



HAL
open science

Mécanique des matériaux

Sylvie Pommier

► **To cite this version:**

| Sylvie Pommier. Mécanique des matériaux. Master. France. 2017. cel-01636674

HAL Id: cel-01636674

<https://hal.science/cel-01636674>

Submitted on 16 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



SAPHIRE



Sciences appliquées en physique et ingénierie
pour la recherche et l'enseignement

Matériaux
Mécanique des matériaux

Sylvie Pommier

TABLE DES MATIERES

1	Fiche technique de l'unité d'enseignement	5
1.1	Descriptif de l'UE	5
1.1.1	Objectifs de l'Unité d'Enseignement	5
1.1.2	Contenu de l'Unité d'Enseignement	5
2	Remarques et Consignes générales	8
2.1	Remarques	8
2.2	Consignes générales pour la rédaction d'un compte rendu de travaux pratiques	8
2.2.1	Préambule	8
2.2.2	Objectifs scientifiques	8
2.2.3	Moyens expérimentaux utilisés	8
2.2.4	Protocole expérimental	8
2.2.5	Résultats et analyse	9
2.2.6	Remarque	9
3	Introduction	10
4	Etats, Liaisons, Structures et Comportement thermo-élastique.	14
4.1	Les états de la matière	14
4.2	Etat Solide, liaisons	15
4.3	Cristallisation	16
4.3.1	Le Cristal Parfait	17
4.3.2	Zones amorphes, zones cristallisées.	19
4.4	Elasticité	20
4.4.1	Modèle moléculaire	20
4.4.2	Modèle macroscopique.	21
4.5	Dilatation thermique	25
4.5.1	Modèle moléculaire	25
4.5.2	Modèle macroscopique.	26
4.6	Thermo-élasticité des matériaux hétérogènes ou composites	27
4.7	Résumé	30
4.8	Problèmes.	32
4.8.1	Thermo-élasticité : Choix de matériaux pour la dérive de l'A380.	32
4.8.2	Thermo-élasticité : étude d'un matériau composite stratifié.	36
4.8.3	Thermo-élasticité et conduction thermique : Aubes de turbines revêtues.	38
4.8.4	Dilatation Thermique : étude d'un système de compensation thermique	41
5	Comportement plastique, Exemple des matériaux métalliques	45
5.1	Introduction	45
5.2	Le comportement élastoplastique	45
5.2.1	Méthode de caractérisation	45
5.2.2	Analyse d'un essai de traction	46
5.2.3	Analyse d'un essai de traction-compression	49
5.2.4	Les essais de dureté	51
5.2.5	Modèles rhéologiques	57
5.3	Structure des matériaux métalliques à différentes échelles	59
5.3.1	Echelle atomique	59
5.3.2	Structure intra-granulaire	59
5.3.3	Echelle des grains ou microstructure	62
5.3.4	Macrostructure	63

5.4	Relations structure propriété	65
5.4.1	Plans de glissements et contrainte d'écoulement	65
5.4.2	Prise en compte des écrouissages	73
5.5	Fiche résumé	77
5.6	Problèmes	78
5.6.1	Matériau biphasé et écrouissage cinématique.	78
5.6.2	Dépouillement d'un essai de traction simple	83
6	Rupture fragile, rupture ductile	87
6.1	Introduction	87
6.2	Mécanismes d'endommagement des matériaux	88
6.2.1	Endommagement localisé	88
6.2.2	Endommagement diffus	90
6.3	Les essais d'endommagement-rupture	92
6.4	Eléments de modélisation de la phase d'endommagement-rupture	95
6.4.1	Endommagement localisé, Théorie du maillon faible	96
6.4.2	Endommagement diffus, Théorie de Kachanov	101
6.5	Les essais de fissuration	103
6.5.1	Essai Charpy	103
6.5.2	Eléments de mécanique linéaire de la rupture	105
6.5.3	Essais de ténacité	107
6.5.4	Théorie de la rupture fragile de Griffith et ténacité K_{IC}	108
6.6	Fiche résumé	111
6.7	Problèmes	112
6.7.1	Les aventures de Tintin	112
7	Rupture par fatigue	115
7.1	Introduction	115
7.2	Essais de fatigue conventionnels	115
7.2.1	Courbes de Wöhler, courbes S-N	115
7.2.2	Mécanismes d'endommagement.	117
7.2.3	Essais complémentaires	124
7.3	Analyse d'un essai de fissuration par fatigue	126
7.3.1	Régimes de fissuration par fatigue, Loi de Paris.	126
7.3.2	Origine physique des trois régimes de fissuration par fatigue.	127
7.4	Fiche résumé	129
7.5	Problèmes	130
7.5.1	Choix de matériaux pour la réalisation d'un réservoir sous pression :	130
8	AnnexeS	135
8.1	Quelques rappels de mécanique des milieux continus.	135
8.1.1	Tenseur des contraintes	135
8.1.2	Tenseur des déformations	137
8.1.3	Puissance de déformation	138
8.2	Quelques rappels de physique.	138
8.3	Le facteur d'intensité des contraintes	141
8.3.1	Méthode de résolution de problèmes plans en élasticité isotrope.	141
8.3.2	Fonction de Westergaard.	143
8.3.3	Singularité en pointe de fissure.	143
8.3.4	Facteur d'intensité des contraintes.	145
8.3.5	Quelques expressions du facteur d'intensité des contraintes.	146

1 FICHE TECHNIQUE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

Professeur : Sylvie Pommier

Page : <https://www.universite-paris-saclay.fr/fr/sylvie-pommier>

Adresse 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan

Laboratoire LMT

e-mail: sylvie.pommier@ens-paris-saclay.fr

1.1 Descriptif de l'UE

Volume horaire :82h

1.1.1 Objectifs de l'Unité d'Enseignement

Cette unité d'enseignement a pour objectif de donner les éléments de base permettant d'effectuer un choix de matériau pour une application mécanique donnée. Les matériaux seront classés en grandes familles et les principaux types de comportement et de rupture des matériaux seront présentés par famille. A l'issue de ce cours vous saurez lire et utiliser les données d'une feuille de propriétés d'un matériau et utiliser des indices de performances pour effectuer un choix de matériau.

1.1.2 Contenu de l'Unité d'Enseignement

◇ *Cours 1*

Comportement thermo-élastique (ρ , \mathbf{E} , ν , α). Les grandes familles de matériaux. Essais et observations, origine physique, modélisation unidimensionnelle, indices de performance. Exemples de relation microstructure/propriétés. Cas des polymères : élastomères, thermoplastique et résines, comment le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique évoluent selon le degré de réticulation et la température.

◇ *ED 1 : Choix de matériau pour la réalisation d'une aile d'avion.*

◇ *Cours 2*

Le comportement élasto-plastique ($\mathbf{R}_{p0.2\%}$, \mathbf{R}_m , $\mathbf{A}_{\%p}$, \mathbf{H}_v , \mathbf{H}_B). Essais (traction, dureté) et observations, modélisation unidimensionnelle du comportement. Cas des métaux. Exemples de relation microstructure/propriétés : comment la limite d'élasticité et/ou la dureté évolue pour un matériau biphasé selon la fraction volumique de phase « dure ».

◇ *ED 2 : Le modèle unidimensionnel d'Asaro pour la contrainte d'écoulement et l'écroutissage cinématique d'un matériau bi-phasé.*

◇ *Cours 3 : suite du cours 2*

Le comportement élasto-plastique ($R_{p0.2\%}$, R_m , $A_{\%p}$, H_v , H_B). Cas des métaux. Origine physique de la plasticité (n.b. pas de dislocations, seulement les systèmes de glissement). Critères de plasticité, du mono-cristal, de Tresca, de Von Mises.

◇ *ED 3 : Exploitation d'un essai de traction simple, détermination du module d'Young, de la limite d'élasticité, de la contrainte maximum et de l'allongement à rupture. Application : détermination du seuil de plastification d'une pièce soumise à un chargement non-uniaxial.*

◇ *Cours 4 et Cours 5*

La rupture brutale et la transition ductile/fragile (K_{IC} , K_{CV} , σ_0 , m). Essais, observations et mécanismes de rupture pour :

- Des éprouvettes sans défauts pré-existants (paramètres de Weibull σ_0 , m)
- Des éprouvettes avec défauts pré-existants (K_{IC} , K_{CV})

Comment appliquer ces concepts pour le dimensionnement à la rupture d'une pièce.

◇ *ED 4 : Rupture du verre. Analyse de résultats de rupture d'éprouvette, détermination des paramètres de Weibull. Application pour le dimensionnement d'un réservoir sphérique sous pression interne ou externe, (casque de scaphandre).*

◇ *Cours 6*

La rupture par fatigue (limite d'endurance σ_f , loi de Paris C, m). Essais, observations et mécanismes de rupture pour :

- Des éprouvettes sans défauts pré-existants (limite d'endurance σ_f)
- Des éprouvettes avec défauts pré-existants (loi de Paris, C, m)

Notion de facteur d'intensité des contraintes et comment appliquer ces concepts pour le dimensionnement à la fatigue d'une pièce.

◇ *ED 5 : Choix de matériaux et manipulation d'indices de performances pour la réalisation d'un réservoir cylindrique sous pression (bouteille de plongée).*

◇ *Travaux Pratiques*

2 TP parmi 4 sujets. Pour chacun de ces TP, étude du protocole expérimental, actionneurs, asservissement, capteurs, résolution, précision ...

- Essais de traction sur acier. Eprouvettes lisses et entaillées. Exploitation des données et identification des propriétés matériau $R_{p0.2\%}$, R_m , E , $A_{\%p}$. Rôle de la triaxialité des contraintes, sur l'effort maximal à rupture et sur l'allongement à rupture (lisse/entaillée).
- Essai de traction et de compression sur le béton. (essai Brésilien, essai de compression d'un cylindre). Modes de rupture en traction, en compression. Exploitation des données et identification des propriétés matériau, E , contrainte maximale en traction, en compression, mise en évidence de la croissance de l'endommagement en traction.

- Essai de traction sur élastomère. Exploitation des données en présence de grandes déformations, utilisation de la corrélation d'image et mesures de déformation. Identification des propriétés matériau, module et évolution du module, contrainte au pic, contrainte plateau....
- Essai de fatigue, propagation d'une fissure dans une éprouvette d'acier travaillant en flexion rotative. Mesure de la longueur de fissure en surface, calcul du facteur d'intensité des contraintes, tracé de la loi de Paris et identification des paramètres C et m.

◇ *Pré-requis*

Cours de mécanique des milieux continus, notions de contrainte et de déformation. Résolution de problèmes d'élasticité linéaire.

◇ *Modalités de contrôle des Connaissances*

Examen écrit 50%

Travaux pratiques 50%, la note de TP est établie à partir des comptes rendus de TP qui doivent être établis à partir du modèle fourni.

◇ *Références bibliographiques*

- Polycopié du cours : Mécanique des Matériaux, S. Pommier
- M. Ashby et D. Jones (1990), Matériaux, Tomes 1 (Propriétés et Applications), Dunod
- D. François, A. Pineau, A. Zaoui, (1993), Comportement mécanique des matériaux, tomes 1 et 2, Hermes, Paris

2 REMARQUES ET CONSIGNES GENERALES

2.1 Remarques

- Ce polycopié est organisé en chapitres qui suivent plus ou moins le déroulement des séances de cours. Vous trouverez à la fin de chaque chapitre une fiche résumé. Les notions synthétisées dans ces fiches résumés sont les notions minimales à connaître à l'issue de ce cours et sur lesquelles vous serez interrogés lors de l'examen final.
- Le polycopié contient par ailleurs un grand nombre de compléments, qui ne seront pas tous évoqués en cours. L'examen final portera, nécessairement sur les notions de bases mais aussi sur les compléments qui auront été évoqués en cours. L'examen ne portera pas sur les notions qui n'auront pas été évoquées en cours même si elles sont dans le polycopié.
- Vous trouverez également dans ce polycopié les sujets des enseignements dirigés de cette année et quelques sujets d'enseignements dirigés ou d'examen proposés les années précédentes. Vous pouvez vous entraîner sur ces sujets complémentaires et vous adresser aux membres de l'équipe pédagogique pour vérifier si vos résultats sont corrects.
- Vous trouverez également à la fin du polycopié les sujets des travaux pratiques.

2.2 Consignes générales pour la rédaction d'un compte rendu de travaux pratiques

2.2.1 Préambule

Le port de la blouse est OBLIGATOIRE.

Le non-port de la blouse sera pris en compte dans la notation (partie comportement en TP).

2.2.2 Objectifs scientifiques

Préciser les objectifs de l'étude réalisée lors de la séance de travaux pratiques. Vous justifierez alors les moyens mis en places (partie 3) et le protocole expérimental (partie 4) vis-à-vis de ces objectifs. On ne vous demande pas dans un compte rendu de TP de mettre par écrit ce que vous avez fait durant la séance, mais d'expliquer (brièvement mais clairement) pourquoi l'expérience a été conduite de cette manière compte tenu de ce qu'on cherche à déterminer.

2.2.3 Moyens expérimentaux utilisés

Selon les cas :

- Décrire le type de machine (machine de traction mécanique, électromécanique, hydraulique, polisseuse, rhéomètre plan-plan, cône-plan,...) et son principe de fonctionnement.
- Décrire les capteurs utilisés (principe, gamme, plage utilisée pour l'essai, bruit, origine du bruit...) et leur emplacement.
- Décrire la mesure (répétabilité, résolution,...).

2.2.4 Protocole expérimental

- Décrire le matériau étudié.

- Décrire et justifier la géométrie des éprouvettes utilisées.
- Décrire et analyser le montage de l'éprouvette (correction du défaut d'alignement,...).
- Faire le schéma du système avec les différents capteurs. Préciser ce que mesurent ces capteurs.
- Décrire la sollicitation appliquée. Préciser quelles sont les mesures réalisées.

2.2.5 Résultats et analyse

Tout résultat obtenu, même inattendu, est un résultat qu'il convient d'analyser.

- Décrire le traitement des données mis en œuvre pour analyser les résultats (ex : comment à partir d'une mesure d'effort, trace-t-on la contrainte ?). Discuter, le cas échéant, les hypothèses inhérentes à ce traitement et les éventuels écarts à ces hypothèses qui se produisent lors de la séance de TP (ex. la section utilisée pour calculer la contrainte est la section initiale, mais le matériau se déforme beaucoup, cette hypothèse est discutable)
- Interpréter les résultats.
- Répondre aux questions posées dans le sujet de TP.

2.2.6 Remarque

Divers photocopiés, livres, revues techniques ainsi que les techniques de l'ingénieur sur internet sont à votre disposition. Ils ne doivent en aucun cas sortir du laboratoire de matériaux.

3 INTRODUCTION

◇ Objectifs

La maîtrise de nouveaux matériaux a permis de véritables révolutions dans l'histoire des technologies. Les grandes périodes de la préhistoire sont d'ailleurs définies par les matériaux maîtrisés, âge de pierre, âge du bronze, du fer. Aujourd'hui, le nombre de matériaux ou en tout cas le nombre de références est considérable et en constante augmentation. La science des matériaux permet de concevoir de nouveaux matériaux adaptés à chaque nouvelle application technologique. La conception d'un nouvel objet technique peut passer par une sélection de matériau dans une base existante (objectif du cours de L3) mais aussi par la conception d'un nouveau matériau adapté au mieux à l'application visée et de son procédé de fabrication (objectifs des cours de M1 et M2).

On distingue deux grandes catégories de matériaux :

(1) les matériaux de structure, qui seront l'objet de ce cours et qu'on utilise essentiellement pour leurs capacités à soutenir des sollicitations mécaniques et thermiques.

(2) les matériaux fonctionnels, qu'on utilise pour leurs propriétés physiques, telles que conductivité ou semi-conductivité électrique, magnétisme, propriétés optiques ...

Certains matériaux se trouvent à la frontière entre les applications mécaniques et physiques, comme par exemple les matériaux piézo-électriques qui délivrent un effort lorsqu'on les soumet à une différence de potentiel électrique.

Cependant, même en se restreignant aux matériaux de structure, le nombre de matériaux reste considérable. L'objectif de ce cours n'est donc pas de les étudier de manière exhaustive, mais de se donner les éléments de compréhension permettant de trouver pour une application particulière la solution matériau la plus adaptée.

Une solution matériau pour une application comprend trois volets, le matériau constituant le composant, le procédé de mise en œuvre du composant et la tenue en service de ce composant. Nous nous limiterons à l'étude de la relation entre le matériau et sa tenue en service, sans étudier sa mise en œuvre et plus généralement la relation entre le procédé et le matériau qui sera l'objet de modules de spécialité en M1 ou M2.

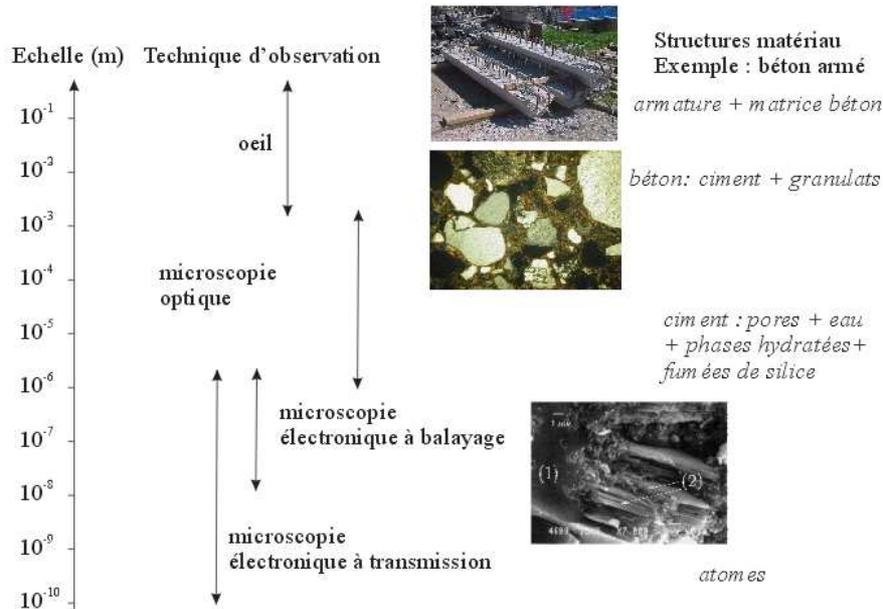
Le cours de cette année concernera donc les propriétés mécaniques (comportement thermo-élastique, plasticité, rupture différée par fatigue et rupture brutale, fragile ou ductile) des grandes familles de matériaux. L'accent sera mis sur les relations entre la structure du matériau et ses propriétés mécaniques. Ce lien est souvent le résultat d'un changement d'échelle entre le comportement des éléments constitutifs de la microstructure (échelle « micro ») et le comportement mécanique à l'échelle macroscopique (échelle « macro »), nous procéderons donc à des changements d'échelle.

◇ Notion de volume élémentaire représentatif du matériau

En effet, on caractérise les propriétés d'un matériau à **une échelle donnée**. A cette échelle le matériau est considéré comme homogène et continu. Si l'échelle à laquelle est caractérisée la propriété est comparable à l'échelle de l'hétérogénéité interne du matériau, les résultats seront alors **dispersés**. Il faudra réaliser de nombreux essais pour déterminer une valeur moyenne et une distribution statistique de la propriété.

Prenons un exemple très simple, la détermination de la masse volumique du béton armé. La masse volumique peut-être caractérisée à l'échelle métrique. Elle est fonction de la fraction volumique de béton multipliée par la masse volumique du béton et de la fraction volumique d'acier multipliée par la masse volumique de l'acier. A une échelle inférieure, centimétrique, la masse volumique du béton sera fonction de la fraction volumique de granulats et de pâte cimentaire. Et ainsi de suite pour les échelles inférieures...

Ainsi, peut-on optimiser une propriété du matériau à une échelle donnée en fonction de la connaissance du comportement de ses constituants. Cette démarche de changement d'échelle, tantôt qualitative, tantôt quantitative est couramment employée en science des matériaux.



Chaque propriété est donc associée à une échelle caractéristique (volume ou surface élémentaires représentatifs) au delà de laquelle elle peut être considérée comme une moyenne représentative du matériau. A chaque échelle sont associés des moyens de mesure et d'observation adaptés.

Moyennes pour un volume

- Masse volumique
- Coefficient de dilatation thermique
- Capacité calorifique
- Conductibilité thermique
- Coefficient de viscosité
- Module d'élasticité, module de Young
- Coefficient de Poisson
- Limite d'élasticité
- Contrainte à rupture
-

Moyennes pour une surface

- Emissivité
- Tension de surface
- Coefficient de frottement
-

◇ *Familles de matériaux*

L'objectif est donc d'établir les relations entre les propriétés mécaniques à une échelle donnée et la structure du matériau à une échelle inférieure. Le cours est organisé par classe de comportement mécanique (comportement thermo-élastique, plasticité, rupture différée par fatigue et rupture brutale, fragile ou ductile) et illustré à chaque fois à l'aide d'une ou plusieurs familles de matériaux.

Tableau 1 : Ordres de grandeurs de propriétés selon la famille de matériau

Propriété	Métaux	Céramiques	Polymères
Densité ρ [kg/m ³]	8000	4000	1000

	(2000..22000)	(2000..18000)	(900..2000)
Dilatation thermique α [1/K]	$10 \cdot 10^{-6}$ ($1 \cdot 10^{-6} \dots 100 \cdot 10^{-6}$)	$3 \cdot 10^{-6}$ ($1 \cdot 10^{-6} \dots 20 \cdot 10^{-6}$)	$100 \cdot 10^{-6}$ ($50 \cdot 10^{-6} \dots 500 \cdot 10^{-6}$)
Capacité calorifique c_p [J/(kg·K)]	500 (100..1000)	900 (500..1000)	1500 (1000..3000)
Conductivité thermique k [W/(m·K)]	100 (10.. 500)	1 (0.1.. 20)	1 (0.1.. 20)
Température de fusion ou de transition vitreuse T_m [K]	1000 (250..3700)	2000 (1000..4000)	400 (350..600)
Module d'élasticité, module de Young E [GPa]	200 (20..400)	200 (100..500)	1 ($10^{-3} \dots 10$)
Coefficient de Poisson	0.3 (0.25..0.35)	0.25 (0.2..0.3)	0.4 (0.3..0.5)
Contrainte à rupture σ_Y [MPa], noté également σ_R ou R_m	500 (100..3500)	100 (10..400 tract.) (50..5000 compr.)	50 (10..150 tract.) (10..350 compr.)
Dureté	Moyenne	Haute	Basse
Usinabilité	Bonne	Très mauvaise	Très Bonne
Résistance à l'impact	Bonne	Mauvaise	Très Mauvaise
Résistance au fluage thermique	Moyenne	Excellente	Très mauvaise
Conductivité électrique	Haute	Très faible	Très faible
Résistance à la corrosion	Moyenne	Excellente	Bonne

En effet, les matériaux de structure peuvent être classés en quatre grandes familles, selon la nature des liaisons entre les atomes, dont on peut résumer les propriétés principales comme suit :

(1) Les métaux (liaisons métalliques). Ce sont les matériaux les plus employés pour les applications structurales et pour l'essentiel des métaux ferreux (90% ferreux, les non-ferreux étant des alliages de Al, Cu, Ni et Ti). Ils sont capables de se déformer de manière permanente (ductiles) ce qui permet de réaliser des opérations de mise en forme par déformation plastique (emboutissage, forge, estampage...) ou d'assemblage par déformation plastique (rivetage, clinchage...) et leur donne une excellente résistance à la rupture en service. Par ailleurs les matériaux métalliques sont denses, et bons conducteurs thermiques et électriques.

(2) Les céramiques (liaisons ioniques, solides inorganiques) Ce sont les matériaux les plus anciens et les plus couramment utilisés en génie civil (pierre, brique, verre...). On peut (ex. béton) généralement les mettre en oeuvre à l'état pâteux. Ils ne deviennent fragiles qu'après la prise. Ces matériaux sont résistants à l'abrasion, mais pas aux chocs, moins denses que les métaux, isolants thermique et électrique, généralement poreux et fragiles.

(3) Les polymères (liaisons covalentes + liaisons faibles, solides organiques). Ces matériaux sont récents si on se réfère aux matériaux de synthèse mais il existe également un grand nombre de polymères naturels (fibres végétales par exemple). Ce sont de larges macromolécules organiques, comme par exemple le polyéthylène $-(C_2H_4)_n-$ dont le nombre de monomères n varie entre 100 et 1000 et la masse molaire de $M=10^0 \dots 10^3$ kg/mol. Les matières plastiques ont l'avantage de pouvoir être mises en forme par déformation plastique ou injection à l'état liquide. Elles peuvent être thermoplastiques (recyclables et ductiles, comme les métaux) ou thermodurcissables. Elles sont en général mauvais conducteurs thermique et électrique et très peu denses.

(4) Les composites et matériaux structuraux, ce sont des combinaisons hétérogènes de matériaux issus de ces trois familles, mais dont la structure est définie en fonction de l'application (béton armé, composite carbone-epoxy, composite aluminium-SiC etc...) ou bien se développe naturellement sous l'effet des sollicitations mécaniques ou thermique (ex. bois : fibres de lignine dans une matrice de cellulose, ou métaux texturés par déformation plastique intense).

Le Tableau 1 présente quelques ordres de grandeurs des valeurs moyennes et des fourchettes de quelques propriétés par grande famille de matériaux.

◇ *Sources bibliographiques*

- Matériaux (Tomes 1 et 2) , Michael F. Ashby, Davis R.H. Jones, Dunod, 1991
- Les techniques de l'ingénieur.
- Physique de l'état solide, Charles Kittel, Dunod, 1983
- Mécanique des matériaux solides, Jean Lemaître, Jean louis Chaboche, Dunod, 1996
- Matériaux Polymères, Relation Structure-Propriétés, Jacques Verdu ENSAM, 1992
- Comportement mécanique des matériaux, D. François, A.Pineau, A. Zaoui, tomes 1 et 2, Hermès, Paris, 1993
- Eléments de Metallurgie Physique, La Documentation Française, Paris, 1977.
- Etude de la plasticité et application aux métaux, D. Jaoul, Dunod, Paris 1965.
- Matériaux Polymères. Propriétés Mécaniques et Physiques, H. H. Kausch et col, Traité des Matériaux vol. 14. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2001.
- Matériaux et propriétés, Y. Berthaud, Polycopié, 2004.
- Dislocations, J. Friedel, Pergamon, Oxford, 1964.
- Introduction to dislocations, D. Hull, J. Bacon, International series on materials science and technologie, Pergamon,Oxford, ,1984.

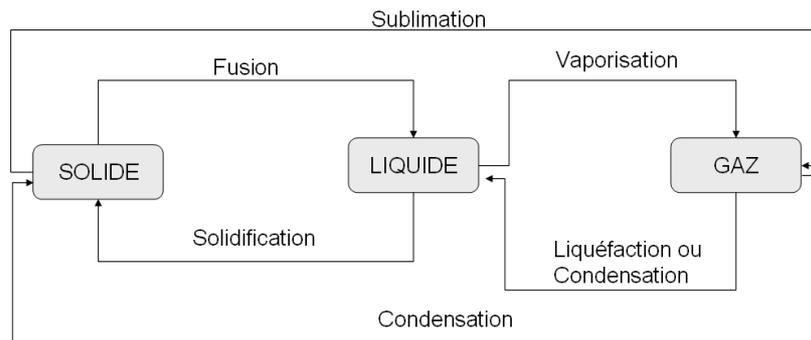
4 ETATS, LIAISONS, STRUCTURES ET COMPORTEMENT THERMO-ELASTIQUE.

4.1 Les états de la matière

Trois états sont généralement distingués, solide, liquide et gazeux.

1. **A l'état gazeux**, la matière est diluée et désordonnée. Les atomes sont en mouvement permanent dans toutes les directions au gré des chocs entre atomes. Le désordre du système est alors maximal. La pression peut être interprétée comme une conséquence de l'agitation des atomes. La pression est la force moyenne par unité de surface due aux particules venant frapper une paroi. Prenons l'exemple du gaz argon, dont la dimension des atomes est de 0.2 nm, à l'état gazeux, les atomes se déplacent à une vitesse moyenne de 100 ms^{-1} et se trouvent à une distance d'environ 4 nm les uns des autres.
2. **L'état liquide** est un état plus ordonné qu'un gaz. Le liquide est plus dense, les particules (atomes ou molécules) interagissent davantage les unes avec les autres, de ce fait il existe un ordre à petite distance (quelques dizaines de particules). Beaucoup de particules se contentent de vibrer sans changer leur position relative par rapport aux particules voisines. Cependant des échanges de position restent possibles, c'est ce qui permet la diffusion, phénomène facile à mettre en évidence dans le cas de deux liquides miscibles. Dans le cas de l'argon à l'état liquide, par exemple, les atomes se déplacent à une vitesse moyenne de 10 ms^{-1} et se trouvent à une distance d'environ 0.4 nm les uns des autres.
3. **L'état solide** est le plus ordonné et le plus dense. Les atomes interagissent beaucoup avec leurs voisins et de ce fait l'ordre existe à grande distance. On parle alors de structure cristalline. Dans les métaux courants, les cristallites (ou grains) ont des dimensions de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. Dans les solides, les atomes vibrent autour d'une position moyenne, la diffusion est beaucoup plus difficile.

Le schéma ci-après donne la nomenclature des divers changements d'état ou transitions de phase entre les états solide, liquide et gazeux.



On peut ajouter à cette liste d'états fondamentaux deux états « composites », c'est-à-dire des milieux dans lesquelles coexistent des états différents.

4. **L'état pâteux**, pour lequel des particules solides baignent dans un milieu liquide. On peut citer par exemple, le mortier avant la prise (grains de sable + pâte de ciment) ou encore la pâte dentifrice. Ces milieux, dits milieux granulaires, ont des propriétés originales. Les particules solides sont susceptibles de s'ordonner à courte distance, lorsque le milieu est en mouvement (quelques dizaines de particules) ou à grande distance lorsque le milieu est au repos. Ainsi le comportement observé peut s'approcher tantôt de l'état liquide, tantôt de l'état solide en fonction de la vitesse de déformation (c'est le comportement des sables mouvants, par exemple).

5. **L'état caoutchoutique**, pour lequel des fibres solides sont enchevêtrées (exemple : panneaux de fibres de verre). Autour de la position de repos le désordre des fibres est maximal, les fibres peuvent bouger facilement les unes par rapport aux autres, le milieu est très compressible, et peut être plus ou moins considéré comme un gaz. Si le milieu est soumis à de fortes déformations, les fibres peuvent s'aligner, s'organiser localement et le comportement évolue vers celui d'un solide.

4.2 Etat Solide, liaisons

A l'état solide on distinguera quatre types de liaisons entre les atomes, qui permettent justement de classer les matériaux en trois grandes familles (métaux, céramiques et polymères).

Liaison ionique : Cette liaison se caractérise par l'échange d'électrons entre deux atomes. Cette liaison est forte car elle sature la couche extérieure des atomes qui deviennent des ions. Cette liaison concerne essentiellement les éléments qui ont peu d'électrons sur leur couche externe (colonnes 1 et 2 du tableau périodique) et les éléments qui ont des couches externes presque saturées (colonnes 16 et 17 du tableau périodique). Par exemple, le sodium Na, présente une structure électronique comme suit : $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$. Il devient donc un ion Na^+ . Par ailleurs le Chlore Cl, présente une structure électronique comme suit $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^5$, il devient donc un ion Cl^- , on obtient alors le composé stable NaCl. Cette liaison est forte car elle stabilise fortement la structure électronique des atomes en saturant leur couche électronique externe.

La réaction $K^+ + Cl^-$ donne KCl libère ainsi une énergie de 374 kJ/mole.

Liaison covalente : Cette liaison se caractérise par la mise en commun d'électrons afin de saturer les couches électroniques externes de chacun des atomes de la molécule. Cette liaison permet par exemple d'expliquer l'association de deux atomes d'hydrogène pour former la molécule de di-hydrogène. La liaison covalente est également une liaison forte puisque elle permet de saturer la couche électronique externe des atomes.

La réaction $H+H$ donne H_2 libère ainsi une énergie de 436 kJ/mole

Liaison métallique : Cette liaison se caractérise aussi par la mise en commun d'électrons entre plusieurs atomes afin de saturer les couches électroniques externes. A la différence de la liaison covalente, la liaison métallique est délocalisée, c'est-à-dire que chaque atome peut être considéré comme un ion baignant dans un gaz d'électron. Les orbitales externes des atomes « coalescent » lorsque le cristal se forme. Ainsi les électrons de la couche externe ont-ils la liberté de se déplacer partout dans le cristal. Le matériau est alors conducteur électrique et thermique. Les atomes qui, isolés, présentent en couche externe des orbitales de type *s* ou *d*, dont la forme est assez isotrope, ont davantage tendance, lorsqu'ils sont sous forme de cristaux, à former des liaisons métalliques. Cette liaison est un peu moins forte que les liaisons covalente ou ionique mais elle reste une liaison forte.

Liaisons faibles (Van der Waals, liaison hydrogène) : Il existe également des liaisons électrostatiques faibles entre les molécules (et non pas entre atomes). Divers mécanismes font que les liaisons entre deux atomes d'une molécule peuvent être légèrement dissymétriques. La liaison se comporte alors comme un dipôle électrique. Lorsque plusieurs molécules sont assemblées, les pôles positifs et négatifs des dipôles auront tendance à s'attirer. Ainsi apparaissent des liaisons faibles entre molécules.

Prenons par exemple le cas de la molécule HCl. L'atome d'hydrogène est de structure $(1s^1)$, il cède un électron et devient un proton H^+ . Par ailleurs, le Chlore $(1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^5)$ acquiert un électron et devient un ion Cl^- . Ainsi se forme une molécule stable de HCl. Cependant l'électron cédé par l'atome d'hydrogène provient d'une couche très proche du noyau (la première) et est donc fortement liée à son noyau. Cet électron doit s'insérer dans une couche externe de l'atome de Chlore où il sera plus éloigné du noyau et donc moins attiré. La liaison covalente HCl n'est donc pas symétrique, l'électron reste finalement plus proche de l'atome d'hydrogène que de l'atome de Chlore. Ceci conduit à la formation d'un dipôle électrique sur la liaison HCl. Lorsque plusieurs molécules d'HCl sont mises en présence, le côté Cl d'une molécule attire le côté H d'une autre. Cette interaction entre molécules est appelée une liaison faible. Selon ce mécanisme, le dipôle est d'intensité maximale dans le cas d'une liaison hétérogène entre un atome d'hydrogène (très petit) et un autre atome beaucoup plus lourd (liaison hydrogène) mais

peut exister à priori pour toute autre liaison hétérogène. Il existe également d'autres mécanismes de formation de dipôles électriques dans une molécule.

Energie de liaison

Finalement, pour une liaison particulière entre deux atomes on peut définir un potentiel d'interaction, qui résulte des interactions nucléaires (répulsives) et des diverses interactions attractives entre atomes (covalente, ionique, métallique et faibles). Lorsque les atomes s'éloignent les interactions sont plus faibles.

On peut retenir que la forme du potentiel d'interaction entre deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

L'exposant n est généralement élevé ($n=8$ à 12) tandis que l'exposant m dépend fortement du type de liaison (de 1 à 8 selon le type de liaison). De nombreuses propriétés découlent directement de la forme des interactions entre atomes, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

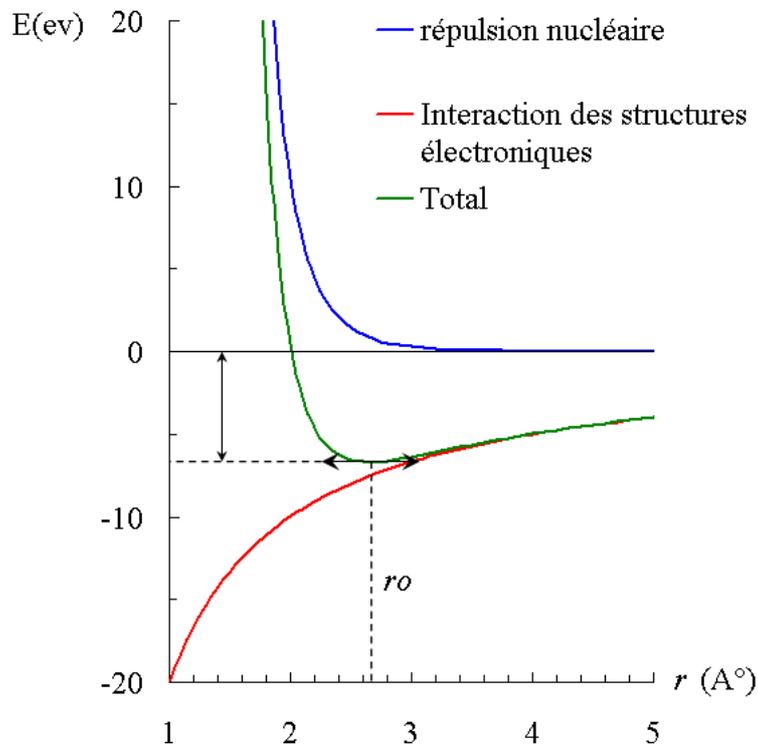


Figure 1 : Potentiel d'interaction pour la liaison NaCl (Quéré).

