



HAL
open science

**Méthodes aux différences finies pour la résolution
numérique des équations aux dérivées partielles de la
dynamique des fluides et de la magnétohydrodynamique
dans le cadre de problèmes à conditions aux limites et
conditions initiales**

Jean-Marie Malherbe

► **To cite this version:**

Jean-Marie Malherbe. Méthodes aux différences finies pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la dynamique des fluides et de la magnétohydrodynamique dans le cadre de problèmes à conditions aux limites et conditions initiales. École thématique. France. 1984. cel-01697235

HAL Id: cel-01697235

<https://hal.science/cel-01697235>

Submitted on 31 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LA RÉOLUTION
NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE
LA DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE
DANS LE CADRE DE PROBLÈMES À CONDITIONS AUX LIMITES
ET CONDITIONS INITIALES.

PAR J.M. MALHERBE

Assistant à l'Observatoire de Paris-Meudon

Exposé présenté à l'Ecole de Goutelas 1984

SOMMAIRE

- I - Généralités sur les schémas numériques aux différences finies.
 - A - Définitions : convergence, erreur de troncature, stabilité.
 - B - Schémas implicites, explicites.
 - C - Dissipation et dispersion numériques.
 - D - Tableau comparatif d'algorithmes.
 - E - Conditions aux limites.
 - F - Limitation aux nombres de Reynolds petits.

- II - Présentation de SHASTA, code MHD bidimensionnel.
 - A - Equations résolues par SHASTA.
 - B - Organigramme simplifié.
 - C - Partie diffusive.
 - D - Partie convective.

- III - Exemple d'application de SHASTA à la résolution d'un problème physique : la reconnection magnétique adiabatique d'une nappe de courant.
 - A - Conditions initiales et conditions aux limites.
 - B - Résultats.

Avertissement :

Le premier chapitre est spécialement destiné aux personnes non initiées aux schémas numériques aux différences finies. Les algorithmes présentés sont toujours appliqués à des problèmes monodimensionnels, pour des raisons de simplicité, et sont généralisables à 2 ou 3 dimensions. Les méthodes spectrales utilisées en turbulence ne sont pas exposées.

I - Généralités sur les schémas numériques utilisés pour la résolution des équations aux dérivées partielles de la MHD ou de la dynamique des fluides.

I - A - Définitions : convergence, erreur de troncature, stabilité (Chu, 1978)

Considérons un ensemble d'équations différentielles dénoté par

$$L u = 0$$

avec L = opérateur matriciel aux dérivées partielles en t, x, y, z et

$u(x, y, z, t)$ = solution exacte du système.

Ce système d'équations est approximé à l'aide d'un schéma numérique aux différences finies L_h par

$$L_h u_h = 0$$

où $h \equiv \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ et où u_h est la solution approchée du système d'équations.

1 - Convergence et taux de convergence du schéma numérique

Le schéma converge si $\| u_h - u \| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ ($\| \|$ désigne une norme).

$$\text{si } \| u_h - u \| = O(\Delta t^{p_1}, \Delta x^{p_2}, \dots)$$

$p_1, p_2 \dots$ sont les taux de convergence du schéma numérique.

2 - Consistance et erreur de troncature du schéma numérique

si $\| L_h u - Lu \| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$, l'opérateur aux différences L_h est une approximation consistante de l'opérateur différentiel L .

$$\text{si } \| L_h u - Lu \| = O(\Delta t^{q_1}, \Delta x^{q_2}, \dots)$$

q_1, q_2, \dots sont les ordres d'exactitude du schéma numérique et

$O(\Delta t^{q_1}, \Delta x^{q_2}, \dots)$ est l'erreur de troncature du schéma numérique.

Celui-ci sera d'autant meilleur que q_1, q_2, \dots seront élevés.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{On pose } \underline{u_j^n = u(n \Delta t, j \Delta x)}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u_j^n &= u_{j-1}^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \text{développements de Taylor.}$$

d'où

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_{\text{erreur de troncature}}$$

Ce schéma est du
1er ordre en t et en x

3 - Stabilité

Un schéma aux différences finies est stable, lorsque $h \rightarrow 0$, s'il existe C_1, C_2 constantes telles que

$$\|u_h\| \leq C_1 e^{C_2(t-t_0)} \|u_h(x, t_0)\|$$

avec $C_2 \leq$ taux de croissance de la solution exacte.

Deux méthodes d'étude de la stabilité existent :

- méthode de l'énergie

- méthode de Von Neumann, consistant à effectuer une analyse de Fourier spatiale de la solution, permettant d'en déduire une matrice d'amplification complexe $M(k)$ définie par :

$$\bar{u}_k^{n+1} = M(k) \bar{u}_k^n$$

avec $u_j^n = \sum_k \bar{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$ où \bar{u}_k^n sont les composantes de Fourier de u_j^n .

Le critère de stabilité de Von Neumann est :

$\|M(k)\| \leq 1 + O(\Delta t)$. Donc, s'il existe un nombre α tel que $\|M(k)\| \leq 1 + \alpha \Delta t$ (ce qui permet un taux de croissance exponentiel en $e^{\alpha t}$ que peut posséder la solution exacte), alors le schéma numérique est stable. C'est une condition nécessaire, qui n'est pas toujours suffisante.

• Exemple N° 1 : schéma non centré en x (voir ci dessus):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^n = \sum_k \bar{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_k^{n+1}}{\bar{u}_k^n} = \underbrace{1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{-ik\Delta x} - 1)}_{\text{matrice d'amplification}}$$

\equiv rapport d'amplification complexe π

$$\pi = 1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{-ik\Delta x} - 1)$$

$$\pi = 1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos(k\Delta x) - 1) - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

$$|\pi| \leq 1 + cte \times \Delta t$$

$$\text{si } \left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1 \quad \text{soit si } \boxed{\Delta t < \left| \frac{\Delta x}{a} \right|}$$

C'est la condition de "Courant - Friedrichs-Lewy"

- Exemple N° 2 : schéma centré en x :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

erreur de troncature :

$$\frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (\text{1er ordre en } t, \text{ 2ème ordre en } x)$$

$$\pi = 1 - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

est instable

- Exemple N° 3 : schéma de Lax - Friedrichs :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\text{stable si } \left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1$$

$$\text{erreur de troncature : } \frac{1}{2} \Delta t u_{tt} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx} \quad (\text{ordre 1 en } t \text{ et } x).$$

$$\text{rapport d'amplification : } \pi = \cos(k\Delta x) - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

I - B - Schémas implicites, explicites

Dans ce qui suit, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$

1 - Schéma explicite :

Les dérivées partielles spatiales sont évaluées à $n \Delta t$. Cette méthode est directe, rapide, et locale, car elle permet le calcul direct de u_i^{n+1} (i fixé) à partir des u_j^n individuellement en chaque point de la grille.

Par contre, les méthodes explicites sont stables sous condition restrictive (sur le rapport $|v \Delta t / \Delta x|$ en général, v désignant une vitesse caractéristique).

Exemple : équation $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = 0$

avec le schéma : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = 0$

$\Rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$ Ce schéma est instable (voir ci-dessus).

2 - Schéma implicite :

Dans ce type de schéma, les dérivées partielles spatiales sont évaluées au temps $(n+1) \Delta t$. Il est donc impossible de calculer directement u_i^{n+1} (i fixé) à partir des u_j^n en chaque point de la grille, individuellement, puisque chaque équation comporte plusieurs inconnues (méthode non locale). On doit résoudre un système d'équations linéaires permettant le calcul des u_j^{n+1} à partir des u_j^n . Par contre, les méthodes implicites sont souvent inconditionnellement stables.

Exemple : équation $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = 0$

approximée par : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta x} = 0$

(même schéma que précédemment, mais implicite).

erreur de troncature : $\frac{1}{2} u_{tt} \Delta t + \frac{a}{3} (\Delta x)^2 u_{xxx}$ (ordre 1 en t, 2 en x)

rapport d'amplification : $\tau = (1 + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x))^{-1}$

on a toujours $|\tau| < 1 \Rightarrow$ schéma inconditionnellement stable.

Méthode de résolution :

$$-u_{j-1}^{n+1} + \frac{2\Delta x}{a\Delta t} u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = u_j^n \frac{2\Delta x}{a\Delta t}$$

Soit p l'ordre du système :

$$\begin{pmatrix} \frac{2\Delta x}{a\Delta t} & b & & & 0 \\ -1 & \frac{2\Delta x}{a\Delta t} & 1 & & \\ & -1 & \frac{2\Delta x}{a\Delta t} & 1 & \\ & & -1 & \frac{2\Delta x}{a\Delta t} & 1 \\ 0 & & & -1 & \frac{2\Delta x}{a\Delta t} & c & \frac{2\Delta x}{a\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}^n \frac{2\Delta x}{a\Delta t}$$

b et c dépendent des conditions aux limites (en $j=1$ ou $j=p$):

- si $\partial u / \partial x = 0$ alors $b = 0$ ($j=1$) ou $c = 0$ ($j=p$)
- condition de symétrie : $b = 2$ ($j=1$) ou $c = -2$ ($j=p$)
- u fixé : alors l'ordre du système diminue de 1 ou 2.

On est donc amené à la résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale.

3 - Effet du pas temporel sur les schémas implicites

Bien que les schémas implicites soient inconditionnellement stables, un pas temporel trop grand peut avoir un effet catastrophique :

Dans le cas ci-dessus, $\tau = \frac{1}{1 + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)}$

si Δt est grand, alors $|\tau| \ll 1$; l'algorithme devient très dissipatif et il faut prendre garde à ce que cette dissipation numérique reste négligeable devant la dissipation physique (si elle existe).

