



**HAL**  
open science

# “ MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE : LES MODELES ARCH-GARCH ”

Jonas Kibala Kuma

► **To cite this version:**

Jonas Kibala Kuma. “ MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE : LES MODELES ARCH-GARCH ”. Master. Congo-Kinshasa. 2018. cel-01770037

**HAL Id: cel-01770037**

**<https://hal.science/cel-01770037>**

Submitted on 18 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de Kinshasa**  
*Faculté des Sciences Economiques et de Gestion*  
*Département des Sciences Economiques*  
*B.P. 832 kinshasa XI*

**« MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE :  
LES MODELES ARCH-GARCH »**

*Par*

***Jonas KIBALA KUMA***

*(DEA-PTC Economie/Unikin en cours)*

—

*Centre de Recherches Economiques et Quantitatives  
( CREQ )*

\*\*\*

*Cellule d'Economie Mathématique/CEMATH-UNIKIN  
Département des Sciences Economiques  
Université de Kinshasa  
B.P. 832 kinshasa XI*

---

---

Ce manuel s'inspire fondamentalement de l'ouvrage de Fodiye Bakary Doukouré (2008), intitulé « Méthodes économétriques + programmes/Cours – Applications – Corrigés/Logiciels : EVIEWS, STATA et SPSS », plus précisément dans son chapitre 5 consacré aux modèles ARCH et applications financières.

\*\*\*\*\*

« Rien n'est trop tôt, ni trop tard, tout est à sa place ».

---

---

Mars 2018

## VII.1. METHODOLOGIE DE BOX ET JENKINS

### VII.1.1. RAPPELS THEORIQUES

L'étude d'une série aux fins de prévision, par l'approche méthodologique de Box et Jenkins, passe par les cinq étapes qui suivent :

- L'étude de la stationnarité (tests ADF ou PP ; graphiques) ;
- L'identification du processus adéquat (lecture des corrélogrammes) ;
- L'estimation du modèle/processus optimal retenu ;
- L'inférence statistique (diagnostic/validation du modèle estimé) ;
- La prévision.

#### A. Etude de la stationnarité

On se sert des tests formels et informels pour étudier la stationnarité de la série sous-étude (soit  $X_t$ ). Si elle est non stationnaire, la stationnariser par les MCO ou l'écart à la tendance (TS), soit par la différenciation ou les filtres aux différences (DS).

#### B. Identification du processus adéquat (modèle optimal) et Estimation

Cette étape consiste à déterminer, dans la famille ARIMA<sup>(1)</sup>, le processus générateur de  $X_t$  – par principe de parcimonie – ainsi que son ordre (décalage optimal). Le décalage optimal d'un ARIMA correspond au nombre ( $k$ ) des coefficients d'autocorrélations simple ou partiel statistiquement significatifs (Cfr corrélogramme de la série). L'on notera que :

- (i) Pour un AR, l'ordre correspond au nombre des coefficients d'autocorrélation partiel (PAC) non nuls (différents de 0), tandis que ;
- (ii) Pour un MA, l'ordre correspond au nombre des coefficients d'autocorrélation simple (AC) non nuls (différents de 0) ;
- (iii) Pour un ARMA, les ordres sont respectivement définis suivant AR et MA. Toute fois, les processus mixtes (ARMA) présentent parfois des fonctions d'autocorrélation (AC et PAC) complexes/difficiles à interpréter, nécessitant une procédure itérative du genre identification-estimation-diagnostic.

Notons qu'en cas de décroissance trop lente d'une fonction/graphe d'autocorrélation, il est souhaitable de différencier la série avant d'identifier le modèle. En outre, en général, le nombre «  $k$  » de décalage optimal admissible – pour que les coefficients d'autocorrélation aient un sens – est donné par l'intervalle :  $\frac{n}{6} \leq k \leq \frac{n}{3}$ , soit  $k = \frac{n}{5}$  ( $\forall n \geq 150$ ) ; où  $n$  = nombre d'observations.

---

<sup>1</sup> Nous nous intéressons aux processus non saisonniers (où toute composante saisonnière a été éliminée). Les processus ARIMA saisonniers (SARIMA) font l'objet d'une spécification particulière, et ne sont pas abordés dans ce cadre.



Toute fois, la prudence s'impose quant à la l'identification<sup>(1)</sup>. De manière générale, les fonctions d'autocorrélation doivent afficher des décroissances exponentielles monotones ou sinusoïdales. Cela doit s'observer comme suit :

- ▶ Pour un AR, la décroissance exponentielle doit s'observer sur la fonction AC ;
- ▶ Pour un MA, la décroissance exponentielle doit s'observer sur la fonction PAC (Partial autocorrelation).

Les conséquences d'une mauvaise identification sont entre autres l'invalidation des hypothèses de base des MCO (après estimation du modèle), et une prévision moins performante. Pour améliorer les résultats d'estimation et de prévision, le passage d'un processus à un autre se fait comme suit :

$$\begin{cases} \text{ARIMA}(p, d, q) \rightarrow \text{ARIMA}(p, d, 0); \\ \text{ARIMA}(p, d, q) \rightarrow \text{ARIMA}(p + 1, d - 1, 0) \end{cases}$$

Une fois le processus générateur de la série ( $X_t$ ) identifié, passer à l'estimation par les MCO.

### C. Diagnostic (inférence)

Pour confirmer le processus, il tient de tester la significativité des paramètres estimés (les paramètres statistiquement non significatifs doivent être éliminés/abandonnés). Aussi, tester :

- ▶ Si les résidus sont des bruits blancs<sup>(2)</sup> gaussiens (homoscédasticité, absence d'autocorrélation des erreurs et normalité) ;
- ▶ La linéarité du modèle (test de significativité conjointe des paramètres) ;
- ▶ La stationnarité de la série dans le modèle estimé.

Si l'on considère le modèle ARIMA (2,0,0) estimé comme suit :

$$\hat{X}_t = \hat{\Phi}_1 X_{t-1} + \hat{\Phi}_2 X_{t-2} \dots \dots [7.1]$$

Tester la stationnarité de  $X_t$  à partir ce modèle revient à vérifier que les racines du polynôme retard associé à ce modèle sont à l'extérieur du cercle unité. C'est-à-dire :

$$(1 - \hat{\Phi}_1 L - \hat{\Phi}_2 L^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |L_1| > 1 \\ |L_2| > 1 \end{cases} : \text{Condition de sationnarité de } X_t$$

**[ $\Phi(L) = 0$  et que  $|L_i| > 1$ ]**

- ▶ Si la prévision dans l'échantillon est bonne. Voir si le coefficient de Theil est proche de 0 ou si le Mean Absolute Percent Error (MAPE) est faible.

En outre, l'on notera que les étapes d'identification, estimation et diagnostic peuvent être réitérées jusqu'à aboutir au résultat qui soit jugé satisfaisant (retenir le modèle adéquat).

<sup>1</sup> C'est l'étape la plus subjective dans la procédure de Box et Jenkins.

<sup>2</sup> Les résidus «  $u_t$  » sont des bruits blancs (c.à.d. processus strictement stationnaires) s'ils sont indépendants et identiquement distribués (iid) sur n'importe quel sous ensemble de temps (1,2,...,T).



## D. Préviation

Elle dépend de la nature de la série, selon qu'elle est stationnaire en tendance (TS) ou qu'elle est stationnaire en différence (DS).

### (i) Si la série est un DS

Soit un processus ARIMA (1,1,0) stationnaire en différence, estimé comme suit :

$$\Delta \hat{X}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \Delta X_{t-1} \dots \dots [7.2]$$

Sachant que  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ , [7.2] peut s'écrire alors :

$$\hat{X}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \Delta X_{t-1} + \hat{X}_{t-1}$$

Ainsi :

- ▶ la prévision à l'horizon « h » sera :

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \Delta X_{t-1+h} + \hat{X}_{t-1+h}$$

- ▶ Si  $h = 1$ , alors :

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \Delta X_t + \hat{X}_t$$

### (ii) Si la série est un TS

Soit le processus ARIMA (1,0,0) stationnaire en tendance, estimé comme ci-dessous :

$$\hat{Z}_t = \hat{a}_1 Z_{t-1} \dots \dots [7.3]$$

avec :  $\hat{Z}_t = X_t - \hat{X}_t \dots \dots [7.4a]$  et  $\hat{X}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t \dots \dots [7.5]$

[7.5] dans [7.4a] :

$$\hat{Z}_t = X_t - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 t) \dots \dots [7.4b]$$

De [7.4b], on déduit que :

$$X_t = \hat{Z}_t + \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t \dots \dots [7.6], t = 0, 1, 2, \dots, T \text{ (tendance)}$$

Ainsi :

- ▶ A l'horizon « h », la prévision de  $X_t$  sera :

$$X_{t+h} = \hat{Z}_{t+h} + \hat{b}_0 + \hat{b}_1 (t + h)$$

- ▶ Si  $h = 2$  et que  $T = 150$ , alors :

$$\begin{cases} X_{t+1} = \hat{Z}_{t+1} + \hat{b}_0 + \hat{b}_1 (t + 1), \text{ avec } T + 1 = 151 \\ X_{t+2} = \hat{Z}_{t+2} + \hat{b}_0 + \hat{b}_1 (t + 2), \text{ avec } T + 2 = 152 \end{cases}$$

Comment trouver  $\hat{Z}_{t+1}$  et  $\hat{Z}_{t+2}$  ? Référons-nous à [7.3] et faisons :

$$\begin{cases} \hat{Z}_{t+1} = \hat{a}_1 Z_t \\ \hat{Z}_{t+2} = \hat{a}_1 \hat{Z}_{t+1} \end{cases}$$



**NB** : Si  $X_t$  est une série logarithmique (on écrira  $LX_t$ ), dans ce cas :  $X_{t+h} = e^{(LX_{t+h})}$

La prévision (ponctuelle) une fois réalisée, il tient de visualiser graphiquement la série brute et la série prévue (ajustée) dans l'échantillon et en dehors de celui-ci (à l'horizon  $h$ )<sup>(1)</sup>.

Il tient de préciser aussi qu'il est possible de construire un intervalle de prévision pour juger de la performance de la prévision effectuée. En fait, pour un ARIMA (2,0,0) [Cfr expression 7.1] estimé comme suit :  $\hat{X}_t = \hat{\Phi}_1 X_{t-1} + \hat{\Phi}_2 X_{t-2}$ , l'intervalle de prévision de  $X_t$  à l'horizon  $h$  (pour le seuil de confiance de 95%, soit  $\alpha = 0,05$ ) est <sup>(2)</sup> :

$$\hat{X}_t(h) \pm 1,96\sigma_{\hat{e}} \left[ \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } \begin{cases} \gamma_1 = \phi_1 \\ \gamma_2 = \phi_1^2 + \phi_2 \\ \gamma_3 = \phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2 \end{cases} \text{ et } \sigma_{\hat{e}} = \frac{(SCR)}{T-k}$$

### VII.1.2. ETUDE DE LA SERIE « EURUS » PAR L'APPROCHE METHODOLOGIQUE DE BOX ET JENKINS

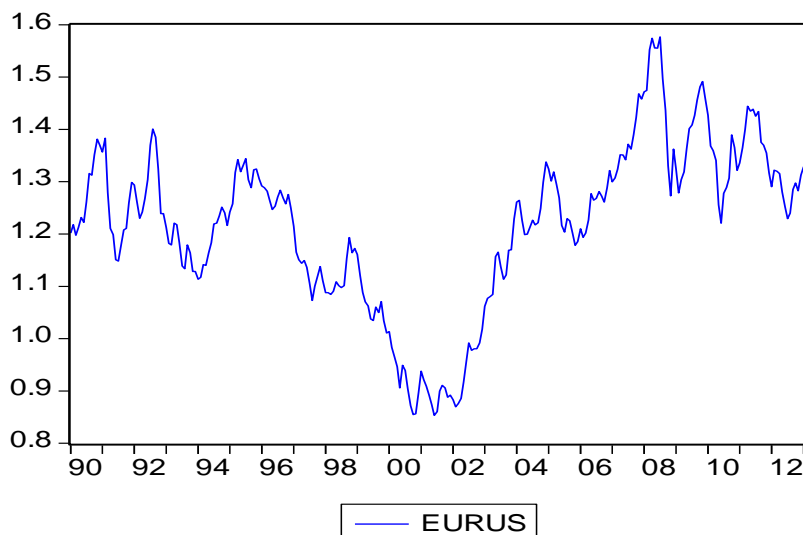
#### a) Etude de la stationnarité

##### ► Evolution graphique de la parité Euro-dollar (série « EURUS ») : test informel

Sur EViews, taper :

```
{
create m 1990:01 2013:03
data EURUS
plot EURUS
```

Evolution mensuelle de la parité Euro-Usd (de janvier 1990 à mars 2013)



<sup>1</sup> On parle de la prévision in casting (dans l'échantillon) et out casting (hors échantillon).

<sup>2</sup>  $\sigma_{\hat{e}}$  = l'écart-type de l'erreur de prévision ; SCR = Somme des Carrés des Résidus (SCR) ; T et k = taille de l'échantillon et nombre des régresseurs.

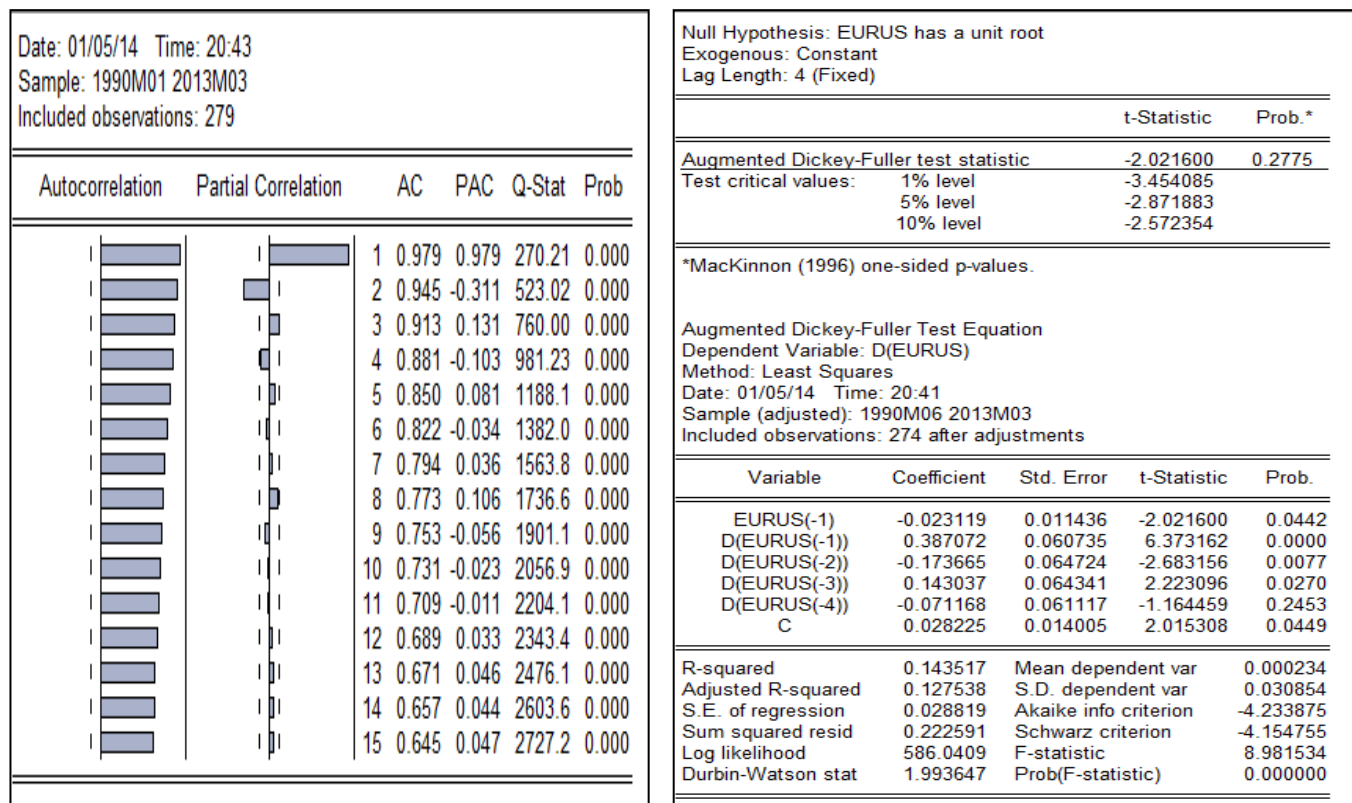


\_\_\_\_\_ **Constat** : à la lecture du graphique ci-haut, l'on présume une non stationnarité en moyenne (la série « EURUS » accuse une tendance évolutive/variable avec le temps) et en variance (à cause de la forte variabilité ou volatilité de la série). **NB** : l'échantillon a 279 observations.