4.3 Cristallisation

Il existe donc un potentiel d'interaction entre atomes qui résulte de l'interaction répulsive entre les noyaux et des diverses interactions attractives entre les structures électroniques des atomes. La forme du potentiel d'interaction d'une molécule constituée de deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

Cette énergie présente un minimum (Figure 1) pour une distance r_0 entre atomes telle que :

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_0} = m \frac{A}{r_0^{m+1}} - n \frac{B}{r_0^{n+1}} = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{nB}{mA} \right)^{1/n-m} \quad \text{et} \quad E_{\min} = -\frac{A}{r_0^m} + \frac{B}{r_0^n}$$

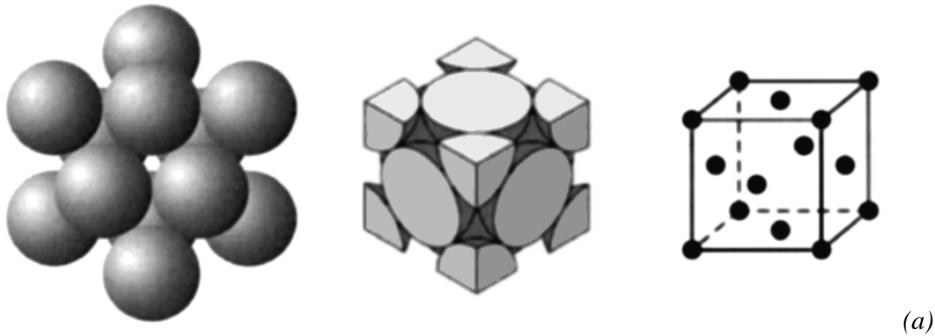
L'existence de ce minimum a plusieurs conséquences :

- (1) Il existe une distance r_0 entre atomes pour laquelle le potentiel d'interaction est minimum. C'est l'état le plus stable. En l'absence de sollicitations extérieures les atomes vont se placer à la distance r_0 les uns des autres. Ceci tend à favoriser l'apparition d'un ordre local dans le matériau voire sa cristallisation. Pour une liaison forte (ionique par ex.) la distance r_0 est de quelques dixièmes de nanomètres (NaCl : 5.63 Å). Pour une liaison faible (Van der Waals) r_0 peut atteindre quelques centaines de nanomètres.
- (2) On peut noter que si l'exposant m augmente, la distance r_0 entre atomes diminue. Ainsi, plus la liaison est forte, plus le matériau est dense. La densité des métaux (moyenne 8000 kg/m³) est beaucoup plus élevée que celle des polymères (moyenne 1000 kg/m³) (Tableau 1).
- (3) Si la valeur de m diminue, la valeur de E_{\min} diminue également en valeur absolue, c'est-à-dire que l'énergie à fournir pour séparer les atomes est plus faible. Ainsi la température de fusion ou de transition vitreuse sera-t-elle d'autant plus faible que la liaison est faible. La température de fusion des métaux (moyenne 1000 °C) est beaucoup plus élevée que la température de fusion des liaisons faibles ou température de transition vitreuse des polymères (moyenne 400°C) (Tableau 1).

4.3.1 Le Cristal Parfait

Le matériau peut donc s'organiser à plus ou moins grande échelle de manière cristalline. Les atomes s'empilent selon un motif qui se répète périodiquement dans l'espace, la maille.

Il existe de nombreuses structures cristallines. Mais, pour les matériaux métalliques, seules trois structures sont rencontrées, la structure cubique à faces centrées (ex. Cuivre, Aluminium, Nickel, Argent, Platine, Or), la structure cubique centrée (Fer α , Chrome, Tantale, Vanadium, Molybdène) et la structure hexagonale compacte (Titane, Zirconium, Cadmium, Zinc, Hafnium).



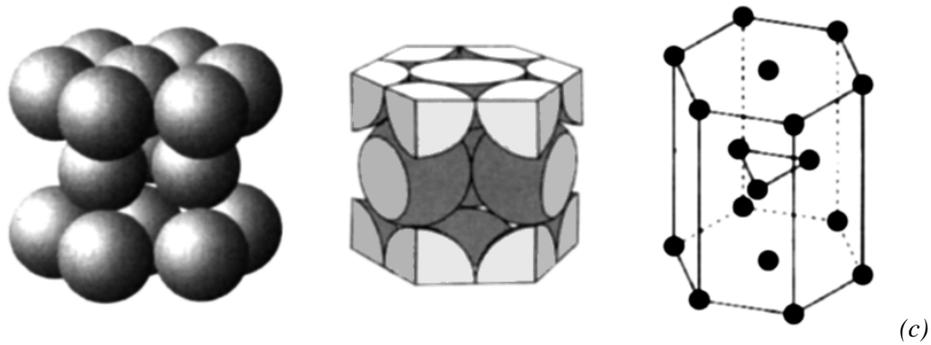


Figure 2 : Exemple de structures cristallines, (a) structure cubique à faces centrées (CFC), (b) structure cubique centrée (CC), (c) structure hexagonale compacte (HC). (Dorlot p57)

Pour une structure cubique, du fait de la périodicité du réseau, on peut repérer tout atome du réseau cristallin à l'aide d'indices entiers (x,y et z), et tout plan du réseau cristallin par des indices entiers (indices de Miller), notés généralement (h,k,l).

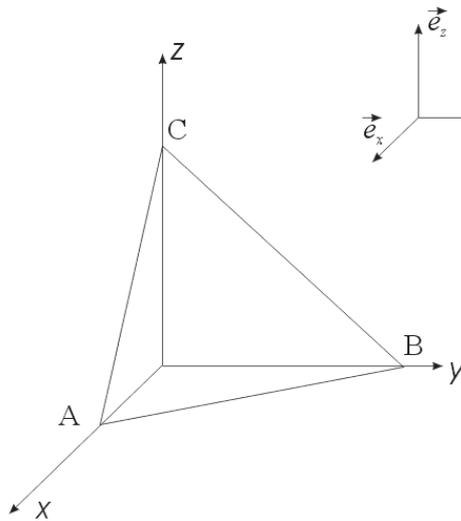


Figure 3 : A, B, C atomes d'un cristal de structure cubique. e_x, e_y, e_z vecteurs de base du réseau cubique. (ABC) un plan du cristal.

Si a, b, et c sont les distances entre atomes dans le motif de base du réseau cristallin, la position M d'un atome quelconque du réseau cristallin se définit à partir des vecteurs de base du réseau comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x.a.\vec{e}_x + y.b.\vec{e}_y + z.c.\vec{e}_z.$$

On peut alors repérer tout plan du cristal par ses indices de Miller (Figure 1). Posons par exemple $OA = x.a$, $OB = y.b$ et $OC = z.c$, où x, y, z sont des entiers, le plan (ABC) est défini par l'équation (a) et tout plan parallèle au plan (ABC) par l'équation (b) où P est un nombre entier

$$x/a + y/b + z/c = 1 \quad (a) \qquad x/a + y/b + z/c = P \quad (b)$$

Prenons les inverses $1/x, 1/y, 1/z$ des indices des points A, B et C, et multiplions les par leur plus petit commun multiple. On obtient alors trois nombres entiers (h,k,l) qui sont les indices de Miller du plan considéré. L'équation du plan (ABC) et des plans qui lui sont parallèles s'écrit alors $hx + ky + lz = N$, où N est entier.

Les indices de Miller d'une famille de plans parallèles sont notés entre parenthèses : (h,k,l).

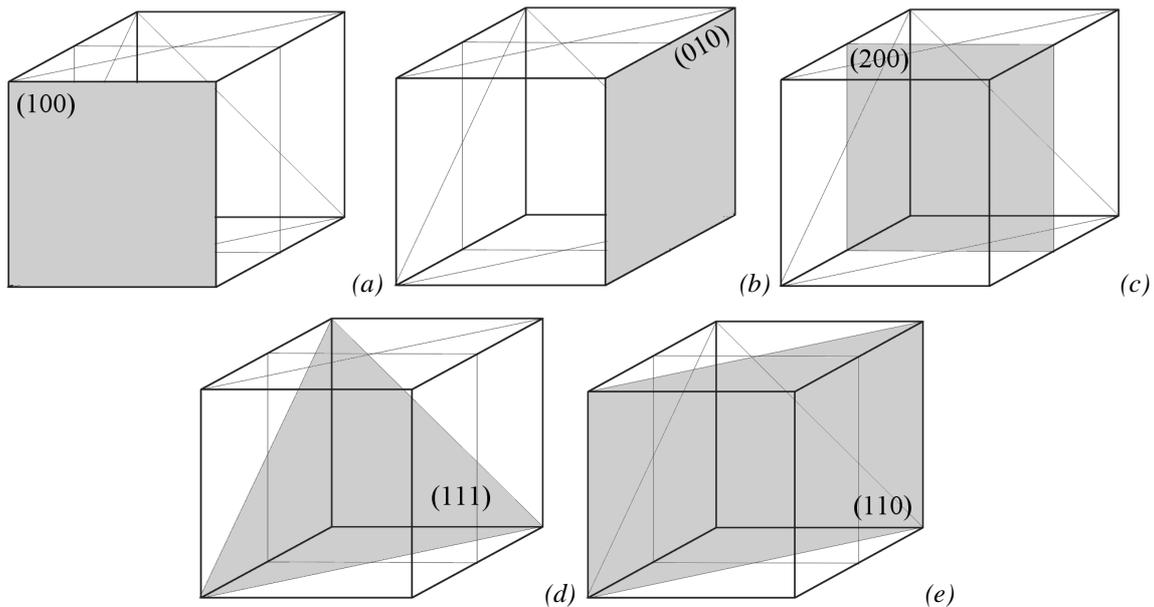
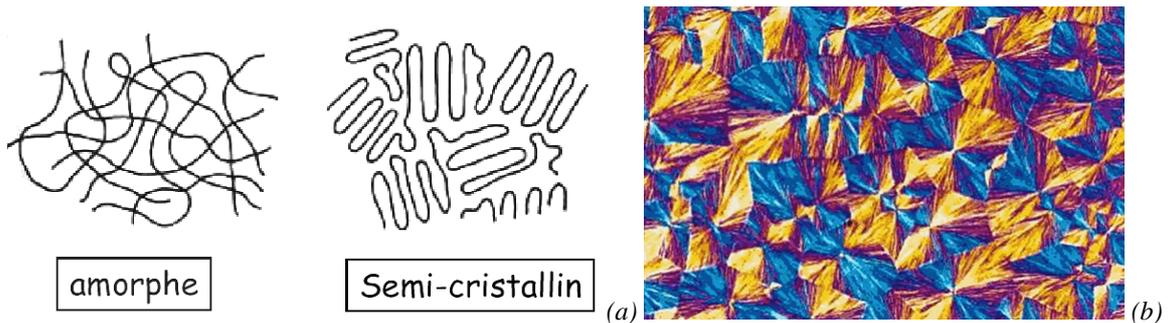


Figure 4 : Illustration de la dénomination de plans cristallins à l'aide des indices de Miller, (a) plan (100), (b) plan (010), (c) plan (200), (d) plan (111) et (e) plan (110). (Voir aussi l'ouvrage de **Kittel**, physique de l'état solide).

Les céramiques ioniques ou covalentes ont souvent des structures plus complexes, il existe jusqu'à quatorze structures cristallines (ou réseaux de Bravais), qui consistent en quatorze manières de paver l'espace avec des motifs de base, qui sont bien plus nombreux.

4.3.2 Zones amorphes, zones cristallisées.

Dans un matériau solide, des zones désordonnées et des zones cristallisées sont susceptibles de coexister. C'est couramment le cas dans les matériaux polymères. Les polymères sont de longues molécules organiques. Il existe généralement des liaisons faibles entre les molécules, ce qui conduit à leur organisation locale. Comme la liaison entre molécules est faible, la distance d'équilibre (r_0) est assez grande (quelques centaines de nanomètres), le réseau cristallin local permet donc de polariser la lumière dans le domaine du visible (longueur d'onde du visible entre 400 nm et 800 nm). Ce qui permet de visualiser les zones cristallisées en microscopie optique.



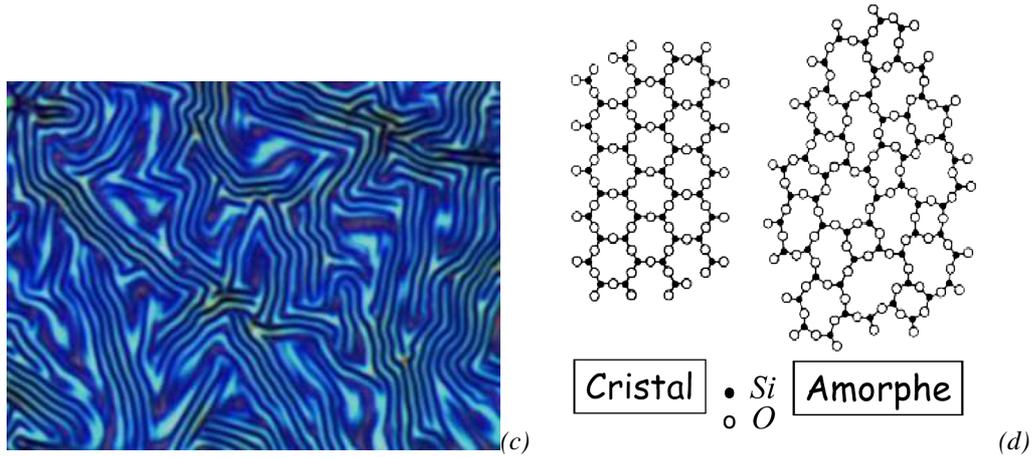


Figure 5 : (a) illustration de la structure amorphe ou semi-cristalline d'un polymère linéaire (b) cliché pris en microscopie optique d'un polymère semi-cristallin, les contrastes de couleur proviennent de la polarisation de la lumière par le réseau cristallin local formé par les molécules, (c) structuration à une échelle nanométrique dans un mélange de polymères, (d) illustration de la structure cristalline ou amorphe de la silice SiO₂.(Ecole GDR Verres, J.M. Pelletier)

4.4 Elasticité

4.4.1 Modèle moléculaire

On peut également déduire de l'existence d'un potentiel d'interaction entre atomes des informations sur le comportement mécanique de la liaison. La forme du potentiel d'interaction (Figure 6 (a)) d'une molécule constituée de deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

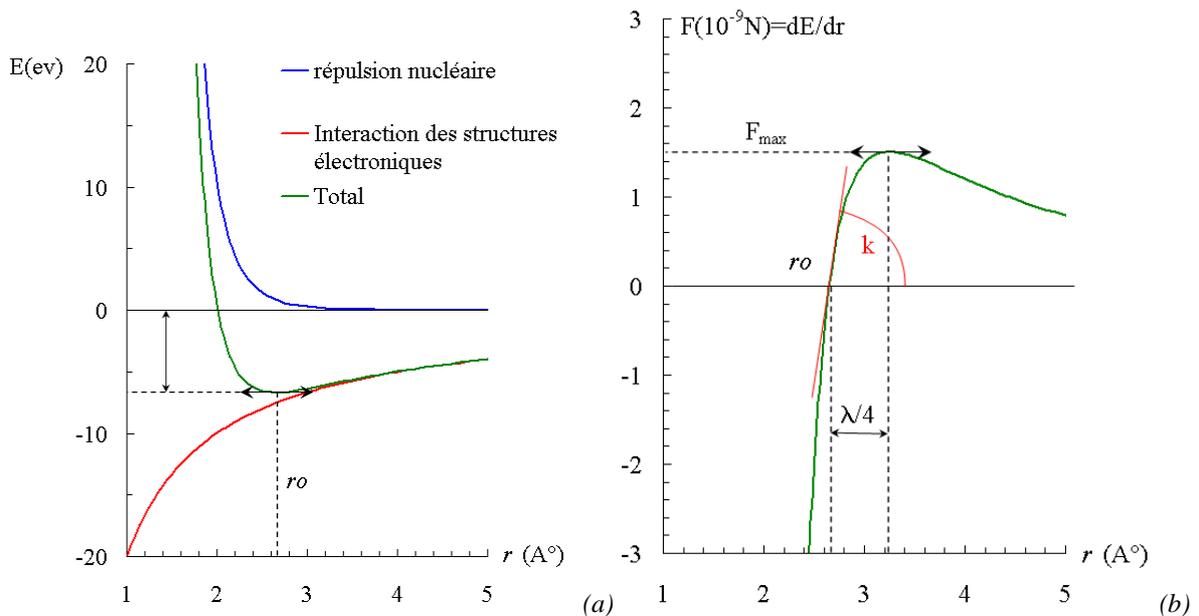


Figure 6 : Illustration, (a) potentiel d'interaction découlant des forces nucléaires répulsives et des interactions attractives entre structures électroniques. Existence d'un minimum de potentiel à la distance r_0 . (b) Force associée, elle présente un maximum pour un déplacement de $\lambda/4$, on lui associe une raideur k autour de la position d'équilibre r_0 . n.b. $1\text{eV}=10^{-19}\text{ J}$, $1\text{Å}=10^{-10}\text{ m}$.

Si les deux atomes se trouvent à leur distance d'équilibre r_0 , et qu'on cherche à modifier cette distance, l'énergie à fournir sera alors :

$$\Delta E = E(r) - E_{\min} = \int_{r=r_0}^r \frac{dE}{dr} dr = \int_{r=r_0}^r F(r) dr$$

L'effort $F(r)$ à appliquer sur la liaison au cours de la déformation de la liaison est la dérivée du potentiel par rapport à r (Figure 6 (b)). On constate que l'effort présente un maximum F_{max} pour une distance notée $\lambda/4$. Théoriquement, l'effort maximal F_{max} à appliquer pour rompre la liaison peut donc être déduit des caractéristiques de la liaison.

Lorsque r tend vers r_0 cet effort tend naturellement vers zéro. On peut effectuer un développement de Taylor de l'effort autour de la position d'équilibre de la liaison ($r = r_0$), on en déduit alors qu'au premier ordre :

$$F(r) \approx \frac{d^2 E}{dr^2} (r - r_0) = k(r - r_0)$$

La liaison se comporte comme un ressort autour de sa position d'équilibre. Ce comportement linéaire autour de la position d'équilibre est appelé l'élasticité.

On trouve alors l'expression de la raideur de la liaison en fonction de l'exposant m et des autres paramètres :

$$k = \frac{Bn(n+1)}{r_0^{2+n}} - \frac{Am(m+1)}{r_0^{2+m}}$$

Ainsi, plus la liaison entre atomes est forte et plus la distance r_0 est faible donc plus la raideur k de la liaison augmente.

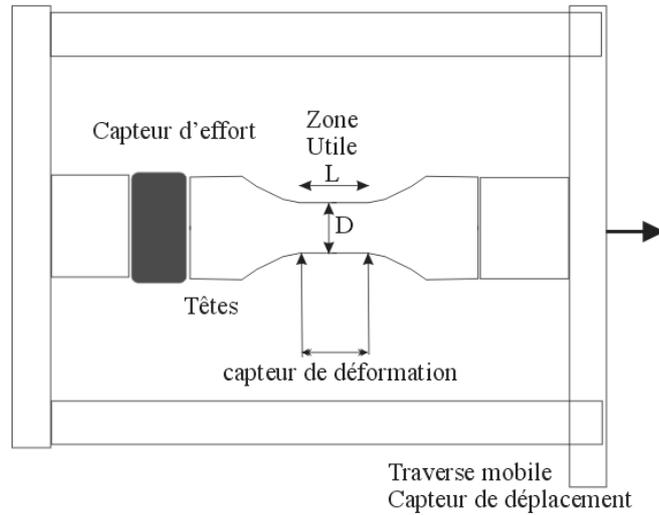
4.4.2 Modèle macroscopique.

Le modèle moléculaire permet de comprendre l'origine physique du comportement élastique. Cependant, en pratique il est difficile de caractériser le comportement élastique d'une liaison. En outre, lorsque les atomes sont sous forme de cristaux les orbitales sont déformées (Figure 83) et le potentiel d'interaction est différent de celui d'une liaison simple.

Lorsqu'on caractérise un matériau solide, on emploie des grandeurs relatives à un volume de matériau, les contraintes, les déformations, les densités volumique de puissance et d'énergie.

◇ *Caractérisation des propriétés élastiques d'un matériau.*

- Conditions nécessaires à la validité de l'essai :
 - Volume de matière testé \gg échelle de l'hétérogénéité du matériau
 - Contrainte et déformation homogène dans la zone utile de l'éprouvette
- Exemple : caractérisation du comportement en traction simple d'un acier doux à 0.48% de carbone
 - Taille de grain : 30 μ m
 - Volume minimal de matière : 10^6 grains
 - Eprouvette est cylindrique avec $L=1.5 D \rightarrow D=10$ mm



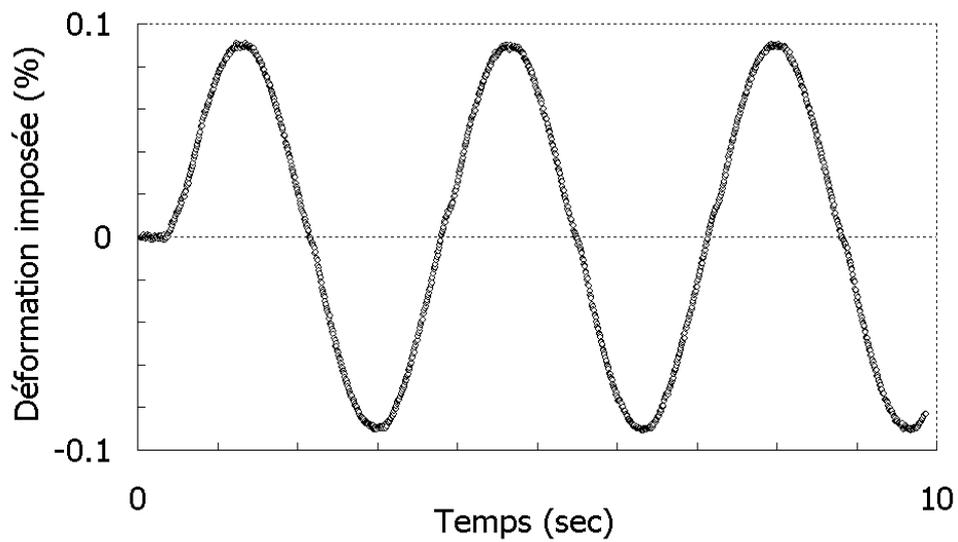
La déformation axiale se calcule comme suit, où L_0 est la distance initiale entre les points de mesure du capteur de déformation et L la longueur courante :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

La contrainte appliquée se calcule alors comme suit, où $S_0 = \pi D^2/4$ est la section de l'éprouvette et F l'effort mesuré

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

- Etude du comportement d'un acier doux à 0.48% de carbone dans son domaine d'élasticité, résultats



(a)

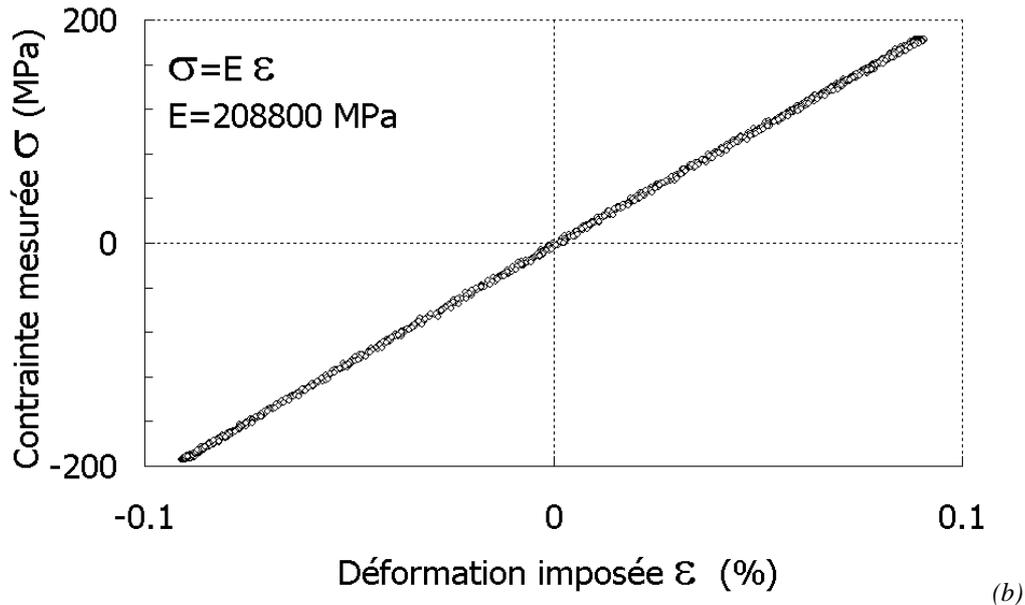


Figure 7 : Exemple de résultats expérimentaux obtenus par Rami Hamam sur un acier doux à 0.48% de carbone. (a) déformation imposée à l'éprouvette en fonction du temps, (b) contrainte mesurée en fonction de la déformation imposée, Le comportement du matériau reste élastique.

– Remarque sur les résultats expérimentaux

On peut faire plusieurs remarques sur ces résultats expérimentaux.

- (1) Le comportement est effectivement linéaire lorsque le niveau de déformation reste faible.
- (2) Au cours d'un essai de traction uniaxial comme celui-ci, on identifie le module d'élasticité E, ou module d'Young du matériau, comme étant la pente de la courbe contrainte-déformation. Dans le cas présent, on trouve un module d'élasticité E=208 GPa.
- (3) Lors d'un essai de charge-décharge, on n'observe pas d'hystérésis sur la courbe. Le comportement est élastique dans les deux sens du terme. D'une part la transformation se fait sans dissipation d'énergie, d'autre part, on n'observe pas de changement permanent de forme de l'éprouvette.

◇ Constantes d'élasticité d'un matériau.

On peut généraliser le raisonnement effectué sur la base du modèle moléculaire au milieu continu.

Supposons que la densité massique d'énergie libre (ou de cohésion) du matériau soit notée ψ

Alors, la contrainte qu'il faut appliquer pour déformer le cristal se calcule comme suit (voir §4.4.1)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \rightarrow \forall i, j = 1, 3: \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Si maintenant on cherche à déterminer le comportement élastique du matériau autour de sa position d'équilibre (voir §4.4.1), on peut effectuer un développement en série de Taylor au premier ordre, soit

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^2} \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \forall i, j = 1, 3: \quad \sigma_{ij} \approx \sum_{k,l} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl}$$

On pourra alors noter la relation entre la contrainte et la déformation comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \forall i, j, k, l = 1, 3: A_{ijkl} \approx \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

A priori on doit donc déterminer $3^4=81$ coefficients A_{ijkl} pour définir le comportement élastique d'un matériau. En réalité il en faut beaucoup moins. En effet, la contrainte et la déformation sont des tenseurs symétriques, donc $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$. Donc $A_{ijkl}=A_{jikl}=A_{ijlk}=A_{jilk}$. En outre, du fait de la commutativité de l'opérateur dérivée, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$ donc $A_{ijkl}=A_{klij}$.

Finalement, 21 coefficients au maximum sont suffisants pour définir la loi de comportement élastique de tout matériau.

◇ Rôle des symétries

Dans la pratique, il est très rare qu'il soit nécessaire de caractériser 21 coefficients pour définir la loi de comportement élastique d'un matériau. En effet, les propriétés de symétrie du matériau permettent de réduire significativement le nombre de coefficients nécessaires à la description du comportement élastique du matériau.

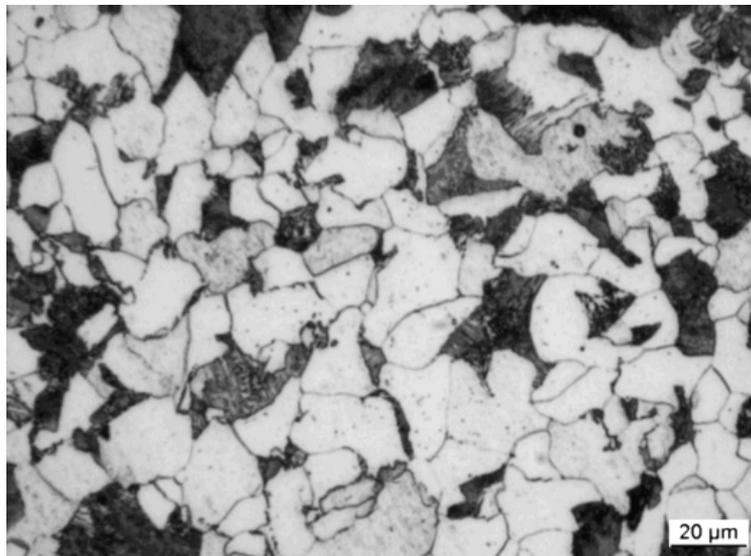


Figure 8 : micrographie de l'acier doux à 0.48% de carbone dont on a caractérisé le comportement élastique (Figure 7). Chaque domaine de dimension proche de $30\mu\text{m}$, est une cristallite de Fer. Les orientations des cristallites sont aléatoires.

Les métaux d'usage courant, par exemple, sont généralement isotropes. Ils sont constitués de grains, d'une dimension de l'ordre de quelques dizaines de microns. Chaque grain est un cristal, mais les orientations cristallines des grains sont généralement aléatoires. Ainsi à l'échelle macroscopique, le matériau est il isotrope.

Alors, à l'échelle macroscopique, le potentiel de cohésion du cristal ψ est également isotrope, et peut donc s'exprimer comme une fonction des invariants par rotation du tenseur des déformations, tels que l'identité, la trace, le déterminant... Si l'on se limite au premier ordre pour la déformation, le potentiel est du second ordre et peut alors s'écrire :

$$\rho\psi = a + b(\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{\lambda}{2} \cdot (\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \cdot \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)$$

Sachant que la contrainte est nulle pour une déformation nulle, on en déduit la relation suivante entre contrainte et déformation élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda \cdot \text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Seuls deux coefficients sont alors nécessaires pour définir complètement le comportement élastique d'un matériau, λ et μ les coefficients de Lamé, ou bien E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson avec :

$$\text{Avec } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad 2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}$$

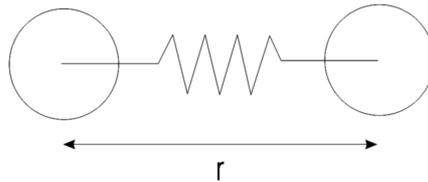
Si le matériau est anisotrope, c'est-à-dire s'il n'est pas isotrope, il peut néanmoins présenter certaines symétries. Par exemple, une symétrie par rapport à un plan et une symétrie axiale autour de la normale à ce plan, pour un composite structural en nid d'abeille, par exemple, on pourra tenir compte de la symétrie dans la forme du potentiel et se limiter au nombre strictement nécessaire de coefficients et donc de mesures à réaliser.

4.5 Dilatation thermique

4.5.1 Modèle moléculaire

Le modèle moléculaire permet également de prévoir la dilatation thermique du matériau.

En effet, lorsqu'un matériau est chauffé, les électrons sont excités et acquièrent une énergie cinétique. On peut assimiler le modèle moléculaire à un modèle dynamique de masse-ressort. Il faut cependant ne pas oublier que ce sont les électrons qui acquièrent une énergie cinétique et pas les noyaux.



Lorsque l'énergie cinétique interne des molécules est nulle, la température du système est également nulle (zéro absolu). L'énergie interne du système U_0 est alors égale à l'énergie de la liaison au repos E_{\min} . Lorsqu'on fournit de la chaleur Q au système, l'énergie interne est alors égale à $U=U_0+Q$.

Si on laisse ensuite le système évoluer sans échange d'énergie avec l'extérieur, son énergie interne reste constante et égale à U . Cependant, des transferts d'énergie sont susceptibles de se produire entre énergie potentielle et énergie cinétique. L'énergie potentielle est maximale lorsque l'énergie cinétique est minimale et vice-versa. Le système vibre. Aux extrema, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie interne est égale à l'énergie potentielle.

Compte tenu du fait que les interactions répulsives sont fortes, tandis que les interactions attractives sont plus faibles, la courbe potentiel-distance r est dissymétrique (Figure 9). Aussi la distance moyenne r entre atome se décale t'elle vers les grandes valeurs de r lorsque la température augmente.

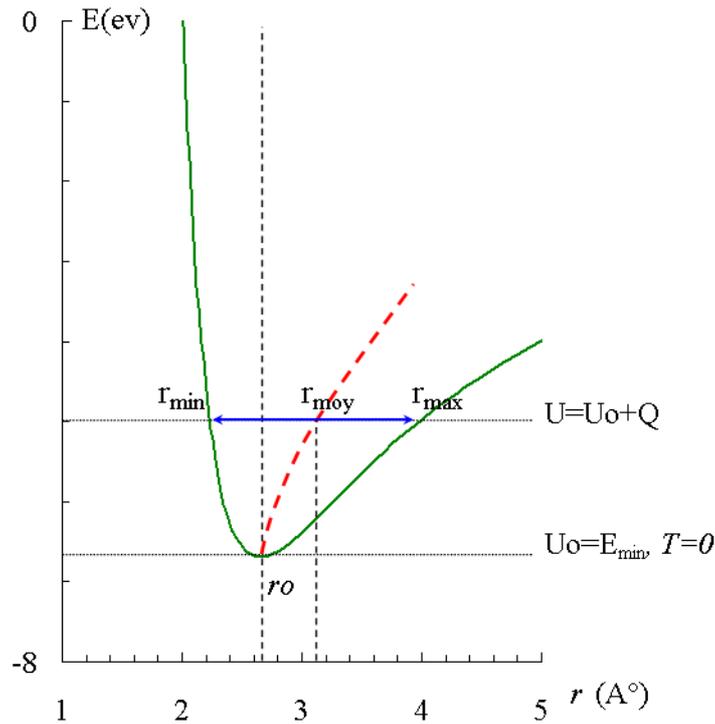


Figure 9 : Illustration, potentiel d'interaction découlant des forces nucléaires répulsives et des interactions attractives entre structures électroniques. La position des atomes oscille autour de r_0 , pour les valeurs maximum et minimum de r , l'énergie cinétique est nulle et l'énergie interne est égale à l'énergie potentielle. La position moyenne est tracée en pointillés.

A l'échelle macroscopique, ce phénomène est ce qu'on appelle la dilatation thermique. Ainsi plus la liaison est forte, plus la dilatation thermique est faible. Ainsi, les céramiques (liaisons covalentes ou ioniques) présentent-elles généralement des coefficients de dilatation faibles tandis que les polymères (liaisons de Van der Waals entre molécules) ont des dilatations thermiques très élevées.

On peut alors définir pour le système une énergie potentielle moyenne du système et qui devient une fonction de la température (Figure 9, courbe en pointillés).

4.5.2 Modèle macroscopique.

Comme pour les constantes d'élasticité, il est plus simple de caractériser les coefficients de dilatation thermique à l'échelle macroscopique.

En se fondant sur le modèle moléculaire, à l'échelle macroscopique, la densité massique moyenne d'énergie libre ψ est une fonction de la température. Si on se limite encore au premier ordre pour ε et au cas de l'isotropie, l'expression de ψ peut être écrite en fonction d'invariant du tenseur des déformations et de la température, où d et f sont des coefficients à déterminer :

$$\rho\psi = a + \frac{\lambda}{2} \cdot (\text{Tr}\varepsilon)^2 + \mu \cdot \text{Tr}(\varepsilon^2) - d \cdot T \cdot \text{Tr}\varepsilon - f \cdot T^2$$

Comme précédemment, on peut en déduire l'expression de la contrainte en fonction de la déformation totale et de la température. Et on exprime finalement le résultat de la manière suivante. La déformation totale $\underline{\varepsilon}$ est la somme d'une déformation élastique $\underline{\varepsilon}_e$ et d'une déformation thermique $\underline{\varepsilon}_\theta$, et à tout instant :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_\theta \quad , \quad \underline{\varepsilon}_\theta = \alpha(T - T_0)\underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma} = \lambda \text{Tr}\underline{\varepsilon}_e \underline{I} + 2\mu\underline{\varepsilon}_e$$

4.6 Thermo-élasticité des matériaux hétérogènes ou composites

Lorsque l'on emploie des matériaux hétérogènes, naturels (bois..) ou synthétiques (matériaux composites...), les comportements thermo-élastiques des divers constituants sont différents. On peut chercher à définir le comportement global du matériau hétérogène en fonction des comportements élémentaires de chacun de ses constituants afin d'optimiser sa structure en fonction de l'application mécanique visée.

