



**HAL**  
open science

## Comportements inélastiques

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Comportements inélastiques. Doctorat. Comportements inélastiques, Marseille, France. 2018, pp.136. cel-01744164v2

**HAL Id: cel-01744164**

**<https://hal.science/cel-01744164v2>**

Submitted on 25 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comportements inélastiques

(solides déformables monoconstituants)

Jean Garrigues

(version du 25 avril 2018)





# Avant-propos

L'objectif de ce cours est de montrer comment construire des modèles de comportement de milieux continus solides déformables monoconstituants non élastiques et thermodynamiquement admissibles. C'est donc la thermodynamique qui va à la fois limiter et guider la construction des modèles de comportement. Ce vaste domaine ne peut être envisagé de manière exhaustive. Quelques comportements phénoménologiques classiques sont développés plus complètement. La porte reste ouverte pour en construire d'autres...

La plupart des textes traitant des comportements inélastiques classent généralement leurs chapitres de manière phénoménologique : viscoélasticité, plasticité, endommagement, fatigue, relaxation, fluage, vieillissement, etc. Plutôt que de procéder de cette manière, ce cours va envisager des modèles de comportement de solides inélastiques par ordre de complexité croissante, c'est-à-dire en augmentant le nombre de variables d'état mnésiques (à partir de zéro), sans préciser tout de suite ce que ces variables d'état supplémentaires sont censées représenter physiquement. Ce n'est qu'une fois la thermodynamique développée aussi loin que possible pour ces ensembles de variables d'état que l'on attribuera aux variables mnésiques un sens physique phénoménologiquement motivé. Cette manière de procéder permet de ne pas répéter les raisonnements thermodynamiques établis pour les milieux continus solides déformables inélastiques qui ont le même nombre de variables d'état mnésiques scalaires.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles<sup>(1)</sup>, de la cinématique des milieux continus<sup>(2)</sup>, des équations générales des milieux continus<sup>(3)</sup> et enfin du comportement élastique<sup>(4)</sup>.

En première lecture, la plupart des remarques ou commentaires qui apparaissent en retrait et en petits caractères peuvent être ignorés sans nuire à la compréhension de l'ensemble.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple :  $a$ ,  $\mu$ ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{v}$ ) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{T}$ ) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice

---

<sup>(1)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* :  
<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923> ou bien

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html>

<sup>(2)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766> ou bien

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html>.

<sup>(3)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Équations générales des milieux continus* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00696063> ou bien

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/mmc.html>.

<sup>(4)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Comportement élastique* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00827790> ou bien

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/elas.html>.

de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

- la transposition est notée avec un  $\top$  en exposant (exemple :  $\mathbf{T}^\top$ ) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
  - $\mathbb{R}$  est l'espace des réels,
  - $\mathbb{V}_3$  est un espace vectoriel de dimension 3,
  - $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$  est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre  $p$  construits sur  $\mathbb{V}_3$  (de dimension  $3^p$ ),
  - $\mathbb{Q}_{3+}$  est le groupe des rotations ( $\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ ) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{V}_3$  est noté «  $\wedge$  » ;
- Le tenseur métrique est noté  $\mathbf{G}$  ;
- Le tenseur d'orientation est noté  $\mathbf{H}$  ;
- La description de Lagrange d'un champ matériel est notée avec un indice  $L$  ;
- La description d'Euler d'un champ matériel est notée avec un indice  $E$  ;
- La dérivée particulaire d'une grandeur physique locale  $\Psi(P, t)$  est notée  $\dot{\Psi}(P, t)$ .
- Les invariants fondamentaux d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{X}$  sont notés  $X_I$ ,  $X_{II}$  et  $X_{III}$ .

## Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND<sup>(5)</sup>, ce grand magicien de  $\text{\LaTeX}$ , sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe book<sup>(6)</sup> et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Je remercie aussi vivement mon ancien collègue et néanmoins toujours ami Thierry DÉSOYER<sup>(7)</sup> pour les discussions parfois vives mais le plus souvent fructueuses qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi que pour le temps qu'il a bien voulu passer à la relecture de ce texte.

Bonne lecture.

**Information** – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références des pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

<sup>(5)</sup> De l'université McGill, de Montréal.

<sup>(6)</sup> Ceux qui écrivent en  $\text{\LaTeX}$  me comprendront.

<sup>(7)</sup> De l'École Centrale Marseille.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Inélasticité des solides monoconstituants</b>	<b>9</b>
1.1	Variables d'état en inélasticité des solides monoconstituants	9
	Variables d'état cinématiques, 10 • Variables d'état mnésiques, 11.	
1.2	Dérivées particulières des variables d'état (rappels)	12
1.3	Dissipation (rappels)	13
1.4	Élasticité générique (rappel)	16
1.5	Inélasticité des solides monoconstituants	18
1.6	En bref...	19
<b>2</b>	<b>Inélasticité sans variable mnésique</b>	<b>21</b>
2.1	Variables d'état	21
2.2	Fonctions d'état	21
2.3	Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque	22
	Relation de Helmholtz, 23 • Loi de comportement mécanique, 23.	
2.4	En bref...	25
<b>3</b>	<b>Inélasticité à une variable mnésique scalaire</b>	<b>27</b>
3.1	Variables d'état	27
3.2	Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque	28
3.3	En bref...	29
<b>4</b>	<b>Plasticité</b>	<b>31</b>
4.1	Choix d'un critère de limite élastique	31
4.2	Choix de la variable d'état mnésique	33
4.3	Évolution de la variable d'état mnésique	36
4.4	Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque	38
	Relation de Helmholtz, 38 • Loi de comportement mécanique, 39 • Continuité des contraintes dans l'espace des états admissibles, 42 • Vitesses d'évolution thermodynamique possibles à partir d'un état, 43.	
4.5	En bref...	43
<b>5</b>	<b>Construction d'une énergie libre en plasticité</b>	<b>47</b>
5.1	Variables d'état du modèle	47

<b>5.2</b>	<b>Forme générale des fonctions d'état</b> .....	<b>48</b>
	Énergie libre massique de Helmholtz, 50 • Entropie massique, 50 • Énergie interne massique, 50 • Contrainte de référence, 50.	
<b>5.3</b>	<b>Analyse des chemins élémentaires</b> .....	<b>50</b>
	Chemin $\mathcal{C}^{(1)}$ , 51 • Chemin $\mathcal{C}^{(2)}$ , 51 • Chemin $\mathcal{C}^{(3)}$ , 52 • Chemin $\mathcal{C}^{(4)}$ , 52 • Chemin $\mathcal{C}^{(5)}$ , 52.	
<b>5.4</b>	<b>Synthèse</b> .....	<b>53</b>
<b>5.5</b>	<b>Méthode d'identification</b> .....	<b>54</b>
<b>5.6</b>	<b>Exemples d'idéalisation des expériences</b> .....	<b>55</b>
	Exemple d'idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ , 55 • Exemple d'idéalisations de $Q_{exp}^{(1)}(T)$ et $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ , 55 • Synthèse des idéalizations, 56.	
<b>5.7</b>	<b>Analyse d'un essai de traction isotherme</b> .....	<b>57</b>
	Étude analytique d'un mouvement de traction isotherme, 57 • Simulation numérique d'un essai de traction, 58.	
<b>5.8</b>	<b>Simulation numérique d'une flexion 3 points</b> .....	<b>59</b>
<b>5.9</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>Endommagement</b> .....	<b>63</b>
<b>6.1</b>	<b>Un endommagement par cavitation</b> .....	<b>63</b>
	Choix d'un critère, 63 • Choix de la variable mnésique, 63 • Loi d'évolution, 65 • Dissipation intrinsèque, 65 • Relation de Helmholtz, 66 • Loi de comportement mécanique, 66 • Continuité des contraintes, 67 • Conclusion, 67.	
<b>6.2</b>	<b>Un endommagement par élongation</b> .....	<b>67</b>
	Choix d'un critère de limite élastique, 68 • Choix d'une variable d'état mnésique, 68 • Loi d'évolution, 69 • Comportement mécanique, 70.	
<b>6.3</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>70</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion sur les modèles à une variable mnésique</b> .....	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Inélasticité à plusieurs variables mnésiques scalaires</b> .....	<b>75</b>
<b>8.1</b>	<b>Variables d'état</b> .....	<b>75</b>
<b>8.2</b>	<b>Inélasticité à deux variables d'état mnésiques scalaires</b> .....	<b>76</b>
<b>8.3</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>78</b>
<b>9</b>	<b>Épilogue</b> .....	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Détermination de la limite de <math>S_\gamma</math></b> .....	<b>85</b>
<b>A.1</b>	<b>Rappel du contexte</b> .....	<b>85</b>
<b>A.2</b>	<b>Limite d'un tenseur du second ordre symétrique</b> .....	<b>85</b>
<b>A.3</b>	<b>Calcul de la limite de <math>T_\gamma</math></b> .....	<b>86</b>
<b>A.4</b>	<b>Précautions à prendre dans une implémentation numérique</b> .....	<b>87</b>

---

<b>B</b>	<b>Calculs pour la limite de <math>S_\gamma</math></b> .....	<b>89</b>
<b>C</b>	<b>Calculs pour le modèle <math>(T, K_\nu, \gamma, p)</math></b> .....	<b>95</b>
<b>D</b>	<b>Idéalisations du modèle <math>(T, K_\nu, \gamma, p)</math></b> .....	<b>123</b>





# Inélasticité des solides monoconstituants

## 1.1 Variables d'état en inélasticité des solides monoconstituants

Comme dans tout modèle de comportement, la température est une variable d'état scalaire objective non négative obligatoire imposée par la thermodynamique. Elle sera notée  $T$ .

Puisque l'on se propose de construire des modèles de comportement de solides déformables, c'est-à-dire qui possèdent une forme propre servant de référence pour les déformations, une autre variable d'état obligatoire est un tenseur de déformation objectif<sup>(1)</sup>, qui mesure la déformation actuelle par rapport à une forme propre de référence physiquement significative<sup>(2)</sup>. On rappelle qu'en cinématique il est possible de définir plusieurs tenseurs de déformation objectifs<sup>(3)</sup> et que pour ces tenseurs de déformation, l'identification d'une direction matérielle autour d'une particule se fait par sa direction actuelle. Tant que l'on n'aura pas choisi un tenseur de déformation objectif particulier, il sera noté  $\mathbf{X}$ <sup>(4)</sup>.

De plus, si le solide inélastique n'est pas isotrope, il faut ajouter à la définition de l'état actuel les directions matérielles actuelles d'anisotropie, chacune étant représentée par un tenseur du second ordre uniaxial unitaire  $\mathbf{N}_t^{(i)} = \mathbf{n}_t^{(i)} \otimes \mathbf{n}_t^{(i)}$ .

**Rappel : milieux continus monoconstituants** – Le caractère monoconstituant du solide déformable se traduit par l'absence de variables d'état de concentration actuelle des différents constituants en présence. Toutefois, un milieu multiconstituants (un alliage par exemple) peut être considéré comme monoconstituant si la concentration de ses constituants ne change pas au cours des évolutions (absence de réaction chimique et de changement de phase durant toute évolution).

Un milieu continu solide déformable monoconstituant à  $n$  directions d'anisotropie a donc au moins la liste  $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_t^{(n)}\}$  comme variables d'état, que ce milieu soit élastique ou non. On verra plus loin que cette liste peut être complétée par des variables d'état mnésiques.

<sup>(1)</sup> L'objectivité des variables d'état est nécessaire afin de bénéficier de l'isotropie mathématique des fonctions d'état, voir le chapitre 4 du cours *Équations générales des milieux continus* du même auteur [note 3 p. 3]. On rappelle que pour un tenseur de déformation, son objectivité signifie que le tenseur de déformation actuel a la même orientation par rapport à la matière actuelle pour tous les observateurs. Voir le chapitre 3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

<sup>(2)</sup> Il s'agit généralement de la forme du solide déformable lorsqu'il n'a jamais été soumis à aucune sollicitation et à une température uniforme de référence  $T_0$ .

<sup>(3)</sup> Les tenseurs de déformation objectifs sont parfois dits « eulériens »

<sup>(4)</sup> Le choix d'un tenseur de déformation objectif plutôt qu'un autre n'est pas essentiel. Il s'expriment tous les uns en fonction des autres et le changement de tenseur de déformation n'est qu'une question d'algèbre.

### 1.1.1 Variables d'état cinématiques

Dans le but de simplifier le langage dans la suite, on pose la définition suivante :

- **Définition 1.1 – Variables d'état cinématiques tensorielles.** On appelle variables d'état cinématiques tensorielles la sous-liste de variables d'état objectives  $\{\mathbf{X}, \mathbf{N}_I^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_I^{(n)}\}$ , qui sera notée plus brièvement  $\{\mathbf{X}, \{\mathbf{N}_I^\bullet\}\}$ .

**Rappels sur les fonctions isotropes** – Toute fonction scalaire *objective* d'arguments tensoriels *objectifs* est nécessairement une fonction isotrope<sup>(5)</sup>. Le théorème des fonctions isotropes implique que cette fonction peut se ramener à une fonction scalaire d'arguments scalaires objectifs indépendants :

$$f(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) \text{ isotrope} \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m)$$

La liste  $\{I_1, \dots, I_m\}$  contient à la fois des invariants propres à chaque tenseur argument  $\boldsymbol{\chi}_i$  ainsi que des invariants dits « croisés » calculés à partir de deux d'entre eux, qui traduisent d'une certaine manière les orientations relatives entre les arguments tensoriels.

Une liste de scalaires indépendants  $\{I_1, \dots, I_m\}$  ne peut être établie que lorsque l'on connaît le nombre et l'ordre de tensorialité des variables tensorielles  $\boldsymbol{\chi}_i$  de la fonction isotrope  $f$ . Les listes  $\{I_1, \dots, I_m\}$  ne sont pas uniques mais elles ont toutes le même cardinal  $m$ <sup>(6)</sup>. En général, il est préférable de choisir des listes dont les éléments ont une signification cinématique claire afin de construire des expressions mathématiques physiquement motivées des fonctions d'état.

- **Définition 1.2 – Variables d'état cinématiques scalaires.** On appelle variables d'état cinématiques scalaires la liste de scalaires objectifs et indépendants  $\{I_1, \dots, I_m\}$  retenue pour caractériser un état cinématique du modèle.

Dans le cas des solides déformables anisotropes<sup>(7)</sup>, les tenseurs uniaxiaux unitaires  $\mathbf{N}_I^\bullet$  représentant les directions actuelles d'anisotropie ont des invariants propres constants ( $\mathbf{N}_I^\bullet \cdot \mathbf{I} = 1, \mathbf{N}_I^\bullet \cdot \mathbf{II} = 0, \mathbf{N}_I^\bullet \cdot \mathbf{III} = 0$ ), ils ne sont donc pas des variables d'état. En revanche, les invariants croisés  $\mathbf{X} : \mathbf{N}_I^\bullet$  et  $\mathbf{X}^2 : \mathbf{N}_I^\bullet$  traduisent d'une certaine manière l'orientation relative de la direction actuelle d'anisotropie  $\mathbf{N}_I^\bullet$  par rapport au tenseur de déformation  $\mathbf{X}$ . Pour un solide anisotrope à  $n$  directions d'anisotropie, la liste des variables d'état cinématiques scalaires pourrait être *par exemple* :

$$\{I_1, \dots, I_{3+2n}\} = \{\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_{II}, \mathbf{X}_{III}, \mathbf{X} : \mathbf{N}_I^{(1)}, \mathbf{X}^2 : \mathbf{N}_I^{(1)}, \dots, \mathbf{X} : \mathbf{N}_I^{(n)}, \mathbf{X}^2 : \mathbf{N}_I^{(n)}\} \quad (3 + 2n \text{ termes})$$

Il est possible de construire d'autres listes d'invariants équivalentes et de même cardinal, dont la signification cinématique est claire.

Par ailleurs, lors de la construction effective de modèles de solides anisotropes ou non, il est possible de ne pas retenir la totalité des  $3 + 2n$  variables d'état scalaires pour définir un état cinématique du modèle. Cette sélection devrait être physiquement motivée par la compréhension cinématique des termes de la liste.

<sup>(5)</sup> La valeur scalaire de la fonction est insensible à toute rotation d'ensemble de ses arguments tensoriels, c'est-à-dire insensible à tout changement d'observateur.

<sup>(6)</sup> Voir l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

<sup>(7)</sup> Ne pas confondre l'isotropie des matériaux qui signifie l'absence de directions d'anisotropie dans les variables d'état et l'isotropie des fonctions scalaires qui signifie leur invariance par rotation de ses arguments tensoriels.

### 1.1.2 Variables d'état mnésiques

Pour bon nombre de solides inélastiques, on constate expérimentalement que la liste de variables d'état  $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_t^{(n)}\}$  est insuffisante pour caractériser l'état actuel d'une particule du solide déformable, car on observe des réponses sthéniques différentes suivant le chemin suivi dans l'espace des états pour aboutir aux valeurs actuelles de la température et des variables d'état cinématiques  $\{T, \mathbf{X}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}\}$ <sup>(8)</sup> ; la température actuelle et les variables d'état cinématiques actuelles sont donc insuffisantes pour caractériser l'état actuel de ces particules. Dans ce cas, il faut ajouter des variables d'état pour distinguer ces états ; ces variables d'état supplémentaires sont la *mémoire actuelle* plus ou moins partielle de certaines caractéristiques du chemin suivi pour aboutir à l'état final. Ces variables d'état seront appelées *variables d'état mnésiques*.

**Terminologie** – Dans la littérature spécialisée, la terminologie pour désigner les variables d'état reflétant l'histoire de l'évolution depuis l'état de référence est fluctuante. Il semble à l'auteur que la locution actuellement (2018) la plus couramment employée pour désigner les variables d'état autres que la température et les variables d'état cinématiques est « variables internes » ; les variables d'état  $\{T, \mathbf{X}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}\}$  seraient donc « externes ». En fait, toutes les variables d'état traduisent l'état interne actuel d'une particule de milieu continu et l'on ne comprend pas bien pourquoi les variables d'état complémentaires seraient plus internes que les autres. D'autres auteurs préfèrent employer l'opposition « observable » et « non observable », ou encore « mesurable » et « non mesurables », voire « visibles » et « cachées ». Là encore, il semble à l'auteur que ces vocables suggèrent des idées trompeuses : toutes les variables d'état sont observables ou mesurables ou visibles par des constatations expérimentales : ce sont d'ailleurs précisément des constatations expérimentales (les différentes réponses sthéniques obtenues pour des chemins différents) qui conduisent à ajouter des variables d'état pour distinguer des états qui auraient les mêmes valeurs pour les variables d'état « thermocinématiques »  $\{T, \mathbf{X}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}\}$ .

La terminologie ne semblant pas faire consensus dans la communauté des mécaniciens des solides déformables, l'auteur se permet d'en proposer une qui lui semble plus suggestive sur la véritable signification des variables d'état complémentaires : puisque ces variables d'état sont la mémoire partielle du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel, il propose de les nommer *variables d'état mnésiques*, traduisant le fait qu'elles sont le résumé utile (la mémoire partielle) du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel.

**Exemple de nécessité d'existence d'une variable d'état mnésique** – Dans un essai de traction<sup>(9)</sup> sur un acier (supposé isotrope,  $n = 0$ ) on peut aboutir à des valeurs actuelles de température  $T_1$  et de déformation  $\mathbf{X}_1$  appartenant à la zone élastique (définie par un certain critère de limite élastique<sup>(10)</sup>) en suivant un trajet de chargement progressif monotone, c'est-à-dire sans jamais violer le critère de limite élastique dans le chemin qui conduit à l'état actuel. On obtient alors une réponse en contrainte donnée par la loi de comportement élastique. Mais on peut aussi aboutir aux mêmes valeurs finales de température  $T_1$  et de déformation  $\mathbf{X}_1$  en suivant un chemin dont certains états intermédiaires ne satisfont plus le critère de limite élastique : par exemple, on étire l'éprouvette au delà de la limite élastique, puis on revient à la température  $T_1$  et à la déformation  $\mathbf{X}_1$ <sup>(11)</sup>. On constate alors expérimentalement que la réponse sthénique pour les mêmes valeurs finales  $T_1$  et  $\mathbf{X}_1$  est différente

<sup>(8)</sup> C'est-à-dire que l'ensemble des états intermédiaires pour aller de l'état initial de référence aux valeurs actuelles de la température et des variables d'état cinématiques est différent. En revanche, si le chemin est le même (c'est-à-dire que l'on fait deux fois la même expérience à partir du même état initial), alors la réponse en contrainte est évidemment la même.

<sup>(9)</sup> L'essai de traction est commode pour imaginer des expériences de pensée, car dans cet essai on peut raisonnablement inférer que les champs des variables d'état sont pratiquement uniformes dans la zone utile de l'éprouvette. La dilatation linéique dans la direction de traction est facile à mesurer :  $\ell_t/\ell_0$  et la contrainte normale actuelle dans une facette matérielle orthogonale à la direction de traction est  $F_t/S_t$ .

<sup>(10)</sup> Voir les sections 2.5 et 5.4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(11)</sup> En pratique, on ramène l'éprouvette à la longueur  $\ell_1$ .

pour ces deux chemins dans l'espace des états. Les variables d'état  $T$  et  $\mathbf{X}$  sont donc insuffisantes pour caractériser l'état final : il faut une ou plusieurs variables d'état mnésiques pour refléter le chemin suivi depuis l'état de référence.

Ces constatations ne se limitent évidemment pas au seul essai de traction ; on les constate aussi dans des mouvements plus complexes comme un essai de flexion ou de torsion mais, dans ces deux derniers essais, les champs des variables d'état ne sont pas uniformes et sont donc plus difficiles à contrôler expérimentalement. Hormis l'essai de traction, le seul essai courant où les champs sont sensiblement uniformes et où les déformations et les contraintes sont facilement mesurables est l'essai de glissement isovolume<sup>(12)</sup> (appelé aussi essai de cisaillement).

Avec les définitions 1.1 et 1.2 [p. 10], les variables d'état d'un milieu continu *élastique* (isotrope ou non) sont donc la température  $T$  et des variables d'état cinématiques. Pour un milieu *inélastique*, il faut souvent y ajouter des variables d'état mnésiques.

Le choix des variables d'état mnésiques (champs continus macroscopiques) devrait être suggéré par des considérations microscopiques : on souhaite refléter à l'aide de champs continus macroscopiques des phénomènes microscopiques tels que des réarrangements de liaisons interatomiques ou des ruptures de liaisons interatomiques qui peuvent se produire lorsque l'évolution des particules du milieu continu passe par des états intermédiaires de température et de déformation où de tels phénomènes microscopiques se produisent.

Suivant la richesse avec laquelle on modélise macroscopiquement le comportement d'un solide déformable réel avec plus ou moins de variables d'état mnésiques, on construira des modèles de comportement plus ou moins évolués. Toutefois, on verra que plus l'ensemble des variables d'état est riche<sup>(13)</sup>, plus le modèle de comportement est compliqué, c'est-à-dire difficile à mettre en œuvre et difficile à identifier expérimentalement. Le choix d'un modèle de comportement pour un matériau réel est bien souvent un compromis entre la fidélité aux expériences et la complexité du modèle !

Par ailleurs, on rappelle que la mécanique des milieux continus étant par essence inapte à considérer les structures microscopiques en tant que telles (en particulier l'orientation spatiale des microstructures est *a priori* ignorée), la représentation de phénomènes microscopiques par des champs continus de variables d'état mnésiques macroscopiques scalaires vectorielles ou tensorielles ne peut qu'être approximative. Toutefois elle peut être statistiquement significative et macroscopiquement opérationnelle tant que les vérifications des prédictions du modèle portent sur des « points de mesure » suffisamment grands devant la taille des microstructures.

## 1.2 Dérivées particulières des variables d'état (rappels)

On rappelle que si les variables d'état sont bien des grandeurs indépendantes (on peut donner à chacune une valeur arbitraire dans son domaine de définition pour définir un état dans l'espace des états), il n'en est pas nécessairement de même pour leurs dérivées particulières : il se peut que la cinématique, des principes fondamentaux ou d'autres lois imposent des relations entre les dérivées particulières des variables d'état (mnésiques ou non).

Autrement dit : à partir d'un état quelconque donné, toutes les directions de vitesse d'évolution dans l'espace des états ne sont pas toujours possibles.

<sup>(12)</sup> Cet essai est décrit dans la section 3.6 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(13)</sup> L'ensemble des variables d'état doit cependant toujours être indépendant, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune des variables d'état une valeur arbitraire dans l'espace des états pour définir un état.

Par ailleurs, on rappelle que, si les variables d'état sont bien des grandeurs objectives, seules les dérivées particulières des variables d'état *scalaires* sont des grandeurs objectives<sup>(14)</sup>. Les dérivées particulières des variables d'état *scalaires* sont donc des grandeurs scalaires objectives.

### 1.3 Dissipation (rappels)

Afin de limiter les références externes, on rappelle ici quelques concepts essentiels et les notations employées dans ce cours<sup>(15)</sup>. Le premier principe et le second principe de la thermodynamique postulent l'existence de deux fonctions d'état à valeur scalaire et objective qui sont respectivement l'*énergie interne massique*  $e^m(P, t)$  ( $\text{J.kg}^{-1}$ ) et l'*entropie massique*  $s^m(P, t)$  ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). L'objectivité des fonctions d'état ainsi que l'objectivité des variables d'état impliquent que ces fonctions d'état sont nécessairement des fonctions isotropes. On peut donc ramener une liste de variables d'états tensorielles objectives indépendantes  $\{T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  à une liste de variables d'état scalaires indépendantes  $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ <sup>(16)</sup>.

Pour l'énergie interne massique on écrit donc :

$$\begin{aligned} e^m &= f_e(T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_e(T, I_1, \dots, I_p) \\ \dot{e}^m &= \partial_T f_e \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_e \bar{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_e \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_e \dot{I}_j \end{aligned}$$

et pour l'entropie massique :

$$\begin{aligned} s^m &= f_s(T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_s(T, I_1, \dots, I_p) \\ \dot{s}^m &= \partial_T f_s \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_s \bar{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_s \dot{I}_j \end{aligned}$$

où :

- $T(P, t), \boldsymbol{\chi}_1(P, t), \dots, \boldsymbol{\chi}_n(P, t)$  sont les *champs matériels*<sup>(17)</sup> des variables d'état tensorielles indépendantes et objectives du milieu continu considéré ;
- $T(P, t), I_1(P, t), \dots, I_p(P, t)$  sont les *champs matériels* des variables d'état scalaires indépendantes et objectives appelées *variables d'état réduites*.

**Attention !** – La liste de variables d'état  $\{T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  contient évidemment les variables d'état cinématiques  $\boldsymbol{X}$  et  $\{\boldsymbol{N}_i^*\}$  mais aussi d'éventuelles variables d'état mnésiques. La liste de variables d'état scalaires  $\{I_1, \dots, I_p\}$  contient donc des variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  [déf. 1.2 p. 10] mais aussi d'autres invariants  $\{I_{m+1}, \dots, I_p\}$  qui font intervenir les variables d'état mnésiques. Autrement dit,  $m \leq p$ , l'égalité étant vraie en l'absence de variables d'état mnésiques.

L'objectivité des variables d'état simplifie donc beaucoup l'analyse des évolutions : les fonctions d'état se ramènent à des fonctions scalaires de variables d'état *scalaires* et objectives.

<sup>(14)</sup> Voir la section 3.5.6 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, note 2 [p. 3].

<sup>(15)</sup> Toutes ces notions sont introduites et développées dans le cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

<sup>(16)</sup> Voir la remarque *Rappels sur les fonctions isotropes* p. 10.

<sup>(17)</sup> On rappelle qu'un champ matériel est une grandeur physique  $\boldsymbol{\Psi}$  fonction de la particule et du temps :  $\boldsymbol{\Psi}(P, t)$ . Voir la section 2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, note 2 [p. 3].

Pour des raisons de concision d'écriture, on utilise aussi une fonction d'état auxiliaire : l'énergie libre massique de Helmholtz définie par  $\psi^m = e^m - T s^m$  car ce groupement de termes intervient souvent en mécanique des solides déformables :

$$\begin{aligned}\psi^m &= f_\psi(T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_p) \\ \dot{\psi}^m &= \partial_T f_\psi \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_\psi \otimes \bar{P}^i \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j\end{aligned}$$

Le second principe de la thermodynamique impose que pour tout milieu continu :

1. La température  $T$  est une variable d'état obligatoire,
2. La dissipation actuelle  $\Phi$  ( $\text{W.m}^{-3}$ ) est un *champ matériel scalaire*<sup>(18)</sup> objectif non négatif en toute particule et à tout instant de toute évolution.

La dissipation actuelle en une particule peut s'écrire sous l'une des trois formes équivalentes suivantes :

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (1.1)$$

$$= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (1.2)$$

$$= -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{inégalité dite de Clausius-Duhem}) \quad (1.3)$$

où :

- $\rho(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *masse volumique* actuelle ;
- $T(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *température absolue* actuelle ( $T > 0$ ) et  $\dot{T}$  est sa dérivée particulaire ;
- $r_{ext}^v(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *puissance calorifique volumique d'origine extérieure* ( $\text{W.m}^{-3}$ ) actuellement apportée à la particule par l'interaction d'un rayonnement éventuel traversant le domaine de milieu continu (dans beaucoup d'applications ce terme est nul) ;
- $\mathbf{q}(P, t)$  est le champ matériel vectoriel objectif appelé *courant de chaleur* actuel ( $\text{W.m}^{-2}$ ), représentant la circulation de la chaleur à l'intérieur du domaine de milieu continu : la puissance calorifique surfacique actuelle traversant une facette matérielle de normale unitaire actuelle  $\mathbf{n}_t$  est le scalaire  $q^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$  ;
- $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  est le champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des contraintes (de Cauchy)* actuel (Pa) ;
- $\mathbf{D}(P, t)$  est le champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des taux de déformation* actuel ( $\text{s}^{-1}$ ) ;
- $e^m(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *énergie interne massique* actuelle ( $\text{J.kg}^{-1}$ ) et  $\dot{e}^m$  est sa dérivée particulaire ( $\text{W.kg}^{-1}$ ) ;
- $s^m(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *entropie massique* actuelle ( $\text{J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) et  $\dot{s}^m$  est sa dérivée particulaire ( $\text{W.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) ;

<sup>(18)</sup> Dans ses lectures, l'auteur a pu constater que le mot « dissipation » est parfois employé non pas pour désigner un champ de densité volumique de puissance ( $\text{W.m}^{-3}$ ) mais pour désigner une énergie parfois massique ou volumique ( $\text{J}$  ou  $\text{J.kg}^{-1}$  ou  $\text{J.m}^{-3}$ ), interprétée parfois comme un travail perdu ou parfois comme une quantité de chaleur produite ou encore comme une « énergie bloquée », présentée comme l'aire de certains cycles tracés dans des espaces qui ne sont pas des espaces ou des sous-espaces de l'espace des états et ceci dans des expériences particulières (le plus souvent un essai de traction). Dans ce cours la définition du mot dissipation ne variera pas et restera un champ de puissance volumique défini dans le domaine matériel actuel  $\mathcal{D}_t^m$ .

–  $\psi^m(P, t) = e^m(P, t) - T(P, t) s^m(P, t)$  est le champ matériel scalaire objectif appelé *énergie libre massique de Helmholtz* actuelle ( $\text{J.kg}^{-1}$ ) et  $\dot{\psi}^m$  est sa dérivée particulaire ( $\text{W.kg}^{-1}$ ).

Comme tout champ matériel, chacun de ces champs scalaires, vectoriels ou tensoriels peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par celle d'Euler :

$$\forall \text{ le champ matériel } \Psi(P, t), \quad \Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$$

où  $\mathbf{x}_0$  est la position de référence de la particule  $P$  et  $\mathbf{x}_t$  est sa position actuelle, ces positions étant définies pour un certain observateur  $\mathcal{R}$ .

Lorsque la liste des variables d'état et l'expression des fonctions d'état en fonction des variables d'état d'un certain milieu continu sont connues, la dissipation actuelle  $\Phi$  en une particule  $P$  est fonction de l'état actuel, de la vitesse d'évolution actuelle dans l'espace des états et du gradient actuel du champ de température [éq. (1.2) p. 14].

- **Définition 1.3 – Dissipation thermique.** Le dernier terme de la dissipation, présent dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3) [p. 14], est appelé *dissipation thermique* actuelle et est noté  $\Phi_{th}$  :

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (1.4)$$

La dissipation thermique est non négative par principe<sup>(19)</sup>.

- **Définition 1.4 – Dissipation intrinsèque.** Le reste de la dissipation, noté  $\Phi_{int}$ , est appelé *dissipation intrinsèque* actuelle.

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = -\rho(\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (1.3) p. 14}]$$

La dissipation intrinsèque est la puissance calorifique volumique actuellement produite (ou consommée si elle est négative) en une particule par d'éventuels processus internes exothermiques ou endothermiques autres que les échanges de chaleur par conduction. Les deux inégalités du second principe impliquent :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{th} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$$

La dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  peut donc être négative dans certaines limites.

La non négativité de la dissipation thermique  $\Phi_{th}$  [éq. (1.4) p. 15], vraie  $\forall \mathbf{grad}_E T$ , conduit à la nécessité d'existence d'une *loi de comportement thermique* dite aussi *loi de conductivité thermique*<sup>(20)</sup> :

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$$

où les arguments supplémentaires éventuels sont des variables d'état (éventuellement mnésiques). Quelques lois de comportement thermique (isotropes ou non), ont été proposées dans la section 5.7 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]. Le choix d'une loi de comportement thermique  $\mathbf{f}_q$  étant complètement indépendant de la dissipation intrinsèque, les lois de comportement thermique qui ont été proposées dans les cours précédents sont toujours utilisables quelle que soit l'élasticité ou l'inélasticité du milieu continu. On ne les évoquera donc plus dans la suite<sup>(21)</sup>.

Ce cours se consacrera donc essentiellement à l'établissement de lois de comportement mécanique thermodynamiquement admissibles pour les solides déformables inélastiques.

<sup>(19)</sup> Le second principe postule que dans une conduction thermique « la chaleur va du chaud vers le froid ».

<sup>(20)</sup> Voir le cours *Équations générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur, note 3 [p. 3].

<sup>(21)</sup> Toutefois, les arguments de la fonction  $\mathbf{f}_q$  peuvent éventuellement contenir des variables d'état mnésiques.



## 1.4 Élasticité générique (rappel)

Bien que l'objet de ce cours soit l'inélasticité, il apparaîtra dans la suite que des résultats établis en élasticité s'avèreront utiles. Afin d'éviter de trop nombreuses références externes, on en rappelle ici l'essentiel.

- **Définition 1.5 – Solide élastique (rappel).** Un solide déformable a un comportement élastique s'il satisfait aux trois conditions suivantes :
  1. Les variables d'état sont la température et des variables d'état cinématiques [déf. 1.1 et déf. 1.2 p. 10], à l'exclusion de toute variable d'état mnésique.
  2. La dissipation intrinsèque [déf. 1.4 p. 15] est nulle dans toute évolution à partir de tout état, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}$  et  $\forall \mathbf{D}$ .
  3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

La loi de comportement mécanique d'un solide élastique peut prendre différentes expressions suivant le tenseur de déformation objectif choisi, le nombre de directions d'anisotropie et les variables d'état cinématiques scalaires objectives et indépendantes [déf. 1.2 p. 10] qui ont été retenues pour le modèle. Différentes écritures de lois de comportement mécanique ont été établies en élasticité<sup>(22)</sup>. Les variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  étant choisies, on peut donner une forme générique des lois de comportement mécanique d'un solide élastique de la manière qui suit.

Soit un modèle de comportement élastique dont les variables d'état cinématiques scalaires indépendantes et objectives *retenues pour définir un état cinématique* sont  $\{I_1, \dots, I_m\}$ . La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz s'écrit donc  $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m)$ .

Les dérivées particulières des variables d'état *cinématiques* scalaires sont objectives et s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D} \quad (1.5)$$

où les tenseurs  $\mathbf{S}_j$  sont symétriques et objectifs, particuliers à chaque variable d'état cinématique  $I_j$ .

**Quelques exemples utiles** – On a montré en cinématique les dérivées particulières suivantes :

$$\text{Invariants de déformation :} \\ \dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_I} = 2\mathbf{B} \quad (1.6)$$

$$\dot{B}_{II} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_{II}} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) \quad (1.7)$$

$$\dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_{III}} = 2B_{III} \mathbf{G} \quad (1.8)$$

Invariants d'anisotropies :

$$(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t)' = (4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - 2(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t) : \mathbf{D} \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\mathbf{B}:\mathbf{N}_t} = 4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - 2(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t)' = (4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - 2(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t + 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B})) : \mathbf{D} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\mathbf{B}^2:\mathbf{N}_t} = 4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - 2(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t + 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) \quad (1.11)$$

On laisse le soin au lecteur désireux d'utiliser un tenseur de déformation objectif autre que  $\mathbf{B}$ , de construire des formules similaires à partir des relations qui ont été données en cinématique.

<sup>(22)</sup> Voir le cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

Si des variables d'état cinématiques scalaires objectives choisies pour un modèle élastique sont la dilatation volumique  $K_v$  et la distorsion stérique maximale  $\delta_{max}^s$  (notée ici  $\delta$ ) ou une variable d'anisotropie  $a$ <sup>(23)</sup>, on laisse le soin au lecteur de vérifier avec quelques calculs de cinématique que leurs dérivées particulières s'écrivent :

$$\dot{K}_v = K_v \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{K_v} = K_v \mathbf{G} \quad (1.12)$$

$$\dot{\delta} (= \dot{\delta}_{max}^s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_1^{\frac{3}{2}}}{K_v} \right)' = \left( \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{B} - \delta \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_\delta = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{B} - \delta \mathbf{G} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = \left( \frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{K_v^{\frac{2}{3}}} \right)' &= \left( -\frac{2a}{3} \mathbf{G} + \frac{4}{K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - 2a \mathbf{N}_t \right) : \mathbf{D} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{S}_a = -\frac{2a}{3} \mathbf{G} + \frac{4}{K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - 2a \mathbf{N}_t \end{aligned} \quad (1.14)$$

S'il convient au lecteur d'utiliser une certaine variable d'état cinématique scalaire objective  $z$  définie à partir d'un tenseur de déformation objectif  $\mathbf{X}$  et d'une éventuelle direction actuelle d'anisotropie  $\mathbf{N}_t$ , il pourra calculer de la même manière le tenseur  $\mathbf{S}_z$  qui lui est associé en calculant la dérivée particulière de la définition de  $z$ . Cette dérivée particulière objective peut toujours s'écrire sous la forme  $\dot{z} = \mathbf{S}_z : \mathbf{D}$  car on peut toujours se ramener algébriquement (avec des calculs plus ou moins compliqués) aux dérivées particulières des invariants fondamentaux [éq. (1.6) à (1.11) p. 16].