► **Test d'Augmented Dickey-Fuller (ADF) : test formel**

\_\_\_\_\_ Sur Eviews, taper :

{ *ident EURUS* → (*lags* : 15) : pour obtenir la figure à gauche (corrélogramme);  
 { *uroot EURUS* → (*user specified* : 4) : pour obtenir les résultats à droite :



\_\_\_\_\_ **Constat** : le lag « 4 » dans « user specified » correspond au nombre de retard ou termes significativement différents de zéro (ceux qui traversent l'intervalle de confiance : Cfr corrélogramme partiel). Au regard des résultats issus du test « ADF » ( $|ADF| < |Mackinnon|$  au seuil de 5%), l'on confirme que la série « EURUS » est non stationnaire en niveau du type DS (sans tendance, mais avec dérive). Pour la stationnariser, nous procédons par les filtres aux différences (différence première). Sur **EViews**, faire :

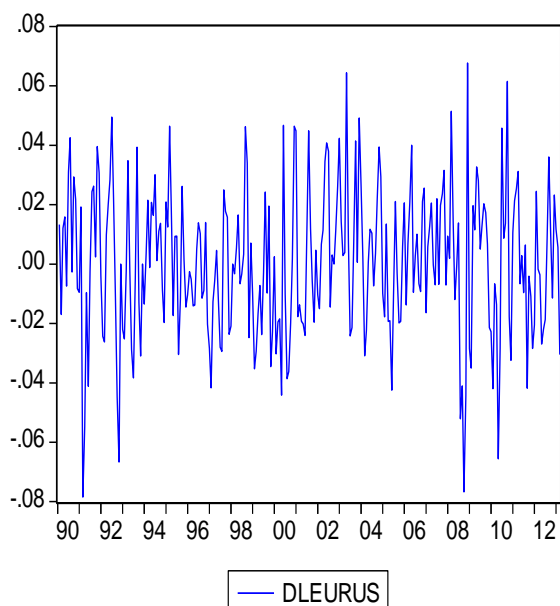
{ *genr DLEURUS=d(log(EURUS))*  
 { *plot DLEURUS*  
 { *uroot DLEURUS*

Ce qui nous donne le graphique (à gauche) et les résultats du test ADF (à droite) ci-dessous. Rien qu'à observer le graphique et, parce que  $|ADF| > |Mackinnon|$  à 5%, l'on déduit que la série différenciée d'ordre 1 « DLEURUS » est stationnaire :





Représentation de la série en différence relative (DLEURUS)



Null Hypothesis: DLEURUS has a unit root				
Exogenous: None				
Lag Length: 1 (Fixed)				
		t-Statistic	Prob.*	
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-11.21635	0.0000	
Test critical values:				
		1% level	-2.573367	
		5% level	-1.941978	
		10% level	-1.615931	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLEURUS)				
Method: Least Squares				
Date: 01/05/14 Time: 21:11				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	-0.786490	0.070120	-11.21635	0.0000
D(DLEURUS(-1))	0.147063	0.059848	2.457270	0.0146
R-squared	0.356049	Mean dependent var	-4.93E-05	
Adjusted R-squared	0.353699	S.D. dependent var	0.029153	
S.E. of regression	0.023437	Akaike info criterion	-4.661783	
Sum squared resid	0.150506	Schwarz criterion	-4.635548	
Log likelihood	645.3261	Durbin-Watson stat	1.960152	

\_\_\_\_\_ Constat : pour un lag fixé à « 1 » dans « user specified » (Cfr Corrélogramme ci-bas : identification), notre série différenciée est stationnaire sans trend, ni intercept (les modèles avec trend et/ou intercept se sont révélés non significatifs).

**b) L'identification et l'estimation du processus adéquat/optimal**

Pour identifier le processus adéquat dans la famille ARIMA – celui qui soit susceptible de nous reproduire le mode opératoire de la série « EURUS » – nous nous référons d'abord au corrélogramme de la série stationnaire « DLEURUS » (méthode quelque peu informelle), ensuite jugerons de la significativité/bonté du modèle ainsi identifié (au cas contraire, retenir le processus significatif par tâtonnement/réitération : Cfr rappels théoriques). A gauche (le corrélogramme de « DLEURUS ») et à droite (les résultats du modèle identifié au départ : **arima (1,1,1)**) :

\_\_\_\_\_ Sur **EViews**, faire : *ident DLEURUS* et *ls DLEURUS ar(1) ma(1)*

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.312	0.312	27.335	0.000	
2	-0.033	-0.144	27.634	0.000	
3	0.021	0.088	27.764	0.000	
4	-0.042	-0.094	28.255	0.000	
5	-0.065	-0.014	29.462	0.000	
6	-0.031	-0.018	29.736	0.000	
7	-0.081	-0.080	31.621	0.000	
8	-0.011	0.050	31.658	0.000	
9	0.042	0.010	32.171	0.000	
10	0.007	-0.005	32.186	0.000	
11	-0.046	-0.056	32.793	0.001	
12	-0.027	-0.003	33.009	0.001	
13	-0.046	-0.048	33.629	0.001	
14	-0.090	-0.070	36.025	0.001	
15	0.011	0.067	36.060	0.002	

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: Least Squares				
Date: 01/05/14 Time: 21:35				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Convergence achieved after 10 iterations				
Backcast: 1990M02				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.132893	0.145611	-0.912653	0.3622
MA(1)	0.512801	0.126448	4.055441	0.0001
R-squared	0.128512	Mean dependent var	0.000223	
Adjusted R-squared	0.125343	S.D. dependent var	0.024883	
S.E. of regression	0.023272	Akaike info criterion	-4.675959	
Sum squared resid	0.148933	Schwarz criterion	-4.649793	
Log likelihood	649.6203	Durbin-Watson stat	1.989823	
Inverted AR Roots	-.13			
Inverted MA Roots	-.51			





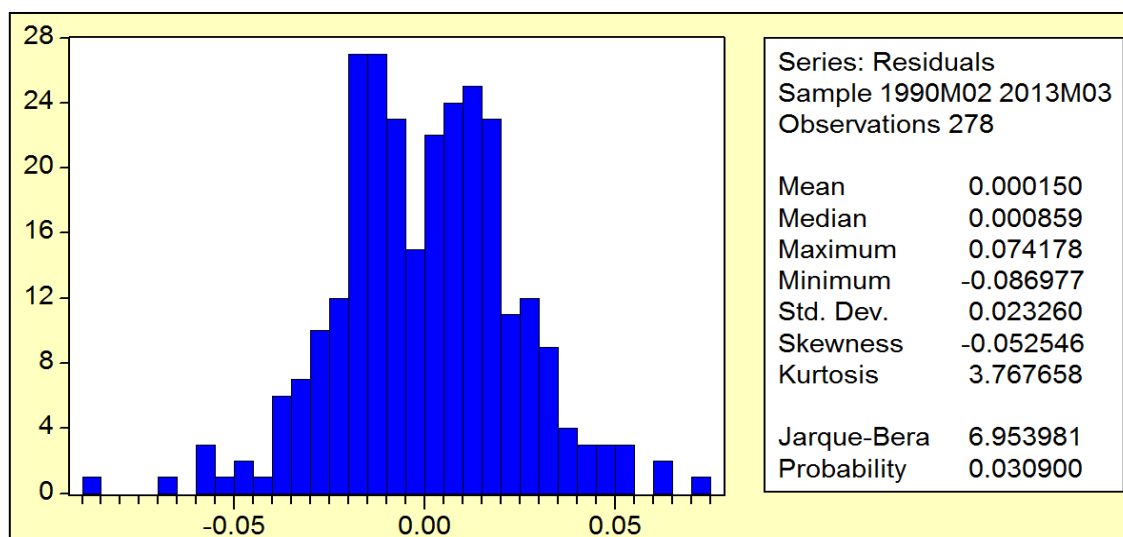
\_\_\_\_\_ Constat : notre « *arima(1,1,1)* » nous donne des résultats non satisfaisant pour la composante autorégressive qui est statistiquement non significative. Tout compte fait, nous avons plutôt retenu le processus « *arima(0,1,1)* » comme adéquat. Sur **EViews**, faire : *ls DLEURUS ma(1)* :

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: Least Squares				
Date: 01/05/14 Time: 21:42				
Sample (adjusted): 1990M02 2013M03				
Included observations: 278 after adjustments				
Convergence achieved after 7 iterations				
Backcast: 1990M01				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0.402891	0.055171	7.302550	0.0000
R-squared	0.123917	Mean dependent var	0.000270	
Adjusted R-squared	0.123917	S.D. dependent var	0.024851	
S.E. of regression	0.023260	Akaike info criterion	-4.680552	
Sum squared resid	0.149868	Schwarz criterion	-4.667503	
Log likelihood	651.5967	Durbin-Watson stat	2.042118	
Inverted MA Roots	-.40			

### c) L'inférence statistique (diagnostic/validation du modèle estimé)

Nous faisons seulement le test de normalité de Jarque-Bera (le test de bruit blanc et celui de présence d'effets ARCH étant concluant).

\_\_\_\_\_ Test de normalité : Sur **Eviews**, dans l'output des résultats, suivre : View/Residual Tests/Histogram-Normality Test :



\_\_\_\_\_ Constat : les résidus du modèle optimal estimé ne sont pas normalement distribués (présomption d'une non linéarité) : ils sont leptokurtiques ( $Skewness > 3$ ) et légèrement étalé vers la droite ( $Kurtosis \neq 0$  et négative : dissymétrique à gauche).

D'où, nous rejetons la spécification ARIMA au profit de la modélisation hétéroscédastique (ARCH) – qui est adaptée à l'étude des séries chronologiques



*accusant une forte variabilité/volatilité (impliquant la non stationnarité, la non normalité ou la non linéarité) – pour prévoir l'évolution future de la parité Euro-dollar (soit la série « EURUS »).*

## VII.2. MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE

### VII.2.1. RAPPELS THEORIQUES

#### A. Notes

L'étude des séries chronologiques a conduit au développement de plusieurs modèles parmi lesquels la spécification autorégressive – la modélisation ARMA en général – a été largement utilisée, à cause notamment de ses propriétés statistiques<sup>(1)</sup> qui rendent facile l'estimation, l'inférence statistique et la prévision (les séries et résidus étant générés par des processus stationnaires). Malgré ces avantages, les modèles ARMA(p,q) souffrent de la non prise en compte de certaines contraintes structurelles liées au phénomène faisant l'objet de la modélisation. Ces contraintes peuvent traduire le caractère volatile de certaines variables ou même le comportement rationnel des agents économiques, et impliquent parfois le recours à des modèles non linéaires susceptibles de rendre inadéquat la spécification ARMA. Dans ce contexte, comme le propose Engle (1982) – pour intégrer la volatilité dans la spécification ARMA – il tient de recourir au modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique (ARCH). En effet, ce type des modèles est adapté aux chroniques présentant les deux caractéristiques qui suivent :

- ▶ *La non stationnarité (surtout en variance) ;*
- ▶ *La non normalité de la distribution d'une variable/série, à la suite de son caractère leptocurtique, pouvant conduire à la non linéarité de la variable/série sous étude.*

Précisons que ces caractéristiques sont propres aux données financières et monétaires (inflation, taux de change, cours boursiers,...) dont l'évolution est souvent non linéaire et volatile. Il s'en suit que, pour ce type des données, les MCO ne sont pas valides à cause de l'hétéroscédasticité et la non linéarité dans les variables et certains paramètres. D'où, le recours à la méthode du maximum de vraisemblance tient lieu.

Par ailleurs, il est à préciser que le modèle ARCH consiste à représenter, de façon autorégressive, la variance de l'erreur étant donné la connaissance de son information passée<sup>(2)</sup>. Dans le groupe/famille de modèles ARCH, il est à distinguer les modèles ARCH linéaires (on y trouve les modèles : ARCH(q), ARCH-M, GARCH-M,

---

<sup>1</sup> A cause de la linéarité dans les variables et dans certains paramètres, les MCO sont facilement applicables).

<sup>2</sup> On parle mieux de la régression ou représentation autorégressive de la variance des erreurs conditionnellement à son information passée.



GARCH(p,q) et IGARCH(p,q)) des modèles ARCH non linéaires (on y trouve les modèles : TARARCH(p,q), TGARCH(p,q) et EGARCH(p,q))<sup>(1)</sup>.

En fait, les ARCH linéaires spécifient la variance conditionnelle des erreurs sous la forme quadratique et ne prend en compte que l'ampleur des valeurs passées ; tandis que, les ARCH non linéaires tiennent à la fois compte du signe et de l'ampleur des valeurs passées en levant l'hypothèse des spécifications quadratiques symétriques (on fait des spécifications asymétriques des erreurs).

## B. Modélisation

### B.1. Les processus ARCH linéaires

L'hypothèse fondamentale sous-tendant les ARCH linéaires est la symétrie des spécifications quadratiques de la variance conditionnelles des erreurs.

#### 1) Modèle ARCH(q)

Rappelons qu'un modèle de type ARCH(q) consiste à spécifier la variance des erreurs de façon autorégressive conditionnellement à son information passée. Une telle spécification peut généralement s'écrire :

$$\text{var}(e_t/I_{t-1}) = h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2 \dots \dots [1]$$

Où  $\text{var}(e_t/I_{t-1}) = 0$  ;  $a_0 > 0$  et  $a_i \geq 0$  ( $i = 1 \dots q$ ),

$$\sum_{i=1}^q a_i < 1 : \text{condition de stationnarité}$$

Avec «  $e_t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) », le résidu d'un modèle de régression général :  $Y_t = AX_t + e_t$  ou d'un ARMA(p,q) :

$$Y_t = \lambda + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-i} + e_t \dots \dots [1]'$$

#### 2) Modèle ARCH Generalised (GARCH(p,q))

Il s'agit d'un modèle ARCH généralisé ; car, dans ce type des modèles, l'information – plus éloignée dans le passé – sur la variance conditionnelle des erreurs est prise en compte dans la spécification de celle-ci en y incluant les valeurs des variances décalées. Selon BOLLERSLEV (1986), le modèle GARCH(p,q) s'écrit :

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i}^2 \dots \dots [2]$$

<sup>1</sup> Signalons de passage qu'il existe des modèles : Threshold Autoregressive/Autoregressif à seuils (TAR), Smooth Transition Autoregressive/Autorégressif à transition douce (STAR), Logistic STAR/STAR Logistique (LSTAR), Exponential STAR/STAR exponentiel (ESTAR).



Où :

$$a(L) + b(L) = \sum_{i=1}^q a_i L^i + \sum_{i=1}^p b_i L^i, \text{ et}$$

$$a(1) + b(1) = \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1 \text{ (condition de stationnarité)}$$

\_\_\_\_\_ NB :  $L^i e_t = e_{t-i}$  ( $i \geq 0$ ).

### 3) Modèle GARCH integrated (IGARCH(p,q))

Le modèle GARCH intégré ou IGARCH est une spécification GARCH pour des processus non stationnaires en niveau (Engle et Bollerslev, 1986). L'on suppose donc que «  $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i > 1$  », à tel enseigne qu'un choc sur «  $h_t^2$  » se répercute sur les valeurs de  $h_{t+m}^2$  ( $m$  : horizon de prévision) de façon explosive, sans s'estomper dans le temps. Ce phénomène est appelé « persistance ». Il va sans dire que dans le modèle IGARCH, l'effet de persistance dans la variance des erreurs – caractéristiques des processus non stationnaires – est pris en compte.

En effet, les variances conditionnelles prévues jusqu'à l'horizon «  $m$  » s'expriment comme suit :

$$E(h_{t+m}^2/I_t) = (a + b)^m h_t^2 + a_0 \left[ \sum_{i=0}^{m-1} (a + b)^i \right] \dots \dots \dots [3]$$

Si l'on considère un modèle IGARCH(1,1), où «  $a + b = 1$  », alors :

$$E(h_{t+m}^2/I_t) = h_t^2 + a_0 m \dots \dots \dots [3]'$$

Avec :

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}^2 \dots \dots \dots [3]''$$

### 4) Modèle ARCH in Mean (ARCH-M) et GARCH in Mean (GARCH-M)

Les modèles ARCH et GARCH avec effet de moyenne sont de spécifications dans lesquelles les effets ARCH et GARCH respectivement influencent aussi la moyenne conditionnelle (Engle, Lilien et Robins, 1987).

Considérons la régression suivante :

$$Y_t = CX_t + f(h_t^2) + e_t \dots \dots \dots [4]$$

Où :  $Y_t/I_{t-1} \rightarrow N(u_t; h_t^2)$ , avec :  $u_t = E(Y_t) = CX_t + f(h_t^2)$  et  $f(h_t^2)$  : fonction de «  $h_t^2$  ».

Dans cette régression, l'espérance conditionnelle «  $u_t$  » est exprimée en fonction de la variance conditionnelle «  $h_t^2$  ». Autrement dit, le niveau atteint par la variable est expliquée par sa forte variabilité (volatilité). Considérant l'expression (4) : (i) on fera allusion à un modèle de type ARCH-M si la variance conditionnelle des erreurs «  $h_t^2$  » – tenant compte des effets ARCH – peut s'écrire :  $h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2$ , et (ii) on fera allusion à un modèle de type GARCH-M si la



variance conditionnelle des erreurs «  $h_t^2$  » – tenant compte des effets GARCH – peut s'écrire :

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i}^2$$

## B.2. Les processus ARCH non linéaires

\_\_\_\_\_ L'hypothèse à la base des ARCH non linéaires est la prise en compte de l'asymétrie de l'information ou effet de levier dans les spécifications quadratiques de la variance conditionnelle des erreurs.

### 5) Modèles Exponential GARCH (EGARCH)

Le modèle GARCH exponentiel, difficile à manier ou à interpréter, est une spécification adaptée au modèle GARCH où «  $a_i$  et  $b_i$  » sont négatifs, levant ainsi les contraintes de non négativité imposées aux paramètres. Ce type des modèles s'expriment comme suit :

$$\log(h_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \{\gamma V_{t-i} + \lambda[|V_{t-i}| + E|V_{t-i}|]\} + \sum_{i=1}^p b_i \log(h_{t-i}^2) \dots \dots [5]$$

Avec :

$$V_{t-i} = \frac{e_{t-i}}{h_{t-i}} : \text{l'erreur standardisée}$$

### 6) Modèles Threshold ARCH (TARCH) et Threshold GARCH (TGARCH)

La modélisation ARCH ou GARCH à seuils consiste à intégrer l'effet d'asymétrie dans les spécifications quadratiques de la variance conditionnelle des erreurs, si bien que le signe et l'amplitude d'un choc dans les erreurs décalées soient déterminants quant à ses effets sur la variance conditionnelle au temps t.

