



HAL
open science

Eléments de logique

Bahloul Rachid

► **To cite this version:**

| Bahloul Rachid. Eléments de logique. École thématique. Maroc. 2018. <cel-01839113>

HAL Id: cel-01839113

<https://hal.science/cel-01839113v1>

Submitted on 13 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Éléments de logique

Dr : Bahloul Rachid

Professeur de l'enseignement Secondaire Qualifiant
bahloul33r@gmail.com

Une théorie mathématiques n'est pas le rassemblement de résultats sans liens les uns avec les autres. A partir de résultats considérés comme acquis le raisonnement mathématique permet d'en démontrer d'autres. Ce raisonnement s'effectue à l'aide de certaines règles que vous utilisez consciemment ou non depuis plusieurs années et qui sont les règles de la **logique**. Il nous faut donc commencer, en utilisant des exemples mathématiques que vous connaissez, par mettre en évidence certaines de ces règles : c'est le contenu de la section I. Nous indiquerons ensuite les principaux types d'énoncés et les divers modes usuels de **raisonnement mathématique**, à la section II.

Contents

1	Propositions et opérateurs logiques	3
1.1	Proposition	3
1.2	Négation d'une proposition	3
1.3	Conjonction	4
1.4	Disjonction	4
1.5	Implication	5
1.6	Équivalence logique	5
1.7	Lois Logiques	6
1.8	Fonction propositionnelle	6
1.9	Quantificateurs	6
1.10	Quantificateurs et connecteurs logiques	7
1.11	Exercices	8
2	Raisonnements	12
2.1	Raisonnement direct	12
2.2	Cas par cas	12
2.3	Contraposée	12
2.4	Raisonnement par l'absurde	13
2.5	Contre-exemple	13
2.6	Raisonnement par équivalences successives	14

2.7	Raisonnement par récurrence	14
2.8	Exercices	16

1 Propositions et opérateurs logiques

1.1 Proposition

Définition 1.1. : Une **proposition** (une assertion) est un énoncé qui peut être vrai ou faux. (V ou F en abrégé).

Exemples 1.2. :

1. " $1 + 6 = 17$ " est une proposition fausse.
2. " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " est une proposition fausse.
3. L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur, est une proposition vraie.

Tables de vérité

Lorsque l'on considère une seule proposition quelconque **p** deux cas sont possibles, ce que nous pouvons schématiser (fig . 1) de l'une des manières suivantes (la lettre V signifiant vrai, la lettre F signifiant faux)

(fig . 1)

p
V
F

Le tableau ci-dessus à une colonne est appelé **table de vérité** d'une proposition.

Si nous considérons simultanément deux propositions quelconques p et q, le schéma et le tableau suivant (fig .2)

(fig . 2)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

1.2 Négation d'une proposition

Définition 1.3. A toute proposition p nous pouvons associer une nouvelle proposition appelée **négation** de p qui s'écrit \bar{p} et qui est fausse si p est vraie et vraie si p est fausse. La table de vérité de la négation de p est donnée à la figure 3

(fig . 3)

p	\bar{p}
V	F
F	V

Exemple 1.4. :

1. La négation de la proposition vraie " $6 = 4 + 2$ " est la proposition fausse " $6 \neq 4 + 2$ ".
2. La négation de la proposition fausse " $5 > 9$ " est la proposition vraie " $5 \leq 9$ ".

Exercice 1.5. Dresser la table de vérité de : \bar{p} . Que remarquez-vous ?

1.3 Conjonction

La **conjonction des propositions** p et q est la proposition notée (p et q) qui est vraie uniquement si p et q sont vraies toutes deux. On la note aussi : $p \wedge q$. Sa table de vérité est donnée par :

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.6. Les propositions :

1. $[(3 \in \mathbb{N}) \text{ et } (3 > 8)]$
 2. $[(\sqrt{2} \in \mathbb{N}) \text{ et } (\text{tout carré est rectangle})]$
- sont fausses.

Il est évident que la proposition (p et q) d'une part et la proposition (q et p) ont même valeur de vérité.

1.4 Disjonction

La **disjonction des propositions** p et q est la proposition notée (p ou q) qui est fausse uniquement si p et q sont fausses toutes deux. On la note aussi : $p \vee q$. Dressons sa table de vérité.

p	q	p ou q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On peut dire aussi que la disjonction de p , q est vraie uniquement si au moins une des propositions p , q est vraie.