Dans tout milieu élastique la dissipation intrinsèque [déf. 1.4 p. 15] est nulle :

$$\begin{aligned} \forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad 0 &= -\rho (\dot{\psi}^m + \bar{f}_s \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ &= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j + \bar{f}_s \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ &= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (1.5) p. 16}] \\ \forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad 0 &= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + \left( -\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j + \boldsymbol{\sigma} \right) : \mathbf{D} \end{aligned}$$

La fonction d'état  $\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$  ne pouvant être fonction de  $\dot{T}$ , elle est nécessairement nulle, ce qui conduit à la *relation de Helmholtz* :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

La nullité de la dissipation intrinsèque se réduit donc à :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad 0 = \left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \right) : \mathbf{D}$$

La fonction d'état  $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j$  (tenseur du second ordre symétrique) ne pouvant être fonction de  $\mathbf{D}$ , elle est nécessairement nulle. On en déduit la loi de comportement mécanique de tout solide élastique isotrope ou non :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad \text{où } \psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m) \quad (1.15)$$

<sup>(23)</sup> Les variables d'état cinématiques scalaires  $\{K_v, \delta, a\}$  sont celles qui ont été utilisées dans les exemples de construction de modèles élastiques isotropes ou non dans le cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

On dispose ainsi d'une forme générique de la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope ou non, sous réserve que les  $m$  variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  choisies pour définir un état cinématique du modèle soient indépendantes<sup>(24)</sup>. Cette forme condensée de la loi de comportement mécanique d'un solide élastique masque le fait qu'à travers les tenseurs  $\mathcal{S}_j$ , le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est en fait une fonction du tenseur de déformation actuel et des éventuelles directions d'anisotropie actuelles  $\mathbf{N}_i^*$  (tenseurs du second ordre uniaxiaux unitaires) mais, sous cette forme, elle est valable pour tous les solides élastiques isotropes ou non. En revanche, la loi de comportement mécanique (1.15) [p. 17] met en évidence le fait que le choix des variables d'état cinématiques scalaires objectives et indépendantes retenues pour le modèle est déterminant dans la construction d'un modèle de comportement élastique.

## 1.5 Inélasticité des solides monoconstituants

- **Définition 1.6 – Comportement inélastique.** Un comportement de solide déformable est dit inélastique s'il n'est pas élastique.

Un comportement inélastique est donc un comportement de solide déformable qui transgresse au moins l'une des trois conditions de l'élasticité rappelées dans la définition 1.5 [p. 16].

**Remarque –** L'inélasticité est parfois définie par la seule non nullité de la dissipation intrinsèque. Bien que ce soit souvent le cas, on verra qu'il est néanmoins possible de construire des modèles de comportement inélastiques ayant une ou plusieurs variables mnésiques et tels que la dissipation intrinsèque soit nulle dans certaines parties d'évolution ou même dans toute évolution.

Le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation totale  $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th}$  et la dissipation thermique  $\Phi_{th}$  sont toutes deux des quantités non négatives. On a donc :

$$\Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$$

La dissipation intrinsèque peut donc être négative pourvu qu'elle satisfasse à cette condition. La dissipation intrinsèque est la puissance calorifique volumique produite ou absorbée par des processus internes autres que la conduction thermique liés aux évolutions des variables d'état. Ces processus sont donc *a priori* soit endothermiques ( $\Phi_{int} < 0$ ), soit exothermiques ( $\Phi_{int} > 0$ ). Dans les solides déformables *monoconstituants* qui sont l'objet de ce cours (dans les évolutions, on suppose qu'il n'y a ni changement de phase<sup>(25)</sup> ni réaction chimique), le seul processus interne qui puisse exister est le frottement, qui est exothermique. Dans la construction de modèles de comportement de solides déformables *monoconstituants*, on a donc  $\Phi_{int} \geq 0$ . On est ainsi assuré de construire un modèle thermodynamiquement admissible car la dissipation  $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th}$  est la somme de deux termes non négatifs.

*Dans un solide déformable monoconstituant, la dissipation intrinsèque est non négative.*

**Milieux continus multiconstituants –** Si l'on désire construire un modèle de comportement d'un solide déformable susceptible de subir des changements de phase ou des réactions chimiques pendant ses évolutions, la description de l'état actuel d'une particule doit contenir des variables d'état qui décrivent les concentrations actuelles des constituants en présence. Une variation de ces concentrations

<sup>(24)</sup> Cette condition est nécessaire pour écrire la dérivée particulière  $\dot{\psi}^m$  sous la forme  $\dot{\psi}^m = \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j$ .

<sup>(25)</sup> On parle ici de changements de phase solide/solide, par exemple des transformations austénite/martensite dans les aciers.

traduit des changements de phase ou des réactions chimiques qui peuvent être endothermiques ou exothermiques. Si un changement de phase endothermique se produit en une particule, la dissipation intrinsèque actuelle en cette particule est négative. Les solides déformables multiconstituants ne font pas l'objet de ce cours.

Par ailleurs, la pertinence de l'emploi de champs continus de concentrations pour représenter l'état de particules de solides multiconstituants peut être discutée : la mécanique des solides déformables monoconstituants masque des réalités microscopiques (c'est-à-dire à l'échelle atomique), alors qu'une vision continue des solides déformables multiconstituants masque des réalités « mésoscopiques », c'est-à-dire à une échelle nettement plus grande. Les vérifications expérimentales des prédictions d'une théorie continue de solides multiconstituants doit se faire sur des « points de mesure » nettement plus gros. De plus, la représentation des efforts intérieurs dans un solide déformable multiconstituants par un ou plusieurs champs de tenseurs des contraintes reste (à la modeste connaissance de l'auteur) une question ouverte et débattue. Actuellement (2018), l'écriture des équations de mouvement pour les milieux continus multiconstituants (multiphasiques, mais aussi liquide/solide, milieux poreux imbibés, etc.) ne semble pas faire consensus.

## 1.6 En bref...

Les variables d'état des solides déformables monoconstituants inélastiques sont celles des solides déformables monoconstituants élastiques (isotropes ou non), éventuellement complétées par des variables d'état mnésiques. La définition de l'inélasticité des solides déformables monoconstituants [déf. 1.6 p. 18] n'implique pas nécessairement la présence de variables d'état mnésiques (le modèle présenté dans le chapitre suivant en est un exemple).

Dans une évolution de solide déformable monoconstituant inélastique, la dissipation intrinsèque et la dissipation thermique sont deux champs scalaires de puissance calorifique volumique non négatifs (en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Les lois de comportement qui vont être construites dans les chapitres qui suivent sont donc différentes des lois de comportement élastiques, mais elles pourront parfois y ressembler dans les cas où la dissipation intrinsèque est nulle dans tout ou partie du chemin suivi par les particules dans l'espace des états [exemple p. 11].

L'objectif de ce cours n'est pas de construire tous les modèles de comportement inélastiques thermodynamiquement admissibles possibles ou imaginables, mais seulement d'illustrer, par la construction de quelques modèles simples, comment on peut en construire de nouveaux, tout en garantissant leur admissibilité thermodynamique.



# Inélasticité sans variable mnésique

## 2.1 Variables d'état

Dans ce chapitre, on construit les modèles de comportement inélastique de solides déformables monoconstituants les plus simples : ce sont ceux dont la liste des variables d'état ne contient pas de variable d'état mnésique.

Les variables d'état indépendantes et objectives sont donc :

- la température actuelle  $T$  (imposée par le second principe de la thermodynamique) ;
- la déformation actuelle, représentée par un tenseur de déformation objectif  $\mathbf{X}$  (on modélise un solide déformable) ;
- d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie  $\{\mathbf{N}_t^\bullet\}$ , si le solide déformable est anisotrope.

**Rappel** – Le caractère monoconstituant du modèle de comportement se traduit par l'absence de variables d'état de concentration des constituants dans la liste des variables d'état.

## 2.2 Fonctions d'état

L'objectivité des variables d'état tensorielles ainsi que l'objectivité des fonctions d'état scalaires  $e^m$ ,  $s^m$  et  $\psi^m$  permettent d'affirmer que ces trois fonctions d'état sont des fonctions isotropes <sup>(1)</sup> et donc d'affirmer l'existence des trois fonctions d'état  $\bar{f}_e$ ,  $\bar{f}_s$  et  $\bar{f}_\psi$  à variables scalaires objectives indépendantes suivantes :

$$e^m = f_e(T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(i)}) = \bar{f}_e(T, I_1, \dots, I_m) \quad ; \quad s^m = f_s(T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(i)}) = \bar{f}_s(T, I_1, \dots, I_m)$$

$$\psi^m = f_\psi(T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(i)}) = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m)$$

où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est la liste des variables d'état cinématiques scalaires objectives et indépendantes retenues pour le modèle [déf. 1.2 p. 10].

Les dérivées particulières de ces fonctions d'état s'écrivent donc :

$$\dot{e}^m = \partial_T \bar{f}_e \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_e \dot{I}_j \quad ; \quad \dot{s}^m = \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_s \dot{I}_j \quad ; \quad \dot{\psi}^m = \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j$$

où les dérivées particulières des variables d'état cinématiques scalaires s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (1.5) p. 16}] \quad \text{où les tenseurs } \mathbf{S}_j \text{ sont des fonctions connues de } \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{N}_t^\bullet.$$

<sup>(1)</sup> La définition et les propriétés des fonctions isotropes sont données dans le chapitre 2 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

### 2.3 Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque

La non négativité de la dissipation intrinsèque [déf. 1.4 p. 15] dans un solide déformable inélastique monoconstituant sans variable d'état mnésique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} &= -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \\
&= -\rho \left( \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j + \bar{f}_s \dot{T} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0, \quad \forall \dot{T} \forall \mathbf{D} \\
&= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \quad [\text{éq. (1.5) p. 16}] \\
\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} &= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + \left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \right) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (2.1)
\end{aligned}$$

On reconnaît dans l'équation (2.1) le terme  $\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j$  qui peut s'interpréter comme la contrainte qui existerait dans un solide *élastique* qui aurait la même liste de variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  et la même définition de l'énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi$  [éq. (1.15) p. 17]. Pour abrégier les notations, on pose la définition suivante :

- **Définition 2.1 – Contrainte de référence.** On appelle contrainte de référence la contrainte qui existerait dans un solide élastique imaginaire dont l'état des particules serait décrit avec les mêmes variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  et avec la même définition de l'énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m)$  que le solide inélastique sans variable mnésique actuellement considéré. Son expression est :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad [\text{éq. (1.15) p. 17}] \quad (2.2)$$

Avec cette définition, la non négativité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.1)] s'écrit plus brièvement :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (2.3)$$

Pour exploiter l'inégalité (2.3), on définit les deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbb{R}^7$  suivants :

$$\mathbf{x} = \{-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s), \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}\} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \{\dot{T}, \mathbf{D}\}$$

La non négativité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.3)] en toute particule et pour toute évolution autour de cette particule s'écrit sous la forme du produit scalaire généralisé non négatif suivant :

$$\forall \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0$$

Cette condition implique que le vecteur  $\mathbf{x}$  est nécessairement au moins fonction du vecteur  $\mathbf{y}$ , c'est-à-dire qu'il existe nécessairement deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  telles que :

$$-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) = f_1(\dot{T}, \mathbf{D}, \dots) \quad (\text{égalité scalaire}) \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref} = \mathbf{f}_2(\dot{T}, \mathbf{D}, \dots) \quad (\text{égalité tensorielle du second ordre symétrique}) \quad (2.5)$$

Les éventuelles variables supplémentaires dans les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont des variables d'état.

Pour les modèles de solides déformables monoconstituants sans variables d'état mnésiques, l'inégalité du second principe de la thermodynamique implique donc l'existence des deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

### 2.3.1 Relation de Helmholtz

Dans l'égalité (2.4) [p. 22], le terme de gauche  $-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$  est une fonction d'état<sup>(2)</sup>, qui n'est donc fonction ni de  $\dot{T}$ , ni de  $\mathbf{D}$ . La fonction  $f_1$  est donc une fonction d'état :

$$-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) = f_1(T, I_1, \dots, I_m)$$

La non négativité de la dissipation intrinsèque s'écrit alors :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = f_1(T, I_1, \dots, I_m) \dot{T} + f_2(\mathbf{D}, \dot{T}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$$

La fonction d'état  $f_1$  n'étant pas fonction de  $\dot{T}$ , cette inégalité vraie  $\forall \dot{T}$  implique  $f_1 = 0$ , c'est-à-dire la *relation de Helmholtz* :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \tag{2.6}$$

Comme en élasticité, le second principe de la thermodynamique, vrai pour toute évolution, implique que les deux fonctions d'état  $\bar{f}_\psi$  et  $\bar{f}_s$  sont liées par la relation de Helmholtz. Pour déterminer complètement le comportement d'un solide inélastique sans variable mnésique, il suffit donc de connaître une seule fonction d'état, choisie parmi  $\bar{f}_e$ ,  $\bar{f}_s$  ou  $\bar{f}_\psi$ , les deux autres étant déduites à l'aide de la relation de Helmholtz [éq. (2.6) p. 23] et de la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz  $\psi^m = e^m - T s^m$ .

La non négativité de la dissipation intrinsèque dans un solide déformable monoconstituant sans variable mnésique se réduit donc à :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = f_2(\mathbf{D}, \dot{T}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0 \tag{2.7}$$

où les arguments supplémentaires éventuels de la fonction  $f_2$  sont des variables d'état.

### 2.3.2 Loi de comportement mécanique

L'égalité (2.5) [p. 22] implique l'existence d'une loi de comportement mécanique pour les solides déformables monoconstituants sans variable mnésique :

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref} = \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}) \tag{2.8}$$

où la fonction  $\mathbf{f}_2$  est soumise à la condition d'admissibilité thermodynamique (2.7) :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}) : \mathbf{D} \geq 0 \tag{2.9}$$

On en déduit le théorème suivant :

- **Théorème 2.2 – Contrainte dissipative.** Dans un solide déformable monoconstituant sans variable d'état mnésique, la réponse sthénique  $\boldsymbol{\sigma}$  à un état actuel  $(T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\})$  est la somme de la contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  et d'une contrainte dissipative, notée  $\boldsymbol{\sigma}_d$  *a priori* fonction du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$ , de  $\dot{T}$  et des variables d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^\bullet\}) : \mathbf{D} \geq 0$$

<sup>(2)</sup> En effet, la masse volumique  $\rho$  est une fonction d'état en raison du principe de la conservation de la masse :  $\rho = \frac{\rho_0}{K_v} = \frac{\rho_0}{\sqrt{B_{III}}}$ .



La fonction dissipative  $f_2$  peut n'être fonction que d'une partie des arguments. Si elle est choisie nulle, la dissipation intrinsèque est nulle, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est une fonction d'état et on retrouve un comportement élastique.

**Remarque** – Contrairement à l'élasticité, dans un solide déformable inélastique monoconstituant sans variable d'état mnésique et avec  $\boldsymbol{\sigma}_d \neq \mathbf{0}$ , le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est pas une fonction d'état puisqu'il est *a priori* fonction du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et de la dérivée particulaire  $\dot{T}$  [éq. (2.8)], qui ne sont pas des variables d'état. En revanche, la partie  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  est une fonction d'état.

La contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d = f_2(\dot{T}, \mathbf{D}, \dots)$  peut être choisie arbitrairement, sous la seule condition de satisfaire la non négativité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.9) p. 23] :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = f_2(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^*\}) : \mathbf{D} \geq 0$$

**Exemples de choix de contraintes dissipatives** – Le choix de la fonction  $f_2$  ne peut être que guidé par l'expérimentation. On suggère ici quelques idéalizations possibles de la fonction  $f_2$  :

1. Une solution simple et physiquement sensée est de supposer que la contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d$  est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = 2\mu(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^*\}) \mathbf{D}$$

où  $\mu(\dots)$  est une fonction à valeur scalaire, non négative et isotrope<sup>(3)</sup>, éventuellement constante. Sa dimension est celle d'une viscosité (Pa.s). On vérifie aisément qu'avec ce choix, la dissipation intrinsèque est bien non négative :

$$\Phi_{int} = 2\mu(\dots) \mathbf{D} : \mathbf{D} \geq 0 \quad \text{car} \quad \forall \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} : \mathbf{D} = \|\mathbf{D}\|^2 \geq 0$$

2. Par analogie avec des habitudes de la mécanique des fluides, on peut définir une fonction  $f_2$  plus élaborée en cherchant à distinguer une viscosité de volume et une viscosité isovolume : on décompose les tenseurs symétriques  $f_2$  et  $\mathbf{D}$  en partie sphérique et déviatorique. Il vient :

$$\Phi_{int} = f_2 : \mathbf{D} = \text{sph} f_2 : \text{sph} \mathbf{D} + \text{dev} f_2 : \text{dev} \mathbf{D} \quad (2.10)$$

Comme on le fait en mécanique des fluides, il est possible de définir une viscosité de volume et une viscosité isovolume. On obtient une solution simple en définissant la fonction tensorielle  $f_2$  par ses parties sphérique et déviatorique :

$$\text{sph} \boldsymbol{\sigma}_d = \text{sph} f_2 = \mu_1(\dots) \text{sph} \mathbf{D} = \mu_1(\dots) \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \text{dev} \boldsymbol{\sigma}_d = \text{dev} f_2 = \mu_2(\dots) \text{dev} \mathbf{D}$$

$$\text{On a donc :} \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mu_1(\dots) \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} + \mu_2(\dots) \text{dev} \mathbf{D}$$

où les fonctions non négatives et isotropes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  (éventuellement constantes) doivent être identifiées expérimentalement.

On vérifie aisément qu'avec ces choix la dissipation intrinsèque [éq. (2.10)] est bien non négative.

**Remarque** – La viscosité de volume  $\mu_1$  est parfois supposée nulle. Cette hypothèse demande en principe une justification.

<sup>(3)</sup> L'isotropie de la fonction  $\mu$  pour ses arguments tensoriels est indispensable pour garantir l'objectivité de la viscosité : pour deux observateurs  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$ , on doit avoir l'égalité  $\mu(\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_t^*\}) = \mu(\tilde{\mathbf{D}}, \dot{\tilde{T}}, T, \tilde{\mathbf{B}}, \{\tilde{\mathbf{N}}_t^*\})$ ; la fonction  $\mu$  est donc une fonction des invariants et des invariants croisés de ses arguments tensoriels.

## 2.4 En bref...

Le second principe de la thermodynamique implique que la loi de comportement mécanique d'un solide déformable monoconstituant inélastique sans variable mnésique s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où :

- $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  est une *contrainte de référence*, c'est-à-dire la contrainte dans un solide élastique (isotrope ou non) avec les mêmes variables d'état  $\{T, I_1, \dots, I_m\}$  et les mêmes fonctions d'état.
- $\boldsymbol{\sigma}_d$  est la *contrainte dissipative*, constante ou fonction isotrope de tout ou partie des arguments  $\{\mathbf{D}, \dot{T}, T, \mathbf{B}, \{\mathbf{N}_i^*\}\}$  satisfaisant la condition  $\forall \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{D} \geq 0$ .

- **Définition 2.3 – Viscoélasticité.** Si l'on suppose que la contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d$  ne dépend que du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et éventuellement de la température  $T$ , cette classe de modèles est appelée *viscoélasticité*.

Contrairement à l'élasticité dans laquelle la condition sur la dissipation intrinsèque est une égalité  $\Phi_{int} = 0$ , l'inégalité  $\Phi_{int} \geq 0$  ne conduit pas à une forme générale complète de la loi de comportement mécanique en fonction des dérivées partielles de l'énergie libre massique de Helmholtz : seule la fonction d'état *contrainte de référence*  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  est complètement déterminée par l'énergie libre massique de Helmholtz. Si  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  est bien une fonction d'état, en revanche la contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d$ , dont l'existence est nécessaire pour assurer la non négativité de la dissipation intrinsèque, n'est pas une fonction d'état. Le choix d'une expression pour la fonction dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \dot{T}, \dots)$  ne peut être guidé que par des constatations expérimentales ou des intuitions issues de la microphysique. On a présenté quelques exemples d'idéalisations de  $\boldsymbol{\sigma}_d$  qui sont simples, thermodynamiquement admissibles, physiquement raisonnables et faciles à identifier.

« **Modèles rhéologiques** » – Dans la littérature spécialisée, le modèle de comportement viscoélastique est souvent appelé modèle de *Kelvin-Voigt*. Il est souvent illustré par un schéma appelé « modèle rhéologique » constitué d'un ressort en parallèle avec un amortisseur visqueux (ou « *dash-pot* ») pour suggérer l'addition d'une contrainte élastique de référence et d'une « contrainte visqueuse ».

Par ailleurs, le modèle de *Kelvin-Voigt* est souvent opposé à un autre « modèle rhéologique », dit de *Maxwell*, dans lequel le ressort est monté en série avec l'amortisseur. Ce dernier n'est pas, à proprement parler, un modèle de solide déformable puisqu'il n'existe pas de forme propre de référence permettant de définir une déformation.

Les représentations imagées de « modèles rhéologiques » peuvent présenter des combinaisons plus ou moins compliquées de ressorts, d'amortisseurs, voire de « patins » ou de « cliquets ». Elles ne sont susceptibles d'illustrer des comportements inélastiques *que dans un essai de traction*, dans lequel la déformation n'est représentée que par un allongement dans la direction de traction (un scalaire) et où la contrainte (uniaxiale dans cet essai) n'est représentée que par la contrainte normale dans la direction de traction (aussi un scalaire). Ces analogies unidimensionnelles ne sont pas transposables à des sollicitations plus complexes car, en général, les tenseurs de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_d$  ne sont pas uniaxiaux et n'ont pas les mêmes directions propres.

Par ailleurs, les « modèles rhéologiques » supposent le plus souvent la validité du tenseur des « petites perturbations »  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dont on sait que dans bon nombre de mouvements, il est une mauvaise mesure des petites déformations<sup>(4)</sup>. De plus, on lit souvent dans ces exposés une égalité suspecte «  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}$  » où  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

<sup>(4)</sup> On rappelle que *pour l'observateur utilisé* le mouvement doit être une quasi-translation ; voir la section 4.12.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

est la dérivée temporelle d'une déformation et où  $\mathbf{D}$  est la dérivée temporelle *logarithmique* d'une déformation <sup>(5)</sup> ! Une égalité entre ces deux types de dérivées est pour le moins surprenante. L'égalité «  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}$  » est peut-être numériquement acceptable pour certains mouvements particuliers, mais elle est conceptuellement inconsistante.

Quant à la loi de comportement thermique (ou de conduction thermique), elle peut être choisie indépendamment, pourvu que la dissipation thermique  $\phi_{th}$  soit non négative dans toute évolution. Des exemples possibles de lois de comportement thermique isotropes et non isotropes ont été proposés dans le cours d'élasticité <sup>(6)</sup>.

---

<sup>(5)</sup> Voir la section 5.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]

<sup>(6)</sup> Voir le cours *Comportement élastique* du même auteur [note 4 p. 3].

# Inélasticité à une variable mnésique scalaire

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier en premier lieu et d'une manière purement formelle la thermodynamique d'un milieu solide déformable monoconstituant, sans hypothèse ni sur son isotropie, ni sur les déformations ni sur le mouvement, et dont les variables d'état ne contiennent qu'une seule variable mnésique scalaire. Ce n'est qu'ensuite, en précisant dans les chapitres suivants les phénomènes microphysiques que la variable mnésique scalaire est susceptible de refléter (macroscopiquement et de manière continue), que l'on verra quelques modèles de comportements phénoménologiques que l'on peut construire dans ce cadre.

## 3.1 Variables d'état

La liste des variables d'état de cette classe de modèles est :

1. la température  $T$  (imposée par le second principe de la thermodynamique) ;
2. des variables d'état cinématiques [déf. 1.2 p. 10] objectives :  $\{\mathbf{X}, \{\mathbf{N}_i^\bullet\}\}$  (le milieu continu est un solide déformable, isotrope ou non) où  $\mathbf{X}$  est un tenseur de déformation objectif et où les  $\mathbf{N}_i^\bullet$  sont des tenseurs unitaires uniaxiaux représentant les directions actuelles d'anisotropie ;
3. une variable d'état mnésique scalaire et objective notée  $\alpha$ , dont l'interprétation physique n'est pas précisée pour l'instant.

La présence d'une variable d'état mnésique transgresse un axiome de l'élasticité [déf. 1.5 p. 16]. Les modèles de comportement envisagés dans ce chapitre sont donc inélastiques. La présence de la variable mnésique implique que la réponse sthénique à un état « thermocinématique » donné  $\{T, I_1, \dots, I_m\}$  dépend *a priori* du chemin suivi dans l'espace des états pour y aboutir. La liste des variables d'état est donc  $\{T, I_1, \dots, I_m, \alpha\}$  et la dimension de l'espace des états est  $m + 2$ .

L'objectivité des trois fonctions d'état scalaires énergie interne massique  $e^m$ , entropie massique  $s^m$  et énergie libre massique de Helmholtz  $\psi^m$ , ainsi que l'objectivité des variables d'état implique que ces fonctions d'état sont des fonctions scalaires isotropes pour leurs arguments :

$$e^m = \bar{f}_e(T, I_1, \dots, I_m, \alpha) \quad ; \quad s^m = \bar{f}_s(T, I_1, \dots, I_m, \alpha) \quad ; \quad \psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m, \alpha)$$

où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est la liste de  $m$  variables d'état *cinématiques* scalaires objectives et indépendantes [déf. 1.2 p. 10] retenues pour ce modèle (isotrope ou non).

Les dérivées particulières des variables d'état cinématiques scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont connues ; elles résultent d'un calcul purement cinématique et sont toutes de la forme :

$$\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D} \quad (j = 1, \dots, m)$$

où chaque tenseur du second ordre symétrique  $\mathbf{S}_j$  est fonction des variables d'état cinématiques tensorielles  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{N}_i^*$ . Les expressions des tenseurs  $\mathbf{S}_j$  les plus utiles ont été rappelées dans les équations (1.6) à (1.14) [p. 16 et 17].

En revanche, la dérivée particulière  $\dot{\alpha}$  de la variable mnésique ne pourra être précisée que lorsqu'on lui aura attribué une signification physique.

La dérivée particulière de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^m &= \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j + \partial_\alpha \bar{f}_\psi \dot{\alpha} \quad (\text{car les variables d'état sont indépendantes}) \\ &= \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D} + \partial_\alpha \bar{f}_\psi \dot{\alpha}\end{aligned}$$

### 3.2 Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque

La non négativité de la dissipation intrinsèque [éq. (1.3) p. 14] s'écrit :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \underbrace{\left( \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \right)}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} : \mathbf{D} - \rho \partial_\alpha \bar{f}_\psi \dot{\alpha} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (3.1)$$

où le tenseur du second ordre symétrique

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad (\text{dérivations par rapport aux seules variables d'état cinématiques}) \quad (3.2)$$

est formellement identique à la définition de fonction d'état tensorielle *contrainte de référence* [éq. (2.2) p. 22], avec la seule différence que les arguments de la fonction d'état  $\bar{f}_\psi$  sont maintenant  $\{T, I_1, \dots, I_m, \alpha\}$ , ce que rappelle l'indice  $^{(\alpha)}$  de  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}$ . Il est important de noter que dans l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}$  on ne dérive la fonction  $\bar{f}_\psi$  que par rapport aux variables d'état cinématiques  $I_j$ . La variable d'état mnésique  $\alpha$  y joue le rôle d'un paramètre.

**Attention!** – Contrairement à ce qui est énoncé dans la définition de la contrainte de référence [déf. 2.1 p. 22], la fonction  $\bar{f}_\psi$  n'est plus l'énergie libre massique de Helmholtz d'un solide *élastique* imaginaire avec les mêmes variables d'état, car la liste des variables d'état contient la variable d'état mnésique  $\alpha$ , ce qui est contraire à la définition de l'élasticité [déf. 1.5 p. 16]. La contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}$  est donc aussi une fonction de la variable d'état mnésique  $\alpha$ .

La non négativité de la dissipation intrinsèque (3.1) s'écrit donc de manière plus concise :

$$\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_\alpha \bar{f}_\psi \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.3)$$

Pour exploiter cette inégalité vraie dans toute évolution, il faut maintenant donner un sens physique à la variable d'état mnésique  $\alpha$  afin d'exprimer sa dérivée particulière  $\dot{\alpha}$ .

**Remarques** – Dans la littérature spécialisée, on rencontre assez souvent des modèles de comportement à variables d'état mnésiques dont la signification physique n'est pas claire voire non précisée <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Ce sont souvent les auteurs qui nomment « variables cachées » les variables mnésiques, pensant peut-être que cette terminologie suffit à se dispenser de les définir !

L'expression de sa dérivée particulière (appelée « loi d'évolution ») est alors posée plus ou moins arbitrairement. Le choix d'une variable mnésique devrait être motivé par des considérations physiques (ou microphysiques : on soupçonne l'existence d'un phénomène microphysique qui s'est produit et qui est à l'origine de l'inélasticité). Les modèles inélastiques présentés dans la suite auront cette préoccupation.

Par ailleurs, on rappelle au lecteur que les variables d'état cinématiques  $\{\mathbf{X}, \{\mathbf{N}_i^\bullet\}\}$  choisies ici ne présupposent *a priori* aucune restriction sur les déformations ou sur les mouvements envisageables<sup>(2)</sup> et ne présument rien sur l'isotropie ou non du modèle.

### 3.3 En bref...

Les modèles de comportement de solides inélastiques à une seule variable d'état mnésique scalaire (et objective comme toute variable d'état) ont les mêmes variables d'état que les solides élastiques (isotropes ou non) complétées par une variable d'état mnésique. Si  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont les variables d'état cinématiques scalaires qui ont été retenues pour le modèle<sup>(3)</sup>, la dimension de l'espace des états est  $m + 2$ .

Dans ces modèles, la dissipation intrinsèque est non négative [éq. (3.3) p. 28]. Pour exploiter cette inégalité, il faut donner un sens physique à la variable mnésique  $\alpha$  afin d'évaluer sa dérivée particulière dans toute évolution. C'est ce qui sera fait dans les chapitres qui suivent.

<sup>(2)</sup> Les déformations n'ont pas à être « petites » et les mouvements ne sont pas astreints à être des « quasi-translations » pour l'observateur utilisé.

<sup>(3)</sup> On rappelle que ces variables d'état scalaires sont (par exemple) des invariants propres ou croisés issus du tenseur de déformation actuelle  $\mathbf{X}$  et des directions actuelles d'anisotropie  $\mathbf{N}_i^\bullet$ .



# Plasticité

On a vu en élasticité que le comportement élastique est généralement limité par un ou plusieurs critères de limite élastique qui ont deux finalités : se protéger macroscopiquement des réarrangements de liaisons interatomiques (ils sont dus aux distorsions) ou se protéger des ruptures de liaisons interatomiques. Dans ce chapitre on se propose de montrer comment on peut modéliser le comportement d'un solide déformable (sans hypothèse sur les déformations et isotrope ou non) au-delà d'un critère de limite élastique par distorsion limite.

## 4.1 Choix d'un critère de limite élastique

L'inélasticité (constatation macroscopique) due aux réarrangements des liaisons interatomiques dans un matériau suffisamment déformé est un phénomène macroscopique appelé *plastification*. Les réarrangements de liaisons sont dus à des changements d'angle entre des directions matérielles (distorsions angulaire ou stérique) imposés par la déformation macroscopique dans les microstructures (grains, joints de grains, ponts élastomériques, etc.).

En élasticité (isotrope ou non), il a été proposé divers critères de limite élastique pour se protéger des réarrangements de liaisons. L'un de ces critères est une limitation imposée à la valeur de la distorsion stérique maximale en une particule. On en rappelle l'expression en fonction des invariants fondamentaux du tenseur de déformation  $\mathbf{B}$ <sup>(1)</sup> :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} \in [1, +\infty[ \quad (4.1)$$

où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$  sont les dilatations linéiques principales de la déformation actuelle<sup>(2)</sup>.

- **Notation 4.1** – Pour alléger les notations dans la suite, la distorsion stérique maximale actuelle en une particule  $\delta_{max}^s$  sera notée plus simplement  $\delta$ .
- **Hypothèse 4.2 – Choix d'un critère de limite élastique.** Dans le modèle de plasticité construit ici, le critère de limite élastique par plastification choisi est une limite portant sur la distorsion stérique maximale :

$$\delta \leq \delta_{lim} \quad [\text{notation 4.1}]$$

**Motivations de ce choix** – Utiliser la distorsion stérique maximale pour représenter, par un simple scalaire, les changements d'angle entre directions matérielles qui se produisent en une particule

<sup>(1)</sup> La distorsion stérique maximale est un scalaire caractéristique de la déformation en une particule. Voir la section 4.7 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

<sup>(2)</sup> On rappelle que les dilatations linéiques principales  $\lambda_\bullet$  sont les valeurs propres du tenseur de déformation objectif  $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$ . Ce sont des rapports  $\frac{\ell}{\ell_0}$ . Les valeurs propres du tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  sont  $\lambda_\bullet^2$ .



est un choix arbitraire, mais physiquement raisonnable car ce sont les distorsions qui induisent les réarrangements de liaisons interatomiques. Un avantage notable du choix de ce critère de limite élastique est qu'il est applicable aux solides déformables isotropes ou non, car borner supérieurement la distorsion stérique maximale de la déformation en une particule, limite aussi les distorsions stériques maximales particulières dont une direction initiale est une direction d'anisotropie<sup>(3)</sup>.

Enfin, on rappelle qu'en une particule il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique atteint la distorsion stérique maximale en cette particule. En utilisant un critère portant sur la distorsion stérique maximale en une particule, on augmente la probabilité que l'un des triplets de distorsion stérique maximale coïncide ou presque avec les directions de glissement privilégiées dans les structures microscopiques (dont l'orientation effective est ignorée par une modélisation continue de la matière) ou avec des directions d'anisotropie.

**Autre choix possible** – On peut prendre comme critère de limite élastique une limite pour la distorsion *angulaire* maximale en une particule  $\delta_{max}^a = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \leq \delta_{lim}^a$  ; ce critère est moins commode d'utilisation car son expression en fonction des invariants de déformation  $B_I$ ,  $B_{II}$  et  $B_{III}$  est beaucoup plus compliquée<sup>(4)</sup>. En outre, il n'existe qu'un seul couple de directions matérielles initialement orthogonales qui atteint la distorsion angulaire maximale, ce qui diminue la probabilité que quand le critère de limite élastique est atteint, le couple unique de directions matérielles de distorsion angulaire maximale coïncide avec des directions cristallines ou d'anisotropie.

Enfin, on rappelle qu'imposer une limite en distorsion stérique maximale implique automatiquement une limite sur les distorsions angulaires maximales<sup>(5)</sup>.

- **Hypothèse 4.3 – Hypothèse simplificatrice.** La limite élastique  $\delta_{lim}$  est indépendante de la température.

Le critère de limite élastique choisi ici est un critère géométrique qui définit une limite de distorsion stérique maximale  $\delta_{lim}$  au delà de laquelle des réarrangements de liaisons se produisent. Cette limite – purement géométrique – de déclenchement des réarrangements de liaisons interatomiques est vraisemblablement peu dépendante de température ; elle devrait ne dépendre que de la géométrie des structures microscopiques qui est *a priori* indépendante de la température<sup>(6)</sup>. L'hypothèse simplificatrice 4.3 semble être acceptable au moins dans un intervalle modéré de températures<sup>(7)</sup>.

**À propos des critères de limite élastique exprimés en contraintes limites** – Dans les exposés traditionnels d'élasticité, les critères de limite élastique sont le plus souvent exprimés en termes de contrainte limite plutôt qu'en termes de limite sur une caractéristique de la déformation. Il est alors naturel de constater que la contrainte limite (le plus souvent, il s'agit d'une contrainte normale principale limite mesurée dans un essai de traction) varie avec la température car cette contrainte se déduit de l'énergie libre massique de Helmholtz<sup>(8)</sup> qui est (entre autres) fonction de la température. Afin de

<sup>(3)</sup> Voir l'annexe A3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(4)</sup> L'expression des valeurs propres classées d'un tenseur du second ordre symétrique en fonction de ses invariants fondamentaux est donnée dans l'annexe A du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

<sup>(5)</sup> Voir l'annexe A3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(6)</sup> Sauf changement de phase dû à la température, mais dans ce cas le matériau ne serait plus monoconstituant.

<sup>(7)</sup> Toutefois, on peut subodorer que l'agitation thermique régnant à haute température favorise les réarrangements de liaisons et abaisse donc la limite de distorsion à partir de laquelle des réarrangements se produisent. Ces considérations microscopiques dépassent les modestes compétences de l'auteur en microphysique de la matière condensée (matériaux monocristallins, polycristallins, verres, polymères). Si nécessaire, le lecteur pourra développer un modèle se dispensant de cette hypothèse simplificatrice en suivant une démarche analogue à celle suivie dans ce chapitre, à condition qu'il connaisse une loi  $\delta_{lim}(T)$ .

<sup>(8)</sup> Souvent appelée « énergie de déformation » dans les modèles ignorant la température comme variable d'état.

valider l'hypothèse simplificatrice 4.3, on devrait constater expérimentalement que, pour un matériau donné (c'est-à-dire une microstructure donnée dont la géométrie est *a priori* indépendante de la température<sup>(9)</sup>), la distorsion stérique maximale limite (et non une contrainte limite) est indépendante de la température. Tous les matériaux dont la microstructure est semblable devraient avoir la même distorsion stérique maximale limite au moins dans un certain intervalle de températures.

Par ailleurs, les contraintes limites ne sont le plus souvent évaluées que lors d'une *essai de traction*, qui est un mouvement très particulier dans lequel on n'évalue que rarement – voire jamais – la distorsion stérique (ou angulaire) maximale qui s'y produit en chaque particule. Il n'est donc pas étonnant qu'un critère limitant les distorsions ne soit que très rarement envisagé car la cinématique angulaire ou stérique dans ce mouvement est le plus souvent non considérée, en dépit du fait qu'elle est la véritable cause des réarrangements de liaisons.

