



HAL
open science

Modélisation : Algèbre linéaire Mathématique appliquée à la Gestion

Anjara Rakotoarisoa, Jocelyn Lalaina

► **To cite this version:**

Anjara Rakotoarisoa, Jocelyn Lalaina. Modélisation : Algèbre linéaire Mathématique appliquée à la Gestion. DEUG. Madagascar. 2018. cel-01826820

HAL Id: cel-01826820

<https://hal.science/cel-01826820>

Submitted on 29 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation : Algèbre linéaire

Mathématique appliquée à la Gestion

RAKOTOARISOA Anjara Lalaina Jocelyn

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 4y + 3y = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$(x ; y ; z)$: vecteur des inconnues

- 1- Ecrire le système sous forme matricielle.
- 2- Déterminer la matrice M relative au système d'équations.
- 3- Calculer le déterminant de M et déterminer M^{-1} si M est inversible.
- 4- Résoudre le système d'équations :
 - a. En utilisant M^{-1}
 - b. Par la méthode de Cramer

Correction

- 1- Ecriture du système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 4y + 3y = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 3y + 3z = 2 \\ 1x + 4y + 3y = 2 \\ 1x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'écriture matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Les coefficients des équations}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur des inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur des constantes}}$$

2- Matrice M relative au système d'équations :

C'est la matrice correspondante aux coefficients des équations

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3- Calcul du déterminant de la matrice M – Inversibilité et inverse de M :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1^+ & 3^- & 3^+ \\ 1^- & 4^+ & 3^- \\ 1^+ & 3^- & 4^+ \end{vmatrix}$$

-En choisissant la première ligne comme pivot, on a :

$$\det(M) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = 1[(4 \times 4) - (3 \times 3)] - 3[(1 \times 4) - (3 \times 1)] + 3[(1 \times 3) - (1 \times 4)] = 1$$

$$\mathbf{Det(M)=1}$$

Det(M) est différent de 0, alors, M est inversible.

-Détermination de l'inverse M^{-1}

On présente M sous forme de « Gauss »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Pour obtenir l'inverse, on cherche à transformer le côté gauche en une matrice unitaire en faisant des opérations sur les lignes. L'objectif est donc d'avoir une forme comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{array} \right)$$

Où l'inverse de M sera la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Reprenons notre forme de « Gauss » et faisons les opérations sur les lignes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

L2 :L2-L1 et L3=L3-L1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L1=L1-3L2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L1=L1-3L3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4- Résolution du système d'inéquations :

a. En utilisant M^{-1}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution est donc $S=(x ; y ; z)=(2 ; 0 ; 0)$

b. Par la méthode de Cramer

On sait que $\det(M)=1$

$$M_x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_x) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\det(M_x)}{\det(M)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$y = \frac{\det(M_y)}{\det(M)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_z) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = \frac{\det(M_z)}{\det(M)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{x} ; \mathbf{y} ; \mathbf{z}) = (\mathbf{2} ; \mathbf{0} ; \mathbf{0})$$