Exemple 1.7. *Les propositions :*

1. *(7 est premier) ou (6 est pair)*
 2. *(7 est premier) ou (3 est pair)*
- sont vraies.

Exercice 1.8. *Dresser la table de vérité de $[(p \text{ ou } q) \text{ ou } r]$ et de $[(p \text{ ou } q) \text{ et } r]$.*

1.5 Implication

On appelle **implication** de la proposition p et de la proposition q , la proposition $(\bar{p} \text{ ou } q)$ qui est fausse uniquement si p est vraie et si q est fausse.

On la note : $(p \Rightarrow q)$ qu'on lit indifféremment "si p alors q ", "p implique q"

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.9. *Les propositions :*

1. $(2 < 5) \Rightarrow (8 \text{ est pair})$
 2. $(6 \text{ est premier}) \Rightarrow (7 \text{ est pair})$
- sont des propositions vraies.

1.6 Équivalence logique

L'équivalence logique des propositions p , q est la proposition :

$$(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$$

On la note : $p \Leftrightarrow q$ qu'on lit indifféremment "si p équivalente à q ", "p si et seulement si q"

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nous voyons que $(p \Leftrightarrow q)$ est vraie uniquement dans les deux cas : p et q sont toutes deux vraies, p et q sont toutes deux fausses.

Exemple 1.10. *Les équivalences :*

1. $(7 \text{ est premier}) \Leftrightarrow (8 \text{ est pair})$
 2. $(8 \text{ est premier}) \Leftrightarrow (7 \text{ est pair})$
- sont vraies.

Exercice 1.11. Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'implication :

$$[(p \Leftrightarrow q) \text{ et } (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

est toujours vraie.

1.7 Lois Logiques

a) **Les lois logiques** sont des propositions composées de plusieurs propositions $p, q, r \dots$ à l'aide des connecteurs ou, et, $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ et qui sont vraies quelles que soient les propositions $p, q, r \dots$ par exemple $(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$.

b) **Lois de Morgan** : Quelles que soient les propositions p et q les propositions

$$\overline{p \text{ et } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } \bar{q})$$

$$\overline{p \text{ ou } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ et } \bar{q})$$

sont vraies.

Vous le vérifiez en cherchant les tables de vérité des propositions des deux membres.

c) **Distributivité** : Quelles que soient les propositions p et q les propositions

$$[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$$

$$[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$$

sont vraies.

1.8 Fonction propositionnelle

On appelle **fonction propositionnelle** définie sur E , tout énoncé qui est vrai pour certains éléments de E et faux pour tous les autres.

Il nous arrivera de dire proposition à la place de fonction propositionnelle.

Exemple 1.12. La variable x étant un élément de \mathbb{N} , " $x + 2 = 5$ " est un énoncé vrai pour $x = 3$ et faux pour tous les autres nombres. C'est une fonction propositionnelle définie sur \mathbb{N} .

1.9 Quantificateurs

vous savez que, quel que soit le nombre réel x , on peut écrire :

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

On utilise le symbole \forall qui est un **quantificateur**, le quantificateur universel, il signifie "quel que soit", "pour tout" et la phrase précédente s'écrit sous forme symbolique :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

qu'on lit :

$$\text{quel que soit } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

ou encoure

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

c'est une proposition vraie.

Vous savez qu'il existe au moins un élément x de \mathbb{Z} tel que $x^2 - 9 = 0$; ces éléments sont -3 et 3 . On emploie le symbole \exists qui est aussi un quantificateur, le quantificateur existentiel. La phrase s'écrit :

$$(\exists x \in \mathbb{Z}) x^2 - 9 = 0$$

qu'on lit :

$$\text{il existe au moins un élément } x \text{ de } \mathbb{Z} \text{ tel que } x^2 - 9 = 0$$

c'est une proposition vraie.