Enfin, dans les cours traditionnels, lorsque l'on énonce un critère de limite élastique empirique en contrainte, on confond la contrainte limite de traction (une contrainte normale principale) avec une « contrainte équivalente » de Von Mises qui, à un facteur constant près, est la norme du déviateur des contraintes. *Cette confusion n'est correcte que dans un essai de traction* car il se trouve que, dans cette expérience, la contrainte de Von Mises est égale à la contrainte normale principale en traction<sup>(10)</sup>. Cependant, l'égalité de la contrainte normale de traction  $\sigma^1_1$  et de la « contrainte équivalente » de Von Mises  $\sigma_{VM}$ , vraie seulement dans un essai de traction, ne permet pas de distinguer si le principe du critère de limite élastique proposé est de limiter la plus grande contrainte normale ou de limiter la norme du déviateur des contraintes. Ces deux limitations ne sont pas équivalentes dans des mouvements autres qu'un essai de traction.

**Cas de la pseudo-élasticité de Hooke** – En examinant la « loi » de Hooke<sup>(11)</sup>, il est facile de voir qu'imposer une limite à la contrainte de Von Mises ( $\sigma_{VM} = \sqrt{3/2} \|\mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma}\|$ ) est équivalent à limiter la norme du déviateur du tenseur des « petites perturbations »  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En pseudo-élasticité de Hooke, ce critère est donc équivalent à une limitation portant sur l'invariant  $\|\mathbf{dev} \boldsymbol{\varepsilon}\|$ , dont la signification cinématique angulaire ou stérique est pour le moins obscure.

## 4.2 Choix de la variable d'état mnésique

Le critère de limite élastique  $\delta \leq \delta_{lim}$  est équivalent au critère  $\gamma \leq \gamma_{lim}$  en posant :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} = \sqrt{\frac{B_I}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} - 3} \quad \text{et} \quad \gamma_{lim} = \sqrt{3} \sqrt{\delta_{lim}^{\frac{2}{3}} - 1} \quad (4.2)$$

**Démonstration** – On laisse le soin au lecteur de vérifier que la fonction  $\delta \rightarrow \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}$  est bien monotone croissante pour  $\delta \geq 1$  (la distorsion stérique maximale en une particule est toujours  $\geq 1$ ). Les deux critères  $\delta \leq \delta_{lim}$  et  $\gamma \leq \gamma_{lim}$  sont donc équivalents.

Les relations inverses sont :

$$\delta = \frac{(\gamma^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \delta_{lim} = \frac{(\gamma_{lim}^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \quad (4.3)$$

**Remarque** – Cette réécriture du critère de limite élastique n'est pas obligatoire. En se référant à la cinématique du mouvement de glissement<sup>(12)</sup>, le lecteur pourra vérifier que, dans le cas particulier d'un mouvement de glissement, le nombre sans dimension et non négatif  $\gamma$  introduit ici est aussi

<sup>(9)</sup> Sauf changement de phase, voir note 6 [p. 32].

<sup>(10)</sup> Dans la zone utile de l'éprouvette, les autres contraintes principales sont nulles (dans un essai de traction, le tenseur des contraintes est quasi-uniaxial).

<sup>(11)</sup> Voir les sévères limites d'utilisation et les incohérences thermodynamiques et d'objectivité de cette « loi » dans le chapitre 4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(12)</sup> Voir la section 3.4.3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur, [note 4 p. 3].

la valeur absolue du paramètre de glissement classiquement utilisé dans les essais de glissement isovolume :  $\gamma = |u|/h$  où  $h$  est l'épaisseur de l'éprouvette et où  $u$  est le déplacement horizontal imposé à la plaque mobile.

- **Hypothèse 4.4 – Choix de la variable mnésique.** On choisit de représenter macroscopiquement l'état microscopique actuel des réarrangements de liaisons dus aux distorsions stériques excessives qui se sont produites depuis l'état de référence, par une variable d'état mnésique scalaire, notée  $p$ , que l'on appellera *plastification* actuelle, définie de la manière suivante :

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{« partie positive » de } x) \quad (4.4)$$

Autrement dit, la plastification actuelle  $p(t)$ , enregistre le plus grand dépassement de la limite élastique  $\gamma_{lim}$  qui s'est produit lors de l'évolution depuis l'instant de référence  $t_0$  jusqu'à l'instant actuel  $t$ . À l'instant de référence (non déformé par définition)  $\delta(t_0) = 1 \Leftrightarrow \gamma(t_0) = 0$ , la formule (4.4) montre que  $p(t_0) = 0$  car  $\langle 0 - \gamma_{lim} \rangle = 0$ .

**Discussion sur le choix de la variable mnésique  $p$**  – Sans la réécriture du critère de limite élastique faite dans l'équation (4.2) [p. 33], la variable mnésique pourrait être définie par :

$$p'(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle \delta(\tau) - \delta_{lim} \rangle \quad (\text{le plus grand dépassement de } \delta_{lim} \text{ depuis } t_0)$$

La variable d'état mnésique  $p'$  a une signification différente car :

$$\delta(\tau) - \delta_{lim} \neq \gamma(\tau) - \gamma_{lim} = \sqrt{3} \sqrt{\delta(\tau)^{\frac{2}{3}} - 1} - \sqrt{3} \sqrt{\delta_{lim}^{\frac{2}{3}} - 1}$$

Une variation de produits mixtes de trois directions matérielles actuelles, n'a pas la même signification cinématique qu'une variation de rapports ( $|u|/h$ ), c'est à dire de déplacements adimensionnés. La manière d'enregistrer les dépassements de la limite élastique est donc différente.

Le lecteur doit garder à l'esprit que le choix fait dans l'équation (4.2) [p. 33] pour la définition de la variable mnésique  $p$  est assez arbitraire et qu'il est possible d'en faire d'autres. Chaque choix de la définition de la variable mnésique  $p$  conduit à un modèle de plasticité différent car la manière d'enregistrer les dépassements de la limite élastique est différente. Une manière assez générale de définir différentes variables d'état mnésiques serait :

$$p''(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle f(\delta(\tau) - \delta_{lim}) \rangle \quad \text{ou bien} \quad p'''(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle g(\delta(\tau)) - g(\delta_{lim}) \rangle$$

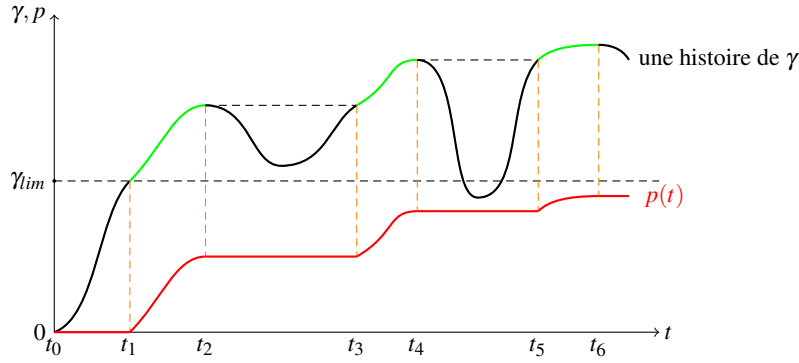
où  $f$  ou  $g$  sont des fonctions monotones croissantes quelconques.

Le choix de l'auteur,  $g : x \rightarrow \sqrt{3} \sqrt{x^{2/3} - 1}$ , qui est fait dans l'équation (4.2) [p. 33] est purement intuitif : il lui semble plus « naturel »<sup>(13)</sup> de considérer des variations de  $\gamma$  (c'est-à-dire des déplacements adimensionnés  $|u|/h$  où  $h$  est l'épaisseur constante d'une éprouvette dans un mouvement de glissement) que de considérer des variations de produits mixtes  $\delta$ . L'auteur est conscient de la faiblesse de l'argumentation de ce choix<sup>(14)</sup> et le lecteur a évidemment la liberté d'en faire d'autres !

L'évolution de la plastification  $p$  au cours du temps pour une certaine histoire de la déformation est illustrée par la courbe rouge de la figure 4.1 [p. 35].

<sup>(13)</sup> Le réarrangement des liaisons dans un monocristal (dislocation) est souvent illustré par un mouvement de glissement local parallèlement aux plans de glissement du réseau cristallin.

<sup>(14)</sup> De fait, l'auteur a initialement testé la construction d'un modèle de plasticité avec la définition de la variable mnésique  $p'(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle \delta(\tau) - \delta_{lim} \rangle$ . Le lecteur est invité à le faire, il constatera que ce choix donne des formules un peu plus compliquées que celles obtenues avec le choix fait dans l'équation (4.2) [p. 33]. Toutefois, changer la manière d'enregistrer les dépassements de limite élastique pour la seule raison de simplifier des formules n'est pas un argument scientifiquement acceptable pour justifier la construction d'un modèle ! Seule la confrontation avec l'expérience ou des considérations microphysiques sont susceptibles de justifier un tel choix.



(les zones vertes de l'histoire de  $\gamma$  sont celles pendant lesquelles la plastification progresse)

FIGURE 4.1 – Évolution de la plastification  $p$  pour une certaine histoire de  $\gamma$ .

- **Propriété 4.5** – La plastification  $p$  est une grandeur scalaire, objective et non négative.

**Démonstration** – Le supremum de valeurs non négatives est nécessairement non négatif. Quant à l'objectivité de la grandeur scalaire  $p$ , elle découle directement de l'objectivité de la distorsion stérique maximale  $\delta$ , qui a été démontrée en cinématique.

**Terminologies** – Lorsque le matériau est plastifié ( $p \neq 0$ ), certains auteurs disent que le matériau est « écroui ». Dans d'autres contextes, le mot « écrouissage » désigne la pente de la courbe  $\sigma^1_1 = f(\lambda_1)$  dans un essai de traction<sup>(15)</sup> au delà de la limite élastique.

- **Propriété 4.6** – Pour tout état, les variables d'état actuelles satisfont l'inégalité suivante :

$$\gamma - p \leq \gamma_{lim} \quad (\gamma \text{ est une fonction des variables d'état cinématiques ou est l'une d'entre elles}) \quad (4.5)$$

**Démonstration** – De la définition de la plastification  $p$  [éq. 4.4 p. 34] il vient :

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0, t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \geq \langle \gamma(t) - \gamma_{lim} \rangle \Rightarrow p - \gamma \geq \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle - \gamma \quad (\text{valeurs actuelles})$$

Deux cas peuvent se produire :

$$\begin{aligned} \text{si } \gamma > \gamma_{lim}, \quad \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle &= \gamma - \gamma_{lim} \Rightarrow p - \gamma \geq \gamma - \gamma_{lim} - \gamma \Rightarrow \gamma - p \leq \gamma_{lim} \\ \text{si } \gamma \leq \gamma_{lim}, \quad \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle &= 0 \Rightarrow p - \gamma \geq -\gamma \Rightarrow \gamma - p \leq \gamma \leq \gamma_{lim} \end{aligned}$$

La propriété 4.6 implique que dans le modèle de plasticité construit ici, tout point  $(T, I_1, \dots, I_m, p)$  de l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  n'est pas un état possible : la valeur actuelle du paramètre  $\gamma$  (fonction du tenseur de déformation actuel et donc des variables d'état cinématiques  $I_\bullet$ ) satisfait nécessairement l'inégalité (4.5). On pose donc la définition suivante :

- **Définition 4.7 – Espace des états admissibles.** On appelle espace des états admissibles, la région de l'espace des états dont les points satisfont l'inégalité :

$$f_\gamma(I_1, \dots, I_m) - p \leq \gamma_{lim}$$

Il existe donc dans l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  une hypersurface d'équation  $f_\gamma(I_1, \dots, I_m) - p = \gamma_{lim}$  qui délimite les états possibles.

<sup>(15)</sup> On rappelle que dans un essai de traction,  $\lambda_1$  est la plus grande dilatation linéique (dans la direction de la traction). On préfère souvent utiliser l'allongement relatif  $\varepsilon^V_1 = \lambda_1 - 1 \simeq \varepsilon^U_1 \sim \varepsilon^1_1$  (ces dernières approximations ne sont acceptables que dans un mouvement de traction, c'est-à-dire  $\mathbf{R} \simeq \mathbf{G}$  et le mouvement est une « quasi-translation » pour l'observateur utilisé !), ce qui ne change pas la pente de la courbe.

**Représentation des états admissibles dans l'espace des états** – La relation  $\gamma - p \leq \gamma_{im}$  dans l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  dépend des variables d'état cinématiques  $\{I_1, \dots, I_m\}$  qui ont été retenues pour le modèle :

- pour un modèle isotrope à trois variables d'état cinématiques  $\{B_I, B_{II}, B_{III}\}$ , la limite des états admissibles est représentée par une hypersurface dans l'espace des états  $\mathbb{R}^5$  (les cinq variables d'état sont  $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, p\}$ ) dont l'équation est :

$$\gamma_{im} = \sqrt{3} \left[ \underbrace{\left( \frac{\sqrt{3}}{9} B_I^{\frac{3}{2}} B_{III}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}}_{\delta} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} - p = \left[ \frac{B_I}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} - 3 \right]^{\frac{1}{2}} - p$$

l'équation de l'hypersurface est une relation entre les trois variables d'état  $B_I, B_{III}$  et  $p$  ;

- pour un modèle isotrope dont les variables d'état cinématiques retenues <sup>(16)</sup> sont seulement  $\{K_v, \gamma\}$ , la limite des états admissibles est l'hyperplan d'équation  $\gamma - p = \gamma_{im}$  dans l'espace des états  $\mathbb{R}^4$  ;
- pour les milieux anisotropes, l'équation de l'hypersurface limite dans l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  <sup>(17)</sup> est exactement la même que pour les milieux isotropes car le critère de limite élastique choisi dans le modèle construit ici ne fait pas intervenir les variables d'état scalaires d'anisotropie  $I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}^*$  et  $I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}^*$  [hyp. 4.2 p. 31].

### 4.3 Évolution de la variable d'état mnésique

De la définition de la plastification  $p$  [éq. (4.4) p. 34], on déduit sa dérivée particulière :

$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) = \gamma_{im} + p(t) & (\text{l'état est sur la frontière des états admissibles [prop. 4.6 p. 35]}) \\ 0 & \text{si } \gamma(t) < \gamma_{im} + p(t) & (\text{l'état est à l'intérieur des états admissibles [prop. 4.6 p. 35]}) \end{cases}$$

où la dérivée particulière  $\dot{\gamma}$  s'écrit sous la forme :

$$\dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \quad (4.6)$$

**Calcul de  $\mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D}$**  – La définition du paramètre cinématique  $\gamma$  est [éq. (4.2) p. 33] :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} = \sqrt{3} \sqrt{\left( \frac{\sqrt{3}}{9} B_I^{\frac{3}{2}} B_{III}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} - 1} = \sqrt{\frac{B_I}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} - 3}$$

Sa dérivée particulière est <sup>(18)</sup> :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \partial_{B_I} \gamma \dot{B}_I + \partial_{B_{III}} \gamma \dot{B}_{III} = \partial_{B_I} \gamma (2\mathbf{B} : \mathbf{D}) + \partial_{B_{III}} \gamma (2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D}) \quad [\text{éq. (1.6) et éq. (1.8) p. 16}] \\ &= \dots = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{\frac{2}{3}}} - \frac{(\gamma^2 + 3)\mathbf{G}}{3} \right) : \mathbf{D} \end{aligned}$$

On en déduit que le tenseur  $\mathbf{S}_\gamma$  en fonction des variables d'état cinématiques est :

$$\mathbf{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{\frac{2}{3}}} - \frac{(\gamma^2 + 3)\mathbf{G}}{3} \right) = \underbrace{\frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{\frac{2}{3}}} - \mathbf{G} \right)}_{\mathbf{T}_\gamma} - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \quad (4.7)$$

<sup>(16)</sup> La réduction du nombre de variables d'état cinématiques a déjà été utilisée (et argumentée par l'unicité de la décomposition de toute déformation en déformation sphérique et isovolume) dans la construction d'un modèle élastique isotrope. Voir la section 3.2 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(17)</sup> La valeur de  $m$  dépend du nombre de directions d'anisotropie retenues pour ce modèle.

<sup>(18)</sup> On laisse le soin au lecteur de vérifier ce petit calcul algébrique.

- **Propriété 4.8** – Le tenseur  $\mathbf{S}_\gamma$  est symétrique et de trace nulle (un déviateur).

**Démonstration** – La symétrie de  $\mathbf{S}_\gamma$  est évidente [éq. (4.7) p. 36].

$$\text{tr}\mathbf{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{B_I}{K_v^{2/3}} - (\gamma^2 + 3) \right) \quad (\text{on rappelle que } \text{tr}\mathbf{G} = 3)$$

$$\text{or : } \gamma^2 + 3 = 3(\delta^{2/3} - 1) + 3 = 3\delta^{2/3} = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{K_v} \right)^{2/3} = \frac{B_I}{K_v^{2/3}}$$

La trace de  $\mathbf{S}_\gamma$  est donc nulle.

- **Propriété 4.9** – Si, lors d'une évolution, la déformation tend vers une déformation sphérique ( $\mathbf{B} \rightarrow K_v^{2/3} \mathbf{G} \Leftrightarrow \gamma \rightarrow 0$ ), alors la limite du tenseur  $\mathbf{S}_\gamma = \mathbf{T}_\gamma - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{2/3}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G}$  est le tenseur de trace nulle :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{S}_\gamma = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G})$$

où  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V$  est la limite du tenseur propre de  $\mathbf{B}$  associé à la plus grande dilatation linéique.

La valeur limite du tenseur  $\mathbf{S}_\gamma$  (ou du tenseur  $\mathbf{T}_\gamma$ ) dépend donc de la manière dont le tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  tend vers un tenseur sphérique.

**Démonstration** – Si la déformation en une particule tend vers une déformation sphérique (c'est-à-dire  $\mathbf{B} \rightarrow K_v^{2/3} \mathbf{G} \Leftrightarrow \gamma \rightarrow 0$ ), la limite du tenseur  $\mathbf{T}_\gamma$  est une forme indéterminée  $\mathbf{0}/0$ . La démonstration détaillée de la levée de cette forme indéterminée est donnée en annexe A [p. 85].

**Rappels d'algèbre tensorielle** – On rappelle que les tenseurs propres d'un tenseur symétrique du second ordre sont les tenseurs uniaxiaux unitaires représentant les directions propres non orientées. Comme pour tout tenseur symétrique, le tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{E}_i^V = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{e}_i^V \otimes \mathbf{e}_i^V$$

où les  $\{\mathbf{e}_i^V\}$  sont un triplet de vecteurs propres unitaires orthonormés (on rappelle que tous les tenseurs de déformation objectifs ont les mêmes directions propres). L'expression tensorielle de la première direction propre de  $\mathbf{B}$  (celle associée à  $\lambda_1^2$ ) est <sup>(19)</sup> :

$$\mathbf{E}_1^V = \frac{\mathbf{B}^2 - (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \mathbf{B} + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \mathbf{G}}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}$$

Finalement,

$$\mathbf{S}_\gamma = \begin{cases} \text{si } \gamma > 0, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{2/3}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \quad (\text{déformation non sphérique}) \\ \text{si } \gamma = 0, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \quad (\text{déformation sphérique}) \end{cases} \quad (4.8)$$

**Remarque importante pour une implémentation numérique** – La propriété 4.9 s'avère très utile pour une implémentation numérique de ce modèle de plasticité, car l'expression du tenseur  $\mathbf{S}_\gamma$  qui a été donnée dans l'équation (4.7) [p. 36], devient une forme indéterminée  $\mathbf{0}/0$  s'il arrive que la déformation en une particule tende vers une déformation sphérique ( $\mathbf{B} \rightarrow K_v^{2/3} \mathbf{G}$  et  $\gamma \rightarrow 0$ ). Si lors d'un calcul la valeur de la variable d'état cinématique  $\gamma$  en une particule s'approche de 0, il faut remplacer l'expression de  $\mathbf{T}_\gamma$  par sa limite. Des détails d'implémentation numérique sont donnés à la fin de l'annexe A [p. 85].

<sup>(19)</sup> L'expression des tenseurs propres d'un tenseur du second ordre symétrique est donnée dans l'annexe A.7 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]

La dérivée particulière de la variable d'état mnésique  $p$  s'écrit donc :

$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle = \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle & \text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \quad (\text{l'état est sur la frontière de l'espace des états admissibles}) \\ 0 & \text{si } \gamma < \gamma_{lim} + p \quad (\text{l'état est à l'intérieur de l'espace des états admissibles}) \end{cases}$$

soit encore de manière plus concise :

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{H}(x)$  est la fonction de Heaviside (ou fonction échelon) définie par :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Définition 4.10 – Loi d'évolution.** La dérivée particulière de la variable mnésique  $p$  est traditionnellement appelée *loi d'évolution* de la variable d'état mnésique  $p$  :

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle \quad [\text{éq. (4.9) p. 38}]$$

- **Propriété 4.11 –** Dans toute évolution de ce modèle, la plastification  $p$  ne peut que rester constante ou augmenter :  $\dot{p} \geq 0$

**Démonstration –** La loi d'évolution (4.9) montre que la dérivée particulière  $\dot{p}$  est le produit de deux termes non négatifs. Elle est donc non négative.

#### 4.4 Conséquences de la non négativité de la dissipation intrinsèque

On peut maintenant détailler la dissipation intrinsèque d'un milieu inélastique à une variable mnésique qui a été donnée dans l'équation (3.3) [p. 28], où la variable mnésique générique  $\alpha$  est remplacée par la plastification  $p$  :

$$\Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle}_{g(T, I_1, \dots, I_m, p, \mathbf{D})} \quad (4.10)$$

$\dot{p}$  [éq. (4.9) p. 38]

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad [\text{éq. (3.2) p. 28}] \quad (\text{rappel : } \psi^m = \bar{f}_\psi(T, \{I_\bullet\}, p)) \quad (4.11)$$

##### 4.4.1 Relation de Helmholtz

La dissipation intrinsèque doit être non négative dans toute évolution :

$$\forall \dot{T} \quad \forall \mathbf{D}, \quad -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + g(\underbrace{T, I_1, \dots, I_m, p}_{\text{état actuel}}, \mathbf{D}) \geq 0 \quad [\text{éq. (4.10)}] \quad (4.12)$$

La fonction d'état  $\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$  ne pouvant être fonction de  $\dot{T}$ , elle est nécessairement nulle. La masse volumique  $\rho$  étant non nulle, on en déduit de nouveau la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \quad (4.13)$$

**Remarque** – La relation de Helmholtz établie dans ce modèle de comportement est formellement identique à celle établie dans la construction des fluides simples <sup>(20)</sup>, en élasticité <sup>(21)</sup> et en inélasticité sans variables mnésiques [ch. 2 p. 21]. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que la liste des variables d'état et l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état sont complètement différentes dans chacun de ces modèles de comportement.

#### 4.4.2 Loi de comportement mécanique

Compte tenu de la relation de Helmholtz, la dissipation intrinsèque [éq. (4.10) p. 38] est :

$$\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_p \bar{f}_\psi \underbrace{\mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p)}_{\dot{p}} \langle \dot{\gamma} \rangle \geq 0 \quad (4.14)$$

$$\text{où } \dot{\gamma} = \mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (4.6) p. 36}] \quad (4.15)$$

On est donc en présence de deux expressions de la dissipation intrinsèque selon le type d'évolution suivi par une particule : soit la variable mnésique  $p$  évolue ( $\dot{p} \neq 0$ ), soit elle n'évolue pas ( $\dot{p} = 0$ ).

- **Définition 4.12 – Évolution plastifiante (écrouissage).** On appelle évolution plastifiante (ou écrouissage) une évolution au cours de laquelle la plastification stérique évolue ( $\dot{p} \neq 0$ ).
- **Théorème 4.13 – Caractérisation d'une évolution plastifiante.** Une évolution est plastifiante si et seulement si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

$\dot{p} > 0$  (la plastification augmente)

**et**  $\gamma = p + \gamma_{lim}$  (l'état actuel est sur la frontière de l'espace des états admissibles [déf. 4.7 p. 35])

**et**  $\dot{\gamma} = \mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} > 0$  (le mouvement est tel que le paramètre  $\gamma$  augmente)

**Démonstration** – La propriété 4.11 [p. 38] implique que :  $\dot{p} \neq 0 \Rightarrow \dot{p} > 0$ .

L'expression de la dérivée particulière  $\dot{p}$  a été établie en éq. (4.9) [p. 38] :

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle$$

Cette dérivée particulière ne peut être différente de 0 que si chacun des termes non négatifs du produit est strictement positif.

Le terme  $\mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p)$  n'est positif que si  $\gamma = \gamma_{lim} + p$  (car  $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$  [prop. 4.6 p. 35]).

Le terme  $\langle \mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle$  n'est strictement positif que si  $\mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} > 0$ .

Une évolution ne peut être plastifiante que si ces trois conditions nécessaires sont remplies. Il est facile de vérifier qu'elles sont suffisantes.

- **Définition 4.14 – Évolution non plastifiante.** On appelle évolution non plastifiante (ou encore sans écrouissage) une évolution telle que  $\dot{p} = 0$ .
- **Théorème 4.15 – Caractérisation d'une évolution non plastifiante.** Une évolution est non plastifiante si elle satisfait l'une des conditions suivantes :

$\gamma < \gamma_{lim} + p$  (l'état actuel est à l'intérieur de l'espace des états admissibles)

**ou**  $\dot{\gamma} = \mathcal{S}_\gamma : \mathbf{D} \leq 0$  (le paramètre  $\gamma$  diminue)

<sup>(20)</sup> Voir le cours *Équations générales des milieux continus* [note 3 p. 3].

<sup>(21)</sup> Voir le cours *Comportement élastique* [note 4 p. 3].



**Démonstration** – On déduit de la caractérisation 4.13 que le contraire logique d'une évolution plastifiante est :

$$\dot{p} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma \neq \gamma_{lim} + p \quad \text{ou} \quad \dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \leq 0$$

cas 1 : si  $\dot{p} \leq 0$ , on sait de la propriété 4.11 [p. 38] que  $\dot{p} \geq 0$ . On a donc  $\dot{p} = 0$ . Il s'agit bien d'une évolution non plastifiante.

cas 2 : si  $\gamma \neq \gamma_{lim} + p$ , on sait de la propriété 4.6 [p. 35] que  $\gamma < \gamma_{lim} + p$ .

On a donc  $\mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0$ .

cas 3 : si  $\dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \leq 0$  alors  $\langle \dot{\gamma} \rangle = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0$ .

En résumé, une évolution est non plastifiante ( $\dot{p} = 0$ ) dans les cas suivants :

soit  $\gamma < \gamma_{lim} + p$  (l'état est à l'intérieur de l'espace des états admissibles)

soit  $\dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \leq 0$  (l'état peut être sur la frontière de l'espace des états admissibles mais  $\gamma$  diminue)

**Remarques** – Les deux caractérisations précédentes montrent que l'évolution de la plastification  $p$  d'une particule dépend à la fois de la position actuelle de l'état par rapport à la frontière de l'espace des états admissibles (comparaison entre  $\gamma$  et  $\gamma_{lim} + p$ ) et du mouvement actuel (signe de  $\dot{\gamma}$ ).

En particulier, si un mouvement est tel que le tenseur des taux de déformation en une particule est actuellement sphérique ( $\text{dev} \mathbf{D} = \mathbf{0}$ ), alors quelle que soit la position de l'état actuel de la particule dans l'espace des états ( $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$ , c'est-à-dire sur la frontière des états admissibles ou à l'intérieur), l'évolution de la particule n'est pas plastifiante car  $\dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} = 0$  (car  $\mathbf{S}_\gamma$  est un déviateur [prop. 4.8 p. 37] et  $\mathbf{D}$  est sphérique, leur produit scalaire est donc nul). On a donc  $\dot{p} = 0$ .

Selon que l'évolution est plastifiante ou non, on est amené à considérer deux expressions de la dissipation intrinsèque :

**Lors d'une évolution plastifiante** : Compte tenu de la caractérisation 4.13 [p. 39], dans une évolution plastifiante, la plastification évolue comme suit :

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \dot{\gamma} \rangle = \dot{\gamma} = \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} > 0$$

La dissipation intrinsèque (4.14) [p. 39] s'écrit alors :

$$\forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} - \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (4.16)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  et  $\rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma$  sont des *fonctions d'état*. [éq. (4.11) p. 38 et éq. (4.6) p. 36]

L'inégalité (4.16) implique l'existence d'une fonction  $\mathbf{g}$  telle que :

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} - \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad \text{avec la condition} \quad \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$$

où les arguments supplémentaires éventuels de la fonction  $\mathbf{g}$  peuvent être tout ou partie des variables d'état. La fonction  $\mathbf{g}$  doit être choisie telle que  $\forall \mathbf{D}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$  afin que le modèle soit thermodynamiquement admissible. Ainsi, *dans une évolution plastifiante*, la loi de comportement mécanique est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma + \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad \text{où} \quad \forall \mathbf{D}, \quad \Phi_{int} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (4.17)$$

**Remarque** – Il est donc tout à fait possible de construire un modèle de plasticité pour lequel la dissipation intrinsèque est nulle lors d'une évolution plastifiante [déf. 4.12 p. 39] en choisissant  $\mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) = \mathbf{0}$ , ou au contraire non nulle en choisissant par exemple  $\mathbf{g} = \mu_p(\mathbf{D}, \text{état}) \text{dev} \mathbf{D}$  ou bien  $\mathbf{g} = \mu_p(\mathbf{D}, \text{état}) \mathbf{D}$ , où  $\mu_p(\mathbf{D}, \text{état})$  serait une « viscosité plastique » non négative. La nullité ou non de la fonction dissipative  $\mathbf{g}$  ne peut se justifier qu'expérimentalement.

**Vocabulaire rencontré dans la littérature** – Dans une évolution plastifiante isotherme isovolume *finie* (c'est-à-dire entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ ), certains auteurs nomment « énergie bloquée » le *travail* (en  $J$ ) dépensé pour faire progresser la plastification  $p$ . Si l'évolution plastifiante est dissipative ( $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ ), le travail fourni est plus grand. La différence entre ces deux travaux est parfois nommée « énergie dissipée » pendant l'évolution plastifiante.

Lorsque les conditions expérimentales sont telles que l'état de l'éprouvette est uniforme dans la zone utile de l'éprouvette, on exprime parfois ces travaux en  $J.kg^{-1}$  ou en  $J.m^{-3}$  actuel (voire en Joules par  $m^3$  initial <sup>(22)</sup>).

Dans la littérature spécialisée, il n'est pas rare de constater un certain flou sur l'utilisation du mot « dissipation » : tantôt il désigne la dissipation définie dans ce cours, c'est-à-dire une puissance calorifique volumique locale actuelle en  $W.m^{-3}$ , tantôt il désigne une énergie ( $J$ ), une énergie volumique ( $J.m^{-3}$ ) ou une énergie massique ( $J.kg^{-1}$ ), qui est parfois une chaleur, parfois une « énergie bloquée » !

**Lors d'une évolution non plastifiante :** la dissipation intrinsèque (4.14) [p. 39] se réduit à :

$$\forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (4.18)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathcal{S}_j \text{ est une fonction d'état. [éq. (4.11) p. 38]}$$

L'inégalité 4.18 implique l'existence d'une fonction  $\mathbf{f}$  telle que :

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \quad \text{où } \forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$$

où les arguments supplémentaires éventuels de la fonction  $\mathbf{f}$  peuvent être tout ou partie des variables d'état. La fonction  $\mathbf{f}$  doit être choisie telle que  $\forall \mathbf{D}, \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$  afin que le modèle soit thermodynamiquement admissible. Ainsi, lors d'une évolution non plastifiante la loi de comportement mécanique de ce modèle est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \quad \text{avec la condition } \forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0 \quad (4.19)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathcal{S}_j \quad [\text{éq. (4.11) p. 38}]$$

**Remarques** – Il est possible de choisir  $\mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) = \mathbf{0}$  ou au contraire non nulle en choisissant par exemple  $\mathbf{f} = \mu_{np}(\mathbf{D}, \text{état}) \mathbf{dev} \mathbf{D}$  ou bien  $\mathbf{f} = \mu_{np}(\mathbf{D}, \text{état}) \mathbf{D}$ , où  $\mu_{np}(\mathbf{D}, \text{état})$  serait une « viscosité non plastique » non négative. La nullité ou non de la fonction dissipative  $\mathbf{f}$  dans les évolutions non plastifiantes ne peut se justifier qu'expérimentalement.

Par ailleurs, le lecteur aura remarqué que la loi de comportement mécanique dans une évolution non plastifiante [éq. (4.19) p. 41] ressemble à celle trouvée en inélasticité sans variable mnésique [éq. (2.8) p. 23], à la différence près qu'ici l'énergie libre massique est non seulement fonction de la température  $T$  et des variables d'état cinématiques  $\{I_1, \dots, I_m\}$  mais aussi de la variable d'état mnésique  $p$ . Le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  est donc *a priori* différent pour chaque valeur de la plastification actuelle  $p$ .

Enfin, pendant une évolution non plastifiante ( $\dot{p} = 0$ ) et non dissipative ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ), on dit parfois que le comportement est « élastique ». À strictement parler, cette affirmation est incorrecte car si le

<sup>(22)</sup> On rappelle qu'un essai de traction n'est pas isovolume *a priori* et que l'on n'y contrôle pas les dilatations linéiques transversales. Dans un essai de traction, une partie du travail fourni entre  $t_1$  et  $t_2$  sert à la variation de la dilatation volumique  $K_v$ . Seuls un essai de glissement ou de torsion d'un tube mince approchent correctement un mouvement isovolume uniforme dans l'éprouvette.

tenseur des contraintes est bien une fonction d'état et si la dissipation est bien nulle pendant une telle évolution, la présence de la variable d'état mnésique  $p$  viole l'une des règles de la définition de l'élasticité [déf. 1.5 p. 16]. La fonction d'état  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  est non seulement fonction de la température et des variables d'état cinématiques, mais aussi de la plastification actuelle  $p$ .

#### 4.4.3 Continuité des contraintes dans l'espace des états admissibles

La non négativité de la dissipation intrinsèque conduit à deux expressions de la loi de comportement mécanique selon le type d'évolution :

$$\text{évolution plastifiante } (\gamma = \gamma_{lim} + p \text{ et } \dot{\gamma} > 0) : \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma + \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad (4.20)$$

$$\text{évolution non plastifiante } (\gamma < \gamma_{lim} + p \text{ ou } \dot{\gamma} \leq 0) : \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \quad (4.21)$$

Pour tout état situé sur la frontière des états admissibles ( $\gamma = \gamma_{lim} + p$ ), le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  doit être le même quelle que soit la direction de la vitesse d'évolution à partir de cet état : soit une évolution restant sur la frontière de l'espace des états admissibles, soit une évolution quittant cette frontière vers l'intérieur de l'espace des états admissibles. On en déduit les deux conditions nécessaires suivantes :

$$\left[ \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} + \left[ \rho \partial_p \bar{f}_\psi \mathbf{S}_\gamma \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = \left[ \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} \quad \Rightarrow \quad \left[ \partial_p \bar{f}_\psi \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$$

et  $\left[ \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$

On énonce donc les deux conditions suivantes :

- **Condition 4.16 – Condition sur l'énergie libre massique de Helmholtz.** Pour un état actuel situé sur la frontière de l'espace des états admissibles, ( $\gamma = \gamma_{lim} + p$ ), la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz doit satisfaire la condition :

$$\forall p, \quad \left[ \partial_p \bar{f}_\psi \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0 \quad (4.22)$$

**Exemples** – Pour un modèle de comportement dont les variables d'état cinématiques retenues sont  $\{K_v, \gamma\}$ <sup>(23)</sup>, la condition sur  $\bar{f}_\psi$  est simple à écrire car  $\gamma$  est une variable d'état :

$$\forall T \forall K_v \forall p, \quad (\partial_p \bar{f}_\psi)(T, K_v, \underbrace{\gamma_{lim} + p, p}_\gamma) = 0$$

Pour un modèle tel que  $\gamma$  n'est pas une variable d'état cinématique (par exemple si la liste des variables d'état cinématiques est  $\{K_v, \delta\}$  ou  $\{B_I, B_{II}, B_{III}\}$ ), la condition exprimant que l'état actuel est sur la frontière des états admissibles est un peu plus lourde à écrire : il faut écrire l'expression des variables d'état en fonction de  $\gamma$  puis remplacer  $\gamma$  par  $\gamma_{lim} + p$ .

- **Condition 4.17 – Condition sur les fonctions dissipatives.** Les deux fonctions dissipatives tensorielles  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  doivent satisfaire la condition de continuité des contraintes :

$$\forall \mathbf{D}, \quad \left[ \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad (4.23)$$

ainsi que la condition de non négativité de la dissipation intrinsèque :

$$\forall \mathbf{D}, \quad \mathbf{g} : \mathbf{D} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{f} : \mathbf{D} \geq 0$$

<sup>(23)</sup> C'est le cas du modèle construit dans le chapitre suivant.

- **Définition 4.18 – Contrainte dissipative.** On appelle contrainte dissipative, notée  $\sigma_d$  la fonction tensorielle qui s'ajoute à la fonction d'état  $\sigma_{ref}^{(p)}$  pour obtenir le tenseur des contraintes actuelles :

$$\sigma_d = \sigma - \sigma_{ref}^{(p)} = \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{D}, T, \{\mathbf{I}_\bullet\}, p) & \text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ et } \dot{\gamma} > 0 \quad (\text{évolution plastifiante}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{D}, T, \{\mathbf{I}_\bullet\}, p) & \text{si } \gamma < \gamma_{lim} + p \text{ ou } \dot{\gamma} \leq 0 \quad (\text{évolution non plastifiante}) \end{cases}$$

**Remarque** – Par analogie avec la pression thermodynamique qui a été définie dans les fluides <sup>(24)</sup>, la fonction d'état  $\sigma_{ref}^{(p)}$  pourrait être appelée « contrainte thermodynamique ».

Pour terminer complètement la définition du modèle de comportement, il faut donner une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m, p)$  satisfaisant à la condition de continuité des contraintes [éq. (4.22) p. 42] et donner l'expression des contraintes dissipatives  $\sigma_d(\mathbf{D}, \dot{T}, \dots)$ . Ces choix devraient être motivés par des constatations expérimentales (éventuellement idéalisées).

#### 4.4.4 Vitesses d'évolution thermodynamique possibles à partir d'un état

On rappelle que la vitesse d'évolution thermodynamique est le vecteur de l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  dont les composantes sont les dérivées particulières des variables d'état :  $\{\dot{T}, \{\dot{\mathbf{I}}_\bullet\}, \dot{p}\}$  où les  $\mathbf{I}_\bullet$  sont les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle.

