HAL open science

Hydrogéologie L3-Terre & Environnement

François Métivier

▶ To cite this version:

François Métivier. Hydrogéologie L3-Terre & Environnement. Licence. France. 2018. cel-01877908v1

HAL Id: cel-01877908

https://hal.science/cel-01877908v1

Submitted on 20 Sep 2018 (v1), last revised 7 Mar 2024 (v11)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hydrogéologie
L3-Terre & Environnement

François Métivier

UFR STEP-IPGP.

20 septembre 2018

CC BY SA

Table des matières

I Notes de cours **7**

1 L'eau dans le sol **9**
1.1 La porosité . . . 9
1.2 Contenu en eau et saturation . . . 11
1.3 Les nappes . . . 11

2 Hydrostatique **13**
2.1 Pression et équation de l'hydrostatique . . . 13
2.1.1 Pression dans un fluide . . . 13
2.1.2 Équation de l'hydrostatique . . . 14
2.2 Charge . . . 15
2.3 Piézométrie . . . 15
2.4 Application au milieu souterrain . . . 16

3 Conservation de la masse **17**
3.1 Écoulement dans un tube . . . 17
3.2 Conservation de la masse dans un élément de volume . . . 18

4 Ecoulements en milieu saturé **21**
4.1 Loi de Darcy . . . 21
4.2 Equation de Laplace . . . 22
4.3 Équipotentielles et lignes de courant . . . 23

5 Ecoulements confinés et non confinés **25**
5.1 Écoulement dans une nappe captive . . . 25
5.2 Écoulement dans une nappe libre, hypothèse de Dupuit . . . 27

6 Écoulements autour d'un puits **29**
6.1 Écoulement radial et uniforme dans une nappe . . . 29
6.1.1 Cas d'une nappe captive . . . 30
6.1.2 Cas d'une nappe libre . . . 30
6.2 Loi de Darcy et débit d'un puits . . . 31
6.3 Rabattement et importance des puits . . . 32

7 Polluants **35**
7.1 Conservation de la masse d'un élément soluble dans un volume élémentaire . . . 35
7.2 Advection et diffusion moléculaire . . . 35
7.3 Équation de dispersion et nombre de Peclet . . . 36
7.4 Solutions en régime permanent . . . 36
7.4.1 $Pe >> 1$ . . . 36
7.4.2 $Pe << 1$ . . . 36
7.4.3 $Pe \sim 1$ . . . 36

II Applications 39

8 Sols et eau 41
8.1 Étude d'un sol . . . 41
8.2 Piézométrie . . . 41

9 Loi de Darcy 43
9.1 Écoulements simple (1D) . . . 43
9.2 Écoulements autour d'un puit . . . 43
9.3 Le problème du filtre à café . . . 43

10 Ecoulements plans 45
10.1 Écoulement dans le plan vertical . . . 45
10.1.1 Ecoulement en nappe libre . . . 45
10.1.2 Nappe captive . . . 45
10.1.3 Nappe côtière, biseau salé . . . 46
10.1.4 Equation de la diffusivité . . . 46
10.2 Écoulement dans le plan horizontal . . . 46
10.2.1 Calcul d'un vecteur vitesse . . . 46
10.2.2 Écoulement axisymétrique autour d'un puit . . . 46
10.2.3 Alimentation en eau potable . . . 47
10.2.4 Réfraction des vitesses . . . 47

11 Lignes et fonction de courant 49

12 Problèmes 51
12.1 Stockage de Fontsante . . . 51
12.1.1 Écoulements . . . 51
12.1.2 Pollution par solubilisation . . . 51
12.2 Nappe de Beauce . . . 52
12.3 Plateau de Saclay . . . 52
12.3.1 Analyse de la carte . . . 52
12.3.2 Etude des écoulements le long d'une coupe . . . 56
12.3.3 Pollution par infiltration . . . 56
12.4 Lacs du Médoc . . . 56
12.4.1 Hydrogéologie des formations sableuses . . . 56
12.4.2 Biseau salé . . . 57
12.5 Lacs de Biscarosse . . . 57
12.6 Nappe de Champigny . . . 57

13 Bilans et échanges entre réservoirs 63
13.1 Bilan global et temps de résidence . . . 63
13.2 Pollution ponctuelle d'un réservoir . . . 63
13.3 Pollution d'un lac : régimes stationnaire et transitoire . . . 63

III Annexes 65

A Fonction courant 67
A.1 Définition . . . 67
A.2 Propriétés . . . 68

B Coordonnées cylindriques 69
B.1 Gradient d'une fonction . . . 69
B.2 Divergence d'un vecteur . . . 70

Cadre du cours

Ce cours n'est pas un cours d'hydrogéologie tel qu'on l'enseigne habituellement à votre niveau. Il ne décrit ni l'ensemble des écoulements observés en milieu souterrain, ni les méthodes d'étude et de suivi des nappes. Pour un tel cours on se reportera à [6] ou [8] ou, mieux encore, au livre de Freeze et Cherry[7] [1].

Dans ce qui suit je vous propose d'aborder l'étude des écoulements dans un milieu poreux simple. Toutes les équations et développements du cours reposent sur les hypothèses suivantes.

1. Le milieu est **isotrope** : une propriété P du milieu (porosité, perméabilité, distribution de grains) est la même dans les trois directions principales de l'espace $P(x) = P(y) = P(z)$. Quand le milieu est anisotrope ses propriétés prennent la forme d'un tenseur.
2. Le milieu est **homogène** : la même propriété ne dépend pas de la position $\partial_i P = 0$.
3. **La densité du fluide que l'on étudie (l'eau) est constante**. Elle ne dépend ni de la température ni de la pression. Elle n'est en outre pas modifiée par un mélange avec des éléments ou fluides miscibles
4. **Nous ne considérerons quasiment pas la zone dite non saturée du sol** dans lequel les vides sont occupés par un mélange de fluide et de gaz
5. De façon générale nous considérerons les milieux dans lesquels se produisent des écoulements souterrains comme des **milieux granulaires** dans lesquels les vides sont tous connectés entre eux.
6. Enfin nous considérerons toujours des écoulements stationnaires (ou permanents). Nous n'étudierons pas les variations dans le temps des écoulements.

Maglré toutes ces simplifications nous verrons que les connaissances acquises vous permettront d'aborder au premier ordre et de façon raisonnée de nombreux problèmes d'hydrogéologie. Des références plus avancées ou historiques sont données en bibliographie.

Ce cours est gratuit et distribué sous une Licence Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported. Il ne vient avec aucune garantie de quelque sorte et ni moi-même, ni mon université, ni mon institut de recherche ne saurions être tenus responsables des effets indésirables de toute mauvaise utilisation ou mauvaise compréhension de ces notes et de leur contenu. Je serai heureux de recevoir vos commentaires et suggestions.

1. Une version gratuite de ce classique est en ligne au http://hydrogeologistswithoutborders.org/wordpress/original-groundwater-by-freeze-and-cherry-1979-now-available-online/.

Première partie

Notes de cours

1
L'eau dans le sol

1.1 La porosité

Aucun sol ou roche n'est totalement compact. il existe toujours des fissures ou des trous, que nous nommerons indifféremment des **pores**. Ceux-ci peuvent former un réseau dans lequel cohabitent différents fluides (air, eau, hydrocarbures par exemple).

Porosité totale

Soit un volume de sol ou de roche V_s. La **porosité totale** d'une roche est la proportion du volume V_s occupé par de l'air ou un autre fluide.

$$\omega = \frac{V_{vides}}{V_s} \tag{1.1}$$

La table 1.1 donne des exemples de valeurs de la porosité totale de différents matériaux.

Porosité efficace

Soit un sol, ou un matériau granulaire, de volume V_s dont les pores sont tous remplis d'eau. On suppose que les pores sont connectés et définissent un réseau permettant la circulation de fluides. Les molécules d'eau situées a proximité des grains interagissent avec eux et forment sur le pourtour des pores une fine couche d'eau dite de rétention (on distingue l'eau adsorbée et l'eau pelliculaire cf figure 1.1) qui ne bouge pas sous l'effet de la gravité. Le volume correspondant à cette couche adsorbée est appelé le **Volume (d'eau) lié(e)** et noté V_l. Cette couche à une épaisseur de l'ordre de grandeur du micron.

Une circulation des fluides sous l'effet de la gravité ou d'un gradient de pression, ne pourra avoir lieu que dans la partie des vides où les forces d'interactions moléculaire sont faibles et négligeable, au-delà de la couche de rétention. Nous appelerons le volume où une telle circulation peut avoir lieu le **volume (d'eau) libre** et noté V_g. Par conservation on a

$$\omega = \frac{V_l + V_g}{V_s} \tag{1.2}$$

Matériau	Porosité Totale %
Quartzite	0.6
Granite et gneiss non altérés	0.02 - 1
Schistes, ardoises	0.5 - 7
Calcaires, Dolomies primaires	0.5 - 12
Dolomies secondaires	10 - 30
Craie	8 - 37
Grès	3.5 - 38
Tufs volcaniques	30 - 40
Sables	15 - 48
Argiles	44 - 53
Argiles gonflantes	jusqu'à 90
Sols de culture labourés	45 - 65

Table 1.1 – Porosité totale de quelques types de roches ou de sols

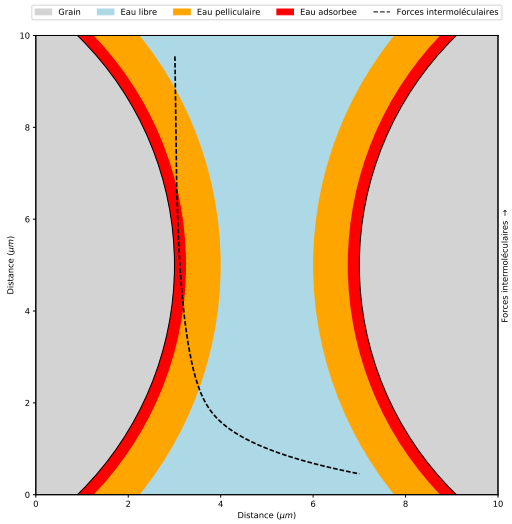


FIGURE 1.1 – Structure de la couche d'eau entre deux particules. Eau adsorbée et eau pelliculaire forment ce que l'on appelle l'eau de rétention (d'après [10]).

Soit un volume V_s de sol contenant les volumes V_g et V_l d'eau libre et d'eau liée respectivement. La **porosité efficace** (specific yield in anglais) est définie comme

$$\omega_{eff} = \frac{V_g}{V_s}. \tag{1.3}$$

La **capacité de rétention** (retention capacity) du sol est définie comme

$$cr = \frac{V_l}{V_s}. \tag{1.4}$$

Il vient alors

$$\omega = \omega_{eff} + cr. \tag{1.5}$$

La figure 1.2 permet de comparer ces trois grandeurs pour différentes tailles de grains.

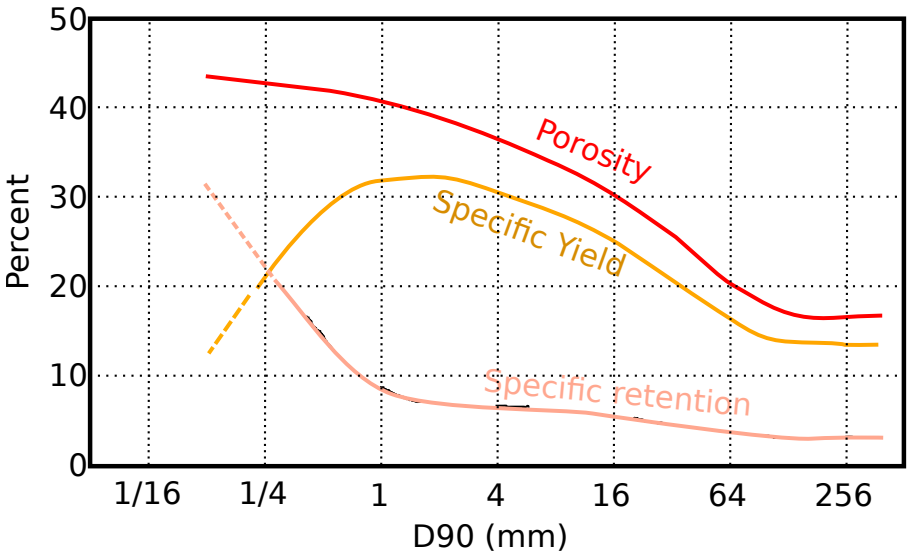


FIGURE 1.2 – Comparaison entre porosité totale (Porosity), porosité efficace (Specific Yield) et Capacité de rétention pour des sols de différente granulométrie [9, 10]

La valeur de la porosité efficace dépend de la texture de la roche et de la distribution des tailles des grains minéraux qui la composent. En particulier, la taille des pores est une fonction croissante de la taille des grains ou des minéraux. On peut donc avoir un milieu de grande porosité dont les pores sont petits et dans lesquels l'eau n'est pas libre de s'écouler. Dans la suite de ce cours, par souci de simplification, nous ne différencierons pas la porosité efficace de la porosité totale.

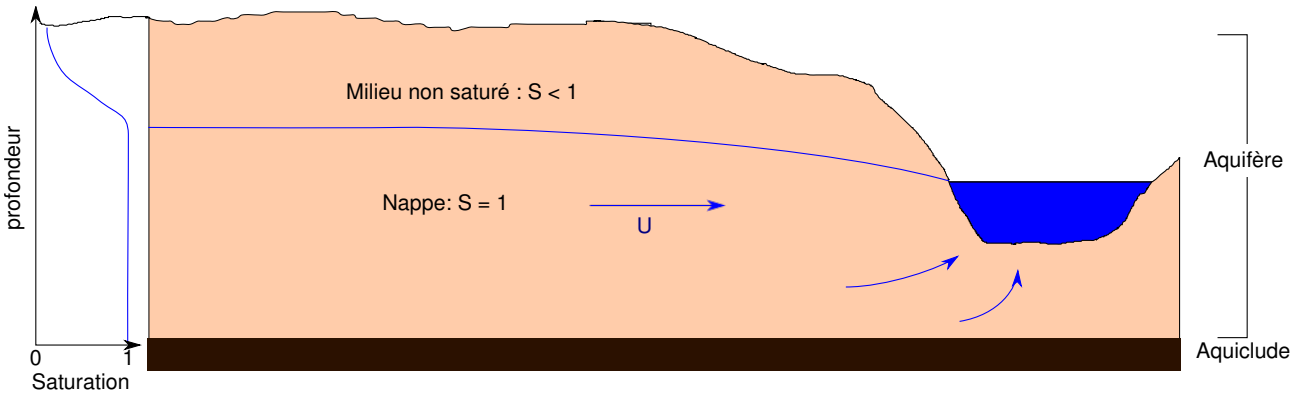


FIGURE 1.3 – Définition d'une nappe

1.2 Contenu en eau et saturation

Soit un sol de volume V_s et V_w le volume d'eau contenue dans celui-ci. Le contenu volumétrique ou **teneur en eau** est le rapport entre volume de l'eau et volume du sol soit

$$\theta = \frac{V_w}{V_s}. \tag{1.6}$$

θ peut en théorie varier de 0 la valeur de la porosité ω.

Le **degré de saturation** est définit comme

$$S = \frac{\theta}{\omega} \tag{1.7}$$

S ou θ sont utilisés indifféremment pour décrire le contenu en eau du sol.

1.3 Les nappes

Aquifère : Corps de roches perméables contenant une zone suffisamment conductrice pour permettre l'écoulement et le captage de quantités appréciables d'eau

Aquiclude : Formation réputée imperméable.

Nappe : Ensemble des eaux comprises dans la zone saturée d'un aquifère.

2
Hydrostatique

2.1 Pression et équation de l'hydrostatique

2.1.1 Pression dans un fluide

Quand une force est exercée sur une surface le rapport entre cette force et la surface sur laquelle elle s'exerce définit ce que l'on appelle une contrainte (stress en anglais). Cette contrainte peut avoir trois composantes, une composante normale et deux composantes tangentielles à la surface sur laquelle s'applique la force. La composante normale est appelée la pression et notée p.

Dans un fluide au repos toutes les contraintes sont normales aux surfaces sur lesquelles elles s'appliquent (dès qu'une contrainte cisaillante s'exerce le fluide s'écoule). Elles sont dirigées vers l'intérieur du fluide.

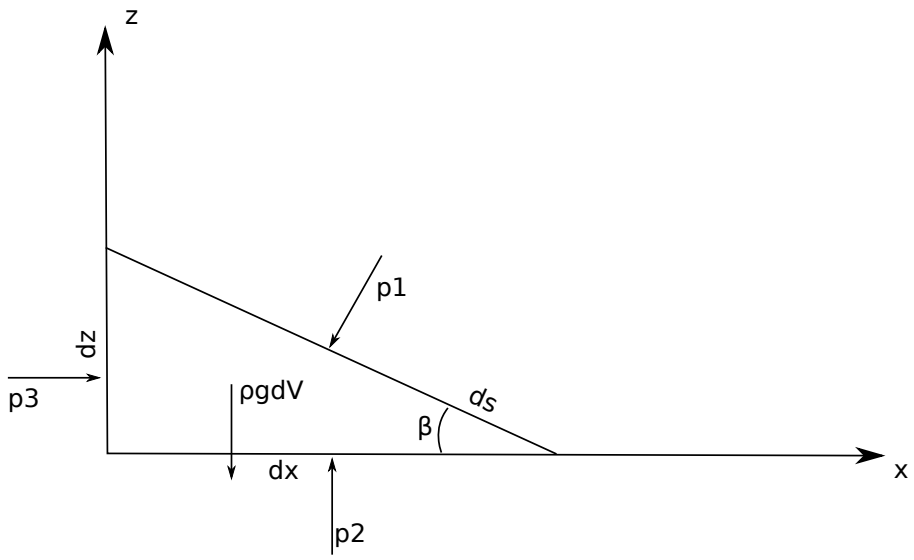


FIGURE 2.1 –

Considérons l'élément prismatique représenté par schéma de la figure 2.1. On peut écrire un bilan des forces dans chacune des directions (x et z [1]). Dans la direction x on a

$$p_3 dzdy - p_1 dzds \sin\beta = 0. \tag{2.1}$$

Dans la direction z on a

$$p_2 dxdy - p_1 dyds \cos\beta - \rho g dV = 0. \tag{2.2}$$

Des simplifications sont possibles grace aux relations géométriques suivantes :
- l'élement de volume dV s'écrit $dV = dxdydz/2$,
- $ds \cos\beta = dx$,
- $ds \sin\beta = dz$.