Dans un algorithme de Crank-Nicolson (voir table 1),

$$\tau = \frac{1 - i a (\Delta t / \Delta x) \sin(k \Delta x)}{1 + i a (\Delta t / \Delta x) \sin(k \Delta x)}$$

si Δt est grand, alors $\tau \rightarrow -1$ et on obtient des oscillations parasites d'origine numérique.

I - C - Dissipation et Dispersion numériques (Chu, 1978)

La dissipation se caractérise par un amortissement numérique des composantes de Fourier \bar{u}_k^n tandis que la dispersion engendre la propagation d'ondes planes à différentes vitesses de phases $C(k)$.

Avec
$$u_j^n = \sum_k \bar{u}_k^n e^{i k j \Delta x}$$

$$\tau(k) = \frac{\bar{u}_k^{n+1}}{\bar{u}_k^n} \quad \text{est le rapport d'amplification complexe.}$$

On pose
$$\tau(k) = |\tau(k)| e^{i \varphi(k)}$$

si $|\tau| = 1$ le schéma est conservatif (pas de dissipation).
 si $|\tau| < 1$ " est dissipatif.

La vitesse de phase des ondes est
$$C(k) = - \frac{\varphi(k)}{k \Delta t}$$

la pulsation " est
$$\omega(k) = - \varphi(k) / \Delta t$$

la vitesse de groupe " est
$$C_g(k) = - \frac{1}{\Delta t} \frac{d \varphi(k)}{d k}$$

si $\begin{cases} C(k) = \text{constante, le schéma n'est pas dispersif.} \\ C(k) \text{ dépend de } k, \text{ le schéma est dispersif.} \end{cases}$

• Ordre de dissipation et de dispersion

aux grandes longueurs d'onde ($\lambda \approx$ taille de la grille), on peut développer l'amplitude $|\tau|$ et la vitesse de phase C en puissances de $k \Delta x$.

Si $|\tau(k)| = 1 + O[(k \Delta x)^q]$ q est l'ordre de dissipation global de l'algorithme.

Si $C(k) = C_0 + O((k \Delta x)^\Delta)$ Δ est l'ordre de dispersion global de l'algorithme.

Dans le cas d'un problème physiquement dissipatif (par exemple $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = \nu \partial^2 u / \partial x^2$), on peut écrire :

$$|\tau(k)| = 1 - \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (k \Delta x)^2 + O \left[(k \Delta x)^{q'} \right]$$

L'ordre de dissipation numérique est alors q' . Il faut s'assurer dans un schéma numérique décrivant un tel problème que $q' > 2$ (ordre de dissipation numérique plus élevé que l'ordre de dissipation physique).

Dans le cas d'un problème physiquement dispersif (par exemple $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = \varepsilon \partial^3 u / \partial x^3$), on peut écrire :

$$c(k) = c_0 + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} (k \Delta x)^2 + O \left((k \Delta x)^{d'} \right)$$

L'ordre de dispersion numérique est alors d' . Il faut donc s'assurer dans un schéma numérique décrivant ce problème que $d' > 2$ (c'est-à-dire que la dispersion numérique soit d'ordre plus élevé que la dispersion physique).

Un schéma numérique sera d'autant meilleur que sa dissipation et sa dispersion numérique seront d'ordre élevé.

Exemple :

Pour le schéma numérique de Lax-Friedrichs,

$$\begin{aligned} \tau &= \cos(k \Delta x) - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k \Delta x) \\ |\tau| &= \left(1 - (1 - a^2 \Delta t^2 / \Delta x^2) \sin^2(k \Delta x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi(k) &= \arctg \left[-a(\Delta t / \Delta x) \operatorname{tg}(k \Delta x) \right] \end{aligned}$$

Ce schéma est numériquement d'autant plus dissipatif et dispersif que la longueur d'onde est courte ($k \Delta x$ grand).

Dans un tel schéma, très dissipatif, la dispersion des petits λ a peu d'effet, car les courtes longueurs d'ondes sont amorties les premières. Par contre, dans un schéma conservatif, la dispersion peut produire des petites échelles engendrant des oscillations nuisibles à la stabilité du schéma (génération de masses négatives). Aux grandes longueurs d'onde, l'algorithme de Lax-Friedrichs donne

$$|\tau(k)| = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) (k \Delta x)^2 \quad (\text{dissipatif d'ordre } 2)$$

$$C(\rho) = a + \frac{a}{3} \left(1 - a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) (\rho \Delta x)^2 \quad (\text{dispersif d'ordre 2})$$

I - D - Tableau comparatif d'algorithmes (table 1) pour $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = 0$

Les Algorithmes explicites les meilleurs et les plus simples pour résoudre la partie convective des équations sont ceux de Lax-Wendroff et Leapfrog. Ils sont tous deux d'ordre 2 en t et x, possèdent peu (Lax Wendroff) ou pas (Leapfrog) de dissipation numérique, mais sont dispersifs (ordre 2). L'algorithme de Lax-Wendroff peut traiter les chocs (car dissipatif, la viscosité numérique permettant d'élargir artificiellement la structure du choc de façon compatible avec le pas de la grille), mais sa dispersion génère des oscillations parasites que, nous verrons plus loin, l'algorithme FCT de SHASTA permet d'éliminer.

En effet, la dispersion doit être faible, surtout si la dissipation physique (et à plus forte raison la dissipation numérique) l'est, car celle-ci ne sera pas capable d'amortir les oscillations catastrophiques de courte longueur d'onde. Ceci est particulièrement crucial pour les simulations à nombre de Reynolds élevé.

L'algorithme implicite le meilleur (ordre 2 en t et en x) pour résoudre la partie diffusive des équations de la MHD est sans doute celui de Crank-Nicolson (qui ne présente pas de dissipation numérique dans le cas de $u_t + a u_x = 0$).

I - E - Conditions aux limites (Chu, 1978; Forbes et Priest, 1984; Chu et Sereny, 1974).

La formulation des conditions aux limites représente en général une tâche beaucoup plus difficile que le choix des conditions initiales.

En effet, le nombre et la nature des conditions aux limites dépend du système d'équations utilisées : hyperbolique (en l'absence de tout terme dissipatif) ou parabolique (avec termes dissipatifs). Les équations de la MHD incluant la dissipation magnétique, la viscosité et la conduction de la chaleur sont paraboliques (sauf l'équation de continuité qui est hyperbolique).

TABLE I

SOME USEFUL SCHEMES FOR $u_t + au_x = 0$ ($\lambda = \Delta t / \Delta x$)

Scheme	Difference equation	Amplification factor r	Stability condition	Truncation error	ordre $\Delta t, \Delta x$	dissipation, dispersion
Upwind differencing	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$ 	$1 + a\lambda(e^{-a\Delta x} - 1)$	$ a\lambda \leq 1$	$\frac{1}{2}u_{tt}\Delta t + \frac{a}{2}u_{xx}\Delta x$	1, 1	2, 2
Lax-Friedrichs	$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$ 	$\cos k\Delta x - a\lambda \sin k\Delta x$	$ a\lambda \leq 1$	$\frac{1}{2}u_{tt}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}u_{xxx}$	1, 1	2, 2
Fully implicit	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$ 	$(1 + a\lambda \sin k\Delta x)^{-1}$	Unconditionally stable	$\frac{1}{2}u_{tt}\Delta t + \frac{a}{6}u_{xxx}(\Delta x)^2$	1, 2	2, 2
Lax-Wendroff	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2}a^2\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2} = 0$ 	$1 - a\lambda \sin k\Delta x - 2a^2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$	$ a\lambda \leq 1$	$\frac{1}{6}u_{ttt}(\Delta t)^2 + \frac{a}{6}u_{xxx}(\Delta x)^2$	2, 2	4, 2
Leapfrog	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$ 	$- a\lambda \sin k\Delta x \pm (1 - a^2\lambda^2 \sin^2 k\Delta x)^{1/2}$	$ a\lambda \leq 1$	$\frac{1}{6}u_{ttt}(\Delta t)^2 + \frac{a}{6}u_{xxx}(\Delta x)^2$	2, 2	$\infty, 2$ conservatif
Crank-Nicolson	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0$ 	$1 - \frac{ a\lambda }{2} \sin k\Delta x \frac{ a\lambda }{1 + \frac{ a\lambda }{2} \sin k\Delta x}$	Unconditionally stable	$\frac{u_{tt}}{24}(\Delta t)^2 + \frac{a}{6}u_{xxx}(\Delta x)^2$	2, 2	$\infty, 2$ conservatif
4th-order leapfrog	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{3a}{4} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{3a}{4} \frac{u_{j+2}^n - u_{j-2}^n}{4\Delta x} = 0$ 	$- a\lambda \left(\frac{1}{2} \sin k\Delta x - \frac{3}{8} \sin 2k\Delta x \right) \pm (1 - a^2\lambda^2 \left(\frac{1}{4} \sin^2 k\Delta x - \frac{3}{8} \sin 2k\Delta x \right)^2)^{1/2}$	$ a\lambda \leq 0.755$	$\frac{u_{ttt}}{6}(\Delta t)^2 + \text{const. } u_{xxx}(\Delta x)^4$	2, 4	4, 4

- Equations paraboliques

Ces équations se caractérisent par une vitesse de propagation infinie des signaux. Chaque variable (ou sa dérivée normale à la frontière) doit être fixée aux limites du domaine (cas des équations générales de la MHD).