◇ *Exemples de structures de matériaux composites*

On parle de matériau composite lorsque le matériau est constitué de plusieurs matériaux de base, et lorsque l'assemblage possède une structure qui résulte du procédé de fabrication choisi et qui participe au comportement du matériau. De nombreuses structures existent. Lorsque le matériau est constitué de fibres longues alignées dans une matrice, on parlera de « pli » d'un matériau composite à fibre longue. Lorsque les fibres ont été enroulées sur un mandrin avant d'être imprégnées de résine, on parlera d'enroulement filamentaire. Lorsque des couches sont empilées, on parlera de structure sandwich ou de composite stratifié.



Composites



Enroulement filamentaire



Structure Sandwich

Le comportement du matériau composite dépend d'une part des comportements élémentaires de ses constituants et d'autre part de la structure selon laquelle sont assemblés ces constituants.

◇ *Comportement élémentaires, modèles rhéologiques*

Afin de représenter les comportements élémentaires des constituants d'un matériau hétérogène, on emploiera généralement des modèles rhéologiques simples. L'assemblage de « modules » rhéologiques divers permet de comprendre le fonctionnement du matériau hétérogène. On se limitera ici à étudier le comportement homogénéisé d'un matériau composite sollicité de manière uniaxiale (1D) et selon deux assemblages, l'assemblage série et l'assemblage parallèle.

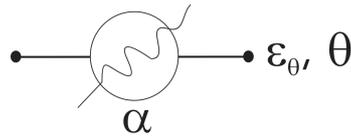
- Elasticité

On représentera le comportement élastique à l'aide d'un ressort uniaxial de traction compression. Lorsque l'on applique une contrainte σ sur ce « ressort » il se déforme élastiquement avec une déformation notée ϵ_e . Avec $\sigma = E \cdot \epsilon_e$, où E est le module d'élasticité du matériau.



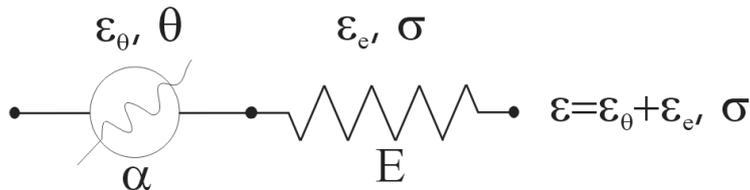
- Dilatation thermique

On représentera également la dilatation thermique à l'aide d'un élément uniaxial simple. Lorsque l'on applique une variation de température θ sur cet élément il se dilate thermiquement avec une déformation d'origine thermique notée ϵ_θ . Avec $\epsilon_\theta = \alpha \cdot \theta$, où α est le coefficient de dilatation du matériau.



Comportement thermo-élastique d'un constituant élémentaire

Chaque matériau est susceptible de se déformer élastiquement et de se dilater thermiquement. Comme les déformations élastiques et thermiques se somment on pourra représenter le comportement thermo-élastique de chaque constituant d'un matériau composite de la façon suivante :

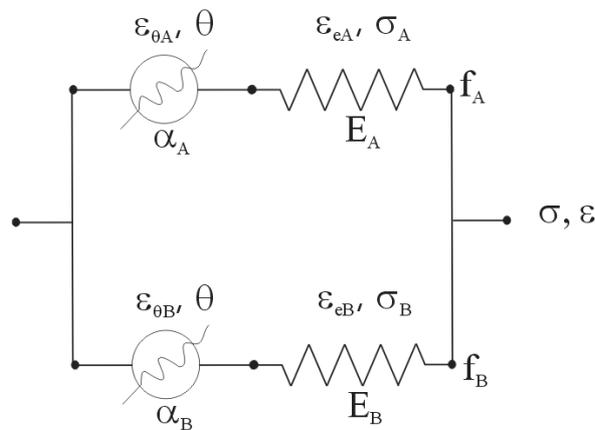


◇ Assemblage parallèle

Si maintenant on assemble deux matériaux élémentaires pour former un matériau composite, la structure de l'assemblage permet d'écrire des relations simples concernant le comportement de l'assemblage. Dans le cas d'un assemblage parallèle de matériau A, avec une fraction volumique f_A et de matériau B avec une fraction volumique f_B on pourra écrire :

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B \quad \text{et} \quad \sigma = f_A \sigma_A + f_B \sigma_B$$

Avec $\varepsilon_A = \varepsilon_{eA} + \varepsilon_{\theta A}$ et $\varepsilon_B = \varepsilon_{eB} + \varepsilon_{\theta B}$



Cet assemblage serait adapté pour décrire, par exemple, le comportement d'un matériau composite à fibre longues sollicité dans la direction des fibres (selon la direction A, Figure 10, (a)).

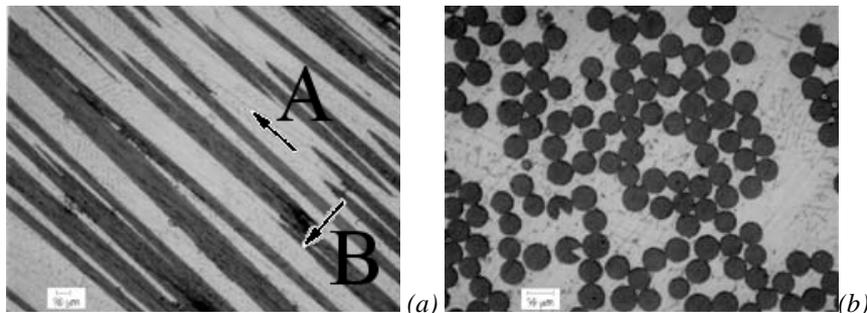


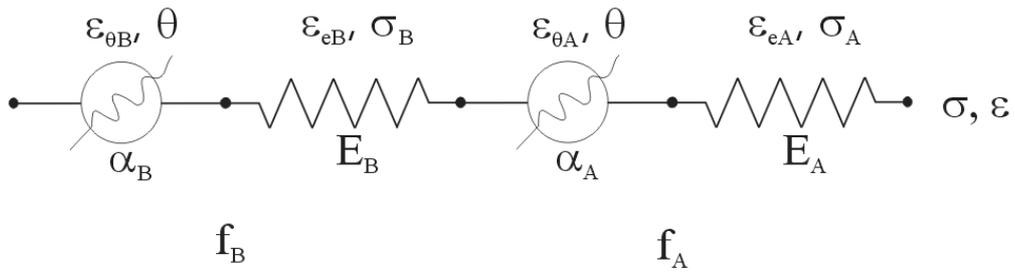
Figure 10 : Cliché d'un matériau composite à fibre longue, (a) section parallèle aux fibres, (b) section transverse (issu de <http://igahpse.epfl.ch/mmc/illustration/elaboration>).

◇ *Assemblage série*

Dans le cas d'un assemblage série de matériau A, avec une fraction volumique f_A et de matériau B avec une fraction volumique f_B on pourra écrire :

$$\varepsilon = f_A \varepsilon_A + f_B \varepsilon_B \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_A = \sigma_B$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon_A = \varepsilon_{eA} + \varepsilon_{\theta A} \quad \text{et} \quad \varepsilon_B = \varepsilon_{eB} + \varepsilon_{\theta B}$$



Cet assemblage serait adapté pour décrire, par exemple, le comportement d'un matériau composite à fibres longues sollicité dans la direction orthogonale aux fibres (selon la direction B, Figure 10, (a)).

4.7 Résumé

Les liaisons (interaction des nuages électroniques) entre atomes ou molécules permettent de distinguer trois grandes familles de matériaux, les métaux, les céramiques et les polymères.

- Les liaisons ioniques ou covalentes sont très fortes (**céramiques**).
- Les liaisons métalliques sont fortes. Les électrons sont libres de se mouvoir dans tout le cristal, les métaux sont conducteurs de la chaleur et du courant (**métaux**).
- Les **polymères** sont des molécules organiques entre lesquelles existent des liaisons faibles.

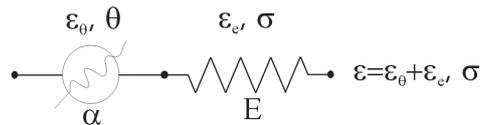
Plus une liaison est forte, plus

- la température de fusion est élevée
- la densité est élevée
- le matériau a tendance à cristalliser
- le module d'élasticité est élevé
- le coefficient de dilatation thermique est faible

Ordres de grandeurs

Propriété	Symbole	Unité	Métaux	Céramiques	Polymères
Température de fusion ou de transition vitreuse	T_f	K	1000	2000	400
Densité	ρ	kg/m³	8000	4000	1000
Module d'élasticité (Young)	E	GPa	200	200	1
Dilatation thermique	α	K⁻¹	$10 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$100 \cdot 10^{-6}$
Conductivité thermique	k	W/(m·K)	100	1	1

Relation de comportement (cas uniaxial), modèle rhéologiques :



- Contrainte σ , déformation ε , déformation élastique ε_e , déformation thermique ε_θ .
- Elasticité : $\sigma = E \cdot \varepsilon_e$, où E est le module d'élasticité du matériau.
- Dilatation thermique $\varepsilon_\theta = \alpha \cdot \theta$, où α est le coefficient de dilatation du matériau.
- Les déformations élastiques et thermiques d'un matériau se somment : $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_\theta$

Relation de comportement (cas multiaxial, et isotropie) :

- Elasticité : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_e$ ou bien $\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}}$
- Dilatation thermique : $\underline{\underline{\varepsilon}}_\theta = \alpha (T - T_0) \underline{\underline{I}}$
- Les déformations élastiques et thermiques d'un matériau se somment : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_\theta$
- Coefficients de Lamé : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}$

4.8 Problèmes.

4.8.1 Thermo-élasticité : Choix de matériaux pour la dérive de l'A380.

La dérive de l'A380, avec 14 m de haut et 13 m de longueur à l'encastrement, est la plus grande dérive d'avions commerciaux au monde. Cette structure, qui subit des sollicitations mécaniques intenses, incorpore de nombreux composants en matériaux composites, parmi lesquels, des raidisseurs en matériau composite à fibres longues, fibre de carbone, matrice époxy. Cette conception est assez révolutionnaire, la dérive étant un composant essentiel pour la sécurité de l'avion. Le remplacement de la structure métallique par une structure composite à pour objectif de minimiser la masse de la structure tout en assurant la tenue à des efforts qui augmentent avec la masse de l'avion.

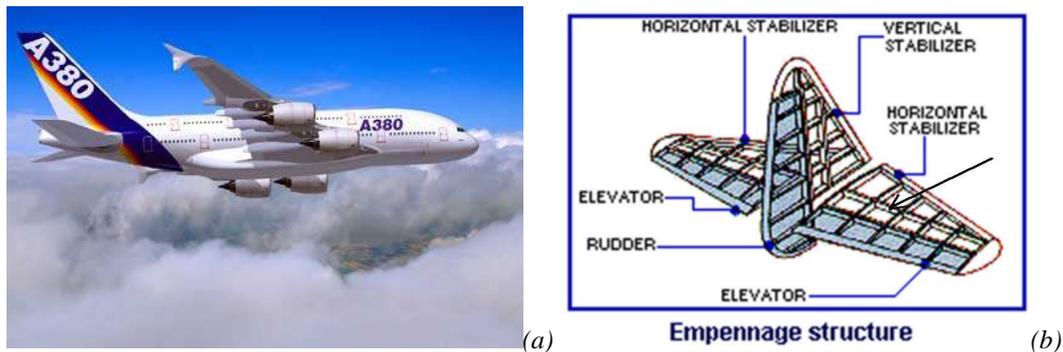


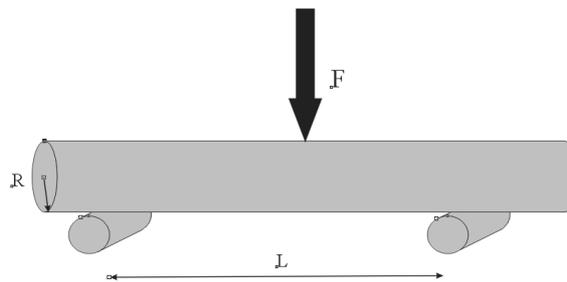
Figure 11 : (a) Vue de l'A380 en vol (b) schéma de la structure interne de l'empennage.

Dans un premier temps nous effectuerons un choix de matériau dans une base de matériaux existants (deux bois, trois alliages métalliques, et une matière plastique) en utilisant deux critères distincts. Nous étudierons en particulier le cas d'un raidisseur transversal travaillant en flexion. Pour simplifier, nous représenterons le raidisseur par une poutre à section circulaire travaillant en flexion.

Dans un deuxième temps, nous proposerons un nouveau matériau (matériau composite, fibre + matrice) susceptible de maximiser les deux critères simultanément. Nous étudierons la réponse du matériau en fonction de sa structure (fraction volumique de fibres).

Enfin, en supposant que le matériau proposé soit employé pour réaliser un raidisseur. Nous étudierons la tenue du matériau en service. Le matériau subit des sollicitations thermiques et mécaniques.

◇ Choix de matériau pour la réalisation d'un raidisseur.



$$f = \frac{FL^3}{48.E.I} \quad \text{et} \quad \sigma_{surf} = R \frac{F}{I} \frac{L}{4} \quad \text{avec} \quad I = \frac{\pi.R^4}{4}$$

On fait l'hypothèse que le raidisseur est une poutre à section circulaire portant sur deux appuis et subissant une force concentrée en son centre \mathbf{F} . Le déplacement maximum ou « flèche » est noté f . Le cahier des charges impose la rigidité en flexion du raidisseur que l'on note $\mathbf{K}=\mathbf{F}/f$. La longueur entre deux appuis est aussi imposée. Par ailleurs, la contrainte dans la poutre est maximum en valeur absolue en

surface et vaut alors σ_{surf} . Le cahier des charges impose que σ_{surf} reste inférieure à la contrainte maximale admissible par le matériau.

- **Critère N°1, minimiser la masse à rigidité imposée.**
 - (a) Exprimer la masse M de la barre en fonction de la masse volumique ρ du matériau et des caractéristiques géométriques, R le rayon et L la longueur.
 - (b) Exprimer de même la rigidité K en fonction du module d'Young E et des caractéristiques géométriques.
 - (c) En éliminant le rayon R entre ces deux expressions, déterminer la relation entre la masse M de la barre et sa rigidité K . En déduire le critère (critère N°1) à maximiser portant sur les propriétés du matériau qui permet de choisir le matériau permettant de réaliser le raidisseur le plus léger.
 - (d) Employer les cartes d'Ashby pour sélectionner une ou plusieurs familles de matériau.
 - (e) Calculez le critère N°1 pour les matériaux dont les propriétés sont fournies dans le tableau ci-dessous. Conclure.
- **Critère N°2, minimiser la masse à effort maximal imposé.**
 - (a) Exprimez la force F qui engendre la rupture ou l'apparition de déformations irréversibles (fin du comportement élastique). Exprimer cette valeur en fonction de la masse M du raidisseur.
 - (b) Le cahier des charges impose la valeur de F que doit admettre le raidisseur sans se rompre ni se déformer de manière irréversible. En déduire le critère (critère N°2) à maximiser portant sur les propriétés du matériau qui permet de choisir le matériau permettant de réaliser le raidisseur le plus léger.
 - (c) Calculez le critère N°2 pour les matériaux dont les propriétés sont fournies dans le tableau ci-dessous. Conclure.
 - (d) Commenter qualitativement la tenue à l'impact, à la température, à l'humidité, à la lumière ainsi que l'aptitude à la réparation, au recyclage, à la mise en forme et enfin le coût des matériaux proposés et dresser, en guise de conclusion, un bilan des points pour et contre l'utilisation de chacun des six premiers matériaux du tableau page 3.
 - (e) Au vu des résultats précédents quel matériau composite vous paraît le plus propre à maximiser les deux critères simultanément ?

◇ Conception d'un matériau composite.

Les premiers avions, très légers, étaient en bois, puis les contraintes appliquées à la structure ont augmenté, soit du fait de l'augmentation de la masse des avions, soit de leur vitesse. L'importance du critère N°2 dans la conception a donc augmenté. Aussi les structures ont-elles été construites en Aluminium ou même en Titane pour certaines pièces particulièrement sollicitées.

Pour l'A380, l'importance du critère N°2 est encore plus grande. On cherche donc réaliser un matériau qui optimise les deux critères simultanément. On se propose de réaliser un matériau composite à

fibres longues de carbone noyées dans une matrice de résine époxy ou éventuellement d'alliage d'aluminium (voir Figure 12).

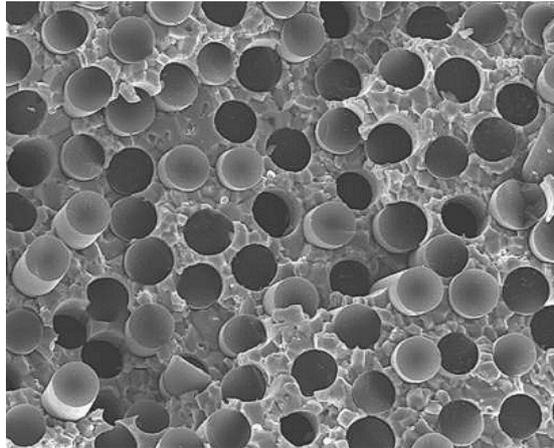


Figure 12 : Cliché obtenu en microscopie électronique à balayage d'un matériau composite à fibres longues de carbone dans une matrice intermétallique NiAl (www.space-mining.com).

• **Question 1 : Critère N°1**

- (a) Proposer un modèle rhéologique pour ce matériau composite, sollicité dans le sens des fibres, et supposé travailler à température constante.
- (b) Exprimer la masse volumique ρ du matériau composite en fonction des masses volumiques des fibres ρ_f et de la matrice ρ_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (c) Exprimer le module d'élasticité du matériau composite E en fonction des modules d'élasticités des fibres E_f et de la matrice E_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (d) Calculer le Critère N°1 de choix de matériau qui minimise la masse à rigidité imposée pour la poutre à section circulaire travaillant en flexion.
- (e) Tracer le critère N°1 en fonction de la fraction volumique de fibre dans le cas d'un composite carbone-époxy et aluminium-époxy. Discutez.

• **Question 2 : Critère N°2**

- (a) Exprimer la contrainte maximale admissible du matériau composite σ_R en fonction des contraintes maximales admissibles des fibres et de la matrice modules σ_f et σ_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (b) Calculer le Critère N°2 de choix de matériau qui minimise la masse à effort maximal imposé pour la poutre à section circulaire travaillant en flexion.
- (c) Tracer le critère N°2 en fonction de la fraction volumique de fibre dans le cas d'un composite carbone-époxy et aluminium-époxy. Discutez.

◇ *Tenue en service du matériau composite.*

La dérive de l'avion subit des sollicitations mécaniques importantes, notamment lorsque l'avion effectue des manœuvres (rotation, décollage, atterrissage). Par ailleurs, l'altitude de croisière de l'avion, lors d'un vol transatlantique par exemple est d'environ 10km, or les

températures à ces altitudes sont bien plus faibles qu'au sol. A chaque vol l'avion subit une variation de température de l'ordre de 70°C.

On suppose que les raidisseurs sont constitués d'un matériau composite, résine époxy fibres de carbone à 30% de fibres. La température de réticulation de la résine est aux alentours de 200°C, cependant on considère que l'adhérence complète fibre matrice se produit aux alentours de $T_R=90^\circ\text{C}$. La température au sol est de $T_0=20^\circ\text{C}$ et en altitude de croisière de $T=-50^\circ\text{C}$. Le coefficient de dilatation thermique de la résine est $\alpha_m=80.10^{-6}$ tandis que celui des fibres vaut $\alpha_f=9.10^{-6}$.

• **Question 1 : Influence du procédé de fabrication**

- (a) Proposer un modèle rhéologique pour ce matériau composite, sollicité dans le sens des fibres, et supposé travailler à température variable.
- (b) Ecrire la déformation ϵ du composite en fonction des déformations thermiques ($\epsilon_{\theta f}$ et $\epsilon_{\theta m}$) et élastique (ϵ_{ef} et ϵ_{em}) des fibres et de la matrice.
- (c) Ecrire la contrainte σ du composite en fonction des contraintes dans les fibres et dans la matrice (σ_f et σ_m) et de la fraction volumique de fibres f .
- (d) Ecrire les relations de comportement (thermique et élastique) des fibres et de la matrice, en déduire le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique du composite.
- (e) Fibres et matrice sont assemblées à une température T_R de 90°C. En déduire les contraintes dans les fibres et dans la matrice à la température ambiante T_0 .
- (f) Faire l'application numérique

• **Question 2 : Tenue en service**

- (a) Lors de variations de températures de l'ambiante T_0 à la température à l'altitude de croisière T , quelles sont les variations des contraintes dans les fibres et dans la matrice. Quelle peut être la conséquence de ces cycles thermiques.
- (b) Compte tenu de l'existence de contraintes initiales dans le composite, recalculer le critère N°2 dans le matériau composite à l'altitude de croisière et à la température ambiante, en fonction de la fraction volumique de fibres.
- (c) Conclure.

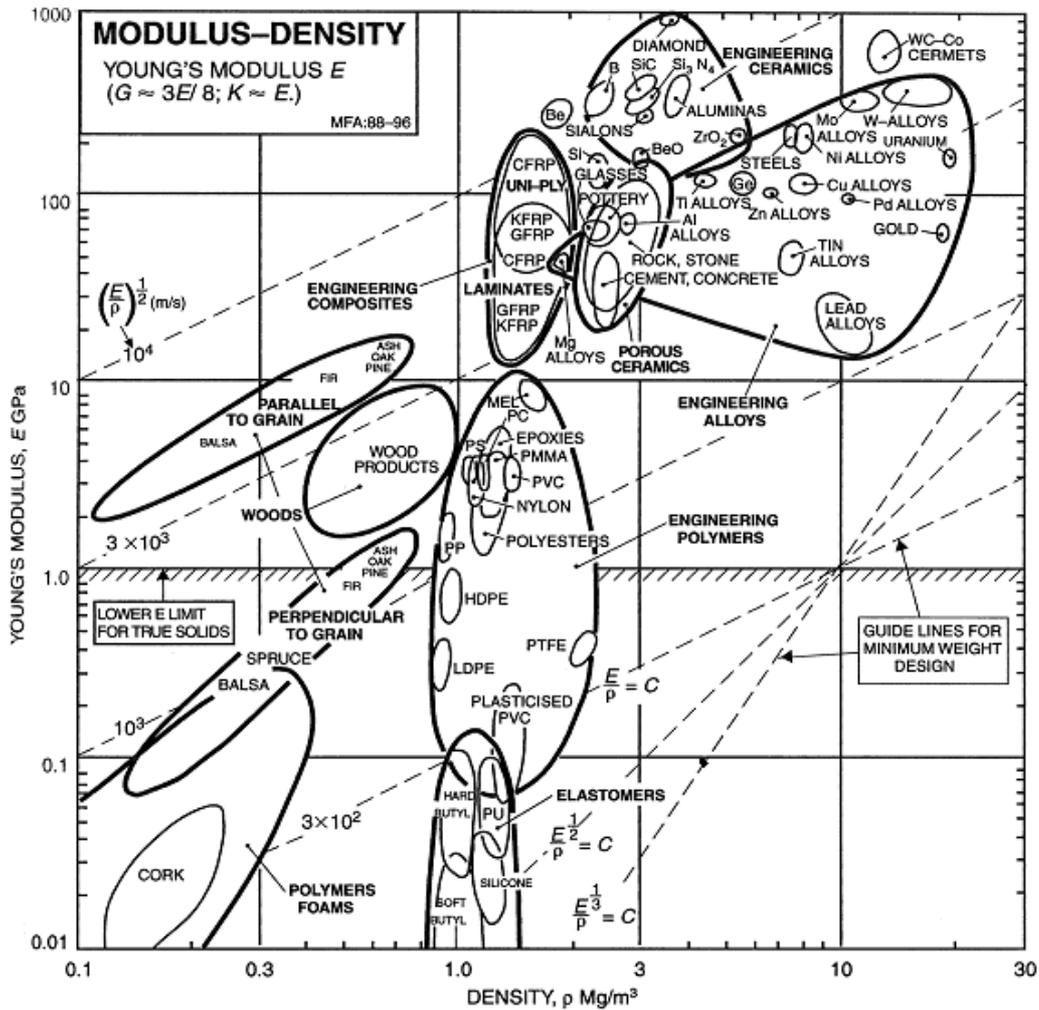
◇ *Données matériau.*

Matériau	Module d'Young (GPa)	Contrainte maximale admissible (MPa)	Masse volumique (kg/m^3)	Critère N°1	Critère N°2
	E	Re	ρ		
Bois d'Orme	9.2	5	460		
Bois Abies Balsamea	6.62	1.3	340		

Aluminum (2024-T6)	72.4	345	2780		
Titane (Ti6Al4V)	113	880	4430		
Acier Maraging	183	1550	8000		
Résine epoxy + silice (thermoducissable)	15	70	1800		
Fibre de carbone isolée	228	3800	1810		
Fibre de verre isolée	69	2900	2440		

(Voir www.matweb.com)

◇ Cartes de propriétés par familles de matériau (Carte d'Ashby) : module-densité.

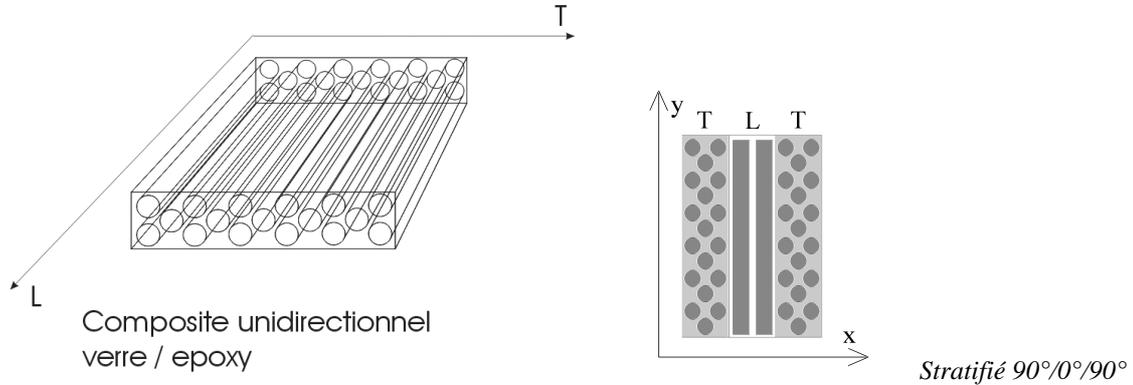


4.8.2 Thermo-élasticité : étude d'un matériau composite stratifié.

Représentation du comportement thermo-élastique d'un matériau composite stratifié à l'aide d'un modèle rhéologique simple. Mise en évidence de contraintes internes héritées du procédé de fabrication.

On constitue un matériau composite stratifié à partir de plis de matériau composite unidirectionnel à 90°/0°/90°. L'assemblage est réalisé à la température de polymérisation de la résine époxy. $T_1=180^\circ\text{C}$, puis on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à la température ambiante $T_2=20^\circ\text{C}$. On suppose un collage parfait aux interfaces entre plis de normale x .

Le pli est constitué de fibres de verre dans une matrice de résine époxy, la fraction volumique de fibres de verre est de 50%. On donne le coefficient de dilatation thermique du pli de matériau composite unidirectionnel dans le sens transverse, $\alpha_T=30.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, et dans le sens des fibres $\alpha_L = \alpha_T / 5$. On donne également les modules d'élasticité du composite unidirectionnel dans le sens transverse $E_T=10$ GPa et dans le sens des fibres $E_L=5 E_T$.



On suppose le composite constitué de l'assemblage de trois barreaux équivalents de largeur lz , d'épaisseur lx et de longueur ly travaillant en traction-compression simple dans la direction y . On écrit le problème en 1D, c'est à dire qu'on oublie les déformations dans les directions x et z et on ne se préoccupe que de la direction y .

◇ Question 1 : Etude du comportement du pli – Sens Transverse.

- Proposez un modèle rhéologique simple pour le pli de composite unidirectionnel dans le sens transverse.
- Calculez une expression du module d'élasticité E_T du pli dans le sens transverse, en fonction des modules d'élasticité de la fibre et de la matrice.
- Calculez une expression du coefficient α_T de dilatation thermique du pli dans le sens transverse en fonction des modules d'élasticité et des coefficients de dilatation de la fibre et de la matrice.

◇ Question 2 : Etude du comportement du pli – Sens Long.

- Proposez un modèle rhéologique simple pour le pli de composite unidirectionnel dans le sens des fibres.
- Calculez une expression du module d'élasticité E_L du pli dans le sens des fibres, en fonction des modules d'élasticité de la fibre et de la matrice.
- Calculez une expression du coefficient α_L de dilatation thermique du pli dans le sens des fibres en fonction des modules d'élasticité et des coefficients de dilatation de la fibre et de la matrice.

◇ Question 3 : Comparaison sens long/sens travers

	époxy	Verre E
α	$110.10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$	$5.10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$
E	4.5 GPa	75 GPa

- Calculez le rapport entre E_L et E_T
- Calculez le rapport entre α_L et α_T
- Discutez

◇ *Question 4 : Etude du comportement du stratifié*

- Proposez un modèle rhéologique simple pour décrire le comportement du stratifié.
- Calculez une expression du module d'élasticité E du stratifié en fonction de E_L et E_T .
- Calculez une expression du coefficient α de dilatation thermique du stratifié en fonction de E_L , E_T , α_L et α_T

◇ *Question 5 : Contraintes internes héritées du procédé de fabrication*

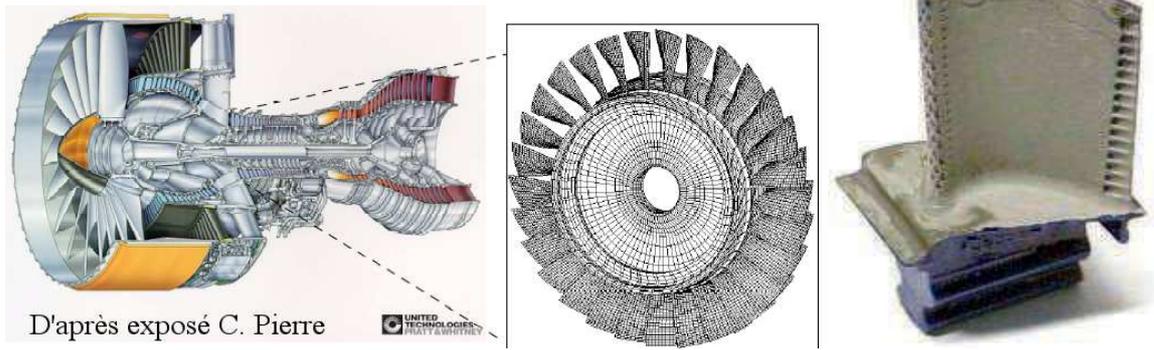
- Le stratifié est assemblé à $T_1=180^\circ\text{C}$ on le laisse ensuite refroidir librement jusqu'à $T_2=20^\circ\text{C}$.
- Calculez la contrainte résiduelle dans le pli central et dans les deux plis externes en fonction de E_L , E_T , α_L et α_T
- Application numérique : $\alpha_T=30.10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_T=10$ GPa, $\alpha_L = \alpha_T / 5$ et $E_L=5 E_T$. Calculez σ_T et σ_L à 20°C . Peut on dans la pratique les négliger ?
- Si le composite n'était constitué que de deux couches 0° et 90° , que se passerait il lors du refroidissement ? Illustrez votre propos par un schéma.
- Plus généralement, lors de la fabrication d'un composite multicouche comment doit on répartir les couches dans l'épaisseur pour éviter les gauchissements lors du refroidissement ?

4.8.3 Thermo-élasticité et conduction thermique : Aubes de turbines revêtues.

Les aubes de turbine des réacteurs d'avion subissent des cycles thermomécaniques à chaque vol. L'air entrant dans un réacteur est comprimé par une série de compresseurs (voir la figure ci-dessous). L'air sous pression est mélangé au carburant et explose dans la chambre de combustion. Les disques de turbines sont alors mis en rotation par les gaz de sortie de la chambre de combustion. Ces disques sont montés sur le même arbre que les disques de compresseurs et permettent ainsi de récupérer une partie de la poussée du réacteur pour comprimer l'air à l'entrée du moteur.

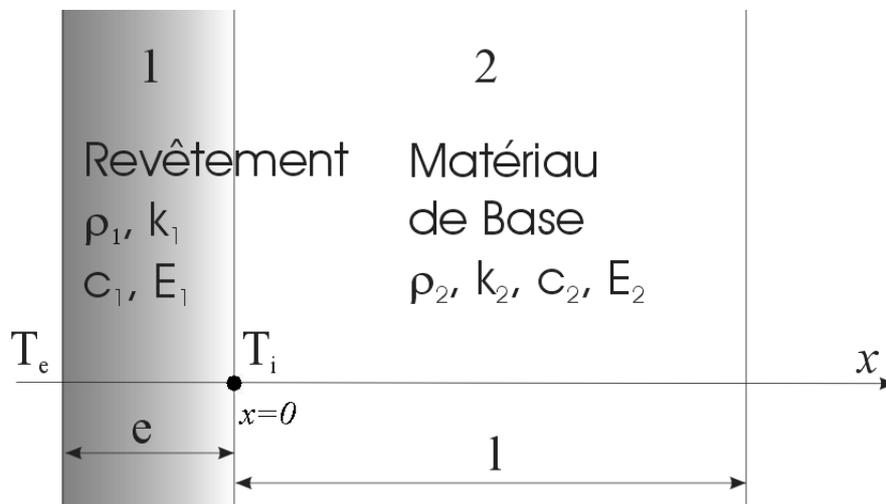
Ainsi les aubes de turbine se trouvent elles plongées dans les gaz de sortie de la chambre de combustion dont la température est supérieure (!) à la température de fusion de l'alliage constituant les aubes. Comme on le voit sur la figure ci-dessous, des systèmes de refroidissement sont prévus afin d'éviter la fusion des aubes. De l'air froid circule à l'intérieur de l'aube et est libéré dans les gaz de combustion, par une série de perçages, afin de former une couche d'air « froid » autour de l'aube.

Néanmoins les températures auxquelles sont soumises les aubes restent très élevées et la durée de vie des aubes est conditionnée par le vieillissement du matériau à haute température d'une part et par les cycles marche-arrêt des moteurs d'autre part. Nous allons ici étudier une solution de revêtement thermique des aubes qui permet d'augmenter leur durée de vie. Dans un premier temps, afin de comprendre le rôle du revêtement, nous étudierons la thermique du problème. Puis nous étudierons le couplage thermo-élastique avec revêtement.



◇ Etude du champ de température.

Pour comprendre le rôle du revêtement on étudie d’abord la thermique du problème. Comme les épaisseurs du revêtement et de l’aube sont petites devant la hauteur et la largeur de l’aube, on se limitera ici à étudier un problème 1D (voir la figure ci-dessous). L’interface se trouve en $x=0$.



La température initiale est supposée égale à T_0 partout lorsque le moteur est à l’arrêt. Au démarrage, la température de surface est imposée égale à T_e sur la face externe et est libre sur la face interne de l’aube où circule l’air froid. On cherche à déterminer le champ de température dans l’aube en fonction de la cote x et du temps.