On obtient alors

$$p_1 = p_3, \tag{2.3}$$

1. La direction des y est laissée à votre sagacité.

et

$$p_2 = p_1 + \rho g dz/2. \tag{2.4}$$

Quand $dz \to 0$ $p_2 \to p_1$ et

$$p_1 = p_2 = p_3. \tag{2.5}$$

Conclusion : en un point d'un fluide au repos la pression est la même dans toutes les directions

2.1.2 Équation de l'hydrostatique

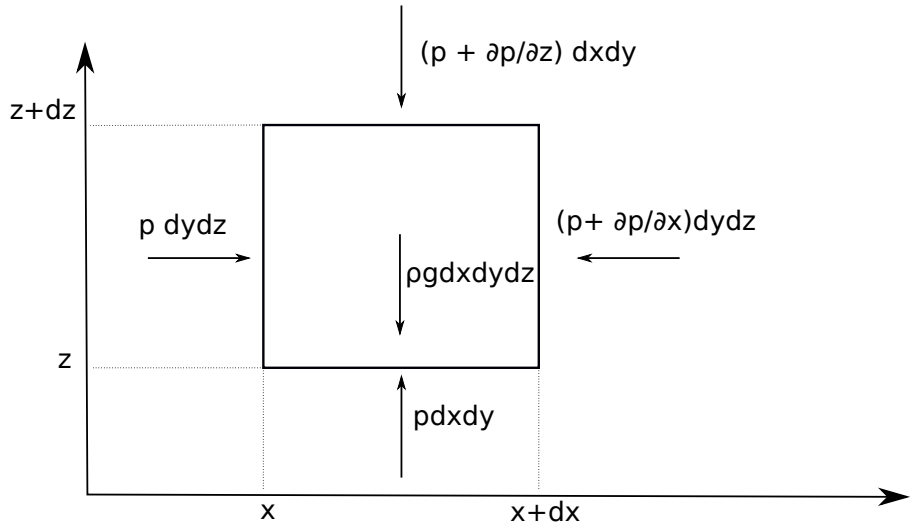


FIGURE 2.2 –

Nous allons effectuer un bilan de forces sur l'élément de volume dont une face est représenté sur le schéma de la figure 2.2. On a
dans la direction des x :

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right) dydz = 0; \tag{2.6}$$

dans la direction des y :

$$pdxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdz = 0; \tag{2.7}$$

dans la direction des z :

$$pdxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\right) dxdy - \rho g dxdydz = 0. \tag{2.8}$$

Après simplifications il vient

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{2.9}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g dz. \tag{2.10}$$

Ces deux équations peuvent être réécrites sous une forme compacte

$$\boxed{\mathbf{grad}(p + \rho g z) = \mathbf{0}} \tag{2.11}$$

Enfin, en intégrant (2.11), il vient

$$p + \rho g z = Cte \tag{2.12}$$

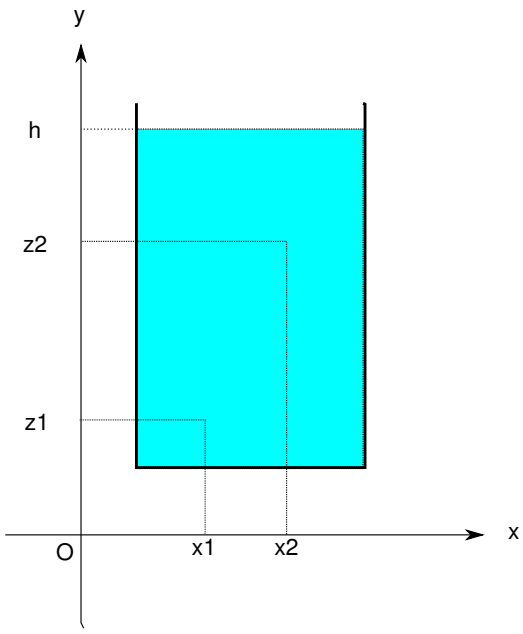


FIGURE 2.3 –

2.2 Charge

Soit un fluide au repos (figure 2.3), la pression en un point d'altitude z d'un réservoir dont la surface libre se trouve à une altitude h est donnée par

$$p = \rho g(h - z) + p_a, \tag{2.13}$$

$\rho g(h - z)$ représente le poids de la colonne d'eau se trouvant au dessus du point d'altitude z, p_a la pression atmosphérique. En négligeant cette dernière et en réarrangeant on arrive à

$$p + \rho g z = \rho g h. \tag{2.14}$$

Comme h est constante pour un réservoir au repos, (2.14) vérifie donc bien (2.11).

On peut à partir de (2.14) définir une grandeur appelée la **charge** ϕ

$$\boxed{\phi = \frac{p}{\gamma} + z = h} \tag{2.15}$$

En tout point d'un réservoir au repos, la **charge** ϕ est une constante qui vaut h l'altitude de la surface libre la charge à la dimension d'une hauteur que l'on nomme aussi hauteur piézométrique ([piezometric] head en anglais).

2.3 Piézométrie

Soit un réservoir contenant deux fluides non miscibles de densité $\rho_1 < \rho_2$ au repos. dans le premier piézomètre on mesure h_1 la hauteur de la surface libre du fluide 1 dans le réservoir dans le second piézomètre la hauteur sera égale à la hauteur de l'interface + la pression exercée par le fluide 1 rapportée à la densité du fluide 2 c'est à dire

$$\rho_1 g(h_1 - h_2) + \rho_2 g(h_2 - z) = \rho_2 g(h - z), \tag{2.16}$$

soit

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}(h_1 - h_2) + (h_2 - z) = (h - z). \tag{2.17}$$

On obtient alors finalement

$$h = h_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(h_1 - h_2) \tag{2.18}$$

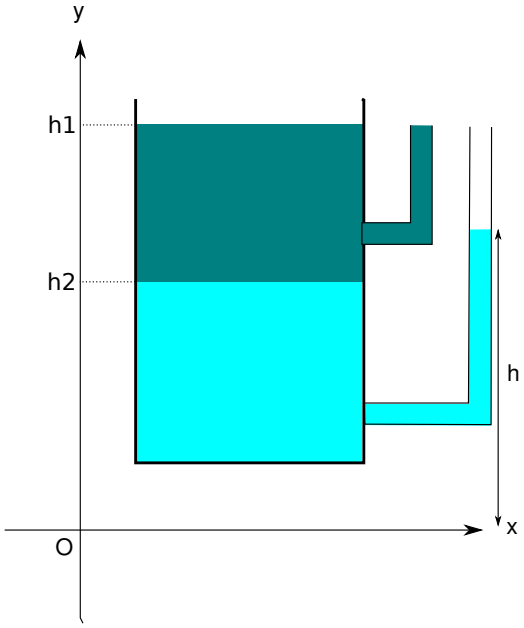


FIGURE 2.4 –

2.4 Application au milieu souterrain

tant que les parois restent suffisamment éloignées pour que les interactions eau-paroi ne deviennent pas importantes, la réduction de la taille du réservoir de la figure 2.3 n'a aucune conséquence sur ce que nous venons de dire. Une fluctuation de la surface libre peut advenir dès que les forces de tension de surfaces ne sont plus négligeable. Ceci étant, dans la pratique en milieu naturel, les perturbations de la hauteur de la surface libre sont négligeables devant les hauteur en jeu. Si donc on se trouve dans un milieu naturel, poreux et saturé dans lequel l'eau peut s'écouler sous l'effet de la gravité, les équations de l'hydrostatique s'appliquent.

Afin d'étudier les mouvements de l'eau dans le sol il est donc nécessaire de connaître la répartition des pressions d'une part, l'état de saturation du sol d'autre part. L'instrument le plus couramment utilisé pour étudier la pression dans un milieu saturé s'appelle un **piézomètre**. Il s'agit en règle générale d'un tube, crépiné à sa base, enfoncé dans le sol à une certaine profondeur. Le **tensiomètre** est un instrument qui permet de mesurer des pressions négatives dans les sols non saturés.

3
Conservation de la masse

Nous détaillons ici quelques cas simples qui nous seront utiles par la suite.

3.1 Écoulement dans un tube

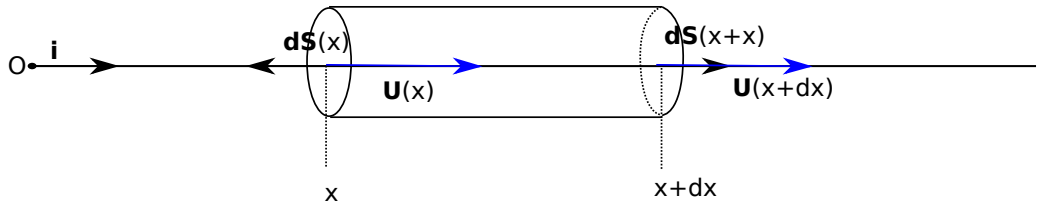


FIGURE 3.1 –

La figure 3.1 schématise un écoulement caractérisé par sa vitesse $\mathbf{U}$ horizontale. Le flux de masse traversant la surface dS dans le sens du vecteur normal à la surface $d\mathbf{S}(x)$ s'écrit

$$F(x) = \rho\mathbf{U}(x)d\mathbf{S}(x) = \rho U(x)\mathbf{i}(-dS\mathbf{i}) = -\rho U(x)dS \tag{3.1}$$

Il est négatif. Le vecteur étant dirigé vers l'extérieur à la surface cela veut dire que le flux circule dans le sens opposé à la normale $d\mathbf{S}$. Il entre dans le volume

Le flux traversant la surface $d\mathbf{S}(x+dx)$ dans le sens indiqué par le vecteur surface s'écrit

$$F(x+dx) = \rho\mathbf{U}(x+dx)d\mathbf{S}(x+dx) = \rho U(x+dx)\mathbf{i}(dS\mathbf{i}) = \rho U(x+dx)dS \tag{3.2}$$

Il est positif. Le vecteur étant dirigé vers l'extérieur à la surface cela veut dire que le flux circule dans le sens de la normale $d\mathbf{S}$. Il sort du volume. L'origine de cette «inversion» des signes (entrant négatif, sortant positif) provient du fait que le vecteur normal à un élément de surface englobant un volume fermé est dirigé vers l'extérieur du volume.

La somme des flux donne

$$\Sigma = F(x+dx) + F(x) = \rho(U(x+dx) - U(x))dS \tag{3.3}$$

Elle correspond à un flux sortant si elles est positive (la masse dans l'élément de volume diminue), entrant si elle est négative (la masse dans l'élément de volume augmente). Durant un intervalle de temps dt la variation de masse dM dans l'élément de volume sera donc

$$(F(x+dx) + F(x))dt = -dM \tag{3.4}$$

ou encore

$$\frac{dM}{dt} = -(F(x+dx) + F(x)) \tag{3.5}$$

Si la somme des flux est positive (il sort plus de masse qu'il n'en rentre) la variation de masse est négative ($dM/dt < 0$). Si la somme des flux est négative (il rentre plus de masse qu'il n'en sort) la variation de masse est positive ($dM/dt > 0$)

Si on souhaite écrire ce bilan de façon vectoriel on aura

$$\frac{dM}{dt} = -\rho(\mathbf{U}(x)d\mathbf{S}(x) + \mathbf{U}(x+dx)d\mathbf{S}(x+dx)) \tag{3.6}$$

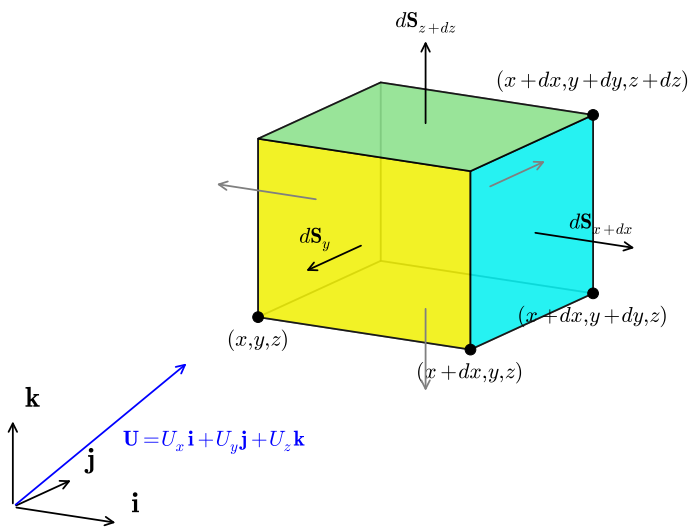


FIGURE 3.2 –

ou encore

$$\frac{dM}{dt} = -\sum_S \rho \mathbf{U} d\mathbf{S} \tag{3.7}$$

Reprenons notre bilan (3.5) et remplaçons les flux par leurs expressions (3.1) et (3.2) on a

$$\frac{dM}{dt} = \rho(U(x) - U(x+dx))dS \tag{3.8}$$

En effectuant un développement limité au premier ordre de $U(x+dx)$ on a

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\rho}{dt}dxdS = -\rho\frac{dU}{dx}dxdS \tag{3.9}$$

soit

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{dU}{dx} \tag{3.10}$$

Dans le cadre de ce cours ρ est constante. on aboutit donc à l'équation de conservation

$$\boxed{\frac{dU}{dx} = 0} \tag{3.11}$$

dont la solution est

$$\boxed{U = Cte}. \tag{3.12}$$

3.2 Conservation de la masse dans un élément de volume

Dans le cas d'un écoulement tri dimensionel on a

$$\mathbf{U} = U_x(x,y,z)\mathbf{i} + U_y(x,y,z)\mathbf{j} + U_z(x,y,z)\mathbf{k} \tag{3.13}$$

le flux de masse au travers de la surface $d\mathbf{S}_x$ sera donc

$$F_x(x,y,z) = \rho\mathbf{U}d\mathbf{S}_x = -\rho U_x(x,y,z)dS_x \tag{3.14}$$

De la même façon on aura

$$F_x(x+dx,y,z) = \rho \mathbf{U} d\mathbf{S}_{x+dx} = \rho U_x(x+dx,y,z) dS_x \tag{3.15}$$

En effectuant la somme de ces deux flux on aboutit à

$$F_x(x) + F_x(x+dx) = \rho \frac{\partial U_x}{\partial x} dS_x dx = \rho \frac{\partial U_x}{\partial x} dydzdx \tag{3.16}$$

Si on fait de même sur les quatre autres faces on obtient

$$F_y(y) + F_y(y+dy) = \rho \frac{\partial U_y}{\partial y} dxdzdy \tag{3.17}$$

et

$$F_z(z) + F_z(z+dz) = \rho \frac{\partial U_z}{\partial z} dxdydz \tag{3.18}$$

La somme des trois sommes de flux pendant un temps dt est égale à $-dM$ soit

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\rho}{dt} dxdydz = -\rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) dxdydz \tag{3.19}$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \mathrm{div} \mathbf{U}, \tag{3.20}$$

où l'opérateur divergence div est définit par

$$\boxed{\mathrm{div} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}}. \tag{3.21}$$

Dans le cadre de ce cours comme pour la précédent section cette équation se réduit à

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{U} = 0} \tag{3.22}$$

4
Ecoulements en milieu saturé

4.1 Loi de Darcy

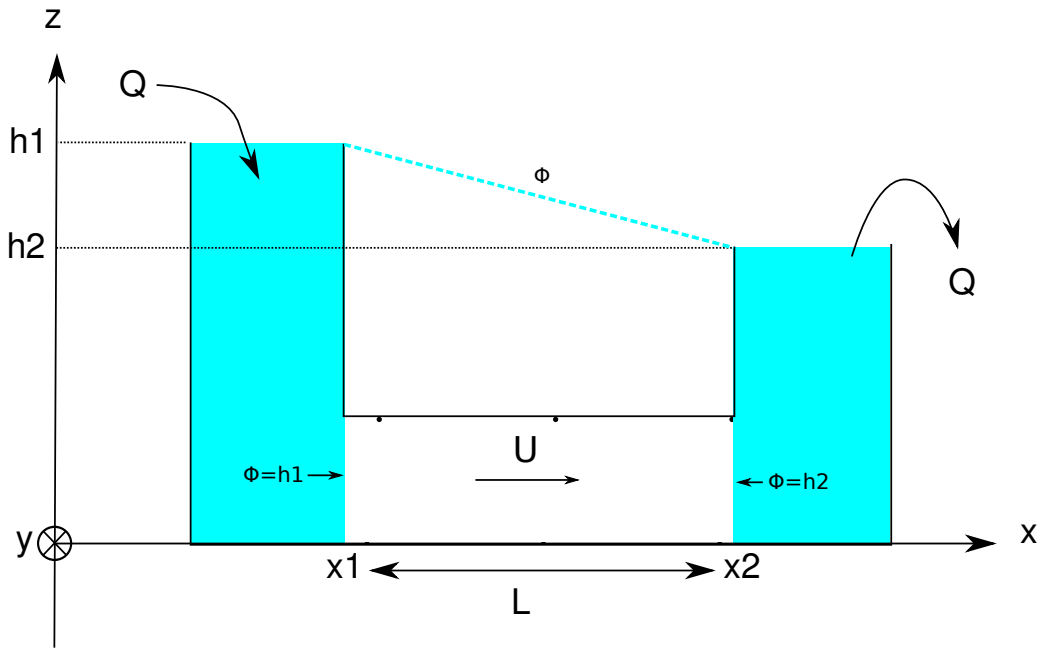


FIGURE 4.1 – Schéma d'une expérience de filtration horizontale. Dans l'expérience originiale de Darcy la filtration était verticale.

L'expérience de Darcy [5], publiée en 1856 et dont le principe est représenté figure 4.1, a permit d'établir la relation suivante

$$Q = KA\frac{h_1 - h_2}{L} \tag{4.1}$$

A est la section de la colonne sableuse, $h_1 - h_2$ est la différence de charge— c'est à dire la différence de hauteur d'eau dans les récipient en entrée et en sortie—, L est la longueur séparant les deux mesures de charge, K enfin est une constante dépendant du milieu que l'on nomme la conductivité hydraulique ou encore perméabilité des hydrogéologues (LT^{-1})

On peut définir une vitesse à partir de (4.1) :

$$U = \frac{Q}{A} = K\frac{h_1 - h_2}{L}. \tag{4.2}$$

C'est la vitesse de Darcy ou vitesse de filtration. C'est une vitesse fictive car elle correspond à une vitesse moyenne qu'aurait l'écoulement si celui-ci s'effectuait sur toute la section (milieu solide inclus donc).On peut approximer la vitesse réelle du fluide en tenant comte de la porosité du milieu ω selon

$$v = \frac{U}{\omega} = \frac{K}{\omega}\frac{h_1 - h_2}{L}. \tag{4.3}$$

Dans les équations (4.1), (4.2) et (4.3) qui précède on constate que $(h_1 - h_2)/L$ est sans dimension et représente une pente (figure 4.1a) ou un gradient (figure 4.1b). Si on réduit progressivement la distance L dans le cas de l'expérience horizontale on arrivera à

$$\lim_{L\to 0} \frac{h_1 - h_2}{L} = -\frac{d\phi}{dx}. \tag{4.4}$$

Dans le cas de l'expérience verticale on aura

$$\lim_{L\to 0} \frac{h_1 - h_2}{L} = -\frac{d\phi}{dz}. \tag{4.5}$$

À partir de ce que nous venons de voir l'équation (4.2) décrivant la vitesse de Darcy peut se généraliser et s'écrire de plusieurs façons :

$$\boxed{\mathbf{u} = -K\nabla\phi = \frac{k\rho g}{\mu}\nabla\phi = -\frac{k}{\mu}\nabla\left(p + \rho g z\right)} \tag{4.6}$$

Ici k est la perméabilité intrinsèque du milieu. Elle a la dimension d'une surface. Attention donc à ne pas confondre la perméabilité k avec la conductivité K, souvent appelée perméabilité par abus de langage. La mesure de perméabilité d'un échantillon de roche repose sur le principe de l'expérience de Darcy.

Comme nous ne considérons que des situations homogènes et isotropes nous pouvons écrire

$$\boxed{\mathbf{u} = -K\nabla\phi}. \tag{4.7}$$

Si la conductivité K est constante on peut définir $\Phi = K\phi$ et l'on obtient

$$\boxed{\mathbf{u} = -\nabla\Phi}. \tag{4.8}$$

La vitesse de Darcy dérive donc d'un potentiel scalaire. Cette propriété a des conséquences importantes sur les écoulements dans le milieu souterrain.

4.2 Equation de Laplace

Expression On a vu que la conservation de la masse d'un fluide incompressible sur une élément de volume aboutissait à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{4.9}$$

En couplant cette équation à l'équation de Darcy (4.8) il vient

$$\boxed{\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0} \tag{4.10}$$

C'est l'équation de Laplace décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu isotrope, homogène et lui même incompressible.

