_{i=0,\ldots,k} e_i 2^i} \\ &= \Pi_{i=0,\ldots,k} (g^{2^i})^{e_i} \\ &= \Pi_{0 \le i \le k, e_i = 1} (g^{2^i}) \ . \end{aligned}$$

Pour le calcul de g^e on suit la procédure suivante. D'abord, on *calcule* g^{2^i} pour $0 \le i \le k$. En remarquant que :

$$g^{2^{i+1}} = (g^{2^i})^2 \ .$$

Pour ce faire, k multiplications (calculs du carré) sont nécessaires. Ensuite, on obtient g^e comme le produit des g^{2^i} tels que $e_i = 1$. Dans cette phase, au plus k multiplications sont nécessaires. On peut donc calculer g^e avec au plus $2k$ multiplications. □

Si le monoïde est l'ensemble des nombres naturels avec la multiplication le calcul de l'exponentiel reste exponentiel dans la taille de g et e. La raison est qu'en général le nombre de bits nécessaires pour représenter le résultat d'une multiplication est environ deux fois le nombre de bits nécessaires à représenter les facteurs. Cette situation peut vraiment se présenter car si $g \approx 2^n$ et $e \approx 2^n$ alors $g^e \approx 2^{n2^n}$. Donc le nombre de bits nécessaires à représenter le résultat de l'exponentiation est exponentiel dans le nombre de bits utilisés pour représenter g et e. Ainsi, tant qu'on utilise une représentation standard des nombres, tout algorithme pour calculer la fonction exponentielle prendra un temps exponentiel juste pour écrire le résultat du calcul.

La situation change radicalement si l'on travaille dans $\mathbf{Z}_m$. Dans ce cas, on peut toujours représenter le résultat d'une multiplication avec autant de bits qu'il en faut pour représenter m. On obtient donc un algorithme pour calculer $(g^e) \bmod m$ qui est polynomial en la taille de g, e et m. Par exemple, si la taille de g, e et m est n et si on utilise l'algorithme standard pour multiplier deux nombres, on obtient un algorithme pour le calcul de l'exposant modulaire qui est $O(n^3)$. Un tel algorithme peut traiter les grands nombres (avec un millier de chiffres) qu'on trouve dans les applications cryptographiques.

Exercice 5 *Calculez* $6^{73} \bmod 100$.

A.7 Restes chinois

Considérez le système de congruences :

$$(x \equiv 5) \bmod 7 \ , \quad (x \equiv 3) \bmod 11 \ , \quad (x \equiv 10) \bmod 13 \ .$$

Le théorème des restes chinois affirme que ce système a une solution unique modulo $7 \cdot 11 \cdot 13$ et nous donne une méthode efficace pour la trouver qui est résumée dans la table A.3.

Proposition 26 (restes chinois) *Soient $m_1, \ldots, m_n$ des nombres entiers positifs premiers entre eux et soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres entiers. Alors le* système de congruences *:*

$$(x \equiv a_i) \bmod m_i, i \in \{1, \ldots, n\}$$

a une solution *x qui est* unique modulo $M = m_1 \cdots m_n$.

Entrée :	$(x \equiv a_i) \mod m_i, i = 1, \ldots, n, m_i$ premiers entre eux.
Calcul :	$M = m_1 \cdots m_n, \quad M_i = M/m_i, \quad y_i = (M_i^{-1}) \mod m_i, \quad i = 1, \ldots, n.$
Sortie :	$x = (\Sigma_{i=1,\ldots,n} a_i y_i M_i) \mod M$.

TABLE A.3 – Solution d'un système de congruences

PREUVE. On considère d'abord l'unicité. Si x et x' sont deux solutions du système alors $(x \equiv x')$ mod m_i pour $i = 1, \ldots, n$, par transitivité de la congruence. Comme les m_i sont premiers entre eux, on dérive que $(x \equiv x') \bmod M$. En effet, si $(x - x') = km_1 = k'm_2$ alors les facteurs dans m_1 doivent être dans k'.

Pour l'existence, on pose :

$$M_i = M/m_i, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

On remarque que m_i et M_i sont premiers entre eux. Par l'algorithme d'Euclide, on détermine y_i tels que :

$$(M_i y_i \equiv 1) \mod m_i, \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Ensuite, on pose :

$$x = (\Sigma_{i=1,\ldots,n} a_i y_i M_i) \mod M \ .$$

On dérive :

$$(a_i y_i M_i \equiv a_i) \mod m_i \ .$$

Comme m_i divise M_j pour $i \neq j$ on a $(a_j y_j M_j \equiv 0) \bmod m_i$. Ainsi :

$$(x \equiv a_i y_i M_i + \Sigma_{j \neq i, j=1,\ldots,n} a_j y_j M_j \equiv a_i) \mod m_i, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

□

Exercice 6 *Déterminez x tel que :*

$$(x \equiv 5) \mod 7 \ , \quad (x \equiv 3) \mod 11 \quad \textit{et} \quad (x \equiv 10) \mod 13 \ .$$

Exercice 7 *Montrez que sans l'hypothèse que les modules sont premiers entre eux on n'a pas l'unicité de la solution modulo M.*

Un corollaire du théorème des restes chinois est que l'anneau produit $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}_{m \cdot n}$ si $pgcd(m, n) = 1$. Plus en général, soient $m_1, \ldots, m_n$ des nombres positifs. Alors on peut construire l'ensemble produit :

$$\mathbf{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{m_n} \tag{A.4}$$

et on peut équiper cet ensemble avec des opérations de somme et de produit qui sont l'extension par composante des opérations somme et produit disponibles pour $\mathbf{Z}_{m_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Le lecteur peut vérifier que la structure obtenue est un anneau qu'on appelle *anneau produit.*

Proposition 27 *Si les $m_1, \ldots, m_n$ sont premiers entre eux alors l'anneau produit (A.4) est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}_M$ où $M = m_1 \cdots m_n$.*

PREUVE. On vérifie que la fonction :

$$i : \mathbf{Z}_M \to \mathbf{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{m_n} \ , \quad i(x) = (x \mod m_1, \ldots, x \mod m_n) \ ,$$

est un isomorphisme d'anneaux. La surjectivité correspond à l'existence d'une solution d'un système de congruences et l'injectivité à l'unicité (modulo M). □

Remarque 29 *Le théorème des restes chinois permet aussi de paralléliser les opérations arithmétiques sur $\mathbf{Z}_M$. En effet, si $M = m_1 \cdots m_n$ on peut calculer avec un degré de parallélisme n en $\mathbf{Z}_{m_1}, \ldots, \mathbf{Z}_{m_n}$ et à la fin du calcul on peut retrouver le résultat dans $\mathbf{Z}_M$.*

A.8 Groupe multiplicatif

On collecte un certain nombre de résultats sur les groupes finis et notamment sur le groupe multiplicatif des entiers modulo m qu'on définit dans la suite.

Définition 22 (groupe multiplicatif) *Soit $m \geq 1$ entier. On dénote par $\mathbf{Z}_m^*$ l'ensemble des entiers $n \in \mathbf{Z}_m$ qui ont une* inverse multiplicative. *En d'autres termes :*

$$\mathbf{Z}_m^* = \{a \in \mathbf{Z}_m \mid pgcd(a, m) = 1\} \ .$$

Définition 23 (fonction d'Euler) *La fonction d'Euler ϕ est définie par :*

$$\phi(m) = \sharp \mathbf{Z}_m^* \qquad m \in \mathbf{Z}, m \geq 1 \ .$$

Exercice 8

1. *Montrez que $\mathbf{Z}_m^*$ est un groupe abélien par rapport à la multiplication dans $\mathbf{Z}_m$.*
2. *Calculez $\mathbf{Z}_{12}^*$.*
3. *Calculez $\phi(m)$ pour $m = 1, \ldots, 15$.*
4. *Quelle est la valeur de $\phi(p)$ pour p premier ?*

Le théorème des restes chinois permet de dériver la proposition suivante.

Proposition 28 *Si $m_1, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers positifs et premiers entre eux alors :*

$$\phi(m_1 \cdots m_n) = \phi(m_1) \cdots \phi(m_n) \ .$$

PREUVE. On réutilise la preuve de la proposition 27 pour montrer que $\mathbf{Z}_{m_1}^* \times \cdots \times \mathbf{Z}_{m_n}^*$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_M^*$ où $M = m_1 \cdots m_n$. □

Proposition 29 *Si $n \geq 1$ alors (i) $\phi(n) = n \cdot \Pi_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ et (ii) $n/\phi(n)$ est $O(log(n))$.*

PREUVE. Soit $p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ avec $p_1 < \cdots < p_m$ la décomposition en facteurs premiers de n. Si $m = 1$ alors $n = p^k$ et $\phi(n) = p^k - p^{k-1}$ car il y a p^{k-1} éléments dans $\mathbf{Z}_n$ qui sont divisibles par p. Et on remarque que :

$$p^k(1 - \frac{1}{p}) = p^k(\frac{p-1}{p}) = p^k - p^{k-1} \ .$$

Si $m > 1$ on applique la proposition 28. Pour ce qui est de la borne supérieure, comme $p_i \geq 2$, on doit avoir $m \leq \lceil log_2(n) \rceil$. Par ailleurs on a aussi $p_i \geq i + 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. On remarque que :

$$\frac{p_i}{p_i - 1} = 1 + \frac{1}{p_i - 1} \leq 1 + \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i} \ .$$

Il suit que :

$$\frac{n}{\phi(n)} = \Pi_{p|n} \frac{p}{p-1} \leq \Pi_{i=1,\ldots,m} \frac{i+1}{i} = m + 1 \ .$$

□

Soit G un *groupe abélien fini* avec unité 1. Si $g \in G$ alors g^{-1} dénote son inverse. Pour tout $a \in \mathbf{Z}$ on peut aussi définir l' *exposant* g^a par :

$$g^0 = 1 \quad g^a = gg^{(a-1)} \quad g^{-a} = (g^{-1})^a \text{ où } a > 0 \ .$$

Définition 24 *L'*ordre *de $g \in G$, écrit $ord(g)$, est le plus petit nombre* positif *e tel que $g^e = 1$.*

Exercice 9 *Expliquez pourquoi l'ordre est bien défini (un e positif existe toujours) et déterminez l'ordre de* 2 *dans* $\mathbf{Z}_{13}^*$.