D'une manière générale, soit $P(x)$ une fonction propositionnelle (c'est-à-dire une propriété) définie sur un ensemble E . La proposition

$$(\forall x \in E) P(x)$$

se lit:

$$\text{''pour tout } x \text{ de } E \text{ on a } P(x)\text{''}$$

De même la proposition :

$$(\exists x \in E) P(x)$$

se lit :

$$\text{''il existe au moins un élément } x \text{ de } E \text{ tel que l'on ait } P(x)\text{''}$$

1.10 Quantificateurs et connecteurs logiques

Soit $P(x)$ une propriété définie sur un ensemble E . On a

$$\overline{(\forall x \in E) P(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E) \overline{P(x)}$$

$$\overline{(\exists x \in E) P(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E) \overline{P(x)}$$

Exercice 1.13. *Trouvez les négations des propositions suivantes et écrivez les équivalences correspondantes :*

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) 4x + 5 = 0$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) x > 3$$

1.11 Exercices

1.11.1 A) Avec solutions

Exercice 1.14. Construire la table de vérité de la proposition suivante :

$$R = \overline{(p \vee q)} \vee (\bar{p} \vee \bar{q}).$$

Solution :

On dresse immédiatement la table suivante, dans laquelle on a inscrit successivement les valeurs de vérité des propositions p , q , $p \vee q$, $\overline{p \vee q}$, \bar{p} , \bar{q} , $\bar{p} \vee \bar{q}$ et enfin R .

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \vee \bar{q}$	R
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Exercice 1.15. Démontrer que les deux propositions $p \Rightarrow q$ et $\bar{p} \vee q$ sont logiquement équivalentes :

Solution :

Formons d'abord la table de vérité de chacune des propositions considérées. On obtient les tables ci-dessous :

p	q	$p \Rightarrow q$	p	q	\bar{p}	$\bar{p} \vee q$
V	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V

Ces tables montrent immédiatement que l'on a

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q).$$

Exercice 1.16. Trois nombres, a , b , et c , parmi lesquels il y en a un positif, un négatif et un égal à zéro, sont tels que les trois implications suivantes sont vraies :

$$a = 0 \Rightarrow b > 0,$$

$$a > 0 \Rightarrow b < 0,$$

$$b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

Quelle est la qualité de chacun de ces nombres.

Solution :

Supposons que $a = 0$. On a alors les implications vraies suivantes:

$$a = 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $a = 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $b > 0$ et $c > 0$, ce qui est contraire au fait que un seul des trois nombres est positif. On a donc, soit $a > 0$, soit $a < 0$.

Supposons $a > 0$. On a alors les implications vraies suivantes:

$$a > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $a > 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $c > 0$.

On a donc finalement $a < 0$.

Examinons le nombres b . Si $b > 0$, on a les implications vraies suivantes :

$$b > 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $b > 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $c > 0$.

On a donc $b = 0$ et, par conséquent, $c > 0$.

En définitive, on a

$$a < 0, \quad b = 0, \quad \text{et} \quad c > 0.$$

Exercice 1.17. Soit p et q deux propositions quelconques. Démontrer que, si les implications

$$(p \text{ et } q) \Rightarrow \bar{q} \tag{1}$$

et

$$(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow q \tag{2}$$

sont vraies toutes les deux, alors la proposition p est fausse.

Solution : On raisonnera d'abord directement.

Remarquons d'abord que, si p est fausse, les implications (1) et (2) sont vraies, puisque, dans ce cas, les propositions $(p \text{ et } q)$ et $(p \text{ et } \bar{q})$ sont fausses toutes les deux, quelle que soit la valeur de vérité de q .

Il suffit donc de montrer que, si p est vrai, l'une au moins des implications (1) et (2) est fausse. Supposons donc p vraie. Alors,

si q vraie, l'implication (1) est fausse, puisque, dans ce cas, on a $(p \text{ et } q)$ vraie et \bar{q} fausse.

si q est fausse (donc \bar{q} vraie), c'est l'implication (2) qui est fausse, puisque, dans ce cas, on a $(p \text{ et } \bar{q})$ vraie et q fausse.

Finalement, les implications (1) et (2) sont vraies simultanément si, et seulement si, la proposition p est fausse.

.....
1.11.2 B) Sans solutions

Exercice 1.18. Donner la négation des propositions suivantes:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x > y$,
2. $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x = y + 1$

Exercice 1.19. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) : x^2 \geq n$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x - y = 1$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 3 > 0$

Exercice 1.20. Construire la table de vérité des propositions suivantes:

1. $(p \Rightarrow q)$ et \bar{q}
2. $(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Exercice 1.21. 1. Soit A la proposition suivante:

”Tout nombre réel est, la somme de deux nombres premiers ”

Mettre cette proposition sous forme symbolique.