L’équation de la chaleur se réduit ici à :

$$\rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} = k. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

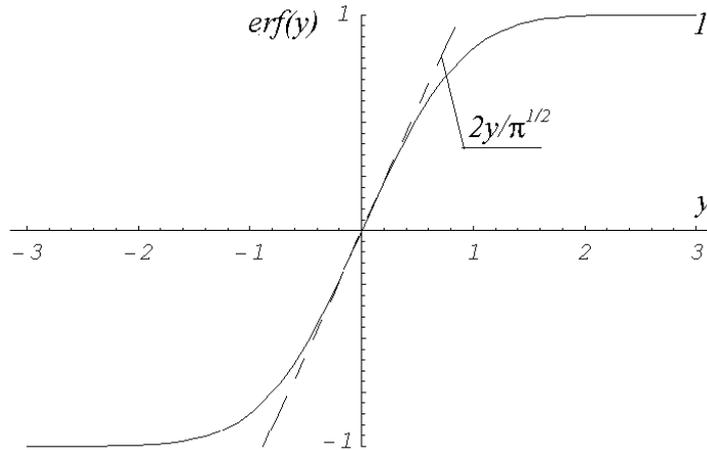
Où t est le temps, T la température à la cote x , ρ la masse volumique, c la capacité calorifique et k la conductibilité thermique. La forme générale de la solution de cette équation est la suivante :

$$T(x,t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B \xrightarrow{x \rightarrow 0} A \frac{x}{\sqrt{\pi at}} + B \quad \text{avec} \quad a = \frac{k}{\rho c}$$

Où A et B sont des constantes d’intégration et où la fonction « erf » est définie par :

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=y} e^{-u^2} du$$

Cette fonction présente deux asymptotes, elle tend vers 1 lorsque y tend vers l’infini et vers $2y/\sqrt{\pi}$ lorsque y tend vers zéro. Son allure générale est la suivante :



- **Question 1 :** En utilisant la solution exacte, écrire la condition initiale $T=T_0$ partout en déduire l'expression de B_1 et B_2 en fonction de A_1 et A_2 .
- **Question 2 :** En utilisant la solution exacte, écrire la condition aux limites en température sur la face externe ($x=-e$), en déduire l'expression de A_1 .
- **Question 3 :** Au niveau de l'interface, écrire l'égalité des flux entrant dans le domaine 1 et sortant du domaine 2. Comme l'interface est en $x=0$, on peut employer la solution approchée aux alentours de $x=0$. En déduire l'expression de A_2 .
- **Question 4 :** On suppose que t est suffisamment grand pour que l'expression approchée soit valable partout. Exprimer la température moyenne T_{m1} dans le revêtement et T_{m2} dans le métal de base en fonction du temps.
- **Question 5 :** Application numérique, tracer l'allure du champ de température (en utilisant la forme approchée) pour $t=10$ sec et $t=100$ sec (voir les données matériau ci-dessous). Calculez les valeurs de T_{m1} et T_{m2} pour t tendant vers l'infini.

AN : $e=200 \mu\text{m}$, $l=2 \text{ mm}$, $T_0=300^\circ\text{C}$, $T_e=900^\circ\text{C}$.

◇ *Couplage thermo-mécanique.*

On suppose que la température dans le revêtement est homogène égale à $T_0=300^\circ\text{C}$ au sol et à $T_2=900^\circ\text{C}$ en vol, tandis que la température dans le métal de base est égale à 300°C au sol et 600°C en vol. On étudie maintenant le couplage thermo-élastique dans l'aube de turbine revêtue.

- **Question 1 :** Proposer un modèle rhéologique simple pour décrire le comportement de l'aube de turbine revêtue. Ecrire les relations existant entre contrainte et déformation dans le métal de base, dans le revêtement et dans l'assemblage.
- **Question 2 :** Déterminer les contraintes et les déformations dans le métal de base et dans le revêtement au cours d'un cycle thermique.
- **Question 3 :** Discutez les résultats. Quels sont les avantages et les inconvénients d'un revêtement thermique. Sur quels paramètres pourrait-on jouer pour maximiser la protection thermique tout en minimisant le risque de rupture ?

◇ *Données matériau.*

Matériau	Module	Masse volumique	Coefficient de dilatation	Conductibilité	Masse
----------	--------	-----------------	---------------------------	----------------	-------

	d'Young (GPa) E	(kg/m ³) ρ	thermique (K ⁻¹)	thermique (W/mK) k	volumique (J/kgK) c
Revêtement, Alumine, Al₂O₃ poreuse	370	3900	8 × 10 ⁻⁶	3	880
Inconel 718 Superaliage à base de Nickel	165	8190	13 × 10 ⁻⁶	11.4	435

4.8.4 Dilatation Thermique : étude d'un système de compensation thermique

Cette étude concerne le choix de matériau pour la réalisation d'un bras d'horloge à balancier (Pour la culture générale, je vous invite à lire l'article ci-dessous extrait de Pour la Science, concernant la course à la mesure de la longitude et la conception d'une horloge précise par Harrison dès 1759). Dans un premier temps, on s'intéressera à l'incertitude sur la mesure du temps provenant des variations de température, on en déduira une estimation de l'incertitude sur la position à la surface de la terre. Et l'on cherchera à faire un choix de matériau permettant de minimiser ces incertitudes.

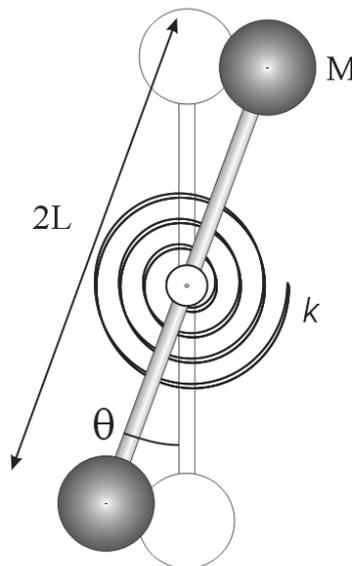
Dans un second temps, on étudiera une solution de compensation thermique, il faudra proposer une solution matériau optimale pour la réalisation du système de compensation thermique.

◇ Oscillation d'un pendule, incertitude sur la mesure du temps.

On considère un pendule de longueur $2L$, portant à des deux extrémités une masse M . Le balancier du pendule a un coefficient de dilatation thermique α . Il est en liaison pivot avec le bâti de l'horloge. Sur cette liaison est également monté un ressort spiral de raideur k .

L'application du théorème du moment dynamique donne pour ce problème :

$$2M \cdot L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$



- **Question 1** : Quelle est la solution de cette équation ? Déterminer la longueur L à donner au balancier pour que sa période d'oscillation soit de 1/2 seconde (on prendra $M=0.1$ kg, $k=7.106.10^{-3}$ Nm/rad).
- **Question 2** : Supposons que la température varie au cours d'une traversée en mer, exprimer la variation de la période d'oscillation en fonction de la variation de température ΔT et du coefficient de dilatation thermique

α du matériau constituant le balancier. Exprimer l'erreur sur la longitude due à la dilatation thermique après 42 jours de mer. Quelle valeur de α doit on choisir pour que l'erreur soit inférieure à un demi-degré (soit 55.6 km à l'équateur) en prenant $\Delta T=30^\circ\text{C}$. Idem pour une erreur de 9.10^{-3}° (1km à l'équateur).

- **Question 3 :** Quelle solution matériau permettrait de réaliser le bras du balancier en minimisant l'erreur sur le temps ? Qu'en pensez vous ?

◇ *Système de compensation thermique.*

Harrison a proposé un système de compensation thermique pour l'horloge H4 constitué d'un bilame courbe. Pour simplifier nous nous limiterons à étudier un système intermédiaire dit « à grill ». De même pour simplifier, on supposera que le système de compensation « remplace » le balancier, ce qui n'est pas tout à fait le cas dans la réalité mais permet de comprendre le fonctionnement du système.

Ce système est constitué de tiges de matériaux présentant des coefficients de dilatation différents. Lorsque la température varie, le déplacement relatif des tiges conduit à la rotation des bras, ce qui permet de minimiser les mouvements du centre d'inertie du balancier. Le système est schématisé sur la Figure 13 (a) il présente deux plans de symétrie. On étudiera donc le comportement d'un quart de l'objet

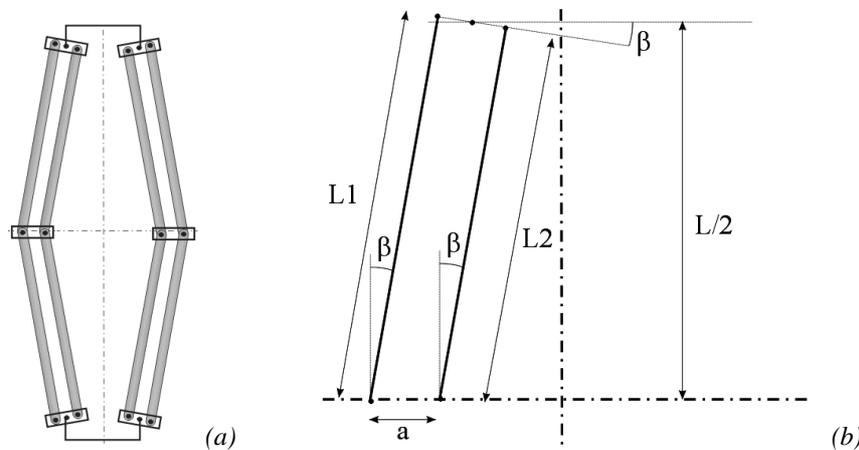


Figure 13 : (a) Schéma du système de compensation thermique, (b) paramétrage du problème

- **Question 1 :** Exprimer l'angle β en fonction de $L1$, $L2$ et a . Puis la longueur du bras du balancier en fonction de β et finalement de $L1$, $L2$ et a . (n.b. $\cos[\arcsin x] = \sqrt{1 - x^2}$). On suppose que α_1 est supérieur à α_2 .
- **Question 2 :** On se donne des dimensions $L1_0$ et $L2_0$ à la température de départ, exprimer $L1$ et $L2$ en fonction de la variation de température ΔT et des coefficients de dilatation α_1 et α_2 de chacun des deux matériaux. Calculez la longueur du bras du balancier en fonction de $L1_0$, $L2_0$, $\Delta\theta$, α_1 et α_2 . On exprimera $L2_0$ et $L1_0$ en fonction de L_0 et de l'angle initial β_0 .
- **Question 3 :** On se donne $\beta_0=27.5^\circ$, et $\Delta T=30^\circ\text{C}$. L_0 est telle que la période de battement soit de 1/2 seconde. On impose $a=8$ mm. Exprimer l'erreur sur la longitude due à la dilatation thermique après 42 jours de mer, en km à l'équateur en fonction de α_1 et α_2 . Et avec $\Delta T=30^\circ\text{C}$.
- **Question 4 :** En utilisant les données du tableau ci-dessous, proposez une solution matériau pour le système de compensation thermique.

◇ *Données matériau.*

Famille	Matériaux	Coefficient de dilatation thermique (K^{-1}) α
Céramique	Diamant	1.2×10^{-6}
Céramique	Fibres de verre	9×10^{-6}

Céramique	Nitrure de Silicium	2.8×10^{-6}
Métal	Acier (Fe + 0.06%C)	12.5×10^{-6}
Métal	Titane	8.6×10^{-6}
Métal	Cuivre	16.6×10^{-6}
Métal	Aluminium	23×10^{-6}
Polymère	PVC thermoplastique	110×10^{-6}
Polymère	PMMA thermoplastique	130×10^{-6}

(Voir www.matweb.com)

◇ *L'épopée du point en mer (extraits de l'article de D. Fauque Revue Pour la Science N° 321 - juillet 2004)*

Au large des côtes, le marin doit connaître sa position. Ce problème n'a reçu de solution satisfaisante qu'au XVIII^e siècle, avec l'avènement d'horloges transportables et précises.

Dès le X^e siècle, les navigateurs occidentaux et arabo-persans ont su déterminer leur latitude, c'est-à-dire le cercle parallèle à l'équateur sur lequel ils se trouvaient, en mesurant la hauteur de l'étoile polaire ou du Soleil au-dessus de l'horizon. En revanche, plusieurs centaines d'années s'écouleront avant qu'ils ne sachent déterminer leur longitude, c'est-à-dire leur position angulaire à l'Ouest ou à l'Est du port de départ. Cette révolution dans les techniques de navigation, s'est déroulée au cours de la deuxième moitié du XV^e siècle, grâce aux talents de trois horlogers exceptionnels : John Harrison en Angleterre, Pierre Le Roy et Ferdinand Berthoud en France.

Pour traverser l'océan d'un point à un autre en minimisant les erreurs de localisation, le pilote du navire gagnait le plus rapidement possible le parallèle souhaité et tâchait de s'y maintenir en mettant cap à l'Ouest ou cap à l'Est. Cependant, les imprécisions dans la détermination de la longitude s'accumulaient et pouvaient atteindre plusieurs degrés. De telles erreurs ont causé plusieurs tragédies. En 1714, la reine Anne promulgue le Longitude Act, promettant une récompense de 20 000 livres sterling à qui trouverait le moyen de connaître la longitude en mer à un demi-degré près, après 42 jours de mer ; au niveau de l'équateur, la distance correspondante est d'environ 30 milles nautiques (55,6 kilomètres). C'est une somme énorme (l'équivalent aujourd'hui d'environ deux millions d'euros !), correspondant à l'achat de 13 ou 14 bateaux de 300 tonnes. En 1716, en France, le Régent offre de même une somme de 100 000 livres tournois (de l'ordre de 300 000 euros).

Le problème des longitudes n'est définitivement résolu qu'au cours des années 1760, tant en Grande-Bretagne qu'en France. La solution vient du côté mécanique, avec la mise au point de « garde-temps » précis – des horloges qui résistent en mer aux influences extérieures (mouvements du navire, variations de température ou d'hygrométrie, etc.).

Pourquoi une telle horloge résout-elle le problème des longitudes ? La longitude est l'angle que forme le méridien local avec un méridien choisi comme origine. Pour déterminer la longitude du lieu où l'on se trouve, il suffit d'emporter avec soi deux horloges : l'une qui donne l'heure du méridien d'origine, l'autre qui indique l'heure locale. La différence des temps affichés fournit la longitude. En effet, la Terre effectue un tour sur elle-même, soit 360 degrés, en 24 heures. Une différence de longitude correspond donc à une durée, celle que met la Terre pour tourner de cet angle.

Le principe est déjà bien compris au XVII^e siècle, mais toute la difficulté consiste à réaliser une horloge gardant exactement l'heure du méridien de référence.

Les horloges et montres nécessitaient des améliorations techniques afin d'atteindre la précision requise pour le calcul d'une longitude. Ces améliorations concernaient les systèmes de **compensation thermique**, la lubrification, la recherche d'un meilleur isochronisme (oscillations de durées égales) ou d'un nouveau système d'échappement (le mécanisme qui entretient le mouvement du balancier et transforme ses va-et-vient en un mouvement rotatif des rouages). En effet, durant les voyages au long cours, les importantes variations de température provoquaient des dilatations et contractions successives des diverses pièces mécaniques des horloges, et nuisaient à leur bon fonctionnement. De même, la viscosité de l'huile qui lubrifiait les mécanismes variait selon la température. Enfin, les oscillations des horloges n'étaient en général pas régulières (en mer, une horloge à balancier est sans cesse perturbée par les mouvements du vaisseau).

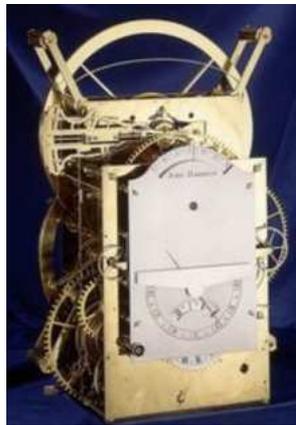
– Harrison, charpentier devenu horloger de génie

La résolution de ces problèmes a demandé beaucoup d'ingéniosité. Par exemple, dès 1726, l'horloger anglais John Harrison invente un dispositif de compensation thermique dit « à gril », constitué de tiges parallèles de métaux différents placés en alternance. Les deux métaux n'ayant pas le même coefficient de dilatation thermique, les tiges se dilatent de telle façon que le centre de gravité du pendule reste inchangé.

Pour pallier les difficultés liées à la lubrification des pièces (viscosité, vieillissement de l'huile), Harrison trouve une solution originale. Ayant d'abord appris le métier de charpentier, il s'est formé en autodidacte à l'horlogerie. En 1720, il a déjà acquis une certaine notoriété dans sa région du Nord de l'Angleterre par ses remarquables horloges à mécanisme en bois. La première horloge marine, H1, qu'il soumet au Board of Longitude en 1735, grâce à l'appui de Georges Graham, un horloger de renom, est une horloge entièrement en bois, utilisant plusieurs essences choisies en fonction du problème mécanique posé. Pour les rouages, par exemple, il a choisi un bois exotique suffisamment gras pour s'autolubrifier, ce qui supprime les difficultés liées à l'utilisation d'huiles.

Testée en 1737 sur un trajet aller-retour d'Angleterre à Lisbonne, l'horloge H1 ne varie pas plus que de quelques secondes par jour. Comme Harrison veut perfectionner son invention, le Board of Longitude ne lui offre qu'une fraction du prix, pour l'aider à poursuivre les recherches. Il construit H2, puis H3, mais c'est avec l'horloge H4, commencée probablement en 1755 sur des principes radicalement différents, qu'il apporte une solution définitive (voir la figure 1). Dès 1753, Harrison s'est fait construire par un horloger londonien, John Jefferys, une montre de poche qui était très proche de H4. Elle comportait plusieurs innovations suggérées par Harrison lui-même : remontoir pouvant être actionné sans que la montre ne s'arrête ou ne tourne à l'envers, **compensation thermique par une lame bimétallique courbe**, système d'échappement à palettes de diamant, etc. Une telle montre de poche ne pouvait servir de chronomètre de marine car sa précision, en raison de la petite taille, était insuffisante. La montre H4, élégant instrument d'environ 13 centimètres de diamètre, en garde pendant les principes.

Achevée à la fin de 1758, H4 fut présentée en 1759 et testée dans un voyage à la Jamaïque en 1761. Le succès fut inespéré. **En neuf semaines de navigation, elle ne varia que de cinq secondes de temps**, soit de 1,25 minute d'arc. Elle entra donc largement dans les conditions du prix.



(H3)



(H4)

Harrison mettra onze ans pour achever H-3.

753 pièces, bande bi-métallique compensant les changements de température, nouveau système anti-friction, 7 kilos de moins que H-1, deux balanciers circulaires, réduite en dimensions, telle est H-3. Parce que Harrison a fait la connaissance de John Jefferys, horloger, qui lui fabrique une montre de gousset. Conçue d'après des indications d'Harrison en personne, elle est d'une fiabilité jamais connue à cette époque. Harrison est persuadé que l'avenir est aux "petites machines" et se met à la conception de H-4. Harrison achèvera en 1759 la construction de H-4. 13 centimètres de diamètre, trois aiguilles d'acier qui donnent l'heure exacte, diamants et rubis pour supprimer la friction, 30 heures entre deux remontages, telle est H-4. Une bête de concours. Le dernier essai, vers la Barbade en 1764 fit ressortir 15 secondes de retard en 5 mois de voyage.

5 COMPORTEMENT PLASTIQUE, EXEMPLE DES MATERIAUX METALLIQUES

5.1 Introduction

Un comportement est dit plastique lorsque d'une part le matériau est capable de présenter des déformations irréversibles et que d'autre part la contrainte d'écoulement plastique ne dépend pas de la vitesse de déformation.

Les matériaux métalliques présentent généralement un comportement plastique pour des températures inférieures à la moitié de leur température de fusion (en K). En outre ils présentent presque systématiquement aussi un domaine d'élasticité. Au-delà de $T_f/2$ la contrainte d'écoulement devient significativement dépendante de la vitesse de déformation et le domaine d'élasticité négligeable, le comportement est alors qualifié de visco-plastique.

Cette capacité à présenter des déformations plastiques est extrêmement intéressante car elle permet la mise en forme ou l'assemblage de pièces par déformation plastique. D'autre part, cela contribue à la résistance à la rupture.

Dans un premier temps, nous définirons le comportement élasto-plastique en général. Comment le caractériser, quelles sont les propriétés conventionnelles que l'on définit pour un matériau élastoplastique et comment modéliser le comportement élastoplastique en 1D à l'aide de modèles rhéologiques.

Dans un second temps, nous étudierons les relations entre la structure des matériaux métalliques et leurs propriétés. Nous verrons que comme les matières plastiques, les matériaux métalliques doivent être décrits à différentes échelles, qui contribuent de manière différente au comportement d'ensemble.

5.2 Le comportement élastoplastique

5.2.1 Méthode de caractérisation

Les essais de traction-compression uniaxiaux sont à la fois les plus simples et les plus couramment utilisés pour mettre en évidence les caractéristiques du comportement élasto-plastique mécanique d'un matériau métallique. On soumet une éprouvette de longueur initiale L_0 et de section initiale S_0 , à un effort croissant F lors d'un essai de traction et à un effort cyclique lors d'un essai de traction-compression.

On mesure l'allongement de l'éprouvette à l'aide d'un extensomètre, et éventuellement la variation de section à l'aide d'un capteur diamétral (Figure 14 a).

On calcule alors la contrainte et la déformation conventionnelles :

$$\sigma = \frac{F(t)}{S_0} \quad \varepsilon = \frac{L(t) - L_0}{L_0}$$

Si l'on dispose d'un capteur diamétral, on peut éventuellement calculer la contrainte et la déformation rationnelle :

$$\sigma = \frac{F(t)}{S(t)} \quad \varepsilon = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L(t)}{L_0}$$

Cette distinction est usuelle. Cependant, en pratique tant que la déformation n'excède pas 0.2 les deux mesures de déformation ont moins de 10% d'écart (Figure 14 b).

5.2.2 Analyse d'un essai de traction

On peut alors tracer l'évolution de la contrainte appliquée en fonction de la déformation.

Pour de très petites déformations, la courbe contrainte-déformation est linéaire, avec une pente E , où E est le module d'Young. Si l'on décharge l'éprouvette, sa déformation revient à zéro, le comportement est élastique. Puis la courbe tend à devenir non-linéaire, et lorsqu'on décharge l'éprouvette, il reste une déformation permanente, le comportement est élasto-plastique.

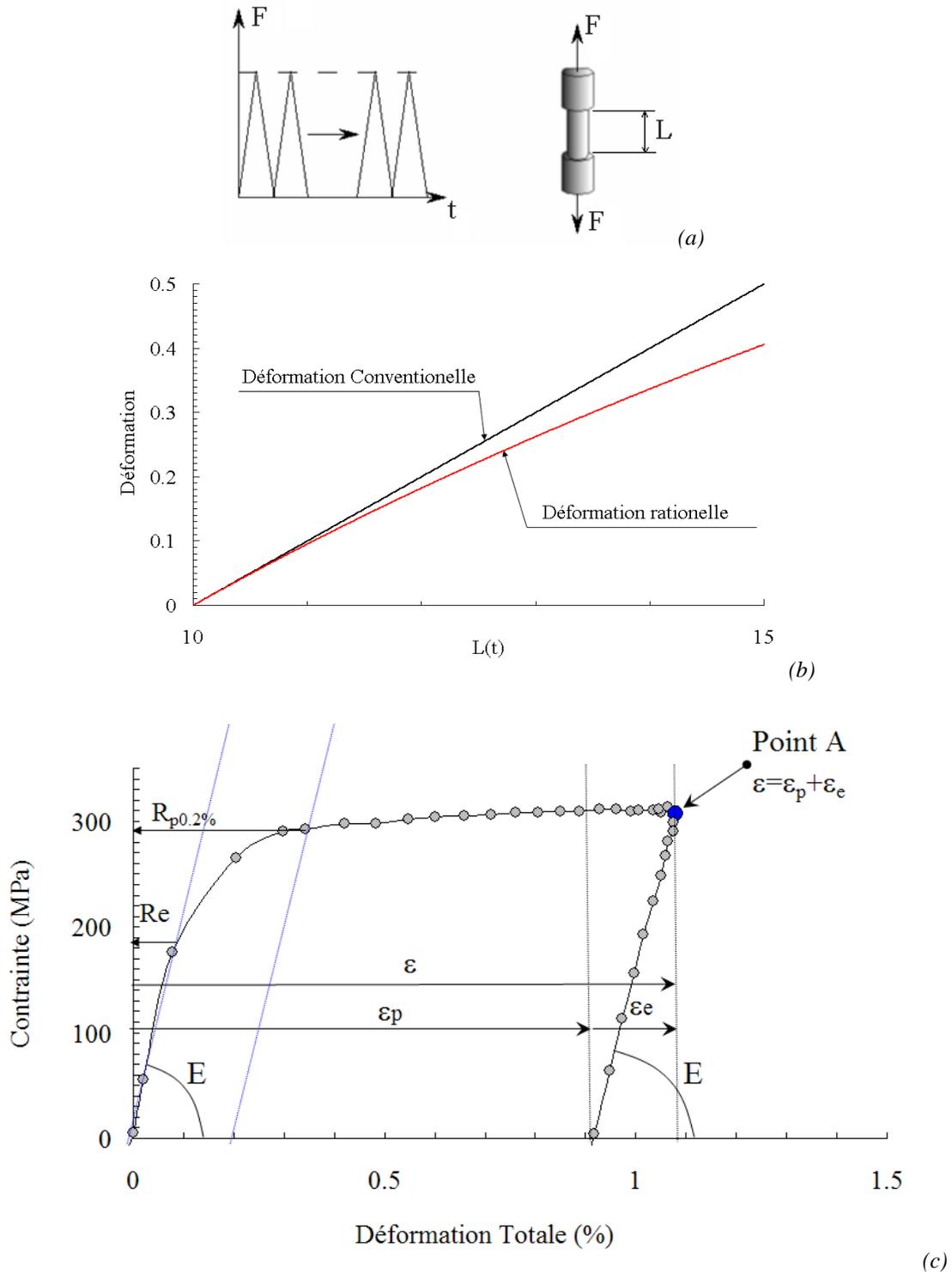


Figure 14 : (a) sollicitation appliquée sur une éprouvette de traction compression. (b) comparaisons des deux mesures de déformation classiques, déformation rationnelle et conventionnelle. (c) Analyse d'un essai de Traction simple sur un acier inoxydable 316L. Illustration de l'hypothèse de partition.

◇ Hypothèse de partition

On observe généralement que lorsque les déformations restent petites ($\varepsilon < 0.2$) on peut faire l'hypothèse de partition des déformations.

En effet à tout instant, si l'on décharge l'éprouvette, on observe que la pente de la courbe contrainte déformation est de nouveau linéaire avec une pente E. le comportement est élastique lors de la décharge. Mais à $\sigma=0$, il reste une déformation plastique ou permanente notée ε_p . Si l'on recharge à partir de ce point, de nouveau le comportement du matériau est élastique, linéaire avec un module E puis devient non-linéaire.

Ainsi, la déformation totale ε est la somme d'une déformation élastique ε_e et d'une déformation plastique ε_p .

$$\text{Soit : } \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p \quad \text{avec à tout instant} \quad \underline{\sigma} = \underline{E}\underline{\varepsilon}_e$$

Où $\underline{\sigma} = \underline{E}\underline{\varepsilon}_e$ est l'opérateur d'élasticité (en traction simple on aura simplement $\sigma=E\varepsilon_e$, où E est le module d'élasticité §4.4.2.)

◇ Limite d'élasticité conventionnelle

On définit la limite d'élasticité « vraie » du matériau comme la contrainte à partir de laquelle le comportement cesse d'être purement élastique lors de la première mise en charge du matériau. Sur la Figure 14c, cette limite d'élasticité R_e se trouve aux alentours de 170 MPa. Mais l'on voit bien que selon le critère de non-linéarité que l'on se donne on pourra trouver différentes valeurs pour cette limite d'élasticité vraie.

On définit donc une limite d'élasticité conventionnelle, $R_{p0.2\%}$ comme la contrainte à partir de laquelle la déformation plastique excède 0.2% lors de la première mise en charge du matériau. On peut de même se définir une limite d'élasticité $R_{p0.02\%}$, comme la contrainte à partir de laquelle la déformation plastique du matériau excède 0.02%.

◇ Contrainte maximale

Au-delà de la limite d'élasticité le matériau présente généralement de l'écrouissage. La contrainte à appliquer pour obtenir un écoulement plastique augmente lorsque la déformation augmente. Elle sature en général à une valeur appelée contrainte maximale et notée R_m (Figure 15).

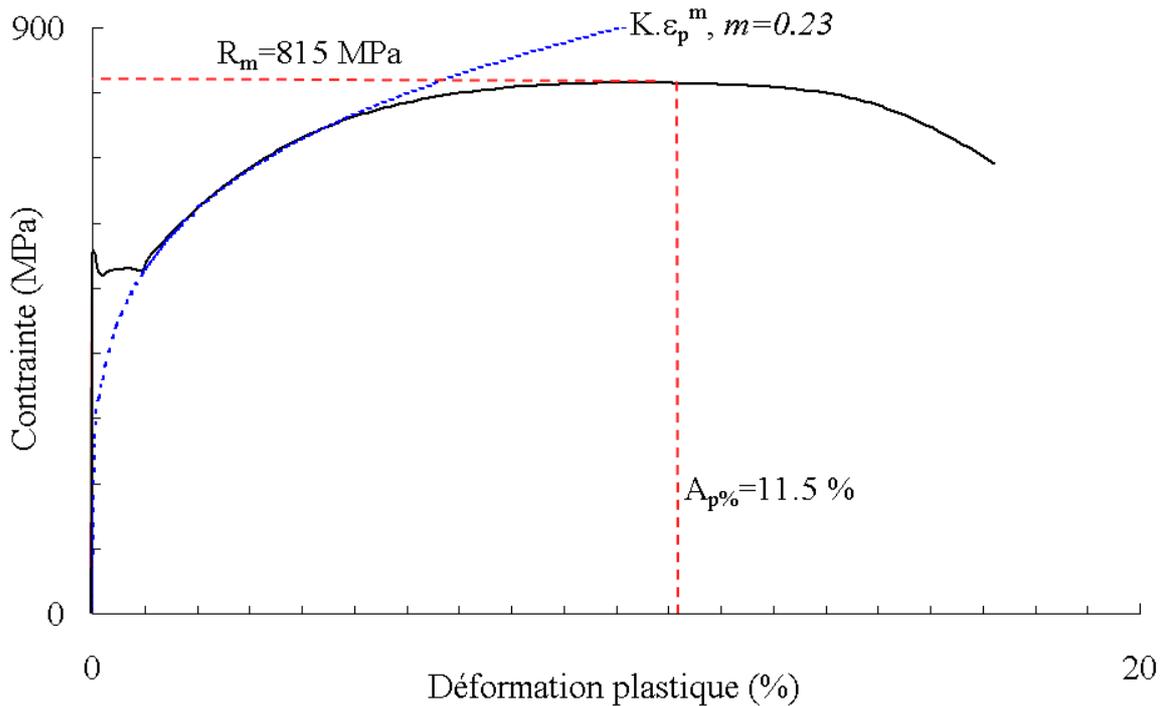


Figure 15 : résultat d'un essai de traction simple sur un acier doux à 0.48% de carbone (Rami Hamam). La courbe en traits pleins est le résultat d'essai, la courbe en pointillé l'ajustement par une fonction $s=K\epsilon_p^m$. On définit aussi, la contrainte maximale R_m , l'allongement réparti $A_p\%$.

◇ Taux d'érouissage

Dans certains cas, on peut avoir besoin de définir le taux d'érouissage du matériau. C'est une donnée importante, par exemple pour sélectionner un matériau pour réaliser une mise en forme par déformation plastique.

Le taux d'érouissage, noté H , est la pente de la courbe contrainte-déformation plastique :

$$H(\epsilon_p) = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \right|_{\epsilon_p}$$

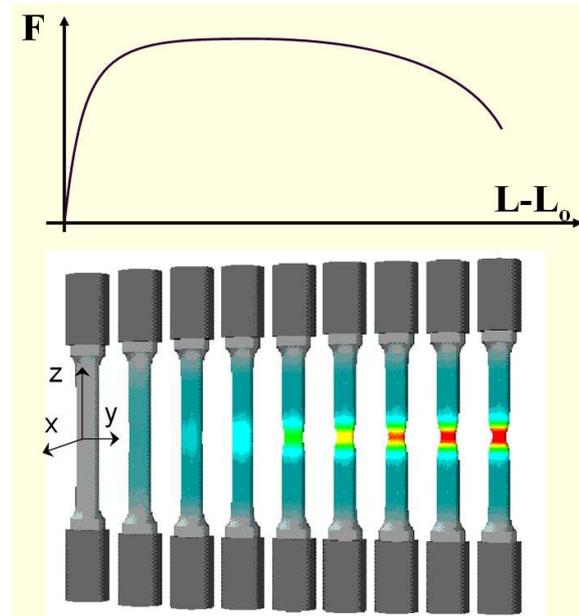
En toute rigueur ce taux d'érouissage varie avec la déformation plastique. Ainsi on ne dispose pas d'une donnée unique pour caractériser le taux d'érouissage d'un matériau mais d'une courbe. Ce n'est pas toujours pratique lorsqu'on veut faire une sélection de matériau. On emploie alors le coefficient de Lankford, qui est l'exposant m de la courbe $\sigma = K\epsilon_p^m$ qui s'ajuste le mieux sur la phase d'érouissage du matériau.

◇ Allongement plastique réparti $A_p\%$ et striction

Lors d'un essai de traction, on observe que la déformation reste homogène tant que la contrainte reste inférieure à R_m . Au-delà la déformation plastique se localise, on assiste au phénomène de striction.

On définit donc l'allongement plastique réparti, noté $A_p\%$ qui est la déformation plastique au delà de laquelle la déformation plastique devient hétérogène.

Au-delà de cette déformation, selon le type d'éprouvette, éprouvette plate, éprouvette cylindrique ou autre, on obtient des résultats différents. L'allongement plastique à la rupture n'est donc pas caractéristique du matériau seulement mais aussi de l'éprouvette. Tandis que l'allongement plastique réparti $A_p\%$ est réellement une donnée du matériau.



Lors d'un essai de traction compression, avant la striction : $\frac{dF}{F} \geq 0$, à la striction $\frac{dF}{F} = 0$.

$$\text{Or } F = \sigma \cdot S \Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S} \geq 0$$

L'évolution de l'effort de traction est lié d'une part à l'évolution de la contrainte d'écoulement du matériau (écrouissage) et d'autre part à la variation de section de l'éprouvette (localisation).

Comme la déformation plastique se fait sans changement de volume on peut écrire :

$$V = L \cdot S \Rightarrow \frac{dV}{V} = 0 = \frac{dS}{S} + \frac{dL}{L} = \frac{dS}{S} + d\varepsilon$$

En rassemblant les deux équations il vient alors :

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S} \geq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} - d\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \geq \sigma$$

C'est-à-dire qu'on obtient un critère de striction fondé sur la capacité d'écrouissage du matériau ($d\sigma/d\varepsilon$).

En pratique il est bien connu que la capacité d'écrouissage du matériau contrôle la localisation de la déformation. En effet, si une zone se déforme plastiquement davantage que son environnement et s'il reste au matériau une certaine capacité d'écrouissage, la contrainte d'écoulement locale devient alors plus élevée qu'ailleurs, ce qui tend à limiter par la suite la déformation plastique dans cette zone et donc à homogénéiser la déformation. En revanche, si le matériau ne présente plus d'écrouissage rien ne s'oppose à la localisation de la déformation.

Ainsi, à la fois, $A_p\%$ et le coefficient d'écrouissage sont des paramètres important pour choisir un matériau pour réaliser une mise en forme par déformation plastique. Nous allons raffiner ci-dessous la notion d'écrouissage.

5.2.3 Analyse d'un essai de traction-compression

Au-delà de la limite d'élasticité et avant d'atteindre sa contrainte maximale le matériau présente de l'écrouissage, à savoir une augmentation de sa contrainte d'écoulement. Cet écrouissage se compose de deux termes : un terme d'écrouissage isotrope et un terme d'écrouissage cinématique.

Cette distinction peut se faire lorsqu'on réalise des essais de traction compression. On impose alors une déformation totale cyclique sur une éprouvette, et on mesure l'évolution de la contrainte au cours du temps. Comme précédemment on calcule :

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S_0}, \quad \varepsilon(t) = \frac{L(t) - L_0}{L_0}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E}$$

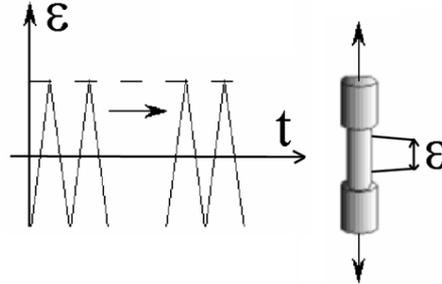


Figure 16 : Essai à déformation imposée.