\_\_\_\_\_ Le modèle ARCH à seuils (TARCH(q)) s'écrit :

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + \lambda e_{t-1}^2 D_{t-1} \dots \dots [6]$$

Où  $D_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$  : variable dichotomique permettant de capter l'effet de levier ou d'asymétrie.

\_\_\_\_\_ Le modèle GARCH à seuils (TGARCH(p,q)) s'écrit :

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \lambda e_{t-1}^2 D_{t-1} + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i}^2$$



### C. Arbitrage entre la modélisation ARMA sans effets ARCH et celle avec effets ARCH

Lorsqu'on cherche à déterminer, dans la famille ARIMA, le processus qui permet de reproduire au mieux le mode opératoire d'une chronique (par principe de parcimonie), il est indispensable d'étudier la volatilité de celle-ci ou d'y tester la présence d'effets ARCH, surtout s'il s'agit d'une variable financière ou monétaire. En fait, la présence d'effets ARCH est synonyme d'autocorrélation de la variance des résidus, avec comme corollaire l'inflation de la variance ou la non stationnarité en variance, la non normalité, et donc la non linéarité de la série concernée. Alors, pour tester la présence d'effets ARCH dans un processus, l'on peut procéder par une série de tests dont :

- L'analyse graphique des séries brutes et stationnaires ;
- L'étude des statistiques descriptives de la série ;
- Les tests de marche aléatoire et de présence d'effets ARCH d'ordre supérieur à 3 ; et,
- La spécification autorégressive de la série filtrée (stationnaire) au carré.

#### (i) L'analyse graphique

En représentant sur un même graphique les séries brute et filtrée, l'on aura à présumer l'existence d'une hétéroscédasticité conditionnelle si la série laisse présager des fortes variabilités ou une non stationnarité en variance.

#### (ii) L'étude des statistiques descriptives

L'une des caractéristiques des processus ARCH est la non normalité (ou non linéarité) de la série. La statistique de Jarque-Bera, ainsi que sa probabilité associée conduisent l'inférence.

#### (iii) Le test de marche aléatoire

Basé sur la statistique de Ljung-Box, le test de bruit blanc permet de juger de l'hétéroscédasticité de la variance conditionnelle des erreurs lorsque l'on s'intéresse aux corrélogrammes des carrés des résidus. Ces derniers permettent de tester :

*H<sub>0</sub> : la spécification est du type ARMA (termes du corrélogramme significativement nuls :  $prob > 5\%$ ) ;*

*H<sub>1</sub> : la spécification est du type ARCH (termes du corrélogramme significativement différent de zéro :  $prob < 5\%$ ).*

Aussi, le test ARCH d'hétéroscédasticité d'ordre  $> 3$  – appelé aussi test du multiplicateur de vraisemblance – renseigne sur la nécessité ou pas d'une modélisation du type ARCH. Les hypothèses du test sont :

*H<sub>0</sub> : Absence d'effets ARCH d'ordre  $> 3$  (4) :  $prob > 5\%$ ,  $F_c < F_t$ ) ;*

*H<sub>1</sub> : Existence d'effets ARCH d'ordre  $> 3$  (4) :  $prob < 5\%$ ,  $F_c > F_t$ ).*





En outre, si l'on considère la spécification des erreurs du type ARCH(q) suivante :

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2$$

Les hypothèses à vérifier sont :

$H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0$  : Modélisation ARMA des erreurs ( $prob > 5\%$ ,  $F_c < F_t$ );

$H_1 : a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_q \neq 0$  : Modélisation ARCH des erreurs ( $prob < 5\%$ ,  $F_c > F_t$ ).

Il s'agit là d'un test de Fisher. L'on peut aussi recourir au multiplicateur de Lagrange (LM) – qui suit la statistique de  $\chi^2$  à q degré de liberté – pour vérifier si :

$H_0$  : Modèle linéaire ARMA ( $LM < \chi_q^2$ );

$H_1$  : Modèle linéaire ARCH ( $LM > \chi_q^2$ ).

#### (iv) Spécification autorégressive de la série filtrée au carré

Considérons un AR(1) tel que :  $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ . La spécification autorégressive d'ordre 1 de la série «  $Y_t$  » filtrée au carré s'écrit :  $Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1}$ , avec :  $Z_t = (\Delta Y_t)^2$ . Les hypothèses sont :

$H_0 : \hat{\phi}_1 = 0$  : Absence d'hétéroscédasticité conditionnelle (Modélisation ARMA sans effets ARCH ( $prob > 5\%$ ,  $|t_c| < |t_t|$ );

$H_1 : \hat{\phi}_1 \neq 0$  : Existence d'hétéroscédasticité conditionnelle (Modélisation ARMA avec effets ARCH ( $prob < 5\%$ ,  $|t_c| > |t_t|$ ).

### D. Choix ou sélection du processus ARCH adéquat (optimal)

En présence d'une hétéroscédasticité conditionnelle de la variance des résidus, le choix sur un processus ARCH adéquat est guidé par plusieurs critères, notamment le caractère marche aléatoire des résidus issus de la variance conditionnelle, les meilleurs propriétés prédictives (MAPE faible et l'indice d'inégalité de Theil proche de zéro) et la meilleure qualité de l'équation de la moyenne (faible AIC).

Par ailleurs, l'arbitrage peut aussi se faire comme suit :

#### ► Modèle ARCH vs GARCH

Partant de la spécification des erreurs de la forme GARCH(p,q) suivante :

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i}^2 \dots \dots \dots [Cfr expression 2]$$

L'on peut tester si :

$H_0 : b_i = 0$  : Modélisation ARCH des erreurs ( $LM < \chi^2(p)$ ,  $prob > 5\%$ );

$H_1 : b_i \neq 0$  : Modélisation GARCH des erreurs ( $LM > \chi^2(p)$ ,  $prob < 5\%$ ).

#### ► Modèle GARCH vs IGARCH

Si la série brute sous-étude est non stationnaire, le modèle GARCH fait place au modèle GARCH intégré (IGARCH).





### ► **Modèle GARCH vs EGARCH**

Le modèle GARCH fait place au modèle EGARCH si l'effet de levier est validé : c.à.d. «  $\gamma$  » est statistiquement significatif (Cfr expression 5).

### ► **Modèle GARCH vs TGARCH**

Le modèle GARCH fait place au modèle TGARCH en présence d'effets seuils, c.à.d. quand «  $\lambda$  » est statistiquement significatif dans « l'expression 6 ».

### ► **Modèle ARCH ou GARCH vs ARCH-M ou GARCH-M**

Les modèles ARCH ou GARCH font place aux modèles ARCH-M ou GARCH-M si le paramètre associé à la variance conditionnelle «  $h_t^2$  » est statistiquement significatif (Cfr expression 4), ou si graphiquement les fortes inflations lisibles sur la série brute correspondent aux fortes variabilités (lisibles sur la série filtrée) de la série concernée.

## **E. Estimation des modèles ARCH<sup>(1)</sup>**

Pour estimer les paramètres des modèles ARCH, l'on recourt souvent à la méthode de moindres carrés pondérés ou à des algorithmes fondés sur la méthode du maximum de vraisemblance.

## **F. Préviation des modèles ARCH**

La prévision à travers une modélisation ARCH sera dite meilleure si elle minimise le MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) et présente un coefficient de Theil proche de zéro : faut-il encore que les résidus de la variance conditionnelle des erreurs soient des bruits blancs (gaussiens).

### **VII.2.2 ETUDE DE LA SERIE BRUTE « EURUS » PAR LA MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE (ARCH)**

Rappelons que, faisant partie de la famille ARIMA, la modélisation ARCH est de nature à éliminer l'hétéroscédasticité conditionnelle. Aussi, nous y recourons pour deux raisons :

- Du point de vue « statistique » : Le caractère non normal/non linéaire de notre série « EURUS » ;
- Du point de vue théorique : La paire « Euro-dollars » étant la plus traidée (une bonne part des transactions sur les marchés financiers/Forex<sup>(2)</sup> sont axées sur la parité « EUR/US » : soit 30%), elle est victime des fortes spéculations et, par endroit, d'une forte volatilité (ce qui rend inadéquat l'approche de Box et Jenkins pour la modélisation de ce produit du Forex : la paire « EUR/US »).

<sup>1</sup> GARCH est identifié suivant la même logique que le processus ARMA.

<sup>2</sup> Selon « FxPro » (plateforme d'informations financières) ou consulter les analyses des Economistes sur « fr.investing.com/economic-calendar » (A savoir : environ 100 paires des devises font l'objet de 95% des spéculations sur le Forex).



Précisons aussi que nous allons estimer six modèles (ARCH, GARCH, TGARCH, EGARCH, ARCH-M et GARCH-M) parmi lesquels nous retiendrons le plus performant, et allons procéder comme suit :

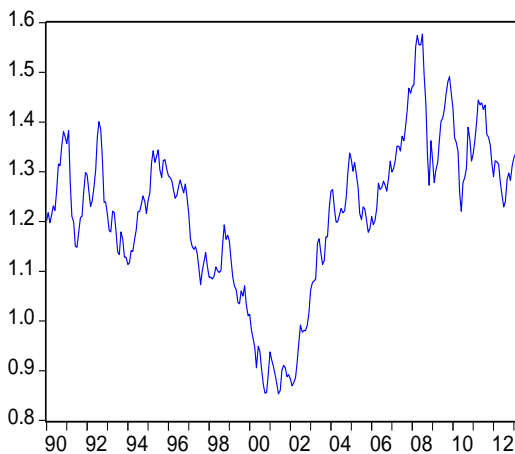
- (i) Représentations graphiques des séries « EURUS » et « DEURUS » ;
- (ii) Statistiques descriptives et test de normalité de la série « EURUS » ;
- (iii) Etude de la volatilité de la série « EURUS » ;
- (iv) Estimation des modèles (6) et recherche du modèle optimal
- (v) Prév́ision

### A. Représentations graphiques des séries « EURUS » et « DEURUS »

Sur **EViews**, faire :

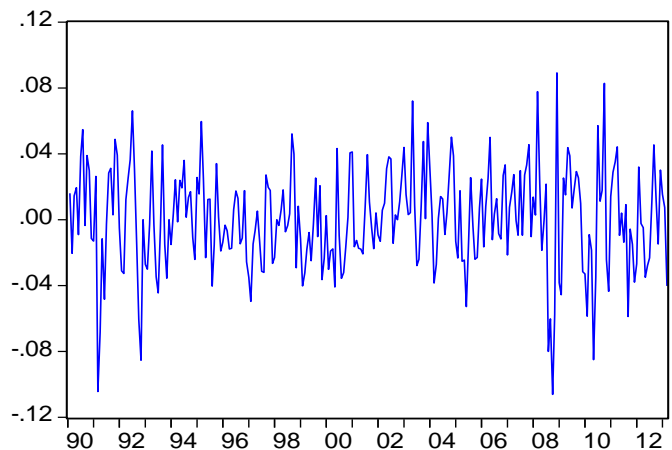
- { genr DEURUS=d(EURUS)
- { plot DEURUS EURUS (« options » pour les axes : Normalized data)

Evolution mensuelle de la parité Euro-Usd (de janvier 1990 à mars 2013)



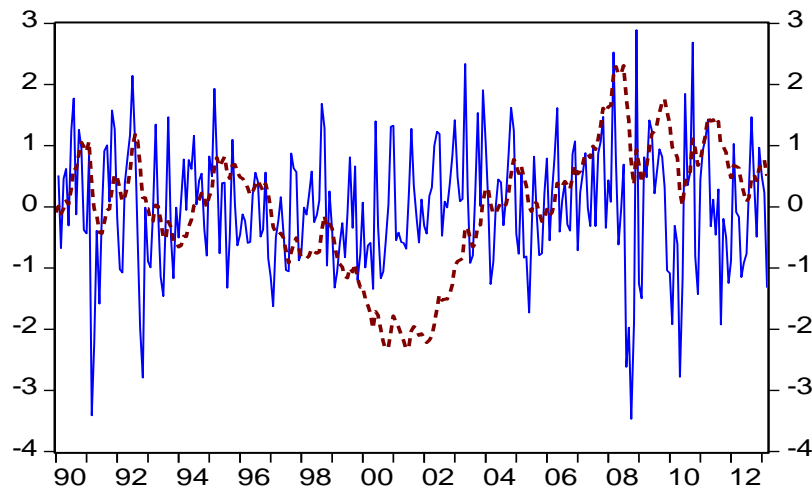
— EURUS

Représentation de la série en différence absolue (DEURUS)



— DEURUS

Evolution comparée de la série brute (EURUS) et celle en différence absolue (DEURUS)

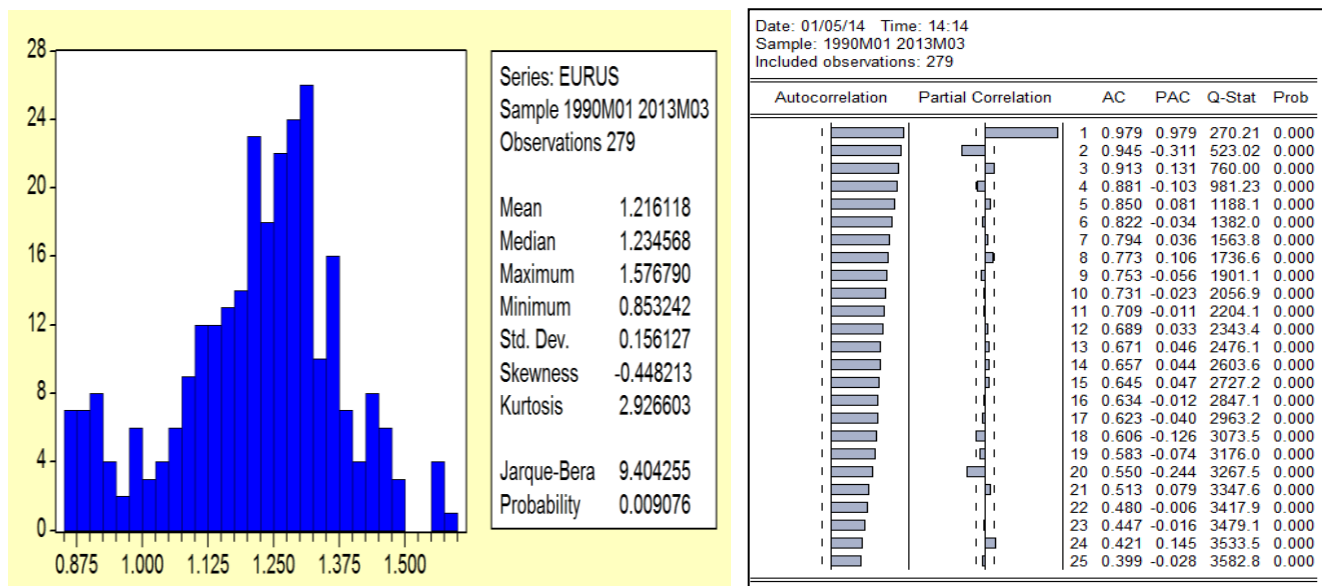


— DEURUS - - - EURUS



## B. Statistiques descriptives et test de normalité de la série « EURUS »

Sur **EViews**, dans l'output des données, cliquer (pour obtenir la figure à gauche) : *View/Descriptive Statistics/Histogram and stats* ; et cliquer (pour obtenir la figure à droite) : *View/Correlogram... →(level ; lag=25)* :



### Constats :

- (i) Skewness (mesure d'asymétrie, il est nul pour une distribution normale) =  $-0.448213$  : c.à.d. distribution dissymétrique à gauche (étalée à droite). D'où, présomption de non linéarité (Skewness non nul) ; (ii) Kurtosis (mesure d'applatissage, il avoisine « 3 » pour une distribution normale) =  $2.926603 \approx (<) 3$  : c.à.d. distribution platykurtique (centre moins élevé) ; et (iii) Jarque-Bera (test de normalité, avec  $H_0$  : le processus est normalement distribué). La probabilité associée est de  $0.009076 < 5\%$  : rejet de l'hypothèse de normalité pour la série « EURUS » sous-étude ;
- Notre série brute « EURUS » suivrait un processus du type « AR(2) » (Cfr correlogramme). Elle accuse aussi une non stationnarité (décroissance lente des termes du correlogramme simple), serait-il beaucoup plus en variance.

## C. Etude de la volatilité de la série « EURUS »

Pour étudier la volatilité de notre série « EURUS », régressons « DEURUS » au carré sur cette même série décalée (cette façon de procéder permet de juger de l'autocorrélation de la variance des résidus/hétéroscédasticité).

Sur **EViews**, faire :

$$\begin{cases} \text{genr DEURUS2=DEURUS}^2 \\ \text{ls DEURUS c DEURUS2(-1)} \end{cases}$$



Dependent Variable: DEURUS2				
Method: Least Squares				
Date: 01/05/14 Time: 14:07				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000769	0.000107	7.176047	0.0000
DEURUS2(-1)	0.184564	0.059266	3.114178	0.0020
R-squared	0.034065	Mean dependent var		0.000942
Adjusted R-squared	0.030552	S.D. dependent var		0.001549
S.E. of regression	0.001525	Akaike info criterion		-10.12609
Sum squared resid	0.000640	Schwarz criterion		-10.09992
Log likelihood	1404.463	F-statistic		9.698106
Durbin-Watson stat	2.058548	Prob(F-statistic)		0.002039

\_\_\_\_\_ **Constat** : le paramètre associé à « DEURUS2(-1) » est statistiquement significatif, ce qui permet d'accepter l'hypothèse d'hétéroscédasticité conditionnelle (la variation de « EURUS » au temps « t » est fonction de son évolution au temps « t-1 »).