2. Soit B la proposition suivante:

$$”\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x > n”$$

traduire cette proposition en langage courant.

Exercice 1.22. Parmi les énoncés suivants distinguer ceux qui sont vrais de ceux qui sont faux; dans certains cas il faudra discuter suivant les valeurs attribuées aux variables.

1. Les droites D et D' non parallèles sont sécantes.
2. Tout nombre entier strictement positif pair x n'est pas un nombre premier.
3. L'équation $5x - 7 = 0$ a une solution unique.
4. $x + y$ et $x - y$ sont tous deux pairs (x et y sont des entiers).
5. $x + y$ et $x - y$ sont de même parité (x et y sont des entiers).

Exercice 1.23. Soient P et Q deux propositions. Montrer

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$
2. $(P \bar{\Rightarrow} Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \bar{Q}$.

Exercice 1.24. On considère les énoncés suivants :

p : tous les chats comprennent le français.

q : certains oiseaux sont des chats.

r : certains oiseaux comprennent le français.

L'énoncé

$$(p \text{ et } q) \Rightarrow r$$

est-il vrai ? (D'après Lewis Carroll.)

Exercice 1.25. *trois jeunes filles, Manal, Aicha et Nada, ont prononcé les phrases suivantes :*

Manal : " j'ai 22 ans, j'ai 2 ans de moins que Aicha, j'ai 1 an de plus que Nada",

Aicha : " Je ne suis pas la plus jeune, Nada et moi avons 3 ans d'écart, Nada a 25 ans",

Nada : " Je suis plus jeune que Manal, Manal a 23 ans, Nada a 3 ans de plus que Manal".

Peut-on déterminer l'âge de chacune d'elles, sachant qu'une, et une seule, des assertions de chaque jeune fille est fausse ?

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

Exemple 2.1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution. Prenons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ pour un certain $p' \in \mathbb{Z}$ et un certain $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + p'q$ est bien un élément de \mathbb{Z} ; le dénominateur qq' est lui un élément de \mathbb{N}^* . Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}, q'' \in \mathbb{N}$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

2.2 Cas par cas

Exemple 2.2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - 2| \leq x^2 - x + 2$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas:

Premier cas : $x \geq 2$. Alors $|x - 2| = x - 2$. Calculons alors $x^2 - x + 2 - |x - 2|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2 - |x - 2| &= x^2 - x + 2 - (x - 2) \\ &= x^2 - x + 2 - x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 4 \\ &= (x - 1)^2 + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

Deuxième cas : $x < 2$. Alors $|x - 2| = -x + 2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2 - |x - 2| &= x^2 - x + 2 - (-x + 2) \\ &= x^2 - x + 2 + x - 2 \\ &= x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion. Dans tous les cas $|x - 2| \leq x^2 - x + 2$.

2.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [\bar{q} \Rightarrow \bar{p}]$$

Exemple 2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

2.4 Raisonnement par l'absurde

Nous voulons démontrer qu'une proposition q est vraie. Si $[\bar{q} \Rightarrow p]$ est vraie et si p est fausse, alors \bar{q} est fausse donc q est vraie.

Exemple 2.4. *Démontrons que, dans un plan, si deux droites D et D' sont parallèles et distinctes et si une troisième droite D'' coupe l'une, par exemple D en A , alors D'' coupe D' .*

Solution : Soit les propositions

$$q : \text{"}D'' \text{ coupe } D' \text{"}, p : \text{"}D'' // D' \text{"}, \text{ et } r : \text{"}D'' = D'' \text{"}$$

dont on veut démontrer la vérité.

L'implication : $\bar{q} \Rightarrow p$ est vraie.

L'implication : $p \Rightarrow r$ est vraie, car si deux droites D et D'' passent par A et sont parallèles à D' , elles sont confondues.

La proposition r est fausse puisque D'' coupe D en A . On a donc :

$(p \Rightarrow r)$ vraie et r fausse, donc p est fausse,

$(\bar{q} \Rightarrow p)$ vraie et p fausse, donc \bar{q} est fausse. Par suite q est vraie.

Exercice 2.5. *Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

2.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type " $\forall x \in E : P(x)$ " est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de " $\forall x \in E : P(x)$ " est " $\exists x \in E : \overline{P(x)}$ "). Trouver un tel x c'est trouver un **contre-exemple** à l'assertion " $\forall x \in E : P(x)$ ".