La vitesse d'évolution thermodynamique à partir d'un point de l'espace des états admissibles ne peut être quelconque. En effet, la loi d'évolution

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{lim} - p) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad [\text{éq. (4.9) p. 38}]$$

montre que les dérivées particulières  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{p}$  ne peuvent prendre indépendamment une valeur quelconque, suivant la position de l'état dans l'espace des états :

- pour les états situés sur la frontière de l'espace des états admissibles ( $\gamma = \gamma_{lim} + p$ ), on a une relation entre les dérivées particulières  $\dot{p}$  et  $\dot{\gamma}$  :  $\dot{p} = \langle \dot{\gamma} \rangle$ .

$$\text{si } \dot{\gamma} < 0 \text{ alors } \dot{p} = 0, \quad \text{si } \dot{\gamma} \geq 0 \text{ alors } \dot{p} = \dot{\gamma}$$

- pour les états situés à l'intérieur de l'espace des états admissibles ( $\gamma < \gamma_{lim} + p$ ),  $\dot{\gamma}$  peut être quelconque mais  $\dot{p} = 0$ .

Bien que les grandeurs  $\gamma$  (fonction de la déformation actuelle) et  $p$  (fonction de l'histoire de la déformation) puissent prendre indépendamment des valeurs arbitraires dans l'espace des états admissibles, les composantes d'un vecteur vitesse d'évolution thermodynamique à partir de cet état ne sont pas indépendantes. Autrement dit, à partir d'un point de l'espace des états, toutes les directions de la vitesse d'évolution autour d'un état ne sont pas possibles.

## 4.5 En bref...

Le modèle de plasticité proposé dans ce chapitre a pour objectif de modéliser le comportement de matériaux isotropes ou non, au delà de leur limite élastique de plastification. La construction de ce modèle simple à une seule variable mnésique scalaire repose sur les trois hypothèses suivantes :

<sup>(24)</sup> Voir la section 6.2.2 du cours *Équations générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

1. La limite élastique (déclenchement de la plastification) est définie par une distorsion stérique maximale limite  $\delta_{lim}$  [hyp. 4.2 p. 31], qui a été reformulée (intuitivement) en utilisant le paramètre  $\gamma$  [hyp. 4.4 p. 34] ;

**Rappel** – Ce critère cherche à refléter macroscopiquement le déclenchement des réarrangements de liaisons microscopiques par la limitation de la diminution de l'angle solide de tout triplet de directions matérielles initialement orthogonales<sup>(25)</sup> (ou par la limitation de l'intensité  $|\gamma|$  d'un glissement conduisant à la même distorsion stérique).

2. La limite élastique  $\gamma_{lim}$  est invariante avec la température [hyp. 4.3 p. 32] ;
3. La valeur actuelle de la variable d'état mnésique  $p(t)$  est le plus grand dépassement de la limite élastique  $\gamma_{lim}$  qui a eu lieu depuis l'instant de référence  $t_0$  [hyp. 4.4 p. 34].

**Variantes possibles** – Tout en restant dans les modèles à une seule variable mnésique scalaire, on peut construire d'autres modèles de plasticité en changeant le critère macroscopique de déclenchement des réarrangements de liaison (critère de plastification, [hyp. 4.2 p. 31]) et/ou en changeant la manière dont la variable mnésique enregistre l'histoire des déformations [hyp. 4.4 p. 34] et/ou en supprimant l'hypothèse 4.3 [p. 32]. L'objectif de ce chapitre était de mettre en évidence une démarche en éliminant les complexités non pédagogiques.

Dans les modèles construits dans ce chapitre,

1. il existe un *espace des états admissibles*, qui est une région de l'espace des états délimitée par une hypersurface d'équation  $f_\gamma(I_1, \dots, I_m) - p \leq \gamma_{lim}$  où la limite élastique  $\gamma_{lim}$  est une caractéristique du matériau ;
2. la loi de comportement mécanique dans toute évolution (plastifiante ou non) est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad (\text{fonction d'état}) \quad (4.24)$$

3. la continuité de la fonction d'état  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  pour les états situés sur la frontière des états admissibles ( $\gamma - p = \gamma_{lim}$ ) implique une condition que doit satisfaire l'énergie libre massique de Helmholtz :

$$\left[ \partial_p \bar{f}_\psi \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0 \quad (4.25)$$

4. la contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d$  peut être différente suivant le type d'évolution :

$$\text{en évolution plastifiante :} \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$$

$$\text{en évolution non plastifiante :} \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots)$$

avec la condition de continuité des contraintes dissipatives à la frontière des états admissibles :

$$\left[ \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$$

Les deux fonctions dissipatives  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  doivent être choisies telles que la dissipation intrinsèque soit non négative dans toute évolution :

$$\forall \dot{\mathbf{T}} \forall \mathbf{D}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$$

De plus, pour garantir l'universalité de la définition des contraintes dissipatives, les fonctions dissipatives  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  doivent être des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels.

<sup>(25)</sup> Voir la section 4.7 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

**Plasticité sans limite élastique** – On peut aisément construire un modèle de comportement qui plastifie dès que la déformation présente la moindre distorsion stérique maximale : il suffit de poser  $\gamma_{im} = 0$  ou très faible. Un tel modèle pourrait approcher le comportement de certains matériaux pâteux comme la plasticine.

Par ailleurs, la suppression du seuil de limite élastique présente des avantages en supprimant la discussion introduite précédemment (évolution plastifiante ou non). Toutes les évolutions seraient plastifiantes. On peut envisager un modèle de comportement en choisissant une plastification  $p$  telle que la vitesse de plastification  $\dot{p}$  soit d'abord très faible au point d'être indétectable expérimentalement pour des faibles distorsions, puis deviendrait notable pour des distorsions stériques maximales  $\delta$  (ou des  $\gamma$ ) plus importantes en modifiant la manière dont la variable mnésique  $p$  enregistre les dépassements de la limite élastique (modification de l'hypothèse 4.4 [p. 34]). La loi d'évolution serait alors plus douce, la fonction échelon  $\mathcal{H}(\gamma - \gamma_{im} + p)$  se trouvant remplacée par une fonction régulière. Hormis d'évidents avantages numériques dans les simulations, un tel modèle peut se justifier par des considérations microphysiques : dans des simulations numériques d'assemblages d'atomes polycristallins, on peut observer que les premiers réarrangements de liaisons se produisent très tôt dans les joints de grains avant de produire des dislocations dans les grains. La continuité entre ces deux phases de réarrangements pourrait conduire à des modélisations phénoménologiquement plus raisonnables et numériquement plus commodes que les idéalizations à seuil de limite élastique proposées classiquement dans les modèles de plasticité.

« **Décomposition** »  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$  – Bon nombre de publications ayant pour objectif d'envisager la plasticité sans hypothèse sur l'amplitude des déformations (« grandes déformations ») ni sur le mouvement proposent une « décomposition » du gradient lagrangien des positions actuelles  $\mathbf{F}$  (non objectif<sup>(26)</sup>) le plus souvent sous la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$  dans laquelle  $\mathbf{F}_e$  serait un « gradient de transformation élastique » et  $\mathbf{F}_p$  serait un « gradient de transformation plastique ». Une telle « décomposition » ne peut pas avoir de sens physique pour les raisons suivantes :

1. Cette « décomposition » n'est pas unique. On peut toujours poser :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p = \underbrace{\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{T}}_{\mathbf{F}'_e} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}_p}_{\mathbf{F}''_p} \quad \text{où } \mathbf{T} \text{ est un tenseur du second ordre inversible quelconque.}$$

La « décomposition »  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'_e \cdot \mathbf{F}''_p$  serait tout aussi lisible. Comment choisir une décomposition particulière parmi cette infinité de décompositions ? Il semble difficile de donner un sens physique à ces « décompositions » du gradient de la transformation.

2. Cette « décomposition » n'est pas commutative :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{x}_0$$

Pour quelle raison devrait-on appliquer en premier la « transformation plastique » à la direction matérielle identifiée par sa direction de référence  $d\mathbf{x}_0$ <sup>(27)</sup> avant d'appliquer la « transformation élastique » au résultat plutôt que l'inverse ? Là encore, il semble difficile de donner un sens physique à ces « décompositions » non uniques du gradient de la transformation.

Par ailleurs, à supposer que l'on puisse trouver une raison pour choisir une décomposition parmi cette infinité de décompositions possibles<sup>(28)</sup>, la variable d'état mnésique  $\mathbf{F}_p$  serait un tenseur du second ordre non symétrique<sup>(29)</sup> et non objectif dont il faudrait donner l'évolution  $\dot{\mathbf{F}}_p$  en précisant

<sup>(26)</sup> Voir la définition du tenseur  $\mathbf{F}$  dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

<sup>(27)</sup> Pour se conformer aux écritures couramment rencontrées dans les textes traitant de déformations finies, une direction matérielle est exceptionnellement désignée ici par un vecteur non unitaire.

<sup>(28)</sup> Tous les observateurs devraient choisir la même décomposition en raison de cet hypothétique motivation qui la rendrait unique, sinon chaque observateur construirait sa propre loi de comportement pour le même matériau !

<sup>(29)</sup> Ce qui introduirait 9 variables mnésiques scalaires non objectives car le tenseur du second ordre non symétrique et non objectif  $\mathbf{F}_p$  est un couple constitué de deux variables d'état indépendantes : un tenseur symétrique et un vecteur :  $\mathbf{F}_p = \mathbf{sym}\mathbf{F}_p + \mathbf{asym}\mathbf{F}_p$  (ou bien  $\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{R}_p$ ) où  $\mathbf{asym}\mathbf{F}_p$  (ou  $\mathbf{R}_p$ ) est isomorphe à un vecteur. Aux 4 invariants propres du tenseur symétrique et du vecteur, il faut ajouter les 5 invariants croisés reflétant les orientations relatives entre  $\mathbf{sym}\mathbf{F}_p$  (ou  $\mathbf{U}_p$  ou  $\mathbf{V}_p$ ) et  $\mathbf{sym}\mathbf{F}_e$  et entre  $\mathbf{asym}\mathbf{F}_p$  (ou  $\mathbf{R}_p$ ) et  $\mathbf{sym}\mathbf{F}_e$ .

comment évoluent ses invariants propres et son orientation. Dans les quelques textes que l'auteur a pu lire, l'évolution de la variable mnésique tensorielle  $\mathbf{F}_p$  fait appel à des hypothèses cinématiques simplificatrices difficilement justifiables<sup>(30)</sup>.

Pour toutes ces raisons, il semble à l'auteur que tout développement sur la plasticité reposant sur des définitions et des hypothèses simplificatrices aussi caduques devrait être considéré avec toute la circonspection qui s'impose.

La fonction énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m, p)$  peut être choisie arbitrairement sous la seule condition de satisfaire la condition de continuité des contraintes qui a été donnée dans l'équation (4.25) [p. 44]. Quel que soit ce choix, le modèle de comportement est garanti thermodynamiquement admissible. Il existe une infinité de fonctions  $\bar{f}_\psi$  satisfaisant cette condition. Afin d'éviter de construire des lois de comportement mécanique exotiques<sup>(31)</sup>, il est souhaitable de construire la fonction  $\bar{f}_\psi$  à partir d'expériences. Le chapitre suivant donne un exemple de construction de  $\bar{f}_\psi$  physiquement justifié.

<sup>(30)</sup> En fait, elles semblent souvent n'être posées que pour des raisons calculatoires.

<sup>(31)</sup> Comme certaines expressions d'énergie libre de Helmholtz qui ont été proposées au siècle dernier en élasticité.

# Construction d'une énergie libre massique isotrope en plasticité

Le chapitre précédent montre que la détermination complète d'un modèle de comportement plastique à une seule variable mnésique  $p$  se ramène à la construction d'une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction de la température, des variables d'état cinématiques et de la variable d'état mnésique  $p$  définie au chapitre précédent, satisfaisant à la condition de continuité des contraintes à la frontière des états admissibles, ainsi qu'au choix de deux fonctions dissipatives tensorielles  $\mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots)$  et  $\mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$ , éventuellement nulles, telles que dans toute évolution possible on ait  $\mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$  et  $\mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$ .

Suivant le type d'évolution (plastifiante ou non) la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \quad (\text{en évol. non plastifiante}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad (\text{en évol. plastifiante})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  est une fonction d'état calculée à partir de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m, p)$  de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad (\text{les } I_j \text{ sont les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle})$$

et où les tenseurs  $\mathbf{S}_j$  sont des tenseurs symétriques dont l'expression en fonction du tenseur de déformation et des directions d'anisotropie est connue ( $\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D}$ ).

Pour construire une fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz  $\bar{f}_\psi$  physiquement sensée, il suffit de l'identifier avec des expériences dans lesquelles les mesures de contrainte sont relevées à vitesse de déformation nulle ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ), ce qui élimine les contraintes dissipatives, et à température contrôlée uniforme dans la zone utile de l'éprouvette (il faut donc attendre l'uniformisation des températures avant de relever les mesures). La détermination des éventuelles contraintes dissipatives se fera ultérieurement avec des mesures à vitesse de déformation contrôlée et comparaison avec les mesures à vitesse de déformation nulle. Dans ce chapitre on montre que l'identification de la fonction d'état  $\bar{f}_\psi$  se ramène à un petit nombre d'expériences.

## 5.1 Variables d'état du modèle

- **Hypothèse 5.1 – Variables d'état cinématiques.** Dans ce modèle de plasticité, les variables d'état cinématiques scalaires sont réduites à deux : la dilatation volumique actuelle  $K_v$  et une fonction  $\gamma$  de la distorsion stérique maximale actuelle  $\delta$  définie par :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \quad [\text{éq. (4.2) p. 33}]$$



La description de l'état cinématique au moyen de seulement deux variables d'état cinématiques indépendantes et physiquement significatives a déjà été utilisée dans la construction d'un modèle de comportement élastique isotrope<sup>(1)</sup>. Par ailleurs, l'isotropie du matériau est exprimée par l'absence de directions d'anisotropie dans les variables d'état cinématiques.

- **Hypothèse 5.2 – Variable d'état mnésique.** Dans ce modèle de plasticité, la variable mnésique scalaire est la *plastification* actuelle  $p$  qui a été définie dans le chapitre précédent :

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0 : t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{im} \rangle \quad [\text{éq. (4.4) p. 34}]$$

Sa dérivée particulière a été donnée en éq. (4.9) [p. 38] :

$$\dot{p} = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{im} - p) \langle \dot{\gamma} \rangle = \mathcal{H}(\gamma - \gamma_{im} - p) \langle \mathbf{S}_\gamma : \mathbf{D} \rangle$$

Il est important de garder en tête que l'utilisation de cette variable d'état mnésique suppose la validité des hypothèses 4.2 [p. 31], 4.3 [p. 32] et 4.4 [p. 34] qui ont servi à la définir.

Les variables d'état de ce modèle sont donc  $\{T, K_v, \gamma, p\}$ .

**Milieux anisotropes** – L'hypothèse d'isotropie faite ici n'est pas essentielle, elle n'a pour but que de simplifier les écritures en diminuant le nombre de variables d'état cinématiques. En effet, dans le modèle construit ici, les variables d'anisotropie n'interviennent pas dans le critère de limite élastique ( $\delta \leq \delta_{im}$ ); elles n'interviennent donc pas non plus dans la définition de la plastification stérique  $p$  dans sa dérivée particulière. Pour étendre les résultats de ce modèle aux milieux anisotropes il suffit donc d'écrire l'expression complète de la contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  [éq. (4.11) p. 38] dans laquelle les variables d'état cinématiques  $\{I_\bullet\}$  contiennent des variables d'anisotropie.

## 5.2 Forme générale des fonctions d'état

Pour atteindre un état quelconque  $E_t = (T, K_v, \gamma, p)$  admissible ( $\gamma \leq \gamma_{im} + p$ , [prop. 4.6 p. 35]), on choisit une succession de chemins élémentaires dans l'espace des états, par exemple :

$$\begin{aligned} E_0 = (T_0, 1, 0, 0) &\xrightarrow{\mathcal{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(3)}} \\ E_3 = (T, K_v, \gamma_{im}, 0) &\xrightarrow{\mathcal{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{im} + p, 0) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(5)}} E_t = (T, K_v, \gamma, p) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Le chemin  $\mathcal{C}^{(1)}$  est une variation de température à déformation bloquée ( $\dot{T} \neq 0$ ,  $K_v = 1$ ,  $\dot{K}_v = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ ,  $p = 0$  et  $\dot{p} = 0$ ). Dans cette évolution, la variation de l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \quad \text{avec la condition : } g^{(1)}(T_0) = 0 \quad (\text{on peut toujours poser } \psi_0^m = 0)$$

Le chemin  $\mathcal{C}^{(2)}$  est une déformation sphérique à température constante ( $\dot{T} = 0$ ,  $\dot{K}_v \neq 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ ,  $p = 0$  et  $\dot{p} = 0$ ). Dans cette évolution, la variation de l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \quad \text{avec la condition : } \forall T, g^{(2)}(T, 1) = 0$$

<sup>(1)</sup> La bijection  $\{B_I, B_{III}\} \leftrightarrow \{K_v, \delta\}$  a été démontrée dans le chapitre 3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3]. La bijection  $\{K_v, \delta\} \leftrightarrow \{K_v, \gamma\}$  est évidente.

**Rappel** – On a montré au chapitre précédent [remarque p. 40] qu'avec la variable d'état mnésique choisie pour ce modèle, une déformation sphérique n'est jamais plastifiante.

Le chemin  $\mathcal{C}^{(3)}$  est une déformation isovolume à température constante jusqu'au seuil de limite élastique  $\gamma_{lim}$  ( $\dot{T} = 0$ ,  $\dot{K}_v = 0$ ,  $\dot{\gamma} \neq 0$ ,  $p = 0$  et  $\dot{p} = 0$ ). Dans cette évolution, la variation de l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \quad \text{avec la condition : } \forall T \forall K_v, \quad g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$

**Remarque** – Cette étape est nécessaire pour amener l'état  $E_3$  sur la frontière de l'espace des états admissibles ( $\gamma = \gamma_{lim} + p$  avec  $p = 0$ ) afin de pouvoir effectuer ensuite une évolution plastifiante. Il existe une infinité de déformations isovolumes ( $K_v = 0$ ) qui ont la faculté de faire varier la distorsion stérique maximale  $\delta$ , c'est-à-dire la variable d'état cinématique  $\gamma$ . Comme en élasticité, on choisira un mouvement de glissement simple. Dans ce mouvement la variable d'état cinématique  $\gamma$  est facilement interprétable ( $\gamma = |u|/h$ ).

Le chemin  $\mathcal{C}^{(4)}$  fait varier la plastification  $p$  (évolution plastifiante,  $\dot{T} = 0$ ,  $\dot{K}_v = 0$  et  $\dot{\gamma} = \dot{p} > 0$ ). Dans cette évolution, la variation de l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \quad \text{avec la condition : } \forall T \forall K_v, \quad g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

**Remarque** – Pour faire évoluer la plastification  $p$ , il suffit de continuer le mouvement de glissement précédent au-delà de la limite élastique  $\gamma_{lim}$ . À la fin de cette évolution plastifiante, la variable d'état  $\gamma$  est  $\gamma = \gamma_{lim} + p$ .

Le chemin  $\mathcal{C}^{(5)}$  amène la valeur de  $\gamma$  à une valeur admissible quelconque  $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$  (évolution non plastifiante,  $\dot{T} = 0$ ,  $\dot{K}_v = 0$ ,  $\dot{p} = 0$  et  $\dot{\gamma} < 0$ ) ; dans cette évolution, la variation de l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi_5^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \quad \text{avec la condition : } \forall T \forall K_v \forall p, \quad g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$

Ces cinq évolutions élémentaires permettent d'aboutir à un état quelconque arbitraire  $\{T, K_v, \gamma, p\}$  dans l'espace des états admissibles ( $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$ ).

L'évolution des états dans le sous-espace plan  $(\gamma, p)$  de l'espace des états  $(T, K_v, \gamma, p)$  (où  $T$  et  $K_v$  sont constants) pour les chemins  $\mathcal{C}^{(3)}$ ,  $\mathcal{C}^{(4)}$  et  $\mathcal{C}^{(5)}$  est illustrée dans la figure 5.1.

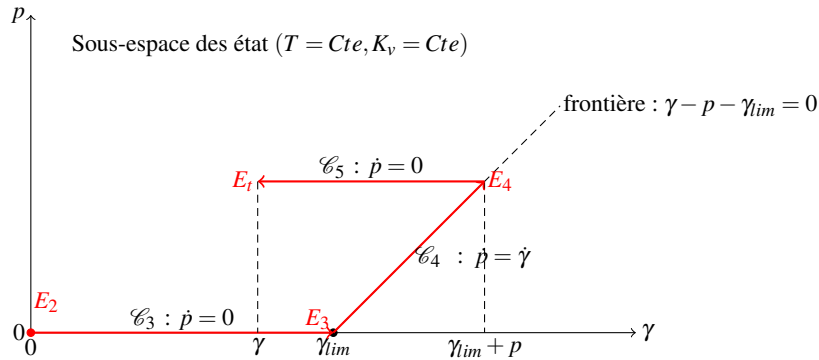


FIGURE 5.1 – Évolutions  $\mathcal{C}^{(3)}$  à  $\mathcal{C}^{(5)}$  dans le sous-espace des états  $(\gamma, p)$  à  $T$  et  $K_v$  constants.

### 5.2.1 Énergie libre massique de Helmholtz

Compte tenu de l'évolution définie dans la section précédente partant de l'état initial  $E_0$  vers un état final admissible quelconque  $E_t$ , l'énergie libre massique de Helmholtz d'un état admissible quelconque s'écrit :

$$\bar{f}_\psi(T, K_v, \gamma, p) = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) + g^{(4)}(T, K_v, p) + g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$$

où les  $g^{(\bullet)}$  sont les variations d'énergie libre massique de Helmholtz dans chacun des chemins élémentaires  $\mathcal{C}^{(\bullet)}$ .

### 5.2.2 Entropie massique

L'entropie massique est déterminée par la relation de Helmholtz [éq. (4.13) p. 38] :

$$s^m = -\partial_T \psi^m = -\partial_T g^{(1)} - \partial_T g^{(2)} - \partial_T g^{(3)} - \partial_T g^{(4)} - \partial_T g^{(5)} \quad (5.2)$$

### 5.2.3 Énergie interne massique

L'énergie interne massique est déterminée par la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\begin{aligned} e^m &= \psi^m + T s^m \\ &= g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} + g^{(4)} + g^{(5)} - T (\partial_T g^{(1)} + \partial_T g^{(2)} + \partial_T g^{(3)} + \partial_T g^{(4)} + \partial_T g^{(5)}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

### 5.2.4 Contrainte de référence

Sous les hypothèses 5.1 [p. 47] et 5.2 [p. 48] qui ont été posées dans ce modèle, la fonction d'état  $\sigma_{ref}^{(p)}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ref}^{(p)} &= \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j \quad (m : \text{nombre de variables d'état cinématiques scalaires, [éq. (3.2) p. 28]}) \\ &= \frac{\rho_0}{K_v} \left( \partial_{K_v} f_\psi \mathbf{S}_{K_v} + \partial_\gamma f_\psi \mathbf{S}_\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathbf{S}_{K_v} = K_v \mathbf{G} \text{ [éq. (1.12) p. 17] et } \mathbf{S}_\gamma = \begin{cases} \text{si } \gamma > 0, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{\frac{2}{3}}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \\ \text{si } \gamma = 0, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \end{cases} \text{ [éq. (4.8) p. 37]}$$

**Remarque** – On peut noter que comme dans l'exemple de modèle élastique  $(T, K_v, \delta)$ , quand on choisit comme variables d'état cinématiques  $K_v$  et une fonction de la distorsion stérique maximale ( $\gamma$  ou bien  $\delta$ ), le terme en  $\mathbf{B}^2$  disparaît de la loi de comportement car ce choix de variables d'état cinématiques revient à ignorer l'influence de l'invariant  $B_{II}$  <sup>(2)</sup> ( $\partial_{B_{II}} f_\psi = 0$ ).

## 5.3 Analyse des chemins élémentaires

Dans toutes les mesures des expériences qui suivent, il faut prendre (ou approcher) les précautions expérimentales suivantes :

<sup>(2)</sup> Voir la section 3.2 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

- la température est uniformisée <sup>(3)</sup> ;
- les vitesses de déformation sont nulles (élimination de la dissipation intrinsèque et absence de variation d'énergie cinétique dans l'écriture de la conservation de l'énergie) ;
- la pesanteur est négligeable.

Dans ces conditions, quelles que soient les expériences, l'état du matériau peut être considéré comme uniforme dans la zone utile des éprouvettes.

Le détail des calculs de cette section est donné en annexe C [p. 95] dans une feuille de calcul exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>®</sup> dans sa version 11.1. Dans cette section, on se contente de signaler les points importants et les résultats importants.

### 5.3.1 Chemin $\mathcal{C}^{(1)}$

On mesure la quantité de chaleur massique  $Q_{exp}^{(1)}(T)$  ( $\text{J.kg}^{-1}$ ) dans le chemin  $\mathcal{C}^{(1)}$  pour faire passer une certaine masse de matériau de la température  $T_0$  à la température  $T$  à déformation bloquée. L'écriture de la conservation de l'énergie dans cette expérience s'écrit :

$$Q_{exp}^{(1)}(T) = e^m(T, 1, 1, 0) \quad (\text{pas de travail extérieur ni de variation d'énergie cinétique})$$

ce qui conduit à une équation différentielle en  $g^{(1)}$  dont la solution est :

$$g^{(1)}(T) = Q_{exp}^{(1)}(T) - T \int_{T_0}^T \frac{\partial_T Q_{exp}^{(1)}(T)}{T} dT + \dots$$

où le reste ne fait intervenir que les fonctions  $g^{(2)}$ ,  $g^{(3)}$ ,  $g^{(4)}$  et  $g^{(5)}$  qui seront déterminées par les mesures dans les chemins suivants.

### 5.3.2 Chemin $\mathcal{C}^{(2)}$

Dans cette évolution, le tenseur de déformation est sphérique :  $\mathbf{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}$  et la distorsion stérique maximale  $\delta$  des particules reste à son minimum 1, c'est-à-dire  $\gamma = 0$ . La plastification  $p$  est nulle. Le tenseur des contraintes est donc égal à la contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(0)}$  qui est aussi sphérique. On mesure la *contrainte moyenne* <sup>(4)</sup>  $\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)} = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(0)}$$

Cette égalité est une équation différentielle en  $g^{(2)}$  dont la solution est :

$$g^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v + \dots$$

où le reste ne fait intervenir que les fonctions  $g^{(3)}$ ,  $g^{(4)}$  et  $g^{(5)}$  qui seront déterminées par les mesures dans les chemins suivants.

<sup>(3)</sup> Il faut un temps d'attente suffisant avant de relever les mesures.

<sup>(4)</sup> On rappelle que la contrainte moyenne est le tiers de la trace de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 5.3.3 Chemin $\mathcal{C}^{(3)}$

Dans cette évolution on fait varier la variable d'état  $\gamma$  de 0 à  $\gamma_{lim}$ , à température et dilatation volumique constantes, tout en maintenant nulle la plastification ( $p = 0$ ). Il s'agit donc d'atteindre le critère de limite élastique ( $\gamma \leq \gamma_{lim}$ ) sans le dépasser.

Comme en élasticité, on choisit un mouvement de glissement dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  pour faire évoluer la variable d'état  $\gamma$  de 0 à  $\gamma_{lim}$ . Les composantes du tenseur de déformation dans une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  sont <sup>(5)</sup> :

$$[\mathbf{B}^{\bullet}] = K_v^{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En mesurant la contrainte tangentielle dans ce glissement, on obtient l'équation :

$$\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \gamma) = \sigma_{ref}^{(0)} \frac{1}{2} = \frac{\rho_0}{K_v} \partial_\gamma g^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0)$$

La contrainte tangentielle  $\tau_{exp}^{(3)}$  est donc déterminée par la fonction  $\partial_\gamma g^{(5)}$  pour  $p = 0$ .

### 5.3.4 Chemin $\mathcal{C}^{(4)}$

On continue le glissement dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  au delà de la limite élastique  $\gamma_{lim}$  pour faire évoluer la plastification  $p$ . Le tenseur de déformation est donc identique au chemin précédent, mais avec  $\gamma = \gamma_{lim} + p$  (évolution plastifiante). La contrainte tangentielle dans ce chemin est :

$$\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, p) = \sigma_{ref}^{(p)} \frac{1}{2} = \frac{\rho_0}{K_v} \partial_\gamma g^{(5)}(T, K_v, p + \gamma_{lim}, p)$$

Comme dans le chemin  $\mathcal{C}^{(3)}$ , la contrainte tangentielle  $\tau_{exp}^{(4)}$  est déterminée par la fonction  $\partial_\gamma g^{(5)}$  avec  $\gamma = \gamma_{lim} + p$  (évolution plastifiante).

Par ailleurs, la condition de continuité des contraintes pour les états situés sur la frontière de l'espace des états admissibles s'écrit :

$$[\partial_p \bar{f}_\psi]_{\gamma=\gamma_{lim}+p} = 0 \quad [\text{éq. (4.25) p. 44}]$$

ce qui conduit à une équation différentielle en  $g^{(4)}$  dont la solution est :

$$g^{(4)}(T, K_v, p) = - \int_0^p (\partial_p g^{(5)})(T, K_v, p + \gamma_{lim}, p) dp$$

La fonction  $g^{(4)}$  est donc déterminée par la fonction  $g^{(5)}$ .

### 5.3.5 Chemin $\mathcal{C}^{(5)}$

À la fin du chemin précédent, la plastification est  $p \geq 0$  et la variable d'état  $\gamma$  est  $\gamma_{lim} + p$ . Pour obtenir l'état final  $E_t = (T, K_v, \gamma, p)$ , il faut ramener la variable d'état  $\gamma$  à une valeur quelconque admissible (donc inférieure à  $\gamma_{lim} + p$  [prop. 4.6 p. 35]). Cette expérience est souvent appelée « retour élastique » <sup>(6)</sup>. Le tenseur des déformations est toujours de la même forme que dans

<sup>(5)</sup> La cinématique d'un mouvement de glissement a été étudiée en détail dans la section 3.4.3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(6)</sup> Voir la fin de la remarque page 41.

les deux chemins précédents, mais avec une valeur de  $\gamma \leq p + \gamma_{im}$ . En mesurant la contrainte tangentielle dans ce chemin :

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \sigma_{ref}^{(p)1} 2$$

on obtient une équation différentielle en  $g^{(5)}$  dont la solution est :

$$g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{K_v}{\rho_0} \int_{p+\gamma_{im}}^{\gamma} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) d\gamma$$

## 5.4 Synthèse

Finalement, l'énergie libre massique de Helmholtz d'un état admissible quelconque s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\psi}(T, K_v, \gamma, p) &= Q_{exp}^{(1)}(T) - T \int_{T_0}^T \frac{\partial_T Q_{exp}^{(1)}(T)}{T} dT \\ &+ \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v \\ &+ \frac{K_v}{\rho_0} \int_0^{\gamma_{im}} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0) d\gamma \quad (\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0) = \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \gamma)) \\ &+ \frac{K_v}{\rho_0} \int_0^p \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, p + \gamma_{im}, p) dp \quad (\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, p + \gamma_{im}, p) = \tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, p)) \\ &+ \frac{K_v}{\rho_0} \int_{p+\gamma_{im}}^{\gamma} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) d\gamma \end{aligned}$$

Comme on peut le constater, la connaissance des trois fonctions expérimentales  $Q_{exp}^{(1)}(T)$  (chaleur massique à déformation bloquée),  $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  (contrainte moyenne dans une déformation sphérique à température constante) et  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$  (contrainte tangentielle dans un glissement) suffisent pour déterminer complètement l'énergie libre massique d'un matériau isotrope plastifiable.

On en déduit aisément les autres fonctions d'état entropie massique  $s^m$  et énergie interne massique  $e^m$  à l'aide des équations (5.2) et (5.3) [p. 50]. Les résultats complets sont donnés dans l'annexe C [p. 95].

La contrainte de référence dans ce modèle est :

$$\sigma_{ref}^{(p)} = \frac{\rho_0}{K_v} (\partial_{K_v} \psi \mathcal{S}_{K_v} + \partial_{\gamma} \psi \mathcal{S}_{\gamma})$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{K_v} \partial_{K_v} \psi &= \frac{\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)}{K_v} \\ &+ \frac{1}{K_v} \int_0^{\gamma_{im}} (\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0) + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0)) d\gamma \\ &+ \frac{1}{K_v} \int_0^p (\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, p + \gamma_{im}, p) + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, p + \gamma_{im}, p)) dp \\ &+ \frac{1}{K_v} \int_{p+\gamma_{im}}^{\gamma} (\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)) d\gamma \quad [\text{annexe C p. 95}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{K_v} = K_v \mathbf{G} \quad [\text{éq. (1.12) p. 17}]$$

$$\frac{\rho_0}{K_v} \partial_\gamma \Psi = \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \quad [\text{annexe C p. 95}]$$

$$\mathbf{S}_\gamma = \begin{cases} \text{si } \gamma > 0, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{\frac{2}{3}}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \\ \text{si } \gamma = 0, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \end{cases} \quad [\text{éq. (4.8) p. 37}]$$

La détermination complète de l'énergie libre massique de Helmholtz d'un matériau isotrope plastifiable peut donc être faite par des mesures de chaleur massique à déformation bloquée à différentes températures, des mesures de contraintes moyennes dans des déformations sphériques à différentes températures et des mesures de contraintes tangentielles dans des glissements à différentes températures et différentes dilatations volumiques initiales.

**Comparaison avec l'élasticité isotrope** – Pour obtenir un comportement élastique, il suffit de poser  $p = 0$  et  $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \gamma) = \tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, 0)$ . En comparant avec le modèle élastique isotrope établi dans le cours d'élasticité, le lecteur pourra constater que le changement biunivoque de variable d'état cinématique  $\gamma \leftrightarrow \delta$  proposé précédemment [éq. (4.2) et éq. (4.3) p. 33] simplifie les formules <sup>(7)</sup>. On peut donc utiliser ces résultats avec  $p = 0$  pour traiter un problème d'élasticité.

## 5.5 Méthode d'identification

La mesure de chaleur massique ( $\text{J.kg}^{-1}$ ) à déformation bloquée  $Q_{exp}^{(1)}(T)$  étant expérimentalement difficile à réaliser, on peut aboutir à l'état  $E_1 = (T, 1, 0, 0)$  par une variation de température à contrainte nulle (le solide isotrope se dilate ou se contracte sphériquement librement) suivie d'une déformation sphérique à la température constante  $T$  qui ramène la dilatation volumique  $K_v$  à la valeur 1 <sup>(8)</sup>.

La mesure de la contrainte moyenne  $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  est plus aisée à faire en compression qu'en traction : les tractions sphériques sont difficiles à exercer sur une zone suffisamment uniforme alors qu'une compression sphérique s'exerce assez simplement en mettant l'éprouvette dans un fluide sous pression <sup>(9)</sup>.

Le travail expérimental le plus important réside dans les mesures de la fonction  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$  qui possède quatre variables et nécessite donc un grand nombre de mesures. De plus, la plastification  $p$  étant impossible à diminuer, les mesures doivent être faites avec des plastifications progressives. Cette grande quantité de mesures peut être réduite en faisant des hypothèses simplificatrices ou des idéalizations sur la forme de la fonction expérimentale  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ . Ces hypothèses simplificatrices devraient être justifiées par des observations.

Il est aussi possible d'extraire les courbes  $Q_{exp}^{(1)}(T)$ ,  $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  et  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$  d'un nuage de points expérimentaux suffisamment dense et uniforme dans l'espace des états admissibles  $(T, K_v, \gamma, p)$ .

<sup>(7)</sup> Les radicaux  $(\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}$  disparaissent. Voir la section 3.4.4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(8)</sup> Cette méthode a été expliquée dans le chapitre 3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur, [note 4 p. 3]. On en déduit notamment qu'il existe nécessairement une différence entre la capacité thermique  $C_v$  ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) à volume bloqué et la capacité thermique à contrainte nulle  $C_p$ .

<sup>(9)</sup> On peut aussi obtenir des ordres de grandeur de la compressibilité au moins dans le domaine des petites perturbations en utilisant les coefficients (couramment publiés) pour la « loi » empirique de Hooke.

## 5.6 Exemples d'idéalisation des expériences

Dans le but d'économiser des expériences, on peut imposer aux trois fonctions expérimentales  $Q_{exp}^{(1)}(T)$ ,  $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  et  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$  certaines formes d'expression physiquement raisonnables qui devraient être justifiées par quelques expériences préalables. Ces idéalizations ramènent la construction de l'énergie libre massique de Helmholtz du modèle à l'identification de quelques coefficients. Dans cette section, on en propose quelques unes qui sont physiquement vraisemblables. Le détail des calculs est donné dans l'annexe D [p. 123].

### 5.6.1 Exemple d'idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$

On idéalise  $\tau_{exp}^{(5)}$  sous la forme :

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{1}{K_v} \left( \underbrace{\mu_0 \gamma_{lim}}_{\mathcal{E}^{(3)}} + \underbrace{k_0 p}_{\mathcal{E}^{(4)}} - \underbrace{\mu_0 (\gamma_{lim} - \gamma)}_{\mathcal{E}^{(5)}} \right) = \frac{\mu_0 (\gamma - p) + k_0 p}{K_v} \quad (\text{ne varie pas avec } T !)$$

L'idéalisation de la fonction  $\tau_{exp}^{(5)}$  dans le plan expérimental  $(\tau_{exp}, \gamma)$  à  $T$  et  $K_v$  constants, est représentée dans la figure 5.2.

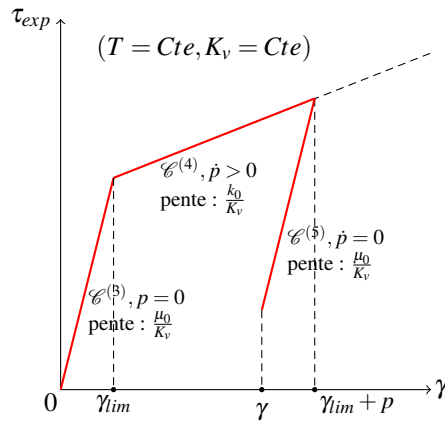


FIGURE 5.2 – Une idéalisation de la fonction expérimentale  $\tau_{exp}^{(5)}$  dans un plan  $(\tau_{exp}, \gamma)$ .

### 5.6.2 Exemple d'idéalisations de $Q_{exp}^{(1)}(T)$ et $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$

Ces idéalizations d'expériences peuvent se faire exactement comme en élasticité puisqu'elles sont effectuées pour  $p = 0$ . On idéalise  $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  par :

$$\sigma_{exp}^{(2)} = \underbrace{-\xi_0 \ln(1 + \beta_0(T - T_0))}_{\sigma^{(1)}} + \xi_0 \ln K_v$$

- $\beta_0$  est un coefficient de dilatation volumique thermique relative (au voisinage de  $T_0$ ) à contrainte nulle<sup>(10)</sup> ;
- $\sigma^{(1)}$  est la contrainte moyenne à l'issue du chemin  $\mathcal{E}^{(1)}$  après avoir ramené la dilatation sphérique à contrainte nulle à  $K_v = 1$  pour obtenir l'état  $E_1 = (T, 1, 0, 0)$ .