#### D. Estimation des modèles et recherche du modèle optimal

##### 1) Estimation des modèles

###### a) Estimation du modèle ARCH

Nous estimons un AR(1)<sup>(1)</sup> ou un AR(2) à partir duquel nous effectuons le test de présence d'effets ARCH pour juger de la nécessité d'une modélisation ARCH.

###### ► Estimation du modèle AR(1) :

\_\_\_\_\_ Sur **EViews**, faire : `ls EURUS c EURUS(-1)`

Dependent Variable: EURUS				
Method: Least Squares				
Date: 01/05/14 Time: 14:17				
Sample (adjusted): 1990M02 2013M03				
Included observations: 278 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.023235	0.014424	1.610806	0.1084
EURUS(-1)	0.981167	0.011767	83.38097	0.0000
R-squared	0.961817	Mean dependent var		1.216169
Adjusted R-squared	0.961679	S.D. dependent var		0.156406
S.E. of regression	0.030618	Akaike info criterion		-4.127305
Sum squared resid	0.258735	Schwarz criterion		-4.101207
Log likelihood	575.6954	F-statistic		6952.386
Durbin-Watson stat	1.361607	Prob(F-statistic)		0.000000

<sup>1</sup> Le processus générateur de la série « EURUS » était un **arima(1,1,1)** si l'on s'en tient aux résultats issus de la procédure Box-Jenkins appliquée à cette série. C'est ainsi que nous estimons les modèles AR(1) et AR(2), le processus arima(1,1,1) étant non significatif.



► Estimation du modèle AR(2) :

\_\_\_\_\_ Sur **EViews**, faire : *Is EURUS c EURUS(-1) EURUS(-2)*

Dependent Variable: EURUS				
Method: Least Squares				
Date: 01/16/14 Time: 14:01				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.030959	0.013764	2.249333	0.0253
EURUS(-1)	1.299107	0.057303	22.67079	0.0000
EURUS(-2)	-0.324468	0.057363	-5.656356	0.0000
R-squared	0.965841	Mean dependent var	1.216163	
Adjusted R-squared	0.965592	S.D. dependent var	0.156689	
S.E. of regression	0.029065	Akaike info criterion	-4.227801	
Sum squared resid	0.231466	Schwarz criterion	-4.188551	
Log likelihood	588.5504	F-statistic	3873.704	
Durbin-Watson stat	1.910455	Prob(F-statistic)	0.000000	

\_\_\_\_\_ **Commentaires :** le modèle AR(2) est plus significatif que le modèle AR(1), ce qui nous amène à retenir le processus AR(2) qui est optimal.

► Inférences sur le modèle AR(2) estimé :

\_\_\_\_\_ **Sur EViews**, dans l'output de l'estimation (figure à gauche : obtenir le corrélogramme des résidus (simple)), suivre : *View/Residual Tests/Correlogram-Q-statistics* → *lags=15*. Aussi, suivre (figure à droite : obtenir le corrélogramme des résidus aux carrés) : *View/Residual Tests/CorrelogramSquared Residuals* → *lags=15* :

Date: 01/16/14 Time: 23:22						
Sample: 1990M03 2013M03						
Included observations: 277						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.041	0.041	0.4669	0.494
		2	-0.140	-0.142	5.9931	0.050
		3	0.089	0.104	8.2235	0.042
		4	-0.006	-0.037	8.2328	0.083
		5	-0.053	-0.024	9.0353	0.108
		6	0.026	0.016	9.2291	0.161
		7	-0.098	-0.112	12.002	0.101
		8	-0.005	0.024	12.008	0.151
		9	0.064	0.028	13.199	0.154
		10	0.009	0.024	13.221	0.212
		11	-0.047	-0.039	13.868	0.240
		12	0.016	0.007	13.941	0.305
		13	0.015	0.006	14.006	0.373
		14	-0.079	-0.081	15.857	0.322
		15	0.037	0.052	16.260	0.365

Date: 01/16/14 Time: 23:24						
Sample: 1990M03 2013M03						
Included observations: 277						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.034	0.034	0.3148	0.575
		2	0.176	0.175	9.0477	0.011
		3	0.097	0.089	11.702	0.008
		4	0.065	0.031	12.890	0.012
		5	0.227	0.202	27.574	0.000
		6	-0.055	-0.090	28.447	0.000
		7	0.061	-0.015	29.507	0.000
		8	0.021	0.009	29.638	0.000
		9	0.096	0.085	32.297	0.000
		10	-0.026	-0.082	32.486	0.000
		11	0.010	0.015	32.517	0.001
		12	-0.033	-0.050	32.832	0.001
		13	-0.043	-0.053	33.383	0.001
		14	0.040	0.025	33.850	0.002
		15	-0.036	0.021	34.227	0.003





**Note :** La statistique Q de Ljung-Box indique deux termes statistiquement différents de zéro (autant pour le corrélogramme des résidus que pour celui des résidus aux carrés); *Ce qui amène à présumer la présence d'effets ARCH d'ordre 2* dans notre série « EURUS » (le test ARCH ci-dessous nous en dit plus).

\_\_\_\_\_ **Test de présence d'effets ARCH sur le modèle AR(2) estimé :** Sur EViews, dans l'output des résultats, suivre : View/Residuals Tests/ARCH LM Test... →lag(1) :

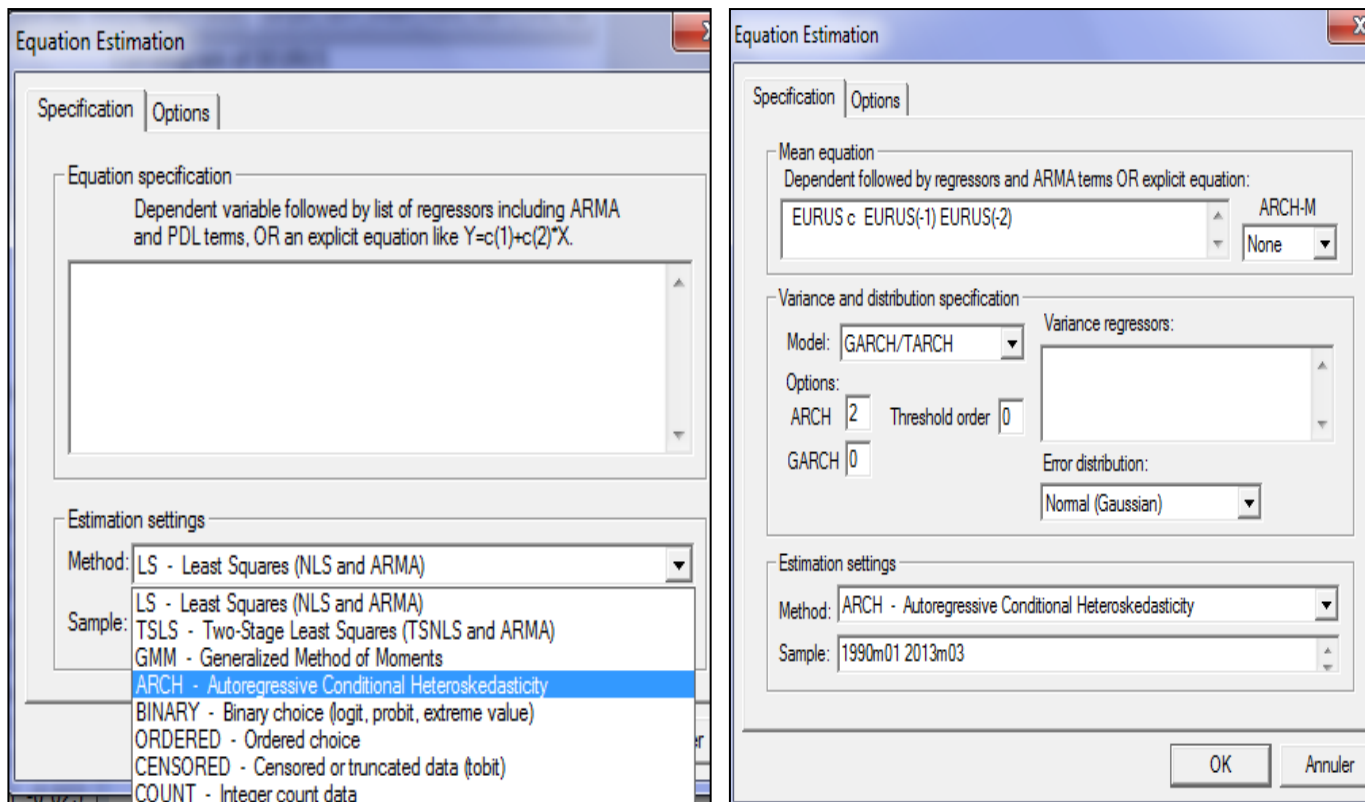
**Note :** la probabilité critique étant > 5% pour un ARCH(1), nous rejetons l'hypothèse de présence d'effets ARCH d'ordre 1 et testons cette hypothèse pour un ordre > 1. Pour un ARCH(2), le coefficient associé à « RESID<sup>2</sup>(-1) » est statistiquement significatif au seuil de 5%, ce qui nous amène à tester la présence d'effets ARCH dans notre processus « EURUS » jusqu'à l'ordre 4. Pour ce décalage (4), seul le coefficient associé à « RESID<sup>2</sup>(-1) » s'est avéré statistiquement significatif au seuil de 5% : d'où, nous confirmons que notre série brute « EURUS » suit un processus ARCH d'ordre 2.

ARCH (1) Test:				
F-statistic	0.289929	Probability	0.590703	
Obs*R-squared	0.291737	Probability	0.589110	
ARCH(2) Test:				
F-statistic	4.389019	Probability	0.013304	
Obs*R-squared	8.597398	Probability	0.013586	
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000670	0.000111	6.051737	0.0000
RESID <sup>2</sup> (-1)	0.026561	0.059732	0.444680	0.6569
RESID <sup>2</sup> (-2)	0.174070	0.059764	2.912628	0.0039
ARCH(4) Test:				
F-statistic	2.806997	Probability	0.026118	
Obs*R-squared	10.97756	Probability	0.026817	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000595	0.000124	4.786558	0.0000
RESID <sup>2</sup> (-1)	0.006613	0.061079	0.108263	0.9139
<b>RESID<sup>2</sup>(-2)</b>	<b>0.165760</b>	<b>0.060850</b>	<b>2.724060</b>	<b>0.0069</b>
RESID <sup>2</sup> (-3)	0.092096	0.060863	1.513182	0.1314
RESID <sup>2</sup> (-4)	0.030711	0.061138	0.502325	0.6159



**b) Estimation du modèle ARCH(2,0) :**

Sur **EViews**, suivre : Quick/Estimate Equation... → les boîtes de dialogue suivantes apparaissent (elles complètent la procédure : à gauche, choisir la méthode ARCH ; et à droite, choisir le type du modèle et préciser l'ordre du retard) :



Autrement :

Sur **EViews**, faire : arch(2,0) EURUS C EURUS(-1) EURUS(-2)

Dependent Variable: EURUS  
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution  
 Date: 01/05/14 Time: 17:17  
 Sample (adjusted): 1990M03 2013M03  
 Included observations: 277 after adjustments  
 Convergence achieved after 17 iterations  
 Variance backcast: ON  
 GARCH = C(4) + C(5)\*RESID(-1)^2 + C(6)\*RESID(-2)^2

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.028306	0.014212	1.991780	0.0464
EURUS(-1)	1.314995	0.060422	21.76340	0.0000
EURUS(-2)	-0.338019	0.060333	-5.602554	0.0000

Variance Equation				
C	0.000696	7.34E-05	9.491408	0.0000
RESID(-1)^2	0.022554	0.050829	0.443732	0.6572
RESID(-2)^2	0.136189	0.066153	2.058679	0.0395

R-squared	0.965826	Mean dependent var	1.216163
Adjusted R-squared	0.965196	S.D. dependent var	0.156689
S.E. of regression	0.029232	Akaike info criterion	-4.233367
Sum squared resid	0.231570	Schwarz criterion	-4.154868
Log likelihood	592.3213	F-statistic	1531.806
Durbin-Watson stat	1.938197	Prob(F-statistic)	0.000000

Date: 01/05/14 Time: 17:19  
 Sample: 1990M03 2013M03  
 Included observations: 277

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1			1	0.035	0.035	0.3460 0.556
2			2	-0.118	-0.119	4.2274 0.121
3			3	0.077	0.087	5.9014 0.117
4			4	0.001	-0.020	5.9019 0.207
5			5	-0.063	-0.044	7.0367 0.218
6			6	0.018	0.015	7.1343 0.309
7			7	-0.087	-0.103	9.3062 0.231
8			8	-0.006	0.017	9.3173 0.316
9			9	0.042	0.015	9.8193 0.365
10			10	0.001	0.011	9.8196 0.456
11			11	-0.050	-0.044	10.534 0.483
12			12	0.026	0.017	10.736 0.552
13			13	0.009	-0.001	10.760 0.631
14			14	-0.083	-0.080	12.775 0.544
15			15	0.026	0.035	12.978 0.604





\_\_\_\_\_ Test d'effets ARCH sur le modèle ARCH(2,0) estimé : pas d'effets ARCH (prob>5%), le modèle ARCH(2,0) est accepté.

ARCH Test:			
F-statistic	0.047581	Probability	0.827490
Obs*R-squared	0.047920	Probability	0.826724

c) **Estimation du modèle AR(2) avec erreurs GARCH(2,0) : c'est le modèle qui nous a paru significatif.**

\_\_\_\_\_ Sur **EViews**, fixer « ARCH : 0 et GARCH(2) » : à droite, le corrélogramme des résidus simple.

Dependent Variable: EURUS Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution Date: 01/05/14 Time: 17:24 Sample (adjusted): 1990M03 2013M03 Included observations: 277 after adjustments Convergence achieved after 67 iterations Variance backcast: ON GARCH = C(4) + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*GARCH(-2)					Date: 01/05/14 Time: 17:26 Sample: 1990M03 2013M03 Included observations: 277						
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
C	0.030462	0.015262	1.995852	0.0459			1	0.048	0.048	0.6367	0.425
EURUS(-1)	1.296141	0.057142	22.68270	0.0000			2	-0.137	-0.139	5.8862	0.053
EURUS(-2)	-0.320899	0.055926	-5.737889	0.0000			3	0.082	0.098	7.7886	0.051
Variance Equation							4	-0.007	-0.039	7.8042	0.099
C	4.83E-05	9.27E-06	5.208103	0.0000			5	-0.053	-0.025	8.5986	0.126
GARCH(-1)	1.929195	0.032049	60.19537	0.0000			6	0.022	0.014	8.7406	0.189
GARCH(-2)	-0.986483	0.027702	-35.61050	0.0000			7	-0.097	-0.111	11.424	0.121
R-squared	0.965838	Mean dependent var	1.216163				8	-0.001	0.027	11.424	0.179
Adjusted R-squared	0.965208	S.D. dependent var	0.156689				9	0.063	0.027	12.557	0.184
S.E. of regression	0.029227	Akaike info criterion	-4.218793				10	0.010	0.024	12.584	0.248
Sum squared resid	0.231487	Schwarz criterion	-4.140294				11	-0.049	-0.043	13.270	0.276
Log likelihood	590.3028	F-statistic	1532.378				12	0.015	0.008	13.333	0.345
Durbin-Watson stat	1.905273	Prob(F-statistic)	0.000000				13	0.014	0.004	13.390	0.418
							14	-0.081	-0.082	15.297	0.358
							15	0.037	0.055	15.712	0.401

Corrélogramme des résidus aux carrés

Date: 01/05/14 Time: 17:29 Sample: 1990M03 2013M03 Included observations: 277						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.029	0.029	0.2369	0.626
		2	0.185	0.184	9.8746	0.007
		3	0.096	0.089	12.460	0.006
		4	0.070	0.034	13.838	0.008
		5	0.233	0.207	29.253	0.000
		6	-0.059	-0.094	30.238	0.000
		7	0.062	-0.021	31.336	0.000
		8	0.024	0.015	31.499	0.000
		9	0.102	0.090	34.521	0.000
		10	-0.023	-0.081	34.675	0.000
		11	0.019	0.023	34.784	0.000
		12	-0.026	-0.042	34.976	0.000
		13	-0.043	-0.061	35.508	0.001
		14	0.049	0.030	36.212	0.001
		15	-0.034	0.025	36.548	0.001



**d) Estimation du modèle AR(2) avec erreurs TGARCH(2,1) : c'est le modèle qui nous a paru significatif.**

Sur **EViews**, fixer « ARCH : 1, GARCH : 2, Threshold order : 1 » :

Dependent Variable: EURUS					Date: 01/05/14 Time: 17:36					
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution					Sample: 1990M03 2013M03					
Date: 01/05/14 Time: 17:34					Included observations: 277					
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03					Included observations: 277 after adjustments					
Convergence achieved after 33 iterations										
Variance backcast: ON										
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(7)*GARCH(-1) + C(8)*GARCH(-2)										
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
C	0.030524	0.012777	2.388933	0.0169			1 -0.042	-0.042	0.4918	0.483
EURUS(-1)	1.287174	0.059580	21.60413	0.0000			2 0.043	0.041	1.0124	0.603
EURUS(-2)	-0.311911	0.059679	-5.226487	0.0000			3 0.018	0.021	1.1028	0.776
Variance Equation							4 -0.031	-0.031	1.3758	0.848
C	6.86E-06	1.60E-06	4.277212	0.0000			5 0.133	0.129	6.4046	0.269
RESID(-1)^2	0.013850	0.005656	2.448956	0.0143			6 -0.091	-0.080	8.7639	0.187
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.016190	0.006330	-2.557801	0.0105			7 0.013	-0.002	8.8131	0.266
GARCH(-1)	1.932005	0.034659	55.74301	0.0000			8 0.003	0.006	8.8161	0.358
GARCH(-2)	-0.945963	0.033070	-28.60447	0.0000			9 0.035	0.046	9.1757	0.421
R-squared	0.965831	Mean dependent var	1.216163				10 -0.076	-0.099	10.854	0.369
Adjusted R-squared	0.964942	S.D. dependent var	0.156689				11 -0.004	0.012	10.859	0.455
S.E. of regression	0.029338	Akaike info criterion	-4.262507				12 -0.057	-0.062	11.808	0.461
Sum squared resid	0.231536	Schwarz criterion	-4.157842				13 -0.102	-0.104	14.836	0.318
Log likelihood	598.3572	F-statistic	1086.238				14 0.009	-0.008	14.858	0.388
Durbin-Watson stat	1.889449	Prob(F-statistic)	0.000000				15 -0.044	-0.004	15.425	0.421

**Constat** : Les résidus de l'estimation de ce modèle sont de bruits blancs : le processus AR(2) avec erreurs TGARCH(2,1) est accepté.