On peut observer que $g^e = 1$ si et seulement si e est un multiple de $ord(g)$.

Proposition 30 *Soit* $g \in G$ *et* $e \in \mathbf{Z}$. *Alors* $g^e = 1$ *ssi* $ord(g) \mid e$.

PREUVE. ($\Leftarrow$) On suppose $n = ord(g)$ et $e = kn$. Alors :

$$g^e = g^{kn} = (g^n)^k = 1 \ .$$

($\Rightarrow$) On suppose $g^e = 1$ et $e = qn + r$ avec $0 \leq r < n$ et $n = ord(g)$. Alors :

$$g^r = g^{e-qn} = g^e(g^n)^{-q} = 1 \ .$$

Mais comme n est le plus petit entier *positif* tel que $g^n = 1$, il faut que $r = 0$. □

Exercice 10 *Soit* $g \in G$ *et* $k, l \in \mathbf{Z}$. *Alors* $g^l = g^k$ *ssi* $(l \equiv k) \bmod ord(g)$.

La définition de l'exposant suggère que si l'on considère toutes les puissances d'un élément $g \in G$ on obtient un sous-groupe de G. On parle du sous-groupe généré par g et l'ensemble des puissances est aussi appelé *orbite*.

Exercice 11 *Soit* $g \in G$. *Montrez que :* $\langle g \rangle = \{g^a \mid a \in \mathbf{Z}\}$ *est un sous-groupe de* G *et que* $ord(g) = \sharp\langle g \rangle$.

Le théorème de Lagrange en théorie des groupes assure que la cardinalité d'un sous-groupe d'un groupe fini divise la cardinalité du groupe.

Proposition 31 (Lagrange) *Soit* H *un sous-groupe d'un groupe fini* G. *Alors* $\sharp H \mid \sharp G$.

PREUVE. Soit H un sous-groupe. On écrit $a \sim b$ si $ab^{-1} \in H$. On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence et que si $c \in H$ alors $ca \sim a$.

Si $a \in G$ alors $[a] = \{c \mid ca^{-1} \in H\}$ dénote sa classe d'équivalence. On remarque que $[1] = H$. Toutes les classes d'équivalence ont la même cardinalité car la fonction $f : [1] \to [a]$ définie par $f(c) = ca$ est bijective. Par exemple, pour la surjectivité :

$$\begin{array}{rcl} b \in [a] & \Rightarrow & a \sim b \\ & \Rightarrow & ab^{-1} \in H \\ & \Rightarrow & ba^{-1} \in H \\ & \Rightarrow & f(ba^{-1}) = b \end{array}$$

Ainsi la cardinalité de H divise la cardinalité de G. □

L'application du théorème de Lagrange au groupe multiplicatif $\mathbf{Z}_m^*$ permet de dériver un résultat connu comme *petit théorème de Fermat* qui est utilisé dans la définition du système à clef publique RSA (chapitre 9).

Corollaire 5 (Fermat) *Soit* m *entier positif et* $a \in \mathbf{Z}_m^*$. *Alors :*

$$(a^{\phi(m)} \equiv 1) \mod m \ .$$

PREUVE. Par la proposition 31 (Lagrange), on sait que $\phi(m)$, la cardinalité du groupe multiplicatif, est un multiple de la cardinalité du groupe généré par a. Donc il y a un entier k tel que :

$$\sharp\mathbf{Z}_m^* = \phi(m) = k \cdot ord(a) = k \cdot \sharp\langle a \rangle \ .$$

Il suit que : $(a^{\phi(m)} \equiv (a^{ord(a)})^k \equiv 1^k \equiv 1) \bmod m$. □

A.9 Test de primalité

Le corollaire 5 suggère une méthode efficace pour *tester* la primalité d'un nombre $n \geq 2$. Choisir $a \in \{2, \ldots, n-1\}$ et vérifier :

$$(a^{(n-1)} \equiv 1) \mod n \tag{A.5}$$

par *exponentiation rapide*. Notez que le test dépend du choix de a. Si le nombre n est premier, il passe le test pour tout choix de a. D'autre part, si pour un choix de a le nombre n ne passe pas le test alors on est sûr qu'il n'est pas premier. Il reste à estimer la probabilité qu'un nombre qui n'est pas premier passe le test. Si cette probabilité est au plus $\epsilon < 1$ alors en répétant le test k fois (avec des choix indépendants de a) on aura que la probabilité de passer les k tests est au plus ϵ^k qui tend vers 0.

La proposition suivante va dans la bonne direction car elle montre que le test échoue chaque fois qu'on tombe sur un nombre qui n'est pas premier avec n.

Proposition 32 *Si a n'est pas premier avec n alors $(a^{n-1} \not\equiv 1) \bmod n$.*

Preuve. Si $pgcd(a, n) \neq 1$ alors $\exists\, k \geq 2 \;\; a = kx, n = ky$. Comme $n - 1 \geq 1$ on a aussi $k \mid a^{n-1}$. Si $(a^{n-1} \equiv 1) \bmod n$ on pourrait dériver $k(x + y) = 1$ avec $k \geq 2$, ce qui est impossible. □

Définition 25 (nombre de Carmichael) *Un nombre composé $n \geq 2$ est un nombre de Carmichael si pour tout $a \in \mathbf{Z}_n$ premier avec n on a :*

$$(a^{n-1} \equiv 1) \mod n \; .$$

On sait qu'il y a une infinité de nombres de Carmichael et qu'ils sont rares. Le plus petit nombre de Carmichael est :

$$3 \cdot 11 \cdot 17 = 561 \; .$$

Exercice 12 *Estimez la probabilité de choisir un élément $a \in \{2, \ldots, 560\}$ qui ne passe pas le test de Fermat, à savoir $(a^{560} \not\equiv 1) \bmod 561$.*

On peut montrer que si n n'est pas premier et n'est pas un nombre de Carmichael alors avec probabilité au moins $1/2$ on tombe sur un a qui ne passe pas le test de Fermat. Dans ce cas, si l'on répète le test 100 fois la probabilité de déclarer un nombre composé premier est au plus 2^{-100}. Il est possible de concevoir des tests de primalité encore plus efficaces et qui n'ont pas de difficultés avec les nombres de Carmichael. La table A.4 présente un test dû à Miller et Rabin [Mil76, Rab80].

Exemple 14 *On prend le plus petit nombre de Carmichael : $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Alors $n - 1 = 560 = 2^4 \cdot 35$. Donc $k = 4$ et $m = 35$. On choisit $a = 2 \in \{1, \ldots, 560\}$ et on calcule :*

$$\begin{array}{ll} (2^{35} \equiv 263) \mod 561 \; , & (2^{2 \cdot 35} \equiv 166) \mod 561 \; , \\ (2^{4 \cdot 35} \equiv 67) \mod 561 \; , & (2^{8 \cdot 35} \equiv 1) \mod 561 \; . \end{array}$$

Ceci est assez pour conclure que 561 est composé.

On va montrer que tout nombre premier passe le test de Miller-Rabin. On a d'abord besoin d'étudier les solutions d'une congruence quadratique.

Proposition 33 *Soit $p \geq 3$ premier. La congruence*

$$(x^2 \equiv 1) \mod p$$

a exactement deux solutions modulo p. A savoir, 1 et -1.

Entrée :	$n \geq 3$, impair et $k \geq 1$, m impair et $(n-1) = 2^k m$.
Test :	choisir $a \in \{2, \ldots, n-1\}$ et vérifier : $(a^m \equiv 1) \mod n$ ou $(a^m \equiv -1) \mod n$ ou $(a^{2m} \equiv -1) \mod n$ ou $\cdots$ ou $(a^{2^{(k-1)}m} \equiv -1) \mod n$.

TABLE A.4 – Test de Miller-Rabin

PREUVE. Clairement 1 et -1 sont deux solutions différentes car $p \geq 3$. Soit maintenant x une solution. Alors :

$$p \mid (x-1) \text{ ou } p \mid (x+1) \ ,$$

et donc $(x \equiv 1) \bmod p$ ou $(x \equiv -1) \bmod p$. □

Proposition 34 *Tout nombre premier $n \geq 3$ passe le test de Miller-Rabin.*

PREUVE. On procède *par contradiction*. On suppose que $n \geq 3$ premier *échoue le test*. Ceci veut dire que :

$$(a^m \not\equiv 1) \mod n \text{ et } (a^m \not\equiv -1) \mod n \text{ et } \cdots \text{ et } (a^{2^{(k-1)}m} \not\equiv -1) \mod n \ .$$

Comme n est *premier*, on sait que $\phi(n) = n-1$. En sachant $(n-1) = 2^k m$, par le petit théorème de Fermat :

$$(a^{(n-1)} \equiv a^{2^k m} \equiv 1) \mod n \ .$$

Il suit que $a^{2^{k-1}m}$ est une *racine carrée* de 1 modulo n. Par la proposition 33, il y a *deux solutions possibles* ($+1$ ou -1) et comme le *test échoue*, on doit avoir :

$$(a^{2^{k-1}m} \equiv 1) \mod n \ .$$

Maintenant, $a^{2^{k-2}m}$ est une *racine* de 1 modulo n. Par un raisonnement similaire on peut conclure que :

$$(a^{2^{k-2}m} \equiv 1) \mod n \ .$$

On itère cet argument jusqu'à $k = 1$, pour obtenir :

$$(a^m \equiv 1) \mod n \ ,$$

ce qui *contredit* l'hypothèse que n échoue le test. □

Fait 7 *Si un nombre n est impair et composé alors l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ contient au plus $(n-1)/4$ nombres qui sont premiers avec n et qui ne témoignent pas du fait que n est composé.*

En d'autres termes, si on répète le test de Miller-Rabin k fois (de façon indépendante) la probabilité de donner une réponse erronée est au plus $1/4^k$. Ce qui veut dire que pour avoir une probabilité d'erreur comparable il faut faire deux tests de Fermat pour chaque test de Miller-Rabin.

A.10 Groupes cycliques et générateurs

Définition 26 *On dit qu'un groupe est* cyclique *s'il y a un élément g qui génère le groupe, c'est-à-dire tel que $G = \langle g \rangle$.*

Il y a une relation surprenante entre la *fonction d'Euler* et le *nombre de générateurs*.