<sup>(10)</sup> Dans les catalogues, les coefficients de dilatation sont le plus souvent à contrainte nulle.



**Remarque** – L'idéalisation linéaire simpliste (mais couramment employée) de la dilatation volumique thermique à contrainte nulle  $K_v(T) = 1 + \beta_0(T - T_0)$  n'a de sens que pour  $T > T_0 - \frac{1}{\beta_0}$  car une dilatation volumique ne peut pas être négative ! Elle n'est donc utilisable que pour des variations de température modérées autour de  $T_0$ .

**Attention !** – Dans les catalogues, la définition des coefficients de dilatation est souvent ambiguë : parfois il s'agit d'un coefficient de dilatation thermique *linéique* relative  $\alpha_0$  (en  $\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ), parfois il s'agit du coefficient de dilatation thermique *volumique* relative  $\beta_0$  utilisé ci-dessus (en  $\text{m}^3.\text{m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ). La relation entre les deux est :

$$1 + \beta_0(T - T_0) = (1 + \alpha_0(T - T_0))^3$$

On *idéalise* la chaleur massique  $Q_{exp}^{(1')}$  avec une capacité thermique à *contrainte nulle*  $C_p$  indépendante de la température :

$$Q_{exp}^{(1')} = C_p(T - T_0)$$

**Remarque** – Supposer que la capacité thermique à contrainte nulle  $C_p$  est constante en température est une idéalisation qui n'est probablement raisonnable qu'au voisinage de  $T_0$ .

### 5.6.3 Synthèse des idéalizations

Avec les idéalizations proposées dans cette section, le comportement du matériau est complètement modélisé par la connaissance des coefficients constants suivants :

- la capacité thermique à contrainte nulle  $C_p$ ,
- le coefficient de dilatation linéique  $\beta_0$ ,
- le coefficient de compressibilité  $\xi_0$ ,
- le module de cisaillement élastique  $\mu_0$ ,
- le coefficient d'écroutissage  $k_0$ ,
- la limite élastique  $\gamma_{lim}$ .

**Remarque** – Des valeurs de ces coefficients sont couramment publiés dans la littérature technique (la plupart supposent la validité de la pseudo-élasticité de Hooke isotherme). Puisque dans ce modèle idéalisé, les coefficients sont supposés constants, on peut – en première approximation – les utiliser pour ce modèle qui ne se limite pourtant pas aux petites déformations. Néanmoins, l'idéal est de les identifier par des expériences qui ne se limitent pas aux petites déformations.

En reportant les expériences idéalisées proposées dans la section précédente dans les résultats du modèle  $(T, K_v, \gamma, p)$  donnés dans la section 5.4 [p. 53], on obtient (le détail des calculs et les résultats complets sont donnés dans l'annexe D p. 123) :

$$\begin{aligned} \psi = & C_p \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) + \frac{\xi_0}{\rho_0} \left( 1 + \beta_0(T - T_0) - K_v + K_v \ln \frac{K_v}{1 + \beta_0(T - T_0)} \right) \\ & + \frac{\mu_0}{2\rho_0} \left( (p - \gamma)^2 + 2p\gamma_{lim} \right) - \frac{k_0}{2\rho_0} p(p - 2\gamma + 2\gamma_{lim}) \end{aligned}$$

La contrainte de référence est :

$$\begin{aligned} \sigma_{ref}^{(p)} &= \frac{\xi_0}{K_v} \ln \frac{K_v}{1 + \beta_0(T - T_0)} \mathbf{S}_{K_v} + \frac{k_0 p + \mu_0(\gamma - p)}{K_v} \mathbf{S}_\gamma \\ &= \xi_0 \ln \frac{K_v}{1 + \beta_0(T - T_0)} \mathbf{G} + \frac{k_0 p + \mu_0(\gamma - p)}{K_v} \begin{cases} \text{si } \gamma > 0, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{2/3}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \\ \text{si } \gamma = 0, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, les calculs de l'annexe D [p. 123] vérifient que ni l'énergie libre de Helmholtz ni l'entropie ni l'énergie interne n'évoluent durant une évolution plastifiante :

$$\forall p, \quad \left[ \partial_p \bar{f}_\psi \right]_{(\gamma=\gamma_{im}+p)} = 0 \quad \left[ \partial_p \bar{f}_s \right]_{(\gamma=\gamma_{im}+p)} = 0 \quad \left[ \partial_p \bar{f}_e \right]_{(\gamma=\gamma_{im}+p)} = 0$$

« **Relation de Mayer** » – Les calculs de l'annexe D [p. 123] montrent que la relation entre  $C_p$  et  $C_v$  pour ce modèle idéalisé est :

$$C_p - C_v = \frac{\xi_0}{\rho_0} T \left( \frac{\beta_0}{(1 + \beta_0(T - T_0))} \right)^2$$

Cette relation peut être utile car la mesure de  $C_p$  est expérimentalement plus aisée que celle de  $C_v$ .

En cas de matériau dissipatif, il convient d'ajouter à  $\sigma_{ref}^{(p)}$  les contraintes dissipatives identifiées par les suppléments de contrainte dans des expériences à vitesse contrôlée.

*Il est important de ne pas oublier que les idéalizations d'expériences proposées dans cette section n'ont aucune justification théorique, elles ne sont que simples – voire simplistes – mais physiquement vraisemblables pour des variations de température  $T - T_0$  modérées.*

**Remarques pour les expérimentateurs** – Si les idéalizations précédentes sont admises, l'identification du modèle se ramène à l'identification de quelques coefficients.

Par ailleurs, il n'est pas forcément nécessaire de suivre expérimentalement la suite de chemins élémentaires qui a été donnée en section 5.2 [p. 48] : un nuage de points de mesure suffisamment dense et étendu des variables d'état  $(T, K_v, \gamma, p)$  dans l'espace des états  $\mathbb{R}^4$  et dont on extrait des coupes (éventuellement interpolées par une méthode quelconque) peut suffire à identifier les coefficients (l'évaluation de la valeur actuelle de  $p$  se fait à partir de sa définition 4.4 [p. 34]).

## 5.7 Analyse d'un essai de traction isotherme

Comme il a déjà été signalé dans le cours d'élasticité<sup>(11)</sup>, le mouvement dans un essai de traction fait évoluer simultanément deux variables d'état cinématiques : la dilatation volumique  $K_v$  et la distorsion stérique maximale (mesurée par  $\delta$  ou  $\gamma$ ). Si on poursuit le mouvement au-delà de la limite élastique, il fait aussi varier la plastification  $p$ . Cet essai est donc peu commode pour l'identification des coefficients du matériau. En revanche, cet essai est utile pour confirmer les prédictions d'un modèle de comportement pendant un mouvement qui n'a pas servi à l'identifier.

Afin de rendre les résultats lisibles et pédagogiques, on suppose que le matériau est non dissipatif ( $\sigma_d = \mathbf{0}$  dans les évolutions plastifiantes ou non). Le tenseur des contraintes se réduit donc à :  $\sigma = \sigma_{ref}^{(p)}$  [éq. (4.24) p. 44].

### 5.7.1 Étude analytique d'un mouvement de traction isotherme

Dans la zone utile de l'éprouvette, le tenseur des contraintes est uniaxial :

$$\sigma = \sigma_{ref}^{(p)} = \sigma^1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad \text{où } \mathbf{e}_1 \text{ est la direction de traction.}$$

<sup>(11)</sup> Voir la section 3.6.4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

En revanche le tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  ne l'est pas : ses composantes dans une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  sont de la forme :

$$[\mathbf{B}^{\bullet}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

où  $\lambda_1$  est la dilatation linéique principale dans la direction de traction et  $\lambda_2$  est la dilatation linéique dans les directions transverses

On en déduit que les variables d'état cinématiques dans un mouvement de traction sont :

$$K_v = \lambda_1 \lambda_2^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{B_I}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} - 3} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}} - 3} \quad [\text{éq. (4.2) p. 33}]$$

En utilisant la loi de comportement du modèle  $(T, K_v, \gamma, p)$  idéalisé de la section précédente, on en déduit les deux égalités suivantes :

$$\sigma^1_1 = f_1(T, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad (\text{contrainte de traction}) \quad \text{et} \quad 0 = f_2(T, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad (\text{car } \sigma^2_2 = \sigma^3_3 = 0)$$

où les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions d'expression compliquée. Leur expression complète est donnée dans la dernière section de la feuille de calcul dans l'annexe D [p. 123].

En particulier, la complexité de la seconde équation ne permet pas de résoudre analytiquement  $\lambda_2$  en fonction de  $(T, \lambda_1, p)$ . On ne peut donc pas reporter la valeur de  $\lambda_2$  dans la première équation et obtenir l'expression analytique de la « courbe de traction »  $\sigma^1_1 = h(T, \lambda_1, p)$  familière à tous les expérimentateurs. Pour connaître la courbe de traction prédite par ce modèle de comportement plastique, on ne peut que faire une simulation numérique de cet essai.

### 5.7.2 Simulation numérique d'un essai de traction

La simulation numérique qui suit a été effectuée dans le logiciel COMSOL<sup>®</sup> (12). Pour des raisons pédagogiques et de lisibilité des résultats, la simulation a été faite en supposant que la température est constamment uniforme et égale à 20 C. De plus, le modèle est supposé non dissipatif, il n'y a donc pas de contraintes dissipatives qui dépendent de la vitesse de déformation.

La zone utile de l'éprouvette a une section carrée de 10 mm de côté et une hauteur de 40mm. Les caractéristiques du matériau utiles pour ce calcul sont voisines de celles d'un acier ordinaire :

Module de cisaillement $\mu_0$	$7.69 \cdot 10^{10}$ Pa
Module de compressibilité $\xi_0$	$8.96 \cdot 10^{10}$ Pa
Module d'écroutissage en glissement $k_0$	$7.69 \cdot 10^9$ Pa
Masse volumique initiale (c.à.d. pour $K_v = 1$ ) $\rho_0$	$7850 \text{ kg.m}^{-3}$
Limite élastique $\gamma_{lim}$	$4 \cdot 10^{-3}$

La traction est simulée par un déplacement vertical imposé sur la face supérieure, évolutif en fonction du temps (fictif) par une fonction triangle : on allonge jusqu'à 0.5% de la hauteur de

(12) Les raisons de ce choix ont été exposées dans la section 9.2 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

l'éprouvette, puis on revient à un déplacement nul. Les autres conditions aux limites sont celles habituellement posées pour un essai de traction.

Les évolutions de la contrainte de traction et de la plastification en fonction de l'allongement relatif sont représentées dans la figure 5.3 (tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette).

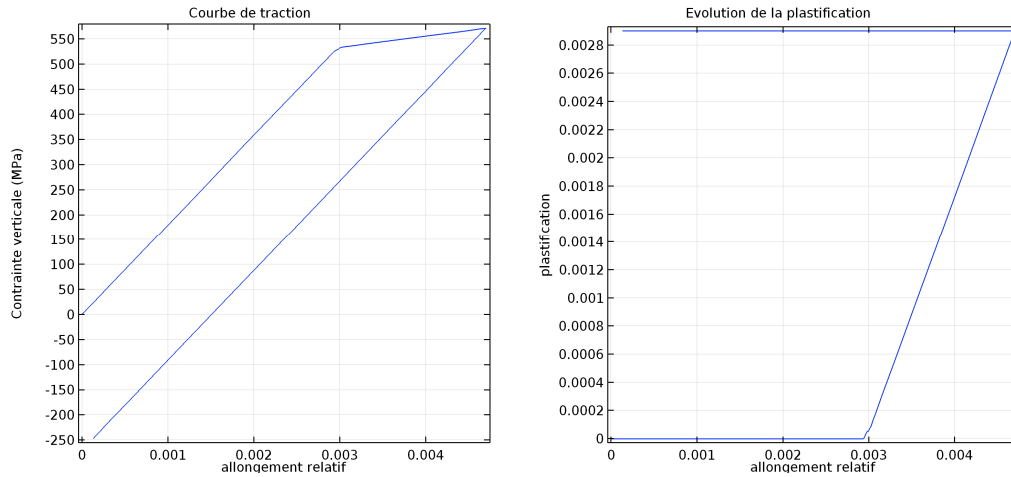


FIGURE 5.3 – Essai de traction au-delà de la limite élastique

L'apparente linéarité des courbes de la figure 5.3.a provient du fait que dans cette simulation les allongements relatifs restent petits ( $\frac{\ell_t - \ell_0}{\ell_0} \leq 5 \cdot 10^{-3}$ ).

### 5.8 Simulation numérique d'une flexion 3 points

L'éprouvette a une section carrée de 10 mm de coté et une hauteur de 160 mm, elle est constituée du même matériau que dans la section précédente (pas de dissipation intrinsèque).

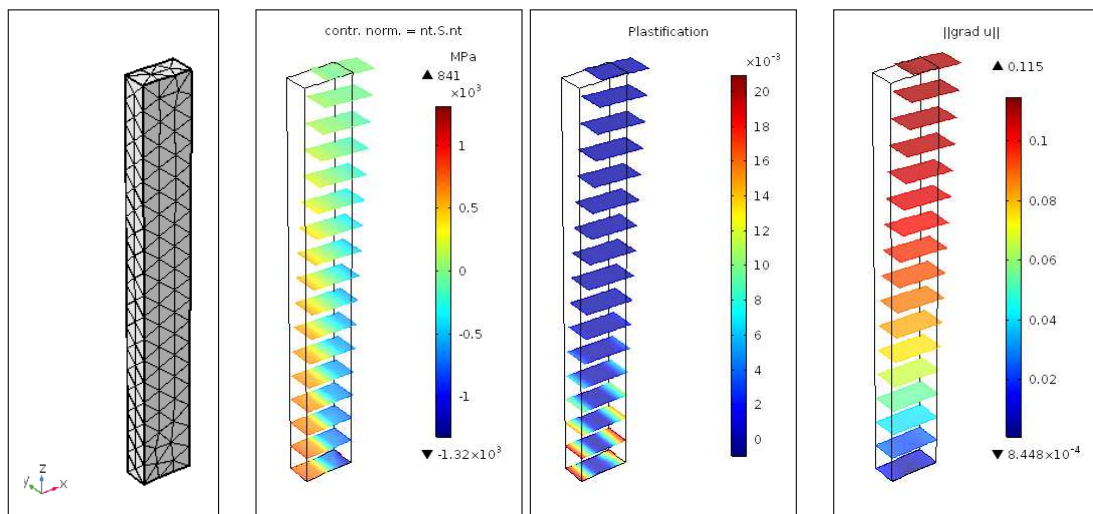


FIGURE 5.4 – Maillage et résultats pour un déplacement supérieur de 5 mm.

Le maillage utilisé pour le calcul est donné dans la figure 5.4.a. Les plans  $z = 0$  et  $y = 0$  sont des plans de symétrie.

L'arête ( $z = 0, x = 10$  mm) est un appui fixe ( $u_1 = 0$ ) et l'arête ( $x = 0, z = 80$  mm) est un appui mobile auquel on impose un déplacement horizontal progressif  $u_1$  jusqu'à 5 mm puis un retour jusqu'à ce que la déformation soit nulle dans la partie non plastifiée de l'éprouvette.

Les figures 5.4.b et 5.4.c donnent la distribution des contraintes normales  $\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$  (où  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_3$ ) et la distribution de la plastification  $p$  dans différentes coupes dans l'éprouvette lorsque le déplacement imposé à l'appui mobile est maximal (5 mm).

La figure 5.4.d donne la distribution de  $\|\mathbf{grad} \mathbf{u}\|$  dans l'éprouvette afin de permettre au lecteur d'apprécier par lui-même la validité ou non de l'hypothèse des « petites perturbations » ( $\|\mathbf{grad} \mathbf{u}\| \ll 1$ ) dans ce calcul.

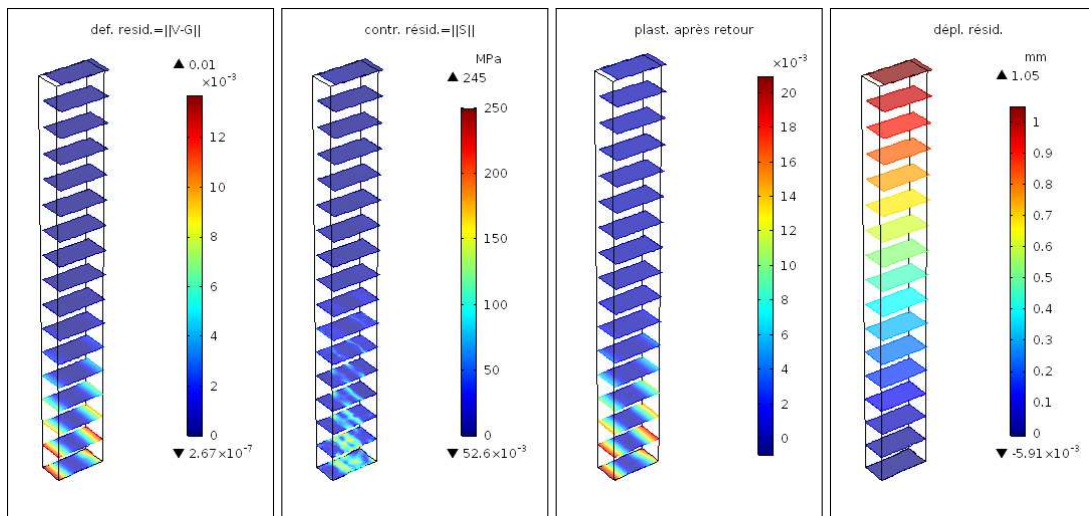


FIGURE 5.5 – Résultats après le « retour élastique ».

La figure 5.5 montre des résultats après le « retour élastique ». Les figures 5.5.a et 5.5.b montrent que les déformations et les contraintes résiduelles sont bien nulles ( $\|\mathbf{V} - \mathbf{G}\| = 0$  et  $\|\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}\| = 0$ ) dans les zones non plastifiées de la partie supérieure de l'éprouvette. La figure 5.5.c montre que la plastification est restée inchangée pendant le retour élastique (à comparer avec la figure 5.4.c). La figure 5.5.d donne les valeurs des déplacements horizontaux résiduels.

## 5.9 En bref...

Dans ce chapitre, on a construit une énergie libre massique de Helmholtz complètement déterminée par une mesure de chaleur massique à déformation bloquée  $Q_{exp}^{(1)}(T)$ , une mesure de contrainte moyenne en déformation sphérique  $\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v)$  puis une mesure de contrainte tangentielle dans un glissement plan  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ , pour un matériau plastifiable au delà de sa limite élastique construit au chapitre 4 [p. 31] dont on rappelle ici les principales hypothèses :

1. le critère de limite élastique est une limite de la distorsion stérique maximale (écrite sous la forme  $\gamma \leq \gamma_{lim}$ ) ;
2. la variable mnésique  $p$  enregistre le plus grand dépassement de la limite élastique depuis l'état de référence ;

3. les variables d'état (objectives et indépendantes) retenues pour ce modèle sont  $\{T, K_v, \gamma, p\}$  (il s'agit donc d'un modèle de solide déformable isotrope) ;
4. l'espace des variables d'état admissibles est limité par une frontière dans l'espace des états ( $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$ ) ;
5. la loi de comportement mécanique  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \mathbf{B}, p)$  est la somme d'une contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$  qui ne dépend que de l'énergie libre massique de Helmholtz (par ses dérivées partielles par rapport aux seules variables d'état cinématiques) et d'éventuelles contraintes dissipatives ;
6. ce modèle de plasticité peut donc être dissipatif ou non.

L'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des expériences  $Q_{exp}^{(1)}(T)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ , et  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$  est donnée dans la section 5.4 [p. 53]. De cette expression on déduit les valeurs de l'entropie massique, de l'énergie interne massique et de la contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ . Les éventuelles contraintes dissipatives doivent être identifiées par des mesures de contrainte à vitesse contrôlée.

On a proposé ensuite des idéalizations des expériences  $Q_{exp}^{(1)}(T)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ , et  $\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ , physiquement vraisemblables (mais qui peuvent être remises en question), afin de pouvoir faire des illustrations numériques utilisant ce modèle de plasticité idéalisé (et non dissipatif).

La démarche qui a été suivie pour construire ce modèle de plasticité a été très détaillée et peut servir de guide pour la modélisation d'autres comportements inélastiques, tels que ceux des chapitres suivants.



# Endommagement

La limite élastique choisie dans les deux chapitres précédents était une limite destinée à se protéger des réarrangements de liaison interatomiques (plastification). Ici on cherche à modéliser le comportement au-delà d'une limite élastique protégeant des ruptures irréversibles de liaisons interatomiques. Dans ce chapitre, on propose deux critères de limite élastique susceptibles de refléter macroscopiquement l'effet de ruptures de liaisons interatomiques : l'endommagement par cavitation et l'endommagement par élongation.

## 6.1 Un endommagement par cavitation

### 6.1.1 Choix d'un critère

- **Hypothèse 6.1 – Critère de cavitation.** On suppose qu'une cavitation irréversible se produit lorsque la dilatation volumique  $K_v$  en une particule dépasse un certain seuil. Le critère de limite élastique par cavitation s'écrit donc sous la forme :

$$K_v \leq K_{v\lim} \quad \text{où } K_{v\lim} \text{ est une caractéristique du matériau} \quad (6.1)$$

**Motivation microphysique** – L'existence d'une bulle de cavitation dans un solide déformable induit des réarrangements des atomes sur la surface de la bulle. Ces réarrangements de liaisons empêchent le retour à l'organisation initiale si la bulle se referme. Contrairement aux fluides qui n'ont pas d'organisation microscopique préférentielle, une bulle de cavitation dans un solide déformable ne se referme pas vraiment : elle laisse un défaut irréversible dans l'organisation microscopique : les liaisons qui ont été rompues ne se reconstituent pas.

Par ailleurs, certaines observations microscopiques sembleraient montrer que, au moins pour certaines sollicitations et pour certains matériaux, l'apparition de fissures se fasse par coalescence de bulles de cavitation.

### 6.1.2 Choix de la variable mnésique

On peut récrire le critère donné dans l'équation 6.1 sous la forme équivalente suivante :

$$h(K_v) \leq h(K_{v\lim}) \quad \text{où } h \text{ est une fonction } \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ monotone croissante } (h' > 0). \quad (6.2)$$

Le scalaire  $h(K_v)$  est une certaine mesure de la cavitation.

- **Hypothèse 6.2 – Cavitation.** On choisit de représenter macroscopiquement l'état microscopique actuel des cavitations qui se sont produites dans l'évolution de la particule à cause des dilatations volumiques qui ont dépassé la dilatation volumique limite depuis son état de référence, par une variable d'état mnésique scalaire  $c$ , que l'on appellera *cavitation actuelle*, définie par :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle h(K_v(\tau)) - h(K_{v\lim}) \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle \text{ est la partie positive de } x. \quad (6.3)$$



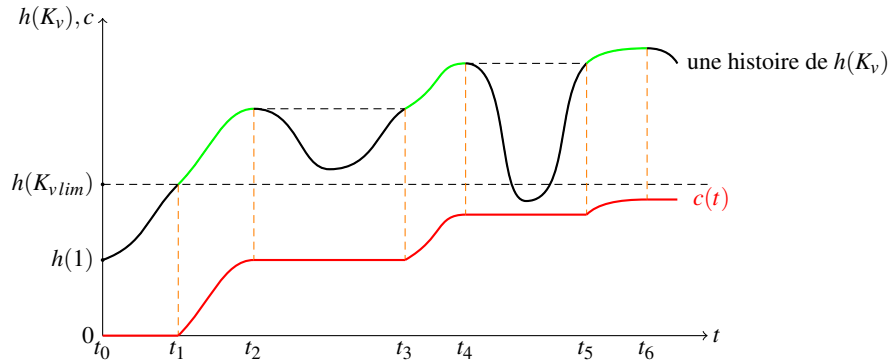
**Une hypothèse alternative** – Sans récrire le critère de limite de cavitation, la variable d'état mnésique pourrait être définie comme suit :

$$c_1(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle h_1(K_v(\tau) - K_{vlim}) \rangle \quad (6.4)$$

Cette alternative est tout aussi intéressante que le choix fait dans l'hypothèse 6.2 : le choix d'une fonction  $h_1$  adéquate (par exemple  $h_1(x) = x^y$  où  $y > 1$  permettrait d'accorder une importance grandissante aux dépassements importants.

- **Hypothèse 6.3 – Hypothèse simplificatrice.** La dilatation volumique limite  $K_{vlim}$  est indépendante de la température.

L'évolution de la variable d'état mnésique  $c$  [hyp. 6.2 p. 63] pour une certaine histoire de la déformation  $K_v(t)$  en une particule est illustrée par la figure 6.1.



(les zones vertes de l'histoire de  $h(K_v)$  sont celles pendant lesquelles la cavitation  $c$  progresse)

FIGURE 6.1 – Évolution de la cavitation  $c$  pour une certaine histoire de  $h(K_v)$ .

**Cas de l'hypothèse alternative** – Dans le cas de l'hypothèse alternative [éq. (6.4)], le graphique de la figure 6.1 serait légèrement modifié : la progression de la variable mnésique  $c_1$  ne serait plus décalée d'une constante par rapport aux zones vertes de l'histoire de la dilatation volumique  $K_v$ .

Pour les mêmes raisons qu'en plasticité, la variable mnésique  $c$  a les propriétés suivantes <sup>(1)</sup> :

1. la variable mnésique  $c$  est une grandeur scalaire objective non négative ;
2. pour tous les états on a l'inégalité  $h(K_v(t)) \leq h(K_{vlim}) + c(t)$  ;
3. dans l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  dont les variables sont  $(T, I_1, \dots, I_m, c)$  <sup>(2)</sup>, l'espace des états admissibles est donc limité par une hypersurface frontière d'équation :

$$h(f_{K_v}(I_1, \dots, I_m)) = h(K_{vlim}) + c$$

4. l'endommagement par cavitation ne peut pas diminuer ( $\dot{c} \geq 0$ ).

**Cas de l'hypothèse alternative** – Dans le cas de l'hypothèse alternative [éq. (6.4)], la définition de l'espace des états admissibles est légèrement différente. On laisse le soin au lecteur de l'établir.

<sup>(1)</sup> La démonstration de ces propriétés est similaire à celles de la variable mnésique  $p$  dans la section 4.2 [p. 33].

<sup>(2)</sup> On rappelle que les variables d'état  $(I_1, \dots, I_m)$  sont les *variables d'état cinématiques* retenues pour le modèle (isotrope ou non). Elles contiennent des caractéristiques de déformation et d'éventuels invariants croisés entre la déformation et les directions d'anisotropie. L'une d'elles peut être  $K_v$  ou  $h(K_v)$ . La dimension de l'espace des états est  $m + 2$ .

### 6.1.3 Loi d'évolution

De la définition (6.3), on déduit que la dérivée particulaire de la variable mnésique  $c$  est :

$$\dot{c} = \begin{cases} h'(K_v) \langle \dot{K}_v \rangle & \text{si } h(K_v(t)) = h(K_{vlim}) + c(t) \quad (\text{car } h' > 0, \text{ éq. (6.2) [p. 63]}) \\ 0 & \text{si } h(K_v(t)) < h(K_{vlim}) + c(t) \end{cases}$$

où la dérivée particulaire  $\dot{K}_v$  est <sup>(3)</sup> :

$$\dot{K}_v = K_v \operatorname{tr} \mathbf{D} = K_v \mathbf{G} : \mathbf{D}$$

La dérivée particulaire  $\dot{c}$  est donc :

$$\dot{c} = \begin{cases} h'(K_v) \langle \dot{K}_v \rangle = h'(K_v) K_v \langle \mathbf{G} : \mathbf{D} \rangle & (K_v > 0) \quad \text{si } h(K_v) = h(K_{vlim}) + c \\ 0 & \text{si } h(K_v) < h(K_{vlim}) + c \end{cases}$$

soit encore de manière plus concise :

$$\dot{c} = \mathcal{H}(h(K_v) - h(K_{vlim}) - c) h'(K_v) K_v \langle \mathbf{G} : \mathbf{D} \rangle \quad (6.5)$$

où  $\mathcal{H}(x)$  est la fonction de Heaviside (ou fonction échelon) définie par :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

L'équation (6.5) est appelée loi d'évolution de la variable mnésique  $c$ .

**Remarque** – Que l'état actuel soit sur la frontière des états admissibles ou non, toute évolution à partir de cet état telle que  $\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$  est une évolution non cavitante ( $\dot{c} = 0$ ). Il existe donc des évolutions dont le chemin dans l'espace des états est entièrement sur la frontière des états admissibles et qui sont néanmoins non cavitantes : ce sont celles telles que  $\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ , c'est-à-dire des évolutions actuellement isovolumes.

Comme le lecteur peut le constater dans l'équation (6.5) [p. 65], le choix d'une fonction  $h$  permet de moduler la dérivée particulaire  $\dot{c}$  de la variable mnésique par la valeur de la dérivée non négative  $h'(K_v)$ .

**Cas de l'hypothèse alternative** – Dans le cas de l'hypothèse alternative [éq. (6.4)], on laisse le soin au lecteur de suivre une démarche similaire pour établir la loi d'évolution  $\dot{c}_1$ .

### 6.1.4 Dissipation intrinsèque

On peut maintenant exprimer la dissipation intrinsèque d'un milieu inélastique à une variable mnésique qui a été donnée dans l'équation (3.3) [p. 28], où la variable mnésique générique  $\alpha$  est remplacée par la cavitation actuelle  $c$  :

$$\Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_c \bar{f}_\psi \underbrace{\mathcal{H}(h(K_v) - h(K_{vlim}) - c) h'(K_v) K_v \langle \mathbf{G} : \mathbf{D} \rangle}_{\dot{c}}}_{g(T, I_1, \dots, I_m, c, \mathbf{D})} \quad (6.6)$$

<sup>(3)</sup> Ce résultat a été établi en cinématique : le taux de dilatation volumique est  $\tau_v = \operatorname{tr} \mathbf{D} = \frac{\dot{K}_v}{K_v}$ .

**Rappel** – La fonction d'état du second ordre symétrique  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} = \sum_{i=1}^m \partial_{I_i} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j$  est la contrainte de référence dont l'expression est formellement identique à une loi de comportement élastique (isotrope ou non), mais dont l'énergie libre de Helmholtz est non seulement fonction de la température  $T$  et des variables d'état cinématiques  $\{I_1, \dots, I_m\}$ , mais aussi de la variable mnésique actuelle  $c$ . Cette contrainte de référence est donc *a priori* fonction de la variable mnésique actuelle  $c$ , ce que rappelle l'indice supérieur <sup>(c)</sup>.

### 6.1.5 Relation de Helmholtz

Par un raisonnement identique aux modèles précédents, la dissipation intrinsèque (6.6) [p. 65] étant non négative  $\forall \dot{T}$ , on déduit que la fonction d'état  $-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$  (qui n'est donc pas fonction de  $\dot{T}$ ) est nécessairement nulle. C'est la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

La dissipation intrinsèque (6.6) [p. 65] se réduit donc à :

$$\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_c \bar{f}_\psi \underbrace{\mathcal{H}(h(K_v) - h(K_{vlim}) - c) h'(K_v) K_v}_{\dot{c}} \langle \mathbf{G} : \mathbf{D} \rangle$$

**Cas de l'hypothèse alternative** – Dans le cas de l'hypothèse alternative [éq. (6.4)], le lecteur pourra vérifier que la relation de Helmholtz est encore vraie si l'hypothèse simplificatrice 6.3 [p. 64] est encore admise.

### 6.1.6 Loi de comportement mécanique

On est donc en présence de deux expressions de la dissipation intrinsèque selon la région de l'espace des états où se situe le point représentatif de l'état actuel :

1. L'état actuel est sur la frontière des états admissibles et la dilatation volumique augmente, c'est-à-dire :  $h(K_v) - h(K_{vlim}) - c = 0$  et  $\dot{K}_v > 0$ , (évolution cavitante). Dans ce cas, la dérivée partielle de la variable d'état mnésique  $c$  est :

$$\dot{c} = \mathcal{H}(h(K_v) - h(K_{vlim}) - c) h'(K_v) \langle \dot{K}_v \rangle = h'(K_v) \dot{K}_v = h'(K_v) K_v \mathbf{G} : \mathbf{D}$$

La non négativité de la dissipation intrinsèque implique alors <sup>(4)</sup> :

$$\forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e^{(c)} - \rho h' K_v \partial_c \bar{f}_\psi \mathbf{G}) : \mathbf{D} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e^{(c)} - \rho h' K_v \partial_c \bar{f}_\psi \mathbf{G} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$$

où les arguments supplémentaires éventuels de la fonction  $\mathbf{g}$  peuvent être tout ou partie des variables d'état. La fonction  $\mathbf{g}$  doit être choisie telle que  $\forall \mathbf{D}, \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) : \mathbf{D} \geq 0$  afin que la dissipation soit non négative c'est-à-dire que le modèle soit thermodynamiquement admissible. Ainsi, dans une évolution cavitante ( $h(K_v) = h(K_{vlim}) + c$  et  $\dot{K}_v > 0$ ), la loi de comportement mécanique de ce modèle est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho h'(K_v) K_v \partial_c \bar{f}_\psi \mathbf{G} + \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots) \quad (6.7)$$

2. Sinon, c'est-à-dire  $h(K_v) - h(K_{vlim}) - c < 0$  ou  $\dot{K}_v \leq 0$  (évolution non cavitante  $\dot{c} = 0$ , l'état actuel est à l'intérieur des états admissibles ou la dilatation volumique diminue), alors :

$$\forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \mathbf{D} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots) \quad (6.8)$$

<sup>(4)</sup> Cette implication devrait maintenant être familière au lecteur : si  $\forall \mathbf{D}, \mathbf{S} : \mathbf{D} \geq 0$  alors  $\exists \mathbf{g}$  tel que  $\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)$ .

**Remarque** – Cette expression de la dissipation intrinsèque est formellement identique à celle trouvée dans l'équation (2.2) [p. 22], mais ici l'énergie libre massique de Helmholtz est aussi fonction de la variable mnésique  $c$ .

### 6.1.7 Continuité des contraintes

Comme en plasticité, la continuité des contraintes pour des évolutions passant par la frontière des états admissibles ( $h(K_v) - h(K_{vlim}) - c = 0$ ) implique les conditions suivantes :

1. sur la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz :

$$[\partial_c \bar{f}_\psi]_{(h(K_v) - c = h(K_{vlim}))} = 0$$

2. sur les fonctions dissipatives :

$$[\mathbf{f}(\mathbf{D}, \dots)]_{(h(K_v) - c = h(K_{vlim}))} = [\mathbf{g}(\mathbf{D}, \dots)]$$

**Remarque** – Si on choisit des fonctions dissipatives  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  nulles, on construit un modèle d'endommagement à dissipation intrinsèque nulle<sup>(5)</sup>.

### 6.1.8 Conclusion

Comme le lecteur l'aura certainement constaté, la construction de ce modèle d'endommagement par cavitation est très similaire à la construction du modèle de plasticité. La définition complète du modèle sera faite en construisant une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz, dont on déduira toutes les autres fonctions d'état, y compris la contrainte de référence  $\sigma_{ref}^{(c)}$ .

La construction raisonnée de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz peut se faire par la même démarche qu'en plasticité : décomposition en chemins élémentaires idéaux<sup>(6)</sup> d'une évolution partant de l'état de référence jusqu'à un état admissible quelconque. L'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz se réduit alors à des mesures expérimentales sur les chemins élémentaires idéaux qui peuvent être approchés par des expériences réelles ou artificiellement idéalisés par des expressions raisonnables. Une construction arbitraire de la fonction  $\bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m, c)$  conduirait de manière certaine à un modèle thermodynamiquement admissible, mais dont le comportement risquerait d'être physiquement peu vraisemblable.

Quant à la détermination des fonctions dissipatives, elle peut se faire par comparaison entre la contrainte de référence et la contrainte mesurée à vitesse de déformation contrôlée.

Il n'en reste pas moins que les hypothèses qui ont été posées peuvent chacune être remises en question, ce qui ouvre la possibilité de construire des variantes de ce modèle. Le but de ce cours n'est pas l'exhaustivité mais seulement la pédagogie. L'important est de construire des expressions physiquement sensées pour les fonctions  $\bar{f}_\psi$  et  $\sigma_d$ .

## 6.2 Un endommagement par élongation

Plutôt que d'envisager un endommagement par cavitation, on peut envisager de modéliser un endommagement par élongation excessive. La démarche est très similaire à celle de l'endommagement par cavitation (et aussi à la plastification) : seule change la définition de la

<sup>(5)</sup> On rappelle que la dissipation intrinsèque nulle ne signifie pas que le *travail* dépensé pour faire progresser la variable mnésique d'endommagement  $c$  est nul !

<sup>(6)</sup> C'est-à-dire à vitesse nulle et en champs uniformes.

variable mnésique scalaire susceptible de refléter macroscopiquement des ruptures de liaisons interatomiques qui se sont produites depuis l'état initial.

### 6.2.1 Choix d'un critère de limite élastique

- **Hypothèse 6.4 – Critère d'élongation.** On suppose qu'une rupture de liaison interatomique irréversible se produit lorsque la plus grande dilatation linéique d'une déformation  $\lambda_1$  dépasse une certaine limite. Le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\lambda_1 < \lambda_{lim} \quad \text{où } \lambda_{lim} \text{ est une caractéristique du matériau}$$

**Dilatation linéique maximale en une particule** – On rappelle que dans une déformation en une particule, la dilatation linéique maximale est la plus grande valeur propre du tenseur de déformation  $\mathbf{V}$  (ou  $\mathbf{U}$ ). C'est aussi la racine carrée de la plus grande valeur propre du tenseur  $\mathbf{B}$  (ou  $\mathbf{C}$ )<sup>(7)</sup>.

### 6.2.2 Choix d'une variable d'état mnésique

- **Hypothèse 6.5 – Endommagement par microruptures.** On choisit de représenter macroscopiquement l'état microscopique actuel des ruptures de liaisons interatomiques qui se sont produites dans l'évolution de la particule depuis son état de référence par une variable d'état mnésique scalaire, notée  $e$ , définie par le scalaire :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle \quad (6.9)$$

où  $\lambda_1$  est la plus grande dilatation linéique de la déformation. C'est une caractéristique de la déformation actuelle en une particule.