**e) Estimation du modèle AR(2) avec erreurs EGARCH(2,1) : c'est le modèle qui nous a paru significatif.**

Sur **EViews**, fixer « ARCH : 1, GARCH : 2, Asymmetric order : 1 » (**NB** : dans “Model”, choisir “EGARCH”) :



Dependent Variable: EURUS Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution Date: 01/05/14 Time: 17:43 Sample (adjusted): 1990M03 2013M03 Included observations: 277 after adjustments Convergence achieved after 56 iterations Variance backcast: ON LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1)) + C(8)*LOG(GARCH(-2))					Date: 01/05/14 Time: 17:46 Sample: 1990M03 2013M03 Included observations: 277						
					Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
							1	0.117	0.117	3.8404	0.050
							2	0.129	0.117	8.5187	0.014
							3	0.047	0.020	9.1291	0.028
							4	0.097	0.077	11.769	0.019
							5	0.211	0.192	24.382	0.000
							6	-0.048	-0.114	25.047	0.000
							7	0.055	0.024	25.927	0.001
							8	0.023	0.022	26.081	0.001
							9	0.116	0.080	29.983	0.000
							10	0.002	-0.057	29.984	0.001
							11	0.014	0.029	30.045	0.002
							12	-0.020	-0.048	30.167	0.003
							13	-0.045	-0.060	30.750	0.004
							14	0.026	0.011	30.942	0.006
							15	-0.026	0.008	31.146	0.008
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.							
C	0.035929	0.014977	2.398998	0.0164							
EURUS(-1)	1.355191	0.044893	30.18724	0.0000							
EURUS(-2)	-0.385072	0.044136	-8.724688	0.0000							
Variance Equation											
C(4)	-18.37279	1.966031	-9.345121	0.0000							
C(5)	-0.191991	0.104719	-1.833395	0.0667							
C(6)	0.093409	0.067582	1.382168	0.1669							
C(7)	-0.792802	0.129939	-6.101350	0.0000							
C(8)	-0.810401	0.175188	-4.625888	0.0000							
R-squared	0.965681	Mean dependent var	1.216163								
Adjusted R-squared	0.964788	S.D. dependent var	0.156689								
S.E. of regression	0.029402	Akaike info criterion	-4.220535								
Sum squared resid	0.232551	Schwarz criterion	-4.115870								
Log likelihood	592.5441	F-statistic	1081.327								
Durbin-Watson stat	2.003091	Prob(F-statistic)	0.000000								

**Constat :** Les résidus de l'estimation de ce modèle ne semblent pas de bruits blancs : le processus AR(2) avec erreurs EGARCH(2,1) n'est pas accepté. A cela s'ajoute que le coefficient  $c(5)$  est négatif, mais statistiquement non significatif.

f) **Estimation du modèle AR(2) avec erreurs ARCH(2)-M :** c'est le modèle qui nous a paru significatif.

EViews offre deux possibilités pour estimer le modèle ARCH-M, à savoir :

- 1<sup>ère</sup> possibilité/Hypothèse : la variance conditionnelle intervient dans l'espérance conditionnelle comme suit (notre cas : AR(2) avec erreurs ARCH(2)-M) :

$$EURUS_t = a_0 + a_1 EURUS_{t-1} + a_2 EURUS_{t-2} + \lambda h_t^2 + e_t$$

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2$$

Sur **EViews**, suivre : Quick/Estimate Equation... → la boîte de dialogue à gauche apparaît (elle complète la procédure) : Estimer le processus AR(2) sans constante avec erreurs ARCH(2)-M ci-dessus : 1<sup>ère</sup> possibilité – variance.



The screenshot shows the 'Equation Estimation' dialog box in EViews. The 'Specification' tab is active, showing the mean equation 'EURUS EURUS(-1) EURUS(-2)' and the variance specification 'GARCH/TARCH'. The 'Variance and distribution specification' section has 'Model' set to 'GARCH/TARCH', 'Options' with 'ARCH' set to 2 and 'Threshold order' to 0, and 'Error distribution' set to 'Normal (Gaussian)'. The 'Estimation settings' section shows 'Method' as 'ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity' and 'Sample' as '1990m01 2013m03'. A dropdown menu for 'Variance' is open, showing options: 'None', 'Std. Dev.', 'Variance', and 'Log(Var)'. The 'Variance' option is selected. To the right of the dialog box, the results are displayed, including the dependent variable 'EURUS', the method 'ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution', and the GARCH equation:  $GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-2)^2$ . Below this, there are two tables: one for the main equation coefficients and one for the variance equation coefficients.

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	37.21625	6.782951	5.486735	0.0000
EURUS(-1)	1.308725	0.033280	39.32504	0.0000
EURUS(-2)	-0.332028	0.031868	-10.41883	0.0000

Variance Equation				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000802	6.52E-05	12.29029	0.0000
RESID(-1) <sup>2</sup>	-0.073855	0.028884	-2.556920	0.0106
RESID(-2) <sup>2</sup>	0.076318	0.028730	2.656362	0.0079

R-squared	0.966493	Mean dependent var	1.216163
Adjusted R-squared	0.965874	S.D. dependent var	0.156689
S.E. of regression	0.028945	Akaike info criterion	-4.265261
Sum squared resid	0.227054	Schwarz criterion	-4.186763
Log likelihood	596.7387	Durbin-Watson stat	1.907045

- 2<sup>ème</sup> possibilité/Hypothèse : l'écart-type conditionnel intervient dans l'espérance conditionnelle comme suit (notre cas : AR(2) avec erreurs ARCH(2)-M)

$$EURUS_t = a_0 + a_1 EURUS_{t-1} + a_2 EURUS_{t-2} + \lambda h_t + e_t$$

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2$$

\_\_\_\_ Sur **EViews** (même procédure que le modèle précédent) : Estimer le processus AR(2) sans constante avec erreurs ARCH(2)-M ci-dessus : 2<sup>ème</sup> possibilité – écart-type (dans « ARCH-M » cocher : Std. Dev.):



Dependent Variable: EURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/12/14 Time: 17:44				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Convergence achieved after 10 iterations				
Variance backcast: OFF				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-2)^2				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
@SQRT(GARCH)	1.464858	0.277149	5.285453	0.0000
EURUS(-1)	1.285147	0.014670	87.60177	0.0000
EURUS(-2)	-0.317559	0.017498	-18.14884	0.0000
Variance Equation				
C	0.000789	6.85E-05	11.51605	0.0000
RESID(-1)^2	-0.079056	0.020678	-3.823227	0.0001
RESID(-2)^2	0.120508	0.051430	2.343137	0.0191
R-squared	0.966248	Mean dependent var	1.216163	
Adjusted R-squared	0.965626	S.D. dependent var	0.156689	
S.E. of regression	0.029051	Akaike info criterion	-4.254145	
Sum squared resid	0.228709	Schwarz criterion	-4.175646	
Log likelihood	595.1991	Durbin-Watson stat	1.860842	

**g) Estimation du modèle AR(2) avec erreurs GARCH(2,0)-M** : c'est le modèle qui nous a paru significatif.

EViews offre deux possibilités pour estimer le modèle GARCH-M, à savoir :

- 1<sup>ère</sup> possibilité/Hypothèse : la variance conditionnelle intervient dans l'espérance conditionnelle comme suit (notre cas : AR(2) avec erreurs GARCH(2)-M)

$$EURUS_t = a_0 + a_1 EURUS_{t-1} + a_2 EURUS_{t-2} + \lambda h_t^2 + e_t$$

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + b_1 h_{t-1}^2 + b_2 h_{t-2}^2$$

Sur **EViews**, suivre : Quick/Estimate Equation... → la boîte de dialogue à gauche apparaît (elle complète la procédure) : Estimer le processus « AR(2) sans constante avec erreurs GARCH(2)-M » ci-dessus : 1<sup>ère</sup> possibilité – variance.





Equation Estimation

Specification Options

Mean equation  
 Dependent followed by regressors and ARMA terms OR explicit equation:  
 EURUS EURUS(-1) EURUS(-2)

Variance and distribution specification  
 Model: GARCH/TARCH  
 Options: ARCH 0 Threshold order 0  
 GARCH 2  
 Error distribution: Normal (Gaussian)

Estimation settings  
 Method: ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity  
 Sample: 1990m01 2013m03

OK Annuler

Dependent Variable: EURUS  
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution  
 Date: 01/12/14 Time: 17:49  
 Sample (adjusted): 1990M03 2013M03  
 Included observations: 277 after adjustments  
 Convergence not achieved after 500 iterations  
 Variance backcast: OFF  
 GARCH = C(4) + C(5)\*GARCH(-1) + C(6)\*GARCH(-2)

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	39.21532	16.49258	2.377755	0.0174
EURUS(-1)	1.300398	0.051522	25.23975	0.0000
EURUS(-2)	-0.325476	0.050664	-6.424162	0.0000

Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000609	4.10E-05	14.85724	0.0000
GARCH(-1)	1.218890	0.008461	144.0583	0.0000
GARCH(-2)	-0.999246	0.010398	-96.09606	0.0000

R-squared	0.965979	Mean dependent var	1.216163
Adjusted R-squared	0.965351	S.D. dependent var	0.156689
S.E. of regression	0.029167	Akaike info criterion	-4.215245
Sum squared resid	0.230536	Schwarz criterion	-4.136746
Log likelihood	589.8114	Durbin-Watson stat	1.917752

- 2<sup>ème</sup> possibilité/Hypothèse : l'écart-type conditionnel intervient dans l'espérance conditionnelle comme suit (notre cas : AR(2) avec erreurs GARCH(2)-M) :

$$EURUS_t = a_0 + a_1 EURUS_{t-1} + a_2 EURUS_{t-2} + \lambda h_t + e_t$$

$$h_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + b_1 h_{t-1}^2 + b_2 h_{t-2}^2$$

Sur **EViews** (même procédure que le modèle précédent) : Estimer le processus AR(2) sans constante avec erreurs GARCH(2)-M : 2<sup>ème</sup> possibilité – Ecart-type (dans « ARCH-M » cocher : Std. Dev.) :

Dependent Variable: EURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/12/14 Time: 17:53				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Variance backcast: OFF				
GARCH = C(4) + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*GARCH(-2)				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
@SQRT(GARCH)	1.142573	0.478340	2.388621	0.0169
EURUS(-1)	1.296533	0.050654	25.59565	0.0000
EURUS(-2)	-0.322840	0.049908	-6.468636	0.0000
Variance Equation				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000553	4.18E-05	13.25036	0.0000
GARCH(-1)	1.302960	0.007699	169.2473	0.0000
GARCH(-2)	-1.003735	0.010286	-97.57954	0.0000
R-squared	0.965970	Mean dependent var	1.216163	
Adjusted R-squared	0.965342	S.D. dependent var	0.156689	
S.E. of regression	0.029170	Akaike info criterion	-4.213923	
Sum squared resid	0.230595	Schwarz criterion	-4.135425	
Log likelihood	589.6284	Durbin-Watson stat	1.909731	



## 2) Recherche du modèle optimal

Le tableau ci-dessous présente les résultats des différents modèles estimés (nous y insérons également quelques critères de sélection d'un modèle optimal) :

	ARCH(2)	GARCH(2,0)	TGARCH(2,1)	EGARCH(2,1)	ARCH(2)-M Variance	ARCH(2)-M Ecart-type	GARCH(2,0)-M Variance	GARCH(2,0)-M Ecart-type
<b>Equation de la Moyenne</b>								
<i>Constante</i> <b>(Prob)</b>	0.03 (0.046)	0.03 (0.046)	0.07 (0.02)	0.04 (0.02)	*	*	*	*
<i>AR(1)</i>	1.31 (0.000)	1.30 (0.00)	1.29 (0.00)	1.36 (0.00)	1.31 (0.000)	1.29 (0.00)	1.3 (0.00)	1.30 (0.00)
<i>AR(2)</i>	-0.33 (0.000)	-0.32 (0.00)	-0.31 (0.00)	-0.39 (0.00)	-0.33 (0.000)	-0.32 (0.00)	-0.33 (0.00)	-0.32 (0.00)
<b>Equation de la Variance</b>								
<i>Constante</i>	0.0007 (0.000)	0.005 (0.00)	0.0007 (0.00)	-18.37 (0.00)	0.0008 (0.000)	0.0008 (0.00)	0.0006 (0.00)	0.0006 (0.00)
<i>ARCH(1)</i>	0.02 (0.68)	*	0.01 (0.01)	*	-0.07 (0.01)	-0.08 (0.00)	*	*
<i>ARCH(2)</i>	0.14 (0.04)	*	*	*	0.08 (0.008)	-0.12 (0.02)	*	*
<i>GARCH(1)</i>	*	1.93 (0.00)	1.93 (0.00)	-0.79 (0.00)	*	*	1.22 (0.00)	1.30 (0.00)
<i>GARCH(2)</i>	*	-0.99 (0.00)	-0.95 (0.00)	-0.81 (0.00)	*	*	-0.999 (0.00)	-1.004 (0.00)
<i>RESID(-1)^2*( RESID(-1)&lt;0)</i>	*	*	-0.02 (0.01)	*	*	*	*	*





	ARCH(2)	GARCH(2,0)	TGARCH(2,1)	EGARCH(2,1)	ARCH(2)-M Variance	ARCH(2)-M Ecart-type	GARCH(2,0)-M Variance	GARCH(2,0)-M Ecart-type
<i>ABS(RESID(-1)/ @SQRT/GARCH(-1))</i>	*	*	*	-0.19 (0.07)	*	*	*	*
<i>(RESID(-1)/ @SQRT/GARCH(-1))</i>	*	*	*	0.09 (0.17)	*	*	*	*
<i>GARCH</i>	*	*	*	*	37.22 (0.000)	*	39.22 (0.02)	*
<i>@SQRT(GARCH)</i>	*	*	*	*	*	1.46 (0.00)	*	1.14 (0.02)
<i>R<sup>2</sup></i>	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
<i>AIC</i>	-4.23	-4.22	-4.26	-4.22	<b>-4.27</b>	-4.25	-4.22	-4.21
<i>DW</i>	1.94	1.91	1.89	<b>2.003</b>	1.91	1.86	1.92	1.91
<i>Ljung-Box/LB(36) (Prob)</i>	27.83 (0.83)	32.35 (0.64)	<b>27.17</b> (0.86)	28.23 (0.82)	28.92 (0.79)	27.32 (0.85)	34.13 (0.56)	33.62 (0.58)
<i>LB<sup>2</sup>(36) (Prob)</i>	40.168 (0.29)	56.01 (0.02)	<b>22.67</b> (0.96)	44.38 (0.16)	50.94 (0.05)	46.59 (0.11)	57.02 (0.01)	60.37 (0.007)
<i>Normalité</i>	Non	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non
<i>Effet ARCH</i>	Non	Oui(lag :2)	Non	Oui(lag :2)	Non	Non	Oui(lag :2)	Oui(lag :2)

\_\_\_\_\_ **Commentaire** : Si l'on s'en tient au corrélogramme des résidus aux carrés (Cfr **LB<sup>2</sup>(36)**), il apparaît que – pour quatre modèles/processus – les résidus issus de la variance conditionnelle ne sont pas des bruits blancs (prob<5%). Il s'agit des modèles : GARCH(2,0) ; ARCH(2)-M/Variance ; GARCH(2,0)-M/Variance et GARCH(2,0)-M/Ecart-type.

\_\_\_\_\_ **Modèle optimal** : au regard des résultats ci-dessus, l'on note le modèle optimal – selon les critères – comme suit :

- AIC minimum (qualité de l'équation de la moyenne) : **ARCH(2)-M/Variance** ;
- DW maximal : **EGARCH(2,1)** ;
- LB<sup>2</sup>(36) minimum (qualité de l'équation de la moyenne) : **TGARCH(2,1)** ;



Ainsi, trois modèles sont candidats à la prévision. Dans le point qui suit, nous nous servons des critères de bonne prévision (Mean Absolute Percentage Error/MAPE minimal et Coefficient d'inégalité de Theil proche de zéro) pour sélectionner le modèle optimal parmi les trois.