- Equations hyperboliques

Ces équations se caractérisent par une vitesse finie de propagation des signaux (existence de caractéristiques).

Le nombre de conditions aux limites est égal au nombre de caractéristiques se propageant vers l'intérieur du domaine, et ce nombre dépend de la vitesse du fluide à la frontière. Les variables pouvant être fixées à la frontière sont celles dont les caractéristiques associées répondent au critère ci-dessus.

Par exemple, en dynamique des fluides 1 D compressibles et anisentropiques, le système d'équations hyperboliques est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } S(p, \rho) = \text{entropie}$$

Après manipulation, ce système se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{où } c \text{ est la vitesse du son}$$

La forme matricielle de ces équations est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ v \\ S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ v \\ S \end{pmatrix} = 0$$

Les vitesses caractéristiques sont les 3 valeurs propres de la matrice ci-dessus, soit $\lambda = v, v \mp c$.

Les vecteurs propres $\vec{u}_\lambda = (u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})$ ou directions caractéristique sont obtenus par :

$$\begin{pmatrix} v-\lambda & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & v-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & v-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\lambda_1} \\ u_{\lambda_2} \\ u_{\lambda_3} \end{pmatrix} = 0$$

soit $\begin{cases} \vec{u}_v = (0, 0, 1) \\ \vec{u}_{v+c} = (1, \rho c, 0) \\ \vec{u}_{v-c} = (1, -\rho c, 0) \end{cases}$

Les équations aux caractéristiques sont obtenues par projection sur les vecteurs propres :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + (v \mp c) \frac{\partial P}{\partial x} \mp \rho c \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \mp c) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

et les courbes caractéristiques sont définies par $\frac{dx}{dt} = v, v \mp c$

le long des directions caractéristiques, on a

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta \mp} \mp \rho c \frac{\partial v}{\partial \Delta \mp} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \mp} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \mp c) \frac{\partial}{\partial x}$$

Selon le signe de $v, v \mp c$, on obtient le nombre et la nature des conditions aux limites devant être appliquées en $x = 0$ pour le domaine $x \geq 0$:

Cas	régime à la frontière	nombre de conditions aux limites	variables concernées par les conditions aux limites
1	$v < -c$	0	-
2	$-c < v < 0$	1	P ou v
3	$0 < v < c$	2	P ou v, s
4	$v > c$	3	P, v, s

Dans le cas du système parabolique des équations de la MHD (incluant tous les termes de dissipation de \vec{B} , \vec{v} , et T), seule l'équation de continuité est hyperbolique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$$

La vitesse de propagation est finie et vaut v (vitesse caractéristique)

Ainsi, la densité ne peut être spécifiée à la frontière $x = 0$ que s'il y a une entrée de plasma ($v > 0$) dans le domaine de calcul ($x \geq 0$). Dans le cas contraire ($v < 0$), ρ ne peut être spécifiée et on doit utiliser une relation de "compatibilité". Cette relation de compatibilité est $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$ et doit être intégrée numériquement sur la frontière.

I - F - Limitation aux nombre de Reynolds petits.

En général, les simulations numériques sont limitées à des nombres de Reynolds petits (plus faibles que ceux correspondant à la transition vers la turbulence), pour deux raisons :

- la viscosité, qui amortit les oscillations dues à l'opérateur aux différences finies, décroît lorsque le nombre de Reynolds augmente, et le calcul devient instable.
- le développement d'échelles de plus en plus petites s'effectue au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

1 - En mécanique des fluides :

L'épaisseur des couches limites est donnée par :

$$\delta \sim \Delta x / (v \Delta x / \nu)^{1/2} \quad \text{où } \Delta x \text{ est le pas de la grille, } v \text{ une vitesse caractéristique et } \nu \text{ la viscosité cinématique moyenne.}$$

Si L est une échelle caractéristique des dimensions de la grille,

$$\delta \sim \left(\frac{\Delta x L}{v L / \nu} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\Delta x L}{Re} \right)^{1/2} \quad \text{Re étant le nombre de Reynolds visqueux } v L / \nu.$$

Une instabilité numérique se produit dès que $\delta \lesssim \Delta x$ soit

$$Re \gg L / \Delta x$$

Un tel nombre est usuellement de l'ordre de 100 à 1000.

Les simulations numériques à grand Re nécessitent donc une grille à haute résolution spatiale. En deux dimensions, doubler la résolution spatiale dans chaque direction x et z revient à multiplier par 8 le temps de calcul (car le pas temporel est divisé par 2). De telles simulations sont donc très coûteuses et justifient pleinement l'emploi des grands ordinateurs vectoriels tels le CRAY.

2 - en MHD :

Une instabilité risque de se produire dès que l'échelle caractéristique de la turbulence phénoménologique de Kolmogoroff devient plus petite que le pas de la grille.

Cette échelle est donnée par :

$$\lambda = E^{-1/4} \eta^{3/4}$$

avec E = taux de dissipation de l'énergie par unité de temps et de masse
 η = diffusivité magnétique ($= 1/\mu_0\sigma$, où σ est la conductivité électrique).

η est relié au nombre de Reynolds magnétique Rm par :

$$Rm = \frac{V_a L}{\eta}$$

V_a étant une vitesse d'Alfvén et L une échelle de longueur caractéristiques.

Dans le cas d'une nappe de courant de largeur W , de densité ρ , se trouvant dans un champ magnétique d'intensité B , et prenant $E = j^2/\sigma\rho$ avec

$j \approx B/w\mu_0$ = densité de courant électrique, on obtient :

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\bar{B}}{\bar{W}} Rm \right)^{-1/2} \bar{\rho}^{-1/4}$$

où $\bar{\lambda} = \lambda/L$, $\bar{W} = W/L$, \bar{B} et $\bar{\rho}$ étant normalisées à leur valeur extérieure à la nappe de courant, et Rm étant le nombre de Reynolds caractéristique du domaine de calcul. Le Reynolds critique correspond à $\bar{\lambda} = \bar{\Delta x}$, $\bar{\Delta x}$ étant le pas (normalisé) de la grille, ce qui implique :

$$Rm \leq \frac{\bar{W}}{\bar{B}} \frac{\bar{\rho}^{1/2}}{\bar{\Delta x}^2}$$

soit typiquement, avec $\bar{W} = 0.075$, $\bar{B} = 1$, $\bar{\rho} = 10$, $\bar{\Delta x} = 0.01$, $Rm \leq 2000$.

II - SHASTA "Sharp and Smooth Transport Algorithm"

SHASTA est un code de simulation numérique 2D (x et z) + temps (t) des équations paraboliques de la MHD résistive. Il se compose de deux parties : une partie diffusive (diffusion du champ magnétique $\vec{B} = (B_x, B_z)$, de la température T), une partie convective (transport de ρ , ρv_x , ρv_z , P).

Shasta utilise un schéma numérique diffusif classique. Par contre, son schéma convectif est particulièrement destiné à traiter les problèmes de chocs MHD : c'est là que réside sa supériorité par rapport aux méthodes classiques, qui utilisent une viscosité artificielle pour augmenter la largeur d'un choc, et qui génèrent au voisinage des forts gradients des oscillations à cause de leur dispersion numérique, pouvant forcer des quantités (comme la densité) à devenir négatives !

Principe de SHASTA :

Shasta utilise sous forme modifiée les principaux ingrédients de l'algorithme de Lax-Wendroff et fonctionne en deux étapes : transport diffusif (la dissipation servant à élargir les chocs), puis antidiffusion (pour éliminer la dissipation introduite précédemment) du flux de masse transporté (durant la première étape) et corrigé de telle sorte qu'il empêche, au cours de l'antidiffusion (ou diffusion corrective) la formation ou le renforcement de minima ou maxima (qui pourraient engendrer oscillations et masses négatives). Cette opération (appelée "Flux Corrected Transport - FCT") revient à annuler la dispersion de l'algorithme et rend donc SHASTA particulièrement apte à traiter les chocs (ses performances étant en outre 4 fois supérieures à Lax-Wendroff en dehors des chocs).

II - A - Equations résolues par SHASTA.

Ce sont les équations générales de la MHD à 2 dimensions écrites sous la forme d'une équation de continuité généralisée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{v}) = S$$

où f est la quantité transportée et S un terme source.

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

- équations du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_x V_z) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z^2) = -\rho g - \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{B_x^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B_x}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

- équations de diffusion du champ magnétique

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(B_x V_z) = \frac{\partial}{\partial z}(B_z V_x) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\right)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(B_z V_x) = \frac{\partial}{\partial x}(B_x V_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\right)$$

- équation d'énergie

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(P V_x) + \frac{\partial}{\partial z}(P V_z) = -(\gamma-1) P \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$+ (\gamma-1) \left[\underbrace{h\rho}_{\substack{\text{chauffage} \\ \text{coronal} \\ \text{(par ondes)}}} - \underbrace{\rho^2 Q(\tau)}_{\substack{\text{refroidissement} \\ \text{radiatif}}} + \underbrace{\frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)^2}_{\substack{\text{chauffage} \\ \text{ohmique}}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) \right]$$

↓
↓
↓
↓

η est la diffusivité magnétique.