**Remarque** – Afin de moduler plus librement la loi d'évolution, on aurait pu choisir une fonction monotone croissante  $h$  et définir la variable mnésique actuelle par :

$$e_1(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle h(\lambda_1(\tau)) - h(\lambda_{lim}) \rangle \quad \text{ou} \quad e_2(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle h(\lambda_1(\tau) - \lambda_{lim}) \rangle \quad (6.10)$$

Ces choix changent le modèle de comportement. On laisse le soin au lecteur qui le souhaite, de modifier la suite de cette section en conséquence.

L'évolution de la variable d'état mnésique  $e$  pour une certaine histoire de la déformation en une particule est similaire à la figure 6.1 [p. 64] dans laquelle il suffit de remplacer les dilatations volumiques par des dilatations linéiques maximales  $\lambda_1$ .

Comme dans les modèles précédents, la variable d'état mnésique  $e$  a les propriétés suivantes :

1. la variable mnésique  $e$  est une grandeur scalaire objective non négative ;
2. pour tous les états on a l'inégalité  $\lambda_1(t) \leq \lambda_{lim} + e(t)$  ;
3. dans l'espace des états  $\mathbb{R}^{m+2}$  dont les variables sont  $(T, I_1, \dots, I_m, e)$ , l'espace des états admissibles est donc limité par une frontière : l'hypersurface d'équation  $\lambda_1(t) = \lambda_{lim} + e(t)$  ;
4. la variable mnésique  $e$  ne peut pas diminuer ( $\dot{e} \geq 0$ ).

**Remarque** – La définition de l'espace des états admissibles change si on choisit l'une des variables d'état mnésiques alternatives proposées dans l'équation (6.10) [p. 68].

<sup>(7)</sup> Voir la section 4.4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, note 2 [p. 3].

**Rappel d'algèbre tensorielle** – La plus grande valeur propre d'un tenseur du second ordre symétrique peut s'exprimer en fonction de ses invariants fondamentaux<sup>(8)</sup>. Si on utilise le tenseur de déformation objectif  $\mathbf{B}$ , le carré de la dilatation linéique maximale d'une déformation est :

$$\lambda_1^2 = \frac{2J}{3} \cos \frac{\Phi}{3} + \frac{B_I}{3}, \quad \text{où}$$

$$J = \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}} \quad ; \quad \phi = \text{Arccos} \left( \frac{27B_{III} - 9B_I B_{II} + 2B_I^3}{2(B_I^2 - 3B_{II})^{\frac{3}{2}}} \right) \quad ; \quad \Phi \in [0; \pi]$$

En remarquant que  $\Phi \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866 \leq \cos \frac{\Phi}{3} \leq 1$ , on obtient un encadrement pour  $\lambda_1^2$  :

$$\frac{B_I}{3} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\simeq 0,577} \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}} \leq \lambda_1^2 \leq \frac{B_I}{3} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\simeq 0,667} \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}$$

On obtient une *estimation* de la plus grande dilatation linéique en prenant la valeur médiane de l'encadrement :

$$\lambda_1 \simeq \sqrt{\frac{B_I}{3} + 0,622 \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \quad \left( \text{car } \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} \right) \simeq 0,622 \right)$$

- **Hypothèse 6.6 – Hypothèse simplificatrice.** La dilatation linéique maximale d'une déformation est *estimée* par :

$$\lambda_1 \simeq \tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{B_I}{3} + 0,622 \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \quad (6.11)$$

### 6.2.3 Loi d'évolution

De la définition de la variable d'état mnésique [éq. (6.9) p. 68], on déduit que sa dérivée particulière est :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1(t) - \lambda_{lim} = e(t) \\ 0 & \text{si } \lambda_1(t) - \lambda_{lim} < e(t) \end{cases}$$

où, en prenant la dérivée particulière de l'approximation (6.11), la dérivée particulière  $\dot{\lambda}_1$  est approximée par :

$$\dot{\lambda}_1 \simeq \frac{1}{2\tilde{\lambda}_1} \left( \frac{1}{3} + \frac{0,622 B_I}{\sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \right) \dot{B}_I - \frac{3}{4\tilde{\lambda}_1} \frac{0,622}{\sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \dot{B}_{II}$$

**Remarques** – L'expression de la dérivée particulière de la plus grande dilatation linéique exacte d'une déformation aurait été particulièrement compliquée à écrire.

Par ailleurs, l'expression de la plus grande dilatation linéique  $\lambda_1$  (approximée ou non) d'une déformation fait intervenir l'invariant  $B_{II}$ . Contrairement à la plupart des modèles qui ont été construits auparavant, il n'est plus possible de diminuer le nombre de variables d'état cinématiques.

<sup>(8)</sup> La démonstration de ces résultats est dans l'annexe A du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, note1 [p. 3].

- **Notation 6.7** – Pour la concision des formules de la suite, on définit les deux fonctions d'état suivantes :

$$K_1 = \frac{1}{2\tilde{\lambda}_1} \left( \frac{1}{3} + \frac{0,622B_I}{\sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \right) \quad K_2 = -\frac{3}{4\tilde{\lambda}_1} \frac{0,622}{\sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}} \quad (6.12)$$

La loi d'évolution s'écrit alors <sup>(9)</sup> :

$$\dot{e} = \begin{cases} 2 \langle (K_1 \mathbf{B} + K_2 (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2)) : \mathbf{D} \rangle & \text{si } \lambda_1(t) - \lambda_{lim} = e(t) \\ 0 & \text{si } \lambda_1(t) - \lambda_{lim} < e(t) \end{cases} \\ = 2 \mathcal{H}(\lambda_1(t) - \lambda_{lim} - e(t)) \langle (K_1 \mathbf{B} + K_2 (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2)) : \mathbf{D} \rangle \quad (6.13)$$

### 6.2.4 Comportement mécanique

En exploitant la non négativité de la dissipation intrinsèque, on laisse le soin au lecteur, par une démarche analogue à celle des modèles précédents, de montrer les résultats suivants :

- l'espace des états admissibles est défini par  $\lambda_1(t) - \lambda_{lim} - e(t) \leq 0$  ( $\lambda_1$  est défini en éq. (6.11)).
- La relation de Helmholtz est vraie.
- Le comportement mécanique est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\mathbf{D}, \dots) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(e)} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad [\text{éq. (3.2) p. 28}] \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{D} \geq 0$$

- La continuité des contraintes pour les états situés sur la frontière des états admissibles implique la condition sur  $\boldsymbol{\psi}^m$  :  $[\partial_e f_\psi]_{(\lambda_1 = \lambda_{lim} + e)} = 0$  et la continuité de  $\boldsymbol{\sigma}_d$ .

Comme dans les modèles inélastiques précédents, la finalisation du modèle de comportement requiert la construction raisonnée de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz ainsi que l'identification des éventuelles contraintes dissipatives  $\boldsymbol{\sigma}_d$ .

## 6.3 En bref...

Les deux modèles d'endommagement suggérés dans ce chapitre diffèrent essentiellement par le choix du critère macroscopique susceptible de protéger des ruptures de liaisons interatomiques. En revanche ces deux modèles ont en commun le fait qu'ils n'ont qu'une seule variable d'état mnésique scalaire, et que cette variable mnésique n'enregistre l'histoire de la déformation que par l'enregistrement du plus grand dépassement d'un certain critère de limite élastique.

Pour définir complètement les modèles, il reste à donner une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz physiquement motivée par des expériences (éventuellement idéalisées), afin d'éviter de construire des modèles, certes thermodynamiquement admissibles, mais dont le comportement serait exotique. La construction raisonnée d'une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz n'a pas été développée en détail, mais elle se fait suivant une démarche analogue à celle qui a été exposée en plasticité : il faut choisir une suite de transformations élémentaires qui permette de passer de l'état de référence à un état admissible quelconque, avec une condition de continuité des contraintes pour les états qui sont situés sur la frontière des états admissibles. On aboutira ainsi à une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz

<sup>(9)</sup> Les dérivées particulières des invariants de  $\mathbf{B}$  ont été rappelées en (1.6) et (1.7) [p. 16]

déterminée par un petit nombre de mesures expérimentales que le concepteur de modèle pourra choisir d'idéaliser artificiellement ou non avec des courbes physiquement sensées. L'identification des fonctions dissipatives se fait par comparaisons des résultats mesurés à vitesse de déformations nulle avec des mesures faites à vitesse de déformation contrôlée.

Outre la possibilité de choisir d'autres critères macroscopiques de limite élastique pour se protéger des ruptures de liaisons interatomiques, il reste la possibilité de définir des variables d'état mnésiques scalaires enregistrant une caractéristique scalaire de l'histoire de la déformation d'une particule d'une autre manière que le plus grand dépassement du critère de limite élastique.

Comme le lecteur l'aura deviné, les deux modèles d'endommagement proposés dans ce chapitre ne sont que des exemples simples et toutes les hypothèses qui ont été formulées peuvent être remises en question pour construire d'autres modèles.





## Conclusion sur les modèles à une variable mnésique

Les modèles inélastiques à une seule variable mnésique scalaire peuvent modéliser le comportement inélastique de bon nombre de solides déformables au-delà d'une limite élastique.

Tous ces modèles ont des propriétés communes que l'on résume ici :

1. L'unique variable d'état mnésique est scalaire objective.
2. Dans les modèles qui ont été développés précédemment, la variable d'état mnésique ne retient que le plus grand dépassement d'un certain critère de limite élastique scalaire ;

**Modèles sans seuil** – Les modèles de comportement sans seuil sont les modèles pour lesquels la limite élastique est atteinte dès la moindre déformation (plastification ou endommagement immédiats). De tels modèles peuvent être utiles pour modéliser le comportement de certains matériaux.

C'est le choix du critère de limite élastique qui détermine les phénomènes microscopiques dont on veut rendre compte macroscopiquement (plasticité, endommagement, ...). Toutefois, la manière dont la variable mnésique enregistre scalairement l'histoire partielle de la déformation qui a été choisie dans les quelques modèles exposés peut être remise en question.

3. Ces modèles sont applicables quelle que soit l'isotropie ou l'anisotropie du solide déformable sous la condition que le critère de limite élastique retenu soit valable quel que soit le nombre de directions d'anisotropie. L'anisotropie éventuelle n'intervient que dans le choix des variables d'état cinématiques  $\{I_1, \dots, I_m\}$  retenues pour le modèle (expression de  $\sigma_{ref}^{(\alpha)}$ ).
4. La loi d'évolution est déduite de la définition de la variable mnésique.
5. L'espace des états est limité à un espace des états admissibles défini par une inégalité entre les variables d'état  $\{T, I_1, \dots, I_m, \alpha\}$ .
6. La non négativité de la dissipation intrinsèque et la continuité des contraintes pour les états situés sur la frontière des états admissibles impliquent que la loi de comportement est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\mathbf{D}, T, I_1, \dots, I_m, \alpha)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} f_{\psi} \mathbf{S}_j \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}_d(\mathbf{D}, T, I_1, \dots, I_m, \alpha) \geq 0$$

avec la condition  $\partial_{\alpha} f_{\psi}^{(\alpha)} = 0$  pour tout état situé sur la frontière des états admissibles.

et  $\boldsymbol{\sigma}_d$  continu pour tout état situé sur la frontière des états admissibles.

Si la contrainte dissipative  $\boldsymbol{\sigma}_d$  est nulle, le modèle est sans dissipation intrinsèque.

7. L'expression de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz  $f_{\psi}(T, I_1, \dots, I_m, \alpha)$  doit être motivée par des mesures expérimentales afin d'éviter de construire des modèles

de comportement exotiques. Une méthode systématique de construction a été proposée pour la construire de manière physiquement sensée en fonction d'expériences élémentaires (éventuellement idéalisées).

Bien que ces modèles simples puissent être satisfaisants pour modéliser le comportement de bon nombre de solides déformables, le concepteur de modèles peut envisager de refléter macroscopiquement les phénomènes microscopiques qui induisent l'inélasticité d'une manière plus fine en choisissant des variables mnésiques plus évoluées, soit en augmentant leur nombre soit en augmentant leur ordre de tensorialité. La multiplication des variables d'état mnésiques va cependant complexifier les modèles et leur identification expérimentale.

# Inélasticité à plusieurs variables mnésiques scalaires

## 8.1 Variables d'état

Afin d'améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques à l'origine de l'inélasticité, on peut être tenté de représenter ces phénomènes microscopiques par un ensemble de variables d'état mnésiques macroscopiques plus riche en informations, comprenant un ou plusieurs scalaires, vecteurs ou tenseurs.

### Exemples –

*Plastification et endommagement* : Le matériau à modéliser est à la fois susceptible de se plastifier (il existe une limite de distorsion) et de s'endommager (il existe une limite de dilatation volumique ou une limite de dilatation linéique). La coexistence de deux critères de limite élastique implique l'existence de deux variables mnésiques scalaires<sup>(1)</sup>.

*Microfissures* : On peut envisager de représenter une microfissure par un vecteur unitaire normal à la surface de la microfissure. La variable d'état mnésique macroscopique serait un champ de vecteurs nul si le solide déformable n'est pas fissuré en la particule ou une direction vectorielle unitaire  $\mathbf{u}$  (ou bien le tenseur uniaxial unitaire  $\mathbf{U} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ ) précisant la direction de la normale à la fissure en cette particule. Il est aussi possible de donner une « intensité » à la microfissure en attribuant une norme au vecteur  $\mathbf{u}$ . Dans les deux cas, le vecteur  $\mathbf{u}$  (ou le tenseur  $\mathbf{U}$ ) sont des grandeurs objectives.

Pour un solide déformable inélastique, les variables d'état tensorielles sont :

- la température actuelle  $T$  (tenseur d'ordre 0 objectif imposé par la thermodynamique) ;
- un tenseur de déformation actuelle objectif  $\mathbf{X}$  (tenseur d'ordre 2 symétrique) ;
- d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie  $\{\mathbf{N}^\bullet\}$  (tenseurs uniaxiaux unitaires d'ordre 2) ;
- d'éventuelles variables mnésiques objectives  $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$  (tenseurs d'ordre 0, 1 ou 2<sup>(2)</sup>).

Les variables d'état  $\mathbf{X}$  et  $\{\mathbf{N}^\bullet\}$  sont les variables d'état cinématiques.

Quels que soient le nombre et la tensorialité des variables d'état mnésiques objectives et indépendantes  $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$  que le modélisateur envisage de retenir pour son modèle, l'ensemble des variables d'état se ramène toujours à une liste de variables d'état scalaires et indépendantes en raison du

<sup>(1)</sup> On rappelle à toutes fins utiles que la recherche d'une limite élastique *au seul moyen d'un essai de traction* ne permet pas de distinguer si c'est la limite en distorsion ou la limite en élongation qui est atteinte en premier car dans cet essai les distorsions et les élongations évoluent simultanément.

<sup>(2)</sup> *A priori*, il n'est pas interdit de prendre des variables d'état mnésiques tensorielles d'ordre supérieur à 2, si l'on arrive à trouver des grandeurs physiques représentables par de tels tenseurs. Un tel choix demanderait une extension des résultats sur les fonctions isotropes qui ont été donnés dans le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* [note 1 p. 3], qui se limitait à des ordres inférieurs ou égaux à 2. Un tel choix augmenterait aussi considérablement le nombre de variables d'état scalaires et conduirait à un modèle de comportement difficile à identifier expérimentalement.

théorème des fonctions isotropes. Ce théorème implique que la liste des variables d'état scalaires indépendantes est de la forme suivante :

$$\{T, \underbrace{\{\text{invariants de } \mathbf{X}\}, \{\text{invariants croisés de } \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{N}^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques}}, \underbrace{\{\text{invariants des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{invariants croisés de } \mathbf{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques}}\}$$

**Rappel** – Les invariants croisés entre deux tenseurs d'ordre supérieur à 0 reflètent leur orientation relative actuelle.

Comme on peut le constater, si l'on choisit une ou plusieurs variables mnésiques tensorielles d'ordre 1 ou plus, le nombre de variables d'état scalaires du modèle augmente rapidement :

- chaque variable d'état mnésique vectorielle  $\mathbf{u}$  (ou tensorielle uniaxiale  $\mathbf{U} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ ) introduit trois variables d'état mnésiques scalaires :

$$\{\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{U}\|^{1/2}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{X} : \mathbf{U}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{X}^2 : \mathbf{U}\}$$

- chaque variable d'état mnésique tensorielle du second ordre *symétrique*  $\mathbf{S}$  introduit 6 variables d'état mnésiques scalaires : 3 invariants propres (par exemple  $S_I$ ,  $S_{II}$  et  $S_{III}$ ) et 3 invariants croisés qui traduisent l'orientation des directions propres de la variable d'état mnésique  $\mathbf{S}$  par rapport aux directions propres du tenseur de déformation  $\mathbf{X}$ .

**Rappel** – Si le tenseur mnésique introduit est un tenseur du second ordre non symétrique  $\mathbf{T}$ , il peut toujours être vu comme deux variables d'état indépendantes  $\text{sym}\mathbf{T}$  et  $\text{asym}\mathbf{T}$ . Le tenseur  $\text{asym}\mathbf{T}$  étant isomorphe à son vecteur adjoint  $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{H} : \text{asym}\mathbf{T}$ , un tenseur mnésique  $\mathbf{T}$  du second ordre non symétrique peut donc être considéré comme un ensemble de deux variables d'état mnésiques indépendantes  $\{\text{sym}\mathbf{T}, \mathbf{t}\}$  <sup>(3)</sup>.

Pour construire le modèle, on aura donc à définir la manière dont chaque variable mnésique enregistre l'histoire thermocinématique de la particule et à en déduire leur loi d'évolution (soit sous forme tensorielle, soit sous forme scalaire), ce qui revient à préciser l'évolution des invariants propres des  $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$  et l'évolution de leur orientation par rapport au tenseur de déformation  $\mathbf{X}$ .

La construction d'une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état pour un modèle comportant beaucoup de variables d'état mnésiques risque de devenir très lourde : le nombre d'expériences à effectuer (ou à idéaliser) pour l'identifier complètement va devenir important, car il faut construire une suite de chemins élémentaires permettant d'atteindre un état admissible quelconque. L'utilité pratique de modèles avec un grand nombre de variables d'état mnésiques risque d'être fort limitée.

## 8.2 Inélasticité à deux variables d'état mnésiques scalaires

Afin d'illustrer les conséquences thermodynamiques de la multiplicité des variables d'état mnésiques, on va considérer le cas où le nombre de variables d'état mnésiques scalaires se limite à deux <sup>(4)</sup>. La généralisation à un plus grand nombre de variables mnésiques se fait sans difficulté. La liste des variables d'état est donc :

$$\{T, \{I_1, \dots, I_m\}, \alpha_1, \alpha_2\}$$

<sup>(3)</sup> Voir les sections 1.6.3 à 1.6.6 ainsi que l'annexe B.5.3 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

<sup>(4)</sup> Par exemple, le lecteur peut imaginer un solide à la fois endommageable et plastifiable.

où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont les variables d'état *cinématiques* <sup>(5)</sup> retenues pour le modèle et où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux variables d'état mnésiques scalaires.

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi_{int} &= -\rho (\psi^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{déf. 1.4 p. 15}] \\ &= -\rho \left( \partial_T f_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} f_\psi \dot{I}_j + \partial_{\alpha_1} f_\psi \dot{\alpha}_1 + \partial_{\alpha_2} f_\psi \dot{\alpha}_2 + s^m \dot{T} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ &= -\rho (\partial_T f_\psi + f_s) \dot{T} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D} - \rho \partial_{\alpha_1} f_\psi \dot{\alpha}_1 - \rho \partial_{\alpha_2} f_\psi \dot{\alpha}_2 + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (1.5) p.16}] \\ &= -\rho (\partial_T f_\psi + f_s) \dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha_1, \alpha_2)}) : \mathbf{D} - \rho \partial_{\alpha_1} f_\psi \dot{\alpha}_1 - \rho \partial_{\alpha_2} f_\psi \dot{\alpha}_2 \quad [\text{éq. (3.2) p. 28}]\end{aligned}$$

Le modèle étant monoconstituant <sup>(6)</sup>, la dissipation intrinsèque est nécessairement non négative pour toute vitesse d'évolution possible à partir de tout état, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}$  et  $\forall \mathbf{D}$ .

Pour exploiter cette inégalité, il faut connaître les expressions des dérivées particulières des variables d'état mnésiques  $\dot{\alpha}_1$  et  $\dot{\alpha}_2$  dans toute évolution, c'est-à-dire *a priori* en fonction de  $\dot{T}$  et de la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$ .

**Remarque** – Dans les modèles inélastiques à une seule variable mnésique qui ont été construits dans les chapitres précédents, la dérivée particulière des variables d'état mnésiques n'était fonction que de la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$  (et pas de  $\dot{T}$ ) car les limites de déclenchement de l'inélasticité étaient supposées indépendantes de la température. Cette hypothèse simplificatrice permettait de conserver la forme classique de la relation de Helmholtz. Si les dérivées particulières  $\dot{\alpha}_1$  et  $\dot{\alpha}_2$  sont aussi fonction de  $\dot{T}$ , la relation de Helmholtz habituelle s'en trouve modifiée <sup>(7)</sup>.

Pour continuer la construction du modèle, il faut donc :

1. définir les variables d'état mnésiques c'est-à-dire préciser comment elles enregistrent la partie pertinente de l'histoire de la particule qui a abouti à l'état actuel <sup>(8)</sup> ;
2. déduire de cette définition l'expression de la dérivée particulière des variables mnésiques, c'est-à-dire leur loi d'évolution.

Comme pour les quelques modèles qui ont été développés dans les chapitres précédents, il est possible d'envisager des modèles sans limite élastique, dans lesquels une variable mnésique peut évoluer dès l'instant de référence.

Chaque variable d'état mnésique définit sa propre frontière des états admissibles. L'espace des états admissibles du modèle est alors l'intersection des espaces admissibles. Selon le chemin suivi par la particule dans l'espace des états, l'une ou l'autre de ces frontières peut être atteinte en premier.

<sup>(5)</sup> On rappelle qu'elles sont des invariants propres ou croisés calculés à partir de l'ensemble des variables d'état tensorielles  $\{\mathbf{X}, \{\mathbf{N}^\bullet\}\}$  [déf. 1.2 p. 10].

<sup>(6)</sup> On rappelle que les milieux monoconstituants n'ont pas de variables d'état de concentration, et donc pas de variations de concentration des constituants (réactions chimiques ou changements de phase, endothermiques ou exothermiques) pendant les évolutions. La dissipation intrinsèque est donc non négative.

<sup>(7)</sup> Pour s'en convaincre, le lecteur est invité à reprendre la définition des modèles précédents en supprimant cette hypothèse simplificatrice.

<sup>(8)</sup> La partie pertinente de l'histoire est censée représenter macroscopiquement des phénomènes microscopiques conduisant à l'inélasticité. Elle ne peut qu'être approximative puisque la mécanique des milieux continus ignore par principe la nature discrète de la structure microscopique de la matière.

**Exemple** – Si un modèle est à la fois plastifiable et endommageable par cavitation, une dilatation sphérique croissante à partir de l'état de référence atteint la limite d'endommagement sans avoir plastifié, alors qu'un glissement isovolume croissant à partir de l'état de référence atteint la limite de plasticité sans avoir cavité.

**Remarque sur l'essai de traction** – Dans un essai de traction sur un solide déformable à la fois plastifiable et endommageable, la première frontière des états admissibles atteinte est *a priori* incertaine car, dans cet essai, la dilatation volumique et la distorsion évoluent simultanément sans que l'on puisse les contrôler individuellement. Selon les valeurs de la limite élastique par plastification ( $\gamma_{lim}$ ) et celle par endommagement ( $K_{vlim}$  ou  $\lambda_{lim}$ ), l'une des frontières des états admissibles est atteinte avant l'autre.

Beaucoup d'auteurs qualifient les matériaux de « fragile » ou « ductile » selon la frontière des états admissibles qu'ils atteignent en premier *dans un essai de traction*. Cette distinction n'est pas nécessairement pertinente dans d'autres expériences. Un matériau peut paraître « fragile » dans un essai de traction et « ductile » dans un essai de glissement, ou l'inverse. La « fragilité » ou la « ductilité » ne sont pas vraiment des caractéristiques de matériau car elles dépendent *a priori* du mode de sollicitation !

La diversité des définitions possibles des variables d'état mnésiques (la manière dont elles enregistrent l'histoire) ainsi que la liberté dans l'idéalisation des expériences qui servent à construire l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz, et enfin la liberté dans le choix des contraintes dissipatives, laissent entrevoir au lecteur la grande diversité des modèles de comportement inélastiques thermodynamiquement admissibles envisageables.

### 8.3 Conclusion

La définition d'une ou plusieurs variables d'état mnésiques détermine fortement le modèle de comportement construit. Ces définitions devraient s'inspirer des phénomènes microscopiques qu'elles sont censées représenter macroscopiquement. Des observations microscopiques ou des simulations numériques d'ensembles d'atomes ou de molécules peuvent guider l'inspiration dans le choix des variables d'état mnésiques macroscopiques.

La loi de comportement mécanique se déduit de l'inégalité  $\Phi_{int} \geq 0$  dans toute évolution possible dans l'espace des états, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}$  et  $\forall \mathbf{D}$ . C'est cette condition qui garantit l'*admissibilité thermodynamique* du modèle construit. Cette inégalité laisse des libertés dans le choix des fonctions dissipatives. Contrairement à ce qui est parfois affirmé, les modèles de comportement inélastiques ne sont pas nécessairement dissipatifs.

Dans tout modèle, la loi de comportement mécanique s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\{\alpha_\bullet\})} + \boldsymbol{\sigma}_d \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\{\alpha_\bullet\})} = \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad \text{et} \quad \forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{D} \geq 0$$

Bien que toute fonction d'état  $\bar{f}_\psi(T, \{I_\bullet\}, \{\alpha_\bullet\})$  satisfaisant la continuité des contraintes aux frontières des états admissibles conduise de manière certaine à un modèle de comportement thermodynamiquement admissible, une proposition irraisonnée de la fonction  $\bar{f}_\psi$  risque de conduire à des comportements exotiques physiquement peu vraisemblables. Il est donc nécessaire de construire la fonction  $\bar{f}_\psi$  méthodiquement en construisant un chemin de transformations élémentaires menant à un état quelconque admissible. Ces chemins élémentaires sont des expériences idéales que l'on peut approcher expérimentalement ou idéaliser de manière raisonnable.

**Quelques remarques historiques** – Certains auteurs du siècle dernier ont proposé des expressions d'énergie libre de Helmholtz artificielles souvent motivées par des raisons calculatoires ou choisies afin d'obtenir des lois « linéaires » (pour un certain tenseur de déformation !), ressemblant plus ou moins à la « loi » de Hooke. Ces constructions conduisent souvent à des comportements physiquement peu vraisemblables <sup>(9)</sup>.

Par ailleurs, certains auteurs ont proposé d'imposer des conditions supplémentaires de convexité à la fonction d'état  $\bar{f}_\psi$  pour garantir une unicité ou une stabilité à la solution d'un problème élastique ou non. Puisqu'il est possible d'identifier complètement l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction d'expériences sur le matériau réel, l'adjonction de conditions supplémentaires sur l'expression de  $\bar{f}_\psi$  ne semble pas strictement nécessaire. Un matériau est-il nécessairement stable sous toutes les sollicitations ?

Enfin, on évoque aussi parfois dans la littérature spécialisée un « potentiel de dissipation » dont la signification thermodynamique est obscure : la définition de la dissipation [éq. (1.3) p. 14] montre qu'elle n'est jamais une fonction d'état puisqu'elle dépend non seulement de l'état actuel de la particule mais aussi de la direction de son vecteur vitesse d'évolution dans l'espace des états par les dérivées partielles  $\dot{T}$  et  $\{\dot{I}_\bullet\}$ , ainsi que des  $\{\dot{\alpha}_\bullet\}$  si le modèle comporte des variables d'état mnésiques <sup>(10)</sup>.

Le lecteur devrait retenir de ce cours une démarche de construction de nouveaux modèles dont le comportement est garanti thermodynamiquement admissible (c'est-à-dire physiquement non absurde) plutôt que de se contenter de ne retenir que les modèles simples qui ont été proposés dans ce cours. Par ailleurs il devrait aussi retenir le principe de construction d'une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en construisant une suite d'expériences idéales nécessaires et suffisantes pour atteindre un état admissible quelconque.

**Remarque** – De trop nombreuses propositions de modèles de comportement se contentent de vouloir reproduire des résultats expérimentaux limités aux seuls essais de traction, qui certes sont les plus faciles à pratiquer, mais dans lesquels on ne contrôle pas l'évolution indépendante des variables d'état <sup>(11)</sup>. Dans ce cas, le modèle ne rend compte que d'une partie des chemins possibles dans l'espace des états et n'explore donc qu'une partie de l'espace des états possibles. Ces modèles risquent donc de mal modéliser le comportement dans des sollicitations différentes ou plus complexes. La méthode de construction de l'énergie libre massique de Helmholtz qui a été proposée, en envisageant un chemin général capable d'atteindre tout point de l'espace des états possibles, permet d'éviter cet écueil.

Prétendre à l'exhaustivité dans le domaine de l'inélasticité est impossible. De nouveaux matériaux apparaissent constamment et la modélisation de leur comportement s'avère nécessaire afin de pouvoir effectuer des simulations numériques dans des sollicitations complexes.

Toutefois, si les simulations numériques permettent assurément à l'industrie d'économiser des tests réels coûteux, elles ne pourront jamais les remplacer complètement car tout modèle de comportement reste une simplification du matériau réel par sa vision continue de la matière, par la limitation du nombre de ses variables d'état et par le fait qu'une variable d'état mnésique macroscopique ne peut que refléter grossièrement les phénomènes microscopiques qu'elle est censée représenter. Par ailleurs, un calcul numérique est toujours approximatif (incertitudes

<sup>(9)</sup> Ce sont le plus souvent des polynômes d'invariants non interprétés physiquement. Voir des exemples dans la section 2.4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(10)</sup> On rappelle que la direction de la vitesse d'évolution à partir d'un état n'est pas toujours libre, par exemple en anisotropie (la dérivée partielle des directions d'anisotropie est liée à la vitesse de déformation) ou en plasticité (on ne peut faire évoluer la plastification que quand l'état actuel est sur la frontière des états admissibles).

<sup>(11)</sup> Par exemple, dans un essai de traction, la dilatation volumique et la distorsion évoluent simultanément.



d'arrondis, de méthode de résolution, voire imprédictibilité mathématique de la solution de certains problèmes non linéaires).

Il reste donc beaucoup de travail à faire...

## Épilogue

La série de cinq cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, *Cinématique des milieux continus*, *Équations générales des milieux continus*, *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques* constitue une suite cohérente de cours, chacun d'eux étant nécessaire à la compréhension des suivants.

Il convient de rappeler que ces développements supposent la validité de la *mécanique classique de Newton* (intellectuellement peu satisfaisante puisqu'elle n'est universelle que pour des observateurs galiléens), ainsi qu'une *vision continue de la matière*. Ces deux « épées de Damoclès » devraient toujours être présentes à l'esprit des ingénieurs et des étudiants pour éviter de faire dire à tous ces modèles de comportement ce qu'ils ne peuvent pas dire !

Le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* n'est pas à proprement parler un cours de mécanique. Il rassemble toutes les notions tensorielles qui seront utiles à un moment ou à un autre dans la suite. Les cours qui suivent se trouvent ainsi allégés de la mise en place de ces concepts mathématiques, rendant leur lecture plus fluide en ne se consacrant qu'à des concepts mécaniques. Ce premier cours a donc pris du volume progressivement au fur et à mesure des besoins qui apparaissaient dans la rédaction des cours suivants. On peut le considérer comme un minimum indispensable nécessaire à la compréhension de la mécanique des milieux continus dans le cadre de la physique classique, même si l'utilité de certains développements tensoriels n'apparaît que tardivement dans les cours suivants.

Le cours *Cinématique des milieux continus* est valable pour tous les milieux continus. Il devrait donc intéresser à la fois ceux qui s'intéressent aux fluides, aux solides déformables et à l'acoustique. Hormis les concepts classiques habituellement exposés en cinématique des milieux continus (description des champs, déformation, vitesse de déformation, etc.), il précise au préalable des définitions non ambiguës de deux concepts fondamentaux importants et rarement (ou mal) évoqués : l'*objectivité* (une propriété attribuable à certaines grandeurs physiques) et l'*universalité* (une propriété attribuable à certaines relations). Ces concepts s'avèrent très féconds en thermodynamique et pour la construction des lois de comportement.

Le cours *Équations générales des milieux continus* est valable, comme le cours précédent, pour tous les milieux continus. L'auteur a pris délibérément le parti de le présenter comme la continuation du cours de mécanique du point (dite générale !) enseigné dans les classes préparatoires ou dans les licences scientifiques. Hormis quelques points de détail, c'est le cours qui présente le moins d'originalité dans cette suite de cours. Les définitions fondamentales qui sont données au début (les différentes sortes de domaines) devraient aider à la communication entre « solidiens » et « fluidistes ». On aboutit aux résultats essentiels classiques : l'expression locale des quatre principes fondamentaux de la physique classique : la conservation de la masse, la mécanique de Newton, le premier et le second principe de la thermodynamique.

Le cours *Comportement élastique* est, contrairement aux précédents, limité à la mécanique des *solides déformables*. La définition thermodynamique de l'élasticité conduit à la loi de comportement mécanique générale des solides élastiques (isotropes ou non), sans restriction ni sur les mouvements envisageables, ni sur l'amplitude des déformations, ni sur les champs de température. La pseudo-élasticité de Hooke traditionnelle y apparaît comme une forte dégradation, difficilement acceptable, de l'élasticité générale.

Enfin, le dernier cours de la série, *Comportements inélastiques*, ne prétend nullement avoir épuisé le sujet. Un grand nombre de possibilités restent à explorer, soit en augmentant le nombre de variables d'état (de préférence avec une arrière pensée microphysique), soit en choisissant des variables d'état mnésiques ayant une signification physique différente ou enregistrant l'histoire utile d'une particule de manière différente. Dans tous les cas, l'admissibilité thermodynamique des modèles de comportement est incontournable. Les nouveaux matériaux laissent du travail aux concepteurs de modèles et aux expérimentateurs pour leur identification.

*L'auteur déclare en ce jour du 25 avril 2018 que ces cours sont définitivement inachevés.*

### Quelques questions ouvertes...

Tout en restant dans le cadre de la physique classique, il reste un grand nombre de domaines à explorer théoriquement ou à clarifier. On en énumère ici quelques uns, sans prétendre à l'exhaustivité.

**Milieux monoconstituants à comportement inélastique complexe.** Les quelques modèles qui ont été construits dans le cours *Comportements inélastiques* sont vraisemblablement trop simples pour modéliser des matériaux dont le comportement empirique est complexe (par exemple, l'effet Paynes et l'effet Mullins dans les élastomères). Les variables d'état mnésiques qui ont été introduites dans le dernier cours sont simples. Il faut peut-être envisager des variables d'état mnésiques enregistrant l'histoire de manière différente ou de tensorialité supérieure à zéro ou encore un ensemble de plusieurs variables mnésiques scalaires, au prix d'une augmentation du nombre de variables d'état scalaires du modèle et donc de la difficulté de son identification, mais qui seraient susceptibles de mieux représenter macroscopiquement des phénomènes microscopiques plus complexes que ceux qui ont été envisagés.

**Milieux multiconstituants.** Les milieux multiconstituants sont susceptibles de changements de phase ou de réactions chimiques. Leur modélisation sous forme de milieux continus est raisonnable dans les cas où il est raisonnable de représenter leur composition locale par des variables d'état supplémentaires de concentration de chaque constituant. Les variables d'état de concentration les plus commodes semblent être les « masses volumiques partielles » de chaque constituant  $\rho_i$  avec  $\sum \rho_i = \rho$  où  $\rho$  est la masse volumique du « mélange ». À partir de la cinétique des changements de phase ou des réactions chimiques, il est possible d'écrire des équations de conservation de la masse (relations entre les variables de concentration) et les équations différentielles régissant l'évolution des concentrations. Le caractère endothermique ou exothermique de la transformation des constituants en présence doit être pris en compte dans l'équation de la chaleur et dans la dissipation intrinsèque. Il semble à l'auteur que la plus grande difficulté à surmonter dans une théorie du comportement des milieux continus multiconstituants réside dans la description des efforts intérieurs.

**Milieux granulaires.** La possibilité d'une modélisation continue du comportement des milieux granulaires semble actuellement une question assez débattue. Des constatations expérimentales, parfois surprenantes (par exemple le blocage des silos à grains), peuvent amener à s'interroger si une modélisation continue de tels matériaux est possible ou non.

**Milieux « polarisés ».** Les milieux polarisés sont des milieux continus dans lesquels on peut attacher une ou plusieurs directions à chaque particule, directions qui ne sont pas des directions matérielles au sens où elles ont été définies dans le cours *Cinématique des milieux continus* (par exemple, on doit associer une direction de l'espace à chaque particule si elle est assimilée à un dipôle magnétique, dans le cadre d'une théorie continue des milieux électromagnétiques déformables). Il semble à l'auteur que la modélisation continue de tels milieux nécessite une refonte profonde de la description des mouvements, des déformations, des vitesses de déformation et des efforts intérieurs, ainsi que l'introduction d'équations différentielles supplémentaires issues de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). La modélisation du comportement des matériaux piézoélectriques entre dans ce cadre.

### **Place aux jeunes !**

Les quelques questions ouvertes évoquées dans la section précédente ainsi que les domaines non explorés en inélasticité montrent que du travail reste à faire en mécanique des milieux continus. Ce sont les jeunes générations d'ingénieurs et de chercheurs qui auront à éclaircir ces problèmes. Le second principe de la thermodynamique doit continuer à être le garde-fou indispensable afin d'éviter la construction de comportements thermodynamiquement absurdes. L'auteur leur souhaite d'éprouver dans leurs travaux autant de plaisir qu'il a pu en éprouver lui-même en rédigeant ces textes. Si le jeune lecteur le permet, l'auteur aimerait suggérer deux recommandations dont la première lui a été salutaire :

**Ne rien croire sur parole.** Pour un enseignant pressé par le temps qui lui est alloué, il est courant d'énoncer des affirmations sans exposer leur justification. S'il s'agit d'un « on démontre que... », l'orateur devrait donner la démonstration dans un document écrit ou donner une référence où elle se trouve. L'étudiant doit aller la voir, vérifier le cadre de sa validité (ses hypothèses) et la comprendre pour ne pas lui faire dire ce qu'elle ne peut pas dire. S'il s'agit d'un « il est évident que... », méfiance ! L'intime conviction des « experts » est parfois perverse et une tentative de démonstration (voire trouver un contre-exemple) de certaines « évidences » peut ouvrir les yeux sur des hypothèses cachées (intentionnellement ou non). Les exemples ne manquent pas, où des arguments d'autorité, des aphorismes, des modes ou bien des pseudo-concepts ont pollué (parfois longtemps) certaines parties de la mécanique des milieux continus. L'enseignement à un niveau supérieur ne devrait pas se contenter d'apporter des compétences opérationnelles aux étudiants, mais il devrait aussi les former à un « esprit critique » non pas polémique (opposer un aphorisme à un autre) mais constructif (rigueur théorique et expérimentale).