Proposition 35 *Soit G un* groupe fini cyclique. *Alors G a exactement $\phi(\sharp G)$* générateurs.

PREUVE. Soit g un générateur et $pgcd(k,n) = 1$. Alors g^k est un générateur. En effet, par Bezout $\exists\, x, y \;\; kx + ny = 1$. Tout élément de G a la forme g^m pour $0 \leq m < n$ et on remarque $g^m = g^{(kx+ny)m} = g^{kxm} g^{nym} = (g^k)^{xm}$. On note aussi que si g^k est un générateur alors $pgcd(k,n) = 1$. Car on doit avoir $g^{kx} = g^1$. Donc $kx \equiv 1 \bmod n$, soit $pgcd(k,n) = 1$. On peut conclure que G a exactement $\phi(\sharp G)$ générateurs à savoir : $\{g^k \mid 1 \leq k < n, pgcd(k,n) = 1\}$. □

De plus, *cyclicité* et *primalité* sont connectées. Pour illustrer cette connexion on utilise le fait suivant.

Fait 8 *Soit p premier et soit $P(x)$ un polynôme non-nul dans une variable x de degré d. Alors :*

$$\sharp\{y \in \mathbf{Z}_p \mid (P(y) \equiv 0) \bmod p\} \leq d \;.$$

On dit qu'un polynôme non-nul de degré d a au plus d racines distinctes.[1] En particulier, en prenant $p(x) = x^d - 1$ on déduit que :

$$\sharp\{y \in \mathbf{Z}_p \mid (y^d \equiv 1) \bmod p\} \leq d \;. \tag{A.6}$$

Proposition 36 *Si p est premier alors le groupe $\mathbf{Z}_p^*$ est cyclique. Et par la proposition 35 il admet exactement $\phi(p-1)$ générateurs.*

PREUVE. Le groupe multiplicatif $\mathbf{Z}_p^*$ hérite de $\mathbf{Z}_p$ la propriété (A.6). On va montrer que tout sous-groupe G de $\mathbf{Z}_p$ (donc en particulier $\mathbf{Z}_p$) a la propriété suivante :

$$\sharp\{y \in G \mid (y^d \equiv 1) \bmod p\} \leq d \;. \tag{A.7}$$

On procède par récurrence sur $n = \sharp G$.

- $n = 1$. 1 est un générateur.
- n est premier. On sait que pour tout $x \in G$, $ord(x)$ doit diviser n et comme n est premier on a que $ord(x) = n$ pour tout $x \neq 1$.
- n est de la forme q^c pour q premier et $c \geq 2$. Par contradiction. S'il n'y a pas de générateur dans G alors pour tout $x \in G$, $ord(x)$ divise q^{c-1}. Mais on sait que le polynôme $P(y) = y^{q^{(c-1)}}$ a au plus $q^{(c-1)}$ racines dans G. Contradiction.
- $n = n_1 \cdot n_2$ avec $pgcd(n_1, n_2) = 1$. On définit :

  $$H_i = \{x \in G \mid (x^{n_i} \equiv 1)\} \qquad i = 1, 2 \;,$$

  et on vérifie que H_i est un sous-groupe de G qui par ailleurs hérite de G la propriété (A.7). Donc $\sharp H_i \leq n_i < n$ et l'hypothèse inductive s'applique pour conclure que H_i a un générateur g_i (pour $i = 1, 2$). On montre que $g_1 g_2$ est un générateur pour G. D'abord, on remarque que par la proposition 17 (Bezout) :

  $$\exists\, x, y \;\; n_1 x + n_2 y = 1 \;,$$

  et donc pour tout $g \in G$ on a :

  $$(g \equiv g^{n_1 x + n_2 y}) \bmod p \;.$$

  Par ailleurs, comme $\sharp G = n_1 n_2$ on a :

  $$((g^{x n_1})^{n_2} \equiv (g^{y n_2})^{n_1} \equiv 1) \bmod p \;,$$

1. Ceci est vrai pour tout corps, donc en particulier pour un polynôme sur $\mathbf{Z}_p$.

ce qui implique que :

$$(g^{xn_1}) \in H_2 \ , \quad (g^{yn_2}) \in H_1 \ .$$

Ainsi, comme les g_i sont des générateurs pour H_i, on doit avoir i_1, i_2 tels que :

$$(g \equiv g^{n_1 x + n_2 y} \equiv (g^{xn_1})(g^{yn_2}) \equiv g_1^{i_1} g_2^{i_2}) \mod p \ .$$

Il reste à trouver j tel que :

$$((g_1^{i_1} g_2^{i_2}) \equiv (g_1 g_2)^j) \mod p \ .$$

Par la proposition 26 (restes chinois), on peut trouver j tel que :

$$(j \equiv i_1) \mod n_1 \quad (j \equiv i_2) \mod n_1 \ .$$

En d'autres termes, il y a des entiers k_1, k_2 tels que :

$$i_1 = j + k_1 n_1 = i_2 = j + k_2 n_2 \ .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} g_1^{i_1} g_2^{i_2} &\equiv (g_1^{j+k_1 n_1} g_2^{j+k_2 n_2}) \\ &\equiv (g_1^j)(((g_1)^{n_1})^{k_1})(g_2^j)(((g_2)^{n_2})^{k_2}) \\ &\equiv (g_1^j)(g_2^j) \\ &\equiv (g_1 g_2)^j \mod p \ . \end{aligned}$$

□

Exercice 13 *Trouvez tous les générateurs de* $\mathbf{Z}_{13}^*$.

Dans certaines applications cryptographiques, on a besoin de déterminer le générateur d'un groupe $\mathbf{Z}_p^*$ pour p premier. On peut suivre une approche similaire à celle utilisée pour trouver un grand nombre premier. D'abord on s'assure que les générateurs sont abondants dans $\mathbf{Z}_p^*$ et ensuite on conçoit un test efficace pour savoir si un élément de $\mathbf{Z}_p^*$ est un générateur.

Proposition 37 (recherche générateur) *Si $p > 2$ est premier et $a \in \mathbf{Z}_p^*$ alors a est un générateur du groupe multiplicatif si et seulement si $(a^{(p-1)/r} \not\equiv 1) \bmod p$ pour tout r premier tel que $r \mid (p-1)$. En particulier, si l'on sait que $(p-1)/2$ est premier alors on peut tester de façon efficace si a est un générateur.*

Preuve. Par Lagrange (proposition 31), on sait que $ord(a) \mid (p-1)$. Donc si $ord(a) < (p-1)$ alors la décomposition en facteurs premiers de $ord(a)$ doit contenir au moins un facteur premier en moins que $(p-1)$. Si en plus $q = (p-1)/2$ est premier alors $\phi(p-1)$ se décompose en $2 \cdot q$. Donc a est un générateur ssi $(a^2 \not\equiv 1) \bmod p$ et $(a^q \not\equiv 1) \bmod p$. □

Remarque 30 *On sait que les générateurs sont assez abondants dans $\mathbf{Z}_p^*$ car on peut montrer que pour tout p premier il y a au moins de l'ordre de $\sqrt{p}$ générateurs. Mais cela ne suffit pas ! Il faut aussi savoir tester de façon efficace si un élément $a \in \mathbf{Z}_p^*$ est un générateur ; d'où l'intérêt de prendre p tel que $(p-1)/2$ est premier. On note aussi que l'abondance de nombres premiers permet de trouver de façon assez rapide un tel p.*

Définition 27 (logarithme discret) *Soit p premier, g générateur pour $\mathbf{Z}_p^*$. La fonction logarithme discret en base g est une fonction sur $dlog_g : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^*$ définie par :*

$$dlog_g(A) = a \quad \text{si } a \in \{1, \ldots, p-1\} \text{ et } (g^a \equiv A) \mod p \ .$$

De façon équivalente, le logarithme discret en base g est la fonction inverse de la fonction exponentielle en base g :

$$exp_g : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^* \quad exp_g(a) = (g^a) \mod p \ .$$

En effet pour $A, a \in \mathbf{Z}_p^*$ on a que $dlog_g(A) = a$ ssi $(g^a \equiv A) \bmod p$. L'algorithme du carré itéré (proposition 25) nous permet de calculer la fonction exponentielle de façon efficace. Par contre, on ne connaît pas une méthode efficace pour calculer le logarithme discret dans $\mathbf{Z}_p^*$. La fonction exponentielle modulo p est donc candidate à être une fonction à sens unique (définition 12).

Annexe B

Travaux dirigés

B.1 Générateur affine

Le texte chiffré $c = 111\ 101\ 100\ 101\ 101\ 010\ 111$ a été obtenu en effectuant un xor du texte clair p avec une suite z de bits générés en utilisant un générateur basé sur la congruence linéaire :

$$(z_{i+1} \equiv az_i + b) \mod 8 \ .$$

Les entiers z_i ainsi générés sont interprétés comme des nombres à trois bits $b_{i2}b_{i1}b_{i0}$ de façon telle que $z_i = b_{i2} \cdot 2^2 + b_{i1} \cdot 2 + b_{i0}$. Ainsi on aura :

$$\begin{array}{ll} z & = b_{02}b_{01}b_{00}\ b_{12}b_{11}b_{10}\ \cdots\ b_{62}b_{61}b_{60} \\ c & = p \oplus z \end{array}$$

1. On connaît les premiers 9 bits du texte clair p : $p = 100\ 111\ 001\ \cdots$ Déterminez le reste du texte clair.

B.2 Combinaison de systèmes cryptographiques

Pour améliorer la sécurité, une idée naturelle est de *combiner* les systèmes cryptographiques. Comment les combiner et la combinaison est-elle utile ? Une construction standard consiste à prendre le *produit* de deux systèmes cryptographiques. Soient $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ et

$$S_i = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_i, G_i, E_i, D_i) \quad i = 1, 2,$$

deux systèmes cryptographiques. On définit leur produit par :

$$S_1 \times S_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, (G_1, G_2), E, D),$$

avec :

$$E(p, (k_1, k_2)) = E(E(p, k_1), k_2), \quad D(c, (k_1, k_2)) = D(D(c, k_2), k_1) \ .$$

Par exemple, soit S un système par décalage (César) et L un système linéaire défini comme un système affine avec constante additive $b = 0$. Alors le système affine peut être vu comme $L \times S$:

$$E(x, (a, b)) = ((ax) \mod m + b) \mod m = (ax + b) \mod m$$

où $pgcd(a, m) = 1$.