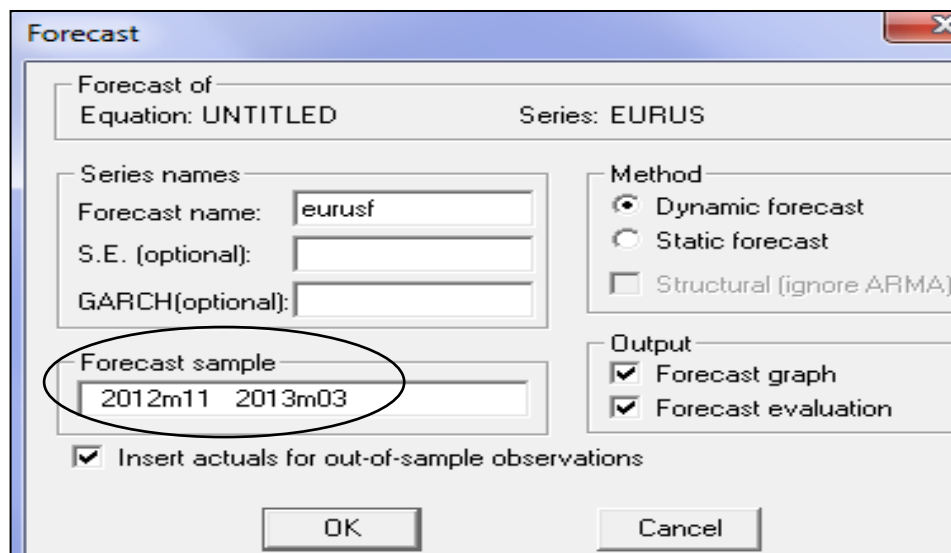
### E. Prévision

#### a) Choix du modèle optimal (recours aux critères de bonne prédiction)

Nous recourons aux procédures de simulation dynamique de « EViews » pour prévoir notre série brute « EURUS » à travers nos huit modèles (ne disposant pas de nouvelles données, notre série brute a été tronquée de 5 mois. Sur base de cette série tronquée, une ré-estimation nous a aidée à obtenir les prédictions souhaitées).

\_\_\_\_\_ Pour ce faire, sur EViews, procéder comme suit :

- Taper : *smp1 1990:01 2012:10*
- Estimer les paramètres du modèle sélectionné ;
- après l'estimation des paramètres, dans l'output des résultats, cliquer sur **Forecast** : la boîte de dialogue suivante apparaît (elle complète la procédure. *Ex : ARCH(2)-M avec Variance*) **cliquer sur « Ok »** :



\_\_\_\_\_ Les valeurs MAPE et Theil recueillies, pour différents modèles (nous intégrons aussi les valeurs AIC/Akaike Criteria), sont favorables pour le processus « **ARCH(2)-M/Variance** » estimé (voir le tableau ci-dessous). Ce dernier est ainsi retenu pour la prévision des valeurs futures de la parité « Euro-Usd » (de Novembre 2012 à Mars 2013, soit 5 mois).

Critères	Modèles/Processus			
	ARCH(2)	GARCH(2,0)	TGARCH(2,1)	EGARCH(2,1)
<b>MAPE</b>	1.4207	1.4463	1.4363	1.4960
<b>THEIL</b>	0.0079	0.0083	0.0081	0.0091
<b>AIC</b>	*	*	*	*



Critères	Modèles/Processus (suite)			
	ARCH(2)- M/Variance	ARCH(2)- M/Ecart-type	GARCH(2,0)- M/Variance	GARCH(2,0)- M/Ecart-type
<b>MAPE</b>	<b>1.4125</b>	1.4151	1.6857	1.9980
<b>THEIL</b>	0.0079	<b>0.0078</b>	0.010	0.0116
<b>AIC</b>	<b>-4.2616</b>	-4.2575	*	*

\_\_\_\_\_ **Modèle optimal** : selon les critères, l'on note le modèle optimal comme suit :

- MAPE : **ARCH(2)-M/Variance** ;
- THEIL : **ARCH(2)-M/Ecart-type** ;
- AIC minimum (*qualité de l'équation de la moyenne*) : **ARCH(2)-M/Variance**.

Ce qui revient à dire que le modèle « **ARCH(2)-M/Variance** » est optimal/meilleur (il remplit les propriétés statistiques d'une bonne prévision).

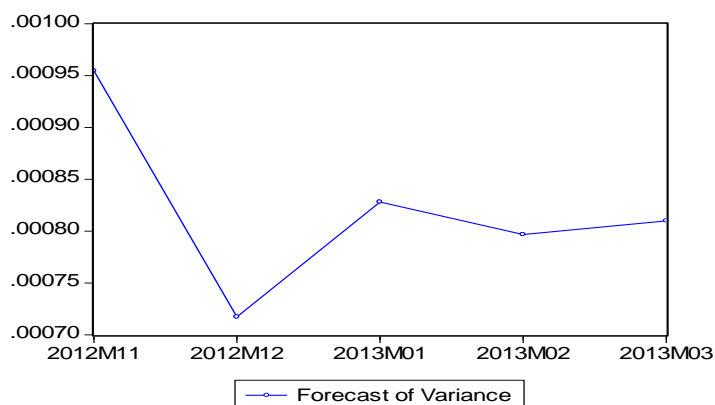
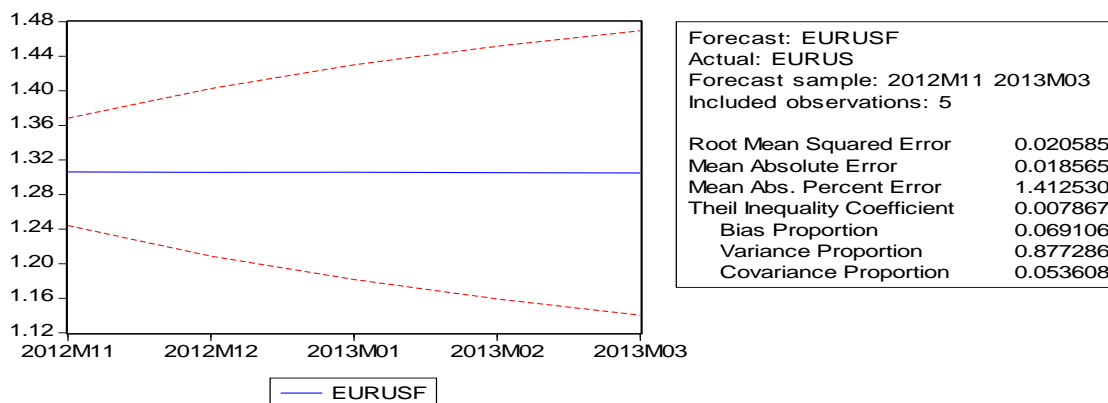
\_\_\_\_\_ **NB** : les résultats du modèle « ARCH(2)-M avec Variance » estimé sur la période « 1990:01 à 2012:10 » se présentent comme suit (Voir « AIC ») :

Dependent Variable: EURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/17/14 Time: 19:37				
Sample (adjusted): 1990M03 2012M10				
Included observations: 272 after adjustments				
Convergence achieved after 18 iterations				
Variance backcast: OFF				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-2)^2				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	34.76198	6.694769	5.192408	0.0000
EURUS(-1)	1.299030	0.036025	36.05941	0.0000
EURUS(-2)	-0.320755	0.034476	-9.303691	0.0000
Variance Equation				
C	0.000786	6.48E-05	12.13614	0.0000
RESID(-1)^2	-0.072319	0.035717	-2.024805	0.0429
RESID(-2)^2	0.098253	0.037264	2.636641	0.0084
R-squared	0.966628	Mean dependent var	1.214419	
Adjusted R-squared	0.966001	S.D. dependent var	0.157570	
S.E. of regression	0.029054	Akaike info criterion	-4.261566	
Sum squared resid	0.224542	Schwarz criterion	-4.182026	
Log likelihood	585.5729	Durbin-Watson stat	1.879145	

### b) Prévision

\_\_\_\_\_ Cfr procédure EViews (Choix du modèle optimal) : Cliquer sur « Ok » pour obtenir les graphiques suivants – ils concernent « ARCH(2)-M avec Variance » – d'où nous avons tiré les valeurs « MAPE » et « Theil » :



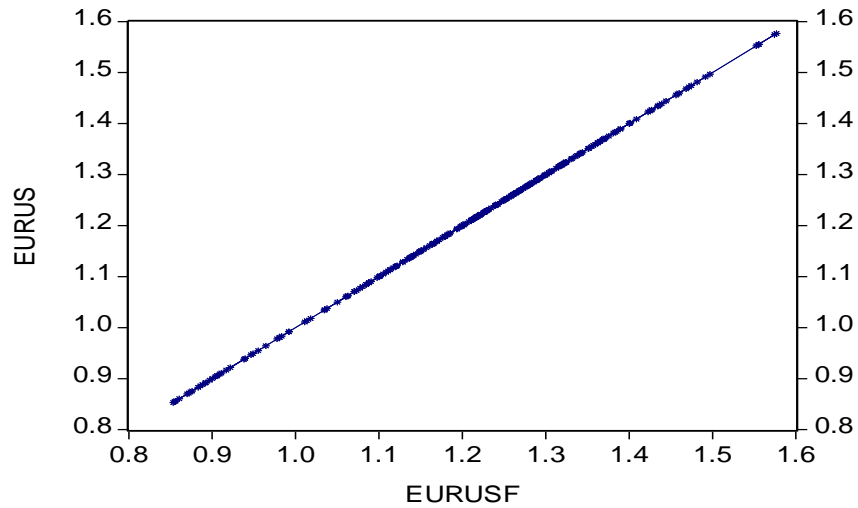


\_\_\_\_\_ Obtenir les données réelles/EURUS et prédites/EURUSF en cliquant sur chaque observation (Cfr fichier de travail) :

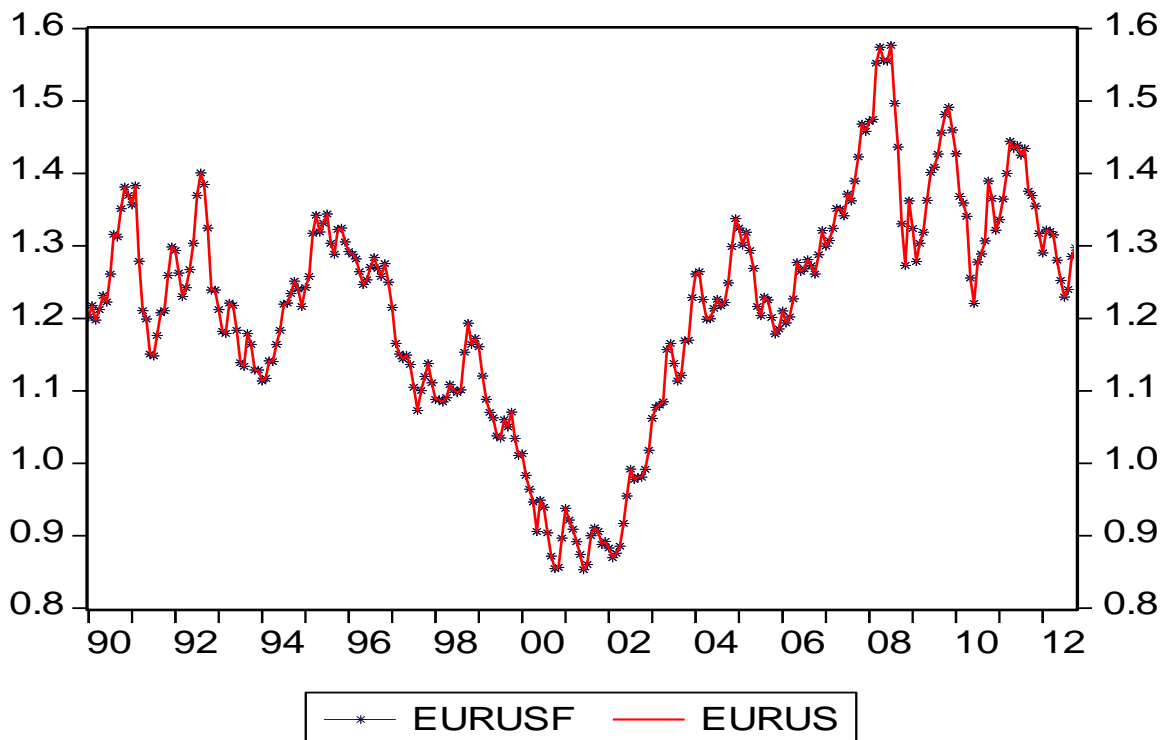
Mois	EURUS	EURUSF
<b>2012M11</b>	1,282694124	1,306243916
<b>2012M12</b>	1,312795379	1,305643272
<b>2013M01</b>	1,328228317	1,305873768
<b>2013M02</b>	1,335710899	1,305277312
<b>2013M03</b>	1,295552553	1,304885629

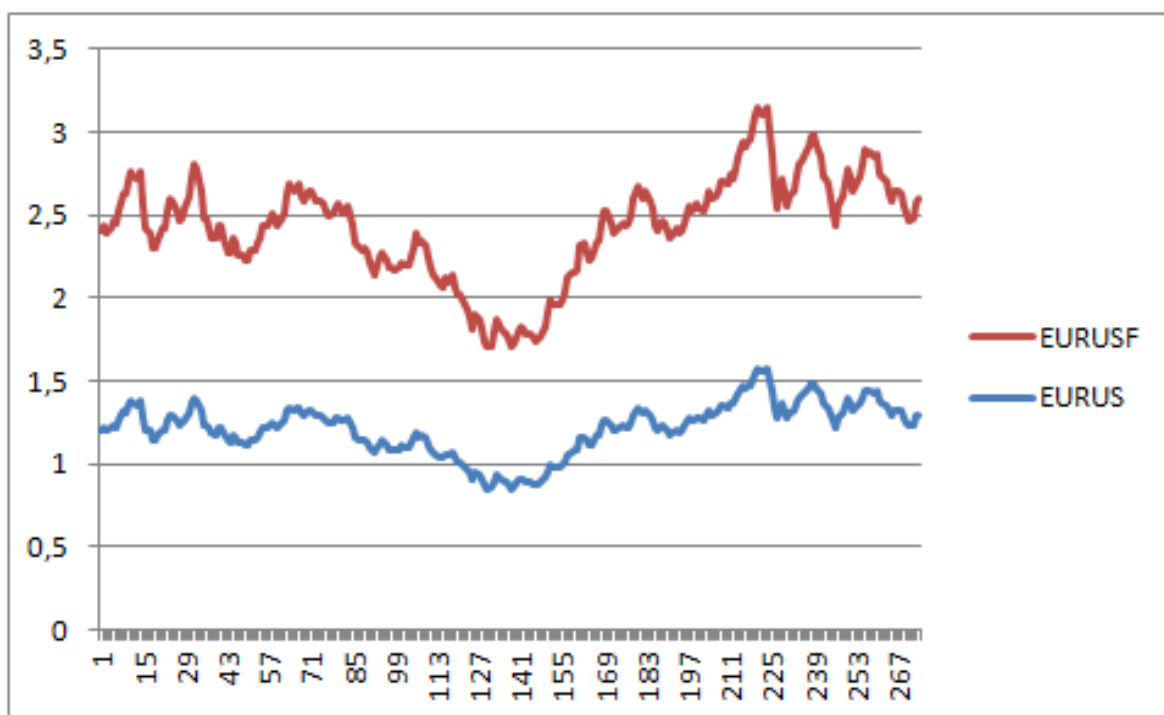
\_\_\_\_\_ Produire les graphiques traduisant l'évolution des données réelles et prédites (sur EViews et Excel) : les graphiques montrent que la prédiction est presque parfaite.