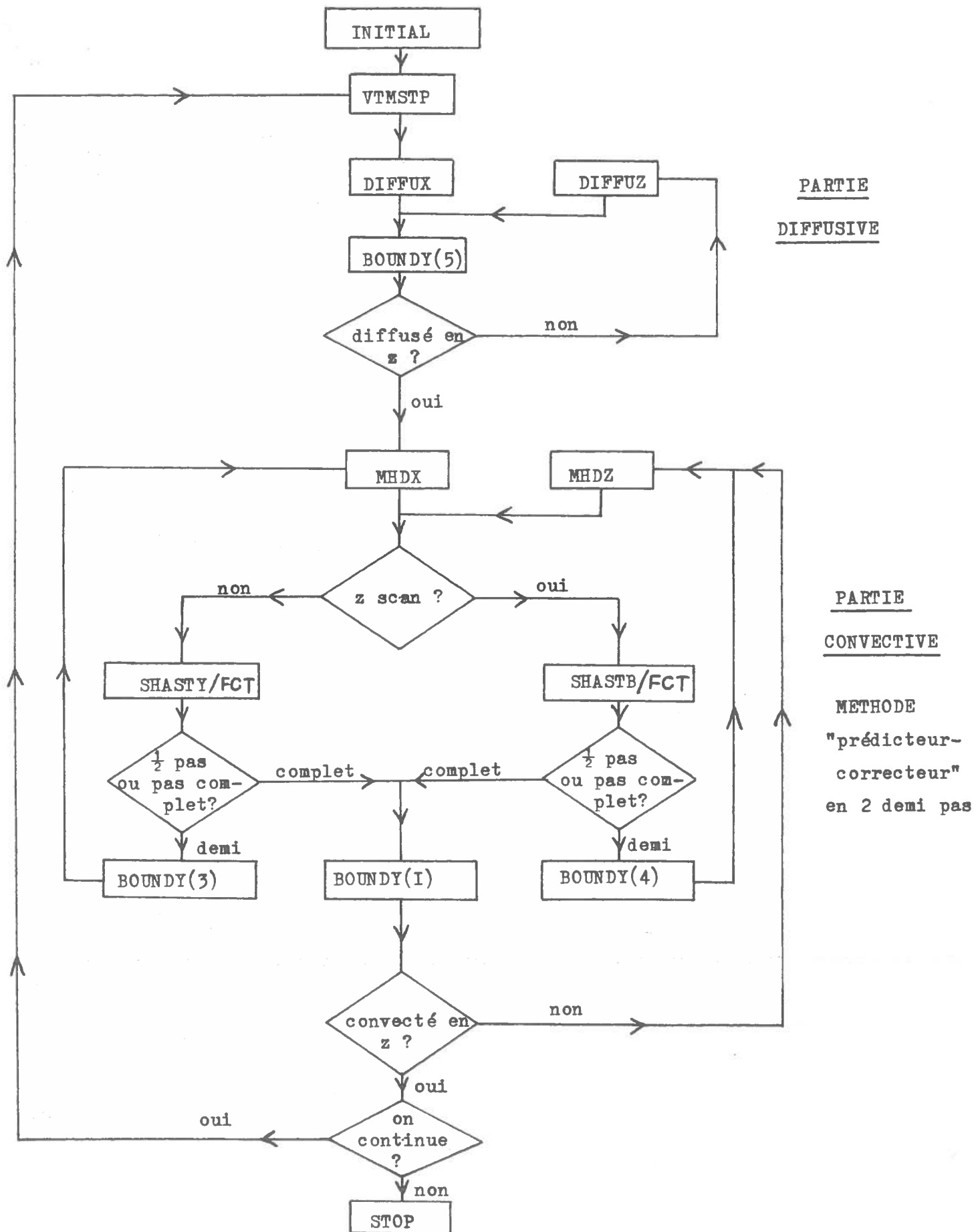
A ces équations s'ajoutent les conditions initiales et les conditions aux limites. Le code calcule sur $\rho, \rho V_x, \rho V_z, B_x, B_z, P$ (6 équation à 6 inconnues).

La convection est effectuée en deux temps à l'aide d'une méthode dite "prédicteur-correcteur" : les termes sources sont calculés en $t + \Delta t/2$ (pour centrer les valeurs), après un demi pas convectif, puis le transport complet ($t \rightarrow t + \Delta t$) est effectué en tenant compte des termes sources en $t + \Delta t/2$:

$$\left. \begin{array}{l} S(t) \\ \text{Solution}(t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{solution}(t + \Delta t/2) \rightarrow S(t + \Delta t/2) \quad \text{"prédicteur".}$$

$$\left. \begin{array}{l} S(t + \Delta t/2) \\ \text{Solution}(t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{solution}(t + \Delta t) \quad \text{"correcteur".}$$

II - B - Organigramme simplifié de SHASTA (Weber, 1978)



II - C - Partie diffusive (Weber, 1978).

SHASTA résoud l'équation

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

selon le schéma implicite suivant :

$$\frac{B_j^{n+1} - B_j^n}{\Delta t} = \eta \frac{B_{j+1}^{n+1} - 2 B_j^{n+1} + B_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

erreur de troncature : $\frac{1}{2} \Delta t B_{tt} - \frac{1}{12} \eta \Delta x^2 B_{xxxx}$

C'est donc un schéma du 1er ordre en t, 2ème ordre en x, qui s'écrit :

$$B_{j-1}^{n+1} - \left(2 + \frac{\Delta x^2}{\eta \Delta t}\right) B_j^{n+1} + B_{j+1}^{n+1} = - \frac{\Delta x^2}{\eta \Delta t} B_j^n$$

C'est un système linéaire à matrice tridiagonale, que l'on inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\left(2 + \frac{\Delta x^2}{\eta \Delta t}\right) & 1 & 0 \\ & 1 & -\left(2 + \frac{\Delta x^2}{\eta \Delta t}\right) & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}^{n+1} = - \frac{\Delta x^2}{\eta \Delta t} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}^n$$

facteur d'amplification : $\pi = \left[1 + 2 \frac{\eta \Delta t}{\Delta x^2} \left(1 - \cos(k \Delta x) \right) \right]^{-1} < 1$

Ce schéma n'est pas dispersif, mais dissipatif, et inconditionnellement stable.

Aux grandes longueurs d'onde ($k \Delta x \ll 1$),

$$\pi \approx 1 - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (k \Delta x)^2 + \left(\eta \frac{\Delta t}{12 \Delta x^2} + \frac{\eta^2 \Delta t^2}{\Delta x^4} \right) (k \Delta x)^4$$

la dissipation numérique (ordre 4) est donc d'un ordre deux fois plus élevé que la dissipation physique (ordre 2).

Ce schéma n'étant exact qu'à l'ordre 1 en t, on envisage de le remplacer par un algorithme implicite de Crank Nicolson :

$$\frac{B_j^{n+1} - B_j^n}{\Delta t} = \frac{\eta}{2} \left[\frac{B_{j+1}^{n+1} - 2B_j^{n+1} + B_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{B_{j+1}^n - 2B_j^n + B_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

erreur de troncature : $\eta \frac{\Delta x^2}{24} B_{xxxx} + \frac{\Delta t^2}{4} B_{ttt}$

Ce schéma est donc exact à l'ordre 2 en t et en x , et se résoud encore à l'aide d'une inversion de système tridiagonal.

facteur d'amplification : $r = \frac{1 - \frac{\eta \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos k \Delta x)}{1 + \frac{\eta \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos k \Delta x)}$

et $|r| < 1$.

C'est un schéma non dispersif, dissipatif et inconditionnellement stable

Aux grandes longueurs d'onde,

$$r \approx 1 - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (k \Delta x)^2 + \left(\frac{\eta \Delta t}{12 \Delta x^2} + \frac{\eta^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^4} \right) (k \Delta x)^4$$

Comme dans le cas précédent, la dissipation numérique est d'ordre 4, soit d'ordre deux fois plus élevé que la dissipation physique (2).

II - D - Partie convective (Boris et Book, 1971, 1975; Boris et al, 1974; Cargill, 1981).