Solution la plus simple Considérons notre expérience de Darcy (figure 4.1a). L'échantillon de milieu poreux est contenu dans un tube de section constante et très étroit dans le sens perpendiculaire au schéma (On ne considérera donc qu'un écoulement dans le plan du schéma). Dans le réservoir de gauche la charge vaut h_1 et dans celui de droite elle vaut h_2. Les faces de l'échantillon sont donc aux charge $\Phi(x_1) = h_1$ et $\Phi(x_2) = h_2$. Etant donné que les limites supérieure et inférieure du tube contenant le milieu poreux sont imperméables. Il n'y a pas d'écoulement transverse. On supposera donc que l'écoulement est unidirectionnel [1] Pour trouver la forme de l'écoulement nous devons résoudre l'équation de Laplace dans sa version la plus simple

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{4.11}$$

Nous allons chercher des solutions de la forme

$$\Phi(x) = (ax + b). \tag{4.12}$$

Afin de trouver l'expression des quatre constantes nous avons a priori besoin de nos deux conditions aux limites, c'est à dire des valeurs de Φ en x_1 et x_2 [2]. On obtient alors l'expression de la charge dans le tube

$$\boxed{\Phi = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + h1}. \tag{4.13}$$

On retrouve bien

1. Nous le démontrerons en exercice.
2. On appelle ces conditions aux limites des conditions de potentiel imposé ou de Dirichlet

1. que la charge varie de façon linéaire entre les deux réservoirs,
2. que la vitesse est constante et horizontale.

.

Pour des problèmes bidimensionnels et des géométries simples à l'instar de celle que nous venons de voir, la séparation des variables est couramment utilisée, pour résoudre cette équation . Nous reviendrons sur ces solutions dans le cadre des écoulements autour d'un puits. Dans des cas plus généraux on cherche des solutions numériques ou analytiques (en utilisant des techniques d'analyse complexe) qui dépassent largement le cadre de ce cours.

4.3 Équipotentielles et lignes de courant

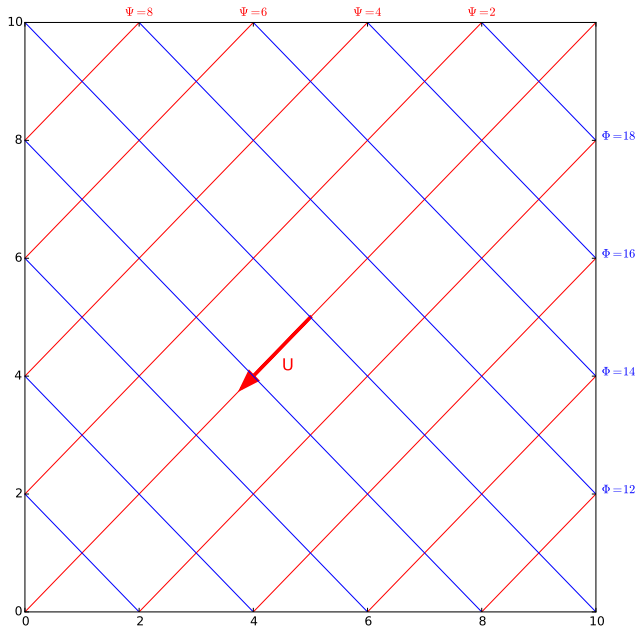


FIGURE 4.2 – Courbes équipotentielles $\Phi(x) = 10^{-4}(x+2y) = C_e$ (bleu), lignes de courant $\Psi(x,y) = 10^{-4}(2x-y) = C_c$ (rouge) et vitesse de l'écoulement. la vitesse est définie par $\mathbf{U} = -10^{-4}\mathbf{i} - 2\cdot 10^{-4}\mathbf{j}$. Elle a pour norme $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{5}\cdot 10^{-4}$ m/s.

Une **équipotentielle** est une courbe de charge constante.

Une **ligne de courant** est une courbe tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point à un instant t_0 donné.

Étant donné que les écoulements sont potentiels, la vitesse est en tout point perpendiculaire au courbes équipotentielles. Cette propriété permet, à partir de la connaissance des charges, de connaître le sens de l'écoulement et sa norme. Dans le cas d'un écoulement plan (xy) dont la charge est donnée par

$$\Phi = ax + by. \tag{4.14}$$

On vérifie bien que cette charge correspond à un écoulement potentiel c'est à dire qu'elle vérifie l'équation de Laplace. Attention aux deux définitions de la charge Φ en m^2/s et ϕ en m. Ici a et b ont les dimensions d'une conductivité hydraulique. Dans la nature, un piézomètre mesure une hauteur d'eau c'est à dire la valeur de ϕ non de Φ.

Une équipotentielle est une ligne de charge constante quelconque C_e c'est à dire

$$\Phi(x) = C_e \tag{4.15}$$

Soit ici

$$y = \frac{C_e - ax}{b} \tag{4.16}$$

Comme la vitesse est perpendiculaire à ces équipotentielles, on peut simplement calculer la vitesse en tout point grâce à

$$\mathbf{U} = -\mathbf{grad}\Phi = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j}, \tag{4.17}$$

dont on déduit sa norme

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4.18}$$

On peut en outre tracer les lignes de courant qui, parce qu'elles sont tangentes en tout point au vecteur vitesses, correspondent aux courbes perpendiculaires en tout point aux équipotentielles. Pour ce faire on va chercher une fonction $\Psi(x, y)$ telle que

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_x, \ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -U_y,} \tag{4.19}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.} \tag{4.20}$$

La fonction $\Psi(x, y)$ est appelée fonction courant. L'annexe A la définit et explique comment parvenir à ce résultat.

À l'instar des équipotentielles, les lignes de courant sont des courbes le long desquelles la fonction courant prend une valeur constante C_c. Elles auront pour équation générale

$$\Psi(x, y) = bx - ay = C_c. \tag{4.21}$$

Enfin en pratique le débit passant entre deux lignes de courants est donné par

$$Q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \tag{4.22}$$

La figure 4.2 montre différentes équipotentielles, des lignes de courant et une représentation du vecteur vitesse pour une charge définie par $\Phi(x, y) = x + 2y$.

En pratique : On verra que tracer ces lignes (souvent à la main) permet en hydrogéologie de se faire une idée rapide (et importante) des sens et de l'ordre de grandeur des écoulements dans bien des situations réelles.

5
Ecoulements confinés et non confinés

Afin de simplifier nos calculs, dans ce qui suit, on considérera un écoulement dans le plan des figures.

5.1 Écoulement dans une nappe captive

Nous avons vu lors de l'étude de l'écoulement dans un tube horizontal (Figure 4.1a) que l'on pouvait définir des surfaces équipotentielles aux deux limites de la colonne de sable de potentiel $\phi = h_1$ et h_2 respectivement. Nous avons vu, en résolvant l'équation de Laplace pour un écoulement plan que

— La charge était indépendante de la profondeur et décroissait de l'entrée vers la sortie du tube,

— Le vecteur vitesse était partout horizontal et de norme constante.

Dans le cas de cette expérience, la surface piézométrique étaient donc donnée par la droite en pointillé qui joint les surfaces libres h_1 et h_2.

Ces observations sont applicables pour une nappe captive, c'est à dire un aquifère saturé, confiné entre deux aquicludes (figure 5.1).

Si on considère une nappe d'épaisseur D dont la charge est donnée par la surface piézométrique (figure 5.1) cette nappe est captive (l'aquifère est saturé sur toute sa profondeur). En outre, les limites supérieures et inférieures de la nappe sont des limites à flux nul (rien ne passe). Elles correspondent à des lignes de courant dans le cas de la figure 5.1. On aura donc pour un écoulement 1D

$$\mathbf{U} = -K\frac{dh}{dx}\mathbf{i}. \tag{5.1}$$

le débit **par unité de largeur** q (en m^2/s) au travers de l'épaisseur de la nappe sera alors donné par

$$q = \mathbf{US} = \mathbf{U}D\mathbf{i} = -KD\frac{dh}{dx} = -T\frac{dh}{dx}, \tag{5.2}$$

soit enfin

$$\boxed{q = -T\frac{dh}{dx}.} \tag{5.3}$$

La constante $T = KD$ est appelée la **transmissivité** de la nappe. Étant donné l'orientation *choisie*[1] pour la surface traversée par le courant (dans le sens des $\mathbf{i}$) le débit sera négatif si l'écoulement va vers la gauche, positif si il va vers la droite[2].

Si enfin nous effectuons un bilan de masse, en régime stationnaire, sur l'élément de volume figuré en bleu foncé sur la figure 5.2 nous aurons

$$q_x + q_{x+dx} = 0, \tag{5.4}$$

soit après un peu de calcul

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 0. \tag{5.5}$$

1. La normale à une surface fermée est par convention dirigée vers l'extérieur du volume délimité. Dans le cas d'une surface non fermée le choix est arbitraire et dépend de vous.

2. Si le signe $-$ vous fait tourner la tête n'oubliez pas que

$$|q| = \left|T\frac{dh}{dx}\right|$$

.

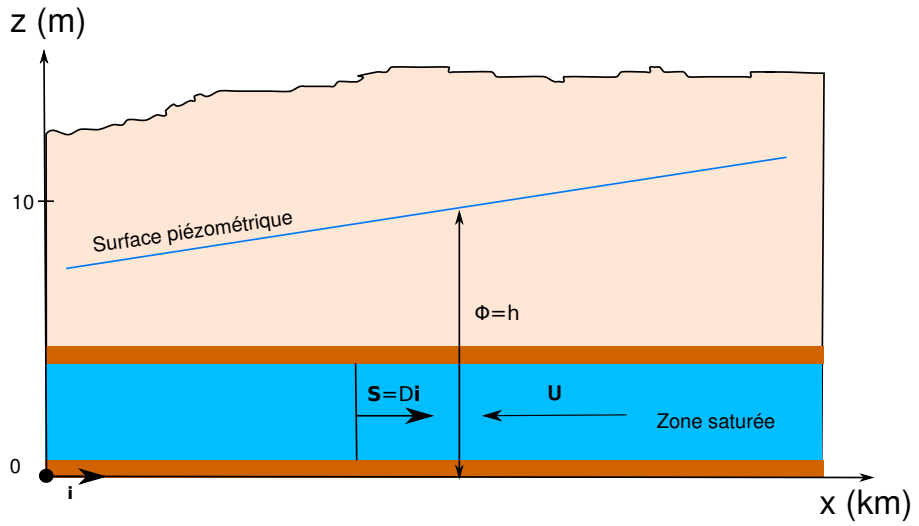


FIGURE 5.1 – Écoulement dans une nappe captive

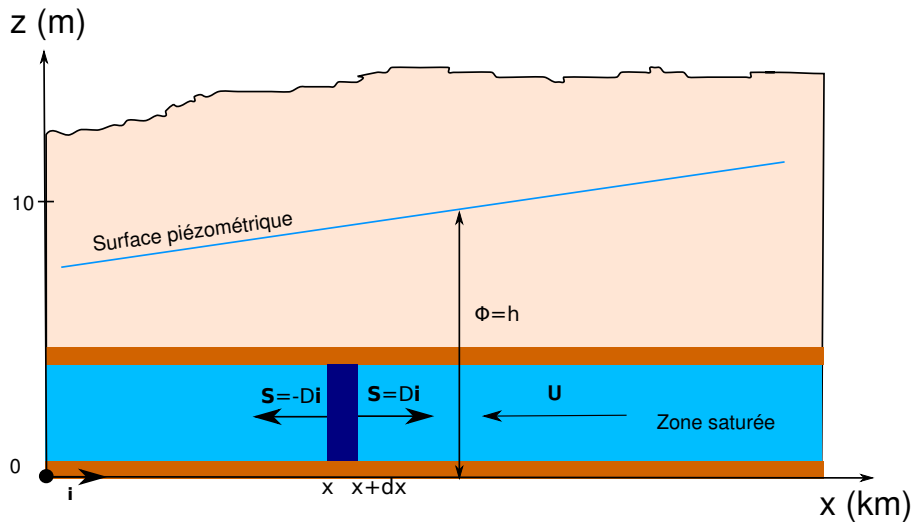
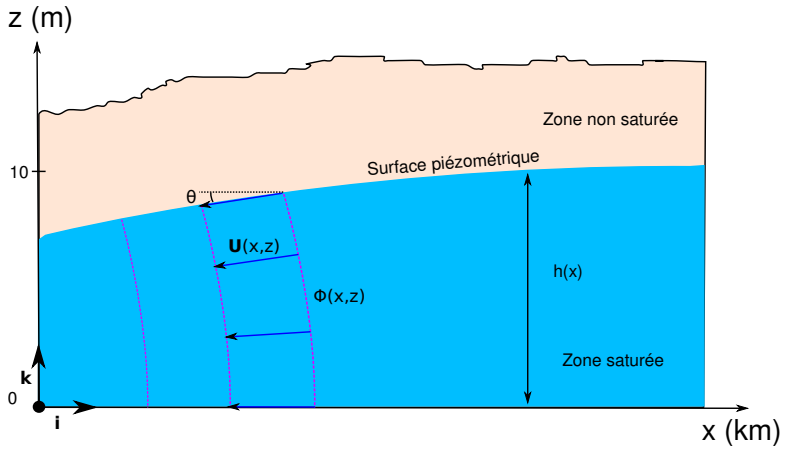
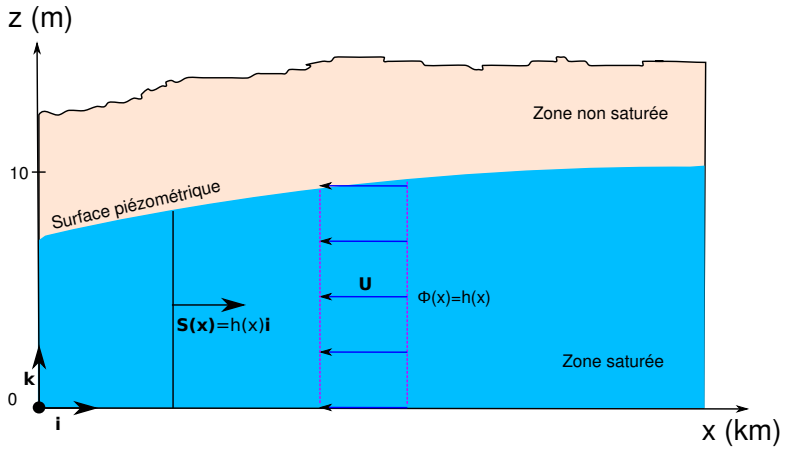


FIGURE 5.2 – Bilan de masse dans une nappe captive



(a) Écoulement complet



(b) Écoulement approximé après application de l'hypothèse de Dupuit

FIGURE 5.3 – Écoulement dans une nappe libre.

On retrouve bien l'équation de Laplace réduite à une dimension de l'espace, ce que nous avions vu lors de l'étude de la loi de Darcy et de l'écoulement dans un tube. Après intégration il vient

$$h = ax + b. \tag{5.6}$$

Comme dans le cas du tube, les constantes sont obtenues grâce aux conditions aux limites.

5.2 Écoulement dans une nappe libre, hypothèse de Dupuit

Reprenons (4.6) ou (4.8) et considérons la nappe libre de la figure 5.3. Considérons en outre que l'écoulement s'effectue dans le plan (xz). L'hypothèse de Dupuit trouve son origine dans le constat que la longueur caractéristique d'une nappe selon x est très grande devant sa hauteur. La pente de la surface libre est donc souvent très faible. Hors, en régime stationnaire, cette surface libre correspond à une ligne de courant. Soit θ l'angle que fait la surface libre avec l'horizontale en un point. La vitesse en ce point s'écrit

$$\mathbf{U} = \|\mathbf{U}\| cos\theta \mathbf{i} + \|\mathbf{U}\| \sin\theta \mathbf{j} \tag{5.7}$$

Si θ est très petit alors $\sin\theta \sim 0,\ \cos\theta \sim 1$ d'où

$$\mathbf{U} \simeq \|\mathbf{U}\| \mathbf{i} \tag{5.8}$$

C'est l'hypothèse de Dupuit [3]. La vitesse étant horizontale, la charge est verticale. Elle correspond à la hauteur de la surface libre h. On obtient alors

$$\mathbf{U} = -K\frac{dh}{dx}\mathbf{i}. \tag{5.9}$$

Le débit par unité de largeur de la nappe q est alors obtenu en multipliant la norme de cette vitesse par la hauteur de la nappe

$$q = \mathbf{US} = \mathbf{U}h\mathbf{i} = -Kh\frac{dh}{dx}, \tag{5.10}$$

soit

$$\boxed{q = -\frac{K}{2}\frac{dh^2}{dx}} \tag{5.11}$$

Ici encore la valeur algébrique du débit sera négative si l'écoulement se fait vers la gauche et positif si il se fait vers la droite.

Si maintenant nous effectuons un bilan de masse sur un élément de volume comme dans le cas de la nappe captive nous arrivons à

$$\boxed{\frac{d^2h^2}{dx^2} = 0.} \tag{5.12}$$

Cette équation non linéaire diffère de l'expression de l'équation de Laplace 1D à cause de l'approximation de Dupuit. Après intégration on obtient.

$$h^2 = ax + b \tag{5.13}$$

soit

$$\boxed{h = \sqrt{ax+b}.} \tag{5.14}$$

Là encore les constantes se trouvent à partir des conditions au limites du problème que l'on étudie.

Notes [1] L'approximation de Dupuit est largement vérifiée dans la nature. Elle signifie que l'écoulement dans une nappe libre a essentiellement lieu dans le plan horizontal. Cette conséquence est très importante car c'est elle qui nous permettra de traçer les lignes d'écoulement et les équipotentielles d'une nappe libre à partir de mesure piézométrique de puits.

[2] Dans les deux situations, confinée ou libre, ce que nous venons de faire revient à considérer que la pression dans la nappe est (quasi) hydrostatique. De ce fait la charge est constante sur l'épaisseur de la nappe et correspond à la hauteur de la surface piézométrique. Dans le cas d'une nappe libre cette surface correspond on outre à la surface libre de la nappe.

[3] Nous verrons en TD que, dans le cas d'une nappe libre, tout en restant dans une situation stationnaire il est possible d'ajouter un flux entrant dans la nappe et d'étudier ainsi la forme moyenne que peut prendre une nappe libre soumise à des précipitations par exemple.

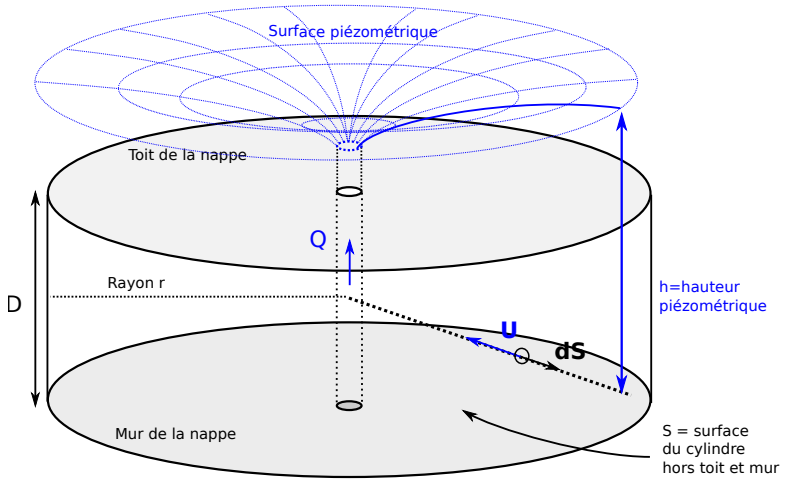
3. Dans le cas d'un écoulement dans l'espace, l'approximation de Dupuit conduit à

$$\mathbf{U} \simeq U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j}$$

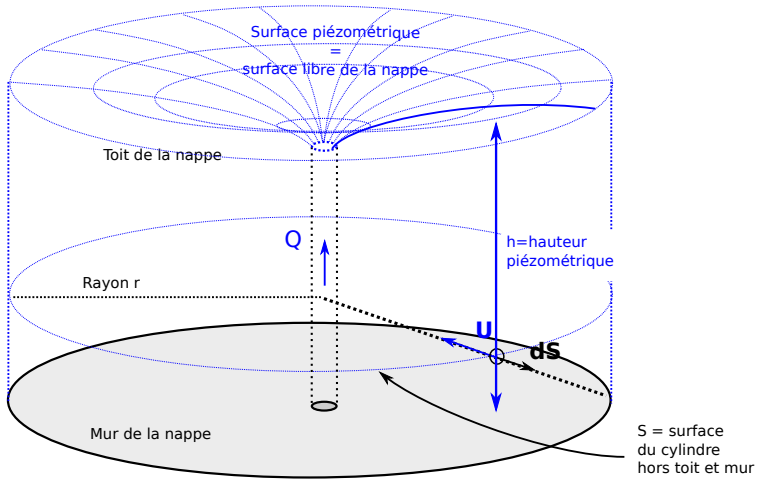
6
Écoulements autour d'un puits

Les puits sont essentiels en hydrogéologie pour deux raisons : on s'en sert pour pomper l'eau d'une nappe d'une part et pour contenir une pollution ou dépolluer une nappe d'autre part.