Si l'on trace la contrainte en fonction de la déformation plastique, on obtient des boucles d'hystérésis. A titre d'illustration, des boucles d'hystérésis mesurées sur un acier inoxydable 316L à température ambiante sont tracées sur les deux figures ci-dessous.

◇ Ecrouissage cinématique

Lorsque la déformation plastique n'évolue pas (la courbe est alors verticale) le matériau est dans son domaine d'élasticité.

La limite d'élasticité initiale R_e se trouve ici aux alentours de 170 MPa.

Le sens de la déformation est inversé pour une déformation plastique $\varepsilon_p = 0.9\%$.

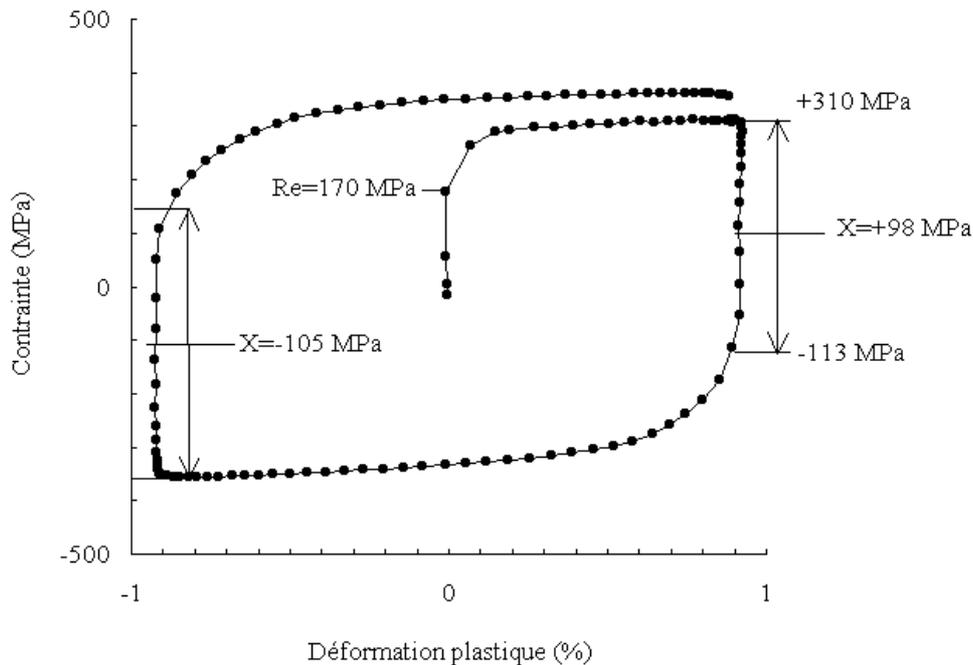


Figure 17 : Acier inoxydable 316L. Boucles d'hystérésis N°1, mesurée à température ambiante et à une vitesse de déformation imposée de $0.001s^{-1}$.

Lors de la décharge, le matériau reste d'abord dans son domaine d'élasticité. Puis, pour une contrainte de -113 MPa : une déformation plastique en retour se produit.

Les nouvelles limites du domaine d'élasticité sont alors de 310 MPa en traction et de -113 MPa en compression.

Le domaine d'élasticité du matériau s'est donc fortement décalé vers les contraintes positives, le centre du domaine d'élasticité se situant vers +100 MPa pour $\epsilon_p=0.9\%$. Cet effet dit « effet Bauschinger », ou « écrouissage cinématique » est couramment observé dans les matériaux métalliques. On peut constater que le domaine d'élasticité est décalé vers les contraintes positives après la première traction, puis vers les contraintes négatives après la déformation plastique en compression.

La position du centre du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, notée X, dépend de l'histoire de la déformation plastique du matériau.

◇ Ecrouissage isotrope

D'autre part, ces essais permettent aussi de suivre l'évolution de l'étendue du domaine d'élasticité. Dans l'état initial, le domaine d'élasticité de cet alliage a une étendue de $(2.R_e)$ soit 340 MPa.

Après déformation plastique on observe que la dimension de ce domaine d'élasticité évolue, il vaut 420 MPa pour une déformation plastique de 0.9% et 550 MPa au même point mais après vingt boucles de traction-compression. L'effet des déformations plastiques successives se cumule et l'étendue du domaine d'élasticité augmente régulièrement avec la déformation plastique cumulée. Ce phénomène est appelé écrouissage « effectif » du matériau. L'effet inverse ou « adoucissement » est aussi couramment observé. La « contrainte effective » est définie comme la moitié de l'étendue du domaine d'élasticité.

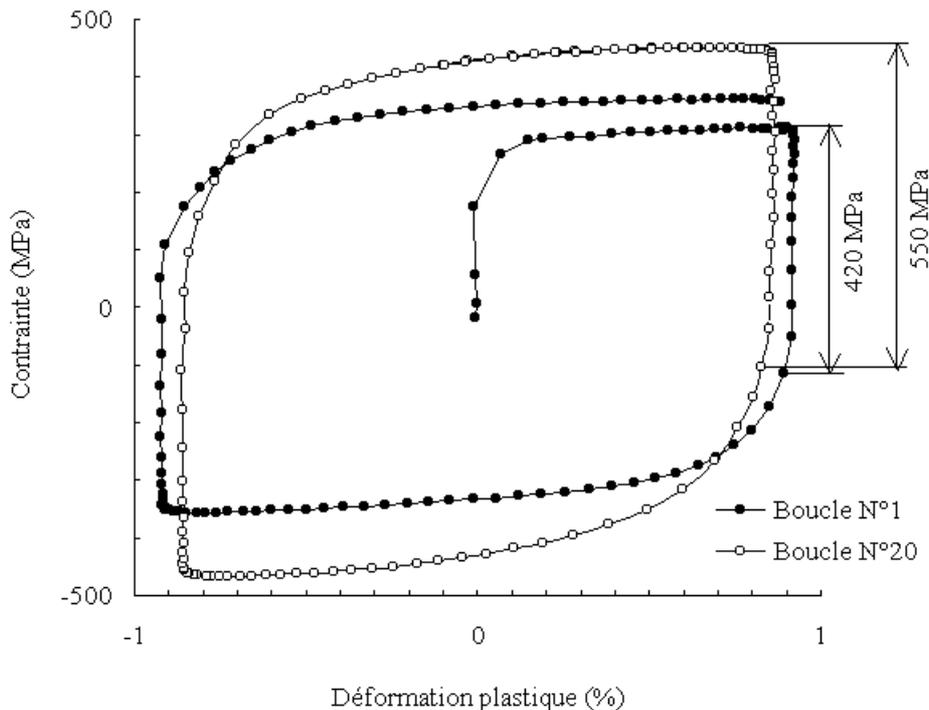


Figure 18 : Acier inoxydable 316L. Boucles d'hystérésis N°1 et N°20, mesurée à température ambiante et à une vitesse de déformation imposée de $0.001s^{-1}$. Première boucle : cercles pleins, vingtième boucle : cercles vides

5.2.4 Les essais de dureté

Les essais dits de « dureté » mesurent la pression moyenne de contact des matériaux, lors de l'enfoncement d'un indenteur (conique, pyramidal ou sphérique) sur une surface plane. La dureté est évaluée après retrait de l'indenteur, à partir de la mesure de la dimension de l'empreinte de l'indenteur, ou pendant l'essai à partir de la courbe d'indentation qui lie la profondeur d'indentation à la charge appliquée, c'est donc bien une manière de caractériser le comportement plastique du matériau.

La dureté, lorsqu'elle est mesurée sur un matériau ductile dans les conditions définies par les normes, peut être considérée comme un paramètre intrinsèque au matériau. Cependant, bien que le résultat obtenu soit une pression, on l'exprime sans dimension puisque la pression mesurée dépend de la géométrie de l'indenteur. Ainsi, une valeur de dureté est un **nombre** (la pression moyenne de contact

exprimée en Kgf/mm^2) suivi d'un sigle **H** (pour dureté – Hardness en anglais) et d'un indice qui indique le type de pénétrateur utilisé (**V** pour Vickers ou **B** pour Brinell, par exemple).

L'intérêt principal de cet essai est qu'on peut le réaliser sur des échantillons de dimensions très réduites, sans préparation particulière excepté un polissage de surface. Ceci permet de tester la réussite d'un traitement de surface qui porte sur quelques centaines de micromètres de profondeur, ou la qualité d'un revêtement de surface, ou encore la taille de la zone affectée par le soudage de deux tôles... On l'utilise préférentiellement lorsque le prélèvement d'éprouvettes de traction conventionnelle est difficile. Des essais de microdureté et nanodureté ont ainsi été développés afin de tester des zones de plus en plus réduites, jusqu'à des surfaces de quelques micromètres carrés.

D'autre part, l'essai de dureté présente l'intérêt d'être plus ou moins non destructif, facile à mettre en oeuvre et peu coûteux par comparaison avec des essais de traction. C'est donc une méthode de contrôle couramment utilisée pour établir des cartographies de dureté sur des sections de pièces massives, après mise en forme et traitements thermiques.

Cependant, si cette méthode d'essai présente des avantages évidents, il reste qu'en dépit de sa grande facilité de mise en oeuvre elle reste difficile à interpréter mécaniquement. En effet, on n'accède pas directement aux propriétés mécaniques du matériau testé, à savoir la limite d'élasticité, la contrainte maximale R_m , le taux d'écroutissage, le module d'élasticité E . Seule une interprétation mécanique de l'essai peut permettre de lier la mesure de dureté à ces propriétés.

En 1882, Hertz a conduit l'analyse du contact de deux solides élastiques de révolution. Les formules qu'il a proposées permettent de déterminer le module d'élasticité à partir des essais de dureté. Pour ce qui est de la plasticité, Hill [Hill,1947] a résolu le problème de l'indentation d'un plan rigide plastique parfait par un coin rigide indéformable. Une relation de proportionnalité directe est trouvée entre la limite d'élasticité et la dureté. Une proportionnalité a également été observée par [Tabor,1951] sur des aciers de construction ($R_m=3,5 H_B$, $R_m=3 H_V$, *n.b. règle empirique valable uniquement pour les aciers*). Cependant, en général, la seule mesure des dimensions de l'empreinte ne permet pas de déterminer les propriétés de traction monotone du matériau.

◇ Dureté Vickers

L'indenteur de l'essai Vickers est une pyramide à base carrée. L'angle des faces est précisément défini par les normes (136°). Le schéma de principe de cet essai est donné sur la Figure 5.1. La dureté est le rapport de la force appliquée (exprimée en Kgf) sur la surface de contact (exprimée en millimètres carrés), c'est à dire la pression moyenne dans le contact. L'aire de contact est estimée à partir de la dimension de l'empreinte après retrait de l'indenteur (Figure 5.1). L'épaisseur de l'échantillon doit être supérieure à 1.5 fois la diagonale des empreintes (environ 7.5 fois la profondeur h) et la distance entre les centres de deux empreintes supérieure à six fois la diagonale des empreintes. En deça de ces limites, les empreintes de dureté interagissent. Si la distance à respecter entre deux empreintes est assez importante, en revanche l'épaisseur nécessaire à l'essai est assez faible. Ainsi, cette méthode est elle plus particulièrement utilisée pour les essais de micro-dureté et de nano-dureté pour lesquels, en outre, la réalisation d'un indenteur "dur" de forme sphérique est difficile. De plus un des intérêts de cet essai est que la géométrie du problème ne change pas au cours de l'enfoncement de l'indenteur, ce qui permet de comparer facilement des indentations de tailles très différentes, et notamment de comparer expériences et simulations à l'aide d'un seul maillage (3D) pour toutes les profondeurs.

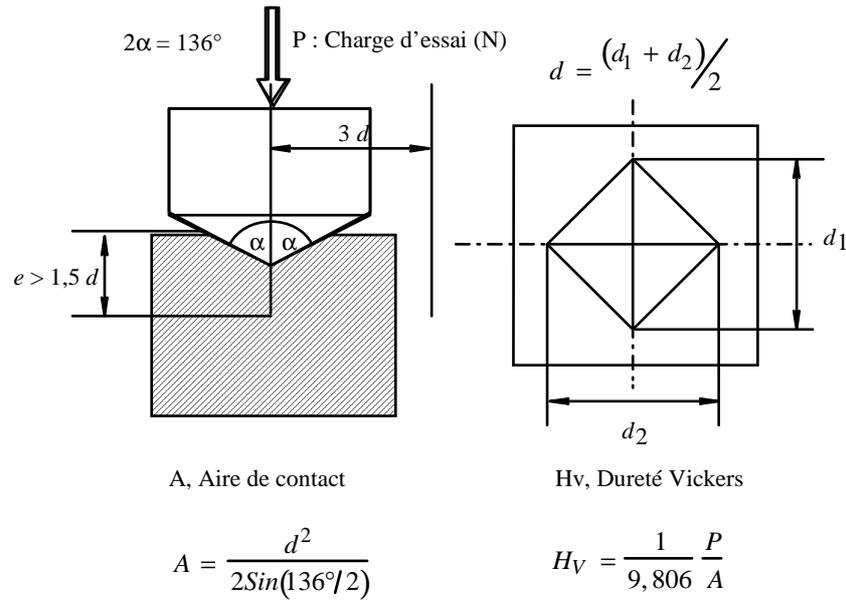


Figure 19 : Schéma de principe de l'essai Vickers

◇ Essai Brinell et Rockwell Bille.

L'essai Brinell est le plus simple dans son principe. Une bille est imprimée sur une surface sous une charge fixée et la mesure de dureté est effectuée après son retrait. En supposant que l'aire de l'empreinte de la bille après son retrait est peu différente de celle obtenue sous charge, on détermine, comme pour l'essai Vickers, la pression moyenne de contact comme la charge appliquée (en Kgf) divisée par l'aire de contact de la bille et de la surface plane (en mm²). On trouve facilement cette aire à partir du diamètre de l'empreinte.

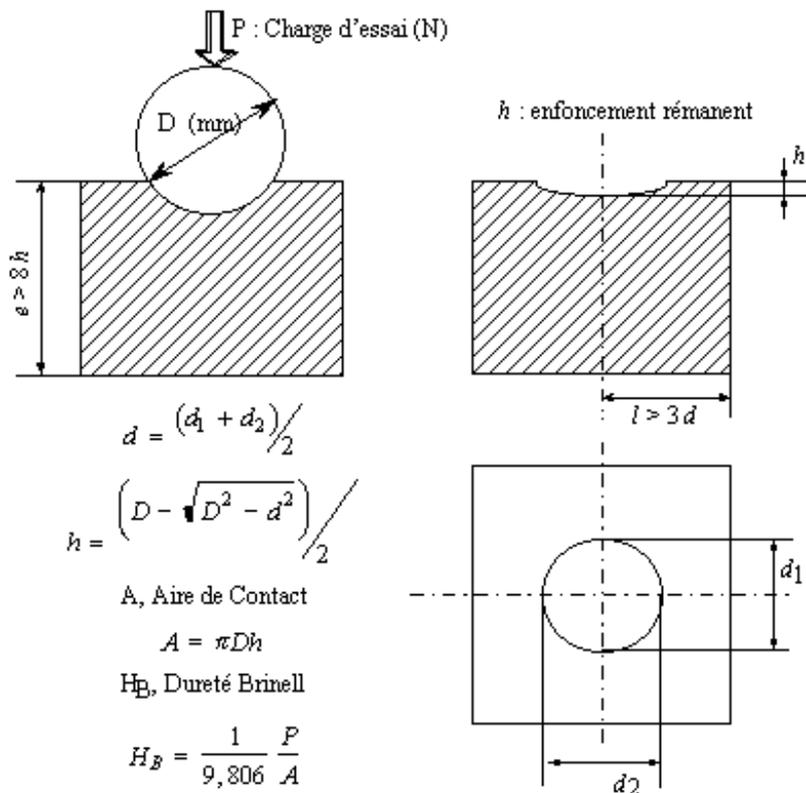


Figure 20 : Schéma de principe de l'essai Brinell

Deux sources d'erreurs importantes peuvent perturber la mesure : la première est que le retrait élastique soit trop important et par conséquent que la mesure du diamètre de l'empreinte après décharge conduise à une surestimation de la pression moyenne de contact réelle. La charge à appliquer doit donc être suffisante pour que le retrait élastique reste négligeable devant les dimensions de l'empreinte. La seconde source d'erreur provient du fait que l'indentation laisse des contraintes résiduelles dans le matériau à des distances très grandes du centre de l'empreinte, ainsi une seconde empreinte réalisée à une trop faible distance de la première est elle affectée par le champ de contrainte résiduel de la première. De même une empreinte réalisée trop près d'un bord ou sur une plaque d'épaisseur trop faible ne sera pas représentative du matériau. La norme de l'essai Brinell indique que la distance entre les centres de deux empreintes doit être supérieure à six fois le diamètre de l'empreinte. De même, l'épaisseur de l'échantillon doit dépasser huit fois la profondeur de l'empreinte.

Les zones d'influence des essais Brinell (8 h) et Vickers (7,5 h) sont assez proches, et on trouvera également par ces deux méthodes des pressions moyennes de contact assez similaires. Cependant, les géométries des zones plastifiées et les niveaux de triaxialité des contraintes de ces deux essais étant à priori différents, les deux méthodes de mesure n'ont aucune raison de donner la même valeur de dureté. Des tableaux de passage entre les différentes duretés sont fournis dans les normes (NF A 03-172, 173), mais ces tableaux sont indicatifs et peuvent varier selon le matériau.

Il faut bien noter que la corrélation entre l'essai de traction et tel ou tel essai de dureté n'est valable que pour un type de matériau tout comme la corrélation entre l'essai Vickers et l'essai Brinell. Il faudra particulièrement se méfier des corrélations entre essais de dureté dans le cas des matériaux poreux.

◇ *Relations entre dureté et contrainte d'écoulement.*

Des calculs analytiques ont été effectués (Hill) en supposant un comportement rigide-plastique pour le matériau avec une contrainte d'écoulement plastique en cisaillement notée k . Dans ce cas, il existe une relation de proportionnalité entre la pression moyenne de contact et la limite d'élasticité du matériau testé. Le coefficient de proportionnalité dépend de l'angle 2α entre les faces de l'indenteur et du coefficient de frottement. Sur la figure ci-après [Johnson, 1985] sont indiqués les coefficients de proportionnalité entre la pression moyenne de contact et la contrainte d'écoulement ($2k$) selon le coefficient de frottement. Pour la valeur conventionnelle utilisée lors des essais Vickers $\alpha=68^\circ$, l'effet du frottement est assez faible.

On trouve alors une relation entre la dureté (notée ici H) et la limite d'élasticité ($2k$) qui varie pour $\alpha=68^\circ$, entre $2k = 3,9 H$ et $2k = 4,7 H$ selon le coefficient de frottement des surfaces.

Dans le cas d'un comportement élasto-plastique parfait, on trouve pour l'essai Brinell, comme pour l'essai Vickers, une relation de proportionnalité entre la dureté et la limite d'élasticité. soit $R_m = 2,8 \cdot H_B$ pour l'essai Brinell.

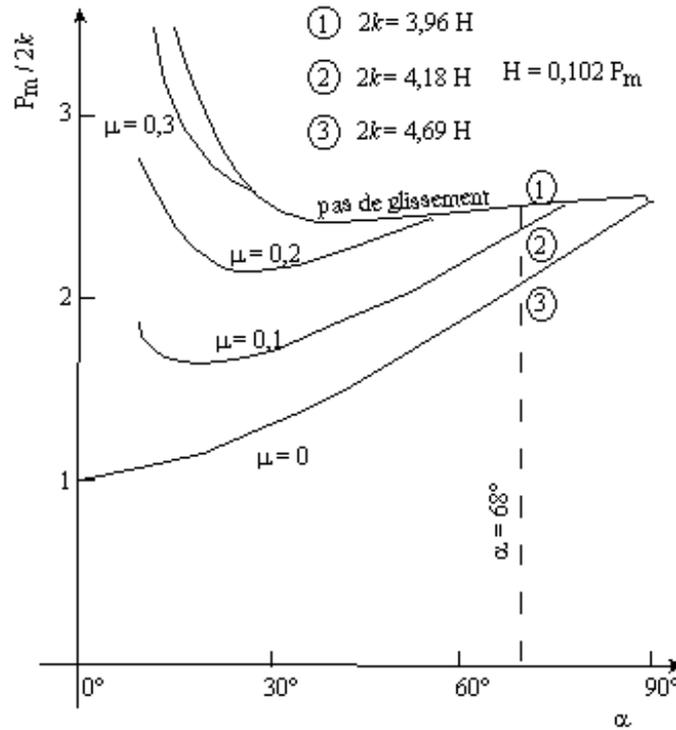


Figure 21 : Coefficient de proportionnalité entre la dureté et la limite d'élasticité en fonction de l'angle des faces, selon le coefficient de frottement [Johnson, 1985].

◇ Rôle de l'écroutissage du matériau.

Cependant le fait que le matériau présente de l'écroutissage modifie considérablement cette relation. Ceci explique en partie l'écart entre le coefficient de proportionnalité trouvé ici et celui déterminé par Tabor $R_m = 3,5 \cdot H_B$ pour des aciers de construction [Tabor, 1951]. Par exemple, sur la ci-après, les cercles pleins correspondent à des calculs par éléments finis, pour des comportements de matériaux tels que la limite d'élasticité soit toujours de 500 MPa, tandis que la quantité d'écroutissage augmente. Si on trace la charge maximale R_m en fonction de la dureté calculée, on constate que la mesure de dureté est effectivement sensible à R_m mais que l'évolution est nettement non-linéaire.

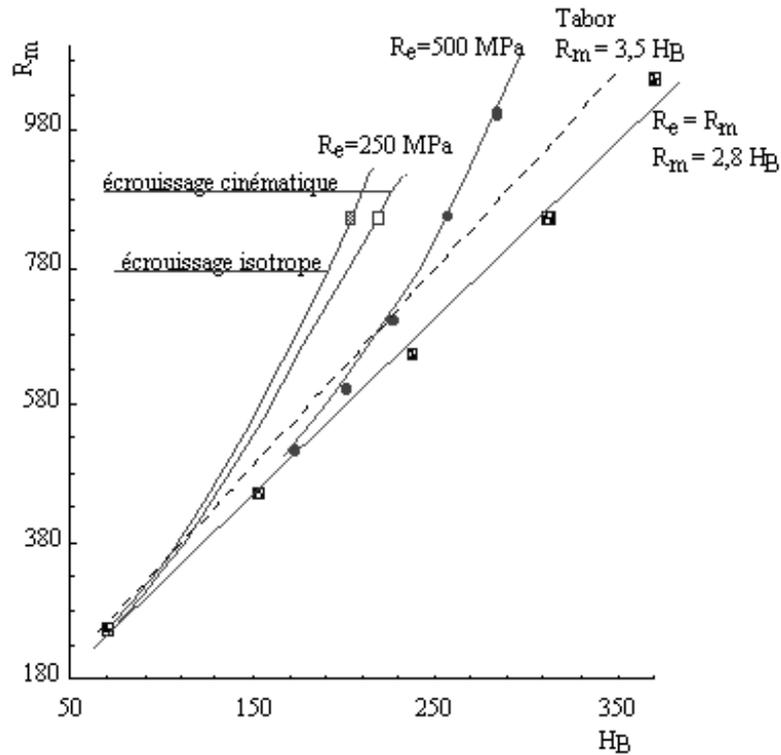


Figure 22 : Effet de la limite d'élasticité et de l'écrouissage sur la mesure de dureté

◇ Matériaux poreux

Les matériaux poreux se comportent de façon curieuse lors des essais de dureté. Sur la Figure ci-après, sont tracées les duretés Brinell mesurée sur du cuivre poreux, à différents stades d'indentation, dans les bornes définie par la norme [Han, 1992]. On constate alors que pour ces matériaux, la valeur de la dureté évolue fortement au cours de l'enfoncement de l'indenteur.

De plus, la méthode est extrêmement sensible à la porosité initiale du matériau. Si on note d , le diamètre de l'empreinte et D le diamètre de la bille, pour un rapport d/D donné, la dureté Brinell varie linéairement avec la fraction volumique initiale de pores dans le matériau (f_0). Ainsi, sous une charge de 2,45 kN, Han et col. [Han, 1992] trouvent une dureté de $20H_B$ pour une fraction volumique de pore (f_0) de 0,3 et de $40H_B$ si f_0 vaut 0,1.

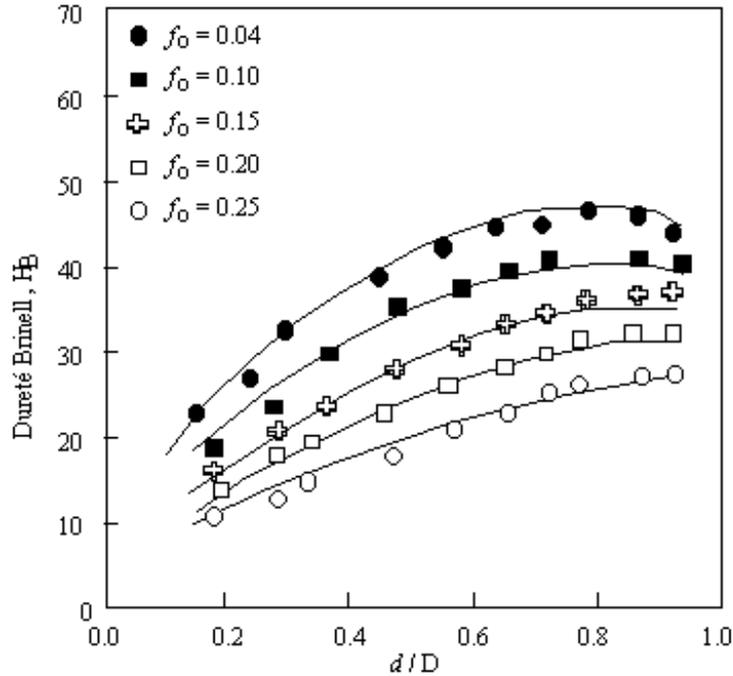


Figure 23 : Comparaison du calcul par éléments finis et des mesures [Han,1992] de dureté Brinell sur un cuivre poreux à différentes fraction volumiques initiales de pores

Ces résultats sont assez logiques, plus l’indenteur s’enfonce et plus les pores se referment, le matériau est alors plus dense et sa contrainte d’écoulement augmente.

5.2.5 Modèles rhéologiques

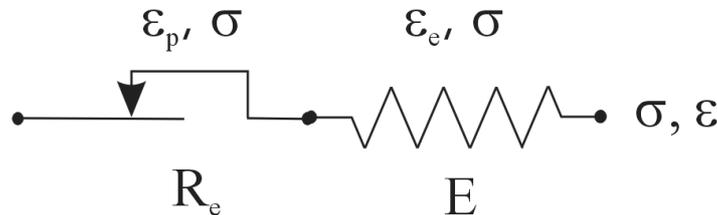
◇ Le comportement élasto-plastique élémentaire

En règle générale pour les matériaux métalliques, le comportement sera élasto-plastique.

On a vu que lorsque les déformations plastiques restent inférieures à 0.2 on pouvait faire l’hypothèse de partition des déformations à savoir que la déformation est la somme d’une déformation plastique et d’une déformation élastique.

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad \text{avec} \quad \sigma = E\epsilon_e$$

Le symbole suivant est employé pour représenter un comportement élastoplastique,



On aura pour la partie plastique :

$$\text{Si } -R_e < \sigma < +R_e \Rightarrow \frac{d\epsilon_p}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Si } \frac{d\epsilon_p}{dt} \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm R_e$$

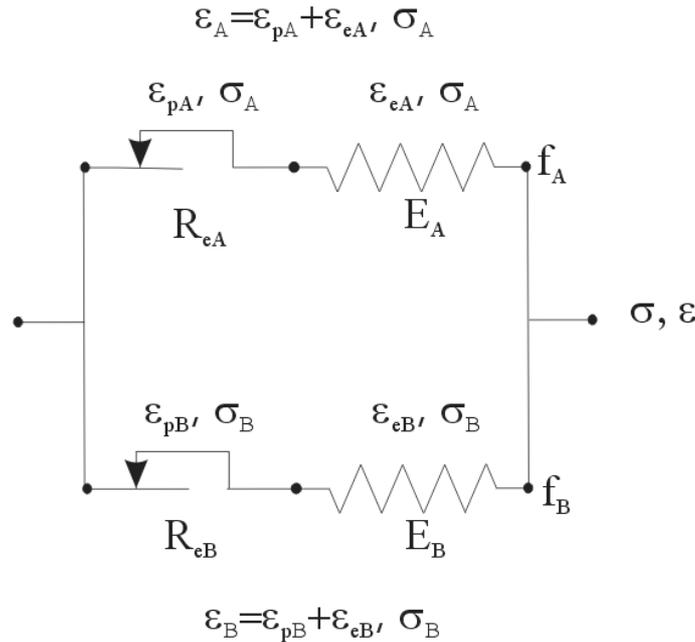
n.b. On considère implicitement que le comportement est élasto-plastique parfait, c.a.d sans écrouissage..

◇ *Modélisation du comportement de milieux hétérogènes*

L'assemblage de modèles rhéologiques élémentaires permet d'analyser le comportement de matériaux complexes. Des assemblages de comportement pourront être mis en œuvre afin de comprendre le comportement de matériaux hétérogènes ou présentant en tout cas plusieurs mécanismes de déformation. Ces modèles rhéologiques sont limités au cas du comportement uniaxial.

L'exemple suivant permet de comprendre l'origine de l'écroutissage cinématique. (Voir aussi Problèmes).

On se donne un matériau hétérogène constitué d'une fraction volumique f_A de matériau A, dont le module vaut E_A et la limite d'élasticité R_{eA} et d'une fraction volumique f_B de matériau B dont le module vaut E_B et la limite d'élasticité R_{eB} .



On peut alors écrire pour l'assemblage :

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B \quad \text{avec} \quad \sigma = f_A \sigma_A + f_B \sigma_B \quad \text{avec} \quad f_B = 1 - f_A$$

On suppose que les modules des deux matériaux sont égaux. Alors dans chaque branche :

$$\text{Si } |\sigma_A| < R_{eA} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eA} = \frac{\sigma_A}{E} \quad \text{sinon } \sigma_A = \pm R_{eA} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eA} + \varepsilon_{pA} = \frac{\pm R_{eA}}{E} + \varepsilon_{pA}$$

$$\text{Si } |\sigma_B| < R_{eB} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eB} = \frac{\sigma_B}{E} \quad \text{sinon } \sigma_B = \pm R_{eB} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eB} + \varepsilon_{pB} = \frac{\pm R_{eB}}{E} + \varepsilon_{pB}$$

Ainsi si les deux matériaux restent élastiques on aura : $\sigma = f_A E \varepsilon + f_B E \varepsilon = E \varepsilon$

Si les deux matériaux se déforment plastiquement (en traction) : $\sigma = f_A R_{eA} + f_B R_{eB}$

Si l'un des deux, par exemple le matériau A reste élastique tandis que l'autre se déforme plastiquement, on aura alors : $\sigma = f_A R_{eA} + f_B E \varepsilon$

Si l'on représente graphiquement la réponse de la branche A, de la branche B et de l'assemblage, on voit naturellement apparaître, par construction un écroutissage cinématique pour l'assemblage alors que ni le matériau A ni le matériau B n'en présente.

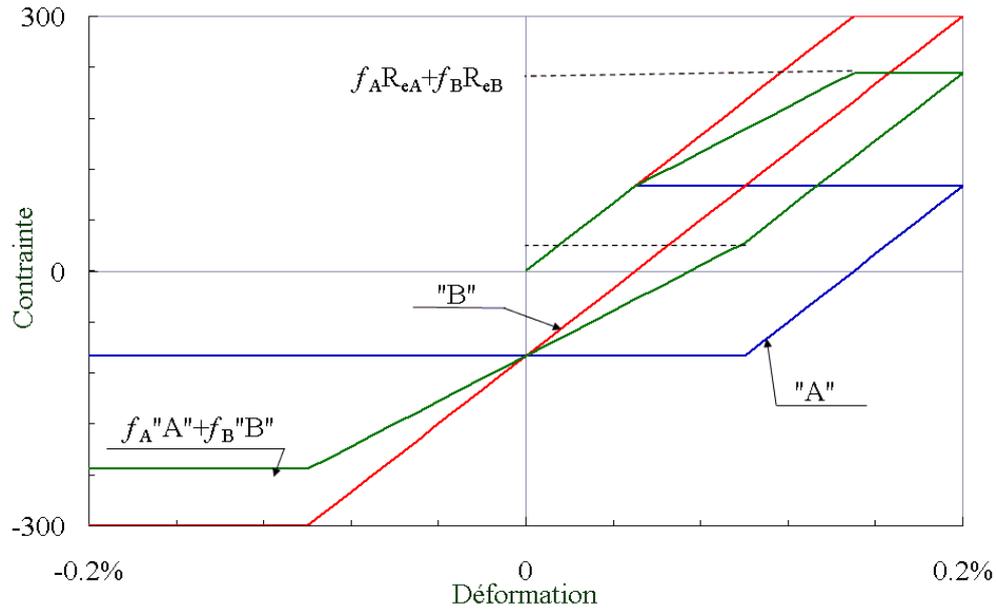


Figure 24 : illustration, réponse de la branche A, de la branche B et de l'assemblage à un essai de traction compression. On observe par construction un écrouissage cinématique pour l'assemblage. $R_{eA}=100$ MPa, $R_{eB}=300$ MPa, $E_A=E_B=200$ GPa. $f_A=1/3$, $f_B=2/3$.

De manière assez générale, on pourra dire que l'apparition d'écrouissage cinématique est dû à l'hétérogénéité de la déformation plastique à l'intérieur du matériau.

5.3 Structure des matériaux métalliques à différentes échelles

5.3.1 Echelle atomique

Les matériaux métalliques à l'état solide se trouvent sous forme cristalline. Les atomes sont arrangés de manière périodique en suivant un motif de base, le type de motif définit la structure du métal. Les métaux peuvent présenter trois structures distinctes, la structure hexagonale compacte (zinc, titane, cobalt...), la structure cubique à faces centrées (aluminium, fer γ , cuivre, nickel...) et la structure cubique centrée (fer α , ...) (Figure 2).

5.3.2 Structure intra-granulaire

Par ailleurs, les métaux sont presque souvent utilisés sous forme alliage binaires, ternaires ou encore plus complexe (aluminium-cuivre, fer-carbone ou fer-nickel-chrome, nickel-titane-aluminium etc...). Les éléments d'alliage, peuvent conduire ou non à la formation de structures à l'intérieur des grains.

◇ Solution solide

Tant que la limite de solubilité d'un élément d'alliage dans le matériau de base n'est pas atteinte, cet élément d'alliage va se trouver en solution solide.

- Substitution ou insertion.

On distingue deux types de solution, les solutions en insertions (carbone, hydrogène dans le fer par exemple) et les solutions en substitution (cuivre dans l'aluminium).

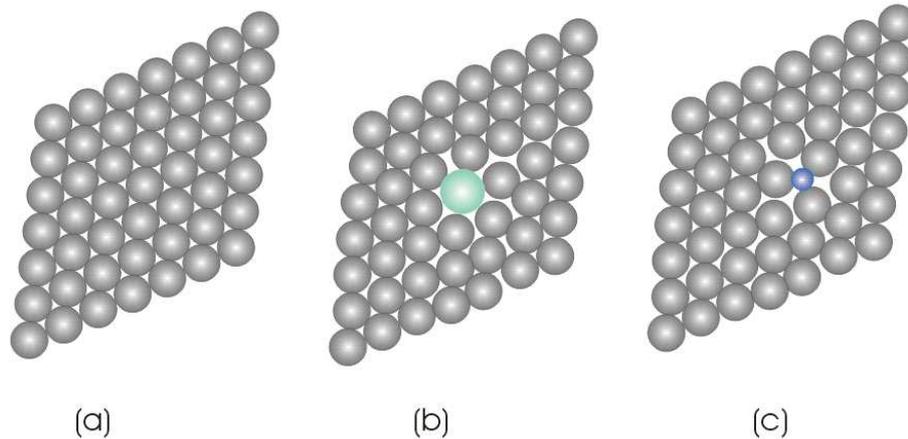


Figure 25 : Illustration (a) réseau parfait, (b) un élément d'alliage en substitution (c) un élément d'alliage en insertion

- Solution solide ordonnée.

Lorsque la quantité d'éléments d'alliage en solution solide augmente, on peut former des structures intermédiaires appelées solutions solides ordonnées. Dans ce cas, tous les plans cristallographiques sont communs entre la matrice et la solution solide ordonnée, qu'on appelle aussi parfois précipité.