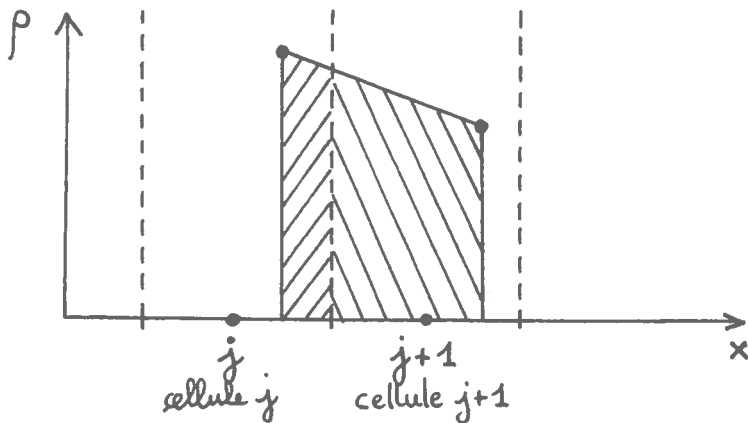
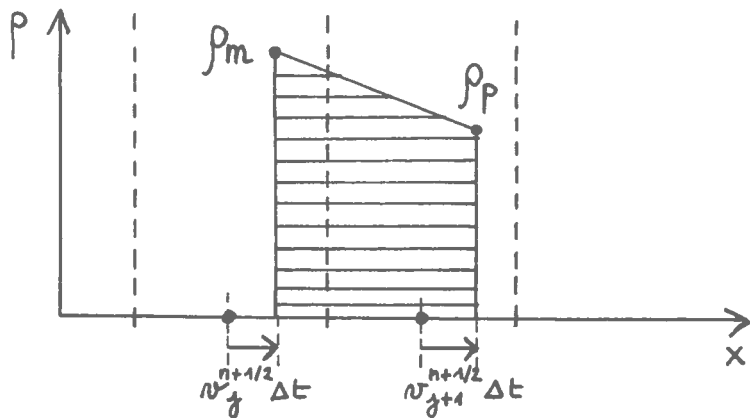
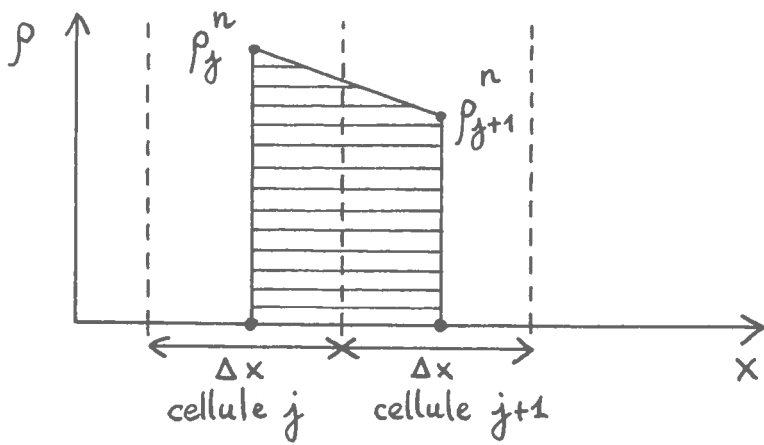
deux étapes sont effectuées :

un transport diffusif, suivi d'une antidiffusion portant sur un flux de masse corrigé (Flux Corrected Transport - FCT).

Ces deux stages conservent la masse et la positivité (un opérateur Ω est dit positif, si, appliqué à une quantité $\rho > 0$, on a $\Omega \rho > 0$). On tra:
ci-dessous l'équation de continuité $\partial \rho / \partial t + \partial / \partial x (\rho v) = 0$

1 - Etape 1 : transport diffusif.

FIGURE 1



Conservation de la masse :

$$\Delta x (\rho_j^n + \rho_{j+1}^n) = (\Delta x + (v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}) \Delta t) (\rho_m + \rho_p)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \rho_p \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{j+1}^n \\ \rho_j^n \end{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta x + (v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}) \Delta t}$$

Ce schéma est positif si $\Delta x + (v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}) \Delta t$ l'est, soit
si $|v \Delta t / \Delta x| < 1/2$ où $v = \max_j (|v_j|)$.

SHASTA utilise une limitation plus stricte, pour pouvoir traiter les ondes MHD :

$$\max_j \left[|v_j| + \sqrt{C_{sj}^2 + C_{aj}^2} \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2}$$

C_s et C_a étant, respectivement, la vitesse du son et la vitesse d'Alfven.

Après interpolation sur la grille, on obtient :

$$\rho_j^{n+1} = \frac{1}{2} Q_j^{-2} (\rho_{j-1}^n - \rho_j^n) + \frac{1}{2} Q_j^{+2} (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) + (Q_j^+ + Q_j^-) \rho_j^n$$

$$\text{où } Q_j^{\pm} = \left(\frac{1}{2} \mp v_j^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) / \left(1 \pm \left(v_{j\pm 1}^{n+\frac{1}{2}} - v_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)$$

En présence d'un terme source S ($\partial \rho / \partial t + \partial / \partial x (\rho v) = S$) cet algorithme se généralise comme suit :

$$\rho_j^{n+1} = \frac{1}{2} Q_j^{-2} (\rho_{j-1}^n - \rho_j^n) + \frac{1}{2} Q_j^{+2} (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) + Q_j^+ (\rho_j^n - S_{j+\frac{1}{2}}^n) + Q_j^- (\rho_j^n - S_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

Dans le cas d'un champ de vitesse uniforme, on obtient un schéma de Lax-Wendroff (dissipation d'ordre 4, dispersion d'ordre 2).

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\varepsilon}{2} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)}_{\text{viscosité}} (\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)$$

où

$$\varepsilon = v \Delta t / \Delta x$$

Cet algorithme traduit un transport accompagné d'une forte diffusion numérique.

On calcule facilement le facteur d'amplification du transport diffusif :

$$\kappa_{TD} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) (1 - \cos k \Delta x) - i \varepsilon \sin k \Delta x$$

La viscosité numérique est $\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$ et dépend peu de la vitesse.

$\leq 1/8$

2 - Etape anti-diffusive.

Elle consiste à éliminer la diffusion de l'algorithme de transport.

La diffusion de cet algorithme est, à vitesse nulle :

$$\rho_j^n = \rho_j^{n-1} + \frac{1}{8} (\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)$$

deux possibilités au moins existent pour éliminer cette diffusion :

- une antidiffusion implicite.
- une antidiffusion explicite.

• Antidiffusion implicite :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{1}{8} (\rho_{j+1}^{n+1} - 2\rho_j^{n+1} + \rho_{j-1}^{n+1})$$

facteur d'amplification : $\kappa_{Ai} = \left[1 - \frac{1}{4} (1 - \omega h \Delta x) \right]^{-1}$

(non dispersive, dissipative d'ordre 2).

• Antidiffusion explicite :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{1}{8} (\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)$$

facteur d'amplification : $\kappa_{Ae} = \left[1 + \frac{1}{4} (1 - \omega h \Delta x) \right]$

(non dispersive, dissipative d'ordre 2).

Le code utilise l'antidiffusion explicite (plus rapide).

Pour l'ensemble des deux étapes ($\kappa = \kappa_1 \kappa_2$) la table 2 montre que SHASTA implicite est dissipatif à l'ordre 4 ($v \neq 0$) ou conservatif ($v = 0$). Par contre, SHASTA explicite est dissipatif à l'ordre 4, même si $v = 0$, et possède donc une petite viscosité numérique résiduelle (facteur 1/64) :

$$|\kappa|_{\text{explicite}} = |\kappa_{TD} \kappa_{Ae}| \sim 1 - \left(\frac{1}{64} + \frac{\varepsilon^2}{16} \right) (h \Delta x)^4$$

$$|\kappa|_{\text{implicite}} = |\kappa_{TD} \kappa_{Ai}| \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} (h \Delta x)^4$$

On élimine cette viscosité résiduelle en modifiant légèrement SHASTA explicite : au lieu d'antidiffuser les quantités (transportées + diffusées), on n'antidiffuse que les quantités transportées.

le facteur d'amplification du transport et de la diffusion explicites sont alors :

$$\kappa_T = 1 - \varepsilon^2 (1 - \cos k \Delta x) - i \varepsilon \sin k \Delta x \quad (\text{dispersif d'ordre 2, dissipatif d'ordre 2})$$

$$\kappa_D = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos k \Delta x) \quad (\text{non dispersif, dissipatif d'ordre 2}).$$

Combiné avec une antidiffusion explicite, on obtient :

$$\kappa_p = \kappa_{Ae} \kappa_T + \kappa_D - 1$$

soit (aux grandes longueurs d'onde) :

$$|\kappa_p| \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} (k \Delta x)^4$$

Un nombre de Reynolds numérique peut être calculé comme suit :

$$|\kappa_p| = 1 - \nu k^2 \Delta t \quad \text{avec } R_e = \frac{L v}{\nu}$$

Si N désigne le nombre de points (linéaire) de la grille, on trouve :

$$R_e \sim N^3$$

ce qui est usuellement de l'ordre de 10^6 . La diffusion numérique apparaît donc bien négligeable devant la diffusion physique ($R_m \sim 10^3$).

Cette méthode, appelée "Phoenical SHASTA" est (comme SHASTA implicite) dissipative à l'ordre 4 ($\nu \neq 0$) ou conservative ($\nu = 0$), et dispersive à l'ordre 2, la dispersion provenant du transport seul. C'est cette méthode qui est utilisée dans le code. Les tables 2 et 3 permettront de comparer les divers rapports d'amplification et phases des algorithmes entre eux. SHASTA se révèle 4 fois moins dispersif et moins diffusif que les autres schémas numériques.

Table 2
Dissipations comparées ($\varepsilon = \nu \Delta t / \Delta x < 1/2$)

Algorithme	ordre	Opérateur	facteur d'amplification aux grands λ .	diffusion
théorie	∞	$1 + T$	1	nulle
one sided	1	$1 + T$	$1 - \varepsilon (k \Delta x)^2$	forte
Lax Wendroff	2	$1 + T + D$	$1 - \varepsilon^2 (k \Delta x)^4 / 4$	faible
Leapfrog	2	$1 + T$	1	nulle
implicit SHASTA	" 2 "	$(1+D)^{-1}(1+T+D)$	$1 - \varepsilon^2 (k \Delta x)^4 / 16$	faible
explicit SHASTA	" 2 "	$(1+A)(1+T+D)$	$1 - (\frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{1}{64})(k \Delta x)^4$	diffusion résiduelle lorsque $\nu \rightarrow 0$
phoenical SHASTA	" 2 "	$(1+A)(1+T)+D$	$1 - \varepsilon^2 (k \Delta x)^4 / 16$	faible

(T = opérateur de convection
 Avec (D = " " diffusion
 (A = " " d' antidiffusion.