6.1 Écoulement radial et uniforme dans une nappe



(a)



(b)

FIGURE 6.1 – Écoulement autour d'un puits (a) dans une nappe captive, (b) dans une nappe libre.

Penchons nous sur deux cas qui ont des applications pratiques : celui d'une nappe captive d'épaisseur D (figure 6.1a) d'une part, celui d'une nappe libre (figure6.1b) d'autre part.

6.1.1 Cas d'une nappe captive

Considérons un cylindre de rayon r dans une nappe d'épaisseur D (figure 6.1a). Au centre du cylindre se trouve un puits dans lequel on pompe un débit Q. En régime permanent la somme des flux sortant et entrant est nulle soit

$$Q + \int_S \mathbf{U}(r, \theta, z) d\mathbf{S}_r = 0 \tag{6.1}$$

Dans le cas le plus simple on peut faire trois simplifications intéressantes.

1. La vitesse est horizontale et constante sur l'épaisseur de la nappe car les flux verticaux au toit et au mur sont nuls.
2. Si l'écoulement est symétrique autour du puits alors la vitesse est uniquement radiale.
3. Si enfin notre milieu est homogène et isotrope, l'écoulement en deux points éloignés de du puits de la même distance sera identique en norme.

Si vitesse est radiale, horizontale alors si on considère une surface cylindrique située à une distance r du puits, la vitesse aura une norme constante et

$$Q = \|\mathbf{U}\| \int_S dS \tag{6.2}$$

La surface à intégrer correspond au pourtour du cylindre. On obtient alors

$$Q = \|\mathbf{U}\| \int_0^D 2\pi r dz = 2\pi r D \|\mathbf{U}\|; \tag{6.3}$$

la vitesse s'écrira donc

$$\|\mathbf{U}\| = \frac{Q}{2\pi r D} \tag{6.4}$$

La généralisation de la conservation de la masse passe par la transformation de l'équation (3.22) en coordonnées cylindriques. Cette transformation est détaillée en annexe B. Elle aboutit à

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0} \tag{6.5}$$

On peut vérifier que la vitesse que nous venons d'obtenir vérifie bien l'équation (B.21).

6.1.2 Cas d'une nappe libre

Dans le cas d'une nappe libre (figure6.1b) l'épaisseur de la nappe varie. Dans la cadre de l'approximation de Dupuit on considérera que l'écoulement est partout horizontal. Le débit dans la nappe sera alors donné par

$$Q = \|\mathbf{U}\| \int_0^h 2\pi r dz = 2\pi r h \|\mathbf{U}\|, \tag{6.6}$$

et la vitesse par

$$\|\mathbf{U}\| = \frac{Q}{2\pi r h}. \tag{6.7}$$

Dans ce cas particulier la vitesse ne vérifie plus l'équation de conservation (B.21). Les solutions que nous pourrons trouver pour la forme de la surface piézométrique ne seront donc plus des solutions de l'équation de Laplace. En cela on voit bien que l'hypothèse de Dupuit reste une approximation.

6.2 Loi de Darcy et débit d'un puits

Nappe captive Dans le cas d'un écoulement convergent vers un puits de débit Q la définition du gradient en coordonnées cylindrique et la symétrie du problème par rapport au puits conduisent à

$$\mathbf{U} = -K\frac{dh}{dr}\mathbf{e}_r \tag{6.8}$$

Si on reprend (6.1) on a alors

$$Q + \int_S -K\frac{dh}{dr}\mathbf{e}_r dS\mathbf{e}_r = 0, \tag{6.9}$$

Soit après simplification

$$Q = \int_S K\frac{dh}{dr}dS = 0. \tag{6.10}$$

Enfin après intégration de la surface on obtient

$$Q = 2\pi K D r\frac{dh}{dr} = 2\pi T r\frac{dh}{dr} \tag{6.11}$$

Pour un débit de pompage Q constant on obtient alors une équation d'évolution de la hauteur piézométrique h avec r

$$r\frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi T} \tag{6.12}$$

dont on peut séparer les variable selon

$$dh = \frac{Q}{2\pi T}\frac{dr}{r}. \tag{6.13}$$

La solution de cette équation est alors de la forme

$$\boxed{h = \frac{Q}{2\pi T}\ln r + Cte.} \tag{6.14}$$

Nappe libre L'approximation de Dupuit est toujours valable quelque soit le système de coordonnées. Dans la cas d'une nappe libre (figure 6.1b), elle revient à dire que la composante de la vitesse selon z est petite devant la composante radiale ce qui permet la encore d'écrire (6.8). La différence par rapport au cas d'une nappe captive vient du fait que la hauteur de la nappe varie c'est à dire que sur un rayon r le débit est donné par

$$Q = 2\pi r h(r)\|\mathbf{U}\|, \tag{6.15}$$

ce qui couplé à la définition de la vitesse aboutit à

$$Q = 2\pi K r h\frac{dh}{dr} = \pi K r\frac{dh^2}{dr} \tag{6.16}$$

De la même façon que pour une nappe captive, pour un débit de pompage Q constant et après séparation des variables on obtient

$$dh^2 = \frac{Q}{\pi K}\frac{dr}{r}. \tag{6.17}$$

soit après intégration

$$\boxed{h^2 = \frac{Q}{\pi K}\ln r + Cte.} \tag{6.18}$$

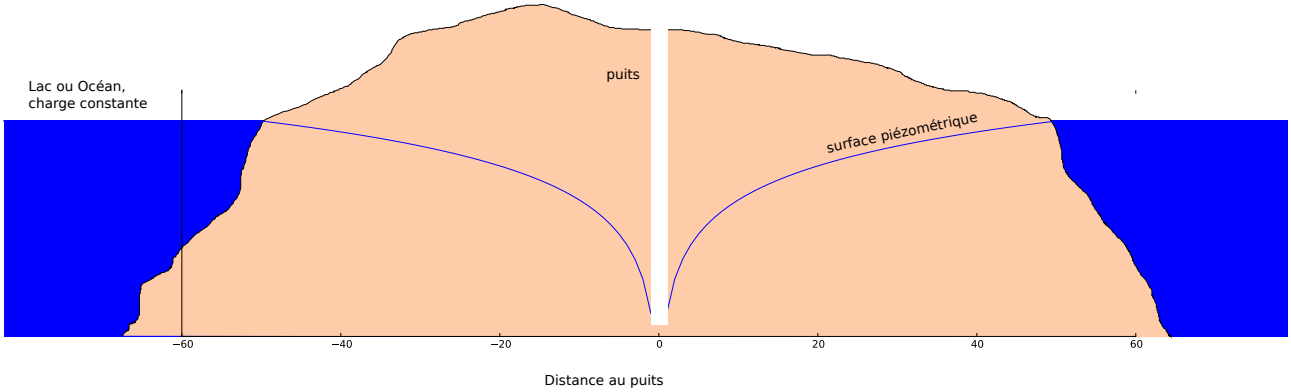


FIGURE 6.2 – Pompage dans un île.

Problèmes liés aux solutions logarithmiques Un certain nombre de remarques doivent être faites sur ces solutions logarithmiques qui sont très utilisées en hydrogéologie.

[1] On peut vérifier que la solution pour une nappe captive donée par (6.14) est compatible avec l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (cette équation se déduit de (B.16))

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0} \tag{6.19}$$

Par contre, contrairement à la solution logarithmique pour une nappe captive, la solution pour la nappe libre n'est pas solution de l'équation de Laplace. Comme pour la vitesse ceci est lié à l'approximation de Dupuit en nappe libre qui rend l'équation différentielle (6.17) non linéaire alors que l'équation de Laplace est, elle, linéaire. Nous en retiendrons de ceci que cette solution logarithmique pour une nappe libre est approximative.

[2] Si on considère la solution générale, que ce soit pour une nappe captive ou libre, elle est définie à une constante près qu'il nous faut donc déterminer et surtout la charge, selon les équations (6.14) et (6.18), la charge croit infiniment (quand $r \to \infty$, $h \to \infty$). De même quand $r \to 0$ alors $h \to -\infty$. Or c'est impossible physiquement. Un puit ayant un certain rayon non nul, le problème posé par la limite à 0 ne se pose pas. Par contre quand h augmente on est confronté au problème de l'augmentation constante de la charge sauf dans le cas particulier d'un domaine circulaire limité, dont la limite présente une charge fixe et imposée. Il existe un cas réel, celui d'une île entourée d'eau où le niveau du lac, ou de la mer, fixe la charge sur le pourtour de l'île (figure 6.2).

[3] Dans la pratique on fait l'hypothèse que l'influence du puits devient nulle au delà d'un certain rayon R appelé justement «rayon d'influence du puits» pour lequel la charge h_R est fixée. La solution devient alors :

dans le cas d'une nappe captive :

$$h = \frac{Q}{2\pi T}\ln\left(\frac{r}{R}\right)+h_R,\ r\le R, \tag{6.20}$$

$$h = h_R,\ r>R; \tag{6.21}$$

dans le cas d'une nappe libre :

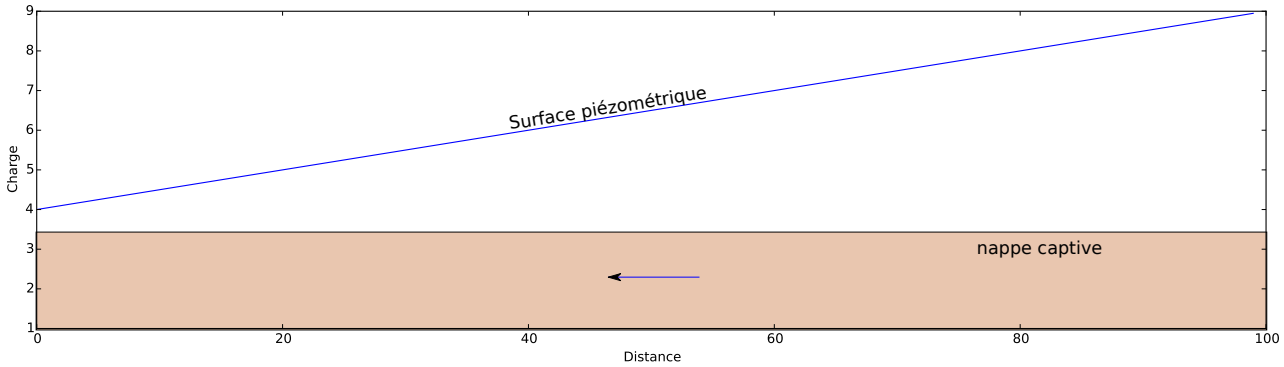
$$h^2 = \frac{Q}{\pi K}\ln\left(\frac{r}{R}\right)+h_R^2,\ r\le R, \tag{6.22}$$

$$h^2 = h_R^2,\ r>R. \tag{6.23}$$

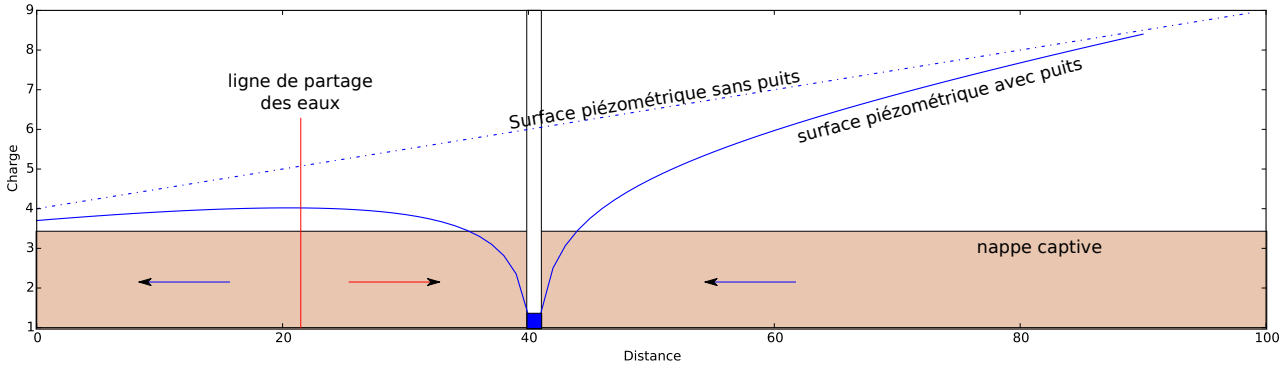
6.3 Rabattement et importance des puits

La figure 6.3 représente une nappe captive à deux instants. Dans un état initial l'eau s'écoule dans la nappe selon la dynamique étudiée précédemment. la charge varie linéairement (figure 6.3a). On installe dans cette nappe un puits qui pompe un débit Q dans cette nappe. La figure 6.3b représente l'état des écoulements dans la nappe quand ceux-ci atteignent de nouveau un régime stationnaire. On constate deux changements majeurs

1. la surface piézométrique n'est plus linéaire. Elle présente ce que l'on nomme un rabattement qui s'accentue à l'approche du puit.
2. le sens des écoulements s'inverse localement et une limite physique apparaît à gauche du puits qui sépare les eaux qui s'écoulent vers la gauche de celles qui s'écoulent en direction du puits.



(a)



(b)

FIGURE 6.3 – (a) Écoulement dans une nappe captive en régime stationnaire. (b) Rabattement sous l'effet d'un pompage. La courbe en pointillé indique le profil de charge avant l'installation du puits. La ligne en trait plein indique le profil de charge après mise en place du pompage.

Cette seconde constatation montre qu'avec un puits on peut isoler une partie d'une nappe et influer sur le sens des écoulements. On peut donc se servir d'un (ou de plusieurs puits) pour protéger une nappe en cas de contamination.

En effet si une pollution advient, dans le cas d'une nappe sans puits, la pollution pourra se propager avec l'écoulement dans la nappe. Par contre si un puits est mis en place de façon à ce que la zone polluée soit située à droite de la ligne de partage des eaux de la figure 6.3b alors le changement de direction de l'écoulement provoqué par la mise en place du forage permettra d'empêcher la propagation de la pollution.

7
Dispersion et transfert de polluants

7.1 Conservation de la masse d'un élément soluble dans un volume élémentaire

Soit un volume élémentaire de fluide dV traversé par un flux $\boldsymbol{F}$ d'un élément soluble au travers de sa surface $d\boldsymbol{S}$. La concentration en élément soluble C est supposée petite devant 1, ce qui veut dire qu'une variation de concentration dans l'élément de volume se fait à volume constant.

La conservation de la masse impose que la variation de quantité de l'élément dans le volume au cours du temps est égale à la somme du flux sur sa surface

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V C dV = -\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{7.1}$$

Le signe négatif vient du fait que la normale à la surface est dirigée vers l'extérieur. Prenons l'exemple d'un flux entrant. Comme le produit scalaire d'un flux dirigé vers l'intérieur avec une normale dirigée vers l'extérieur est négatif $-\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ sera donc positif et correspondra bien à un flux entrant donc à une augmentation de la concentation de l'élément. Par application du théorème de Gauss

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F} dV = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{7.2}$$

(7.1 devient

$$\iiint_V \frac{\partial C}{\partial t} dV + \mathrm{div}\boldsymbol{F} dV = 0, \tag{7.3}$$

Ou encore

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{F} = 0. \tag{7.4}$$

On se limitera ici à des cas à une dimension. Dans de telles situations (7.4) se simplifie en

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0}. \tag{7.5}$$

7.2 Advection et diffusion moléculaire

Les densités de flux $\mathbf{F}$ sont de deux types :

1. Advectif, les molécules sont transportées par le courant :

$$\mathbf{F} = C\mathbf{U} \tag{7.6}$$

2. Diffusif, les molécules se déplacent sous l'effet du gradient de concentration :

$$\mathbf{F} = D\nabla C \tag{7.7}$$

Dans le cas le plus simple la diffusivité D est constante. En sommant ces deux types de flux et en les intégrant à l'équation de conservation de la masse, on obtient alors

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} + D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0}. \tag{7.8}$$

7.3 Équation de dispersion et nombre de Peclet

Si on considère un tube de courant de longueur L on peut calculer deux temps caractéristiques

1. un temps d'advection : $\tau_a = L/U$
2. un temps de diffusion : $\tau_d = L^2/D$

le rapport des deux est sans dimension et s'appelle le nombre de Peclet

$$\mathrm{Pe} = \frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{UL}{D} \tag{7.9}$$

On distingue trois cas

1. Pe $>> 1$ la diffusion est très lente devant l'advection et est donc négligeable. (7.8) se simplifie en
$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{7.10}$$
2. Pe $<< 1$ l'advection est très lente devant la diffusion . (7.8) se simplifie en
$$\frac{\partial C}{\partial t} + D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \tag{7.11}$$
3. Enfin Pe ~ 1 on ne peut négliger aucun des flux. Il faut résoudre (7.8).

7.4 Solutions en régime permanent

7.4.1 $Pe >> 1$

on se place dans le cas le plus simple d'une pollution constante de concentration $C(x = 0) = C_0$ l'équation d'advection devient

$$U\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \tag{7.12}$$

soit

$$\boxed{C = C_0}. \tag{7.13}$$

La concentration en polluant est constante dans toute la nappe

7.4.2 $Pe << 1$

On est dans le cadre d'une diffusion et

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \tag{7.14}$$

L'équation différentielle est du second degré donc ont doit disposer de deux conditions aux limites pour la résoudre. Ce qu'on voit bien en écrivant la solution générale

$$C = ax + b \tag{7.15}$$

On se place dans le cas le plus simple d'une pollution constante de concentration $C(x = 0) = C_0$ et d'une sortie dans une rivière de concentration nulle en polluant $C(x = L) = 0$ et située à une distance L de la source. La solution est alors de la forme

$$\boxed{C(x) = C_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)} \tag{7.16}$$

7.4.3 $Pe \sim 1$

Enfin dans le dernier cas on a

$$U\frac{\partial C}{\partial x} + D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \tag{7.17}$$

Dans le cadre de ce cours U et D sont constantes soit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C + \frac{D}{U}\frac{\partial C}{\partial x}\right) = 0. \tag{7.18}$$

On cherche donc une solution dont le terme entre parenthèses est une constante α soit

$$C + \frac{D}{U}\frac{\partial C}{\partial x} = \alpha. \tag{7.19}$$

En effectuant le changement de variable $Z = C - \alpha U/D$ on arrive à

$$C = C_0 \exp\left(-\frac{xU}{D}\right) + \frac{\alpha U}{D}\left[1 - \exp\left(-\frac{xU}{D}\right)\right] \tag{7.20}$$

Pour une nappe de longueur L on peut alors écrire la solution en fonction du Peclet

$$\boxed{C = C_0 \exp\left(-Pe\frac{x}{L}\right) + \frac{\alpha U}{D}\left[1 - \exp\left(-Pe\frac{x}{L}\right)\right]} \tag{7.21}$$

Deuxième partie

Applications

8
Sols et eau

8.1 Étude d'un sol

Un échantillon cylindrique de 10 cm de long et de 5cm de diamètre a été prélevé dans un sol glaciaire à l'aide d'une tarière. La masse volumique moyenne des minéraux composant le sol est $\rho_m = 2650\,\mathrm{kg/m^3}$ Lors du prélèvement l'échantillon pesait 331.8 g. Après séchage à 105^oC l'échantillon ne pèse plus que 302.4 g.