C'est le cas par exemple des zones Guinier Preston I (zones GP-I), qui sont des plaquettes monoatomiques de cuivre dans l'aluminium et qui se forment lors du refroidissement rapide d'un alliage d'aluminium à 3 à 4% de cuivre suivi d'un traitement thermique de vieillissement à basse température (Figure 26). Ces plaquettes conduisent à une très forte augmentation de la limite d'élasticité du matériau.

On peut citer aussi les « précipités » γ' dans les superalliages à base de Nickel qui sont utilisés pour réaliser les pièces mécaniques soumises à de très fortes températures et contraintes et avec des durées de fonctionnement importantes (par exemple 700 MPa sous 650°C pendant 20000 heures). On réalise par exemple des disques de turbines de réacteurs d'avion avec ces matériaux (Figure 27).

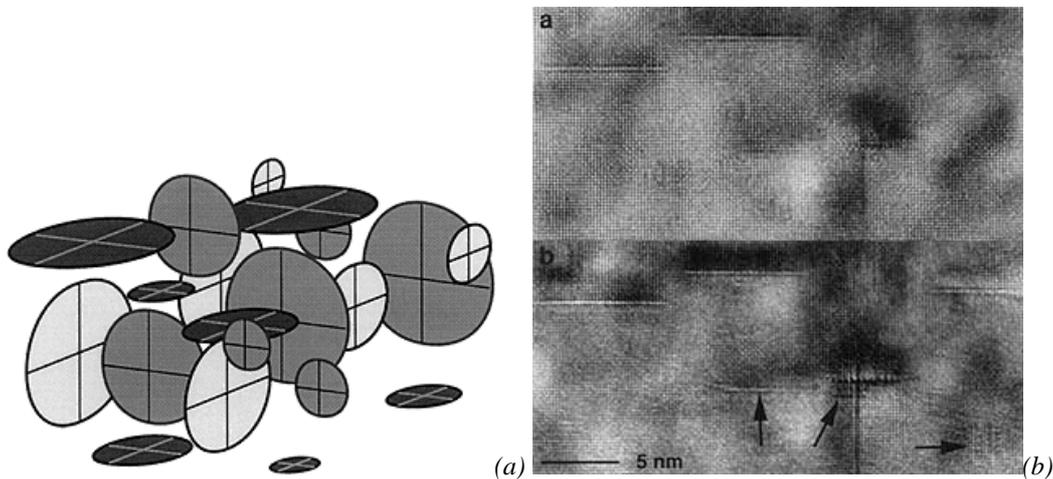


Figure 26 (a) modèle schématique des zones GP-I. (b) Cliché en microscopie électronique à transmission à haute résolution de GP-I dans un alliage d'aluminium à 3.3% de cuivre. (Toyohiko J. Konno, B. Jouffrey). N.b. cette technique de microscopie permet de « voir » les atomes.

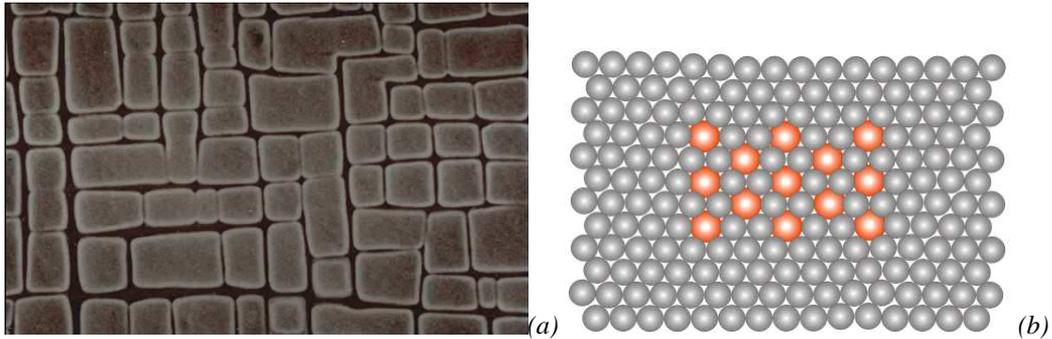


Figure 27 : (a) « précipités » γ , ou Ni_3TiAl dans une matrice de Nickel. Il s'agit en réalité d'une solution solide ordonnée. (Onéra). (b) illustration, solution solide ordonnée, de forme cuboïdale.

◇ Précipités, structures lamellaires.

Lorsque les précipités ou les particules de seconde phase grossissent, ils perdent alors leur cohérence avec le réseau du métal de base. Ils peuvent être semi-cohérents ou même complètement incohérents (Figure 28). En tout cas même si les précipités deviennent incohérents, ils gardent certaines relations d'orientation avec l'orientation cristalline du métal de base. On peut citer par exemple des précipités Al_2Cu dans les alliages d'aluminium-cuivre.

Il existe des structures très variées dans les matériaux biphasés, précipités cubiques, sphériques, en aiguilles ou sous forme de plaquettes, structures lamellaires (Figure 29 a) ou encore de Widmandstätten (Vannerie).

La structure des matériaux biphasés influe considérablement sur le comportement du matériau. Ainsi une fonte grise à graphites lamellaires est-elle fragile tandis qu'une fonte à graphite sphéroïdal peut se déformer plastiquement. C'est en vue d'améliorer telle ou telle propriété mécanique que l'on fait évoluer ces structures.

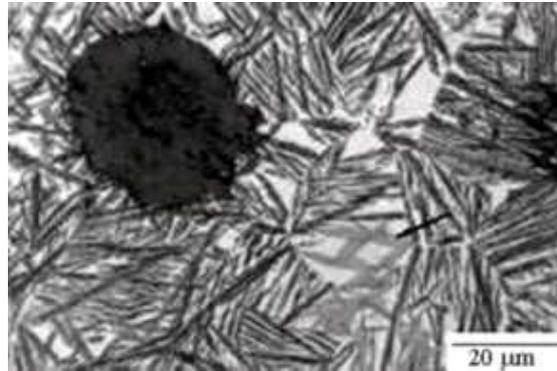


Figure 28 : Fonte à graphites sphéroïdal (ductile) $Fe-3.52C-2.51Si-0.49Mn-0.15Mo-0.31Cu$ wt%. Nodules de graphite (noir) dans une matrice bainitique (austénitisation à $950^{\circ}C$, trempe et maintien à $350^{\circ}C$ pendant 64 min) (Badeshia)

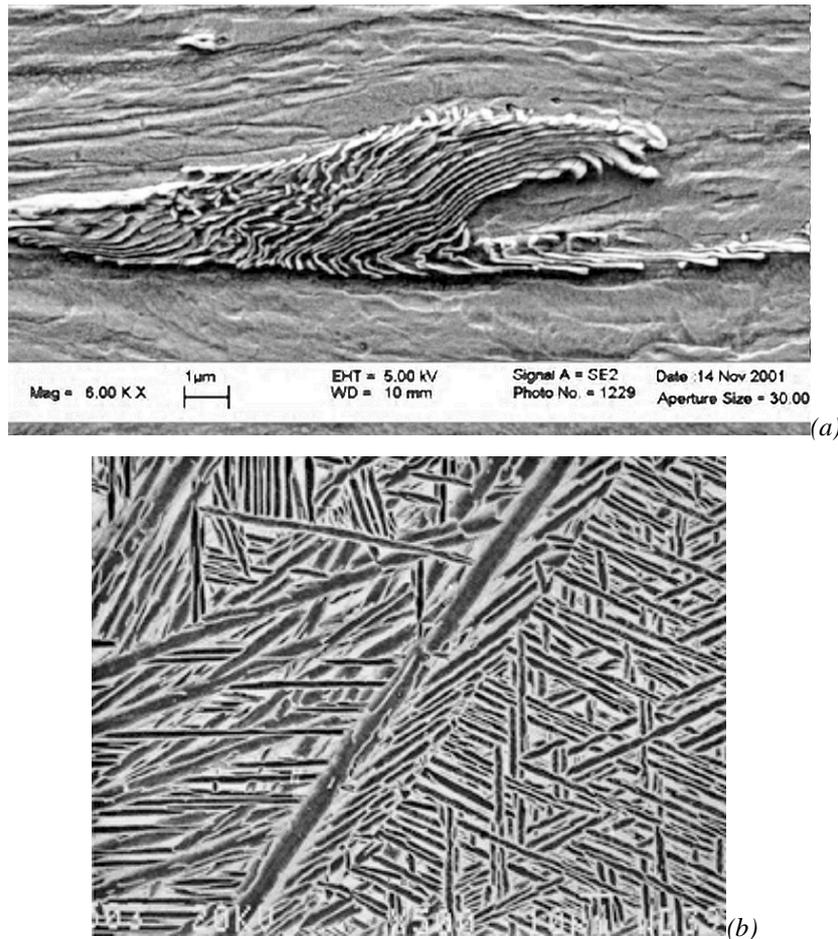


Figure 29. (a) Structure perlitique dans un acier ferrite-perlitique fortement déformé (ferrite $Fe \alpha$ et carbure de fer Fe_3C) (Antoine Phelippeau). (b) Structure en Widmanstatten ou « vannerie » dans un alliage de titane Ti-6-22-22 (Cyril Cayron).

5.3.3 Echelle des grains ou microstructure

En général on n'emploie pas les matériaux métalliques sous forme monocristalline mais sous forme polycristalline. Le matériau est constitué d'un ensemble de cristallites appelés aussi grains dont l'orientation cristalline peut être quelconque ou non. Lorsque la taille de grain diminue la limite d'élasticité augmente. Le procédé thermo-mécanique mis en oeuvre pour réaliser le matériau permet de faire varier la taille des grains. On peut par exemple par tréfilage intense réduire la dimension de grains de ferrite dans un acier de 50 μ m à 300 nm.

La distribution statistique des orientations cristallines des grains s'appelle la *texture cristalline*. Lorsque toutes les orientations cristallines sont équiprobables, la texture est isotrope.

La forme des grains peut également être anisotrope, (grains allongés dans une direction particulière), on parlera alors de texture morphologique.

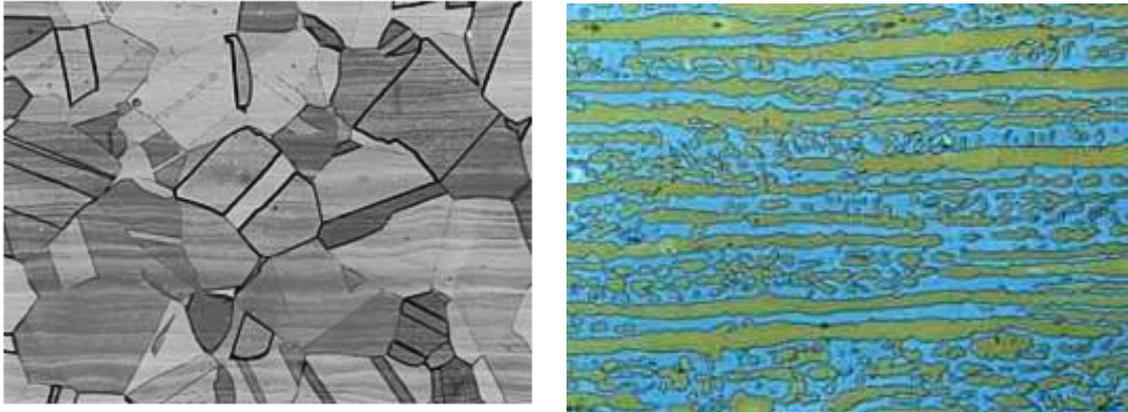


Figure 30 : A gauche Micrographie optique d'un acier austénitique AISI 304. Le matériau est monophasé ($Fe \gamma$ seulement) polycristallin et sans texture morphologique. A droite, AISI 304 duplex. Le matériau est biphase ($Fe \alpha, Fe \gamma$) et présente une texture morphologique (les grains sont allongés).

5.3.4 Macrostructure

Enfin, dans la plupart des composants, des macro-structures se développent à l'échelle du composant. Elles proviennent du procédé de mise en forme. Les plus spectaculaires sont souvent les structures de fonderie.

- Structures de fonderie

Lors de la solidification, les grains ont tendance à se développer à partir des parois des moules, ou sur une surface solide qui sert de précurseur pour le front de solidification (Figure 31a). C'est en général un phénomène ennuyeux qu'on tente de limiter, mais dans certains cas au contraire ce phénomène est exploité pour réaliser une macrostructure optimale.

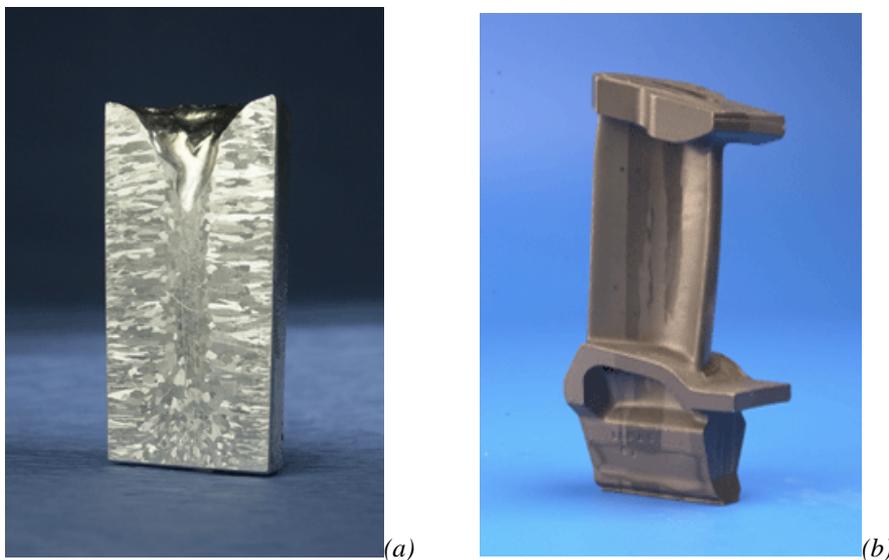


Figure 31 : Structure de fonderie, (a) alliage d'aluminium coulé dans un godet, les grains se sont développés à partir des surfaces vers le centre du godet, (b) aube de turbine réalisée par fonderie avec un front de solidification contrôlé. Les grains ont un axe principal aligné avec celui de l'aube (Badeshia)

Ainsi les aubes de turbine des réacteurs d'avion, avant d'être monocristallines ont été à structure colonnaires. Chaque aube ne contient que quelques grains, et ces grains sont orientés morphologiquement et cristallographiquement selon l'axe de l'aube (Figure 31b). On peut également réaliser des monocristaux, comme les blocs de silicium avec lesquels on réalise des composants pour l'électronique.

- Structures de forge

On peut voir se développer aussi des macrostructures dans des matériaux forgés. Si le matériau présente au départ une certaine hétérogénéité (structure en bande pour un acier ferrito-perlitique par exemple), cette hétérogénéité subsiste après la mise en forme mais conserve la mémoire de la déformation qui a été subie lors de la forge par le matériau.

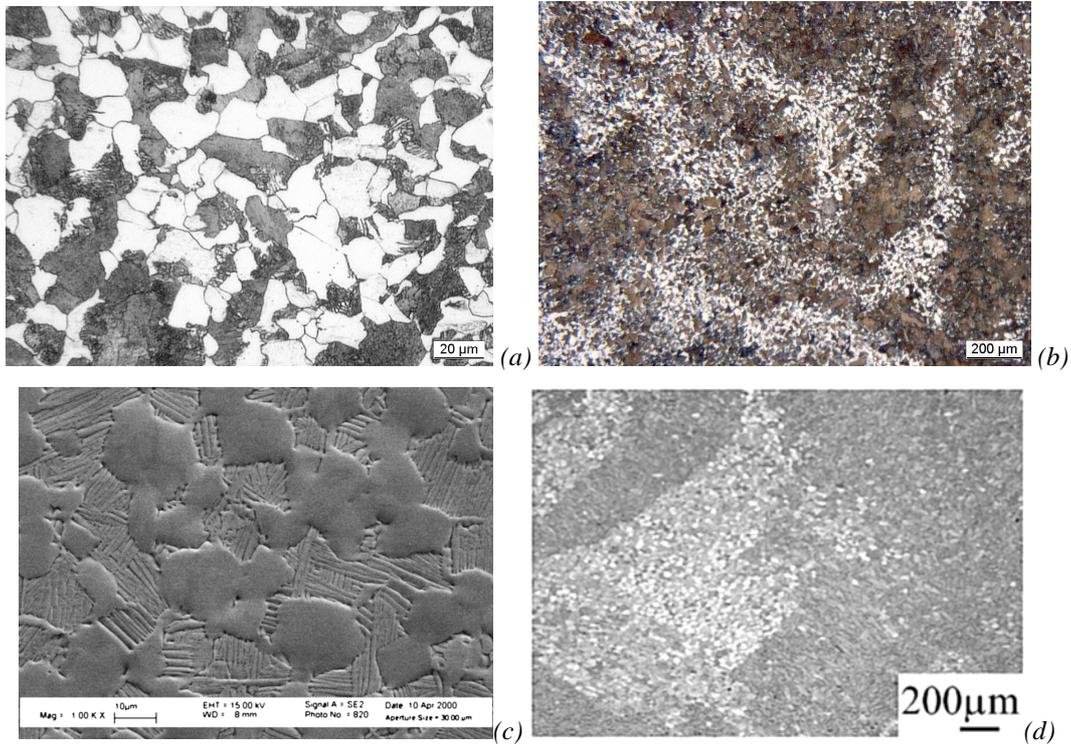


Figure 32 : Exemples de macrostructures de forge. (a) microstructure d'un acier ferrito-perlitique (Rami Hamam), (b) macrostructure de ce même acier. Les zones riches en ferrite et riches en perlite se répartissent en bandes qui se déforment et se courbent lors de la forge du composant. (c) microstructure d'un alliage de Titane TA6V. (d) macrostructure du même alliage à l'issue de la mise en forme (Kristell Le Biavant).

Autres macrostructures

Enfin on peut citer par curiosité des matériaux composites à matrice métallique, qui présentent une macro-structure à l'échelle du composant. Ici une section d'un alliage de titane renforcé par des fibres longues de carbure de silicium. Les fibres sont alignées selon l'axe de tension maximale. D'autre part on voit sur la micrographie, que les grains de l'alliage de titane se sont développés à partir de la surface des fibres.

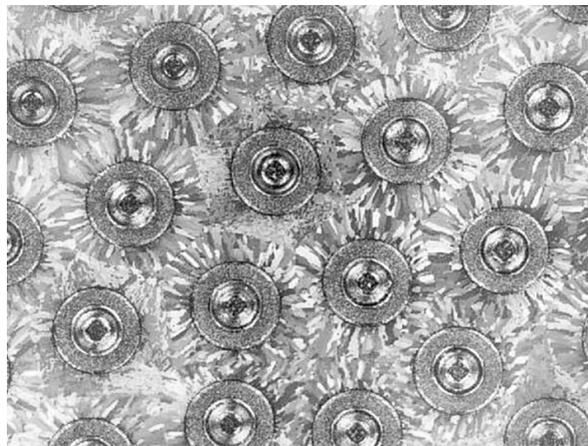


Figure 33 : (© ONERA 1996-2004) Micrographie d'un matériau composite SiC/alliage de titane, coupe transversale..

5.4 Relations structure propriété

5.4.1 Plans de glissements et contrainte d'écoulement

◇ Observations

Les liaisons entre les atomes sont des liaisons dites métalliques, un « gaz d'électrons » assure la cohésion du cristal. Les atomes sont ainsi susceptibles de se déplacer les uns par rapport aux autres sans rupture de liaison, ce qui permet la déformation plastique.

La déformation plastique d'un métal correspond au glissement relatif de plans cristallins.

Le glissement se produit préférentiellement entre plans de plus grande équidistance (qui sont aussi des plans denses) et selon les directions denses. Les plans sont repérés par leur normale (§ 4.3.1).

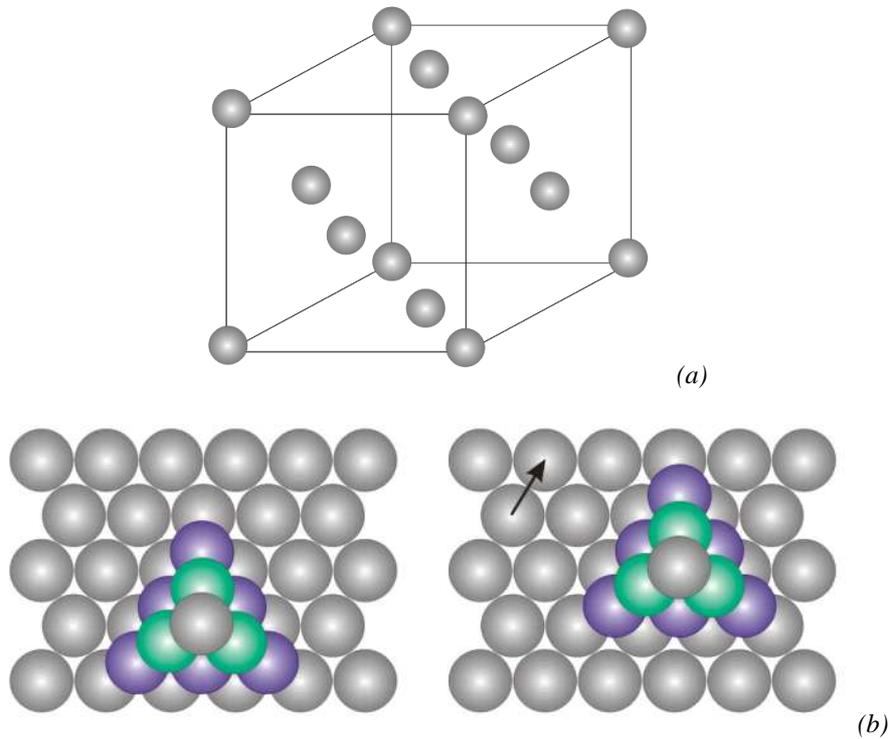


Figure 34 : (a) structure cubique à faces centrées. Les plans denses sont les plans de type (111), (b) vue de dessus d'un empilement de plan (111) dans une structure cubique à faces centrées, avant et après glissement selon une direction dense du plan (111).

Structure cubique à faces centrées : plans denses de type (111) et directions denses de type [110]. La liste des plans et directions de glissement d'un cristal cubique à faces centrées est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc}
 \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) & \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) & \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) & \vec{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \\
 \vec{g}_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) & \vec{g}_{21} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) & \vec{g}_{31} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) & \vec{g}_{41} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\
 \vec{g}_{12} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) & \vec{g}_{22} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) & \vec{g}_{32} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) & \vec{g}_{42} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \\
 \vec{g}_{13} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) & \vec{g}_{23} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) & \vec{g}_{33} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) & \vec{g}_{43} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)
 \end{array}$$

Structure cubique centrée : plans denses de type (110) et directions denses de type [111].

Ceci conduit à tirer quelques règles pour la représentation du comportement élasto-plastique d'un cristal métallique.

- Le comportement élastique doit posséder les symétries de la structure du cristal.
- La déformation plastique correspond au glissement relatif de plans cristallins et se fait donc sans changement de volume.
- Le glissement se fait selon des plans et des directions discrètes de l'espace, qui sont les plans et directions denses de la structure cristalline.

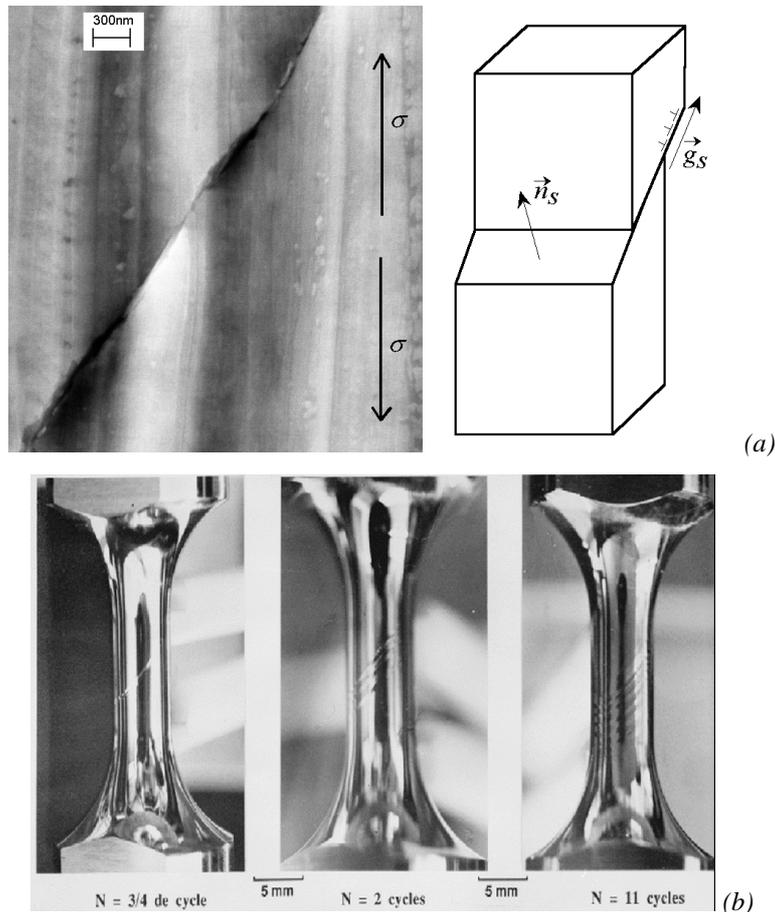


Figure 35 : (a) A gauche, ligne de glissement intense émergeant à la surface d'un acier perlitique fortement tréfilé testé en traction simple [Phelippeau, 2001]. A droite, déplacement de deux parties d'un cristal après un glissement sur un plan de glissement de normale n_s et de direction g_s (b) traces de glissement à la surface d'une éprouvette taillée dans un monocristal et polie miroir avant le début de l'essai (Hanriot, 1993 (de S. Forest)

. Critère de plasticité du monocristal

Compte tenu de ce qui a été rappelé plus haut, on peut proposer un critère de plasticité pour le monocristal.

Supposons que l'on connaisse l'expression du tenseur des contraintes dans le repère du cristal : $\underline{\sigma}$

Supposons que l'on se donne les directions normales aux plans de glissement \vec{n}_i

Supposons également que pour chaque plan de glissement i on se donne les directions de glissement associées \vec{g}_{ij}

Alors la composante de cisaillement τ (ou scission résolue) sur chaque plan de glissement et selon chacune des directions de glissement se calcule comme suit : $\tau = \underline{\sigma} \vec{n}_i \cdot \vec{g}_{ij}$

Parmi l'ensemble des systèmes de glissement, la plasticité se produira sur le système qui subit le cisaillement maximum, soit :

$$\tau_{\max} = \max_i \left[\max_j \left[\underline{\sigma} \vec{n}_i \cdot \vec{g}_{ij} \right] \right]$$

On pourra écrire que le glissement se produit lorsque la contrainte de cisaillement sur le système de glissement le plus favorablement orienté atteint une valeur critique : soit

$$\tau_{\max} < \tau_c \text{ le comportement est élastique}$$

$$\tau_{\max} = \tau_c \text{ glissement plastique}$$

◇ Critère de plasticité de Von Mises

Si le critère de plasticité du monocristal est le plus simple à établir à partir des mécanismes physique de déformation du monocristal, il est par contre assez pénible à mettre en œuvre en pratique. En outre la plupart des matériaux métalliques ne sont pas monocristallins mais polycristallins.

Le critère de plasticité de Von Mises permet de déterminer le seuil d'écoulement plastique d'un matériau métallique polycristallin isotrope. C'est un critère énergétique. Le matériau est supposé entrer en plasticité lorsque son énergie élastique de cisaillement atteint une valeur seuil.

Enoncé du critère

Pour un tenseur des contraintes diagonal le critère de Von Mises s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad \text{soit } \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)}$$

Alors si $\sigma_{eq} < R_e$ le comportement est élastique

Si $\sigma_{eq} = R_e$ écoulement plastique

Démonstration

○ Densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement

Lorsque le comportement du matériau est élastique, la densité d'énergie de déformation est égale à la densité d'énergie de déformation élastique. Cette densité d'énergie de déformation se calcule comme suit :

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma} : \underline{D} d\tau \quad \text{où} \quad \underline{a} : \underline{b} = \text{Tr } \underline{a} \underline{b}$$

Comme la déformation plastique se fait sans changement de volume, on partitionne D en un terme de vitesse de changement de volume et un terme complémentaire appelé déviateur.

Le déviateur \underline{a}^D d'un tenseur \underline{a} est défini comme suit : $\underline{a}^D = \underline{a} - \frac{\text{Tra}}{3} \underline{I}$. Compte tenu de cette définition la trace d'un déviateur est toujours nulle

On définit donc

$$\underline{D} = \frac{\text{Tr } \underline{D}}{3} \underline{I} + \underline{D}^D \quad \underline{\sigma} = \frac{\text{Tr } \underline{\sigma}}{3} \underline{I} + \underline{\sigma}^D \quad \underline{\varepsilon}_e = \frac{\text{Tr } \underline{\varepsilon}_e}{3} \underline{I} + \underline{\varepsilon}_e^D$$

On peut alors développer l'expression de la densité d'énergie de déformation :

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I + \underline{\sigma}^D \right) : \left(\frac{\text{Tr}\underline{D}}{3} I + \underline{D}^D \right) d\tau$$

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I \right) : \left(\frac{\text{Tr}\underline{D}}{3} I \right) d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\underline{\sigma}^D \right) : \left(\underline{D}^D \right) d\tau + \frac{1}{3} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\text{Tr}\underline{\sigma} \left[I : \underline{D}^D \right] + \text{Tr}\underline{D} \left[\underline{\sigma}^D : I \right] \right) d\tau$$

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} \text{Tr}\underline{D} d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{1}{3} \left(\text{Tr}\underline{\sigma} \text{Tr}\underline{D}^D + \text{Tr}\underline{D} \text{Tr}\underline{\sigma}^D \right) d\tau$$

Comme la trace d'un déviateur est nulle et en notant : $p = -\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3}$ et $\text{Tr}\underline{D} = \frac{d}{dt} \frac{V - V_0}{V_0}$:

$$W(t) = -p \frac{V - V_0}{V_0} + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = -p \frac{\Delta V}{V_0} + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = W(t)_{vol} + W(t)_{cis}$$

On reconnaît dans le premier terme la densité d'énergie élastique de changement de volume, le second terme est le complément à savoir la densité d'énergie élastique de cisaillement, qui est susceptible de promouvoir l'apparition d'une déformation élastique.

En petites déformations et à l'intérieur du domaine d'élasticité : $\underline{D} = \frac{d\underline{\epsilon}}{dt} = \frac{d\underline{\epsilon}_e}{dt}$

Si le comportement est élastique et isotrope : $\underline{\epsilon}_e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}\underline{\sigma} \underline{I}$

Le déviateur de D s'écrit donc : $\underline{D}^D = \frac{1+\nu}{E} \frac{d\underline{\sigma}^D}{dt}$

On en déduit :

$$W_{cis} = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = \frac{1+\nu}{E} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \frac{d\underline{\sigma}^D}{dt} d\tau$$

Soit pour l'expression de la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement :

$$W_{cis} = \frac{1+\nu}{2E} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D$$

○ Critère de Von Mises

Le critère de plasticité de Von Mises est un critère d'iso-énergie élastique de cisaillement. C'est-à-dire qu'on suppose que la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement au moment où l'on atteint la limite d'élasticité est la même en traction simple et pour tout autre type de chargement.

En traction simple, au seuil de plasticité on a : $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \text{Re} \end{pmatrix}$

$$\text{Alors le déviateur s'écrit : } \underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} \underline{I} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{Re}}{3} & & \\ & -\frac{\text{Re}}{3} & \\ & & \frac{2\text{Re}}{3} \end{pmatrix}$$

Et la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement s'écrit :

$$W_{cis}^{Traction} = \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{6}{9} R_e^2 \right)$$

Pour un chargement quelconque le seuil de plasticité sera atteint pour la même densité d'énergie élastique de cisaillement soit :

$$W_{cis} = \frac{1+\nu}{2E} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D = \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{6}{9} R_e^2 \right)$$

Dont on déduit le critère de Von Mises :

Pour un tenseur des contraintes quelconque $\underline{\sigma}$, on définit le déviateur $\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} \underline{I}$ et la contrainte équivalente de cisaillement de Von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D}$

Si $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} < R_e$ le comportement reste élastique

Si $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} = R_e$ on aura écoulement plastique

◇ Critère de Tresca

Un second critère, le critère de Tresca, est également couramment employé pour les métaux isotropes. C'est un critère en contrainte. Dans ce cas là, la plasticité est supposée se produire lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur seuil.

- Enoncé du critère de Tresca

Supposons que l'on ait exprimé le tenseur des contraintes dans sa base propre :

Le critère de Tresca s'écrit :

Pour tout $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

Si $|\sigma_3 - \sigma_1| < R_e$ le comportement est élastique

$|\sigma_3 - \sigma_1| = R_e$ écoulement plastique

- Démonstration

Dans le cas d'un polycristal à texture isotrope, toutes les orientations cristallines sont équiprobables. Dans le cas du monocristal on cherchait à déterminer le maximum de la contrainte de

cisaillement sur un ensemble discret de systèmes de glissements. Dans le cas du polycristal on procède de même mais cette fois ci toutes les directions de l'espace vont pouvoir être considérées.

On va chercher à déterminer quel est le plan sur lequel se produit le cisaillement maximum et quelle est l'intensité de ce cisaillement.

$$\text{Chaque plan est repéré par sa normale } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On note N la composante normale au plan de normale \vec{n} et τ la composante de cisaillement sur ce plan.

$$\text{Alors : } N = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \|\tau\|^2 = ((\underline{\sigma} \vec{n}) - N \vec{n}) \cdot ((\underline{\sigma} \vec{n}) - N \vec{n})$$

$$\text{En développant il vient : } \|\tau\|^2 = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot (\underline{\sigma} \vec{n}) + N^2 - 2(\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot N \vec{n} = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot (\underline{\sigma} \vec{n}) - N^2$$

Dont on déduit en fonction des composantes du vecteur \vec{n} :

$$\|\tau\|^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

La composante de cisaillement sur un plan \vec{n} est extrémale si l'on a simultanément :

$$\frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_1} = \frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_2} = \frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_3} = 0$$

Cette condition s'écrit sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues (n_1, n_2 et n_3) :

$$\begin{cases} 2\sigma_1 n_1 [\sigma_1 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \\ 2\sigma_2 n_2 [\sigma_2 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \\ 2\sigma_3 n_3 [\sigma_3 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \end{cases}$$

Premier cas : Les trois composantes n_i sont non nulles, alors le système d'équations ci-dessus admet une solution si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, c'est le cas particulier de l'application d'une pression hydrostatique pure. Dans ce cas τ présente un minimum, $\tau = 0$.

Second cas : L'une des trois composantes n_i est nulle. Prenons par exemple $n_3 = 0$. On cherche alors la valeur du cisaillement pour une normale \vec{n} telle que :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \|\tau\|^2 = (\sigma_1 \cos \theta)^2 + (\sigma_2 \sin \theta)^2 - (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta)^2$$

En développant il vient :

$$\|\tau\|^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \sin^2 2\theta$$

Et par ailleurs

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

La valeur maximale de la composante de cisaillement est obtenue pour $\theta = \pm \pi/4$

Diagramme de Mohr

On peut remarquer que dans un diagramme (N, τ) (ou plan de Mohr) les expressions obtenues constituent l'équation paramétrique d'un cercle de centre $(N=(\sigma_1+\sigma_2)/2, \tau=0)$ et de rayon $(\sigma_1-\sigma_2)/2$. Cette représentation est appelée un cercle de Mohr.

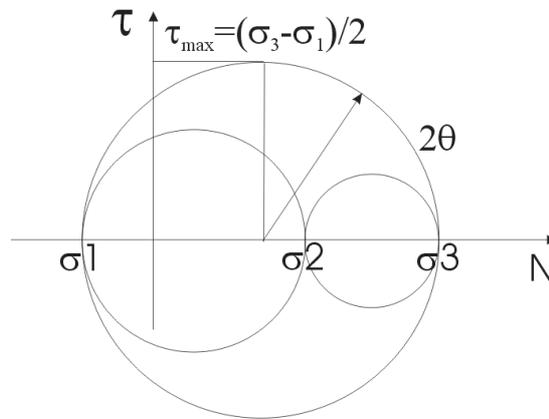


Figure 36 : Représentation de Mohr, le tenseur des contraintes est représenté dans un plan contrainte de cisaillement - contrainte normale.