Table 3

Dispersions comparées ($\varepsilon = \nu \Delta t / \Delta x < 1/2$)

Algorithm	Order	Relative phase error = $\frac{C(k) - \nu}{\nu}$
Theory	∞	0 (no error)
One-sided	1	$-\left(\frac{1}{6} - \frac{ \varepsilon }{2} + \frac{\varepsilon^2}{3}\right) (k \Delta x)^2$
Lax-Wendroff	2	$-\left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon^2}{6}\right) (k \Delta x)^2$
Leapfrog	2	$-\left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon^2}{24}\right) (k \Delta x)^2$
SHASTA (FCT) (toutes méthodes)	"2"	$-\left(\frac{1}{24} - \frac{\varepsilon^2}{6}\right) (k \Delta x)^2$

3 - Traitement des chocs - "Flux corrected Transport".

L'algorithme d'antidiffusion : $\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{1}{8} (\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)$

n'est pas positif (voir fig. 2 représentant une discontinuité ou un choc):

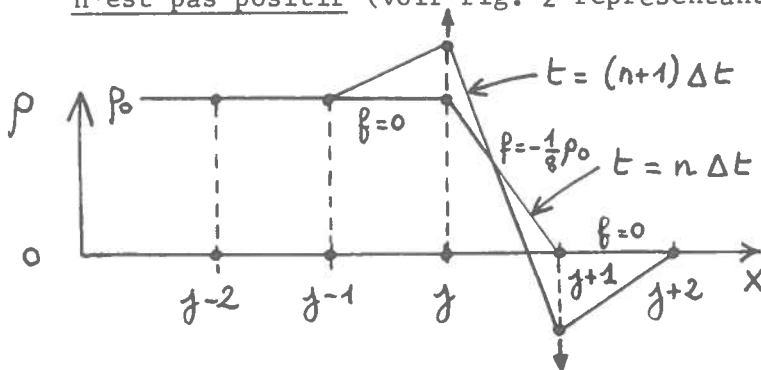


fig. 2

Avec la distribution ci-dessus, par exemple, on trouverait :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n \left(1 + \frac{1}{8}\right)$$

$$\rho_{j+1}^{n+1} = -\frac{1}{8} \rho_j^n < 0$$

(la densité devient négative)

L'algorithme génère donc de nouveaux extrema parasites. Pour remédier à cela, on travaille sur les flux de masse définis par :

$$f_{j \pm \frac{1}{2}}^n = \pm \frac{1}{8} (\rho_{j \pm 1}^n - \rho_j^n) \quad \text{où les } \rho_j^n \text{ désignent les quantités } \underline{\text{trans}} \underline{\text{portées}}$$

L'antidiffusion explicite s'écrit : $\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - f_{j+\frac{1}{2}}^n + f_{j-\frac{1}{2}}^n$
 Pour la rendre positive, on limite les flux de masse terme à terme de telle sorte que en tout point de la grille aucun transfert de masse antidiffusif ne puisse pousser la densité au delà de celle présente aux points environnants. Cette opération (non linéaire) est appelée "Flux Corrected Transport". Les flux sont corrigés en utilisant un limiteur de flux fonctionnant sur 4 points, qui est sans action en dehors des régions de fort gradient :

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{cn} = S \max \left[0, \min \left(S \Delta_{j-\frac{1}{2}}^n, |f_{j+\frac{1}{2}}^n|, S \Delta_{j+\frac{3}{2}}^n \right) \right]$$

où $S = \text{sgn}(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^n)$ et $\Delta_{j+\frac{1}{2}}^n = \rho_{j+1}^n - \rho_j^n$

L'effet du limiteur de flux sur l'exemple ci-dessus donne

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = 0 \text{ (au lieu de } -\frac{1}{8}\rho_0 \text{)}, \text{ soit } \rho_j^{n+1} = \rho_j^n \text{ et } \rho_{j+1}^{n+1} = \rho_{j+1}^n$$

Le limiteur de flux (en $j + \frac{1}{2}$, voir figure 3) empêche la densité aux points $j, j + 1$ de varier au delà de celle présente aux points $j - 1, j + 2$.

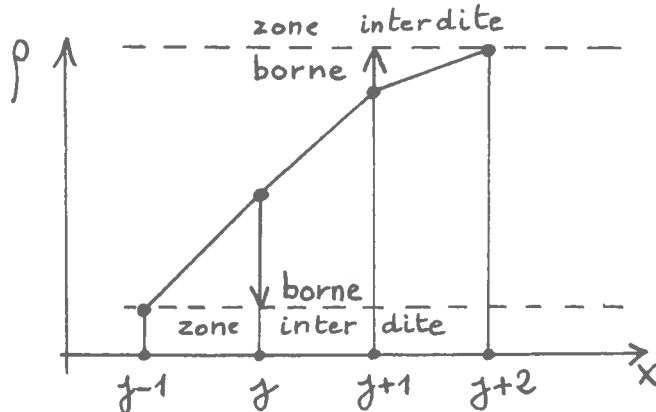
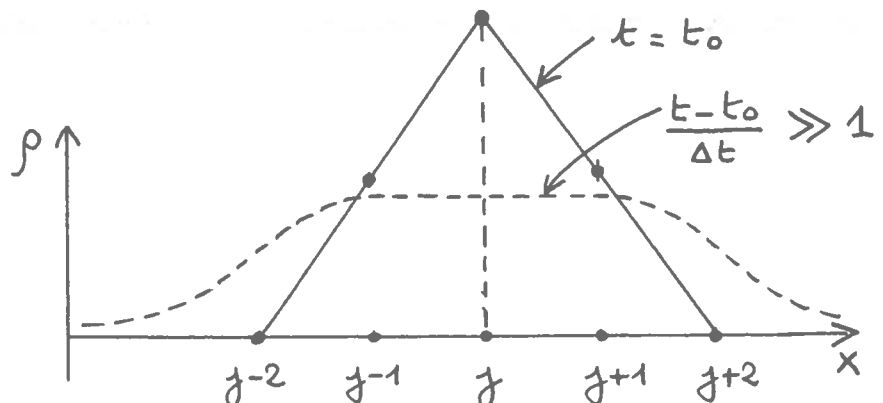


Figure 3
Action du limiteur de flux
en $j + \frac{1}{2}$

Ainsi, le limiteur de flux empêche la formation et le renforcement d'extrema (donc de masses négatives) au cours de l'antidiffusion.

Il rend donc l'algorithme positif. Cette opération conserve la masse globale : une masse soustraite d'une cellule de la grille est ajoutée à une autre. En contrepartie, elle interdit la formation d'un extrema (physique) sur un point unique (fig. 4) :

Figure 4



En effet, à chaque pas du calcul, la diffusion, qui émousse le pic j , n'est pas contrebalancée par l'antidiffusion, car le limiteur de flux empêche le renforcement d'extrema existant. Ce phénomène, appelé "flux clipping", ne s'oppose pas au traitement des chocs, qui seront donc représentés sur 3 points, les relations de Rankine-Hugoniot étant conservées entre les deux points extrêmes (le point central du choc, évidemment, ne représente pas la réalité).

III - Exemple d'application à un problème physique

Nous avons utilisé SHASTA pour la simulation de la reconnection magnétique adiabatique dans une nappe de courant dont l'existence paraît probable dans la queue des magnétosphères planétaires, et dans la phase post éruptive des éruptions solaires.

Ce calcul a déjà été effectué par Forbes et Priest (1983) à St. Andrews. Nous l'avons refait à titre de démonstration des possibilités du code. Tous les détails pourront être trouvés dans cet article publié.

La simulation est effectuée en basse résolution sur une grille de 23×51 points répartis non uniformément en x (figure 5, tassement vers $x = 0$), sans gravité.

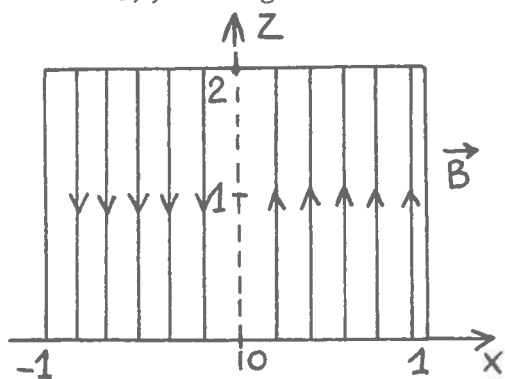
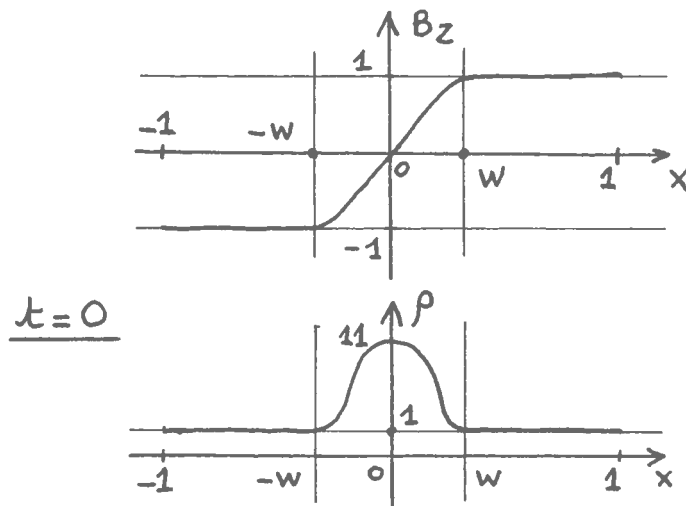


Figure 5



III - A - Conditions initiales et aux limites

Les conditions initiales correspondent à une nappe de courant isotherme en équilibre magnétostatique, mais pas en équilibre diffusif (voir figure 5).