1. Calculez
   la masse volumique du sol,
   sa porosité,
   sa teneur en eau,
   son pourcentage de saturation.

8.2 Piézométrie

1. Une réservoir contient deux fluides immiscibles de l'eau et un hydrocarbure de densité 1.2. La surface libre du fluide de l'eau est située à une hauteur h_1, l'interface entre les deux fluides à une hauteur h_2 deux piézomètres sont en contact avec chacun des deux fluides.
   (a) Quelles sont les charges (hauteurs de fluide) dans les deux piézomètres ?
   (b) Quelle est la pression à la base du récipient ?
2. Répondre aux même questions si on considère un récipient remplit de trois liquides non miscibles de densités 0.7,1 et 1.6 dont les interfaces sont respectivement situées aux altitudes h_1, h_2 et h_3 ?

9
Loi de Darcy

9.1 Écoulements simple (1D)

1. De l'eau coule dans une colonne de sable (longueur $L = 120cm$, surface $A = 200cm^2$,$\Delta h = 120cm$). Le sable a une porosité $n = 0.36$ et une perméabilité $K = 20m/j$ quelle sont
   (a) le débit au travers de la surface,
   (b) la vitesse de Darcy,
   (c) la vitesse moyenne de l'eau dans la colonne ?
2. Un traceur radioactif indique une vitesse moyenne de $V = 0.75m/j$ dans un aquifère. la pente de la surface piézométrique est de 0.002. Déterminer la perméabilité K de l'aquifère si sa porosité est de $n = 0.2$.

9.2 Écoulements autour d'un puit

1. La pente de la surface piézométrique d'un aquifère confiné d'épaisseur constante D, mesurée à $r = 5m$ d'un puit pompant un débit $Q = 200m^3/h$, est $J = 0.2$. Calculer la transmissivité $T = KD$ de l'aquifère.
2. Déterminer le débit d'un puits en nappe captive compte tenu des informations suivantes : Différence de hauteurs piézométriques de 2.5 m entre deux piézomètres situés respectivement à 10 et 30 m du centre du puits ; épaisseur de la nappe : 30 m ; conductivité hydraulique : 0.0001 m/s. On suppose que les mesures sont réalisées en régime permanent.
3. Déterminer le coefficient de perméabilité dans une nappe captive si les lectures à partir du niveau statique dans deux piézomètres situés respectivement à 20 et 150 m du puits sont, dans l'ordre 3.3 et 0.3 m. L'épaisseur de la nappe est de 30 m. et le débit est de 0.2 m^3/s.

9.3 Le problème du filtre à café

On considère l'écoulement de l'eau au travers du café dans un filtre (figure 9.1). À l'instant initial, un réservoir d'eau, de hauteur h en son centre ($h \leq 10$cm), repose sur une couche de café d'épaisseur $e = 2$cm. On

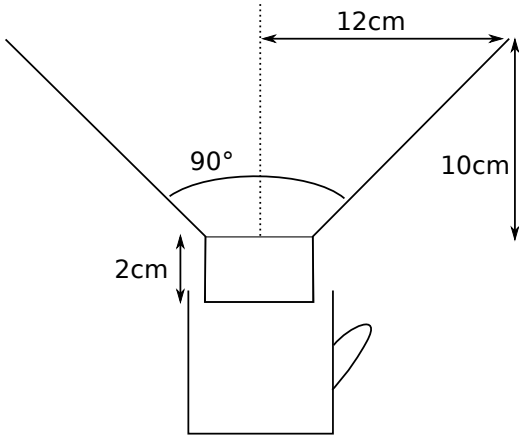


Figure 9.1 –

fera l'hypothèse que la vitesse de filtration au travers du café est suffisamment faible pour que la pression dans le réservoir soit considérée comme hydrostatique. On considérera un filtre plan (de largeur fixe w).

1. estimer le débit incrémental dans le filtre,
2. calculer combien de temps il faut pour que l'eau contenue du filtre ait entièrement percolé à travers le filtre si le réservoir était entièrement rempli d'eau,
3. faire, l'application numérique avec $K = 0.001$ m/s.

10
Ecoulements plans

10.1 Écoulement dans le plan vertical

10.1.1 Ecoulement en nappe libre

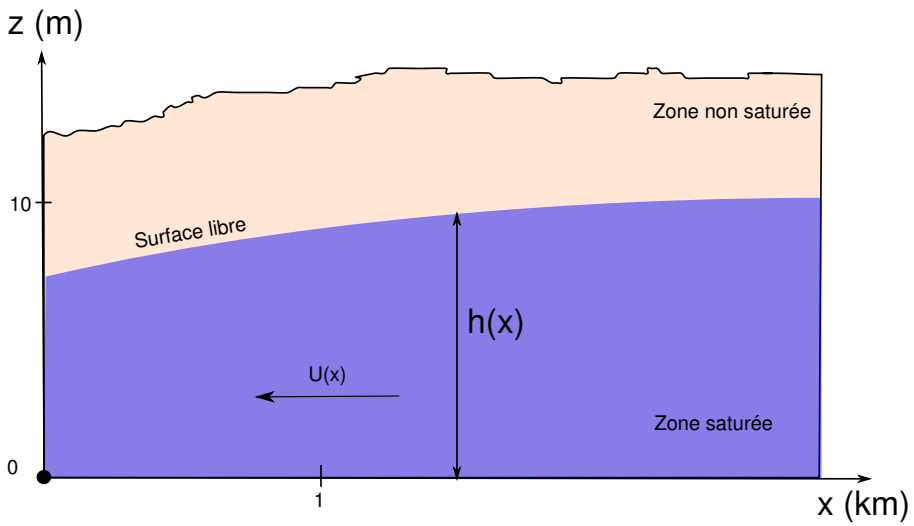


FIGURE 10.1 – Représentation schématique d'un écoulement horizontal dans une nappe libre en régime permanent.

Soit une nappe libre figurée en coupe sur la figure 10.1

1. Sur la figure le vecteur vitesse est horizontal. Pourquoi ?
2. La charge varie-t-elle de façon significative avec la profondeur ?
3. Soit K la conductivité hydraulique de la nappe que l'on considère constante. Quelle est l'expression de la vitesse $\mathbf{U}$ en tout point de coordonnée x ?
4. Quelle est l'expression du débit par unité de largeur (direction perpendiculaire au plan) qui s'écoule au travers de la nappe en x ?
5. Que vaut la transmissivité de la nappe au point x ?

10.1.2 Nappe captive

On considère un aquifère d'épaisseur D constante dans lequel à lieu un écoulement uniforme et permanent.

1. On suppose que l'écoulement se fait uniquement dans la direction des x et que la charge $\phi(x_0) = \phi_0$ et $\phi(x_1) = \phi_1$.
   (a) Trouvez l'expression de $\phi(x)$.
   (b) En notant K la perméabilité du milieu calculez Q.
2. Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse d'un écoulement horizontal est justifiée en étudiant l'écoulement dans le plan xy

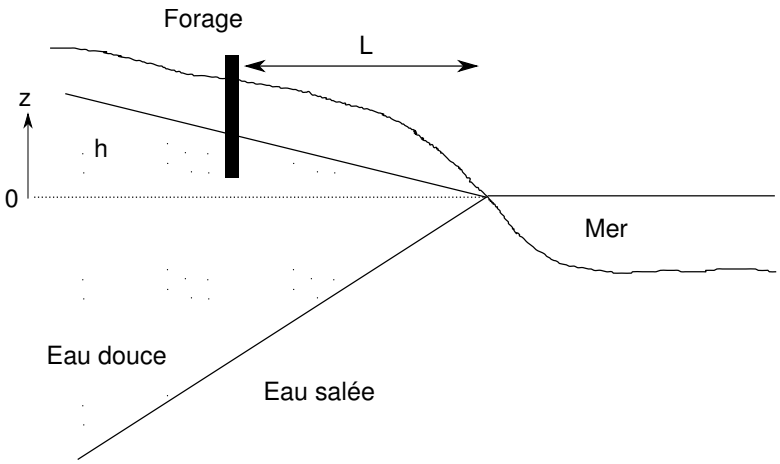


FIGURE 10.2 – Biseau salé

(a) Quelles sont les conditions aux limites supérieure et inférieure de la nappe captive ?

(b) En supposant $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ résolvez l'équation de Laplace en 2D et montrez que les conditions aux limites imposent $Y(y) = Constante$.

10.1.3 Nappe côtière, biseau salé

On considère une nappe côtière de surface libre (figure 10.2). On cherche à creuser un puits afin d'alimenter une station balnéaire. Le puits serait creusé à une distance L du rivage. La hauteur piézométrique à cet endroit est h. On cherche la profondeur maximale à laquelle on peut forer sans atteindre la limite eau douce – eau salée. On suppose que l'interface entre les deux types d'eau est abrupte et stationnaire.

1. Écrire en chaque point P de l'interface la pression correspondant à l'eau de mer et à l'eau salée.
2. Calculer la profondeur Z de l'interface sous un point où la surface piézométrique en surface est à hauteur h sachant que la masse volumique de l'eau douce est 1000 kg/m3 et celle de l'eau salée 1025 kg/m3 (cela correspond à 32 grammes de sel par litre d'eau). Cette relation est connue sous le nom de « Principe de Ghyben-Herzberg ». Noter que l'on a supposé ici que le biseau est une droite.
3. Application : h = 2 m, L = 200 m, calculer la profondeur de la limite eau douce – eau salée. Quel est l'angle du biseau ?
4. On aménage un puits dont la base est à l'altitude –20m. Calculer le rabattement maximal admissible.

10.1.4 Equation de la diffusivité

Un plateau de perméabilité uniforme K est délimité par deux rivières séparées par une distance L. La hauteur de la surface libre au niveau des rivières est $h(0) = h1$ et $h(L) = h2$.

1. Quelle est la forme de la surface libre de la nappe qui sépare les deux rivières ?
2. Une précipitation P s'infiltre dans le massif. Résoudre les questions 1 à 3,
3. À quelle distance x se fait la séparation des eaux ?

10.2 Écoulement dans le plan horizontal

10.2.1 Calcul d'un vecteur vitesse

On dispose de trois valeurs de la charge h mesurées dans trois piézomètres et représentées sur la figure 10.3. On considérera que l'écoulement est horizontal (approximation de Dupuit). Évaluez et représentez la vitesse de l'écoulement dans la nappe pour une perméabilité $K = 10^{-5}$ m/s ?

10.2.2 Écoulement axisymétrique autour d'un puit

1. On considère l'écoulement autour d'un puits dans une nappe captive de profondeur D et de conductivité hydraulique K. La charge s'écrit $h(r)$. On considère que l'écoulement se fait en régime permanent.
   (a) Dériver l'équation de continuité pour h autour du puit.

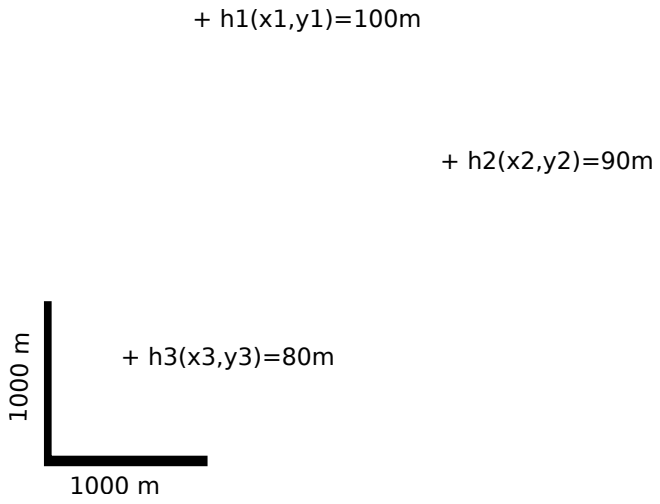


FIGURE 10.3 –

(b) À l'aide de la loi de Darcy, écrire cette équation sous la forme d'une équation différentielle de la charge h

(c) Quelle est la solution de cette équation

(d) Reprendre les deux dernières questions du 9.2. Sont-elles très différentes de ce que vous aviez trouvé ?

2. Si maintenant on considère que la nappe est libre et que l'écoulement est toujours horizonal (approximation de Dupuit).

(a) Quelle est l'épaisseur de la nappe ?

(b) Que devient la forme de l'équation de continuité ?

(c) Quelle en est la solution ?

(d) Comparer les solutions

10.2.3 Alimentation en eau potable

Une municipalité compte 15 000 habitants, sa population croit et on s'attend à atteindre une population de 22 000 habitants dans les années qui arrivent. Aujourd'hui la consommation globale par habitant est stable à 375 litres par jour. La municipalité souhaite savoir si l'installation d'alimentation en eau potable actuelle sera toujours suffisante quand la population aura atteint la taille estimée.

La ressource en eau est constituée par une nappe libre, captée au moyen d'un puits de 50 cm de rayon. La charge piézométrique disponible est de 30 mètres et le coefficient de perméabilité est de 0.0003 m/s.

1. Calculer la consommation d'eau potable annuelle totale actuelle de la commune.
2. Calculer le débit actuel du puits
3. Sachant que le rayon d'influence [1] est de 500 m pour le débit actuel quel est le rabattement,
4. Évaluer la vitesse de filtration à proximité du puits,
5. La nappe peut-elle alimenter 22000 personnes en eau ?

10.2.4 Réfraction des vitesses

On considère un écoulement dans le plan (Oxy). Dans ce plan deux roches aquifères, de conductivités hydrauliques respectives K_1 et K_2, présentent une interface le long de la droite (Oy) (figure 10.4). L'angle d'incidence de la vitesse de Darcy $\mathbf{U}$ dans le milieu 1 par rapport à l'horizontale (Ox) est α. Les charges dans chacun des deux milieux sont respectivement $H_1(x, y)$ et $H_2(x, y)$

1. Que peut on dire de la charge H_1 et H_2 sur l'interface, dans les milieux 1 et 2 respectivement ?
2. En déduire une relation entre les gradients de H_1 et H_2 selon la direction tangentielle y.
3. Relier le gradient tangentiel de H_1 au gradient de H_2 selon la direction de l'écoulement.

1. Le rayon d'influence est une notion courante en hydrogéologie. Il représente le rayon au delà duquel un puits n'a plus d'influence sur la nappe c'est à dire le rayon ou la charge de la nappe n'est pas altérée par le pompage. Sauf en de rares cas cette notion n'a pas de sens même si elle est utile en pratique.

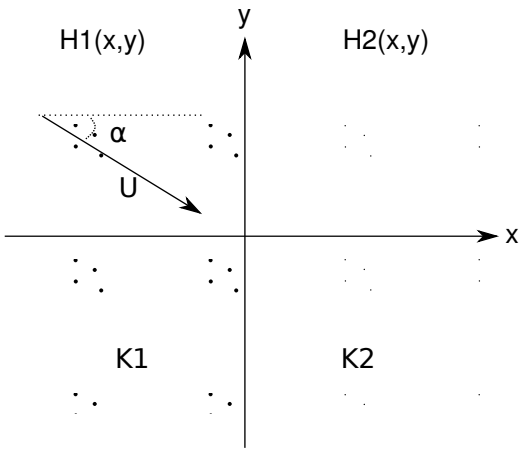


FIGURE 10.4 – Écoulement dans des milieux de perméabilité différente

4. Ecrire d'autre part la « loi » de Darcy dans les milieux poreux 1 et 2.
5. Le débit qui traverse l'interface est identique de part et d'autre. Écrire la relation correspondante (entre les débits $Q_{1,x}$ et $Q_{2,x}$ perpendiculaires à l'interface). Que peut-on déduire de l'angle β que fait l'écoulement dans le milieu 2 avec l'horizontale ?

11
Lignes et fonction de courant

1. Montrer que pour qu'une fonction courant existe il faut que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
2. Soit la fonction $\Psi(x, y) = x^3 - y^3$ montrer qu'elle ne représente pas la fonction courant d'un écoulement potentiel.
3. La fonction $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ est elle solution de l'équation de Laplace ? Si oui quelle est la fonction courant correspondante ?
4. Soit la fonction $\Phi(x, y) = ax + by$.
   (a) Montrer que Φ suit l'équation de Laplace.
   (b) Calculer la fonction courant $\Psi(x, y)$ correspondante (on supposera que le milieu a une conductivité hydraulique K).
   (c) Tracer le réseau des équipotentielles et des lignes de courants dans les cas suivants
   — $a = 0,\ b = 1,\ K = 1m/s$,
   — $a = 1,\ b = 2,\ K = 0.5m/s$
   On prendra un espacement $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 1m$
   (d) Quel est le débit passant entre deux lignes de courant ?
5. La fonction courant d'un écoulement plan est $\Psi(x, y) = b(x^2 - y^2)$.
   (a) Déterminer u en un point.
   (b) Quelle est l'expression de la charge piézométrique Φ (on appellera K la conductivité hydraulique du milieu).
   (c) Tracer le réseau des lignes de courant et des équipotentielles en prenant un espacement $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 1m$ pour $K = 1m/s$
6. Soit la fonction $\Phi(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$
   (a) Est elle solution de l'équation de Laplace ?
   (b) Si oui quelle est la fonction courant correspondante ?
   (c) Tracer le réseau des lignes de courant et des équipotentielles en posant $b = 1$ et en prenant un espacement $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 1m$ ($K = 1m/s$)
7. Soit la fonction $\Phi(r) = \ln(r)$ en coordonnées polaires (r, θ)
   (a) Est elle solution de l'équation de Laplace ?
   (b) Si oui quelle est la fonction courant correspondante ?
   (c) Tracer le réseau des lignes de courant et des équipotentielles en posant $b = 1$ et en prenant un espacement $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 1m$ ($K = 1m/s$)

12
Problèmes

12.1 Stockage de Fontsante

Il est envisagé de construire un centre de stockage de déchets d'incinération d'ordures ménagères dans le massif de l'Esterel (Var) à proximité du site de l'ancienne mine de fluorine de Fontsante 12.1 et 12.2. le vallon qu'on envisage d'utiliser se situe le long de la ligne de partage des eaux du Massif : d'un côté le versant ouest qui est drainé vers la retenue de St-Cassien (laquelle constitue une ressource pour la fourniture en eau potable de l'Est Varois), et de l'autre le versant est qui s'écoule vers la Sioule et la mer, sans prélèvements d'eau potable.

Le site choisi dit du "Filon blanc" est drainé en surface vers l'Est et non vers la retenue de St-Cassien qui doit être protégée de tout danger de pollution. L'étude se propose de savoir ce qu'il en est des écoulements souterrains.