1. On considère le système produit $S \times L$. Le système résultant est-il équivalent à un système connu ?

2. Montrez que le produit de systèmes cryptographiques est associatif.
3. Montrez que le système par décalage et le système linéaire sont idempotents, *c'est-à-dire* $S \times S$ est équivalent à S et $L \times L$ à L.
4. Montrez que si deux systèmes sont idempotents et si leur produit commute alors leur produit est aussi idempotent.
5. Conclure qu'un système affine est idempotent.

B.3 Permutation et Vigenère jetable

1. Dans un système à permutation jetable, pour chiffrer un texte composé de n caractères on utilise une permutation sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Un tel système assure-t-il la confidentialité parfaite ?
2. Pour chiffrer un message composé de n caractères sur l'alphabet $\{A, B, \ldots, Z\} = \mathbf{Z}_{26}$ on utilise un système de Vigenère sur $\mathbf{Z}_{26}$ avec une clef aussi longue que le texte. Un tel système assure-t-il la confidentialité parfaite ?

B.4 Distance statistique et équivalence calculatoire

On dénote avec U_n une v.a.d. avec distribution uniforme sur n bits, à savoir si $w \in 2^n$ alors $P(U_n = w) = 1/2^n$. On dénote avec Y_n une v.a.d. calculée de la façon suivante :

$$Y_n = [x \leftarrow 2^n; y \leftarrow 2^n; \mathsf{if}\ (x = y)\ \mathsf{then}\ 0^n\ \mathsf{else}\ x]$$

On tire n bits x, puis on tire n bits y, si x est identique à y on retourne 0^n (n fois 0), sinon on retourne x. On dénote avec $\{\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{2n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ un PRG qui prend n bits et produit $2n$ bits.

1. Calculez $P(Y_n = w)$ pour $w \in 2^n$.
2. Calculez la distance statistique : $\Delta(U_n, Y_n)$.
3. Les familles $\mathbf{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ et $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sont-elles équivalentes au sens calculatoire ?
4. Estimez la distance statistique : $\epsilon(n) = \Delta(\mathcal{G}_n \circ U_n, U_{2n})$.
5. La fonction $\epsilon(n)$ de la question 4, est-elle négligeable ?

B.5 PRG à sens unique

Soit $\{\mathcal{G}_n : 2^n \to 2^{2n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ un PRG. Soit $\mathcal{I}$ un algorithme PPT d'inversion qui associe n bits à $2n$ bits.

1. Montrez que la fonction :

$$i(n) = P(k \leftarrow 2^n : \mathcal{G}_n(\mathcal{I}(\mathcal{G}_n(k))) = \mathcal{G}_n(k))$$

est négligeable. En d'autres termes, un PRG qui double la taille de son entrée est une fonction à sens unique.

B.6 Mise en gage d'un bit

Un protocole de mise en gage d'un bit (*bit commitment*) réalise l'idée suivante :
— Alice écrit une valeur $b \in \{0, 1\}$ sur un papier et met le papier dans une boite dont elle est la seule a avoir la clef.
— La phase de mise en gage consiste à donner la boite à Bob.
— La phase de révélation consiste à donner la clef à Bob.

En suivant [Nao91], on peut utiliser un générateur pseudo-aléatoire pour réaliser cette idée. Alice et Bob fixent un générateur pseudo-aléatoire

$$\mathcal{G} : 2^n \to 2^{3n}$$

qui transforme n bits en $3n$ bits. Si Alice et Bob ne cherchent pas à tricher le protocole se passe de la façon suivante :

— Bob tire $R \in 2^{3n}$ avec probabilité uniforme et l'envoie à Alice.

— Alice tire $b \in 2$ et $Y \in 2^n$ avec probabilité uniforme, elle calcule :

$$R' = (\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ \mathcal{G}(Y)\ \mathsf{else}\ \mathcal{G}(Y) \oplus R)\ \in\ 2^{3n}$$

et elle envoie R' à Bob. C'est la phase de mise en gage.

— Plus tard, Alice envoie Y à Bob. C'est la phase de révélation.

1. Pour tricher Bob peut choisir un R à sa guise et ensuite essayer de déterminer la valeur de b à partir de R'. Bob a-t-il une chance significative de réussir ?
2. Pour tricher Alice peut envoyer dans la phase de mise en gage un R' tel que

$$(\exists Y\ \ R' = \mathcal{G}(Y)) \vee (\exists Y\ \ R' = \mathcal{G}(Y) \oplus R)$$

et ensuite produire un Y approprié dans la phase de révélation. Alice a-t-elle des chances significatives de réussir ?

3. Proposez un protocole pour jouer à pile ou face au téléphone (section 1.6) qui utilise un protocole de mise en gage.
4. Soit $\mathcal{G}^i(Y)$ le i-ème bit de la séquence $\mathcal{G}(Y)$ et $\mathcal{G}^{\leq i}$ les premiers i bits de la séquence $\mathcal{G}(Y)$, où $1 \leq i \leq 3n$. On considère la variante suivante du protocole de mise en gage :
   — Mise en gage : Alice tire $b \in 2$ et $Y \in 2^n$ et transmet à Bob $\mathcal{G}^{\leq 3n-1}(Y)$ et $\mathcal{G}^{3n}(Y) \oplus b$.
   — Révélation : Alice transmet à Bob Y qui peut donc calculer $\mathcal{G}(Y)$ et vérifier les valeurs transmises dans la phase précédente.

   Supposons que Alice trouve $Y_1, Y_2 \in 2^n$ tels que $\mathcal{G}(Y_1) \neq \mathcal{G}(Y_2)$ et $\mathcal{G}^{\leq 3n-1}(Y_1) = \mathcal{G}^{\leq 3n-1}(Y_2)$ (ce qui est compatible avec la définition de PRG). Montrez que dans ce cas Alice peut tricher.

B.7 Tolérance aux erreurs du mode CBC

On se place dans le cadre du chiffrement en mode CBC (section 5.5).

1. On a une *erreur de transmission* du premier bloc ce qui veut dire que l'émetteur calcule correctement le premier bloc c_1 mais le récepteur obtient un bloc $c'_1 \neq c_1$. Quels blocs seront déchiffrés correctement par le récepteur ?
2. On suppose maintenant que l'émetteur fait *une erreur de calcul* dans le deuxième bloc, ainsi il calcule un bloc c'_2 plutôt que c_2 et le transmet (correctement). Quels blocs chiffrés seront affectés par cette erreur ? Quels blocs de texte clair pourront être calculés par le récepteur, en supposant qu'il n'y ait pas d'erreur de transmission ?

B.8 Feistel faible

On utilise un schéma de Feistel où la clef de tour est toujours la même et la fonction de codage f_k est le xor avec k. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} L_{i+1} & = & R_i \\ R_{i+1} & = & L_i \oplus (R_i \oplus k) \end{array}$$

1. Quelles sont les faiblesses de ce schéma en fonction du nombre de tours ?

B.9 Feistel et PRP

Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions de type $2^n \to 2^n$ et $L_0, R_0 \in 2^n$ alors on définit $\mathit{Feistel}(f_1, \ldots, f_n)(L_0R_0)$, $n \geq 1$ comme la suite de $2n$ bits obtenus en appliquant la construction de Feistel à l'entrée L_0R_0. En particulier on a :

$$\begin{array}{ll} \mathit{Feistel}(f_1)(L_0R_0) & = R_0 \cdot (L_0 \oplus f_1(R_0)) \\ \mathit{Feistel}(f_1, f_2)(L_0R_0) & = (L_0 \oplus f_1(R_0)) \cdot R_0 \oplus f_2(L_0 \oplus f_1(R_0)) \end{array}$$

1. Expliquez pourquoi la fonction $\mathit{Feistel}(f_1, \ldots, f_n)$ est une permutation de type $2^{2n} \to 2^{2n}$.
2. Prenons le cas $n = 1$. Montrez que si l'on choisit f_1 avec probabilité uniforme il est possible de distinguer $\mathit{Feistel}(f_1)$ d'une permutation choisie avec probabilité uniforme.
3. Même question pour le cas $n = 2$.

Pour $n \geq 3$, on peut montrer [LR88] que si les fonctions f_i sont pseudo-aléatoires alors la permutation obtenue est aussi pseudo-aléatoire.

B.10 Mac faibles

Soit $\mathcal{F} : 2^n \to [2^n \to 2^n]$ un PRF. Soit $m = m_1 \cdots m_\ell$ un message avec $m_i \in 2^n$ et ℓ polynomial en n. Dans la suite on considère 3 schémas pour construire un *Mac* ; votre tâche est de montrer qu'aucun de ces schémas est sûr dans le sens de la définition 14.

1. $$\mathit{Mac}^1(m, k) = \mathcal{F}(k)(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}(k)(m_\ell)$$
   où $\oplus$ est le ou-exclusif sur n bits.
2. $$\mathit{Mac}^2(m, k) = [r \leftarrow 2^n : (r, \mathcal{F}(k)(r) \oplus \mathcal{F}(k)(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}(k)(m_\ell))]$$
   où la notation $r \leftarrow 2^n$ veut dire que r est un vecteur de n bits tiré avec probabilité uniforme.
3. $$\mathit{Mac}^3(m, k) = [r \leftarrow 2^n : (r, \mathcal{F}(k)(r) \oplus \mathcal{F}(k)((1)_2 + m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}(k)((\ell)_2 + m_\ell))]$$
   où $(i)_2$ est la représentation en base 2 du nombre naturel i, $+$ est l'addition en base 2 modulo 2^n et on suppose $\ell < 2^{n/2}$.