Exemple 2.6. *Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$*

Solution. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais $0 + 1 + 4 \neq 7$.

Exercice 2.7. Soit E l'ensemble des entiers naturels divisibles par 6 et par 4. Démontrer que la proposition

$$p : (\forall x \in E) (x \text{ est divisible par } 24)$$

est fausse.

2.6 Raisonnement par équivalences successives

Si les équivalences suivantes sont vraies :

$$p \Leftrightarrow q, q \Leftrightarrow r, r \Leftrightarrow s$$

on a aussi l'équivalence vraie : $p \Leftrightarrow s$.

Nous écrivons alors pour simplifier l'écriture : $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s$

Exemple 2.8. Cherchons l'ensemble des solutions de :

$$(E) : x^2 = 9$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x - 3 = 0) \text{ ou } (x + 3 = 0)] \\ &\Leftrightarrow [x = 3 \text{ ou } x = -3] \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est $S = \{-3, 3\}$.

2.7 Raisonnement par récurrence

Soit $R(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . On suppose que

1. la relation $R(0)$ est vraie,
2. la relation $R(n) \Rightarrow R(n + 1)$ est vraie,

alors $R(n)$ est vraie pour tout n .

Exemple 2.9. Démontrons que : pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

En effet soit

$$P_n : "1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}."$$

Vérifions que p_1 est vraie

Si $n = 1$, le membre de gauche vaut 1. Le membre de droite vaut $\frac{1(1+1)}{2}$ soit 1 aussi,

on a bien $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ autrement dit : p_1 est vraie.

Soit n un entier naturel non nul,

Si p_n est vraie, alors $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, il s'agit d'en déduire que p_{n+1} est vraie

alors, en ajoutant $n + 1$ à chaque membre,

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$$

alors, en factorisant le membre de droite:

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

alors p_{n+1} est vraie.

D'où d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : p_n est vraie.

2.8 Exercices

2.8.1 A) Avec solutions

Exercice 2.10. *Montrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution : L'égalité est vraie au rang 1: $1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) (n+1) \\ &= \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.

Exercice 2.11. *(Inégalité de Bernoulli)*

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Solution : Soit $x \geq 0$. Si $n = 0$ l'inégalité est clairement vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie au rang n et prouvons la au rang $n+1$. Par application de l'hypothèse de récurrence :

$$1 + (n+1)x = 1 + nx + x \leq (1+x)^n + x \leq (1+x)^n + x(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$$

car $1+x > 0$. La formule est alors prouvée par application du théorème de récurrence. Remarquons que cette démonstration est encore valable si $x > -1$.

Exercice 2.12. :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n(n^2 + 5) \text{ est divisible par } 6.$$

Solution : La propriété est clairement vraie au rang 0 ce qui nous permet d'initialiser la récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que 6 divise $n(n^2 + 5)$. Montrons que 6 divise $(n + 1)((n + 1)^2 + 5)$. Mais

$$(n + 1)((n + 1)^2 + 5) = n(n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6 = n(n^2 + 5) + 3n(n + 1) + 6$$

et :

-) $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6 d'après l'hypothèse de récurrence.
-) $3n(n + 1)$ est divisible par 6 car l'un des deux n ou $n + 1$ est pair donc divisible par 2.
-) Donc $(n + 1)((n + 1)^2 + 5)$ est divisible par 6 et la propriété est prouvée par récurrence.

Exercice 2.13. :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Solution : On vérifie facilement la propriété au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n et prouvons la au rang $n + 1$. Il s'agit de montrer que $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7. Mais :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2 = 3^{2n+1} \times 7 + (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \times 2.$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, il est clair que 7 divise ce nombre. La propriété est alors prouvée par récurrence.

.....
2.8.2 B) Sans solutions

Exercice 2.14. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la somme de n termes

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .
2. Proposer une formule en n pour S_n .
3. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 2.15. Démontrer par récurrence que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$

Exercice 2.16. Démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$

$$2. \forall a \in \mathbb{N}, \sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 2.17. *Pour quelles valeurs du nombre réel x la proposition*

$$(2x^2 + 5x - 12 < 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 2 > 0)$$

est-elle vraie.

Exercice 2.18. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse en faisant une démonstration.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| = x \text{ ou } |x| = -x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0$

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0.$