Série prédite/EURUSF vs Série réelle/EURUS





### **VII.2.3. ETUDE DE LA SERIE FILTREE « DLEURUS » PAR LA MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE (ARCH)**

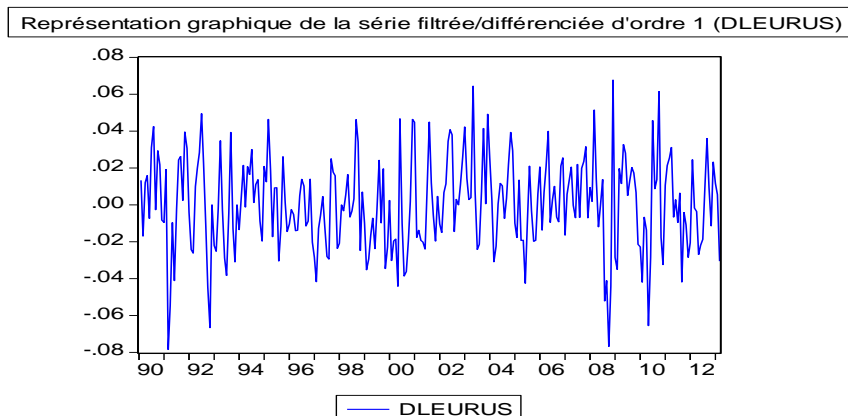
\_\_\_\_NB : sur EViews, la série filtrée (différenciée d'ordre 1: Cfr procédure Box et Jenkins) est obtenue en faisant :  $genr DLEURUS=d(\log(EURUS))$

\_\_\_\_Nous allons estimer quatre modèles (ARCH, GARCH, TGARCH et EGARCH) parmi lesquels nous retiendrons le plus performant, et allons procéder comme suit :

- (i) Représentation graphique de la série filtrée « DLEURUS » ;
- (ii) Statistiques descriptives et test de normalité de la série « DLEURUS » ;
- (iii) Etude de la volatilité de la série « DLEURUS » ;
- (iv) Test de bruit blanc de la série filtrée « DLEURUS » ;
- (v) Estimation des modèles (4) et recherche du modèle optimal
- (vi) Prévision

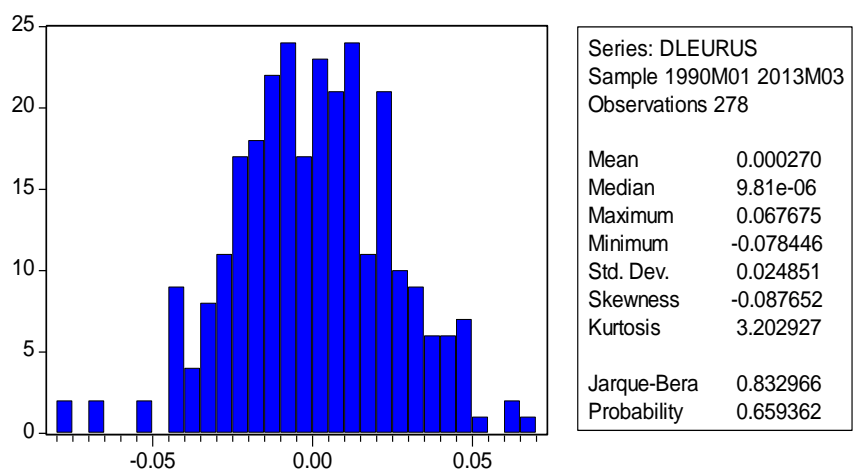
#### **A. Représentation graphique de la série filtrée « DLEURUS »**





\_\_\_\_\_ **Constat** : la série filtrée « DLEURUS » est stationnaire en moyenne, mais non stationnaire en variance (elle est très volatile : l'on peut même distinguer des groupements des fortes variations ou des faibles variations sur la série) : ce qui justifie le recours à la modélisation hétéroscédastique pour étudier notre série filtrée. NB : l'échantillon a 278 observations (279 – 1).

### B. Statistiques descriptives et test de normalité de la série filtrée « DLEURUS »



\_\_\_\_\_ **Constats** : Au regard de la statistique de Jarque-Berra ( $prob > 5\%$ ), notre série filtrée est normalement distribuée. Toutefois, le coefficient de Kurtosis ( $3.203 > 3$ ) et celui de Skewness ( $-0.088 < 0$ ) calculés nous renseignent respectivement sur la possibilité d'occurrence d'observations extrêmes et sur le fait que notre paire « EURUS » stationnarisée réagit plus à un choc négatif que positif (la distribution est étalée vers la gauche).

### C. Etude de la volatilité de la série filtrée « DLEURUS »

Comme pour la série brute, régressons « DLEURUS » au carré sur cette même série décalée (cette façon de procéder permet de juger de l'autocorrélation de la variance des résidus/hétéroscédasticité).





Dependent Variable: DLEURUS2				
Method: Least Squares				
Date: 01/16/14 Time: 12:25				
Sample (adjusted): 1990M03 2013M03				
Included observations: 277 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000531	6.57E-05	8.076919	0.0000
DLEURUS2(-1)	0.139999	0.059696	2.345184	0.0197
R-squared	0.019607	Mean dependent var	0.000617	
Adjusted R-squared	0.016042	S.D. dependent var	0.000916	
S.E. of regression	0.000908	Akaike info criterion	-11.16310	
Sum squared resid	0.000227	Schwarz criterion	-11.13693	
Log likelihood	1548.090	F-statistic	5.499888	
Durbin-Watson stat	2.027573	Prob(F-statistic)	0.019729	

\_\_\_\_\_ **Constat** : le coefficient associé à « DLEURUS2(-1) » est statistiquement significatif, ce qui permet d'accepter l'hypothèse d'hétéroscédasticité conditionnelle (la variation de « EURUS » au temps « t » est fonction de son évolution au temps « t-1 »).

#### D. Test de bruit blanc de la série filtrée « DLEURUS »

Nous nous servons du corrélogramme ci-dessous pour signaler que notre série filtrée présente au moins 1 terme significatif de part et d'autre (Cfr méthodologie Box et Jenkins, « DLEURUS » est identifiée comme un *arma* (1,0,1), un *ar*(1), soit un *ma*(1)) et, de ce fait, elle n'est pas un bruit blanc (prob<5%).



Date: 01/16/14 Time: 12:04  
 Sample: 1990M01 2013M03  
 Included observations: 278

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.312	0.312	27.335	0.000
		2	-0.033	-0.144	27.634	0.000
		3	0.021	0.088	27.764	0.000
		4	-0.042	-0.094	28.255	0.000
		5	-0.065	-0.014	29.462	0.000
		6	-0.031	-0.018	29.736	0.000
		7	-0.081	-0.080	31.621	0.000
		8	-0.011	0.050	31.658	0.000
		9	0.042	0.010	32.171	0.000
		10	0.007	-0.005	32.186	0.000
		11	-0.046	-0.056	32.793	0.001
		12	-0.027	-0.003	33.009	0.001
		13	-0.046	-0.048	33.629	0.001
		14	-0.090	-0.070	36.025	0.001
		15	0.011	0.067	36.060	0.002

### E. Estimation des modèles et recherche du modèle optimal

#### 1) Estimation des modèles

##### (i) Estimation du modèle ARCH

Nous estimons un  $AR(1)^{(12)}$  ou un  $AR(2)$  à partir duquel nous effectuons le test de présence d'effets ARCH pour juger de la nécessité d'une modélisation ARCH.

##### ► Estimation du modèle $AR(1)$ :

Dependent Variable: DLEURUS  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/16/14 Time: 13:32  
 Sample (adjusted): 1990M03 2013M03  
 Included observations: 277 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000104	0.001423	0.072813	0.9420
DLEURUS(-1)	0.312671	0.057424	5.444921	0.0000
R-squared	0.097316	Mean dependent var		0.000223
Adjusted R-squared	0.094034	S.D. dependent var		0.024883
S.E. of regression	0.023685	Akaike info criterion		-4.640788
Sum squared resid	0.154264	Schwarz criterion		-4.614622
Log likelihood	644.7492	F-statistic		29.64717
Durbin-Watson stat	1.895575	Prob(F-statistic)		0.000000

<sup>12</sup> Le processus générateur de la série « EURUS » était un  $arima(1,1,1)$  si l'on s'en tient aux résultats issus de la procédure Box-Jenkins appliquée à cette série. C'est ainsi que nous estimons le modèle  $AR(1)$ , le processus  $arima(1,1,1)$  étant non significatif.



► **Estimation du modèle AR(2) :**

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: Least Squares				
Date: 01/17/14 Time: 00:19				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	0.360574	0.059874	6.022222	0.0000
DLEURUS(-2)	-0.147063	0.059848	-2.457270	0.0146
R-squared	0.117787	Mean dependent var		0.000285
Adjusted R-squared	0.114567	S.D. dependent var		0.024907
S.E. of regression	0.023437	Akaike info criterion		-4.661783
Sum squared resid	0.150506	Schwarz criterion		-4.635548
Log likelihood	645.3261	Durbin-Watson stat		1.960152

\_\_\_\_\_ **Commentaire :** Nous retenons le processus AR(2) sans dérive qui modélise mieux la série filtrée que le processus AR(1) – l’on peut se servir aussi des critères Akaike et Schwarz (le processus AR(2) les minimise).

► **Inférences sur le modèle AR(2) estimé :**

\_\_\_\_\_ La statistique Q de Ljung-Box indique un terme statistiquement différent de zéro au 5<sup>ème</sup> décalage (Cfr corrélogramme des résidus aux carrés) ; *Ce qui amène à présumer la présence d’effets ARCH d’ordre 5* dans notre série filtrée « DLEURUS » (le test ARCH ci-dessous est plus éloquent).

\_\_\_\_\_ *Test de présence d’effets ARCH sur le modèle AR(1) estimé : la probabilité critique étant < 5% pour un ARCH(5), nous acceptons l’hypothèse de présence d’effets ARCH d’ordre 5 (pour les lags 6,7..., les paramètres des termes autorégressifs se sont révélés non significatifs). D’où nous estimons que notre série filtrée suit un processus ARCH d’ordre 5.*

ARCH(5) Test :				
F-statistic	2.425079	Probability	0.035860	
Obs*R-squared	11.85738	Probability	0.036795	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000373	8.49E-05	4.392651	0.0000
RESID^2(-1)	0.024061	0.060870	0.395287	0.6929
RESID^2(-2)	0.109087	0.060792	1.794437	0.0739
RESID^2(-3)	0.082113	0.060980	1.346564	0.1793
RESID^2(-4)	-0.036306	0.060799	-0.597150	0.5509
<b>RESID^2(-5)</b>	<b>0.134511</b>	<b>0.060831</b>	<b>2.211217</b>	<b>0.0279</b>

\_\_\_\_\_ *Note : Signalons – pour les estimations qui suivent – que tous les processus estimés sont valides (les résidus issus des estimations sont tous normalement distribués), malgré la persistance d’effets ARCH pour les processus ARCH(5,0) et TGARCH(5,3).*



(ii) **Estimation du modèle ARCH(5,0)** : ce processus est valide. NB : ARCH(5), GARCH(0) et Threshold order(1).

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/17/14 Time: 00:48				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Convergence achieved after 20 iterations				
Variance backcast: ON				
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2 + C(7)*RESID(-4)^2 + C(8)*RESID(-5)^2				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	0.376872	0.062386	6.040972	0.0000
DLEURUS(-2)	-0.159946	0.060929	-2.625143	0.0087
Variance Equation				
C	0.000372	8.02E-05	4.637035	0.0000
RESID(-1)^2	0.021473	0.059046	0.363659	0.7161
RESID(-2)^2	0.123515	0.055599	2.221519	0.0263
RESID(-3)^2	0.029501	0.053975	0.546562	0.5847
RESID(-4)^2	-0.052399	0.060961	-0.859549	0.3900
RESID(-5)^2	0.203577	0.089737	2.268604	0.0233
R-squared	0.117488	Mean dependent var	0.000285	
Adjusted R-squared	0.094438	S.D. dependent var	0.024907	
S.E. of regression	0.023702	Akaike info criterion	-4.671300	
Sum squared resid	0.150557	Schwarz criterion	-4.566360	
Log likelihood	652.6393	Durbin-Watson stat	1.990322	

(iii) **Estimation du modèle AR(2) sans dérive avec erreurs GARCH(4,0)** : c'est le modèle qui nous a paru significatif (il est valide). NB : ARCH(0) et GARCH(4).

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/17/14 Time: 01:02				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Convergence achieved after 36 iterations				
Variance backcast: ON				
GARCH = C(3) + C(4)*GARCH(-1) + C(5)*GARCH(-2) + C(6)*GARCH(-3) + C(7)*GARCH(-4)				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	0.354977	0.056865	6.242460	0.0000
DLEURUS(-2)	-0.138599	0.051327	-2.700323	0.0069
Variance Equation				
C	0.000110	9.60E-05	1.147709	0.2511
GARCH(-1)	0.580696	0.229499	2.530280	0.0114
GARCH(-2)	0.495953	0.102373	4.844553	0.0000
GARCH(-3)	0.712997	0.084201	8.467803	0.0000
GARCH(-4)	-0.989256	0.235598	-4.198908	0.0000
R-squared	0.117714	Mean dependent var	0.000285	
Adjusted R-squared	0.098035	S.D. dependent var	0.024907	
S.E. of regression	0.023655	Akaike info criterion	-4.654539	
Sum squared resid	0.150519	Schwarz criterion	-4.562717	
Log likelihood	649.3264	Durbin-Watson stat	1.950572	



- (iv) **Estimation du modèle AR(2) sans dérive avec erreurs TGARCH(5,3)** : c'est le modèle qui nous a paru significatif (il est valide). NB : ARCH(3), GARCH(5) et Threshold order(1).

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/17/14 Time: 01:14				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Convergence achieved after 52 iterations				
Variance backcast: ON				
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2 + C(7)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(8)*GARCH(-1) + C(9)*GARCH(-2) + C(10)*GARCH(-3) + C(11)*GARCH(-4) + C(12)*GARCH(-5)				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	0.368325	0.049798	7.396422	0.0000
DLEURUS(-2)	-0.194681	0.053040	-3.670435	0.0002
Variance Equation				
C	0.000106	5.84E-05	1.809176	0.0704
RESID(-1)^2	-0.102408	0.044068	-2.323868	0.0201
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.099577	0.029600	3.364050	0.0008
RESID(-2)^2	0.063756	0.029181	2.184880	0.0289
RESID(-3)^2	0.025779	0.035411	0.727995	0.4666
GARCH(-1)	1.009715	0.230055	4.389021	0.0000
GARCH(-2)	-0.121980	0.140223	-0.869903	0.3844
GARCH(-3)	0.534610	0.065001	8.224632	0.0000
GARCH(-4)	-1.152146	0.174603	-6.598654	0.0000
GARCH(-5)	0.504851	0.216804	2.328604	0.0199
R-squared	0.115697	Mean dependent var	0.000285	
Adjusted R-squared	0.078851	S.D. dependent var	0.024907	
S.E. of regression	0.023905	Akaike info criterion	-4.678550	
Sum squared resid	0.150863	Schwarz criterion	-4.521141	
Log likelihood	657.6399	Durbin-Watson stat	1.966548	

- (v) **Estimation du modèle AR(2) sans dérive avec erreurs EGARCH(4,1)** : c'est le modèle qui nous a paru significatif (il est valide). NB : ARCH(1), GARCH(4) et Asymmetric order(1).

Dependent Variable: DLEURUS				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 01/17/14 Time: 01:36				
Sample (adjusted): 1990M04 2013M03				
Included observations: 276 after adjustments				
Convergence achieved after 112 iterations				
Variance backcast: ON				
LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-2)) + C(8)*LOG(GARCH(-3)) + C(9)*LOG(GARCH(-4))				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
DLEURUS(-1)	0.332892	0.042317	7.866658	0.0000
DLEURUS(-2)	-0.198577	0.039599	-5.014694	0.0000
Variance Equation				
C(3)	-59.30850	2.142623	-27.68033	0.0000
C(4)	-0.140267	0.053983	-2.598364	0.0094
C(5)	0.016009	0.021076	0.759557	0.4475
C(6)	-1.773905	0.064309	-27.58393	0.0000
C(7)	-2.461994	0.096577	-25.49247	0.0000
C(8)	-1.704552	0.087596	-19.45917	0.0000
C(9)	-0.899703	0.067469	-13.33496	0.0000
R-squared	0.113485	Mean dependent var	0.000285	
Adjusted R-squared	0.086923	S.D. dependent var	0.024907	
S.E. of regression	0.023800	Akaike info criterion	-4.688926	
Sum squared resid	0.151240	Schwarz criterion	-4.570870	
Log likelihood	656.0718	Durbin-Watson stat	1.891575	





## 2) Recherche du modèle optimal

Le tableau ci-dessous présente les résultats des différents modèles estimés (nous y insérons également quelques critères de sélection d'un modèle optimal) :

	ARCH(5)	GARCH(4,0)	TGARCH(5,3)	EGARCH(4,1)
<b>Equation de la Moyenne</b>				
<i>Constante</i>	*	*	*	*
<i>AR(1)</i>	0.38	0.35	0.37	0.33
<i>[z-stat]</i>	[6.04]	[6.24]	[7.40]	[7.87]
<i>(Prob)</i>	(0.000)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
<i>AR(2)</i>	-0.16	-0.14	-0.19	-0.20
	[-2.63]	[-2.70]	[-3.67]	[-5.01]
	(0.00)	(0.007)	(0.0002)	(0.00)
<b>Equation de la Variance</b>				
<i>Constante</i>	0.0004	0.0001	*	-59.31
	[4.64]	[1.15]		[-27.68]
	(0.00)	(0.25)		(0.00)
<i>ARCH(1)</i>	0.02	*	-0.10	-1.77
	[0.36]		[-2.32]	[-27.58]
	(0.72)		(0.02)	(0.00)
<i>ARCH(2)</i>	0.12	*	0.06	-2.46
	[2.22]		[2.18]	[-25.49]
	(0.03)		(0.03)	(0.00)
<i>ARCH(3)</i>	0.03	*	0.03	-1.70
	[0.55]		[0.73]	[-19.46]
	(0.58)		(0.47)	(0.00)
<i>ARCH(4)</i>	-0.05	*	*	-0.90
	[-0.86]			[-13.33]
	(0.39)			(0.00)
<i>ARCH(5)</i>	0.20	*	*	*
	[2.27]			
	(0.02)			
<i>GARCH(1)</i>	*	0.58	1.01	-1.77
		[2.53]	[4.39]	[-27.58]
		(0.01)	(0.00)	(0.00)
<i>GARCH(2)</i>	*	0.50	-0.12	-2.46
		[4.84]	[-0.87]	[-25.49]
		(0.00)	(0.38)	(0.00)
<i>GARCH(3)</i>	*	0.71	0.53	-1.70
		[8.47]	[8.22]	[-19.46]
		(0.00)	(0.00)	(0.00)
<i>GARCH(4)</i>	*	-0.99	-1.15	-0.90
		[-4.20]	[-6.60]	[-13.33]
		(0.00)	(0.00)	(0.00)





	ARCH(5)	GARCH(4,0)	TGARCH(5,3)	EGARCH(4,1)
			0.50	
GARCH(5)	*	*	[2.33] (0.02)	*
RESID(-1)^2*( RESID(-1)<0)	*	*	0.10 [3.36] (0.0008)	*
ABS(RESID(-1)/ @SQRT/GARCH(-1)))	*	*	*	-0.14 [-2.60] (0.009)
(RESID(-1)/ @SQRT/GARCH(-1))	*	*	*	0.02 [0.76] (0.45)
R <sup>2</sup>	0.12	0.12	0.12	0.11
AIC	-4.67	-4.65	-4.68	<b>-4.69</b>
DW	<b>1.99</b>	1.95	1.97	1.89
Ljung-Box/LB(36)	16.001	19.019	<b>17.595</b>	18.932
(Prob)	(0.998)	(0.991)	(0.996)	(0.991)
LB <sup>2</sup> (36)	21.190	33.254	<b>19.310</b>	28.526
(Prob)	(0.976)	(0.600)	(0.990)	(0.808)
Normalité	Oui	Oui	Oui	Oui
Effet ARCH	Non	Oui(lag :5)	Non	Oui(lag :2)

**Commentaire :** Si l'on s'en tient au corrélogramme des résidus aux carrés (Cfr  $LB^2(36)$ ), il apparaît que – pour tous les modèles/processus – les résidus issus de la variance conditionnelle sont des bruits blancs (prob>5%).