On en déduit que si le tenseur des contraintes est diagonal avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ alors la contrainte de cisaillement maximale vaut $\tau_{\max}=(\sigma_3-\sigma_1)/2$

Critère de Tresca

On peut maintenant établir le critère de plasticité de Tresca.

En traction simple le tenseur des contraintes se réduit à $\sigma_1=\sigma_2=0, \sigma_3$ croissant. Dans ce cas la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}=\sigma_3/2$. Au cours de l'essai de traction on détermine la limite d'élasticité du matériau $\sigma_3=Re$.

Le critère de plasticité de Tresca consiste à postuler que l'écoulement plastique se produit pour une même valeur de la contrainte de cisaillement maximal quel que soit le type de chargement.

Ainsi, si $\tau_{\max} \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} < \frac{R_e}{2}$ le comportement est élastique, sinon il y a écoulement plastique.

Domaine d'élasticité de Tresca

On peut ainsi représenter le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes. Considérons par exemple un chargement triaxial. σ_1 et σ_2 sont quelconques et σ_3 est imposée, $\sigma_3=-p$.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & -p \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

La limite d'élasticité en traction simple est Re . On peut alors tracer le domaine d'élasticité du matériau dans un plan (σ_1, σ_2) . Et observer comment ce domaine d'élasticité évolue en fonction de la pression d'hydroformage p .

Cas N°1, $p=0$: Les intersections de la frontière du domaine d'élasticité avec les axes $\sigma_1=0$ ou $\sigma_2=0$ correspondent au cas de la traction simple soit dans la direction 1 soit dans la direction 2. $\sigma_1=\sigma_2$ correspond à une traction biaxiale pure et $\sigma_1=-\sigma_2$ à du cisaillement.

Cas N°2, $p=Re/2$: $\sigma_3=-Re/2$. Le domaine d'élasticité du matériau (dans le plan σ_1, σ_2) se décale selon la diagonale.

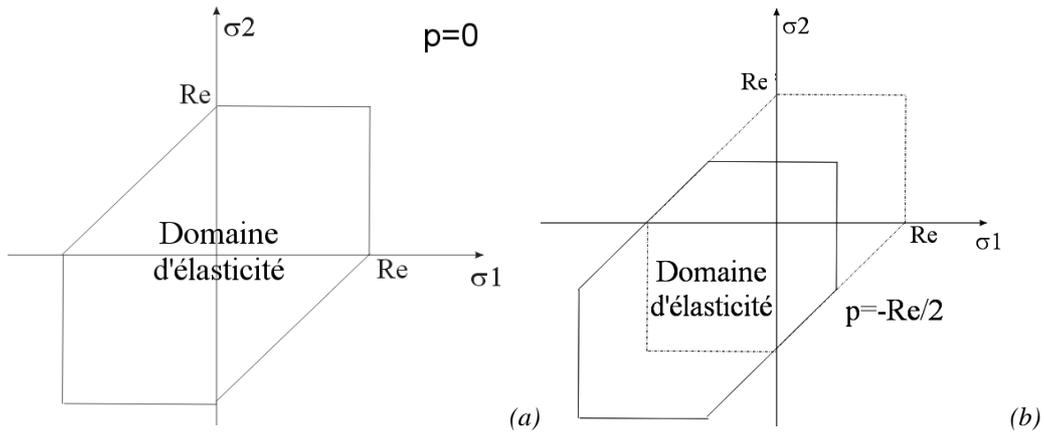


Figure 37 : Tracé du domaine d'élasticité dans un plan (σ_1, σ_2) la valeur de σ_3 étant fixe et imposée égale (a) à zéro, ou égale à (b) $\sigma_3 = -Re/2$.

◇ Représentation graphique des critères de Von Mises et Tresca.

Comme pour le critère de Tresca, le seuil de plasticité de Von Mises peut être tracé dans un plan (σ_1, σ_2) en choisissant par exemple $\sigma_3=0$. La coupe du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales par un plan quelconque est une ellipse.

Les intersections avec les axes $\sigma_1=0$ ou $\sigma_2=0$ correspondant à la traction simple sont les mêmes que pour le critère de Tresca ce qui est naturel puisque les deux critères ont été ajustés sur la limite d'élasticité en traction simple. On observe une légère différence en cisaillement ($\sigma_1 = -\sigma_2$). Le critère de Tresca donne un seuil de plasticité en $(\sigma_3=0, \sigma_1 = -\sigma_2 = Re/2)$ tandis que celui de Von Mises donne un seuil de plasticité en $(\sigma_3=0, \sigma_1 = -\sigma_2 = Re/\sqrt{3})$. Mais pour l'essentiel le seuil de plasticité est le même qu'on utilise le critère de Tresca ou celui de Von Mises.

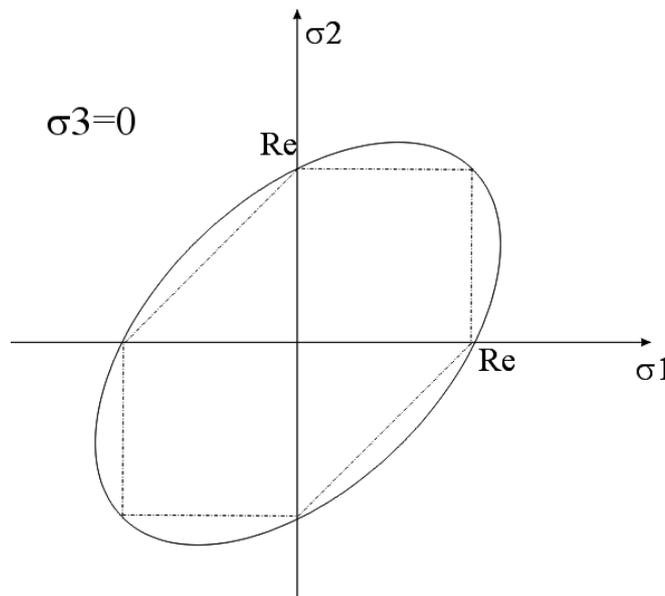


Figure 38 : Coupe du critère de Von Mises dans un plan $(\sigma_3=0)$, il s'agit d'une ellipse inclinée à 45° . Comparaison avec le critère de Tresca dans le même plan.

◇ Comparaison avec l'expérience

Des essais multiaxiaux ont été réalisés par différentes équipes et permettent de montrer que le critère de Von Mises est bien vérifié expérimentalement. Au cours de ces essais, on impose une déformation mixte de traction et de torsion. On mesure la déformation et le niveau de contrainte de cisaillement et de traction au point où le seuil de plasticité est atteint.

La Figure 39 présente des résultats expérimentaux obtenus lors d'essais de traction-torsion (tous les termes du tenseur des contraintes sont nuls sauf σ_{33} et $\sigma_{23} = \sigma_{32}$). Pour chaque direction de chargement ($\sigma_{23} = \alpha \sigma_{33}$) le seuil de plasticité a été mesuré expérimentalement, et reporté sur le graphe (losanges). En trait plein est reporté le critère de Von Mises. L'accord est excellent.

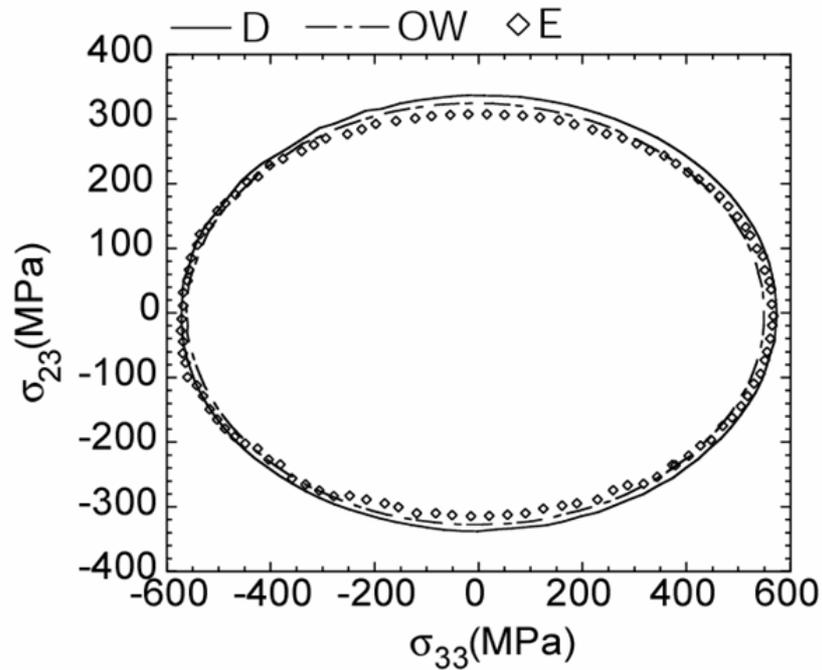


Figure 39 : Seuil de plasticité en traction torsion (Sylvain Calloch)

5.4.2 Prise en compte des écrouissages

◇ *Domaine d'élasticité.*

Lors d'un essai de traction on peut mesurer une variation de la contrainte d'écoulement. Comme il a été dit plus haut (§ 5.2.3), l'augmentation de la contrainte d'écoulement en traction peut provenir de deux sources, une augmentation de la dimension effective du domaine d'élasticité du matériau ou bien un déplacement de ce domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes.

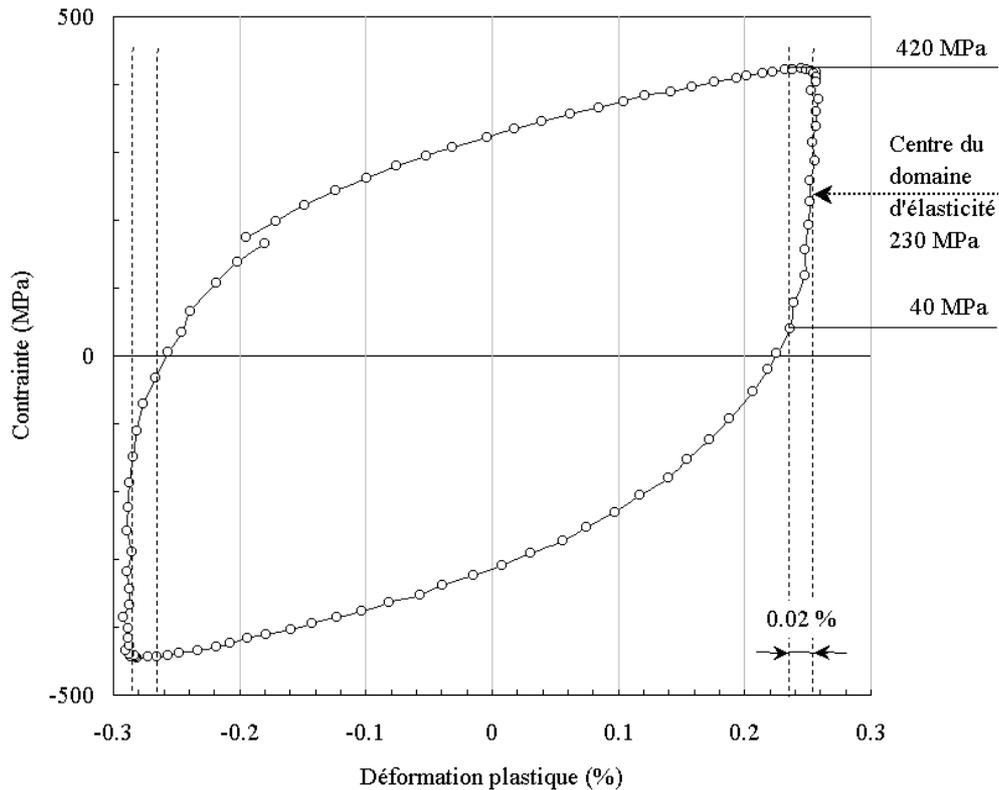


Figure 40 : Exemple de boucle d'hystérésis mesurée à température ambiante, sur un alliage austéno-ferritique vieilli [Leroux, 1999]

On notera R la dimension du domaine d'élasticité. Par ailleurs on notera X la position du centre de ce domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, X est naturellement un tenseur. On peut donc représenter les écrouissages par une augmentation de la taille du domaine d'élasticité (pour un écrouissage isotrope) et un déplacement de la position du centre de ce domaine (pour un écrouissage cinématique).

◇ Généralisation du critère de plasticité de Von Mises

On peut alors tout à fait généraliser la notion de seuil d'écoulement plastique en tenant compte des écrouissages.

Pour un tenseur des contraintes quelconque $\underline{\sigma}$, on définit le déviateur $\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{Tr \underline{\sigma}}{3} I$

Si maintenant le centre du domaine d'élasticité peut se décaler, la contrainte équivalente s'écrit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\sigma}^D - \underline{X}) : (\underline{\sigma}^D - \underline{X})}$$

On en déduit l'expression du seuil f de plasticité, ou surface de charge :

$$f = \sigma_{eq} - R = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\sigma}^D - \underline{X}) : (\underline{\sigma}^D - \underline{X})} - R$$

Si f est négatif alors le comportement du matériau est élastique

Sinon f reste nul et X et R évoluent avec la déformation plastique.

◇ Représentation dans l'espace des contraintes

On peut représenter l'effet d'un écrouissage cinématique seul ou d'un écrouissage isotrope seul sur la surface seuil de plasticité (Figure 41), par exemple dans un plan traction-torsion. Si l'on fait subir une compression simple monotone au matériau, la dimension du domaine augmente si l'écrouissage est un écrouissage isotrope, tandis qu'il se déplace selon l'axe de compression si l'écrouissage est un écrouissage cinématique.

Ces évolutions ont été vérifiées expérimentalement. Et l'on voit bien que si l'on change de direction de chargement, il est très important de savoir quel est le type d'écrouissage du matériau, si l'on veut être capable de prévoir correctement le seuil d'écoulement plastique du matériau.

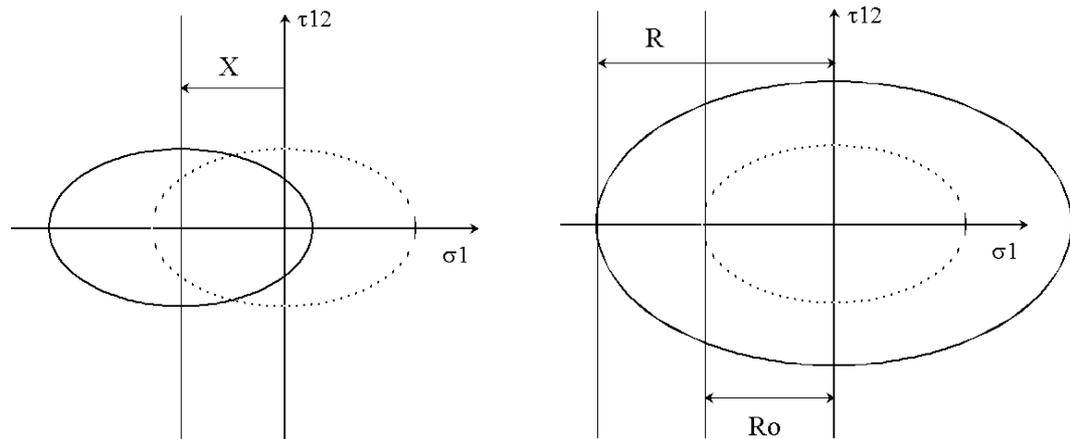


Figure 41 : Évolution de la surface seuil en traction-torsion après une compression uniaxiale, à gauche avec un écrouissage cinématique, à droite avec un écrouissage isotrope.

◇ Loi d'écoulement plastique

Connaissant la position du seuil d'écoulement plastique du matériau, on peut prévoir la direction de la déformation plastique. Ceci se démontre en s'appuyant sur le principe de minimisation de la dissipation d'énergie au cours de la déformation plastique. Mais la démonstration est hors programme.

Si f est la surface seuil du domaine d'élasticité alors la loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

Où $\dot{\lambda}$ est une constante à déterminer. Cette loi d'écoulement est aussi appelée, hypothèse de normalité. Une représentation graphique permet de comprendre l'origine de ce nom :

Prenons par exemple la représentation de la surface seuil dans un plan principal ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0$). On a déjà montré qu'il s'agit d'une ellipse. Compte tenu de l'expression de la vitesse de déformation plastique : $\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$, on peut dire que la direction de l'écoulement plastique est normale à la surface f .

Prenons par exemple le chargement suivant : $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_o}{2} & & \\ & \sigma_o & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$

Si le seuil de plasticité s'écrit simplement : $f = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} - R$

Alors la vitesse de déformation plastique s'écrira : $\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3 \underline{\sigma}^D}{2 \sigma_{eq}} \Rightarrow \frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} \propto \underline{\sigma}^D$

C'est-à-dire que la vitesse de déformation plastique est proportionnelle au déviateur des contraintes. Ceci traduit tout simplement le fait que la déformation plastique se fait sans changement de volume.

Au seuil de plasticité, $\sigma_{eq}=R$. La direction de la vitesse de déformation plastique est celle du déviateur, qui vaut ici :

$$\text{Soit ici : } \underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr} \underline{\sigma}}{3} \underline{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_o}{2} \\ -\frac{\sigma_o}{2} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

On peut représenter graphiquement la direction du déviateur dans le plan des contraintes, et l'on constate bien que cette direction est normale à la surface seuil, d'où le terme d'hypothèse de normalité :

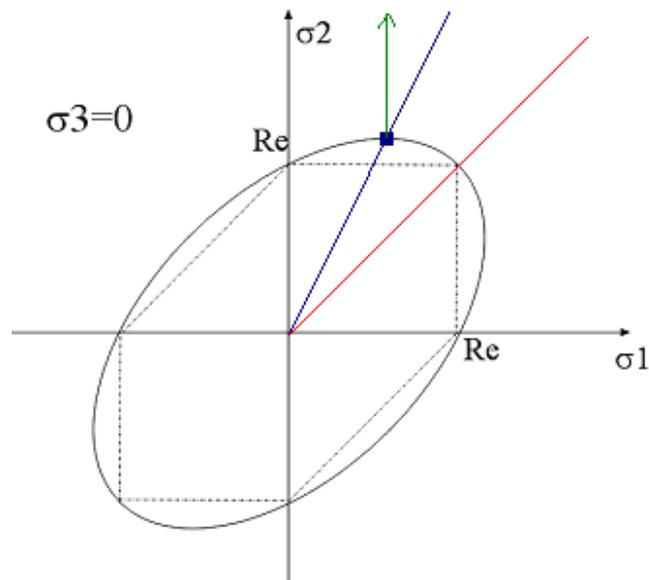


Figure 42 : seuil de plasticité et direction de l'écoulement plastique.

5.5 Fiche résumé

Matériaux métalliques

Les matériaux métalliques présentent une structure cristalline. Les liaisons entre les atomes, de type métallique, permettent le mouvement des atomes tout en maintenant la cohésion du cristal. On décrit leur structure à différentes échelles

- Atomique : structure CC, CFC et HC.
- Intragranulaire, cas des alliages, solution solide, précipités, structure lamellaire.
- Granulaire : taille et forme des grains, texture cristallographique
- Macroscopique : structure de fonderie, structure de forge, composites à matrice métallique.

Plasticité

Les matériaux métalliques présentent essentiellement un comportement plastique

- Origine de la déformation plastique : glissement relatif de plans cristallins, sans changement de volume.
- Mécanisme permettant le glissement de ces plans cristallins : mouvement de dislocations, défauts à l'origine de la viscosité des métaux, des effets d'échelle et de certains endommagements.

Les grandeurs à retenir pour un matériau élasto-plastique sont :

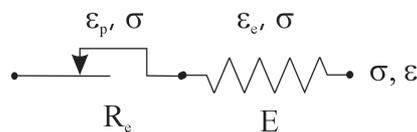
- La limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$ ou $R_{p0.02\%}$
- La contrainte maximale R_m
- L'allongement plastique réparti. $A\%$
- Existence d'érouissage cinématique X et isotrope R .

Relation de comportement (cas uniaxial), modèle rhéologiques :

- Hypothèse de partition des déformations $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ avec $\sigma = E\varepsilon_e$
- Pour la partie plastique :

$$\text{Si } -R_e < \sigma < +R_e \Rightarrow \frac{d\varepsilon_p}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Si } \frac{d\varepsilon_p}{dt} \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm R_e$$

- Symbole :



Relation de comportement (cas général) :

- Surface seuil de plasticité de Von Mises

$$f = \sigma_{eq} - R = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}})} - R, \quad \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\sigma_{eq}}$$

Si f est négatif alors le comportement du matériau est élastique. Sinon f reste nul et X et R évoluent avec la déformation plastique.

5.6 Problèmes

5.6.1 Matériau biphasé et écrouissage cinématique.

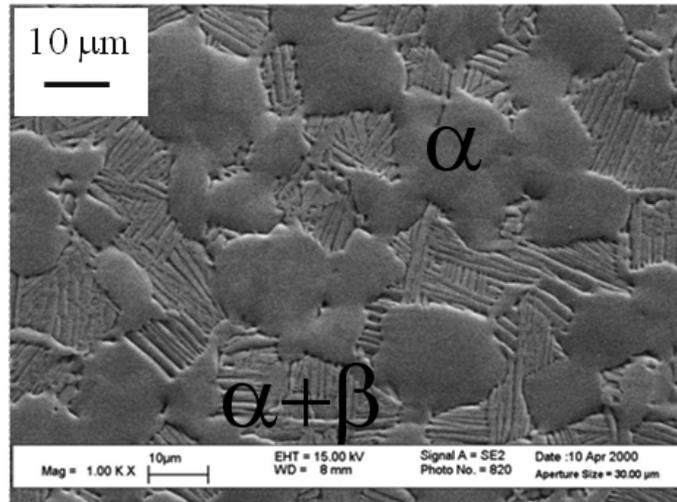
Représentation du comportement élasto-plastique d'un matériau hétérogène (par exemple biphasé) à l'aide d'un modèle rhéologique simple. Mise en évidence d'un écrouissage de type cinématique et relation avec l'hétérogénéité de déformation interne du matériau.

On étudie le comportement d'un matériau biphasé, le TA6V, utilisé notamment pour fabriquer les aubes de compresseur FAN des réacteurs CFM56 qui équipent de nombreux avions civils (TA6V à microstructure duplex : grains monophasés de Titane à structure hexagonale compacte $Ti\alpha$, et grains à sous structure lamellaire, constitués de lamelles de $Ti\alpha$ dans une matrice de Titane à structure cubique centrée $Ti\beta$).

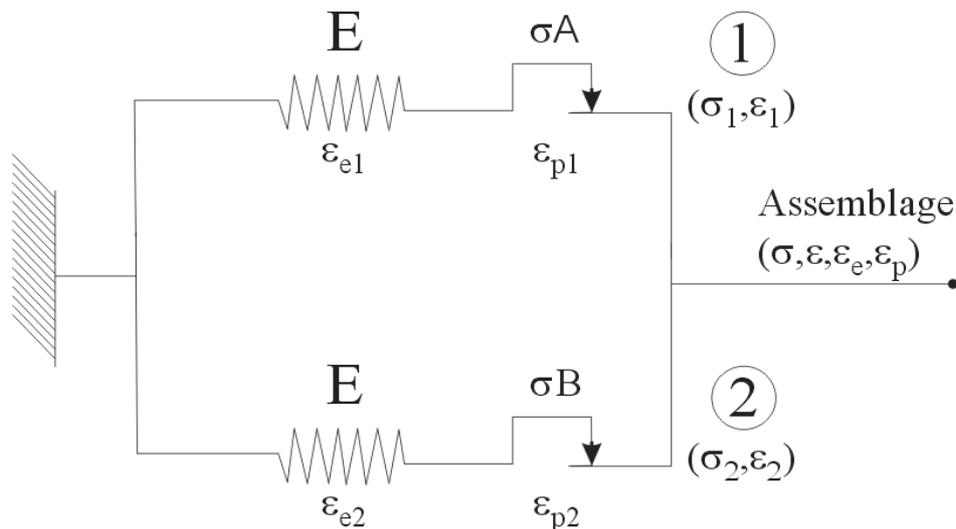
Les grains lamellaires, sont difficiles à déformer, et donc « durs », tandis que les grains monophasés sont « mous ». Les deux familles de grains sont susceptibles de se déformer plastiquement.

On représente donc le matériau par un modèle à deux branches parallèles à une même déformation ϵ .

- Branche 1 : Contrainte σ_1 , déformation élastique ϵ_{e1} déformation plastique ϵ_{p1} . Matériau A : représente les grains monophasés « mous », auxquels on associe une fraction volumique $f_A=50\%$, un module d'élasticité E , une limite d'élasticité σ_A , et un comportement élasto-plastique parfait.
- Branche 2 : Contrainte σ_2 , déformation élastique ϵ_{e2} déformation plastique ϵ_{p2} . Matériau B : représente les grains « durs » à sous structure lamellaire auxquels on associe une fraction volumique $f_B=50\%$, un module d'élasticité E , une limite d'élasticité σ_B et un comportement élasto-plastique parfait.



Microstructure duplex : nodules α monophasés
et nodules à sous-structure lamellaire $\alpha+\beta$



Il est fortement conseillé d'utiliser une représentation graphique pour résoudre ce problème.

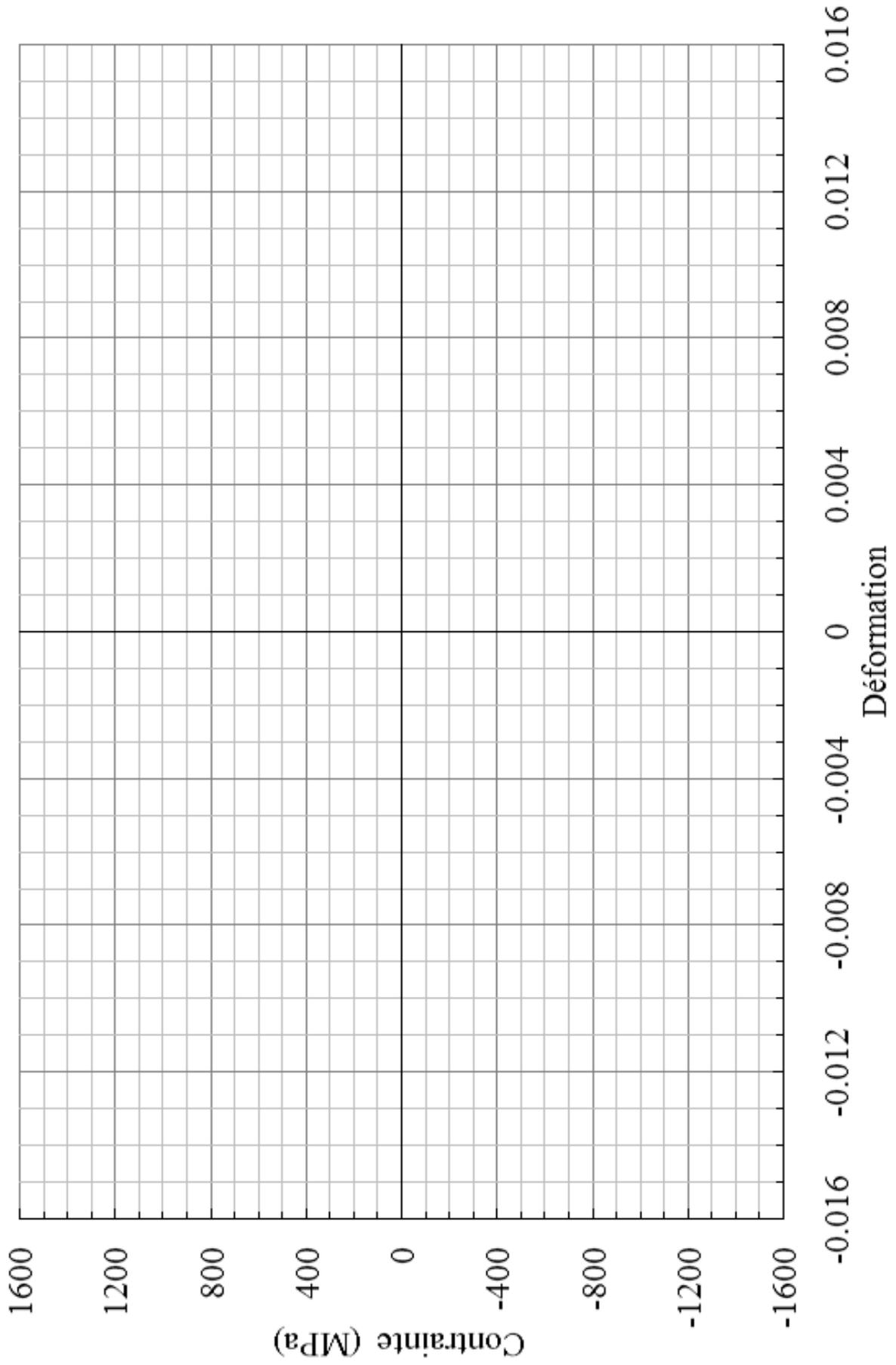
◇ **Question 1 : Comportement en traction simple**

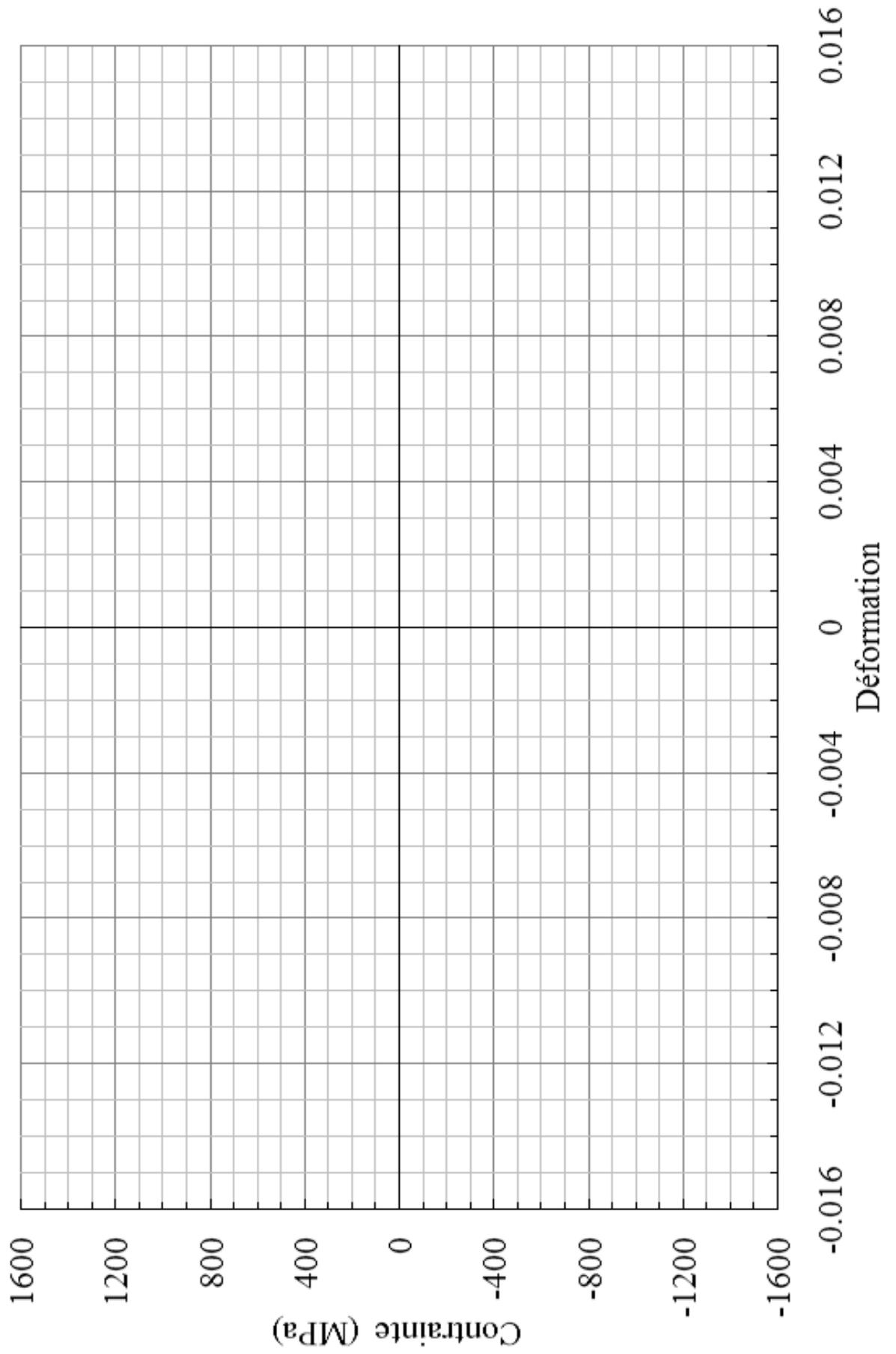
- Domaine (E) : Aucun des deux patins n'est « glissant »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut-on qualifier le comportement de l'assemblage.
 - Quelle est la limite ε^* de ce domaine.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- Domaine (H) : Seul le patin de la branche (1) est « glissant »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut-on qualifier le comportement de l'assemblage. Donner l'expression de la contrainte σ en fonction de la déformation plastique de l'assemblage ε_p .
 - Quelle est la limite supérieure ε^{**} de ce domaine.

- A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- Domaine (S) : Les deux patins des branches (1) et (2) sont « glissants »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut on qualifier le comportement de l'assemblage.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.

◇ **Question 2 : Comportement cyclique**

- A $t = t_0$, on décharge l'assemblage depuis un point $(\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{p0})$ du domaine (S).
 - Comment se comportent les « matériaux » de chacune des branches. Comment se comporte l'assemblage.
 - Déterminer le seuil de plasticité en compression de l'assemblage.
 - Déterminer la dimension du domaine d'élasticité R.
 - Déterminer le centre du domaine d'élasticité X.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $\varepsilon_0=12.10^{-3}$, $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- A $t = t_0$, on décharge l'assemblage depuis un point $(\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{p0})$ du domaine (H).
 - Comment se comportent les « matériaux » de chacune des branches. Comment se comporte l'assemblage.
 - Déterminer le seuil de plasticité en compression de l'assemblage.
 - Déterminer la dimension du domaine d'élasticité R.
 - Déterminer le centre du domaine d'élasticité X. Exprimer X en fonction de ε_p . Exprimer X en fonction de ε_{p1} et ε_{p2} .
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $\varepsilon_0=6.10^{-3}$, $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.





5.6.2 Dépouillement d'un essai de traction simple

Analyse d'un essai de traction simple. Déformation conventionnelle ou rationnelle. Limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$. Critère de plasticité de Von Mises.

Les données du tableau 1 ont été obtenues lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier doux à 0.38% de Carbone, à fût cylindrique de diamètre $D=12$ mm et de longueur utile $L=20$ mm. Un extensomètre a été monté sur l'éprouvette. L'écartement initial l_0 des couteaux de l'extensomètre est égal à 10 mm. On mesure l'évolution de l'écartement l des couteaux de l'extensomètre en fonction de l'effort appliqué sur l'éprouvette lors de l'essai.

N° du point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Allongement $l - l_0$ (mm)	0	0.014	0.034	0.051	0.129	0.208	0.481	0.825	1.25	1.44	1.57	1.75
Effort (kN)	0	30.3	62.5	59.2	59.5	68.4	84.3	91.2	91.7	90.3	87.1	78.1

◇ Question 1 : Exploitation de la courbe de traction

- Estimez le module d'élasticité du matériau
- Estimez la limite d'élasticité du matériau R_e , et calculez sa limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$.
- Etudiez les différentes parties de la courbe. En particulier, que se passe-t'il au point 4 et entre les points 4 et 5.
- Donner les taux d'érouissage $d\sigma/d\epsilon_p$ entre les points 6 et 7, calculés soit à l'aide de la courbe de traction conventionnelle, soit à l'aide de la courbe de traction rationnelle, discutez.
- Déterminer la contrainte maximale en traction R_m du matériau.
- Que se passe-t'il lors de la striction ? Déterminez la déformation plastique conventionnelle de l'éprouvette au début de la striction.

◇ Question 2 : Critère de Plasticité

Le matériau obéit au critère de Von Mises :

$$\sigma_D : \sigma_D = Tr[\sigma_D^2] = \frac{2}{3} R_e^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_D = \sigma - \frac{Tr[\sigma]}{3} I$$

Le matériau est soumis à une sollicitation de traction-torsion : $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Préciser la limite d'élasticité en traction simple ($\sigma_{xy}=0$)
- Précisez la limite d'élasticité en torsion simple ($\sigma_{xx}=0$)
- Dans un plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$, tracez et justifiez l'allure de la frontière du domaine d'élasticité du matériau.