B.11 Substitution non-linéaire

La substitution S est une fonction qui transforme 4 bits en 4 bits dont on donne ci-dessous la définition (un chiffre hexadécimal = 4 bits) :

Entrée :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Sortie :	*E*	4	*D*	1	2	*F*	*B*	8	3	*A*	6	*C*	5	9	0	7

1. Montrez que cette fonction ne s'exprime pas comme une fonction affine sur $(\mathbf{Z}_2)^4$. Ceci veut dire qu'on ne peut pas trouver une matrice A, de dimension 4×4, et un vecteur b, à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$, tels que :

   $$(\ A(x_3, x_2, x_1, x_0) + b\ )_2 = S(\ (x_3, x_2, x_1, x_0)_2\ ) \quad \text{pour tout } (x_3, x_2, x_1, x_0) \in (\mathbf{Z}_2)^4\ .$$

   Ici on dénote avec $(y_3, y_2, y_1, y_0)_2$ la valeur en base 2 de la suite de bits $y_3y_2y_1y_0$, à savoir $\Sigma_{i=0,\ldots,3}\ y_i \cdot 2^i$.
2. Estimez le nombre de fonctions affines sur $(\mathbf{Z}_2)^4$ et comparez-le au nombre de permutations sur $(\mathbf{Z}_2)^4$.

B.12 RSA faible

1. Programmez une fonction qui prend en entrée un entier positif `x` et qui retourne (s'il existe) un entier y tel que $y^3 = x$ et un entier -1 autrement. Il s'agit donc de calculer (si elle existe) la racine cubique dans $\mathbf{Z}$ (et non pas dans $\mathbf{Z}_n$!).
2. Rappelez les principes du chiffrement hybride à clef publique.

Supposons que pour implémenter le chiffrement hybride on dispose d'un système de chiffrement symétrique avec clef de 128 bits et d'un système RSA avec module $n = p \cdot q$ de 512 bits.

3. Sous quelles hypothèses peut-on choisir un exposant de chiffrement $e = 3$?
4. Supposons que pour le chiffrement RSA on choisit bien un exposant de chiffrement $e = 3$ et que pour le chiffrement hybride on regarde une clef symétrique k comme un entier dans l'intervalle $[0, 2^{128} - 1]$. Montrez que dans ce cas un attaquant a une méthode efficace pour déchiffrer les messages sans connaître la clef de déchiffrement.

B.13 Diffie-Hellman en groupe

Les participants sont identifiés par un élément de $\mathbf{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$. Les participants souhaitent établir une clef commune. Pour chaque couple de participants $(i, j) \in \mathbf{Z}_n^2$ on dispose d'un canal de communication authentifié mais qui n'assure pas la confidentialité des messages échangés. Les participants appliquent une généralisation du protocole de *Diffie-Hellman*.

— Le participant 0 communique à chaque participant un (grand) nombre premier p et un générateur g pour $(\mathbf{Z}_p)^*$.
— Chaque participant choisit de façon indépendante et avec probabilité uniforme un élément $a_i \in \{2, \ldots, p-2\}$.
— A la fin du protocole, la clef commune est :

$$K = A_{\{0,\ldots,n-1\}} = (g^{(\Pi_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} a_i)}) \bmod p$$

1. Proposez un protocole d'échange de valeurs de la forme (I, A_I) :

$$(A_I \equiv g^{(\Pi_{i \in I} a_i)}) \bmod p \qquad I \subset \{0, \ldots, n-1\}$$

avec les objectifs suivants :
— Permettre à chaque participant de calculer la clef K.
— Éviter que l'observation des valeurs échangées (I, A_I) permette à un attaquant de calculer la clef commune K.

2. Explicitez les échanges de valeurs pour le cas où $n = 2$ (trois participants).

B.14 Signature RSA à anneau

On décrit une version simplifiée d'un système de signature qui permet à un ensemble d'utilisateurs $U = \{1, \ldots, m\}$, $m \geq 2$ de signer un message de façon telle que :

— le récepteur du message peut vérifier que le message a bien été signé par un des utilisateurs sans savoir lequel et
— chaque utilisateur peut signer sans la coopération des autres utilisateurs.

Ce qui est demandé est simplement que chaque utilisateur ait une clef publique authentifiée.

On fait les hypothèses suivantes :

— Chaque utilisateur $i \in U$ a une clef publique RSA (e_i, n_i) et une clef privée RSA (d_i, n_i) où n_i est un modulo sur au plus s bits. On écrit $E_i(x)$ pour $(x^{e_i}) \bmod n_i$ et $D_i(y)$ pour $(y^{d_i}) \bmod n_i$.
— On fixe une fonction de hachage $h : 2^* \to 2^s$.

— Soit $t = 2^s$. On définit $E'_i : \mathbf{Z}_t \to \mathbf{Z}_t$ par

$$E'_i(x) = \begin{cases} n_i q + E_i(r) & \text{si } x = n_i q + r, 0 \leq r < n_i, n_i(q+1) \leq t \\ x & \text{autrement} \end{cases}$$

On décrit la signature pour $m = 2$. L'utilisateur $i = 1$ signe un message msg comme suit :
— Il choisit $x_2 \in \mathbf{Z}_t$.
— Il calcule $y_2 = E'_2(x_2)$.
— Il calcule $x_1 = D'_1(h(msg) \oplus y_2)$.
— La signature est $(\{1, 2\}, x_1, x_2)$.
On décrit la vérification pour $m = 2$. On vérifie que :

$$h(msg) = E'_1(x_1) \oplus E'_2(x_2) \ .$$

1. Expliquez pourquoi E'_i, $i = 1, \ldots, m$, est une permutation sur $\mathbf{Z}_t$ et définissez la permutation inverse D'_i.
2. Expliquez pourquoi un message correctement signé passe la vérification.
3. Montrez que si $h(msg) = h(msg')$ alors toute signature pour msg est aussi une signature valide pour msg'.
4. Généralisez le schéma de signature et de vérification à $m > 2$ utilisateurs.

B.15 Signature aveugle

On analyse un protocole de *signature aveugle*. On prend p, q nombres premiers, un module $n = p \cdot q$, un exposant de chiffrement e, et un exposant de déchiffrement d avec les hypothèses standards sur RSA ; $\mathbf{Z}_n^*$ dénote le groupe multiplicatif.

Le participant A utilise ce système RSA pour signer des messages (on utilise la version naïve de la signature RSA sans fonction d'hachage). Le participant B souhaite obtenir la signature d'un document $m \in \mathbf{Z}_n^*$ sans pour autant dévoiler la valeur de m. Pour ce faire, B choisit avec une probabilité uniforme une valeur $r \in \mathbf{Z}_n^*$ et calcule : $m' = (m \cdot r^e) \bmod n$. Ensuite B envoie à A la valeur m', et reçoit en réponse $(m'^d) \bmod n$.

1. Montrez que la fonction $r \mapsto (r^e) \bmod n$ est une permutation sur $\mathbf{Z}_n^*$.
2. Montrez que si $m \in \mathbf{Z}_n^*$ alors $m' \in \mathbf{Z}_n^*$.
3. Montrez que pour chaque choix de $m, m' \in \mathbf{Z}_n^*$ il existe unique $r' \in \mathbf{Z}_n^*$ tel que $(m \equiv r'm') \bmod n$.
4. Soit $P(m)$ la probabilité que le message clair soit m (on suppose $P(m) > 0$ pour tout m). Soit $P(m \mid m')$ la probabilité conditionnelle que le message clair soit m en sachant que le message à signer de façon aveugle est m'. Peut-on déduire que $P(m \mid m') = P(m)$?
5. La réponse à la question précédente, change-t-elle si le message m n'est pas premier avec n ?
6. On suppose maintenant que A utilise le même système RSA pour signer de façon aveugle et pour recevoir des messages. On suppose aussi que B intercepte un message $(m^e) \bmod n$ destiné à A. Comment B peut-il obtenir de A le déchiffrement du message ?

B.16 Routage anonyme

Dites moi avec qui vous parlez et je vous dirai qui vous êtes. En plus de protéger la confidentialité et l'intégrité des messages il faut aussi rendre anonyme la structure des communications. On imagine l'expérience suivante.

— On a n participants $p_1, \ldots, p_n$ avec clefs publiques authentifiées $k_1, \ldots, k_n$ et n sites $s_1, \ldots, s_n$. L'état initial du système est décrit par une permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ qui affecte chaque participant à un site et une fonction $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ qui précise l'interlocuteur de chaque participant. Ainsi $\pi(i) = j$ si et seulement si le participant p_i se trouve au site j et $f(i) = j$ si et seulement si le participant p_i souhaite envoyer 1 message au participant j.

— Un attaquant observe tous les message échangés entre les sites mais il ne peut pas déchiffrer les messages chiffrés avec les clefs publiques des participants. Par exemple, supposons qu'on a 3 participants p_1, p_2, p_3 qui se trouvent aux sites s_1, s_2, s_3 et qui souhaitent communiquer les messages m_1, m_2, m_3 d'après la fonction :

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1 \ .$$

L'attaquant pourra observer une permutation arbitraire des 3 communications :

$$(s_1, m_1, s_2), (s_2, m_2, s_1), (s_3, m_3, s_2)$$

où l'on dénote par le triplet (s, m, s') l'origine du message (s), le message (m) et la destination du message (s').

— On dit qu'un protocole garantit l'*anonymat* si les traces observables par l'attaquant sont invariantes par permutation des participants dans les sites. Considérons l'exemple ci-dessus. Même si les messages m_1, m_2, m_3 sont vides, l'anonymat n'est pas garanti car les traces observables changent si l'on permute, par exemple, le site de p_2 avec le site de p_3.

— Pour essayer de confondre l'attaquant, on introduit un serveur S avec clef publique k_S et on envisage de faire passer tous les messages par S. De plus on envisage d'utiliser de la cryptographie à clef publique.

1. Proposez un protocole qui va utiliser le serveur S pour essayer d'obtenir une communication anonyme. Supposons que i veut envoyer un message m à j. Vous devez préciser la forme des messages que i envoie à S et que S envoie à j. Ce faisant, vous devez aborder les questions suivantes :
   — Quelles sont vos hypothèses sur la taille des messages ?
   — Quelles sont vos hypothèses sur l'ordre temporel de traitement des messages par le serveur ?
   — Combien de messages faut il échanger pour compléter l'envoi des n messages originaux ?
   — Que se passe-t-il si deux message envoyés sont identiques ?
2. En principe un participant j peut recevoir un message anonyme m d'un autre participant i. Modifiez votre protocole de façon à que chaque participant ait la possibilité de répondre à un message anonyme. On fera l'hypothèse qu'un participant i à l'origine d'un message peut insérer dans m de l'information (par exemple une clef de session) qui permettra à j de répondre à i sans pour autant apprendre son identité.