**Modèle optimal :** au regard des résultats ci-dessus, l'on note le modèle optimal – selon les critères – comme suit :

- AIC minimum (qualité de l'équation de la moyenne) : **EGARCH(4,1)** ;
- DW maximal : ARCH(5) ;
- LB<sup>2</sup>(36) minimum (qualité de l'équation de la moyenne) : **TGARCH(5,3)** ;
- Effets ARCH : ARCH(5) et TGARCH(5,3).

Le modèle GARCH(4,0) est éliminé à ce niveau, et quatre modèles sont ainsi candidats à la prévision. Dans le point qui suit, nous nous servons des critères de bonne prévision (Mean Absolute Percentage Error/MAPE minimal et Coefficient d'inégalité de Theil proche de zéro) pour sélectionner le modèle optimal parmi les quatre.

## F. Prévision

### ► Choix du modèle optimal (recours aux critères de bonne prédiction)

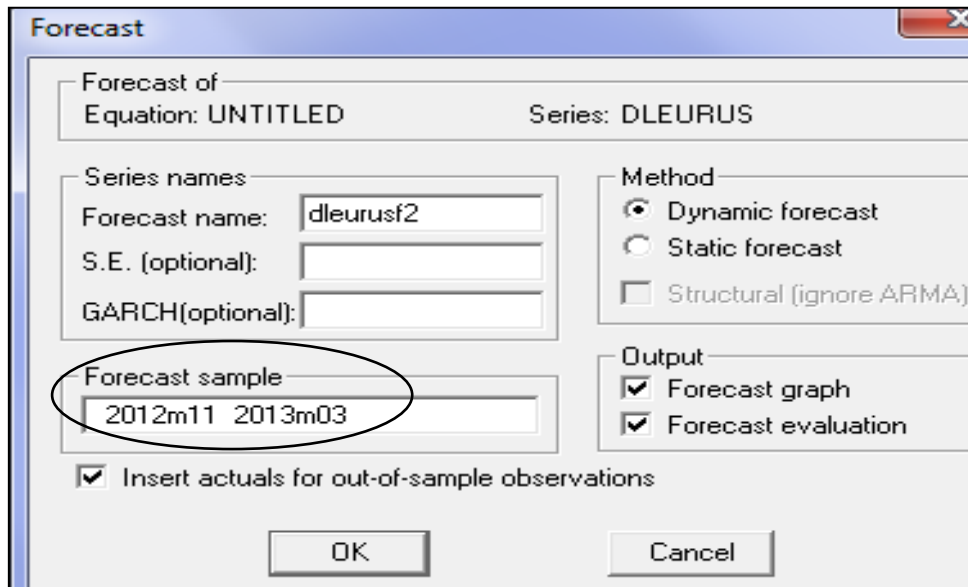
Nous recourons aux procédures de simulation dynamique de « EVIEWS » pour prévoir notre série filtrée « DLEURUS » à travers nos quatre modèles (ne disposant pas de nouvelles données, notre série filtrée a été tronquée de 5 mois. Sur base de



cette série tronquée, une ré-estimation nous a aidée à obtenir les prédictions souhaitées).

\_\_\_\_\_ Pour ce faire, sur EViews, procéder comme suit :

- Taper : *smp1 1990:01 2012:10*
- Estimer les paramètres du modèle sélectionné ;
- après l'estimation des paramètres, dans l'output des résultats, cliquer sur **Forecast** : la boîte de dialogue suivante apparaît (elle complète la procédure. Ex : GARCH(4,0)) :



### ► Préviation

\_\_\_\_\_ Les valeurs MAPE et Theil recueillies, pour différents modèles, témoignent de la faiblesse des modèles retenus (aucun modèle n'est performant : maintenir la prédiction sur série brute) : voir tableau ci-dessous.

Critères	Modèles/Processus			
	ARCH(5)	GARCH(4,0)	TGARCH(5,3)	EGARCH(4,1)
MAPE	98.8501	99.8485	98.0892	98.7480
THEIL	0.9546	0.9688	0.9456	0.9523



## - Annexe -

### Cas pratique : Simulation d'un processus ARCH(1)

- **Modèle :** Simuler (générer) le processus ARCH(1) ci-après (avec  $e_t$  : bruit blanc normal centré réduit) :

$$e_t = u_t \sqrt{1 + 0.8 e_{t-1}^2} \dots \dots [7.1]$$

► **Travail demandé :**

- Générer ce processus (créer la variable EA) ;
- Produire le graphique et le corrélogramme de ce processus ;
- Vérifier la normalité de ce processus (test de Jarque-Berra) ;
- En étudier aussi la linéarité (test de Keenan).

**a) Génération du processus ARCH(1) : Modèle (7.1)**

**Sur EViews :**

```
create u 1 200
genr U=NRND
smpl 1 1
genr P=0
smpl 2 200
genr P=1+0.8*U(-1)*U(-1)
genr EA=sqr(P)*U
```

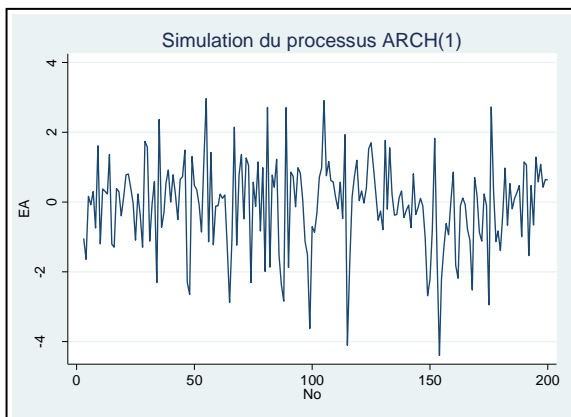
**Sur Stata :**

```
copier et coller « U » généré sur EViews
gen LU=U[_n-1]
gen P=.
replace P=0 in 1
replace P=1+0.8*LU*LU if No>1
gen EA=sqrt(P)*U
```

**b) Graphique et corrélogramme du processus ARCH(1)**

- \* Sur EViews (corrélogramme) : *View/Correlogram... → OK* ;
- \* Sur Stata (Graphique) :

line EA No, title(Simulation du processus ARCH(1))



Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.023	0.023	0.1101	0.740			
2	0.034	0.033	0.3394	0.844			
3	-0.014	-0.016	0.3790	0.945			
4	0.015	0.015	0.4260	0.980			
5	0.024	0.024	0.5430	0.990			
6	0.107	0.105	2.8924	0.822			
7	-0.088	-0.095	4.5095	0.720			
8	0.028	0.027	4.6739	0.792			
9	-0.005	0.002	4.6797	0.861			
10	-0.060	-0.069	5.4352	0.860			

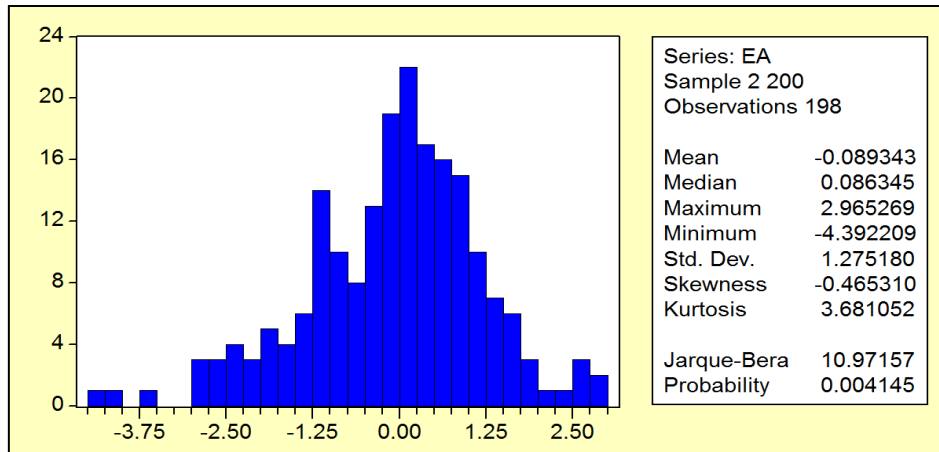


\_\_\_\_\_ **Constat** : notre processus ARCH(1) est volatile (forte variabilité pour les observations 80 et 140 à 160), les périodes/moments d'instabilité (variance élevée) faisant régulièrement suite à celles de stabilité.

**c) Vérifier la normalité de ce processus (test de Jarque-Berra)**

\* Sur Eviews : View/Descriptive Statistics/Histogram and Stats ;

\* Sur Stata : sktest EA



Skewness/Kurtosis tests for Normality				
Variable	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	adj chi2 (2)	joint Prob>chi2
EA	0.008	0.068	9.26	0.0098

**Commentaires :**

- Skewness (mesure d'asymétrie, il est nul pour une distribution normale) = -0.465 : c.à.d. distribution dissymétrique à gauche (étalée à droite). D'où, présomption de non linéarité (Skewness non nul) ;
- Kurtosis (mesure d'aplatissement, il avoisine « 3 » pour une distribution normale) = 3.681 > 3 : c.à.d. distribution leptokurtique (centre plus élevé/pointu) ;
- Jarque-Bera (test de normalité, avec Ho : le processus est normalement distribué). La probabilité associée est de 0.0041 < 5% : rejet de l'hypothèse de normalité pour le processus ARCH(1) sous-étude (même observation sous Stata).

**d) Test de linéarité du processus ARCH(1) de Keenan**

\_\_\_\_\_ **Rappels** : Pour tester la linéarité d'une série ( $Y_t$ ), Keenan propose trois étapes :

(i) Estimer le modèle AR(P) suivant :

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + u_t$$

(ii) Estimer également :

$$Y_t^2 = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + e_t$$



(iii) Estimer enfin :

$$\hat{u}_t = \lambda \hat{e}_t + v_t$$

Avec :  $t = p + 1, \dots, T$  et  $p$ =décalage optimal déterminé à partir des critères d'AKAIKE et SCHWARZ. Ainsi, la statistique « F » du test de Keenan est construit comme suit :

$$\hat{F} = \hat{\beta}^2 \left[ \frac{T - 2p - 2}{\sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t^2 - \hat{\beta}^2} \right] \sim F_{\alpha(1, T-2p-2)}$$

Avec :

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\lambda} \left[ \sum_{t=p+1}^T \hat{e}_t^2 \right]^{1/2} = \hat{\lambda}^2 \left[ \sum_{t=p+1}^T \hat{e}_t^2 \right]$$

Les hypothèses du test sont :

$H_0$  :  $Y_t$  est linéaire ( $\hat{F}_c < F_t$ ,  $prob > 5\%$ )

$H_1$  :  $Y_t$  n'est pas linéaire ( $\hat{F}_c > F_t$ ,  $prob < 5\%$ )

Avec «  $\hat{F}_c$  » : statistique calculée de Keenan.

### Application du test sur notre processus ARCH(1)

► Estimation des coefficients pour AR(P) : les modèles sont :

Modèle 1 :  $EA_t = \Phi_0 + \Phi_1 EA_{t-1} + \Phi_2 EA_{t-2} + \dots + \Phi_p EA_{t-p} + u_t$

Modèle 1 :  $EA_t^2 = a_0 + a_1 EA_{t-1} + a_2 EA_{t-2} + \dots + a_p EA_{t-p} + e_t$

Sur EViews (nous n'utilisons pas Stata pour de raisons d'espace), faire :

$$\left\{ \begin{array}{l} ls \ EA \ c \ EA(-1) \ EA(-2) \ EA(-3) \ EA(-4) \\ GENR \ EA2=EA^2 \\ ls \ EA2 \ c \ EA(-1) \ EA(-2) \ EA(-3) \ EA(-4) \end{array} \right.$$

### Notes :

- à gauche (les résultats du modèle 1 estimé) et à droite (les résultats du modèle 2 estimé) ;
- l'on vérifiera que le lag optimal (retard/décalage qui minimise le plus les coefficients d'Akaike et/ou Schwarz) est fixé à « 4 » pour les deux modèles.



Dependent Variable: EA  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/01/14 Time: 21:31  
 Sample (adjusted): 7 200  
 Included observations: 194 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.071640	0.093761	-0.764074	0.4458
EA(-1)	0.021711	0.072779	0.298312	0.7658
EA(-2)	0.037932	0.072831	0.520818	0.6031
EA(-3)	-0.009434	0.072594	-0.129950	0.8967
EA(-4)	0.020438	0.072638	0.281363	0.7787

R-squared	0.002454	Mean dependent var	-0.077861
Adjusted R-squared	-0.018658	S.D. dependent var	1.281464
S.E. of regression	1.293363	Akaike info criterion	3.377804
Sum squared resid	316.1571	Schwarz criterion	3.462028
Log likelihood	-322.6470	F-statistic	0.116229
Durbin-Watson stat	1.999227	Prob(F-statistic)	0.976652

Dependent Variable: EA2  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/01/14 Time: 21:34  
 Sample (adjusted): 7 200  
 Included observations: 194 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.598597	0.197802	8.081816	0.0000
EA(-1)	-0.401262	0.153537	-2.613450	0.0097
EA(-2)	0.040156	0.153647	0.261354	0.7941
EA(-3)	-0.045591	0.153146	-0.297695	0.7663
EA(-4)	-0.071090	0.153240	-0.463911	0.6432

R-squared	0.036779	Mean dependent var	1.639747
Adjusted R-squared	0.016393	S.D. dependent var	2.751173
S.E. of regression	2.728530	Akaike info criterion	4.870838
Sum squared resid	1407.081	Schwarz criterion	4.955061
Log likelihood	-467.4713	F-statistic	1.804159
Durbin-Watson stat	1.576230	Prob(F-statistic)	0.129705

- Les sommes des carrés des résidus/SSR (Sum squared resid) pour les deux modèles (t=5 à 200 observations) :

**SSR(1)=316.1571 et SSR(2)=1407.081**

► Estimation du coefficient pour :  $\hat{u}_t = \lambda \hat{e}_t + v_t$

\_\_\_\_\_ Commandes EViews :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{GENR EA2=EA^2} \\ \text{ls EA c EA(-1) EA(-2) EA(-3) EA(-4)} \\ \text{genr RESEA=RESID} \\ \text{ls EA2 c EA(-1) EA(-2) EA(-3) EA(-4)} \\ \text{genr RESEA2=RESID} \\ \text{ls RESEA RESEA2} \end{array} \right.$

Dependent Variable: RESEA  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/01/14 Time: 22:02  
 Sample (adjusted): 7 200  
 Included observations: 194 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESEA2	-0.172427	0.031783	-5.425155	0.0000

R-squared	0.132320	Mean dependent var	4.81E-17
Adjusted R-squared	0.132320	S.D. dependent var	1.279890
S.E. of regression	1.192209	Akaike info criterion	3.194635
Sum squared resid	274.3231	Schwarz criterion	3.211479
Log likelihood	-308.8796	Durbin-Watson stat	2.071825





► Calcul des paramètres et de la statistique « F » du test :

L'estimation précédente nous fournit :  $\lambda = -0.172427$ . Ce qui nous aide à calculer le coefficient «  $\hat{\beta}^2$  » comme suit :

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\lambda}^2 \left[ \sum_{t=p+1}^T \hat{e}_t^2 \right] = (-0.172427)^2 \times (1407.081) = 41.8340$$

Et par endroit, la statistique « F » du test comme suit :

$$\hat{F} = \hat{\beta}^2 \left[ \frac{T - 2p - 2}{\sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t^2 - \hat{\beta}^2} \right] = \frac{190 \times 41.8340}{316.1571 - 41.8340} = 28.9748 \sim F_{\alpha(1,190)}$$

Les hypothèses du test sont :

$H_0$  : EA est linéaire ( $\hat{F}_c < F_t$ ,  $prob > 5\%$ )

$H_1$  : EA n'est pas linéaire ( $\hat{F}_c > F_t$ ,  $prob < 5\%$ )

\_\_\_\_\_ NB : au seuil de 5% :  $F(1,190)=3,84$ , et au seuil de 1% :  $F(1,190)=6,64$ .

\_\_\_\_\_ Décision : nous rejetons l'hypothèse nulle à 5% et 1% ( $\hat{F}_c > F_t$ ) et affirmons que notre processus ARCH(1) « EA » n'est pas linéaire : ce qui confirme notre présomption