12.1.1 Écoulements

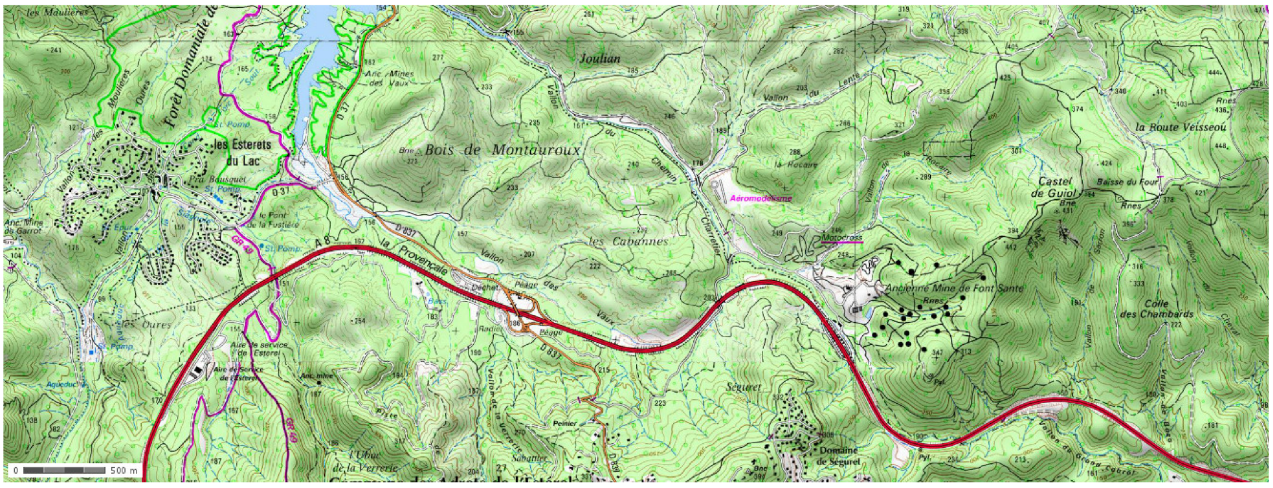
Le sol est constitué de schistes très peu perméables en profondeur mais diaclasés et altérés en surface. La perméabilité est plus importante dans l'axe des vallons, et plus faible dans les versants. Elle est estimée en moyenne à $K = 10^{-7} m/s$ sur les 20 premier mètres, et $K = 10^{-10} m/s$ en dessous. On a foré 8 piézomètres dont les positions et les niveaux moyens mesurés sont donnés dans la carte jointe 12.2. Deux mesures ont été réalisées donnant à peu de chose près les mêmes valeurs.

1. Quelle est l'échelle de la carte ?
2. Tracez approximativement la carte piézométrique du vallon du Filon Blanc. On prendra par exemple une isopièze tous les 5m. Essayez de distinguer les isopièzes dont vous pensez qu'elles sont probables et celles qui sont extrapolées.
3. En quoi le drainage de surface (limites de versants en blanc et thalwegs en bleu) constitue-t-il une aide ?
4. En déduire les lignes de courant et la direction de l'écoulement.
5. Quelle approximation faîtes vous pour répondre à la question précédente ?
6. Le site présente-t-il un danger potentiel pour la retenue de St-Cassien ?
7. Où préconiseriez vous le forage de deux nouveaux piézomètres ?
8. Estimez, en justifiant votre choix, le flux d'eau souterraine susceptible de s'écouler sous le site de Stockage

12.1.2 Pollution par solubilisation

On estime qu'une lame d'eau annuelle de 10mm est susceptible de s'infiltrer à travers le site de stockage (recouvert de terre compactée). En s'infiltrant on estime que l'eau se charge d'éléments en solution à hauteur de 1g/l. La porosité du sous-sol à l'aplomb du site est de l'ordre de 10%

1. Les éléments solubilisés ont une diffusivité $D = 1500\,\mu\text{m}^2/\text{s}$, quel est le temps caractéristique de propagation du polluant sur toute l'épaisseur de la nappe sous la zone de stockage ?
2. En utilisant la vitesse de Darcy quel est les temps caractéristique de propagation du polluant à l'horizontal sur une distance équivalente à l'épaisseur de stockage ?
3. Le gradient de pente nous donne une indication sur le rapport entre vitesse verticale (que nous avons négligée) et la vitesse horizontale des écoulements. Si on considère que le polluant est advecté verticalement par l'eau qui s'écoule sous la zone de stockage quelle est l'échelle de temps correspondante ?
4. Comment ces échelles de temps se comparent-elles ?
5. Quelles conclusions pouvez-vous tirer de ces calculs ?
6. Si vous deviez résoudre ce problème de pollution quel type d'équation serait le plus adapté ?



© IGN 2012 – www.geoportail.gouv.fr/mentions-legales

Longitude : 6° 49' 10.9" E
Latitude : 43° 32' 55.1" N

FIGURE 12.1 – Carte régionale

12.2 Etude de l'alimentation de la Loire entre Giens et Blois

La nappe de Beauce est une grande nappe constituée par des formations calcaires (Calcaires de Pithiviers, d'Etampes, de Brie et de l'Orléanais). Les transmissivités moyennes mesurées dans les calcaires de Pithiviers et d'Etampes, sur lesquels coulent la Loire, sont de l'ordre de ($T \sim 5 \cdot 10^{-2} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$). La carte représente les hauteurs piézométriques mesurées en 2002 en période de hautes eaux.

1. Tracer la (ou les) limite(s) de partage des eaux souterraines.
2. Tracer quelques lignes de courants montrant les grandes directions d'écoulement.
3. Estimer et représenter le vecteur gradient de charge tous les 10 km entre Blois et 10km au NW de Sully sur Loire.
4. Estimer le débit moyen par unité de largeur apporté par la nappe à la Loire pour chacune de vos mesures.
5. Intégrer ce débit et calculer l'apport total entre Giens et Blois.
6. le débit moyen mensuel de la Loire, calculé de décembre à février, est de 526 m^3/s à Giens et de 536 m^3/s à Blois. Quelle est la contribution directe de la nappe de la Beauce à l'augmentation de débit de la Loire ?
7. En fait la contribution de la nappe est estimée à environ $26\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. D'où peut provenir l'écart constaté.

12.3 Écoulement dans les sables de Fontainebleau au niveau du plateau de Saclay

La figure 12.4 représente la nappe des sables de Fontainebleau au niveau du plateau de Saclay dans les Yvelines. Les sites 1 et 2 sont deux sites de recherches nucléaires. L'objectif de ce travail est de comprendre la façon donc l'eau s'écoule entre les deux rivières qui entaillent le plateau, la Bièvre au nord et l'Yvette au sud, et d'appréhender le devenir d'une éventuelle pollution de l'un des sites de recherche.

Nous allons tout d'abord compléter la carte. Dans un second temps nous nous intéresserons à l'écoulement en plan le long d'une coupe dans la nappe. Enfin nous essaierons de comprendre ce qui se passerait en cas de pollution accidentelle.

12.3.1 Analyse de la carte

1. Tracer les lignes de courant partant des points X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et compléter la légende
2. Tracer la ligne de partage des eaux de la nappe de les sables de Fontainebleau entre la Bièvre et l'Yvette. Idem compléter la légende

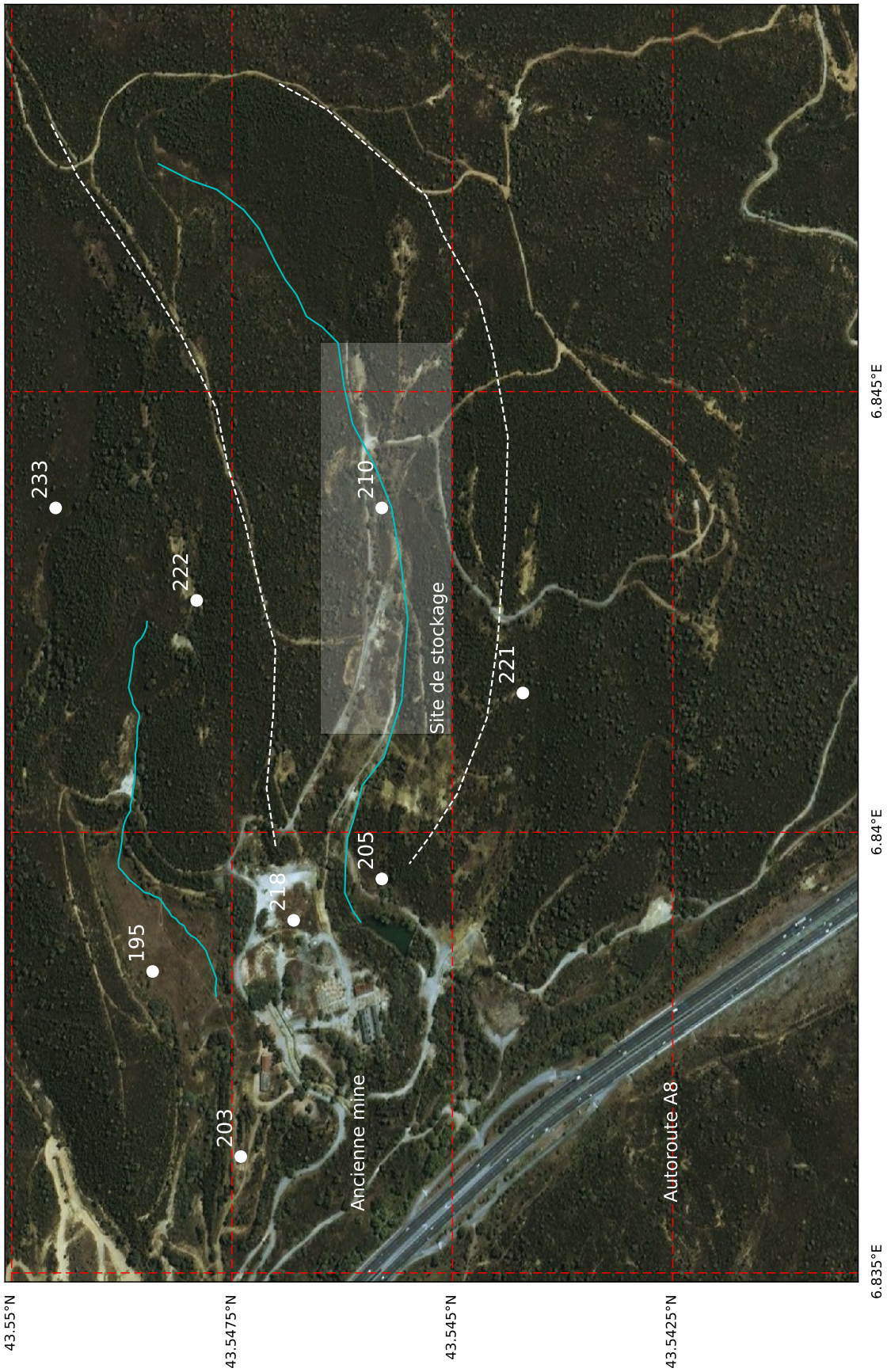


Figure 12.2 – Site d'étude

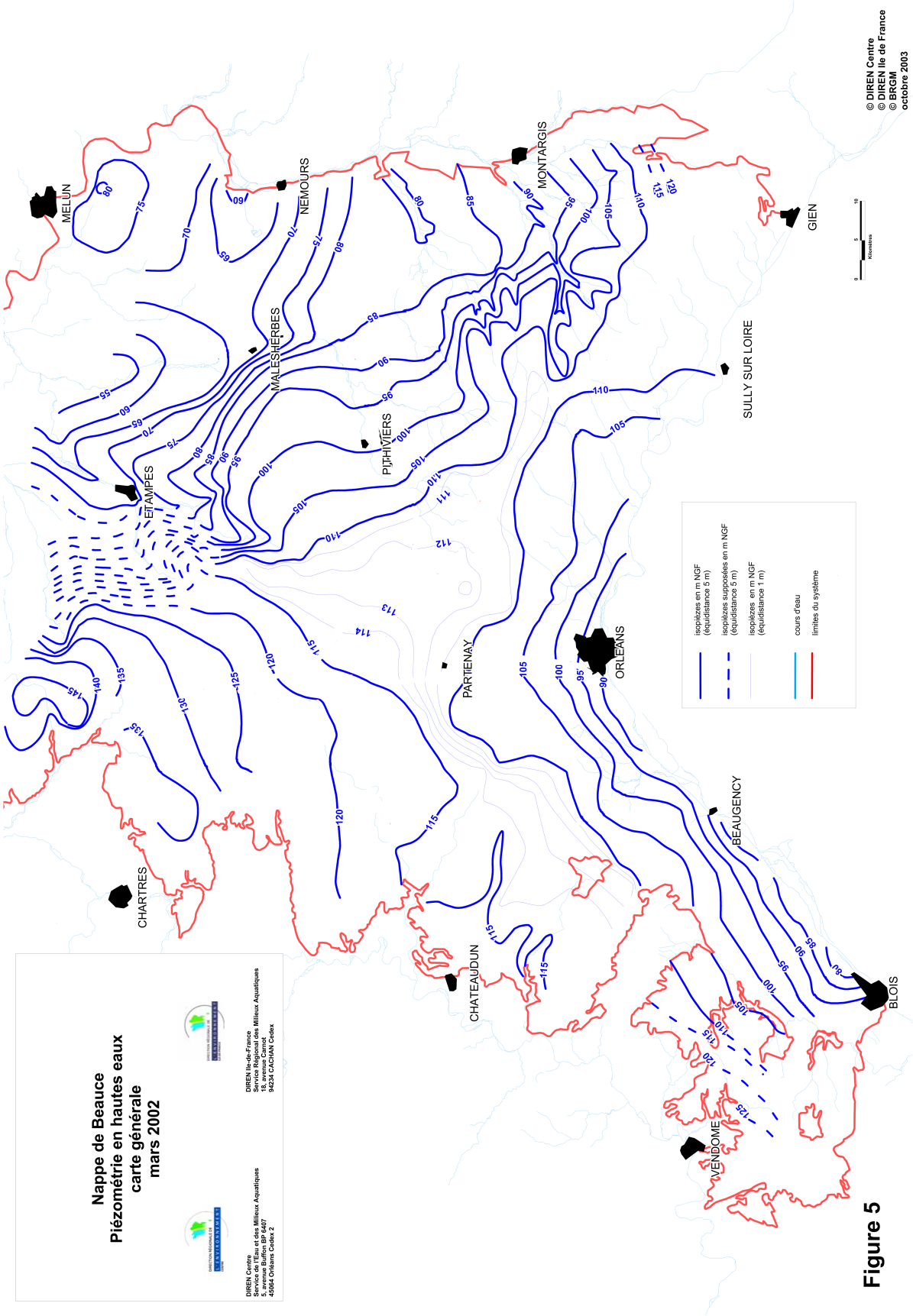


FIGURE 12.3 – Carte piézométrique de la nappe de Beauce (2002), source des données : [12]

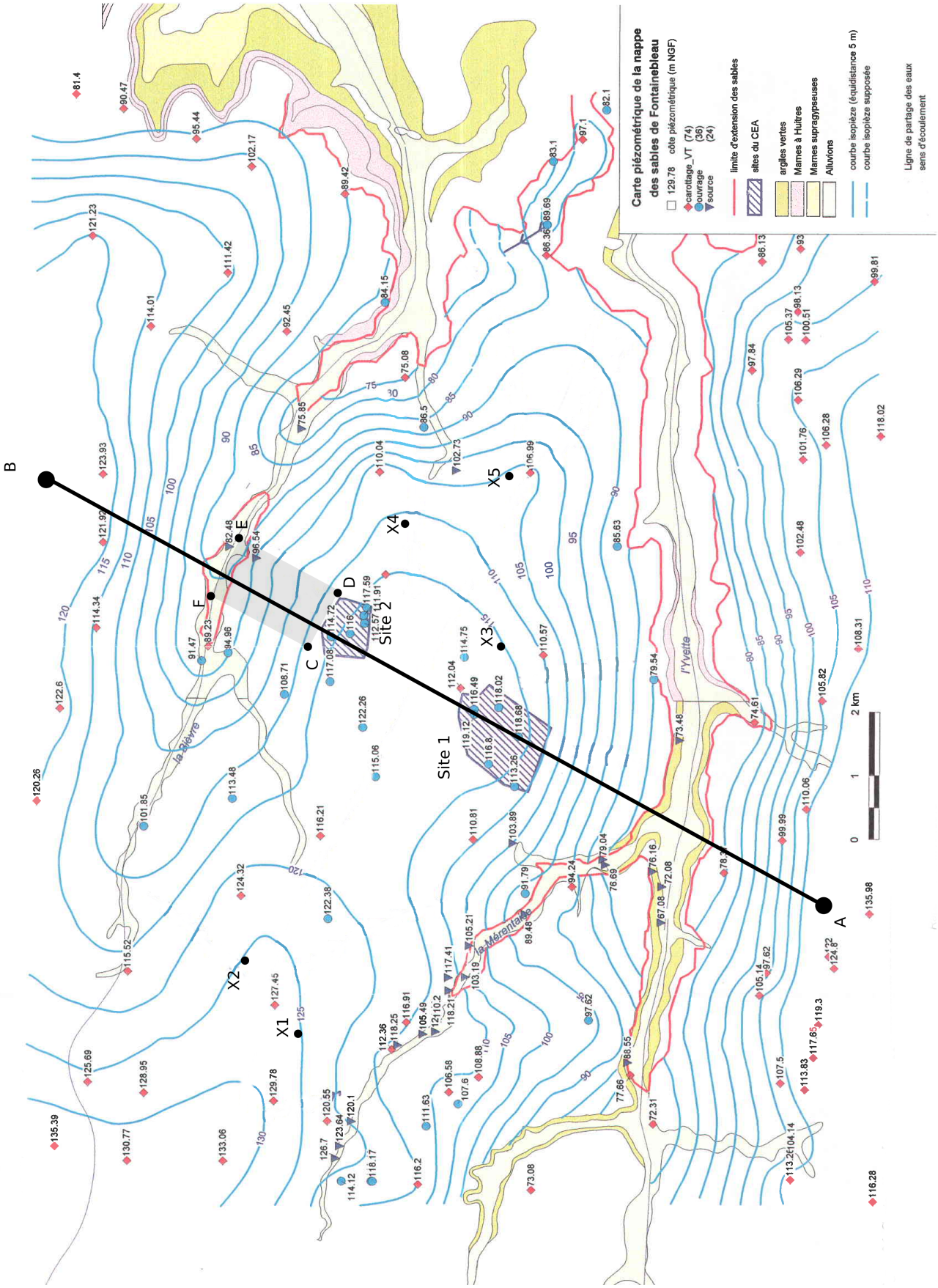


FIGURE 12.4 – Carte hydrogéologique du plateau de Saclay. Source : [13]

12.3.2 Etude des écoulements le long d'une coupe

1. Représenter le profil des hauteurs piézométriques de la nappe le long du segment de droite [AB].
2. Représenter la position de la Bièvre et de l'Yvette.
3. Tracer la droite passant par les deux rivières. A partir d'arguments géologiques, montrer que cette droite correspond, dans l'hypothèse la plus simple, au mur de la nappe des sables de Fontainebleau
4. Calculer le gradient hydraulique moyen entre le site 2 et la Bièvre.
5. En supposant la perméabilité de la formation égale à 10^{-5} m/s calculer la vitesse de Darcy U moyenne sur le segment
6. Calculer le débit par unité de largeur q
7. Pour une porosité ω de $\sim 15\%$, calculer le volume d'eau V contenu dans la zone délimitée par le rectangle CDEF
8. Expliquer pourquoi le flux entrant ou sortant de ce volume par les côtés DE et CF est approximativement nul.
9. Si la nappe est en régime permanent que vaut le flux Q entrant par CD et sortant par EF ?