Remarque 31 *Un problème avec l'approche décrite est que maintenant le serveur centralise toutes les conversations et sait exactement qui parle avec qui. Un pas vers la distribution consiste à introduire* 2 *serveurs* S_1 *et* S_2*. Maintenant un message passe de* i *à* S_1*, ensuite de* S_1 *à* S_2 *et enfin de* S_2 *à sa destination finale. Ceci peut être généralisé à* k *serveurs et ces serveurs peuvent être choisis de façon aléatoire (voir par exemple [Cha81]). On parle de routage à oignon (*onion routing*) car le message est encapsulé dans une suite de chiffrements qui sont éliminés au fur et mesure que le message progresse vers sa destination finale. Le navigateur* Tor *qu'on peut facilement installer sur son ordinateur, est un exemple de logiciel qui utilise cette technologie [DMS04].*

B.17 Test pour les résidus quadratiques

Soit $p > 2$ nombre premier. On dit que a dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}_p)^*$ est un résidu quadratique s'il existe $x \in (\mathbf{Z}_p)^*$ tel que $(x^2 \equiv a) \bmod p$. Rappel : $(\mathbf{Z}_p)^*$ est un groupe cyclique avec $\phi(p-1)$ générateurs.

1. Calculez les résidus quadratiques pour $p = 7$.
2. Montrez que si a est un résidu quadratique alors $(a^{(p-1)/2} \equiv 1) \bmod p$.
3. Montrez qu'un générateur de $(\mathbf{Z}_p)^*$ ne peut pas être un résidu quadratique et calculez les générateurs pour $p = 7$.
4. Montrez que si $a \in (\mathbf{Z}_p)^*$ et $(a^{(p-1)/2} \equiv 1) \bmod p$ alors a est un résidu quadratique.

B.18 Entiers de Blum

Un entier de Blum est un nombre entier n tel que $n = p \cdot q$, p et q sont deux nombres premiers différents et $(p \equiv q \equiv 3) \bmod 4$.

1. Trouvez le plus petit entier de Blum.
2. On sait qu'il y a un nombre infini de nombres premiers. Montrez qu'il y a un nombre infini de nombres premiers p tels que $(p \equiv 1) \bmod 4$ ou $(p \equiv 3) \bmod 4$.

   On souhaite montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que $(p \equiv 3) \bmod 4$. On *raisonne par l'absurde*, en supposant qu'il y a un nombre fini de nombres premiers $p_1 < \cdots < p_n$ tels que $(p_i \equiv 3) \bmod 4$. On considère le nombre

$$m = (4p_1 \cdots p_n) - 1$$

3. Montrez que m est impair et que $(m \equiv 3) \bmod 4$.
4. Montrez qu'il doit y avoir un i tel que $1 \leq i \leq n$ et p_i divise m.
5. Dérivez une contradiction.
6. Conclure qu'il y a une infinité d'entiers de Blum.
7. Proposez un algorithme probabiliste qui prend en entrée un entier N et rend comme résultat (s'il termine) un couple p, q tel que $n = pq$, $n \geq N$ et n est un entier de Blum.

Annexe C

Travaux pratiques

C.1 Utilisation de Gnu Privacy Guard

GnuPG est un logiciel *libre* qui met en oeuvre différents aspects de la cryptographie symétrique et asymétrique L'objectif de ce travail pratique est d'apprendre à utiliser le logiciel GnuPG. Le logiciel est disponible à l'adresse `http://www.gnupg.org/` et il est décrit dans le manuel GnuPG disponible à la page `http://www.gnupg.org/documentation/`.

Voici certains points qui vous devriez aborder.

1. Étude des fonctionnalités de base du logiciel (par exemple, voir premier chapitre du manuel). Vous devriez être capable de chiffrer un message et/ou de le signer.
2. GNUPG adopte un modèle pour la gestion des clefs qui est basé sur une *toile de confiance* (voir manuel). Vous devez être capable d'expliquer ce mécanisme.
3. GNUPG offre de nombreuses possibilités d'interface avec d'autres logiciels (par exemples avec des programmes pour la gestion du courrier électronique). Voir `http://www.gnupg.org/related_software/` Vous êtes invités à explorer certaines de ces possibilités.

C.2 Cryptoanalyse de chiffrements affines

Le but de ce TP est de se familiariser avec les programmes disponibles sur le site `http://www.apprendre-en-ligne.net/crypto/menu/index.html` afin d'analyser des textes chiffrés avec des systèmes affines.

Considérez le texte chiffré suivant dont on sait que le texte source est en anglais et que la méthode de chiffrement utilisée est celle de Vigenère.

```
ADSBG VLDQZ CXTZB BJAEL TMVIY XAQWU PLTHB KDTSG SVNPK KCWSN OHFBC
JZNBR ECIFM XAZAX HLEJT UGCRS BBKES UUFLB SPJNW PDQOE ABMPK TIWET
WNKTZ YOTBH SVIAF GQZZF MEGPA AVAET TEOQA YDVFI YJKTG IIOIQ FBXTV
WWXMF CULWE PTEMS UEHRL ZFEPU SGAFS RJCYY QGULA OAYOI JDJXS RMLDR
ECNSW YWROF RSSUT WGXGT ENIND TJCCG BMNRA JSGQC WFHLE AOYAK PTDXO
PWLYF TMPYI ZCSDC UAFMC BCBQO AYDJA BSLJB UWTCI QWIDH MEZXH POADG
ECWNP PEMEV FOESI MBSML TGWZS ZEYOW TTRHF IYOQW WHAGE EQNLT ZEWGK
PVRFB SZCZV MDZSN QAZXG LSPFT TQALY EAMCT MPGRL BTYOV OYGST OQBSP
KHDWA QTRJB SPJTY IRJJB TVZTA XBS
```

1. Les site propose différentes méthodes pour retrouver le texte clair et la clef. Par exemple, la méthode de Babbage/Kasiski et celle basée sur l'indice de coïncidence. Pouvez-vous appliquer ces méthodes au texte en question ?

Le texte ci-dessous a été obtenu par un système cryptographique qui est un produit d'un système par permutation et d'un système de Vigenère (la notion de système produit est décrite dans l'exercice B.2).

2. Considérez un chiffrement par permutation (on dit aussi transposition) d'un texte français. Y-a-t-il une relation entre l'indice de coïncidence du texte clair et du texte chiffré ?
3. Pouvez-vous retrouver le texte d'origine dont on sait qu'il est en français ?

```
RGCRC WOEPD FIQXS OPPDQ VREIV LRRZG OIRAC IHWQR DMOPG OWYLW
EREPD PGRGI XPGPZ TUWGS TELVU EWTUM KQFIG WGUWI OERPP TOIGT
FSXVN ETQHQ QIXTO RTEWE EKGGL TUMGL YVHRC OEWRR PLTJD YFAYW
LRGML YQIVD LVDRF EWWRR GPPIG HRLFW RYPEA HUXGE WEUFC LPXHM
PSLZD VEEGI SWNED EDKPE XYVSO NPXGY TTPVW WGSZY EHGUI EHEWX
DVEVG QTPBE GULXU WDLZG UHGML YEVGL EMVEP LNIVX NABYL IVOXF
HENAC WQZGR WIVYT ESIUF GVPVW WKLDI QXGVL ERYKL PQRVV ODXSV
QCSIU JNAYH HVCPA RVYTU SIUSE EPFLW CIWIQ PDAET HYUQF WMIPE
TEXVC EDHLV GLPTH GIRTR VIOAT FQIUE PVHGJ BYMVI TRTWH HGBZR
QMUSL EWIPL LMUUW CYHOI XOXXH YQIEU OMNNP WDFTI LIUER ADMOP
PPWEL RVBTI UXGNO XHQGN AIQWG NLVOE KTLPX EOEXI DLFUC GQHCL
ESPQG OFIVF VNYIH XUATR VIFAY SWSPP FQPIC OOSUW PNEHH IQMMV
UYUED YHPKQ PIVYP DOIQX PEDEL VVPTI VVGDF IDRID EWDMP LMEVM
EEOIV YJEGI RBFEX KQWGI DRHYT DLMQX FEYMV IWVPX GQGNE RHWCI
CXHQC NTILM CEDXS XUJFW GISUP MHWRA PIQWV EASVW EDPRW IGSEH
WGJRP ULIPS OYHXW TZMVI PRPLR UQRPI YYGDP WDWVE PXHVT CDEYI
CTZMM WWRLM XGQNB ULWGS PYHXK AYXFL SRWIV EWILP HFCRM VIPGU
XMHPG UAIUI RRPWW EWIDW URVEE RLGJE EIVSK IUEPE GSWIS GGDFR
GSWAC MTYGD AIXRG TPVPI UTPTD VCLLJ WEPCP LHPNE CSQXG DZPDR
SSPRW QWEWE HSTTW TQXTE PVHRF SEHDR VLLXH IGEEP UGQEF IOYKD
OWFIP OOIVW RUDYQ ZKNTP UEEOF XDRVE SWXVN VPVEI UECXH RCLWS
DKGPW WFEPT FSXWN ETISI KEESO XHAYI UVGGL ZGEPT LIUWN DRVDR
CEPWS MINPE DRUIQ TLXKL BEUGG EFMOZ GUEUX PEHLV QIOAR SHIVT
DYVWG ADSOH UTDHH QQNLV VIGDT YHRVQ ZIOIP OMPHG UMEIH XVMZV
QIPCZ ETYGR MRWMN CLXVE GOFPS YFEES SWUED WHGJE FIWTQ RCPHY
URPQL SUIZR DJHRP WGMGU YSQKC XEBAB
```

C.3 Vernam faible

On utilise des clés de 8 octets qu'on décompose en 4 groupes de 2 octets $k_0k_1k_2k_3$. On suppose qu'on représente un caractère sur 2 octets. Le chiffrement d'une séquences de $n+1$ caractère $x_0, \ldots, x_n$ est défini par la séquence $y_0, \ldots, y_n$ où : $y_i = x_i \oplus k_{(i \bmod 4)}$.