**Pratiquer l'honnêteté intellectuelle.** Si vous publiez, ne vous contentez pas d'utiliser aveuglément les résultats d'une référence bibliographique, quelle que soit sa renommée. Il est nécessaire de la lire, de la comprendre et de vérifier son domaine d'application (voire deviner les sous-entendus qui n'y sont pas exprimés) afin de ne pas utiliser ces résultats à mauvais escient ou de ne pas les généraliser abusivement. Toutes vos affirmations devraient soit être démontrées,

soit visiblement conjecturées, soit visiblement posées en hypothèse. Conjectures et hypothèses devraient être rappelées dans la conclusion. La malhonnêteté ou la paresse intellectuelles, même si elles peuvent parfois accélérer la carrière ou la renommée, sont toujours néfastes pour les autres et pour l'avenir.

L'auteur remercie ses lecteurs de l'attention qu'ils auront bien voulu porter à ces cours. En dépit du soin apporté à leur relecture – je remercie au passage Thierry DÉSOYER<sup>(1)</sup> pour le temps qu'il a bien voulu y consacrer – ces cours contiennent probablement encore des coquilles ou des erreurs. *Errare humanum est!* (cf. la première recommandation ci-dessus). L'auteur prie humblement ses lecteurs de bien vouloir lui accorder leur indulgence pour les fautes qui subsistent dans ces cours et espère qu'il leur a donné l'envie d'approfondir les questions qui n'ont pas été abordées.

Jean Garrigues.

---

<sup>(1)</sup> Professeur à Centrale Marseille (ECM) et chercheur au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA).

# Détermination de la limite de $S_\gamma$

## A.1 Rappel du contexte

Dans le modèle de plasticité construit au chapitre 4 [p. 31], la fonction d'état  $\sigma_{ref}^{(p)}$  contient un tenseur  $S_\gamma$  défini par :

$$S_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_V^{2/3}} - \frac{(\gamma^2 + 3)\mathbf{G}}{3} \right) = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\left( \frac{\mathbf{B}}{K_V^{2/3}} - \mathbf{G} \right)}_{\mathbf{T}_\gamma} - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \quad [\text{éq. (4.7) p. 36}]$$

Dans un mouvement de déformation quelconque, il peut arriver qu'en une particule, la déformation devienne sphérique, c'est-à-dire  $\mathbf{B} = K_V^{2/3} \mathbf{G}$  et par conséquent  $\gamma = 0$  [éq. (4.2) p. 33]. Dans ces conditions,  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} S_\gamma = \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_\gamma$

Lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ , le tenseur  $T_\gamma$  est alors une forme indéterminée  $\mathbf{0}/0$ . L'objectif de cette annexe est de déterminer cette limite tensorielle. On constatera que la valeur de cette limite dépend de la manière dont le tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  tend vers un tenseur de déformation sphérique.

Soit  $\mathbf{B}$  un tenseur de déformation quelconque.

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{e}_i^V \otimes \mathbf{e}_i^V \quad \Leftrightarrow \quad [B^\bullet \cdot]_{\{\mathbf{e}_i^V\}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

où les  $\lambda_\bullet$  sont les dilatations linéiques principales (non ordonnées<sup>(1)</sup>) de la déformation. L'indice supérieur  $V$  des vecteurs propres  $\mathbf{e}_i^V$  rappelle que les directions propres de tous les tenseurs de déformation objectifs sont les mêmes<sup>(2)</sup>.

## A.2 Limite d'un tenseur du second ordre symétrique

Soit  $\mathbf{S}(t)$  un tenseur du second ordre symétrique. On peut toujours l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^3 s_i(t) \mathbf{S}_i(t) = \sum_{i=1}^3 s_i(t) \mathbf{s}_i(t) \otimes \mathbf{s}_i(t)$$

où les  $\{s_\bullet(t)\}$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{S}(t)$ , et les  $\{\mathbf{S}_\bullet(t) = \mathbf{s}_\bullet(t) \otimes \mathbf{s}_\bullet(t)\}$  sont les tenseurs propres (uniaxiaux unitaires orthonormés) représentant les directions propres non orientées de  $\mathbf{S}(t)$ .

<sup>(1)</sup> L'ordre des  $\lambda_\bullet$  dépend du choix de la base propre orthonormée (une parmi 8).

<sup>(2)</sup> Voir la section 4.4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, [note 2 p. 3].

Lorsque  $t \rightarrow t_1$ , les trois valeurs propres deviennent  $\{s_\bullet(t_1)\}$  et la base propre orthonormée tend vers une base propre orthonormée  $\{\mathbf{S}_\bullet(t_1)\}$  différente de  $\{\mathbf{S}_\bullet(t)\}$ . La valeur du tenseur limite  $\mathbf{S}(t_1)$  dépend donc à la fois de la manière dont les valeurs propres évoluent et de la manière dont les trois directions propres orthonormées évoluent, c'est-à-dire de la manière dont elles tournent ensemble. Toutefois, la limite des valeurs propres et donc des invariants ne dépend pas de la manière dont varient les directions propres.

### A.3 Calcul de la limite de $\mathbf{T}_\gamma$

Le détail des calculs de cette section est donné dans une feuille de calcul en annexe B [p. 89]. On y calcule d'abord les trois invariants fondamentaux  $T_{\gamma I}$ ,  $T_{\gamma II}$  et  $T_{\gamma III}$  ainsi que la norme  $\|\mathbf{T}_\gamma\|$  en fonction des dilatations linéiques principales  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ ; puis on calcule leur limite lorsque  $\lambda_1 \rightarrow \lambda$ ,  $\lambda_2 \rightarrow \lambda$  et  $\lambda_3 \rightarrow \lambda$  (équivalent à  $\gamma \rightarrow 0$ ), c'est-à-dire lorsque le tenseur de déformation  $\mathbf{B}$  tend vers un tenseur de déformation sphérique  $\lambda^2 \mathbf{G}$ . Ces limites sont :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma I} = 0 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma II} = -1 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma III} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \|\mathbf{T}_\gamma\| = \sqrt{2}$$

Il est remarquable de constater que ces limites sont indépendantes de  $\lambda$  et que  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma$  est un tenseur non nul ( $\|\mathbf{T}_\gamma\|$  ne tend pas vers 0). Par ailleurs, bien que pour  $\gamma > 0$  le tenseur  $\mathbf{T}_\gamma$  ne soit pas de trace nulle, sa limite  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma$  est, comme  $\mathbf{S}_\gamma$ , un tenseur de trace nulle (un déviateur).

Les valeurs propres de  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma$  sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$-x^3 + x^2 \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma I} - x \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma II} + \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma III} = -x^3 + x + \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$$

dont les solutions ordonnées sont :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si on note  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  les tenseurs propres ordonnés de  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma$ , la limite de  $\mathbf{T}_\gamma$  s'écrit :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{T}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} (2\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} (3\mathbf{U}_1 - \mathbf{G}) \quad (\text{car } \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3 = \mathbf{G})$$

La définition de  $\mathbf{T}_\gamma$  montre que les directions propres de  $\mathbf{T}_\gamma$  sont celles de  $\mathbf{B}$ . Le tenseur propre uniaxial unitaire  $\mathbf{U}_1$  est donc la limite de la direction propre associée à la plus grande valeur propre de  $\mathbf{B}$  quand  $\mathbf{B}$  tend vers la sphéricité :

$$\mathbf{U}_1 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V$$

Finalement,

$$\mathbf{S}_\gamma = \begin{cases} \text{si } \gamma > 0, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_\gamma^{\frac{2}{3}}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \\ \text{si } \gamma = 0, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \end{cases}$$

où  $\mathbf{E}_1^V$  est la direction propre (tenseur uniaxial unitaire) associée à la plus grande valeur propre de  $\mathbf{B}$  quand  $\mathbf{B}$  tend vers la sphéricité.

On rappelle que la direction propre associée à la plus grande valeur propre de  $\mathbf{B}$  s'écrit <sup>(3)</sup> :

$$\mathbf{E}_1^V = \frac{\mathbf{B}^2 - (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\mathbf{B} + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \mathbf{G}}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} \quad (\text{défini pour } \mathbf{B} \text{ non sphérique}) \quad (\text{A.1})$$

#### A.4 Précautions à prendre dans une implémentation numérique

Dans une implémentation numérique de ce modèle de plasticité, on doit éviter les opérations indéterminées 0/0 quand  $\gamma$  est proche de 0. Il faut donc nécessairement faire des tests de comparaison de  $\gamma$  à une petite valeur  $\varepsilon$  ni trop grande pour que  $\mathbf{B}$  soit proche de la sphéricité, ni trop petite pour éviter des nombres  $1/\varepsilon$  s'approchant du plus grand nombre représentable dans le calculateur. On programmera donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \partial_{K_v} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \begin{cases} \text{si } \gamma > \varepsilon, & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{K_v^{2/3}} - \mathbf{G} \right) - \frac{\gamma}{3} \mathbf{G} \\ \text{si } 0 < \gamma \leq \varepsilon, & \frac{1}{\sqrt{3}} (3\mathbf{E}_1^V - \mathbf{G}) \end{cases}$$

Le tenseur uniaxial unitaire  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbf{E}_1^V$  est donc approximé par la valeur de  $\mathbf{E}_1^V$  quand  $\gamma \leq \varepsilon$ .

Dans les simulations effectuées par l'auteur dans le logiciel Comsol<sup>®</sup>, les valeurs des dilata-tions linéiques principales  $\{\lambda_\bullet\}$  ont été légèrement modifiées en ajoutant une petite constante physiquement négligeable à la valeur exacte de  $\lambda_1$  et en enlevant cette constante à la valeur exacte de  $\lambda_3$ . On évite ainsi une annulation éventuelle du dénominateur de  $\mathbf{E}_1^V$  [éq. (A.1)] en cas d'égalité de deux valeurs propres.

<sup>(3)</sup> Le tenseur  $\mathbf{E}_1^V$  est par définition un tenseur uniaxial unitaire. L'expression des tenseurs propres d'un tenseur du second ordre symétrique est donnée dans la section annexe A.7 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].





# B

## Calculs pour la limite de $S_\gamma$

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail de certains calculs de l'annexe A [p. 85].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>®</sup> dans sa version 11.1. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque Tens3D écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque<sup>(1)</sup> est téléchargeable à :

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html>

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

---

<sup>(1)</sup> Elle a été développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA<sup>®</sup>, mais elle est opérationnelle dans la version 11.1, à l'exception du rotationnel (`cur1`) d'un tenseur, dont le nom n'est plus surchargeable.

# Limite de $T_\gamma$ quand $\gamma \rightarrow 0$

## Préparations

```
Needs["Tens3D`"]
```

```
SetDelayed: Tag Curl in  $\nabla_{B_\_} \times T_\_$  is Protected.
```

```
$Assumptions =  $\lambda_1 > 0 \ \&\& \ \lambda_2 > 0 \ \&\& \ \lambda_3 > 0 \ \&\& \ \lambda > 0$ ;
```

```
G = MetricTensor;
```

On définit le tenseur de déformation  $B$  dans sa base propre

```
B = DefineTensor[
  {{ $\lambda_1^2$ , 0, 0}, {0,  $\lambda_2^2$ , 0}, {0, 0,  $\lambda_3^2$ }}, {1, 1}, CanonicalBasis];
```

```
B // Components // MatrixForm
```

```
Note: Components in CanonicalBasis
```

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

Définition des invariants de  $B$ :

```
B1 = I1[B]
```

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

```
B2 = I2[B]
```

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

```
B3 = I3[B]
```

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

2 | LimiteTGamma.nb

## Distorsion stérique

$$\delta = \text{Sqrt}[3] / 9 \text{ B1}^{(3/2)} / \text{B3}^{(1/2)} // \text{Simplify}$$

$$\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

## Variables d'état cinématiques

$$Kv = \text{B3}^{(1/2)} // \text{Simplify}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\gamma = \text{Sqrt}[3] (\delta^{(2/3)} - 1)^{(1/2)} // \text{Simplify}$$

$$\sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}}$$

Vérification :  $\gamma$  devient nul quand B est sphérique

$$\gamma /. \lambda_2 \rightarrow \lambda_1 /. \lambda_3 \rightarrow \lambda_1 // \text{Simplify}$$

$$0$$

## Définition de $S_\gamma$

$$S_\gamma = \left( \frac{1}{Kv^{2/3} \gamma} \right) \circ B \oplus \left( \frac{-3 + \gamma^2}{3 \gamma} \right) \circ G;$$

$S_\gamma$  est un déviateur

$$I1[S_\gamma]$$

$$0$$

## Étude de $T_\gamma$

### Définition de $T_\gamma$

$$T_\gamma = S_\gamma \oplus (-\gamma / 3) \circ G;$$

**compT $\gamma$  = T $\gamma$  // Components // FullSimplify**

Note: Components in CanonicalBasis

$$\left\{ \left\{ \frac{\lambda_1^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3} - 2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/3} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}}, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{-2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}{3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/3} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}}, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, 0, \frac{-2 \lambda_1^2 - 2 \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}{3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/3} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}} \right\} \right\}$$

## Invariants de $T_\gamma$

**T $\gamma$ I = I1[T $\gamma$ ] // Simplify**

$$\frac{-\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}}}}$$

**T $\gamma$ II = I2[T $\gamma$ ] // Simplify**

$$- \left( (2 \lambda_3^2 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3} - 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{4/3} + \lambda_2^2 (-\lambda_3^2 + 2 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}) + \lambda_1^2 (-\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3})) / ((\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3})) \right)$$

**T $\gamma$ III = I3[T $\gamma$ ] // Simplify**

$$\left( (\lambda_1^2 - 2 \lambda_2^2 - 2 \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}) (-2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}) (-2 \lambda_1^2 - 2 \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 3 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}) \right) / \left( 27 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \left( -3 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}} \right)^{3/2} \right)$$

## Limites des invariants de $T_\gamma$ quand le tenseur B devient sphérique

**limT $\gamma$ I = Limit[Limit[Limit[T $\gamma$ I,  $\lambda_1 \rightarrow \lambda$ ],  $\lambda_2 \rightarrow \lambda$ ],  $\lambda_3 \rightarrow \lambda$ ]**

0

4 | *LimiteTGamma.nb*

```
limTγII = Limit[Limit[Limit[TγII, λ1 → λ], λ2 → λ], λ3 → λ]
```

- 1

```
limTγIII = Limit[Limit[Limit[TγIII, λ1 → λ], λ2 → λ], λ3 → λ]
```

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

```
limNormeTγcarre =
```

```
Limit[Limit[Tγ : Tγ // Simplify, λ2 → λ1], λ3 → λ1] // Simplify
```

2

Le tenseur  $T_\gamma$  a donc une limite finie quand B devient sphérique

## Valeurs propres de la limite de $T_\gamma$ quand le tenseur B devient sphérique

```
Solve[-λ^3 + limTγI λ^2 - limTγII λ + limTγIII == 0, λ]
```

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$



## Calculs pour le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs dans la construction du modèle de comportement élastoplastique isotrope présenté dans le chapitre 5 [p. 47].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>®</sup> dans sa version 11.1. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque Tens3D écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque<sup>(1)</sup> est téléchargeable à :

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html>

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

---

<sup>(1)</sup> Elle a été développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA<sup>®</sup>, mais elle est opérationnelle dans la version 11.1, à l'exception du rotationnel (`cur1`) d'un tenseur, dont le nom n'est plus surchargeable.



# Modèle élastoplastique isotrope $(T, K_v, \gamma, p)$

## Préparations

```
Off[General::spell]
(* suppression des messages d'alerte de noms voisins *)
```

### Chargement du package Tens3D (pour les calculs tensoriels)

Le package Tens3D est utile pour les quelques calculs tensoriels qui suivent. Il est téléchargeable à <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html> (pour la version 5.2 de *Mathematica*)

```
Needs["Tens3D`"] (* le message d'erreur qui suit est
sans importance car on n'utilise pas le rotationnel *)
```

... SetDelayed: Tag Curl in  $\nabla_{\mathbf{e}_i} \times \mathbf{T}_i$  is Protected.

La version de *Mathematica* utilisée pour cette feuille est 11.1 (Licence LMA). Le package Tens3D est encore opérationnel sauf la fonction Curl (rotationnel) dont le nom est maintenant protégé ! Heureusement, elle n'est pas utilisée dans la suite.

Ce package fournit des outils commodes pour l'algèbre et l'analyse tensorielles.

### Raccourcis de notation :

```
G = MetricTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

### On nomme les vecteurs de base de la base canonique :

```
{e1, e2, e3} = BasisVectors[B0];
```

### Une fonction qui change le nom des variables muettes automatiques dans une intégrale :

Le premier argument est une expression contenant une intégrale et le second est le nom désiré pour la variable muette

**Attention**, cette fonction ne marche bien que si toutes les variables muettes  $K[xxx]$  de  $expr$  ont le même nom.

Il faut donc l'utiliser immédiatement après toute résolution d'équation différentielle.

**ChVarMu =**

```
Function[{expr, var}, MapAll[If[ToString[Head[#]] == "Integrate" &&
StringMatchQ[ToString[#][[2, 1]], "K[*]"],
# /. #[[2, 1]] -> var, #] &, expr]]
Function[{expr, var},
(If[ToString[Head[#1]] == Integrate && StringMatchQ[ToString[#1][[2, 1]],
K[*]], #1 /. #1[[2, 1]] -> var, #1] &) // @ expr]
```

**Exemple d'utilisation :**

```
sol = DSolve[D[f[x], x] == g[x], f, x]
```

$$\left\{ \left\{ f \rightarrow \text{Function} \left[ \{x\}, C[1] + \int_1^x g[K[1]] \, dK[1] \right] \right\} \right\}$$

Il faut changer le nom de la variable muette  $K[1]$ , car il risque d'être réintroduit dans une autre intégration.

De plus, on améliore la lisibilité.

```
resultat = sol[[1, 1, 2, 2]]
```

$$C[1] + \int_1^x g[K[1]] \, dK[1]$$

```
ChVarMu[resultat, y]
```

$$C[1] + \int_1^x g[y] \, dy$$

## Une fonction qui développe les sommes d'intégrandes

```

DevelopInt = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" (* test
    si l'argument est une intégrale *) ,
    Distribute[Integrate[Expand[X[[1]] ], X[[2]] ]],
    X] (* If : inchangé sinon *)
]
Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == Integrate, Distribute[ $\int$ Expand[X[[1]] dX[[2]], X]]

```

### Exemple d'utilisation :

```
Integrate[a[y] f[x] + b[z] g[x] , {x, c, d}]
```

$$\int_c^d (a[y] f[x] + b[z] g[x]) dx$$

```
Integrate[a[y] f[x] + b[z] g[x] , {x, c, d}] // DevelopInt
```

$$\int_c^d a[y] f[x] dx + \int_c^d b[z] g[x] dx$$

## Une fonction qui sort les constantes des intégrales

```
SortLesConst = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" &&
    (* test si l'argument est une intégrale *)
    ToString[Head[X[[1]]]] == "Times",
    (* et si l'intégrande est un produit *)
    Apply[Times,
      Select[
        Apply[List, X[[1]]],
        (* Apply[List, : transformation de l'intégrande en liste *)
        FreeQ[#, X[[2, 1]]] & (* FreeQ : test si l'élément
          ne contient pas la variable d'intégration *)
        ] (* Select : sélection des éléments constants *)
      ] (* Apply[Times, : produit des constantes *)
      * (* produit des constantes par l'intégrale restante *)
      Integrate[
        Apply[Times,
          Select[
            Apply[List, X[[1]]],
            (* transformation de l'intégrande en liste *)
            !FreeQ[#, X[[2, 1]]] & (* !FreeQ :
              test si l'élément contient la variable d'intégration *)
          ] (* Select : sélection des éléments non constants *)
        ] (* Apply[Times, : produit des éléments non constants *)
        , X[[2]]]
      (* Integrate : intégration des éléments non constant *)
      , X] (* If : inchangé sinon *)
    ]
]
Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == Integrate && ToString[Head[X[[1]]]] == Times,
    Times @@ Select[List @@ X[[1]], FreeQ[#, X[[2, 1]]] &]
    ∫ Times @@ Select[List @@ X[[1]], !FreeQ[#, X[[2, 1]]] &] dX[[2], X]]
```

**Exemple d'utilisation :**

```
Integrate[a[y] f[x] , {x, c, d}]
```

$$\int_c^d a[y] f[x] dx$$

```
% // SortLesConst
```

$$a[y] \int_c^d f[x] dx$$

## Une fonction qui fait les deux précédentes sur les termes d'une expression

```
ArrangeInt = Function[X, MapAll[SortLesConst, MapAll[DevelopInt, X]]]
```

```
Function[X, SortLesConst //@DevelopInt //@X]
```

**Exemples d'utilisation :**

```
Integrate[a[y] f[x] + b[z] g[x] , {x, c, d}] // ArrangeInt
```

$$a[y] \int_c^d f[x] dx + b[z] \int_c^d g[x] dx$$

```
Integrate[f[x], {x, x1, x2}] + Integrate[-f[x], {x, x1, x2}] //  
Simplify (* Simplify ne fait rien *)
```

$$\int_{x1}^{x2} -f[x] dx + \int_{x1}^{x2} f[x] dx$$

```
% // ArrangeInt
```

```
0
```

## Forme générale des fonctions d'état

Quelques hypothèses physiques destinées à aider les simplifications et les intégrations :

```
$Assumptions = $Assumptions && T > 0 && T0 > 0 && Kv > 0 &&
```

```
γ ≥ 0 && ρ0 > 0 && p ≥ 0 && γlim > 0 && 0 ≤ p + γlim - γ && m > 1;
```

```
etatInitial = {T → T0, Kv → 1, γ → 0, p → 0};
```

## Énergie libre de Helmholtz (section 5.2)

$$\psi = g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, \gamma_{lim}] + g4[T, Kv, p] + g5[T, Kv, \gamma, p]$$

$$g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, \gamma_{lim}] + g4[T, Kv, p] + g5[T, Kv, \gamma, p]$$

## Entropie massique (relation de Helmholtz)

$$s = -D[\psi, T]$$

$$-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, Kv] - g3^{(1,0,0)}[T, Kv, \gamma_{lim}] - g4^{(1,0,0)}[T, Kv, p] - g5^{(1,0,0,0)}[T, Kv, \gamma, p]$$

## Énergie interne massique

$$e = \psi + T s$$

$$g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, \gamma_{lim}] + g4[T, Kv, p] + g5[T, Kv, \gamma, p] + T \left( -g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, Kv] - g3^{(1,0,0)}[T, Kv, \gamma_{lim}] - g4^{(1,0,0)}[T, Kv, p] - g5^{(1,0,0,0)}[T, Kv, \gamma, p] \right)$$

## Contrainte de référence (section 5.2.4)

$$KG = \rho_0 (D[\psi, Kv] - D[\psi, \gamma] (\gamma^2 + 3) / 3 / \gamma / Kv) \quad (* \text{ coefficient de G , formule 5.4 } *)$$

$$\rho_0 \left( g2^{(0,1)}[T, Kv] + g3^{(0,1,0)}[T, Kv, \gamma_{lim}] + g4^{(0,1,0)}[T, Kv, p] - \frac{(3 + \gamma^2) g5^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \gamma, p]}{3 Kv \gamma} + g5^{(0,1,0,0)}[T, Kv, \gamma, p] \right)$$

$$KB = \rho_0 D[\psi, \gamma] / Kv^{(5/3)} / \gamma \quad (* \text{ coefficient de B , formule 5.4 } *)$$

$$\frac{\rho_0 g5^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \gamma, p]}{Kv^{5/3} \gamma}$$

Définition tensorielle de la contrainte de référence : (exécution retardée (:=) car la valeur de B n'est pas encore définie)

$$\sigma_{ref} := KG \circ G \oplus KB \circ B ;$$

(\* Les symboles  $\circ$  et  $\oplus$  sont des opérateurs définis dans Tens3D \*)

## Chemin $C^{(1)}$ (variation de température sans déformation)

```
chemin1 = {p → 0, Kv → 1, γ → 0}
{p → 0, Kv → 1, γ → 0}
```

### Tenseur de déformation

**B = G;**

### Tenseur des contraintes

```
compσ1 = ((σref // Components) /. p → 0 /. Kv → 1 // Simplify) /. γ → 0 ;
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
σ1 = DefineTensor[compσ1, {1, 1}, B0];
```

Vérification :  $\sigma_1$  est bien sphérique :

```
Dev[σ1] // Components (* Dev est un opérateur
de Tens3D qui calcule la partie déviatorique *)
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

### Mesure de chaleur à déformation nulle : $Q_{1Exp}[T]$ (premier principe global)

(pas de variation d'énergie cinétique ni de travail des forces extérieures)

```
eq1 = (e /. chemin1) == Q1Exp[T]
```

```
g1[T] + g2[T, 1] + g3[T, 1, γlim] + g4[T, 1, 0] +
g5[T, 1, 0, 0] + T (-g1'[T] - g2(1,0)[T, 1] - g3(1,0,0)[T, 1, γlim] -
g4(1,0,0)[T, 1, 0] - g5(1,0,0,0)[T, 1, 0, 0]) == Q1Exp[T]
```

## Résolution de eq1 (on trouve g1)

```
sol = DSolve[eq1, g1, T]
```

```
{ {g1 -> Function[{T},
  T C[1] + T \int_1^T \frac{1}{K[1]^2} (g2[K[1], 1] + g3[K[1], 1, \gamma lim] + g4[K[1], 1, \theta] +
  g5[K[1], 1, \theta, \theta] - Q1Exp[K[1]] - K[1] g2^{(1,\theta)}[K[1], 1] -
  K[1] g3^{(1,\theta,\theta)}[K[1], 1, \gamma lim] - K[1] g4^{(1,\theta,\theta)}[K[1], 1, \theta] -
  K[1] g5^{(1,\theta,\theta,\theta)}[K[1], 1, \theta, \theta]) dK[1] ] } }
```

on arrange la solution :

```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
```

```
  C[1] -> g11 (* changement de nom de C[1] *) /.
```

```
  {dx_, 1, T} -> {dx, T0, T}
```

```
  (* changement de la borne inférieure d'intégration *) //
```

```
  ChVarMu[#, Tx] & (* changement de nom de la
  variable muette *) // ArrangeInt
```

$$g11 T + T \left( \int_{T0}^T \frac{g2[Tx, 1]}{Tx^2} dTx + \int_{T0}^T \frac{g3[Tx, 1, \gamma lim]}{Tx^2} dTx + \int_{T0}^T \frac{g4[Tx, 1, \theta]}{Tx^2} dTx + \int_{T0}^T \frac{g5[Tx, 1, \theta, \theta]}{Tx^2} dTx - \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,\theta)}[Tx, 1]}{Tx} dTx - \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,\theta,\theta)}[Tx, 1, \gamma lim]}{Tx} dTx - \int_{T0}^T \frac{g4^{(1,\theta,\theta)}[Tx, 1, \theta]}{Tx} dTx - \int_{T0}^T \frac{g5^{(1,\theta,\theta,\theta)}[Tx, 1, \theta, \theta]}{Tx} dTx \right)$$

## Intégrations par parties pour arranger les résultats

Une formule (manuelle) d'intégration par parties :

```
eq = Integrate[f[Tx] / Tx^2, {Tx, T0, T}] ==
```

```
  Integrate[D[f[Tx], Tx] / Tx, {Tx, T0, T}] - f[T] / T + f[T0] / T0
```

$$\int_{T0}^T \frac{f[Tx]}{Tx^2} dTx == -\frac{f[T]}{T} + \frac{f[T0]}{T0} + \int_{T0}^T \frac{f'[Tx]}{Tx} dTx$$

Vérification :



**D[eq[[1]], T] == D[eq[[2]], T] // Simplify**

True

Fabrication d'une règle :

**IntegPart = {eq /. Equal → Rule}**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{f[Tx]}{Tx^2} dTx \rightarrow -\frac{f[T]}{T} + \frac{f[T_0]}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{f'[Tx]}{Tx} dTx \right\}$$

Intégration par parties de  $\int_{T_0}^T \frac{g2[Tx,1]}{Tx^2} dTx$

**f = Function[T, g2[T, 1]]**

Function[T, g2[T, 1]]

**rempg2 = IntegPart**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{g2[Tx, 1]}{Tx^2} dTx \rightarrow -\frac{g2[T, 1]}{T} + \frac{g2[T_0, 1]}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx} dTx \right\}$$

Intégration par parties de  $\int_{T_0}^T \frac{g3[Tx,1,\gamma\text{lim}]}{Tx^2} dTx$

**f = Function[T, g3[T, 1, \gamma\text{lim}]]**

Function[T, g3[T, 1, \gamma\text{lim}]]

**rempg3 = IntegPart**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{g3[Tx, 1, \gamma\text{lim}]}{Tx^2} dTx \rightarrow -\frac{g3[T, 1, \gamma\text{lim}]}{T} + \frac{g3[T_0, 1, \gamma\text{lim}]}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, \gamma\text{lim}]}{Tx} dTx \right\}$$

Intégration par parties de  $\int_{T_0}^T \frac{g4[Tx,1,\theta]}{Tx^2} dTx$

**f = Function[T, g4[T, 1, \theta]]**

Function[T, g4[T, 1, \theta]]

**rempg4 = IntegPart**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{g4[Tx, 1, \theta]}{Tx^2} dTx \rightarrow -\frac{g4[T, 1, \theta]}{T} + \frac{g4[T_0, 1, \theta]}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{g4^{(1,0,0)}[Tx, 1, \theta]}{Tx} dTx \right\}$$

Intégration par parties de  $\int_{T_0}^T \frac{g5[Tx, 1, 0, 0]}{Tx^2} dTx$

**f = Function[T, g5[T, 1, 0, 0]]**

Function[T, g5[T, 1, 0, 0]]

**rempg5 = IntegPart**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{g5[Tx, 1, 0, 0]}{Tx^2} dTx \rightarrow \right. \\ \left. - \frac{g5[T, 1, 0, 0]}{T} + \frac{g5[T_0, 1, 0, 0]}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{g5^{(1,0,0,0)}[Tx, 1, 0, 0]}{Tx} dTx \right\}$$

Intégration par parties de  $\int_{T_0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx$

**f = Function[T, Q1Exp[T]]**

Function[T, Q1Exp[T]]

**rempQExp = IntegPart**

$$\left\{ \int_{T_0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx \rightarrow \int_{T_0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx - \frac{Q1Exp[T]}{T} + \frac{Q1Exp[T_0]}{T_0} \right\}$$

## Transformation de la solution avec les intégrations par partie précédentes

**sol[[1, 1, 2, 2]] =**

**sol[[1, 1, 2, 2]] /. rempg2 /. rempg3 /. rempg4 /. rempg5 /. rempQExp /.**

**(\* integrations par partie \*)**

**g2[\_ , 1] → 0 /. (\* pas de dilatation volumique \*)**

**g4[\_ , \_ , 0] → 0 (\* pas de plastification \*) //**

**Expand**

$$g11 T - g3[T, 1, \gamma_{lim}] + \frac{T g3[T_0, 1, \gamma_{lim}]}{T_0} - g5[T, 1, 0, 0] + \\ \frac{T g5[T_0, 1, 0, 0]}{T_0} - T \int_{T_0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx + Q1Exp[T] - \frac{T Q1Exp[T_0]}{T_0}$$

**Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];**

**(\* Assignment de la solution g1 \*)**

```

g1[T]
g11 T - g3[T, 1,  $\gamma$ lim] +  $\frac{T g3[T0, 1, \gamma\text{lim}]}{T0}$  - g5[T, 1, 0, 0] +
 $\frac{T g5[T0, 1, 0, 0]}{T0}$  - T  $\int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx$  + Q1Exp[T] -  $\frac{T Q1Exp[T0]}{T0}$ 

cond = g1[T0] == 0
g11 T0 == 0

sol = Solve[cond, g11]
{{g11 -> 0}}

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
(* Assignment de la solution g11 *)

Q1Exp[T0] = 0; (* condition évidente *)

```

## Résultat de la fonction g1

```

g1[T]
- g3[T, 1,  $\gamma$ lim] +  $\frac{T g3[T0, 1, \gamma\text{lim}]}{T0}$  - g5[T, 1, 0, 0] +
 $\frac{T g5[T0, 1, 0, 0]}{T0}$  - T  $\int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx$  + Q1Exp[T]

g1[T0]
0

```

## Chemin $C^{(2)}$ (déformation sphérique isotherme)

```

chemin2 = { $\gamma \rightarrow 0$ , p -> 0}
{ $\gamma \rightarrow 0$ , p -> 0}

```

## Tenseur de déformation

```

F2 = (Kv^(1/3)) o G;

```

```

B = F2.F2T;

B // Components // MatrixForm

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$


```

## Tenseur des contraintes

```

compσ2 = (σref // Components) /. chemin2 // Simplify;

Note: Components in CanonicalBasis

σ2 = DefineTensor[compσ2, {1, 1}, B0];

Vérification : σ2 est bien sphérique

Dev[σ2] // Components

Note: Components in CanonicalBasis

{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

```

## Mesure de la contrainte moyenne

```

eq2 = σ2mExp[T, Kv] == I1[σ2] / 3 // Simplify
(* I1 : opérateur de Tens3D qui donne la trace *)

σ2mExp[T, Kv] == ρθ (g2(0,1)[T, Kv] +
g3(0,1,0)[T, Kv, γlim] + g4(0,1,0)[T, Kv, 0] + g5(0,1,0,0)[T, Kv, 0, 0])

```

## Résolution de eq2 (on trouve g2)

```

sol = DSolve[eq2, g2, {T, Kv}]

{{g2 → Function[{T, Kv},

$$\int_1^{Kv} \frac{1}{\rho\theta} (\sigma2mExp[T, K[1]] - \rho\theta g3^{(0,1,0)}[T, K[1], \gamma lim] - \rho\theta g4^{(0,1,0)}[T, K[1], 0] - \rho\theta g5^{(0,1,0,0)}[T, K[1], 0, 0]) dK[1] + C[1][T] ]}}$$


```

on arrange la solution :

```

sol[[1, 1, 2, 2]] =
  sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] -> g21 // ChVarMu[#, Kvx] & // ArrangeInt
g21[T] +  $\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}[T, Kvx] \, dKvx}{\rho \theta}$  -  $\int_1^{Kv} g3^{(\theta, 1, \theta)}[T, Kvx, \gamma \text{lim}] \, dKvx$  -
 $\int_1^{Kv} g4^{(\theta, 1, \theta)}[T, Kvx, \theta] \, dKvx$  -  $\int_1^{Kv} g5^{(\theta, 1, \theta, \theta)}[T, Kvx, \theta, \theta] \, dKvx$ 

sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
   $\int_1^{Kv} g3^{(\theta, 1, \theta)}[T, Kvx, \gamma \text{lim}] \, dKvx \rightarrow g3[T, Kv, \gamma \text{lim}] - g3[T, 1, \gamma \text{lim}] /.$ 
  (* intégrale d'une dérivée *)
   $\int_1^{Kv} g4^{(\theta, 1, \theta)}[T, Kvx, \theta] \, dKvx \rightarrow g4[T, Kv, \theta] - g4[T, 1, \theta] /.$ 
  (* intégrale d'une dérivée *)
   $\int_1^{Kv} g5^{(\theta, 1, \theta, \theta)}[T, Kvx, \theta, \theta] \, dKvx \rightarrow g5[T, Kv, \theta, \theta] - g5[T, 1, \theta, \theta] /.$ 
  (* intégrale d'une dérivée *)
  g4[_ , _ , \theta] -> \theta (* pas de plastification dans le chemin 2 *)
g21[T] + g3[T, 1, \gamma \text{lim}] - g3[T, Kv, \gamma \text{lim}] +
  g5[T, 1, \theta, \theta] - g5[T, Kv, \theta, \theta] +  $\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}[T, Kvx] \, dKvx}{\rho \theta}$ 

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
(* Assignment de la solution g2 *)

cond = \theta == g2[T, 1]
\theta == g21[T]

sol = DSolve[cond, g21, T]
{{g21 -> Fonction[{T}, \theta]}}

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
(* Assignment de la solution g21 *)

```

## Résultat de la fonction g2 :

$$\begin{aligned}
 &g2[T, Kv] \\
 &g3[T, 1, \gamma_{lim}] - g3[T, Kv, \gamma_{lim}] + \\
 &g5[T, 1, \theta, \theta] - g5[T, Kv, \theta, \theta] + \frac{\int_1^{Kv} \sigma_{2m} \text{Exp}[T, Kv x] \, dKv x}{\rho \theta} \\
 &g2[T, 1] \\
 &\theta
 \end{aligned}$$

## Chemin $C^{(3)}$ (glissement dans le plan 1-2 jusqu'à $\gamma_{lim}$ )

chemin3 = { p → θ};

### Gradient de la transformation

F = DefineTensor[{{1, γ, θ}, {θ, 1, θ}, {θ, θ, 1}}, {1, 1}, B0];  
 (\* cinématique d'un glissement de paramètre γ \*)  
 F3 = F.F2; (\* F2 : dilatation sphérique initiale \*)  
 F3 // Components // MatrixForm

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} Kv^{1/3} & Kv^{1/3} \gamma & \theta \\ \theta & Kv^{1/3} & \theta \\ \theta & \theta & Kv^{1/3} \end{pmatrix}$$

### Tenseur de déformation

B = F3 . F3<sup>T</sup>;

B // Components // MatrixForm

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} (1 + \gamma^2) & Kv^{2/3} \gamma & \theta \\ Kv^{2/3} \gamma & Kv^{2/3} & \theta \\ \theta & \theta & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

## Tenseur des contraintes

```
compσ3 = (σref // Components) /. chemin3 // Simplify;
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
σ3 = DefineTensor[compσ3, {1, 1}, B0];
```

## Contrainte de cisaillement

```
eq3 = τ3Exp[T, Kv, γ] == compσ3[[1, 2]]
```

$$\tau_{3Exp}[T, Kv, \gamma] = \frac{\rho \theta g_5^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \gamma, \theta]}{Kv}$$

(cette équation en g5 sera reprise plus loin)

---

## Chemin $C^{(4)}$ (plastification par glissement dans le plan 1-2)

```
chemin4 = {γ → γlim + p}; (* évolution plastifiante *)
```