12.3.3 Pollution par infiltration

Le site 2 pollue la nappe en laissant s'infiltrer un flux massique Q_p par unité de temps de fluide fortement radioactif. On néglige les phénomènes d'advection et de diffusion et on considère le volume de nappe compris dans le rectangle CDEF comme un réservoir dont les eaux se mélangent instantanément. On considère en outre que la concentration en fluide polluant est nulle dans les eaux de la nappe situées à l'extérieur du rectangle CDEF.

1. Par où le polluant est-il évacué ? Quelle rivière est susceptible d'être touchée par la pollution ?
2. Écrire l'équation de conservation de la masse M du polluant et la résoudre. on considérera qu'il n'y a ni adsorbtion ni sédimentation.
3. Quelle est l'échelle de temps τ problème ? De quels paramètres dépend-elle ?

12.4 Alimentation des lacs du Médoc

Entre l'estuaire de la Gironde et l'océan atlantique, deux lacs, les lacs d'Hourtin au nord et de Lacanau au sud, sont alimentés par une nappe libre. Celle-ci s'écoule dans une formation aquifère constituée des sables des Landes, des sables de Castets et d'anciennes dunes quaternaires proches de l'océan. La figure 12.8 représente la carte des isopièzes de la nappe. On se propose ici de s'intéresser à la dynamique d'alimentation de ces deux lacs d'eau douce situés à proximités de l'Océan.

12.4.1 Hydrogéologie des formations sableuses

Aux endroits où les données manquent on pourra faire des hypothèses raisonnables afin de remédier au manque de données.

1. Représenter sur la figure 12.8 le bassin d'alimentation des lacs du médoc. On tracera la limite de partage des eaux de la nappe séparant la région qui alimente les lacs des régions qui alimentent la Gironde, l'océan ou la bassin d'Arcachon plus au sud.
2. Représenter quelques lignes de courant qui illustrent les mouvements d'eau dans la nappe
3. Tracer les coupes AB et CD indiquant les hauteurs d'eau dans la nappe sur les figures 12.9 et 12.10. On débutera la coupe à la côte que l'on positionnera au point $(0, 0)$
4. Pour chaque coupe :
   (a) Représentez les lignes de partage des eaux par des lignes verticales.
   (b) Calculez les gradients hydrauliques moyens dans chaque région ainsi délimitée.
   (c) Indiquez par un vecteur les directions d'écoulement.
   (d) Dans la suite on fera l'hypothèse que les écoulements sont horizontaux dans le bassin d'alimentation des lacs. Cette hypothèse vous semble-t-elle raisonnable ?
5. plusieurs mesures ont permis de déterminer une transmissivité $T \simeq 3.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Estimez à partir de cette valeur et de la loi de Darcy le débit d'alimentation de chacun des lacs.

12.4.2 Biseau salé

Les lacs sont remplis d'eau douce et alimentés par la formation décrite précédemment. Sous cette formation aquifère se trouvent un substratum de conductivité beaucoup plus faible. À la limite continent-océan, le substratum se trouve à une profondeur de $z = 50$ m sous le niveau de la mer. Sa limite remonte ensuite doucement pour atteindre une profondeur de $z = 0$ m, 15 km à l'Est de l'océan. La présence de l'océan à proximité induit la formation d'un biseau salé. La densité de l'eau de mer est $\rho_s = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$, celle de l'eau douce est $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

1. Représentez le profil du biseau sur la Coupe A-B entre l'océan et la rive Est du le lac d'Hourtin (on considèrera que le biseau s'arrête quand il touche une formation imperméable)
2. De l'eau salée se trouve-t-elle sous le lac d'Hourtin ?
3. Si oui, à quelle profondeur se situe l'eau de mer sous le lac ?
4. De l'eau de mer est-elle susceptible de polluer le lac ?

12.5 Alimentation des lacs de Biscarosse

Dans les Landes au sud du bassin d'Arcachon, les lacs de Cazeaux, Parentis (Biscarosse) et d'Aureillan forment un système connecté alimenté par une nappe libre. Celle-ci s'écoule dans une formation aquifère constituée des sables des Landes, des sables de Castets et d'anciennes dunes quaternaires proches de l'océan. La figure 12.8 représente la carte des isopièzes de la nappe. On se propose ici de s'intéresser à la dynamique d'alimentation de ces lacs d'eau douce situés à proximités de l'Océan.

Aux endroits où les données manquent on pourra faire des hypothèses raisonnables afin de remédier au manque de données.

1. Représenter sur la figure 12.8 le bassin d'alimentation des lacs. On tracera la limite de partage des eaux de la nappe séparant la région qui alimente les lacs des régions qui ne les alimentent pas.
2. Représenter quelques lignes de courant qui illustrent les mouvements d'eau dans la nappe
3. Tracer les coupes AB et CD indiquant les hauteurs d'eau dans la nappe sur les figure 12.9 et 12.10. On débutera la coupe à la côte que l'on positionnera au point $(0, 0)$
4. Pour chaque coupe :
   (a) Représentez les lignes de partage des eaux par des lignes verticales.
   (b) Calculez les gradients hydrauliques moyens dans chaque région ainsi délimitée.
   (c) Indiquez par un vecteur les directions d'écoulement.
   (d) Dans la suite on fera l'hypothèse que les écoulements sont horizontaux dans le bassin d'alimentation des lacs. Cette hypothèse vous semble-t-elle raisonnable ?
5. Des mesures ont permis de déterminer une transmissivité $T \simeq 6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$. Estimez à partir de cette valeur et de la loi de Darcy le débit d'alimentation de chacun des lacs.

12.6 Nappe de Champigny

Au niveau de la brie, les calcaires dits de Champigny regroupe des formations qui abritent une nappe libre importante pour l'alimentation en eau de l'Île de france

1. Compléter la légende
2. Entourer les flèches qui vous semblent, de façon évidente, mal dessinées. Expliquer pourquoi.
3. En considérant une transmissivité de $10^{-3}\mathrm{m^2/s}$ et en détaillant la procédure de calcul, trouver le débit total de la nappe, dans sa partie alimentant la Seine, au travers de l'isopièze 80m.

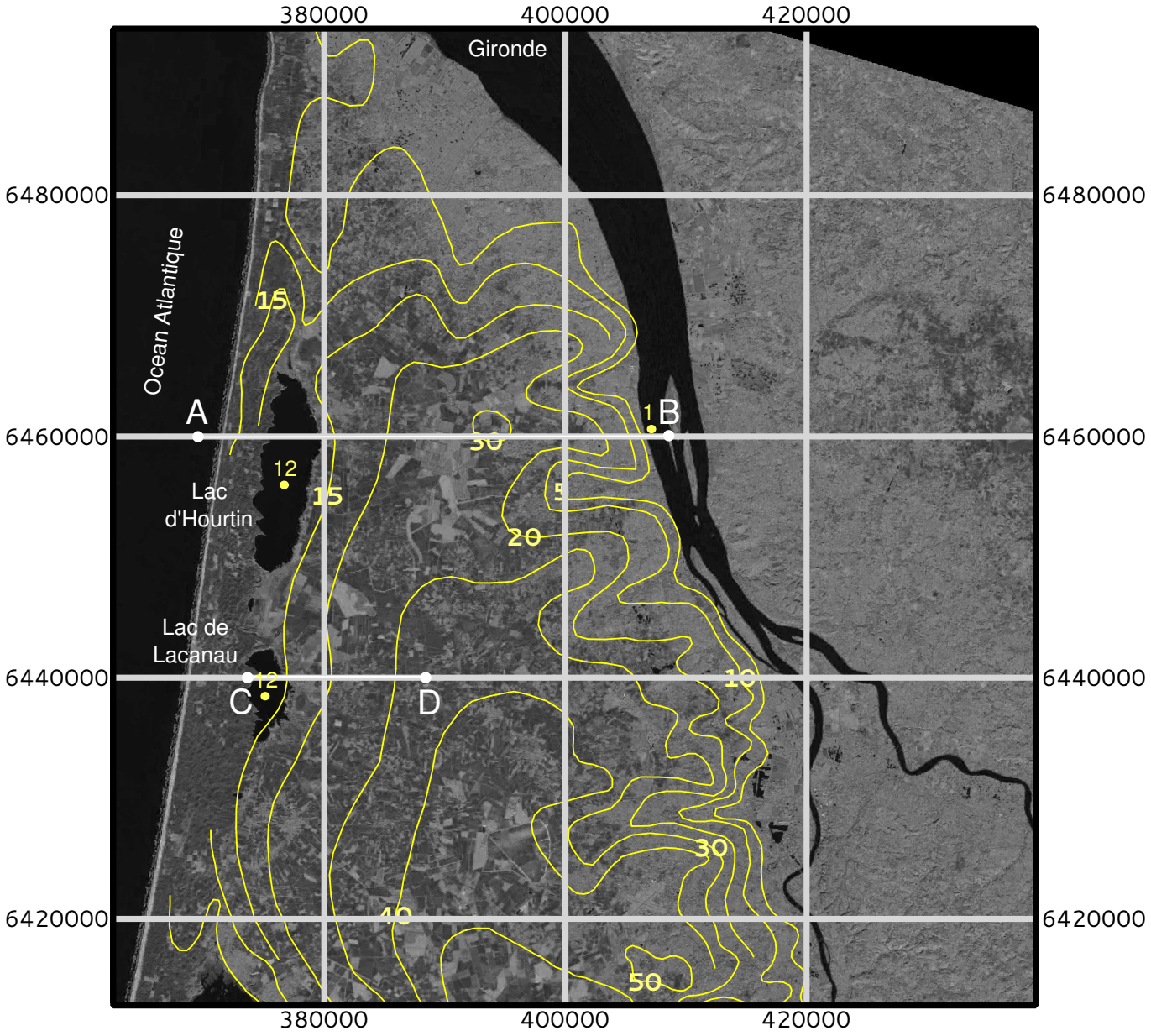


FIGURE 12.5 – Image Landat 8 de la région des lacs médocains sur laquelle sont superposés les isopièzes de la nappe des sables des landes, de Castets et des sables dunaires. La grille de coordonnées des latitudes et longitudes est donnée en mètres. Les cotes sont données en mètres au dessu du niveau de la mer.source des données : [4] et SIGES Aquitaine.

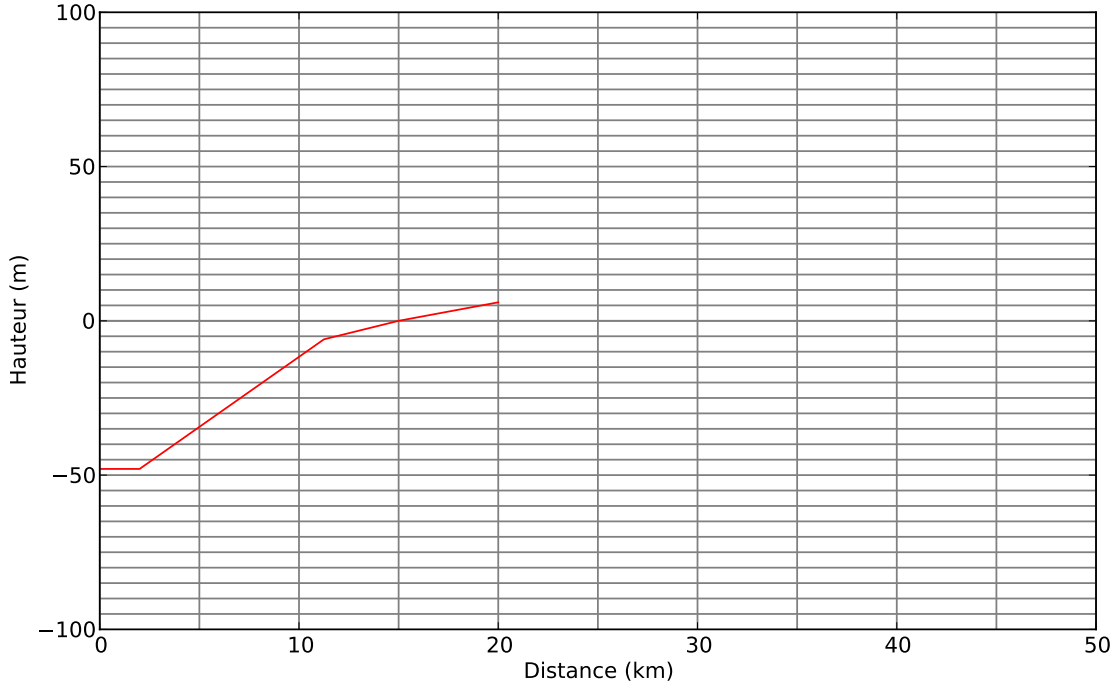


FIGURE 12.6 – Coupe A-B. La ligne rouge représente la limite du substratum considéré comme imperméable

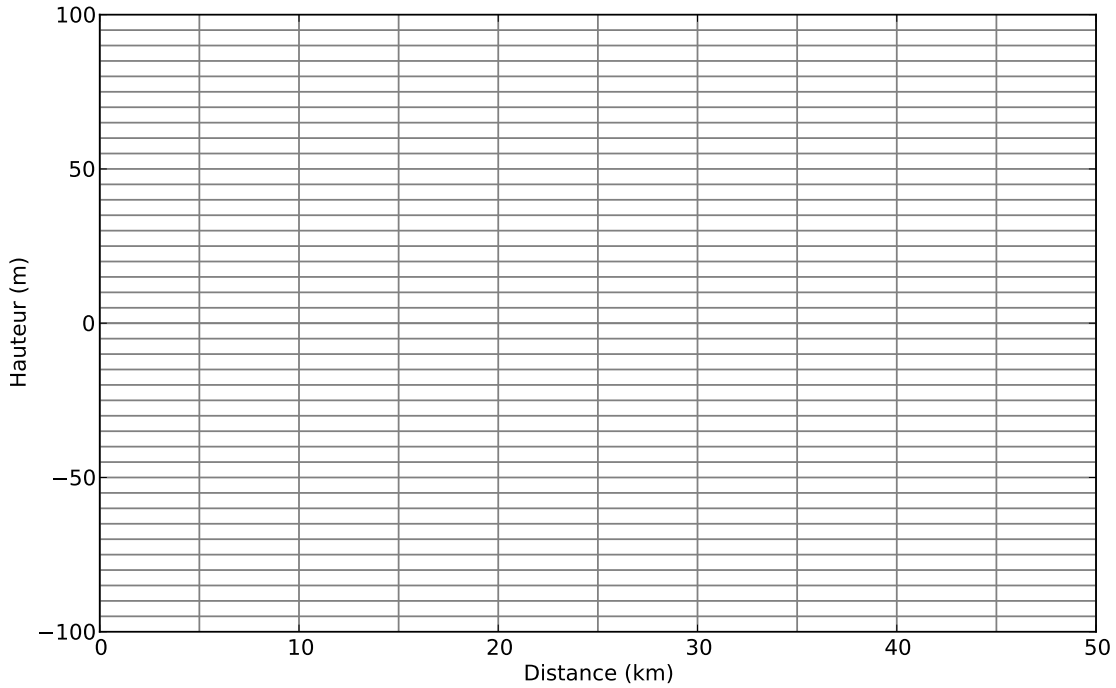


FIGURE 12.7 – Coupe B-C

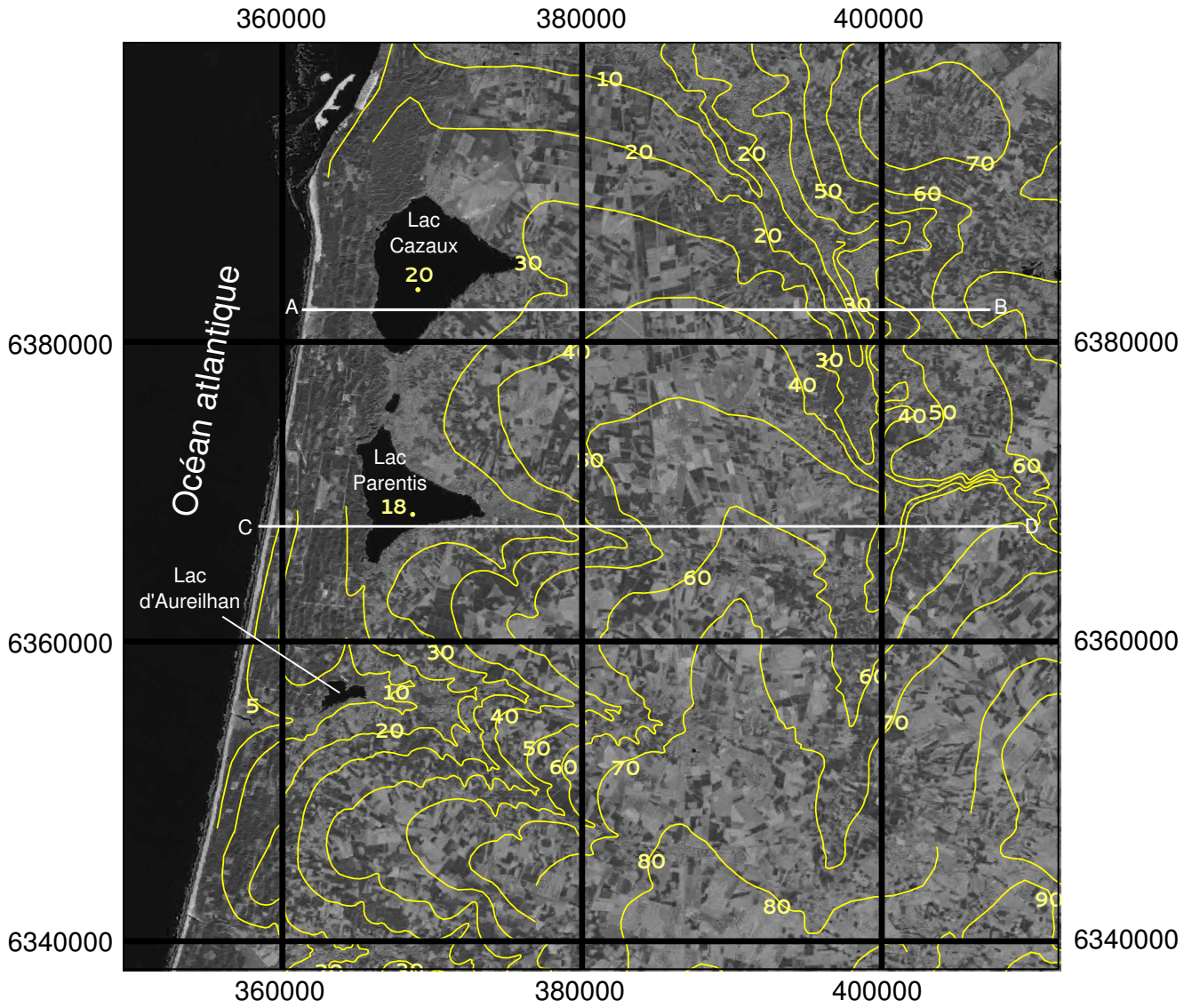


FIGURE 12.8 – Image Landat 8 de la région de Biscarosse sur laquelle sont superposés les isopièzes de la nappe des sables des landes, de Castets et des sables dunaires. La grille de coordonnées des latitudes et longitudes est donnée en mètres. Les cotes sont données en mètres au dessus du niveau de la mer. [4] et SIGES Aquitaine.