Pour raison de symétrie, la résolution numérique est effectuée pour $0 \leq x \leq 1$. Alors que les conditions aux limites en $x = 0$, $x = 1$ et $z = 2$

ne sont pas physiques (symétrie en $x = 0$, conditions flottantes en $z = 2$ et $x = 1$), les conditions aux limites en $z = 0$ (base) ont une signification physique (c'est la photosphère du Soleil).

Les schémas numériques explicites demandent que chaque variable (ou dérivée) soit fixée aux frontières du domaine. Une condition aux limites pour $\rho, \rho v_x, \rho v_z, B_x, B_z, P$ est donc nécessaire.

- $x = 0$ (condition de symétrie) :

$$v_x = B_z = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

- $x = 1$ (conditions flottantes) :

les conditions flottantes se traduisent par une dérivée normale nulle à la frontière. Elles permettent au plasma et au flux magnétique d'entrer ou de sortir librement du domaine de calcul.

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

- $z = 2$ (conditions flottantes) :

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

Les conditions flottantes sont faciles à programmer, mais entraînent une réflexion partielle des ondes sur les frontières.

- $z = 0$ (base)

les lignes de force sont ancrées dans la photosphère, soit :

$$v_x = v_z = 0$$

$$B_z(x, 0, t) = B_z(x, 0, 0)$$

l'équilibre des forces se traduit par :

$$P(x, 0, t) + \frac{B_z^2}{2\mu_0}(x, 0, t) = \text{constante}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

A ceci s'ajoute l'adiabaticité ($P/\rho^\gamma = \text{cte}$).

A la base, P, ρ, B_z, \vec{j} sont invariables dans le temps.

III - B - Résultats.

Le calcul a été fait pour les valeurs numériques suivantes :

$W = 0.075$ ($\frac{1}{2}$ largeur de la nappe de courant), $\beta = 0.1$ (β du plasma aux frontières) et $R_m = 150$ (nombre de Reynolds magnétique de la nappe de courant). Les figures 6 et 7 montrent l'évolution au cours du temps des lignes de champ magnétique et de la densité de masse (figure 6) et de courant (figure 7). Le champ se reconnecte et on assiste à la formation de boucles fermées à la base de la boîte. Le temps est mesuré en échelle de temps d'Alfvén (temps mis par une onde d'Alfvén pour parcourir la distance W). On observe :

- un choc MHD rapide au sommet des boucles (inversion du courant).
- deux chocs lents associés à la reconnection magnétique rapide en dessous du point X.
- la création et l'annihilation d'îlots magnétiques ou plasmoides dans la nappe de courant. L'annihilation est la manifestation de l'instabilité de coalescence ($t \gg 230$).

On précise que le temps diffusif est $R_m = 150$ et le temps caractéristique de déchirement des lignes de force ("tearing mode") est $\sqrt{R_m} \approx 12$.

La figure 8a montre l'évolution de l'altitude z des points neutres de type X et O. Un îlot dense et large est complètement développé à $t = 110$ et est éjecté vers le haut à $t = 190$. Pour $t \gg 230$, on observe la création et l'annihilation de plasmoides par paires (la coalescence se fait avec les arcades du bas car la reconnection domine au point X au-dessus des îlots).

La figure 8b montre l'évolution du courant électrique ($\vec{j} = \frac{\nabla \wedge \vec{B}}{\mu_0}$) aux points neutres X. Le courant qui donne une idée du taux de reconnection magnétique, croît tout d'abord exponentiellement ("tearing" linéaire, $t \leq 160$); la saturation linéaire, puis non linéaire se produit pour $t \gg 160$. Le courant change de sens lors de l'annihilation des lignes neutres. Les oscillations sont causées par la réflexion des ondes d'Alfvén sur les frontières du domaine.

L'arrêt du calcul a été rendu nécessaire à $t = 373$ par suite d'une détérioration de l'exactitude du calcul numérique, due à l'occurrence d'une forte dissipation d'énergie magnétique lors de l'annihilation des plasmoides, réduisant l'échelle de longueur de la turbulence de Kolmogoroff au pas de la grille.

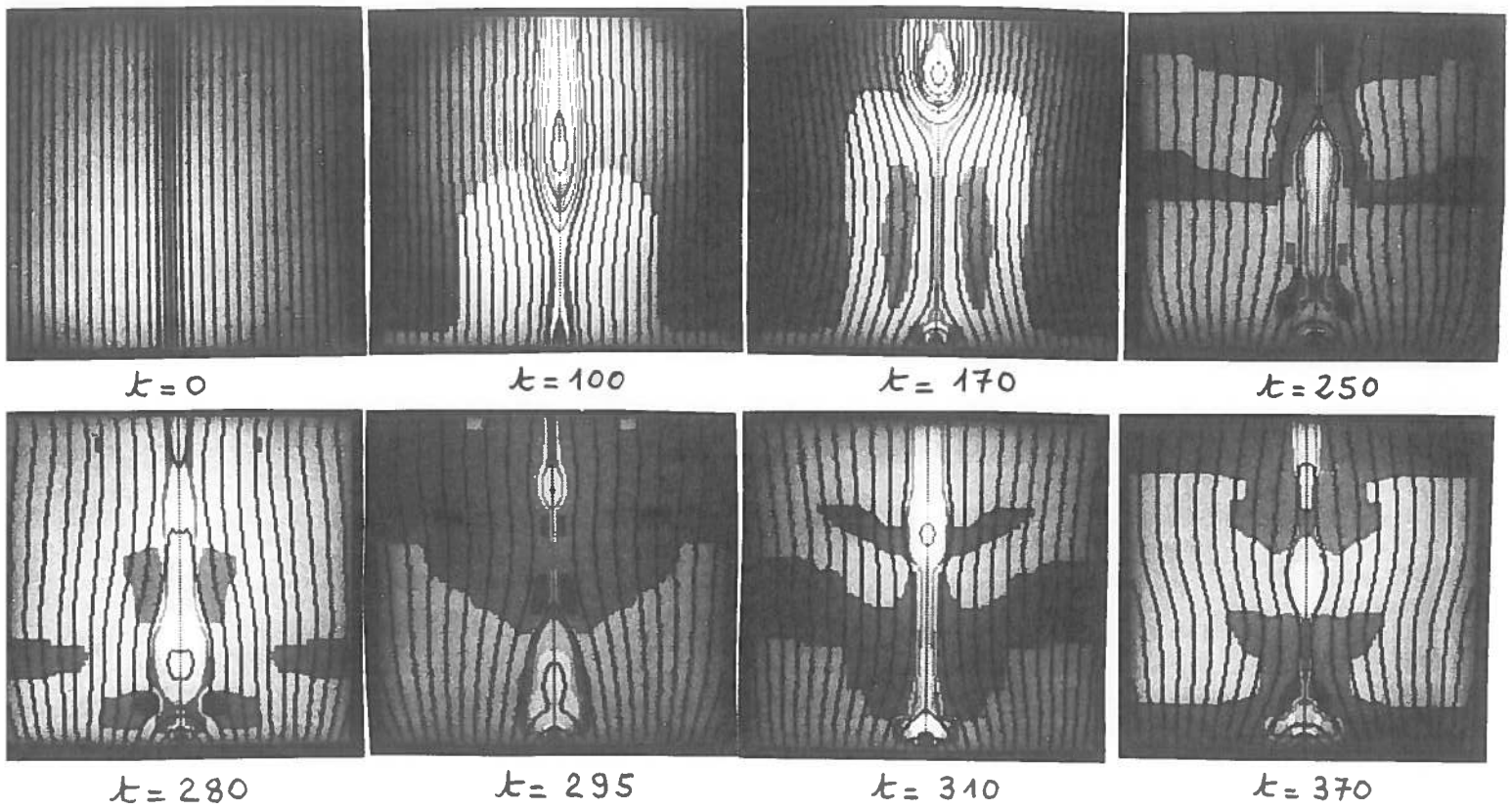


Figure 6

Evolution de la densité de masse ρ et des lignes de champ magnétique.