1. Programmez les fonctions : G pour générer une clef avec une distribution uniforme, E pour chiffrer et D pour déchiffrer. Il doit être possible de visualiser les textes clairs et chiffrés et de tester rapidement ces fonctions.
2. Proposez une méthode de cryptoanalyse qui étant donné un texte chiffré qui correspond à un texte clair en langue naturelle (anglais ou français par exemple), calcule, avec une probabilité de succès significative, la clef et le texte clair.
3. Mettez en oeuvre votre méthode de cryptoanalyse et déterminez de façon expérimentale la longueur minimale d'un texte qui permet à votre programme de mener à bien l'analyse avec une probabilité au moins 1/2.

Remarque 32 *Dans cet exercice il faut exploiter la structure du problème et faire des hypothèses sur le texte clair (anglais/français, pre-traité ou pas). En fonction des hypothèses, on dispose de données statistiques qu'on peut trouver sur internet ou alors calculer directement à partir d'un échantillon significatif.*

Il n'y a pas une solution unique à ce problème. Pensez par exemple au problème du tri. Il y a des dizaines d'algorithmes possibles pour le tri ; certains sont vraiment mauvais (permuter la suite jusqu'à tomber sur une suite ordonnée...), certains sont acceptables (tri à bulles, tri par insertion,...) certains sont très bons (tri par fusion, tri rapide,...). Pour le problème en question on ne vous demande pas de trouver la meilleure méthode possible (en supposant qu'elle existe...) mais juste d'en trouver une raisonnable ; clairement la méthode par force brute qui consiste à énumérer les 2^{64} clefs possibles en fait pas partie.

Concernant l'expérience de la question 3., voici une façon de procéder :

- *On prend un texte T assez long (disons de l'ordre de 10^5 caractères) en langage naturel (pre-traité ou pas).*
- *Pour "prouver" que la méthode marche avec probabilité au moins $1/2$ pour des textes de longueur ℓ, on répète disons 100 fois l'expérience suivante :*
  - *On tire avec probabilité uniforme une clef k.*
  - *On tire avec probabilité uniforme un sous-texte t de longueur ℓ du grand texte T.*
  - *On calcule le chiffrement $c = E(t, k)$.*
  - *On applique la méthode au chiffrément c.*
  - *On vérifie si on a bien retrouvé le texte clair t.*
- *Si la vérification est positive au moins 50 fois sur 100 on a trouvé une longueur ℓ sur laquelle la méthode "marche". Ensuite pour déterminer une longueur minimale on peut procéder par recherche dichotomique ; ou alors juste par énumération en essayant $\ell - 1$, $\ell - 2$,...*

C.4 Réseaux de substitutions et de permutations

Pour chaque $k \in 2^{16}$ on va définir une fonction

$$\mathcal{F}(k) : 2^{16} \to 2^{16}$$

en utilisant des réseaux de substitutions et de permutations.

Substitution On utilise la première ligne de la première boite de DES qui est une fonction $S : 2^4 \to 2^4$ spécifiée par le tableau suivant :

Entrée :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Sortie :	E	4	D	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

Permutation Comme permutation on utilise une fonction $P : \{1, \ldots, 16\} \to \{1, \ldots, 16\}$ qui est spécifiée par le tableau suivant :

Entrée :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Sortie :	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15	4	8	12	16

La permutation agit comme un commutateur : elle prend 16 bits en entrée, melange ces 16 bits et les reproduit tels quels en sortie. On remarquera que la permutation inverse de P est P.

Clef Une clef k est aussi sur 16 bits. La clef K_i du tour i pour $i = 1, 2, 3, 4$ est obtenue en effectuant $4 * (i - 1)$ décalages circulaires vers la droite de la clef k. Ainsi si $K = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ et $x_i \in 2^4$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, on aura :

$$\begin{aligned} K_1 &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ K_2 &= x_4 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ K_3 &= x_3 \cdot x_4 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ K_4 &= x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Tour Le chiffrement se décompose en 4 tours. Le tour i, pour $i = 1, 2, 3, 4$ consiste à transformer un bloc $x = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$, où $x_i \in 2^4$ comme suit :

$$\begin{array}{lcll} (y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4) & = & (x \oplus K_i) & \text{(XOR avec la clef)} \\ (w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4) & = & (S(y_1) \cdot S(y_2) \cdot S(y_3) \cdot S(y_4)) & \text{(Substitution)} \\ z & = & P(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4) & \text{(Permutation)} \end{array}$$

1. Programmez les fonctions $\mathcal{F}(k)$ et leur inverse.
2. Considérez $\mathcal{F}$ comme un PRF (*pseudo-random function generator*) pour des fonctions de type $2^{16} \to 2^{16}$. Pour traiter des textes de longueur arbitraire, programmez les fonctions de chiffrement et déchiffrement en mode compteur (*counter mode*).
3. Supposons qu'on chiffre les messages m_i, $i = 1, \ldots, \ell$ où chaque message est composé de 100 caractères. On aura donc pour $m_i = m_{i,1} \cdots m_{i,100}$:

$$E(m_i, k) = [r \leftarrow 2^{16} : (r, m_{i,1} \oplus \mathcal{F}(k)(r+1), \ldots, m_{i,100} \oplus \mathcal{F}(k)(r+100))]$$

où l'addition est effectuée modulo 2^{16}. Déterminez de façon expérimentale une valeur de ℓ qui, étant donné le chiffrement d'un texte de 100 caractères, permet de calculer (au moins) un caractère du texte clair (presque toujours).

Remarque 33 *La question 3. démande d'analyser dans un cas concret l'attaque sur le mode compteur décrit dans la section 5.3. On est dans le cadre de la confidentialité CPA ce qui implique que l'attaquant peut chiffrer un certain nombre de messages et une attaque est possible si on tire un nombre aléatoire 'assez proche' de celui visible dans le message qu'on veut analyser. Il s'agit donc d'abord de déterminer ce que 'assez proche' veut dire et ensuite d'effectuer une simulation pour estimer la valeur de ℓ. Notez que pour effectuer la simulation on n'a pas vraiment besoin des fonctions évoquées dans les questions 1. et 2. En fonction des vos connaissances de calcul de probabilité, il est aussi possible d'obtenir une estimation par des moyens analytiques.*

C.5 RSA

Dans ce TP et les suivants il convient d'utiliser un langage de programmation qui dispose d'un type de données 'entiers de taille illimitée' ; c'est le cas du langage python3 (type int) et du langage Java à condition d'utiliser la classe `Biginteger`.[1] Alternativement, on peut utiliser un langage comme C combiné avec une librairie pour l'arithmétique comme GMP[2].

Programmez :

1. Un testeur de primalité type Miller-Rabin.
2. Les fonctions RSA pour générer les clefs, chiffrer et déchiffrer.
3. Une méthode de chiffrement/déchiffrement asymétrique hybride qui combine la méthode RSA avec le PRF $\mathcal{F}$ programmé dans le cadre des réseaux de substitution-permutation. Notez qu'on peut utiliser le PRF comme un PRG et définir :

$$E^{hyb}(m_1 \cdots m_\ell, pk) = [k \leftarrow 2^{16} : (E^{RSA}(k, pk), \mathcal{F}(k)(1) \oplus m_1, \ldots, \mathcal{F}(k)(\ell) \oplus m_\ell)] \ .$$

On va maintenant remplacer la fonction $\mathcal{F}$ de la question 3. avec une mise en oeuvre de la fonction AES sur 128 bits $\mathcal{AES} : 2^{128} \to 2^{128}$. Il est facile de trouver une telle mise en oeuvre pour les langages évoqués ci-dessus.[3]

1. `http://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/math/BigInteger.html`
2. `https://gmplib.org/`
3. Voir, par exemple, `https://en.wikipedia.org/wiki/AES_implementations`.

4. On suppose que le texte clair est une suite d'octets $m_1 \cdots m_\ell$, $m_i \in 2^8$, $i = 1, \ldots, \ell$. Mettez en oeuvre le bourrage suivant du texte clair (qui s'inspire du standard PKCS5) : si ℓ est un multiple de 16 alors on ajoute 16 octets qui contiennent le nombre 16 et si $\ell = k \cdot 16 + r$ avec $0 < r < 16$ alors on ajoute $(16 - r)$ octets qui contiennent le nombre $(16 - r)$. Notez qu'après bourrage le texte clair contient un nombre d'octets qui est un multiple de 16 et que le dernier octet indique le nombre d'octets ajoutés par le bourrage.
5. Reprogrammez le chiffrement hybride de la question 3. en remplaçant la fonction $\mathcal{F}$ par la fonction $\mathcal{AES}$ et en utilisant le bourrage de la question 4.
6. On suppose maintenant qu'au lieu de AES on utilise une fonction DES dont la clef est sur 56 bits. On suppose aussi que dans la génération de la clef RSA on cherche deux nombres premiers différents p et q tels que $2^{56} \leq pq \leq 2^{57}$. Cherchez en ligne une mise en oeuvre d'un algorithme de factorisation et utilisez-le pour factoriser pq (un algorithme simple comme l'algorithme de Pollard fera l'affaire).

C.6 Pseudo-primalité

On sait que si un nombre n est *premier* alors pour tout $a \in \{2, \ldots, n-1\}$ on a $(a^{n-1} \equiv 1) \bmod n$ (test de Fermat). On dit qu'un nombre $n \geq 2$ est un *pseudo-premier* si :

$$\forall\, a \in (Z_n)^* \ \ (a^{n-1} \equiv 1) \ \bmod n$$

L'ensemble des *témoins* pour n est défini par :

$$T_n = \{a \in (Z_n)^* \mid (a^{n-1} \not\equiv 1) \ \bmod n\}$$

On définit aussi $T_n^c = (Z_n)^* \backslash T_n$. Notez que n est pseudo-premier si et seulement si il n'a pas de témoin ($T_n = \emptyset$). Le but est de montrer qu'on peut construire un programme probabiliste efficace pour décider si un nombre est pseudo-premier. Soit $n \geq 2$. Montrez que :

1. Si $a \in \mathbf{Z}_n \backslash \mathbf{Z}_n^*$ alors $(a^{n-1} \not\equiv 1) \bmod n$.
2. Si $a \in T_n$ et $d \in T_n^c$ alors $((ad) \bmod n) \in T_n$.
3. Si $a \in T_n$, $d, d' \in T_n^c$ et $d \neq d'$ alors $(ad \not\equiv ad') \bmod n$.
4. Conclure que si n n'est pas pseudo-premier alors au moins la moitié des éléments de $(Z_n)^*$ sont des témoins pour n.
5. Dérivez un algorithme probabiliste qui décide si un nombre $n \geq 2$ est pseudo-premier avec une probabilité d'erreur d'au plus 2^{100}. Pour estimer la probabilité d'erreur, on peut utiliser la proposition 29 et pour simplifier les calculs supposer que $n/\phi(n) \geq log_2(n)$.
6. Programmez et testez l'efficacité de l'algorithme.