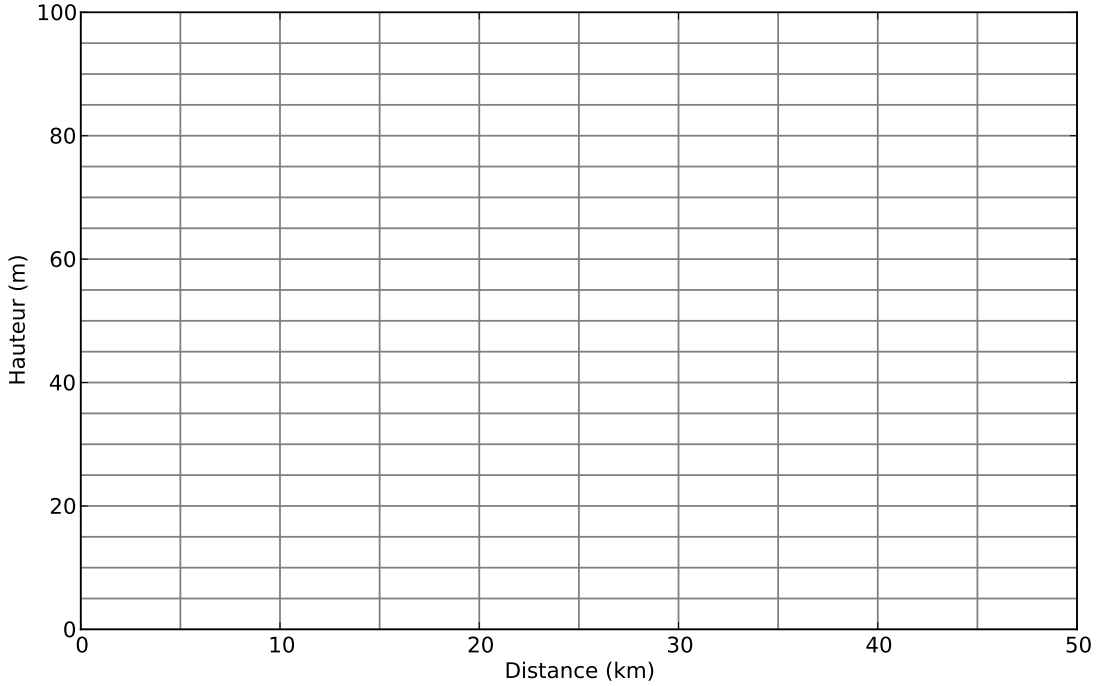


Figure 12.9 – Coupe A-B

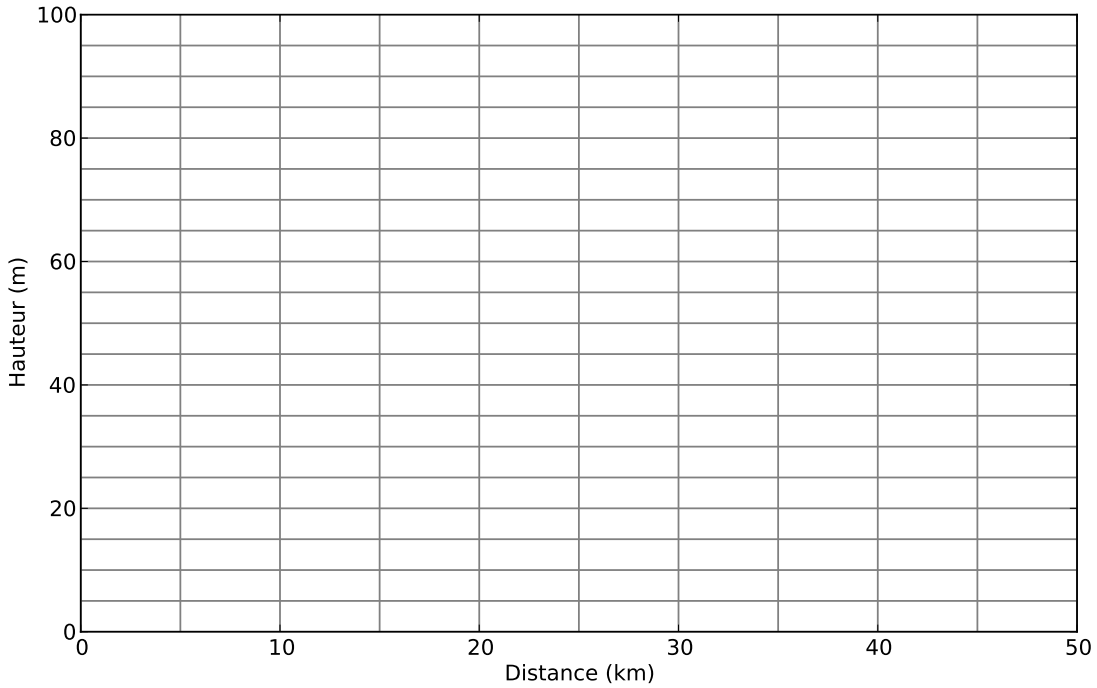


Figure 12.10 – Coupe C-D

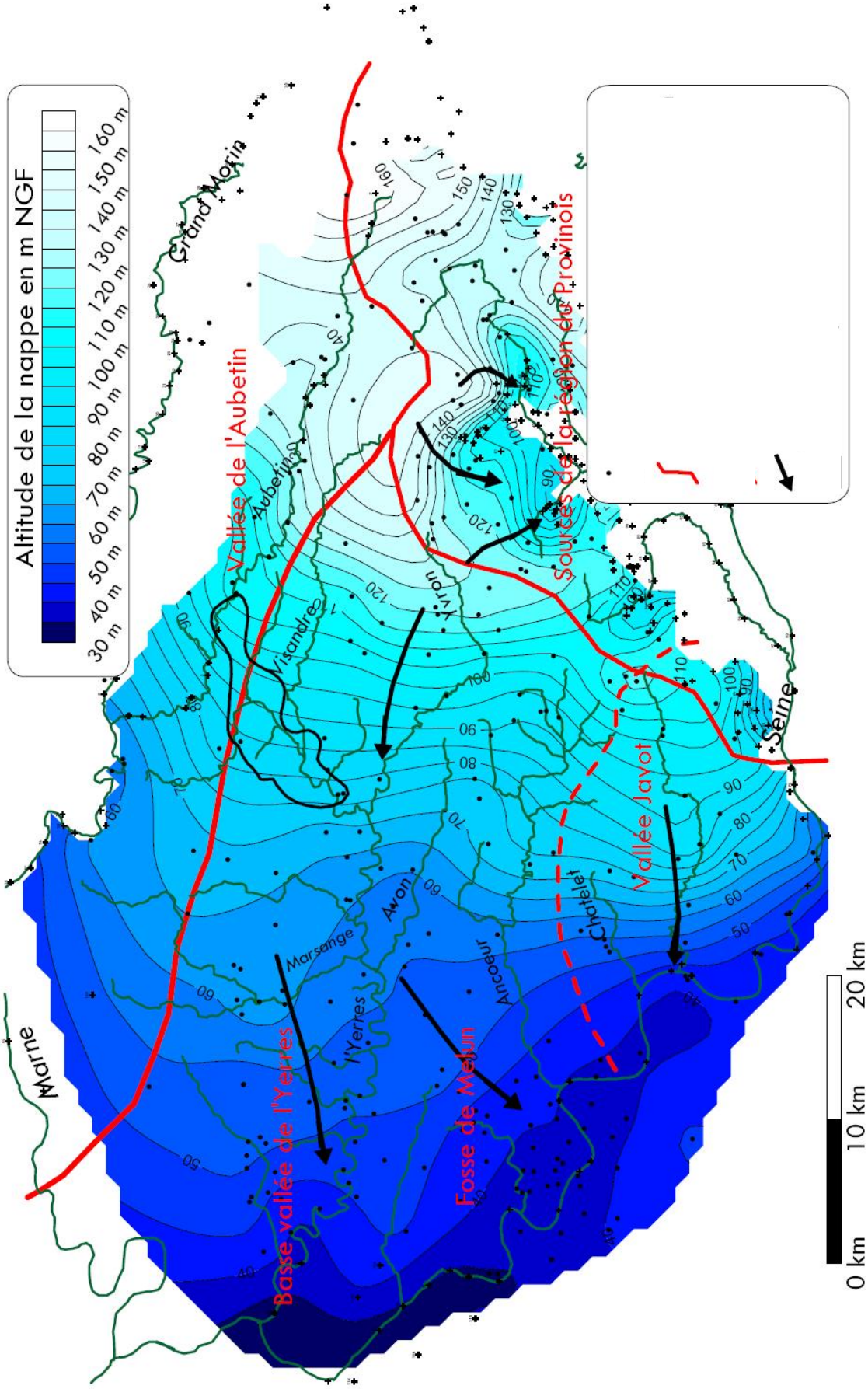


FIGURE 12.11 – Nappe des calcaires de Champigny

13
Bilans et échanges entre réservoirs

13.1 Bilan global et temps de résidence

1. À partir de la figure 13.1 calculer la hauteur d'eau précipitée et évaporée à la surface du globe. Le bilan est il bouclé ?
2. Calculer ces mêmes grandeurs sur les continents. Qu'observez-vous ?
3. Quelle(s) hypothèse(s) pouvez-vous alors formuler ?
4. À partir du volume des réservoirs (table 13.1) et des valeurs de flux (figure 13.1) estimer le temps de résidence de l'eau dans ces différents réservoirs (les regrouper si nécessaire).
5. À quoi correspond ce temps ?
6. Que deviendrait le temps de résidence des continents si le réservoir des glaces disparaissait ?
7. Quelle serait l'évolution de la masse d'eau des continents en fonction du temps si, dû à la fonte des glaciers, le ruissellement était multiplié par deux.

13.2 Pollution ponctuelle d'un réservoir

Un lac artificiel circulaire présente un rayon $R = 100$m et une profondeur moyenne $H = 2$m. A la suite d'une pollution accidentelle, un volume $V = 10000$l de saumure contenant une masse $M = 2000$kg d'un sel est déversé dans le lac. Le lac est traversé par une petite rivière dont le débit est $Q = 0.1$ m^3/s et donc la concentration en ce sel est nulle. Trouver la quantité de sel présente dans le lac à tout instant t.

13.3 Pollution d'un lac : régimes stationnaire et transitoire

Un lac limité en phosphore d'une surface de $A = 80 \cdot 10^6$ m^2 est alimenté par une rivière de débit $Q = 15$ m^3/s dont la concentration en phosphore est $C_i = 0.01$ mg/l. Un effluent ponctuel, issu d'une station de traitement, ajoute un débit massique $Q_M = 1$ g/s de phosphore dans la rivière, en amont du lac. La vitesse de sédimentation du phosphore est $v_s = 10$ m/an. La rivière ressort du lac avec le même débit Q et une concentration C inconnue.

1. Estimer la concentration totale en phosphore dans le lac et la rivière en sortie quand le régime stationnaire est atteint.
2. Quelle devrait être la concentration de l'effluent pour que la concentration du lac reste égale à celle de la rivière.

Réservoir	Masse (10^{15}Kg)	% de la masse
Océans	1400000	95.9
Glaces et Neiges	43400	2.97
Subsurface (nappes)	15300	1
Surface (rivières et lacs)	360	0.02
Atmosphère	15.5	0.001
Biosphère	2	0.0001
Total	1459077	100

Table 13.1 – Masse des différents réservoirs d'eau sur la terre

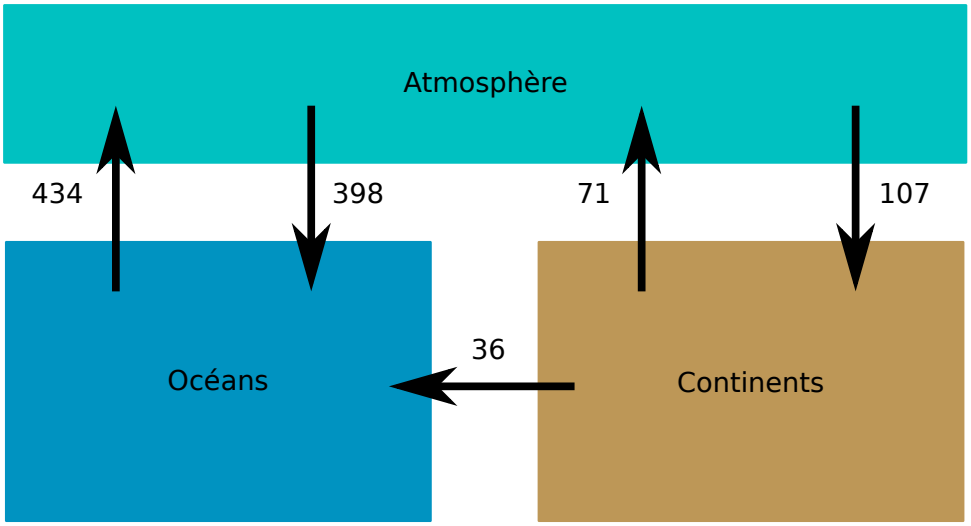


FIGURE 13.1 – bilans des flux hydriques en 10^3 km^3/an (d'après [**?**]).

3. La profondeur moyenne du lac est $H = 10$ m et la concentration en phosphore initiale du lac est nulle. Trouver la quantité de sel présente dans le réservoir à tout instant t
   (a) si l'on néglige la sédimentation,
   (b) si l'on tient compte de la sédimentation.

Troisième partie

Annexes

A
Fonction courant

A.1 Définition

Dans la suite on ne s'intéressera qu'aux écoulements plans (ici dans le plan(xy) mais les résultats sont valable dans un autre plan (xz) par exemple). Nous allons définir une fonction appelée fonction courant $\Psi(x, y)$ qui possède un certain nombre de propriétés dont la plus importante est que toute ligne de courant peut s'écrire comme

$$\Psi(x, y) = C \tag{A.1}$$

où C est une constante.

Sachant que

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0 \tag{A.2}$$

Il existe une fonction vectorielle $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ telle que

$$\mathbf{U} = \mathbf{rot}\mathbf{A} \tag{A.3}$$

Or

$$\mathbf{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{A.4}$$

En égalant les composantes de $\mathbf{U}$ avec les termes du rotationnel on obtient

$$U_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{A.5}$$

$$U_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{A.6}$$

et

$$0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{A.7}$$

Une fonction vectorielle $\mathbf{A}$ telle que

$$A = \Psi(x, y)\mathbf{k} \tag{A.8}$$

et

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{A.9}$$

satisfait à la fois à la définition de la vitesse et aux contrainte imposées par la conservation de la masse. La fonction $\Psi(x, y)$ est appelée **fonction courant**

En comparant avec la définition de la vitesse de Darcy on obtient

$$-K\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, K\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{A.10}$$

ou

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{A.11}$$

A.2 Propriétés

1. Une conséquence de ce qui précède est que la fonction courant Ψ,comme la charge ϕ ou Φ satisfait à l'équation de Laplace

$$\nabla^2\Psi = 0 \tag{A.12}$$

   Ψ et ϕ (ou Φ) sont de fonctions dites harmoniques. Elles ont comme propriétés que les courbes du plan $\Psi(x, y) = C_1$ et $\Phi(x, y) = C_2$ sont orthogonales (ici C_1 et C_2 sont deux constantes quelconques).

2. En outre, Le long d'une ligne de courant on a

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} \tag{A.13}$$

   soit en développant

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy = 0 \tag{A.14}$$

   ou encore

$$d\Psi = 0 \tag{A.15}$$

   La fonction courant Ψ est une constante le long d'une ligne de courant.

3. Enfin, le débit s'écoulant entre entre deux lignes de courant est donné par

$$Q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} dQ = \Psi_2 - \Psi_1 \tag{A.16}$$

B
Conservation de la masse en coordonnées cylindriques

B.1 Gradient d'une fonction

Connaître cette formulation est important car, en hydrogéologie, un des écoulements les plus importants est celui qui se produit autour d'un puits. Or écrire la conservation de la masse autour d'un puits revient à chercher l'écriture de

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0 \tag{B.1}$$

en coordonnées cylindriques. En effet on peut facilement imaginer qu'autour d'un puits l'écoulement sera orienté de façon radiale et que dans ces conditions il est plus intéressant de travailler en coordonnées cylindriques ou polaires (dans le cas d'un écoulement plan)

Les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont liées par les relations suivantes

$$x = r\cos\theta \tag{B.2}$$
$$y = r\sin\theta \tag{B.3}$$
$$z = z \tag{B.4}$$

de la même façon les vecteurs unitaires $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ définissant un repère cartésien sont reliés aux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ définissant un repère cylindrique par

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta \tag{B.5}$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_r\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\cos\theta \tag{B.6}$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_z \tag{B.7}$$

Le gradient d'une fonction f(x,y,z) s'écrit

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{B.8}$$

Afin d'obtenir le gradient d'une fonction en coordonnées cylindrique on va chercher le gradient de $g(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ on écrira

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{B.9}$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \tag{B.10}$$

En effectuant le même calcul pour la dérivée partiel de f par rapport à θ on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta \tag{B.11}$$

Enfin pour z rien ne change.

A partir de (B.10) et (B.11) on peut alors inverser les relations et écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta \tag{B.12}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta \tag{B.13}$$

En reprenant chaque terme de (B.8) et en le remplaçant par son expression en coordonnées cylindriques on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)(\mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta)\\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right)(\mathbf{e}_r\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\cos\theta)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{B.14}$$

Qui se simplifie après calcul en

$$\boxed{\mathbf{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z} \tag{B.15}$$

où l'opérateur ∇ en coordonnées cylindrique est défini par

$$\boxed{\nabla f = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}} \tag{B.16}$$

B.2 Divergence d'un vecteur

Si maintenant on considère une vitesse définie par

$$\mathbf{U} = U_r\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta + U_z\mathbf{e}_z \tag{B.17}$$

la divergence de cette vitesse s'obtiendra par le produit scalaire

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = \nabla\cdot\mathbf{U}. \tag{B.18}$$

On développe ce produit qui donne

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{U} &= \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(U_r\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta + U_z\mathbf{e}_z)\\ &+ \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(U_r\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta + U_z\mathbf{e}_z)\\ &+ \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(U_r\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta + U_z\mathbf{e}_z)\end{aligned} \tag{B.19}$$

le premier et le troisième terme se simplifient simplement. La petite subtilité vient du second en effet les dérivées des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ par rapport à θ ne sont pas nulles. Elles correspondent à une rotation de $\pi/2$ des vecteurs unitaires et valent donc respectivement

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta,\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \tag{B.20}$$

Sachant cela on peut alors simplifier (B.20) et il vient

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0} \tag{B.21}$$

Bibliographie

[1] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* Dover, New York, 1972.

[2] Joseph Boussinesq. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 10 :5–78, 1904.

[3] W. Brutsaert. *Hydrology and introduction.* Cambridge University Press, 2005.

[4] P Corbier, G Karnay, B Bourgine, and M Saltel. Gestion des eaux souterraines en région aquitaine–reconnaissance des potentialités aquiferes du mio-plio-quaternaire des landes de gascogne et du médoc en relation avec les sage, 2008.

[5] Henry Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre dans les questions de distribution d'eau.* Victor Dalmont, Paris, 1856.

[6] S. L. Dingman. *Physical hydrology.* Prentice Hall, second edition edition, 2002.

[7] R Allan Freeze and John A Cherry. *Groundwater.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

[8] Eric Gilli, Christian Mangan, and Jacques Mudry. *Hydrogéologie-4e éd. : Objets, méthodes, applications.* Dunod, 2016.

[9] Arnold Ivan Johnson et al. Specific yield : compilation of specific yields for various materials. (1662-D), 1967.

[10] G. Marsily (de). *Hydrogéologie quantitative.* Masson, Paris, 1981.

[11] P. YA. Polubarinova-Kochina. *Theory of ground water movement.* Princeton University Press, 1962.

[12] F Verley, F Brunson, P Verjus, and M Cholez. Nappe de beauce-piézométrie hautes eaux 2002. Technical report, Tech. rep., DIREN Centre et Ile-de-France, Orléans, France, 2003.

[13] JF Vernoux, J Barbier, M Donsimoni, JJ Seguin, and J Vairon. Etude hydrogeologique du plateau de saclay (essone). *Rapport BRGM SGR/IDF R*, 40840, 1999.