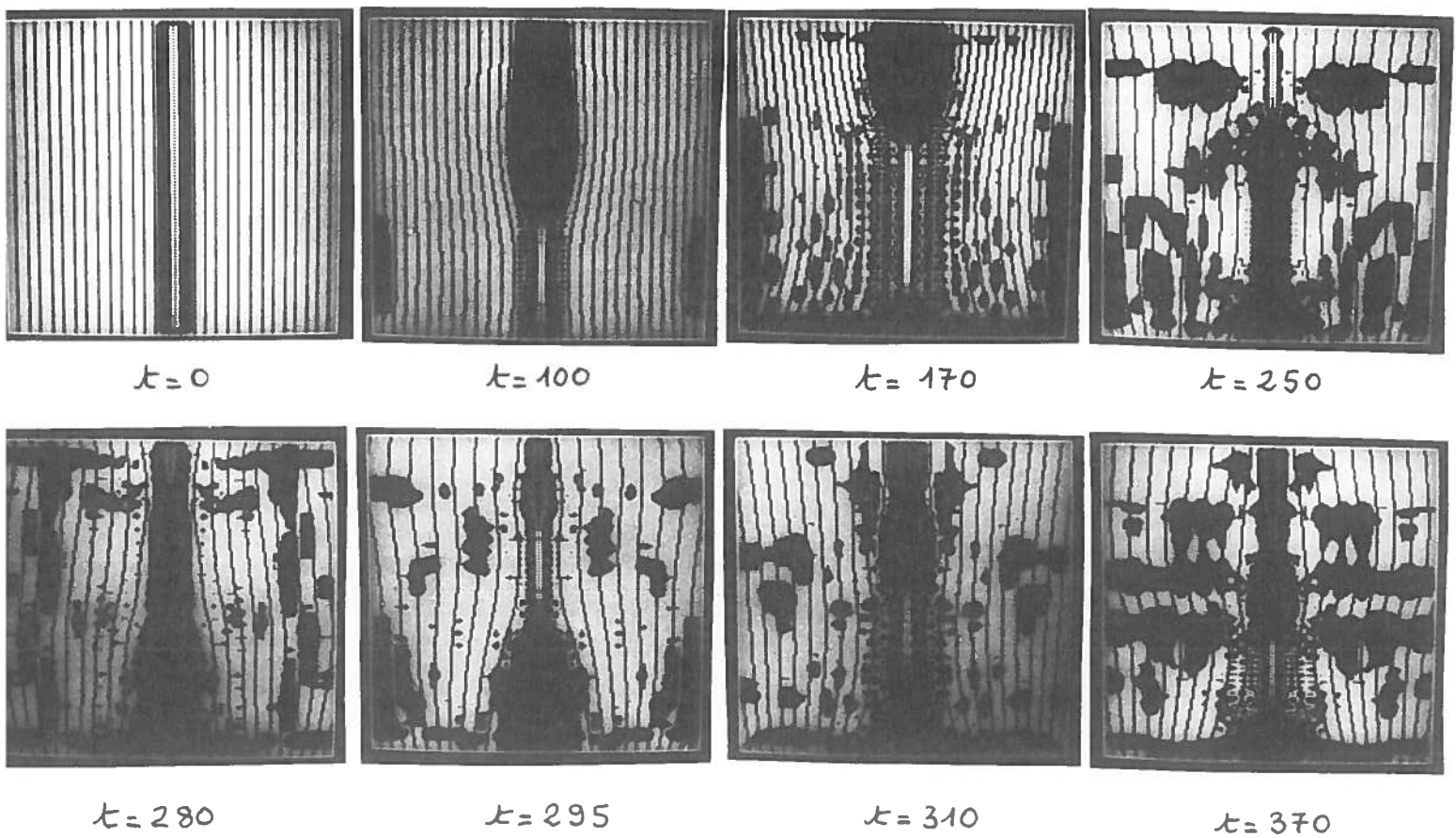


Figure 7

Evolution de la densité de courant j et des lignes de champ magnétique.

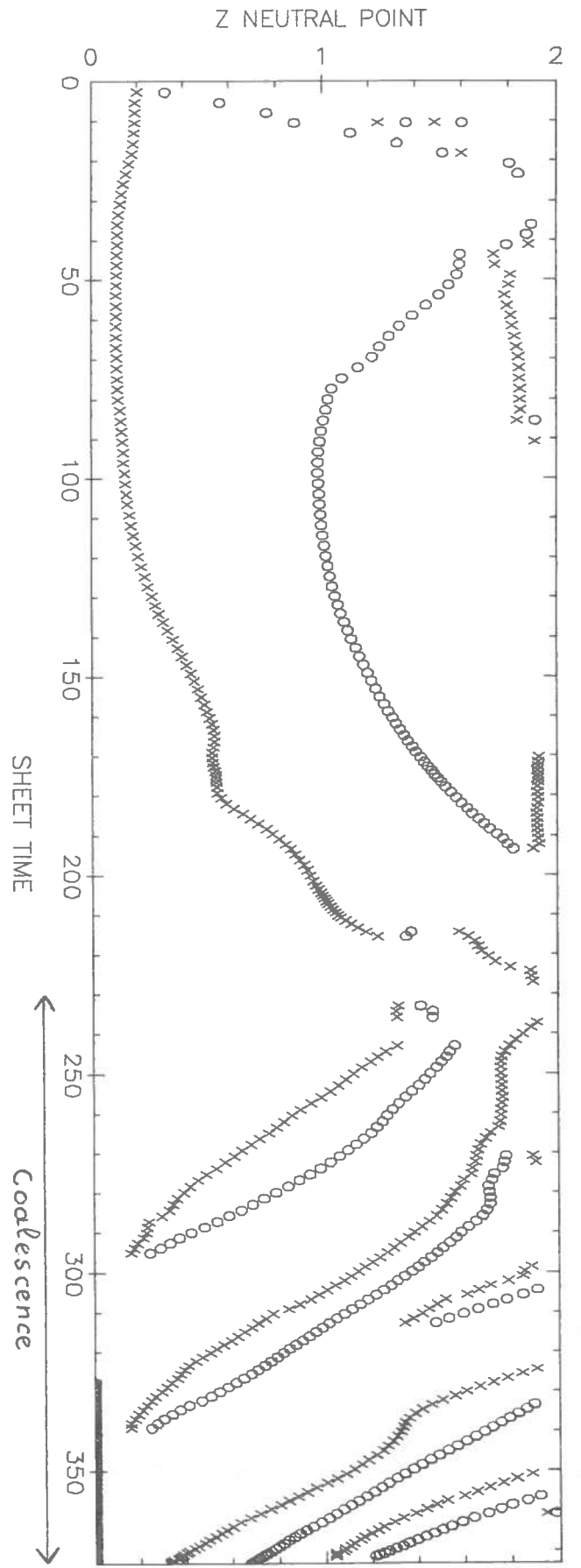
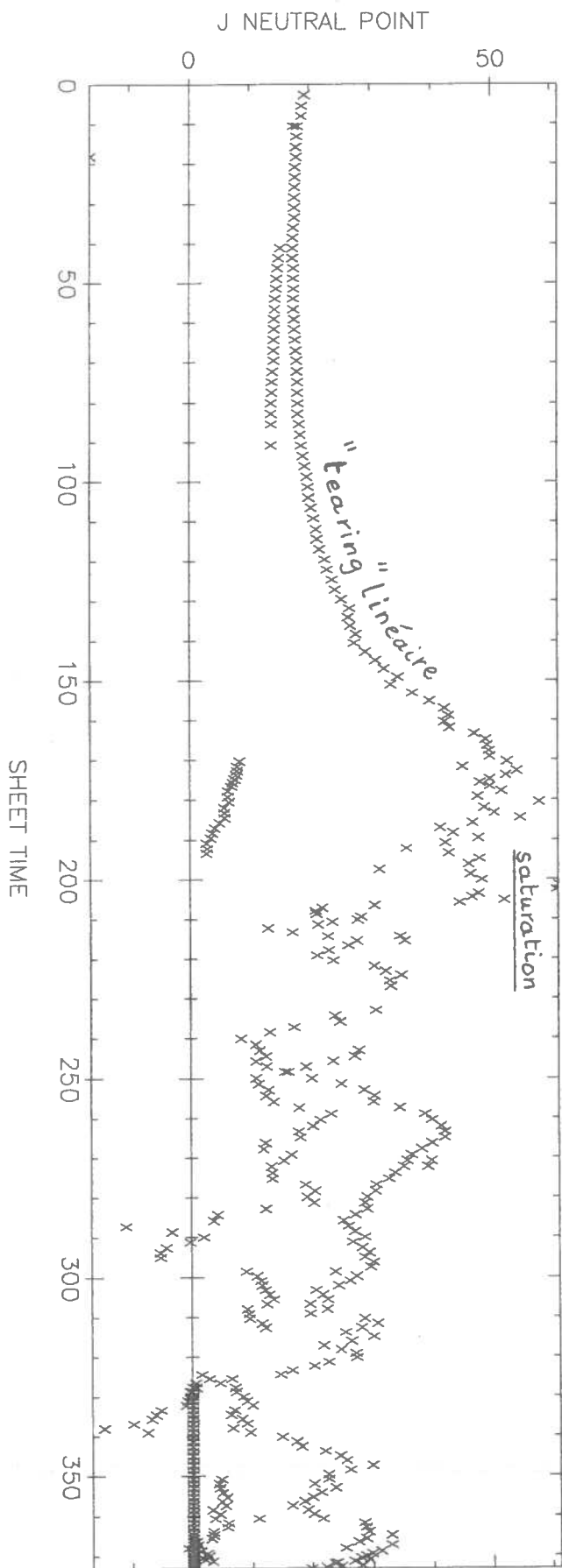


Figure 8a et b

Evolution de l'altitude des lignes neutres (X et O) et du courant aux points neutres X.

REFERENCES

- Boris, J.P., Book, D.L. : 1971, Journal of computational physics, 11, 38.
- Boris, J.P., Book, D.L., Hain, K. : 1974, Journal of Computational physics, 18, 248.
- Boris, J.P., Book, D.L. : 1975, Journal of Computational physics, 20, 397.
- Cargill, P.J. : 1982, rapport interne à l'Université de St. Andrews, Scotland
- Chu, C.K. : 1978, Adv in Applied Mechanics, 18, 285.
- Chu, C.K., Sereny, A. : 1974, Journal of Computational physics, 15, 476.
- Forbes, T.G., Priest, E.R. : 1983, Solar Physics, 84, 170.
- Forbes, T.G., Priest, E.R. : 1984, sous presse à Solar Physics.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie tout particulièrement le Dr. T.G. Forbes (Université du New Hampshire, Durham, U.S.A.) pour l'avoir initié aux problèmes numériques