C.7 Calcul du logarithme discret

Soit p premier et g un générateur pour le groupe multiplicatif $(Z_p)^*$ dont l'ordre est $p - 1$. Soit $t = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$. On cherche à concevoir un programme pour calculer le logarithme discret en base g dont le temps de calcul est $O(t \log t)$ en supposant que le opérations arithmétiques modulo p prennent $O(1)$. Le programme prend en entrée $y \in (Z_p)^*$ et calcule l'unique $x \in (\mathbf{Z}_p)^*$ tel que $(g^x \equiv y) \bmod p$. Dans la suite les calculs se font modulo p.

1. Donnez la complexité asymptotique en fonction de t d'un programme qui calcule et trie la séquence :
$$g^0, g^t, g^{2 \cdot t}, \ldots, g^{(t+1) \cdot t}$$

2. Montrez qu'en $O(t \log t)$ on peut calculer la séquence :

$$y \cdot g^0, y \cdot g, \cdots, y \cdot g^{(t-1)}$$

et ensuite déterminer i et k tels que :

$$(y \cdot g^i \equiv g^{k \cdot t}) \tag{C.1}$$

3. Expliquez comment utiliser l'équation (C.1) pour calculer x.
4. Programmez l'algorithme et comparez sa performance en pratique avec le programme naïf qui calcule la séquence :

$$g^1, g^2, \ldots, g^{p-1}$$

jusqu'à trouver x tel que $(g^x \equiv y) \bmod p$.

C.8 Compression, hachage et signature RSA

1. Utilisez le chiffrement à bloc $\mathcal{F}(k) : 2^{16} \to 2^{16}$ de la section C.4 pour mettre en oeuvre une fonction de compression $c : 2^{16} \times 2^{16} \to 2^{16}$ en suivant le schéma de Davies-Meyer (section 10.3).
2. Utilisez la construction de Merkle-Damgård (section 10.2) pour mettre en oeuvre une fonction de hachage $h : 2^* \to 2^{16}$ en supposant que le message à hacher est constitué d'au plus $2^{16} - 1$ blocs de 16 bits. On prendra comme vecteur d'initalisation $0 \cdots 0$.
3. Adaptez les fonctions de chiffrement RSA développées dans la section C.5 pour programmer une fonction pour signer et vérifier la signature de messages dont la taille est compatible avec les hypothèses faites sur la fonction de hachage.
4. Reconsidérez les questions 1–3 en utilisant un chiffrement à bloc AES sur 128 bits (on adaptera le travail effectué pour les questions 4 et 5 de la section C.5).

C.9 Un autre protocole de mise en gage

Avant de partir pour une île paradisiaque sans connexion internet, le cryptographe en chef de l'entreprise CSUR vous demande de mettre en oeuvre le protocole de mise en gage qu'il décrit et justifie de façon assez sommaire comme suit.

Le protocole comporte deux participants A et B qui ne se font pas confiance. A et B communiquent sur un canal sûr (pas d'attaquant actif, pas de problèmes d'authentification) et il comporte 3 communications.

1. B envoie à A un triplet de nombres naturels (p, g, h) et il prétend qu'il s'agit d'un nombre premier p tel que $p = 2 \cdot q + 1$ et q est aussi premier, d'un générateur g pour $\mathbf{Z}_p^*$ et d'un élément $h \in \mathbf{Z}_p^* \backslash \{1\}$ tel que $(h^q \equiv 1) \mod p$.
2. A la réception du triplet (p, g, h), A peut effectuer des vérifications et si le triplet passe ces vérifications elle peut mettre en gage une valeur $x \in \mathbf{Z}_q$ en calculant la valeur c suivante qu'elle envoie à B :

$$c = [y \leftarrow \mathbf{Z}_q : (g^{2y} \cdot h^x) \mod p]$$

3. Plut tard A peut révéler la valeur x de sa mise en gage en envoyant le couple (x, y) à B qui vérifie que la valeur c reçue dans la deuxième communication satisfait bien :

$$c = (g^{2y} \cdot h^x) \mod p$$

Il est facile de vérifier que :

1. Si A vérifie bien que le triplet a les propriétés énoncées par B alors B ne pourra pas déterminer la valeur mise en gage à partir de la valeur c communiquée par A.
2. A peut trouver (x, y) et (x', y') tels que $x \neq x'$ et

$$(g^{2y} \cdot h^x \equiv g^{2y'} \cdot h^{x'}) \mod p$$

ssi A sait calculer $\log_g h$.

Voici donc les fonctions que je vous demande de mettre en oeuvre (les deux dernières sont triviales).

1. La fonction genB que B utilise pour générer le triplet (p, g, h).
2. La fonction verifA que A utilise pour vérifier le triplet (p, g, h) reçu par B.
3. La fonction commitA que A utilise pour calculer la mise en gage d'une valeur à partir du triplet vérifié.
4. La fonction revealA que A utilise pour révéler la valeur mise en gage.
5. La fonction verifB que B utilise pour vérifier la validité de la mise en gage.

Le département de cryptoanalyse pourra exhiber une faille de sécurité de votre mise en oeuvre en programmant des variantes des fonctions utilisées par A (ou par B) qui permettent à A (ou à B) de tricher. Ici une faille significative est une faille qu'on peut reproduire sur mon ordinateur bon marché en quelques secondes ; nul besoin de se soucier des attaques de la NSA...

C.10 Partage de secret

On souhaite partager un secret s parmi m agents. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, m\}$ reçoit une part s_i du secret. Il faut une coalition d'au moins $k+1$ agents $2 \leq k+1 \leq m$ pour reconstituter le secret alors que toute coalition d'au plus k agents n'obtient aucune information utile sur s.

Si $k+1 = m$ alors l'ou exclusif permet de satisfaire ces conditions. On suppose que $s \in 2^n$ est un vecteur de n bits. Pour créer les parts on tire avec probabilité uniforme et de façon indépendante $x_2, \ldots, x_m$ dans 2^n et on définit les parts comme suit :

$$s_1 = s \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_m \quad s_2 = x_2 \quad \cdots \quad s_m = x_m$$

Une coalition de m agents peut calculer le secret car :

$$s = s_1 \oplus \cdots \oplus s_m$$

1. Soient $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ et $\sharp I < m$. Soit $(Secret = y)$ l'évenement où le secret est y et $(Part_i = y_i)$ l'évenement où la part de l'agent i est y_i. En adaptant l'approche utilisée pour définir la confidentialité parfaite, montrez que l'information sur les parts ne donne aucune information sur le secret. A savoir :

$$P(Secret = y \mid Part_i = y_i \quad \text{pour } i \in I) = P(Secret = y) \ .$$

Pour traiter la situation où $k + 1 < m$ une nouvelle idée semble nécessaire. On décrit un mécanisme proposé par Shamir [Sha79] qui utilise des propriétés classiques des polynômes. On suppose maintenant qu'on travaille sur $\mathbf{Z}_p$ avec p nombre premier, que $m < p$ et que le secret s est un élément de $\mathbf{Z}_p$. On sait que $\mathbf{Z}_p$ est un corps avec l'addition et la multiplication modulo p et on considère les polynômes (en une variable) sur $\mathbf{Z}_p$ de dégré au plus k. Un tel polynôme $p(x)$ est détermine par $k + 1$ coefficients $a_0, \ldots, a_k$ de sorte que :

$$p(x) = \Sigma_{i=0,\ldots,k} \ a_i x^i$$

D'autre part, si on connaît le polynôme en $k+1$ points $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$, où $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, alors on peut utiliser la formule de Lagrange pour exprimer le polynôme :

$$p(x) = \Sigma_{i=0,\ldots,k}\ y_i \frac{\Pi_{j\neq i}(x - x_j)}{\Pi_{j\neq i}(x_i - x_j)}\ . \tag{C.2}$$

Pour partager le secret s, on commence par définir les coefficients d'un polynôme $p(x)$ de la façon suivante : on pose $a_0 = s = p(0)$ et on tire avec probabilité uniforme et de façon indépendante les coefficients $a_1, \ldots, a_k$ dans $\mathbf{Z}_p$. Ensuite, on définit la part de l'agent i par :

$$s_i = p(i) \quad i = 1, \ldots, m\ .$$

Soit maintenant $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ avec $\sharp I = (k+1)$ une coalition d'agents. Ces agents connaissent $p(i) = s_i$ pour $i \in I$ et en appliquant la formule (C.2) ils peuvent calculer $p(0) = s$. En effet on a :

$$s = p(0) = \Sigma_{i\in I}\ s_i \frac{\Pi_{j\neq i}(-j)}{\Pi_{j\neq i}(i - j)}$$

2. Programmez une fonction generate qui prend en entrée le nombre d'agents m et le seuil k et retourne un nombre premier p adapté et les coefficients du polynôme.
3. Programmez une fonction distribute qui prend en entrée les paramètres m et k, la sortie de la fonction generate et un secret s et génère les parts de secret s_i pour les agents.
4. Programmez une fonction coalition qui prend en entrée le nombre premier p, le paramètre k et une liste avec au moins $k+1$ couples de la forme (i, s_i) où i est un agent et s_i sa part de secret et calcule le secret s.
5. Montrez que le fait de connaître le polynôme $p(x)$ sur au plus k points parmi les points $1, \ldots, m$ ne donne aucune information sur la valeur de $p(0)$. A savoir il s'agit de montrer que pour $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ et $\sharp I \leq k$ on a :

$$P(p(0) = s \mid p(i) = s_i, i \in I) = P(p(0) = s)\ .$$