## Tenseur des déformations

Le tenseur de déformation est identique au chemin précédent :

```
B // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} (1 + \gamma^2) & Kv^{2/3} \gamma & 0 \\ Kv^{2/3} \gamma & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

```
(B // Components) /. chemin4 // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} (1 + (p + \gamma_{lim})^2) & Kv^{2/3} (p + \gamma_{lim}) & 0 \\ Kv^{2/3} (p + \gamma_{lim}) & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

## Tenseur des contraintes

```
compσ4 = (σref // Components) /. chemin4 // Simplify;
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
σ4 = DefineTensor[compσ4, {1, 1}, B0];
```

## Contrainte de cisaillement

```
eq4 = τ4Exp[T, Kv, p] == compσ4[[1, 2]]
```

$$\tau_{4Exp}[T, Kv, p] = \frac{\rho \theta g5^{(0,0,1,0)}[T, Kv, p + \gamma \text{lim}, p]}{Kv}$$

(cette équation en g5 sera reprise plus loin)

## Condition de continuité des contraintes : dans le chemin 4 on a $[\partial_p \psi]_{(y=y_{lim}+p)} = 0$

```
cond = 0 == D[ψ, p] /. chemin4 // Simplify
```

```
g4(0,0,1)[T, Kv, p] + g5(0,0,0,1)[T, Kv, p + γlim, p] == 0
```

```
sol = DSolve[cond, g4, {T, Kv, p}]
```

```
{{g4 → Function[{T, Kv, p},
```

$$\int_1^p -g5^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \gamma \text{lim} + K[1], K[1]] dK[1] + C[1][T, Kv] ]}}$$

on arrange la solution

```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
```

```
  C[1] → g41 (* changement de nom de C[1] *) /.
```

```
  {dx_, 1, p} → {dx, 0, p}
```

```
  (* changement de la borne inférieure *) //
```

```
  ChVarMu[#, px] & (* changement de nom de la
```

```
  variable muette *) // ArrangeInt
```

$$g41[T, Kv] - \int_0^p g5^{(0,0,0,1)}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] dpx$$

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
```

```
(* Assignation de la solution g4 *)
```



```

g4[T, Kv, p]
g41[T, Kv] = ∫0p g5(0,0,0,1)[T, Kv, px + γlim, px] dpx

cond = g4[T, Kv, 0] == 0
g41[T, Kv] == 0

sol = DSolve[cond, g41, {T, Kv}]
{{g41 → Function[{T, Kv}, 0]}}

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
(* Assignation de la solution g41 *)

```

## Résultat de la fonction g4

```

g4[T, Kv, p]
- ∫0p g5(0,0,0,1)[T, Kv, px + γlim, px] dpx

g4[T, Kv, 0]
0

```

## Chemin $C^{(5)}$ ("retour élastique" de $\gamma_{lim}+p$ à $\gamma$ )

### Tenseur de déformation

Le tenseur de déformation est identique au chemin précédent

```
(B // Components) // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{pmatrix} K_v^{2/3} (1 + \gamma^2) & K_v^{2/3} \gamma & 0 \\ K_v^{2/3} \gamma & K_v^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & K_v^{2/3} \end{pmatrix}$$

## Tenseur des contraintes

```
compσ5 = σref // Components ;
```

Note: Components in CanonicalBasis

## Mesure de contrainte tangentielle

```
eq5 = τ5Exp[T, Kv, γ, p] == compσ5[[1, 2]]
```

$$\tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma, p] = \frac{\rho \theta g 5^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \gamma, p]}{Kv}$$

## Résolution de eq5 (on trouve g5)

```
sol = DSolve[eq5, g5, {T, Kv, γ, p}]
```

```
{{g5 → Function[{T, Kv, γ, p},
  ∫1γ  $\frac{Kv \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, K[1], p]}{\rho \theta} dK[1] + C[1][T, Kv, p]$  ]}}
```

On arrange la solution

```
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
```

```
  C[1] → g51 (* changement de nom de C[1] *) /.
```

```
  {dx_, 1, γ} → {dx, γlim + p, γ}
```

```
  (* changement de la borne inférieure *) //
```

```
  ChVarMu[#, γx] & (* changement de nom de la
```

```
  variable muette *) // ArrangeInt
```

$$g51[T, Kv, p] + \frac{Kv \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta}$$

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]];
```

```
(* Assignation de la solution g5 *);
```

```
cond = 0 == g5[T, Kv, γlim + p, p]
```

```
0 == g51[T, Kv, p]
```

```
sol = DSolve[cond, g51, {T, Kv, p}]
```

```
{{g51 → Function[{T, Kv, p}, 0]}}
```

```
Evaluate[sol[[1, 1, 1]] = sol[[1, 1, 2]];
(* Assigination de la solution g51 *)
```

### Résultat de la fonction g5 :

$$g5[T, K_v, \gamma, p] = \frac{K_v \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau5Exp[T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho\theta}$$

$$g5[T, K_v, \gamma\text{lim} + p, p] = \theta$$

## Résultats complets

### Vérifications

```
{eq1, eq2, eq5} // Simplify
{True, True, True}
```

### Relations nécessaires entre les mesures :

**eq3**  
 $\tau3Exp[T, K_v, \gamma] = \tau5Exp[T, K_v, \gamma, \theta]$

Le chemin 3 est un glissement avec  $p = 0$ . On pose donc :

```
 $\tau3Exp = \text{Function}[\{T, K_v, \gamma\}, \tau5Exp[T, K_v, \gamma, \theta]]$ 
Function[\{T, K_v, \gamma\}, \tau5Exp[T, K_v, \gamma, \theta]]
```

**eq4**  
 $\tau4Exp[T, K_v, p] = \tau5Exp[T, K_v, p + \gamma\text{lim}, p]$

Le chemin 4 (évolution plastifiante) est un glissement avec  $\gamma = p + \gamma\text{lim}$ . On pose donc :

```
 $\tau4Exp = \text{Function}[\{T, K_v, p\}, \tau5Exp[T, K_v, p + \gamma\text{lim}, p]]$ 
Function[\{T, K_v, p\}, \tau5Exp[T, K_v, p + \gamma\text{lim}, p]]
```

## Énergie libre massique de Helmholtz

$\psi = \psi$  // ArrangeInt

$$\frac{T \, g3[T0, 1, \gamma1im]}{T0} + \frac{\int_1^{kv} \sigma 2mExp[T, Kv, x] \, dKvx}{\rho0} +$$

$$\frac{Kv \int_0^p \tau 5Exp[T, Kv, px + \gamma1im, px] \, dpx}{\rho0} -$$

$$\frac{Kv \int_{\gamma1im}^0 \tau 5Exp[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho0} + \frac{Kv \int_{p+\gamma1im}^{\gamma} \tau 5Exp[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho0} +$$

$$\frac{T \int_{\gamma1im}^0 \tau 5Exp[T0, 1, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{T0 \, \rho0} - T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} \, dTx + Q1Exp[T]$$

Mise à zéro de l'énergie libre massique à l'état initial :

$eq = 0 == \psi /. \text{etatInitial}$

$$0 == g3[T0, 1, \gamma1im] + \frac{\int_{\gamma1im}^0 \tau 5Exp[T0, 1, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho0}$$

$sol = \text{Solve}[eq, g3[T0, 1, \gamma1im]]$

$$\left\{ \left\{ g3[T0, 1, \gamma1im] \rightarrow - \frac{\int_{\gamma1im}^0 \tau 5Exp[T0, 1, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho0} \right\} \right\}$$

## forme finale de l'énergie libre massique

$\psi = \psi /. \text{sol}[[1]]$

$$\frac{\int_1^{kv} \sigma 2mExp[T, Kv, x] \, dKvx}{\rho0} +$$

$$\frac{Kv \int_0^p \tau 5Exp[T, Kv, px + \gamma1im, px] \, dpx}{\rho0} - \frac{Kv \int_{\gamma1im}^0 \tau 5Exp[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho0} +$$

$$\frac{Kv \int_{p+\gamma1im}^{\gamma} \tau 5Exp[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho0} - T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} \, dTx + Q1Exp[T]$$

Il suffit donc d'identifier expérimentalement les trois fonctions  $Q1Exp[T]$ ,  $\sigma 2mExp[T, Kv]$  et  $\tau 5Exp[T, Kv, \gamma, p]$

## vérification de la condition de continuité des contraintes

$$D[\psi, p] /. \gamma \rightarrow p + \gamma \text{lim}$$

$$0$$

## Entropie massique

$$s = -D[\psi, T]$$

$$\int_{T_0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx - \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2mExp^{(1,\theta)} [T, Kv x] dKvx}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv \int_0^p \tau 5Exp^{(1,\theta,\theta,\theta)} [T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] dpx}{\rho \theta} +$$

$$\frac{Kv \int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5Exp^{(1,\theta,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, \theta] d\gamma x}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5Exp^{(1,\theta,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta}$$

$$s /. \text{etatInitial}$$

$$0$$

## Énergie interne massique

$$Q1Exp[T_0] = 0; (* \text{condition évidente sur } Q1Exp *)$$

**e = ψ + T s // Expand**

$$\begin{aligned}
 & \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}[T, Kv x] \, dKv x}{\rho \theta} + \\
 & \frac{Kv \int_0^p \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} - \frac{Kv \int_{\gamma \text{lim}}^{\theta} \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \\
 & \frac{Kv \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \frac{T \int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}^{(1,\theta)}[T, Kv x] \, dKv x}{\rho \theta} - \\
 & \frac{Kv T \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(1,\theta,\theta,\theta)}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} + \\
 & \frac{Kv T \int_{\gamma \text{lim}}^{\theta} \tau 5 \text{Exp}^{(1,\theta,\theta,\theta)}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \\
 & \frac{Kv T \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(1,\theta,\theta,\theta)}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} + Q1 \text{Exp}[T]
 \end{aligned}$$

**e /. etatInitial**

0

## Dérivée particulière de l'énergie interne massique

$T_p, Kvp, \gamma p, pp$  sont les dérivées particulières des variables d'état

$e_p = D[e, T] T_p + D[e, Kv] Kvp + D[e, \gamma] \gamma p + D[e, p] pp //$

**Collect[#, {Tp, Kvp, dp, pp}] &;**

Détail des différents termes :

**Coefficient[ep, Tp] // Expand**

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T \int_1^{K_v} \sigma_2 \text{Exp}^{(2, \theta)} [T, K_v x] dK_v x}{\rho \theta} - \\
 & \frac{K_v T \int_0^p \tau_5 \text{Exp}^{(2, \theta, \theta, \theta)} [T, K_v, p x + \gamma \text{lim}, p x] dp x}{\rho \theta} + \\
 & \frac{K_v T \int_{\gamma \text{lim}}^{\theta} \tau_5 \text{Exp}^{(2, \theta, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, \theta] d\gamma x}{\rho \theta} - \\
 & \frac{K_v T \int_{p + \gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau_5 \text{Exp}^{(2, \theta, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta} + Q1 \text{Exp}' [T]
 \end{aligned}$$

**Coefficient[ep, Kvp]**

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^p \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} - \frac{\int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \\
& \frac{\int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \frac{Kv \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(0,1,0,0)}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} - \\
& \frac{Kv \int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(0,1,0,0)}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \\
& \frac{Kv \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(0,1,0,0)}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \\
& \frac{T \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,0,0)}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} + \\
& \frac{T \int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,0,0)}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \\
& \frac{T \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,0,0)}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \\
& \frac{Kv T \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(1,1,0,0)}[T, Kv, px + \gamma \text{lim}, px] \, dpx}{\rho \theta} + \\
& \frac{Kv T \int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(1,1,0,0)}[T, Kv, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} - \\
& \frac{Kv T \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(1,1,0,0)}[T, Kv, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \\
& \frac{\sigma 2m \text{Exp}[T, Kv]}{\rho \theta} - \frac{T \sigma 2m \text{Exp}^{(1,0)}[T, Kv]}{\rho \theta}
\end{aligned}$$

**Coefficient[ep, \gamma p] // Factor**

$$\frac{1}{\rho \theta} Kv \left( \tau 5 \text{Exp}[T, Kv, \gamma, p] - T \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,0,0)}[T, Kv, \gamma, p] \right)$$



**Coefficient[ep, pp] // Factor**

$$\frac{1}{\rho\theta} K_v \left( \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}^{(\theta, \theta, \theta, 1)} [T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x - \right. \\ \left. T \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}^{(1, \theta, \theta, 1)} [T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x \right)$$

## Loi de comportement

**KG = KG // ArrangeInt // Expand**

$$\int_0^p \tau 5\text{Exp}[T, K_v, px + \gamma\text{lim}, px] dpx - \int_{\gamma\text{lim}}^{\theta} \tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma x, \theta] d\gamma x + \\ \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x + K_v \int_0^p \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, px + \gamma\text{lim}, px] dpx - \\ K_v \int_{\gamma\text{lim}}^{\theta} \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, \theta] d\gamma x + \\ K_v \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x + \sigma 2m\text{Exp}[T, K_v] - \\ \frac{\tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma, p]}{\gamma} - \frac{1}{3} \gamma \tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma, p]$$

**KB**

$$\frac{\tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma, p]}{K_v^{2/3} \gamma}$$

**dψdKv = D[ψ, Kv] // Simplify**

$$\frac{1}{\rho\theta} \left( \int_0^p \tau 5\text{Exp}[T, K_v, px + \gamma\text{lim}, px] dpx - \right. \\ \int_{\gamma\text{lim}}^{\theta} \tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma x, \theta] d\gamma x + \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}[T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x + \\ K_v \int_0^p \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, px + \gamma\text{lim}, px] dpx - \\ K_v \int_{\gamma\text{lim}}^{\theta} \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, \theta] d\gamma x + \\ \left. K_v \int_{p+\gamma\text{lim}}^{\gamma} \tau 5\text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)} [T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x + \sigma 2m\text{Exp}[T, K_v] \right)$$

$$\frac{d\psi d\gamma = D[\psi, \gamma] \text{Kv} \tau 5 \text{Exp}[T, \text{Kv}, \gamma, p]}{\rho \theta}$$



## Idéalisations du modèle $(T, K_v, \gamma, p)$

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs de l'idéalisation des expériences du modèle  $(T, K_v, \gamma, p)$  présentée dans la section 5.6 [p. 55].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>®</sup> dans sa version 11.1. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque Tens3D écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque<sup>(1)</sup> est téléchargeable à :

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html>

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

---

<sup>(1)</sup> Elle a été développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA<sup>®</sup>, mais elle est opérationnelle dans la version 11.1, à l'exception du rotationnel (`cur1`) d'un tenseur, dont le nom ne peut plus être surchargé.

# Une idéalisation pour le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$

## Préparations

Needs["Tens3D`"]; (\* message d'erreur sans importance, on n'utilise pas la fonction Curl \*)

SetDelayed: Tag Curl in  $\nabla_{\mathbf{B}_\times} \times T_*$  is Protected.

G = MetricTensor;

## Résultats du modèle $(T, K_v, \gamma, p)$

\$Assumptions = \$Assumptions && T > 0 && T0 > 0 &&

Kv > 0 &&  $\gamma \geq 0$  &&  $\gamma_{lim} > 0$  &&  $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$  && p > 0 &&

$\rho_0 > 0$  &&  $\xi_0 > 0$  &&  $\beta_0 > 0$  &&  $T > T_0 - 1 / \beta_0$  && Q1Exp[T0] == 0 ;

Énergie libre massique de Helmholtz :

$$\psi = \frac{\int_1^{K_v} \sigma_2 m \text{Exp}[T, K_v x] dK_v x}{\rho_0} +$$

$$\frac{1}{\rho_0} K_v \int_0^p \tau_5 \text{Exp}[T, K_v, p x + \gamma_{lim}, p x] dp x - \frac{K_v \int_{\gamma_{lim}}^0 \tau_5 \text{Exp}[T, K_v, \gamma x, 0] d\gamma x}{\rho_0} +$$

$$\frac{1}{\rho_0} K_v \int_{p+\gamma_{lim}}^{\gamma} \tau_5 \text{Exp}[T, K_v, \gamma x, p] d\gamma x - T \int_{T_0}^T \frac{Q1 \text{Exp}'[Tx]}{Tx} dTx + Q1 \text{Exp}[T];$$

Entropie massique :

## 2 | IdéalisationsTKvGammaP-1.nb

$$\mathbf{s} = -\mathbf{D}[\psi, T]$$

$$\int_{T_0}^T \frac{Q1 \text{Exp}'[Tx]}{Tx} dTx - \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}^{(1,0)} [T, Kv x] dKvx}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, px + \gamma 1im, px] dpx}{\rho \theta} +$$

$$\frac{Kv \int_{\gamma 1im}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, \theta] d\gamma x}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv \int_{p+\gamma 1im}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta}$$

Énergie interne massique :

$$\mathbf{e} = \psi + T \mathbf{s} \quad // \quad \text{Expand}$$

$$\frac{\int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp} [T, Kv x] dKvx}{\rho \theta} +$$

$$\frac{Kv \int_0^p \tau 5 \text{Exp} [T, Kv, px + \gamma 1im, px] dpx}{\rho \theta} - \frac{Kv \int_{\gamma 1im}^0 \tau 5 \text{Exp} [T, Kv, \gamma x, \theta] d\gamma x}{\rho \theta} +$$

$$\frac{Kv \int_{p+\gamma 1im}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp} [T, Kv, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta} - \frac{T \int_1^{Kv} \sigma 2m \text{Exp}^{(1,0)} [T, Kv x] dKvx}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv T \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, px + \gamma 1im, px] dpx}{\rho \theta} +$$

$$\frac{Kv T \int_{\gamma 1im}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, \theta] d\gamma x}{\rho \theta} -$$

$$\frac{Kv T \int_{p+\gamma 1im}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(1,0,\theta,\theta)} [T, Kv, \gamma x, p] d\gamma x}{\rho \theta} + Q1 \text{Exp} [T]$$

Dérivées partielles de l'énergie libre :

$D[\psi, K_v]$ 

$$\frac{\int_0^p \tau 5 \text{Exp}[T, K_v, p_x + \gamma \text{lim}, p_x] \, dp_x}{\rho \theta} - \frac{\int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}[T, K_v, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} +$$

$$\frac{\int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}[T, K_v, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \frac{K_v \int_0^p \tau 5 \text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)}[T, K_v, p_x + \gamma \text{lim}, p_x] \, dp_x}{\rho \theta} -$$

$$\frac{K_v \int_{\gamma \text{lim}}^0 \tau 5 \text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)}[T, K_v, \gamma x, \theta] \, d\gamma x}{\rho \theta} +$$

$$\frac{K_v \int_{p+\gamma \text{lim}}^{\gamma} \tau 5 \text{Exp}^{(\theta, 1, \theta, \theta)}[T, K_v, \gamma x, p] \, d\gamma x}{\rho \theta} + \frac{\sigma 2 \text{mExp}[T, K_v]}{\rho \theta}$$

 $D[\psi, \gamma]$ 

$$\frac{K_v \tau 5 \text{Exp}[T, K_v, \gamma, p]}{\rho \theta}$$

## Idéalisation de $\tau_{\text{exp}}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$

```
 $\tau 5 \text{Expid} = \text{Function}[\{T, K_v, \gamma, p\},$   

 $\text{Evaluate}[(\mu \theta \gamma \text{lim} + k \theta p - \mu \theta (\gamma \text{lim} + p - \gamma)) / K_v // \text{Simplify}]]$ 
```

```
 $\text{Function}[\{T, K_v, \gamma, p\}, \frac{k \theta p - p \mu \theta + \gamma \mu \theta}{K_v}]$ 
```

 $\tau 5 \text{Expid}[T, K_v, \gamma, p]$ 

$$\frac{k \theta p - p \mu \theta + \gamma \mu \theta}{K_v}$$

### énergie libre partiellement idéalisée

```
 $\psi \text{id} = \psi /. \tau 5 \text{Exp} \rightarrow \tau 5 \text{Expid} // \text{Collect}[\#, \{\mu \theta, k \theta\}, \text{Simplify}] \&$ 
```

$$- \frac{k \theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma \text{lim})}{2 \rho \theta} + \frac{(p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma \text{lim}) \mu \theta}{2 \rho \theta} +$$

$$\frac{\int_1^{K_v} \sigma 2 \text{mExp}[T, K_v x] \, dK_v x}{\rho \theta} - T \int_{T_0}^T \frac{Q1 \text{Exp}'[Tx]}{Tx} \, dTx + Q1 \text{Exp}[T]$$

## Idéalisation de $\sigma_{\text{exp}}^{(2)}(T, K_V)$

$\sigma_{2m\text{Expid}} = \text{Function}[\{T, K_V\}, \text{Evaluate}[\xi\theta \text{Log}[K_V] + \sigma_{1m\text{Expid}}[T]]]$

$\text{Function}[\{T, K_V\}, \xi\theta \text{Log}[K_V] + \sigma_{1m\text{Expid}}[T]]$

$\sigma_{2m\text{Expid}}[T, K_V]$

$\xi\theta \text{Log}[K_V] + \sigma_{1m\text{Expid}}[T]$

La déformation sphérique après passage de  $T_0$  à  $T$  à contrainte nulle est :  $K_V = 1 + \beta\theta (T - T_0)$

Après retour à  $K_V=1$ , la contrainte dans l'état E1 est :

$\sigma_{1m\text{Expid}} = \text{Function}[T, -\xi\theta \text{Log}[1 + \beta\theta (T - T_0)]]$

(\* retour à  $K_V=1$  après la dilatation/contraction thermique libre \*)

$\text{Function}[T, -\xi\theta \text{Log}[1 + \beta\theta (T - T_0)]]$

$\sigma_{1m\text{Expid}}[T]$

$-\xi\theta \text{Log}[1 + (T - T_0) \beta\theta]$

$\sigma_{2m\text{Expid}}[T, K_V]$

$\xi\theta \text{Log}[K_V] - \xi\theta \text{Log}[1 + (T - T_0) \beta\theta]$

### énergie libre partiellement idéalisée

$\psi_{id} = (\psi_{id} /. \sigma_{2m\text{Exp}} \rightarrow \sigma_{2m\text{Expid}}) // \text{Simplify}[\#, \text{Assumptions} \rightarrow K_V > \theta] \&$

$$\frac{1}{2 \rho\theta} \left( -k\theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma_{lim}) + \right. \\ \left. (p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma_{lim}) \mu\theta - 2 T \rho\theta \int_{T_0}^T \frac{Q_{1\text{Exp}}'[T_x]}{T_x} dT_x + 2 \xi\theta \right. \\ \left. \left( 1 - K_V + K_V \text{Log}\left[\frac{K_V}{1 + T \beta\theta - T_0 \beta\theta}\right] + \text{Log}[1 + T \beta\theta - T_0 \beta\theta] \right) + 2 \rho\theta Q_{1\text{Exp}}[T] \right)$$

### entropie massique partiellement idéalisée

$sid = -D[\psi_{id}, T] // \text{Collect}[\#, \xi\theta, \text{Factor}] \&$

$$\frac{(-1 + K_V) \beta\theta \xi\theta}{(1 + T \beta\theta - T_0 \beta\theta) \rho\theta} + \int_{T_0}^T \frac{Q_{1\text{Exp}}'[T_x]}{T_x} dT_x$$



## énergie interne massique partiellement idéalisée

$$e_{id} = \psi_{id} + T s_{id}$$

$$T \left( \frac{(-1 + K_v) \beta \theta \xi \theta}{(1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta) \rho \theta} + \int_{T_0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx \right) +$$

$$\frac{1}{2 \rho \theta} \left( -k \theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma \text{lim}) + (p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma \text{lim}) \mu \theta - \right.$$

$$2 T \rho \theta \int_{T_0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx + 2 \xi \theta$$

$$\left. \left( 1 - K_v + K_v \text{Log} \left[ \frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta} \right] + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta] \right) + 2 \rho \theta Q1Exp[T] \right)$$

## Idéalisation de $Q_{exp}^{(1)}(T)$

$\$Assumptions = \$Assumptions \&\& Cp > 0;$

Premier principe en fin de dilatation libre ( $K_v = 1 + \beta \theta (T - T_0)$ ):

eq =

$Cp (T - T_0) == e_{id} /. p \rightarrow \theta /. \gamma \rightarrow \theta /. K_v \rightarrow 1 + \beta \theta (T - T_0) // \text{Simplify}$

$$Cp (T - T_0) == \frac{\xi \theta \left( \frac{(T - T_0) \beta \theta (-1 + T_0 \beta \theta)}{1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta} + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta] \right)}{\rho \theta} + Q1Exp[T]$$

sol = Solve[eq, Q1Exp[T]]

$$\left\{ \left\{ Q1Exp[T] \rightarrow Cp (T - T_0) - \frac{\xi \theta \left( \frac{(T - T_0) \beta \theta (-1 + T_0 \beta \theta)}{1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta} + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta] \right)}{\rho \theta} \right\} \right\}$$

Q1Expid = Function[T, Evaluate[sol[[1, 1, 2]]]]

$$\text{Function} [T, Cp (T - T_0) - \frac{\xi \theta \left( \frac{(T - T_0) \beta \theta (-1 + T_0 \beta \theta)}{1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta} + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta] \right)}{\rho \theta}]$$

Q1Expid[T]

$$Cp (T - T_0) - \frac{\xi \theta \left( \frac{(T - T_0) \beta \theta (-1 + T_0 \beta \theta)}{1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta} + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T_0 \beta \theta] \right)}{\rho \theta}$$

## énergie libre complètement idéalisée

$\psi_{id} = \psi_{id} /. Q1Exp \rightarrow Q1Exp_{id}$

$$\frac{1}{2 \rho \theta} \left( -k \theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma_{lim}) + (p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma_{lim}) \mu \theta - \right. \\ \left. 2 T \rho \theta \left( \frac{(-T + T \theta) \beta \theta^2 \xi \theta}{(1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta) \rho \theta} + C_p \text{Log} \left[ \frac{T}{T \theta} \right] \right) + \right. \\ \left. 2 \xi \theta \left( 1 - K_v + K_v \text{Log} \left[ \frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta} \right] + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta] \right) + \right. \\ \left. 2 \rho \theta \left( C_p (T - T \theta) - \frac{\xi \theta \left( \frac{(T - T \theta) \beta \theta (-1 + T \theta \beta \theta)}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta} + \text{Log} [1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta] \right)}{\rho \theta} \right) \right)$$

$\psi_{id} = \psi_{id} // \text{Collect}[\#, \{\mu \theta, k \theta, \xi \theta\}, \text{Simplify}] \&$

$$- \frac{k \theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma_{lim})}{2 \rho \theta} + \frac{(p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma_{lim}) \mu \theta}{2 \rho \theta} - \\ C_p \left( -T + T \theta + T \text{Log} \left[ \frac{T}{T \theta} \right] \right) + \frac{\xi \theta \left( 1 - K_v + T \beta \theta - T \theta \beta \theta + K_v \text{Log} \left[ \frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta} \right] \right)}{\rho \theta}$$

## Résultats du modèle idéalisé

### Énergie libre massique

$\psi_{id}$

$$- \frac{k \theta p (p - 2 \gamma + 2 \gamma_{lim})}{2 \rho \theta} + \frac{(p^2 - 2 p \gamma + \gamma^2 + 2 p \gamma_{lim}) \mu \theta}{2 \rho \theta} - \\ C_p \left( -T + T \theta + T \text{Log} \left[ \frac{T}{T \theta} \right] \right) + \frac{\xi \theta \left( 1 - K_v + T \beta \theta - T \theta \beta \theta + K_v \text{Log} \left[ \frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta} \right] \right)}{\rho \theta}$$

## Contrainte de référence

$$d\psi dK_v = D[\psi id, K_v]$$

$$\frac{\xi \theta \operatorname{Log}\left[\frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta}\right]}{\rho \theta}$$

$$d\psi d\gamma = D[\psi id, \gamma] // \text{Collect}[\#, \{k\theta, \mu\theta\}, \text{Simplify}] \&$$

$$\frac{k\theta p}{\rho \theta} + \frac{(-p + \gamma) \mu \theta}{\rho \theta}$$

$$B = \text{DefineTensor}[\{\{B11, B12, B13\}, \{B12, B22, B23\}, \{B13, B23, B33\}\}, \{1, -1\}, \text{CanonicalBasis}];$$

## contrainte de référence quand $\gamma > 0$

$$S\gamma \text{Gen} = (1 / \gamma / K_v^{2/3}) \circ B \oplus (-1 / \gamma) \circ G \oplus (-\gamma / 3) \circ G ;$$

$$\sigma \text{refGen} = (\rho \theta / K_v d\psi dK_v K_v) \circ G \oplus (\rho \theta / K_v d\psi d\gamma) \circ (S\gamma \text{Gen}) ;$$

$$\text{comp}\sigma \text{refGen} = \sigma \text{refGen} // \text{Components};$$

Note: Components in CanonicalBasis

$$\text{comp}\sigma \text{refGen}[[1, 1]]$$

$$\frac{(3 B11 - K_v^{2/3} (3 + \gamma^2)) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu \theta)}{3 K_v^{5/3} \gamma} + \xi \theta \operatorname{Log}\left[\frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta}\right]$$

$$\text{comp}\sigma \text{refGen}[[2, 2]]$$

$$\frac{(3 B22 - K_v^{2/3} (3 + \gamma^2)) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu \theta)}{3 K_v^{5/3} \gamma} + \xi \theta \operatorname{Log}\left[\frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta}\right]$$

$$\text{comp}\sigma \text{refGen}[[3, 3]]$$

$$\frac{(3 B33 - K_v^{2/3} (3 + \gamma^2)) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu \theta)}{3 K_v^{5/3} \gamma} + \xi \theta \operatorname{Log}\left[\frac{K_v}{1 + T \beta \theta - T \theta \beta \theta}\right]$$

$$\text{comp}\sigma \text{refGen}[[1, 2]]$$

$$\frac{B12 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu \theta)}{K_v^{5/3} \gamma}$$

8 | *IdéalisationsTKvGammaP-1.nb*

**compσrefGen[[1, 3]]**

$$\frac{B13 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{Kv^{5/3} \gamma}$$

**compσrefGen[[2, 3]]**

$$\frac{B23 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{Kv^{5/3} \gamma}$$

## contrainte de référence quand $\gamma \rightarrow 0$

Composantes de la première direction propre de B :

**E1V = DefineTensor[{{E11, E12, E13}, {E12, E22, E23}, {E13, E23, E33}},  
{1, -1}, CanonicalBasis];**

**Sγθ = (3 / Sqrt[3]) ◦ E1V ⊕ (-1 / Sqrt[3]) ◦ G**

Tens3D`Private`Tensor\$12829

**σrefθ = (ρθ / Kv dψdKv Kv) ◦ G ⊕ (ρθ / Kv dψdγ) ◦ (Sγθ);**

**compσrefθ = σrefθ // Components;**

Note: Components in CanonicalBasis

**compσrefθ[[1, 1]]**

$$\frac{(-1 + 3 E11) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{\sqrt{3} Kv} + \xi\theta \text{Log}\left[\frac{Kv}{1 + T \beta\theta - T\theta \beta\theta}\right]$$

**compσrefθ[[2, 2]]**

$$\frac{(-1 + 3 E22) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{\sqrt{3} Kv} + \xi\theta \text{Log}\left[\frac{Kv}{1 + T \beta\theta - T\theta \beta\theta}\right]$$

**compσrefθ[[3, 3]]**

$$\frac{(-1 + 3 E33) (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{\sqrt{3} Kv} + \xi\theta \text{Log}\left[\frac{Kv}{1 + T \beta\theta - T\theta \beta\theta}\right]$$

**compσrefθ[[1, 2]]**

$$\frac{\sqrt{3} E12 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{Kv}$$

`compσrefθ[[1, 3]]`

$$\frac{\sqrt{3} E13 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{Kv}$$

`compσrefθ[[2, 3]]`

$$\frac{\sqrt{3} E23 (k\theta p + (-p + \gamma) \mu\theta)}{Kv}$$

## Entropie massique

`sid = -D[ψid, T]`

$$-\frac{\left(\beta\theta - \frac{Kv \beta\theta}{1+T \beta\theta - T\theta \beta\theta}\right) \xi\theta}{\rho\theta} + Cp \operatorname{Log}\left[\frac{T}{T\theta}\right]$$

## Énergie interne massique

`eid = ψid + T sid // Collect[#, {Cp, μθ, kθ, ξθ}, Simplify] &`

$$Cp (T - T\theta) - \frac{k\theta p (p - 2\gamma + 2\gamma\lim)}{2 \rho\theta} + \frac{(p^2 - 2p\gamma + \gamma^2 + 2p\gamma\lim) \mu\theta}{2 \rho\theta} + \frac{\xi\theta \left(1 - T\theta \beta\theta + \frac{Kv (-1+T\theta \beta\theta)}{1+T \beta\theta - T\theta \beta\theta} + Kv \operatorname{Log}\left[\frac{Kv}{1+T \beta\theta - T\theta \beta\theta}\right]\right)}{\rho\theta}$$

## Relation entre Cp et Cv

`Cv == (D[Q1Expid[T], T] // Collect[#, {Cp, ξθ}, Simplify] &)`

$$Cv == Cp - \frac{T \beta\theta^2 \xi\theta}{(1 + T \beta\theta - T\theta \beta\theta)^2 \rho\theta}$$

Noter que si Cp est supposé constant en température, Cv ne l'est pas.

## Dérivée particulière de l'énergie interne

`D[eid, T] // Simplify // Collect[#, {Cp, ξθ}, Simplify] &`

$$Cp - \frac{Kv T \beta\theta^2 \xi\theta}{(1 + T \beta\theta - T\theta \beta\theta)^2 \rho\theta}$$

10 | IdéalisationsTKvGammaP-1.nb

D[eid, Kv] // Simplify

$$\frac{\xi \theta \left( \frac{\tau \beta \theta}{1 + \tau \beta \theta - \tau \theta \beta \theta} + \text{Log} \left[ \frac{Kv}{1 + \tau \beta \theta - \tau \theta \beta \theta} \right] \right)}{\rho \theta}$$

D[eid, γ] // Collect[#, {kθ, μθ}, Simplify] &

$$\frac{k \theta p}{\rho \theta} + \frac{(-p + \gamma) \mu \theta}{\rho \theta}$$

L'énergie interne et l'énergie libre ne varient pas pendant les évolutions plastifiantes ( $\dot{\rho} > 0$  et  $\gamma = p + \gamma_{\text{lim}}$ )

D[eid, p] // Simplify

$$-\frac{(p - \gamma + \gamma_{\text{lim}}) (k \theta - \mu \theta)}{\rho \theta}$$

D[ψid, p] // Simplify

$$-\frac{(p - \gamma + \gamma_{\text{lim}}) (k \theta - \mu \theta)}{\rho \theta}$$

D[sid, p]

0

## Essai de traction

Tenseur de déformation dans un essai de traction de direction  $e_1$

\$Assumptions = \$Assumptions && λ1 > 0 && λ2 > 0;

B = DefineTensor[

{ {λ1^2, 0, 0}, {0, λ2^2, 0}, {0, 0, λ2^2}}, {1, -1}, CanonicalBasis]

Tens3D`Private`Tensor\$18313

## Variables d'état cinématiques

$K_v = \text{Sqrt}[I3[B]] // \text{Simplify}$

$\lambda_1 \lambda_2^2$

$\delta = \text{Sqrt}[3] / 9 I1[B]^{(3/2)} / K_v$

(\* définition de la distorsion stérique maximale \*)

$$\frac{(\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda_1 \lambda_2^2}$$

$\gamma = \text{Sqrt}[3] \text{Sqrt}[\delta^{(2/3)} - 1] // \text{Simplify} (* \text{formule 4.2} *)$

$$\sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}$$

## Contrainte de référence

$\sigma_{\text{ref}} =$

$\text{Tens3D} \backslash \text{Private} \backslash \text{Tensor} \$22220$

$\text{comp}\sigma_{\text{ref}} = \sigma_{\text{ref}} // \text{Components};$

Note: Components in CanonicalBasis

## En traction le tenseur des contraintes est uniaxial :

Vérifications :

$\text{comp}\sigma_{\text{ref}}[[2, 2]] == \text{comp}\sigma_{\text{ref}}[[3, 3]]$

True

$\text{Asym}[\sigma_{\text{ref}}] // \text{Components}$

Note: Components in CanonicalBasis

$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}$

$\{\text{comp}\sigma_{\text{ref}}[[1, 2]] == 0, \text{comp}\sigma_{\text{ref}}[[1, 3]] == 0, \text{comp}\sigma_{\text{ref}}[[2, 3]] == 0\}$

{True, True, True}

## Les contraintes principales transverses sont nulles

eq1 = 0 == (compref[[2, 2]] // Collect[#, {k0, μ0, ξ0}, Simplify] &)

$$\theta = \frac{k_0 p (-\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{3 \lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}} + \frac{(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left( -p + \sqrt{-3 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{4/3} + 2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2/3}} \right) \mu_0}{3 \lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}} + \xi_0 \text{Log} \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{1 + T \beta_0 - T_0 \beta_0} \right]$$

Cette équation est la relation (compliquée et non solvable analytiquement) entre  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$

## Contrainte de traction

eq2 = σ11 == compref[[1, 1]] // Collect[#, {k0, μ0, ξ0}, Simplify] &

$$\sigma_{11} = \frac{2 k_0 p (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3 \lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}} + \frac{2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left( -p + \sqrt{-3 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{4/3} + 2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2/3}} \right) \mu_0}{3 \lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}} + \xi_0 \text{Log} \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{1 + T \beta_0 - T_0 \beta_0} \right]$$

une autre expression de la contrainte de traction :

eq3 = σ11 == (eq1[[2]] - eq2[[2]]) // Collect[#, {k0, μ0, ξ0}, Simplify] &

σ11 ==

$$\frac{k_0 p (-\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left( -p + \sqrt{-3 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{4/3} + 2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2/3}} \right) \mu_0}{\lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3}}}}$$



La "courbe de traction"  $\sigma_{11} = f(\lambda_1)$  est *a priori* non linéaire (même pour  $p=0$ )

### Remarque : en élasticité ( $p = 0$ )

$\sigma_{11\text{elas}} = (\text{eq3}[[2]] /. p \rightarrow 0 // \text{Simplify})$

$$\sigma_{11\text{elas}} = \frac{(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mu_0}{\lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3}}$$

Relation entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en élasticité

$\text{eq1} /. p \rightarrow 0 // \text{Simplify}$

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \mu_0 = 3 \lambda_1^{5/3} \lambda_2^{10/3} \xi_0 \text{Log} \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{1 + T \beta_0 - T_0 \beta_0} \right]$$