Le matériau est soumis à une sollicitation biaxiale : $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Préciser les intersections avec les axes ($\sigma_{xx}=0$) et ($\sigma_{yy}=0$)
- Préciser les intersection avec les axes ($\sigma_{xx}=\sigma_{yy}$) et ($\sigma_{xx}=-\sigma_{yy}$)
- Dans un plan (σ_{xx}, σ_{yy}), tracez et justifier l'allure de la frontière du domaine d'élasticité du matériau.

◇ **Question 3 : Ecoulement cinématique**

On souhaite modéliser le comportement plastique de ce matériau par un écoulement cinématique linéaire X . Le domaine d'élasticité s'écrit alors :

$$f = (\sigma_D - X) : (\sigma_D - X) - \frac{2}{3} R_e^2.$$

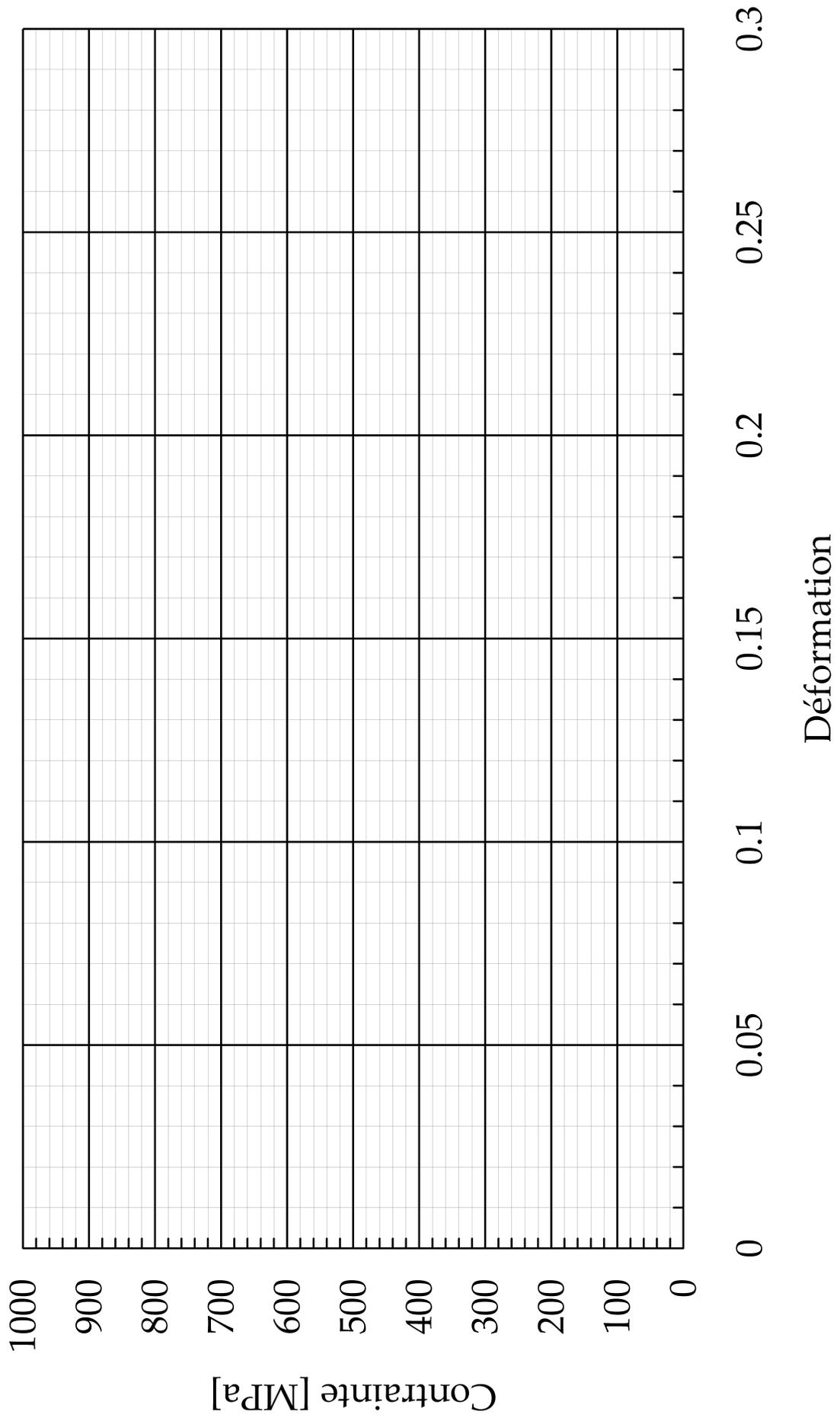
$$f < 0 \quad \text{élasticité}$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df < 0 \quad \text{décharge élastique}$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df = 0 \quad \text{écoulement plastique}$$

On se donne une loi d'évolution linéaire pour X : $dX = C.d\epsilon_p$

- Sur la base des essais expérimentaux choisir des valeurs de R_e et C qui permettent de décrire raisonnablement les résultats expérimentaux jusqu'au point 7.
- Avec le modèle, on simule le chargement suivant : ($t=0, \sigma=0$), ($t=1s, \sigma=R_e$), ($t=1.2s, \sigma=1.2R_e$), ($t=3s, \sigma=0$), ($t=4s, \sigma=-R_e$). Calculer la déformation plastique en chaque point.



6 RUPTURE FRAGILE, RUPTURE DUCTILE

6.1 Introduction

En dehors des sollicitations thermomécaniques « normales », que peut subir une structure ou un composant, il peut aussi survenir des sollicitations exceptionnelles pouvant conduire à la rupture brutale de la pièce. L'étude de la rupture et l'optimisation des matériaux pour ces sollicitations exceptionnelles permet de limiter les conséquences d'un accident.

Parmi les dimensionnements « classiques » à la rupture que pratiquent les bureaux d'étude, on peut citer par exemple, le crash automobile ou la résistance de structures du génie civil aux tremblements de terre ou à l'impact. Ces dimensionnements peuvent avoir plusieurs objectifs. Dans le cas du crash automobile, par exemple, on cherche à absorber la plus grande part possible de l'énergie du choc par la déformation et la rupture du véhicule afin de protéger les passagers. On peut aussi vouloir contrôler la taille des fragments éjectés lors de la rupture d'une pièce tournante (ex. pneumatiques du Concorde), enfin on peut chercher à garantir qu'un bâtiment ne s'écroule pas lors d'un tremblement de terre, même si l'on accepte qu'il soit fortement endommagé.

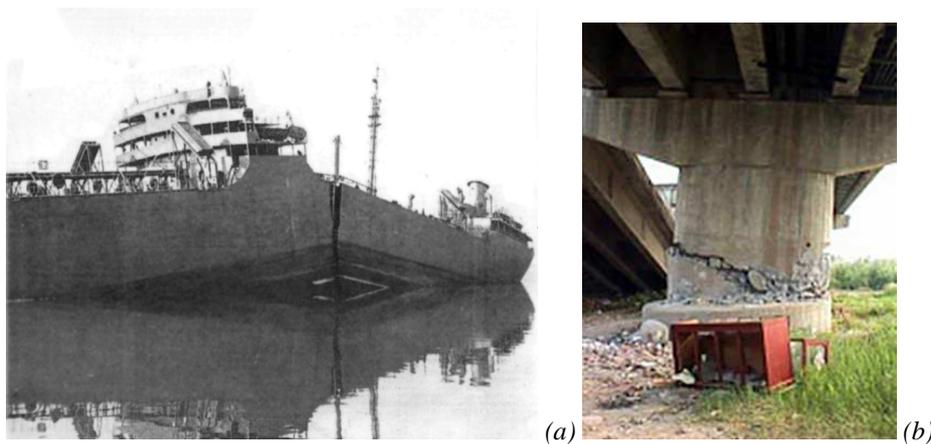


Figure 43 : Rupture fragile d'un liberty-ship (seconde guerre mondiale) au cours d'un hiver rigoureux, (b) rupture d'un autopont lors d'un tremblement de terre.

Pour cela, il faut d'une part comprendre l'origine physique de l'endommagement des matériaux, afin de pouvoir les optimiser pour une application donnée, et d'autre part savoir modéliser la rupture afin de dimensionner les structures. Les modèles de rupture pourront être assez différents selon le type de matériau et selon les vitesses de sollicitation.

Les ruptures brutales peuvent en effet être soit de type ductile, soit de type fragile. On parlera de rupture **fragile** lorsque l'énergie requise par les mécanismes d'endommagement des matériaux est **faible**, on parlera de rupture **ductile** lorsque cette énergie est **élevée**.

Lorsque l'**endommagement** du matériau est très **localisé** (propagation d'une fissure unique dans la matière, par exemple) la rupture présente généralement un caractère **fragile**.

En revanche lorsque l'**endommagement** est **diffus** (rupture par naissance et coalescence de multiples défauts) la rupture présente alors plutôt un caractère **ductile**.

Les céramiques et les verres sont fragiles, mais certaines céramiques peuvent néanmoins absorber une énergie significative lors de leur rupture lorsque de nombreuses fissures se développent simultanément. On parle alors de comportement quasi-fragile. Les métaux sont généralement ductiles mais les aciers présentent pourtant une transition ductile-fragile lorsqu'on abaisse la température et deviennent fragiles à froid. C'est par cette transition que l'on explique la rupture de plusieurs liberty-ship

au cours de la seconde guerre mondiale lors des mois rigoureux d'hiver ou les conséquences dramatiques de l'impact d'un iceberg sur la coque du Titanic.

Ainsi pour un même matériau plusieurs types de comportement à la rupture peuvent être rencontrés, selon la température, la teneur en défauts, la taille des défauts etc...

6.2 Mécanismes d'endommagement des matériaux

6.2.1 Endommagement localisé

◇ Cas des métaux

Lorsque la rupture d'un métal est fragile, elle s'initie généralement sur un unique défaut à partir duquel se propage une fissure principale par clivage (transgranulaire) jusqu'à la rupture de la pièce. Le clivage consiste à séparer les plans atomiques du cristal. Il se produit systématiquement selon les plans denses du cristal qui sont aussi ses plans de plus grande équidistance c'est-à-dire entre lesquels la cohésion de la matière est la plus faible. On observe alors des facettes transgranulaires sur la surface de rupture.

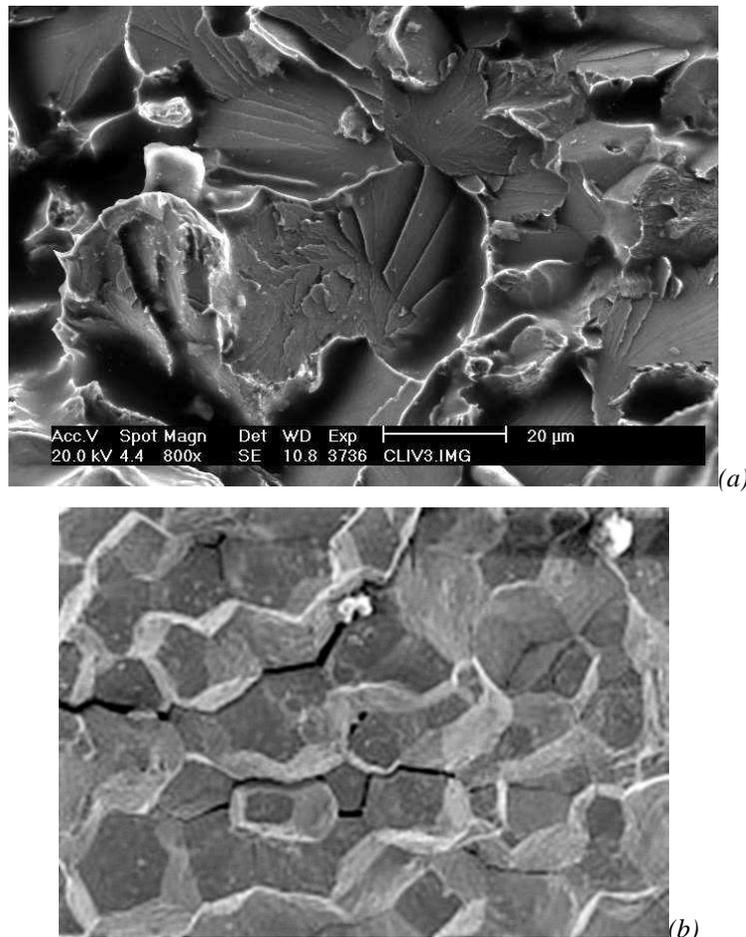


Figure 44 : (a) surface de rupture d'un acier par clivage.(b) surface de rupture intergranulaire fragile d'un acier.

Parfois la fissuration peut aussi être intergranulaire si le matériau a été fragilisé au niveau des joints de grains (corrosion, fragilisation par la diffusion de métaux liquides...).

En général le plan moyen de la rupture est normal à la direction de la plus grande contrainte principale de traction et lors d'une rupture fragile, le comportement macroscopique du métal reste élastique.

◇ Cas des verres

Dans le cas des verres, qui sont amorphes, la rupture fragile se produit le plus souvent depuis un défaut superficiel (ex. rayure, petit impact) et se propage perpendiculairement à la direction de la plus grande contrainte principale positive. La surface de rupture fait apparaître trois zones, une zone miroir autour du site d'amorçage de la fissure, puis une zone de transition dans laquelle peuvent exister des fissures secondaires et enfin une zone finale dont la surface est moins plane.

Ces transitions proviennent du fait que la vitesse de la fissure augmente au cours de la rupture brutale, lorsque la vitesse de propagation commence à s'approcher de la vitesse de propagation des ondes mécaniques (vitesse du son dans le verre) des phénomènes dynamiques se produisent qui modifient la propagation de la fissure.

Mais pour l'essentiel, la rupture fragile des verres consiste en un amorçage sur un défaut superficiel suivi de la propagation d'une fissure principale jusqu'à la rupture.

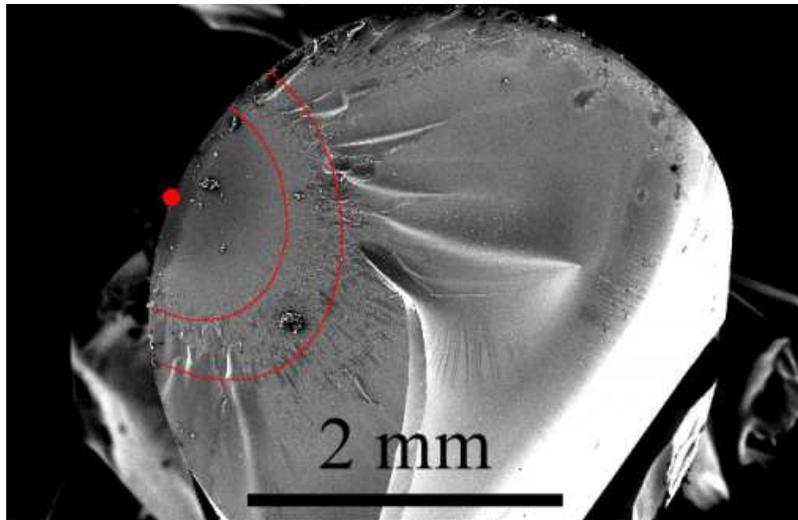


Figure 45 : surface de rupture d'un barreau de verre.

◇ Cas des céramiques

Le cas des céramiques est assez différent des métaux fragiles et des verres. La plupart du temps les céramiques sont très hétérogènes et contiennent de nombreuses microfissures entre les divers constituants avant même leur mise en service.

Aussi, lorsque le matériau est sollicité en traction, de nombreuses fissures sont sollicitées simultanément, l'endommagement est alors plus diffus. La céramique (porcelaine, béton etc...) se fragmente plutôt que de présenter des ruptures franches. En outre les fissures peuvent se développer dans des plans d'orientations diverses lorsque la sollicitation est multiaxiale et pas seulement dans le plan normal à la direction de contrainte principale positive maximale.

Ainsi une céramique qui contient de nombreuses micro-fissures **a priori** pourra présenter un comportement moins fragile qu'une céramique très dense qui contient extrêmement peu de défauts initiaux.

On constate alors une tendance (paradoxale à première vue, mais qui s'explique aisément) qui fait qu'un matériau contenant un grand nombre de défauts initiaux peu résister bien mieux à la rupture qu'un matériau quasi-parfait. Ceci s'explique aisément par le fait que créer de nouvelles surfaces libres requiert une certaine énergie par unité de surface. Et rompre la pièce requiert de créer une surface fissurée minimale (l'aire fissurée). Mais les défauts initiaux, eux, sont distribués en volume ! La quantité de surface créée dans le volume de la pièce lorsque de nombreux défauts sont activés simultanément peut être bien plus grande que la surface minimale requise pour traverser la pièce de part en part.

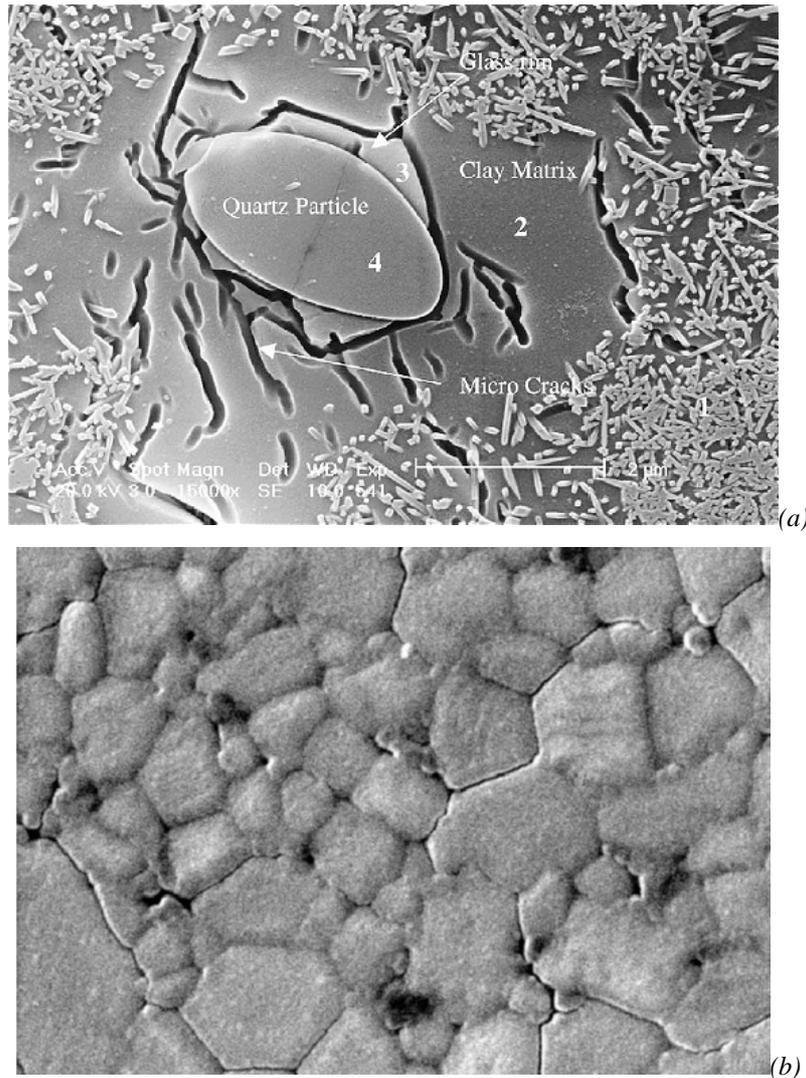


Figure 46 : (a) micrographie (R. Islam, R. Chan) d'une porcelaine industrielle (isolant électrique et thermique pour l'électronique). La porcelaine contient des particules de quartz et des aiguilles de mullite dans une matrice d'argile. La porcelaine est micro-fissurée autour des particules de Quartz du fait de différences de coefficients de dilatation thermique entre les deux phases. (b) céramique composites (alumine carbure de silicium) (Al_2O_3 -SiC) réalisés par frittage à chaud, microfissuration intergranulaire (A. Bellosi).

6.2.2 Endommagement diffus

◇ Cas des métaux

La rupture ductile dans le cas des métaux provient d'un mécanisme d'endommagement très différent de la rupture fragile. En premier lieu, c'est un mécanisme qui se produit lorsque le métal présente une déformation plastique macroscopique. En outre, c'est un mécanisme d'endommagement diffus. De nombreuses cavités se développent sur des défauts, généralement des inclusions mais aussi des précipités ou bien aux joints de grains ou encore éventuellement sur des intersections de lignes de glissement intenses. Par exemple, sur la figure ci-dessous (a), on peut voir que lors d'un essai de traction réalisé sur une éprouvette extraite de la coque du Titanic, la matrice s'est décollée d'une très grosse inclusion de Sulfure de Manganèse.

Ensuite, du fait de la déformation plastique, ces cavités grossissent puis coalescent. Les cavités formées par coalescence ont alors un volume beaucoup plus grand. Elles même grossissent sous l'effet de la déformation plastique puis coalescent à nouveau. Ainsi le même mécanisme de coalescence se produit plusieurs fois à partir de cavités de tailles différentes, ce qui donne aux surfaces de ruptures ductiles des métaux un aspect fractal très caractéristique.

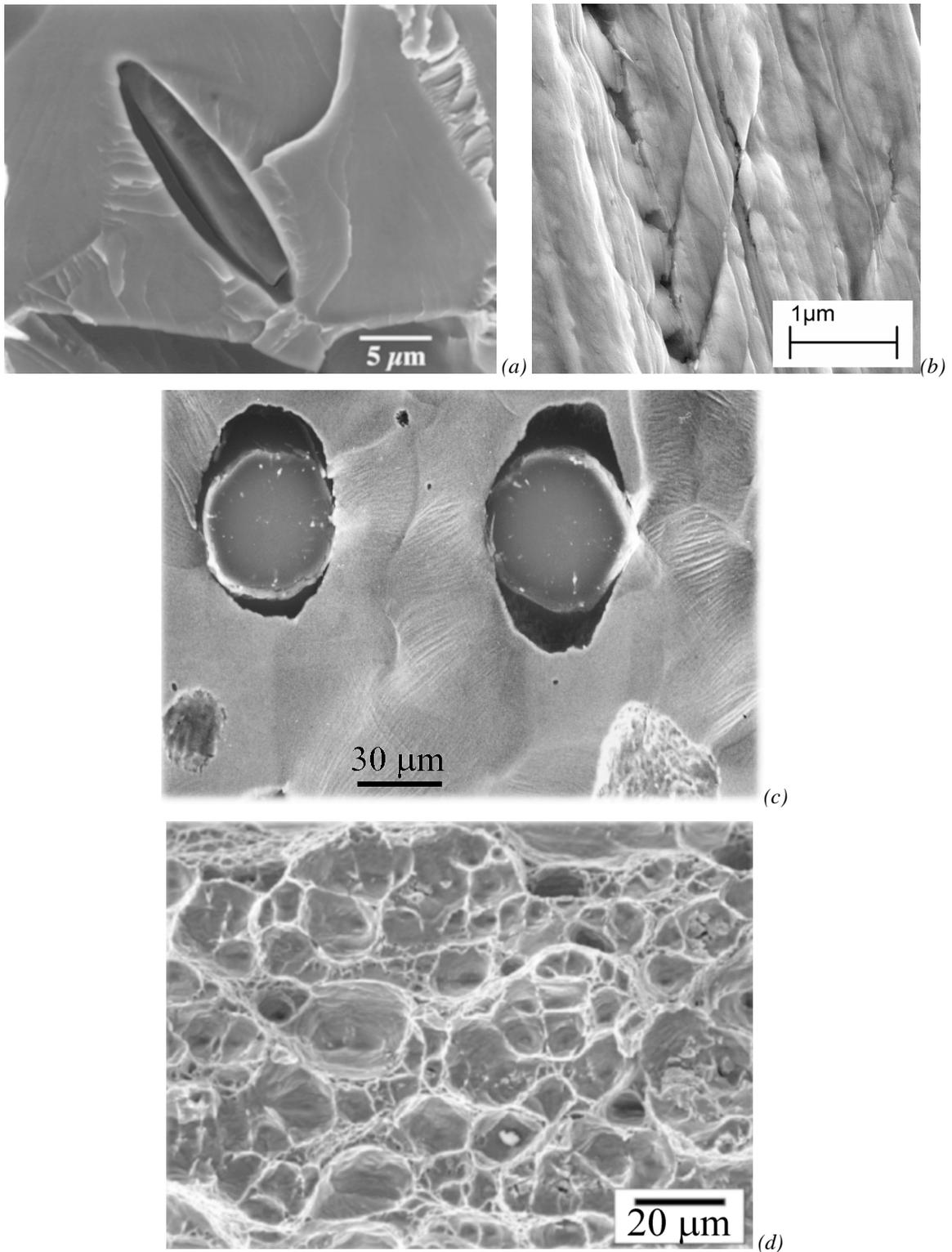


Figure 47 : (a) détail d'un début d'endommagement sur une très grosse inclusion de sulfure de manganèse dans l'acier du Titanic. (b) cavités à l'intersection de bandes de glissement intenses et d'un joint de grain sur un fil tréfilé de renfort de pneumatiques (A. Phelippeau) (c) Croissance de cavités (coupe métallographique) autour de nodules de graphite dans une fonte ductile à graphite sphéroïdal (M. Dong) (d) faciès de rupture typique d'une rupture ductile, des cavités s'amorcent sur des inclusions, croissent autour de l'inclusion puis coalescent (J. Besson)

◇ Cas des polymères thermoplastiques

Dans les polymères thermoplastiques, on assiste aussi souvent à l'apparition d'un endommagement diffus ou « crazing ». Une « craze » est une microfissure entre les faces de laquelle existent de nombreux ponts constitués de fibrilles de polymère. Lors de la déformation du polymère, certaines zones autour de défauts ou de particules de renfort sont des concentrations de contraintes. La déformation dans ces zones conduit à l'arrangement des chaînes macromoléculaires sous forme de fibrilles, progressivement une « craze » se forme.

Par la suite le mécanisme qui conduit à la rupture ressemble à celui de la rupture ductile des métaux, les « craze » coalescent, puis se développent de nouveau, jusqu'à la rupture.

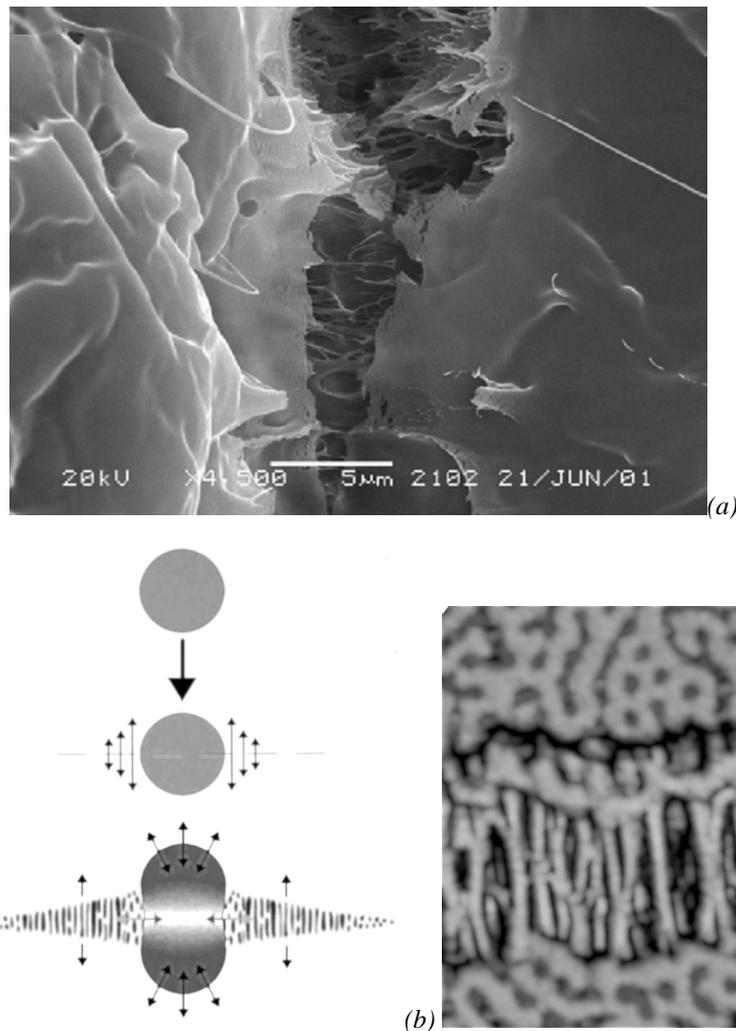


Figure 48 : (a) détail d'un « craze » autour de la rupture d'un polymère thermoplastique. (b) mécanisme de formation de « craze » autour d'inclusion d'élastomère dans un composite matrice de polymère thermoplastique-renfort par des particules d'élastomère. (c) détail, topographie de surface dans la zone de « crazing » avant rupture par microscopie à force atomique.

6.3 Les essais d'endommagement-rupture

Ces essais sont réalisés sur des éprouvettes sans défauts macroscopique. Au cours de l'essai des défauts sont initiés dans le matériau (phase d'**endommagement**) puis coalescent et forment une fissure principale qui se propage jusqu'à la **rupture** de l'éprouvette ou bien se propagent directement jusqu'à la rupture de la pièce. Dans ce type d'essai, l'existence ou non, avant l'essai, de défauts microscopiques dans le matériau, modifie significativement la contrainte à rupture mesurée. Aussi, en général les

contraintes ou les déformations à rupture mesurées au cours d'essai d'endommagement sont elles fortement **dispersées**. Ces essais seront donc généralement associés à une approche probabiliste permettant de déterminer une contrainte à rupture avec un certain niveau de probabilité.

Ces essais sont à distinguer des **essais de fissuration**, qui seront abordés dans le paragraphe suivant. Pour les essais de fissuration, des fissures de dimension et de forme contrôlées, ont été créées artificiellement dans l'éprouvette avant le début de l'essai. On élimine donc la phase d'endommagement lors de la réalisation de l'essai puisque la fissure principale est déjà présente au début de l'essai. Au cours de l'essai, on détermine le seuil à partir duquel la fissure principale se propage et conduit à la rupture de l'éprouvette. En général les résultats expérimentaux sont alors faiblement dispersés.

◇ Essai de traction

L'essai le plus courant est l'essai de traction jusqu'à la rupture. Lors d'un essai de traction, on peut observer deux comportements distincts sur les matériaux métalliques, un comportement fragile, ou un comportement ductile.

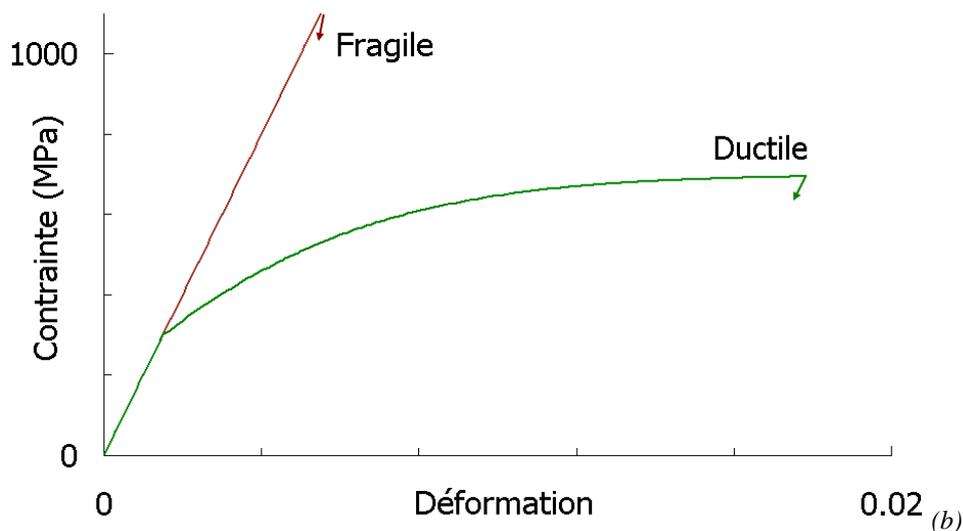


Figure 49 : (a) essai de traction, striction et rupture, (b) illustration, comportements ductile et fragile.

Lorsque la rupture est fragile, pour un métal, son comportement macroscopique reste élastique jusqu'à la rupture qui survient de manière brutale. En revanche lorsque la rupture est ductile, le matériau présente de la déformation plastique, de l'endommagement dans la zone de striction puis une rupture au niveau de la striction. L'énergie absorbée par la rupture est essentiellement due à la déformation plastique répartie puis localisée au niveau de la striction et assez peu à la création de défauts dans la zone endommagée. On peut calculer l'énergie absorbée comme l'aire sous la courbe contrainte-déformation plastique.

◇ Essai brésilien

Les essais de traction classiques sont assez difficiles à mettre en oeuvre sur des céramiques ou des verres. On préfère souvent employer des éprouvettes cylindriques simples, sans têtes, et réaliser un essai

de compression diamétrale appelé aussi essai Brésilien. Cet essai est classique pour les bétons et les mortiers, on peut aussi l'employer pour les bois et certains matériaux composites.

Au cours de l'essai, les contraintes sont compressives partout selon l'axe x_2 de compression du cylindre mais en traction selon l'axe orthogonal x_1 . La contrainte de traction est maximale au niveau de la section centrale ($x_1=0$) et constante sur toute cette section sauf sous les appuis. En adoptant la notation tensorielle et les notations de la figure ci-dessous, le champ de contrainte dans le cylindre s'écrit comme suit, en fonction de la charge par unité d'épaisseur P :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{-2P}{\pi} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} \vec{e}_{r_1} \otimes \vec{e}_{r_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \vec{e}_{r_2} \otimes \vec{e}_{r_2} - \frac{1}{D} \underline{\underline{I}} \right]$$

Avec $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad \text{où} \quad (\vec{b} \cdot \vec{c})$ est le produit scalaire.

$$\text{Ainsi sur l'axe } x_1=0 : \vec{e}_{r_1} = -\vec{x}_2, \vec{e}_{r_2} = \vec{x}_2, \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{x_1=0} \vec{x}_1 = \frac{2P}{\pi D} \vec{x}_1$$

Aussi peut-on déterminer la contrainte à rupture du matériau en traction en fonction de l'effort de compression appliqué sur le cylindre au moment de la rupture. Lorsque la rupture s'est initiée au niveau des appuis, le résultat n'est pas valable.

Pour un matériau hétérogène comme le béton, les ruptures s'amorcent souvent sur des hétérogénéités (granulats, porosité) au niveau de la section centrale. Aussi obtient-on la plupart du temps des résultats valides. En revanche si le matériau est très homogène (ex. un verre) la rupture s'initie presque systématiquement sous les appuis.



(a)

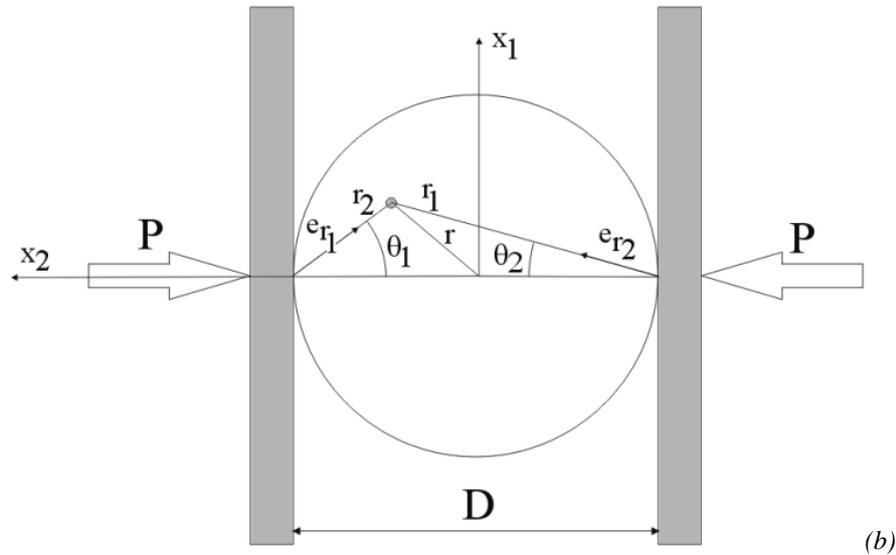


Figure 50 : (a) cliché pris lors d'un essai brésilien sur béton, (b) système de coordonnées pour cet essai.

◇ Essai de flexion trois points

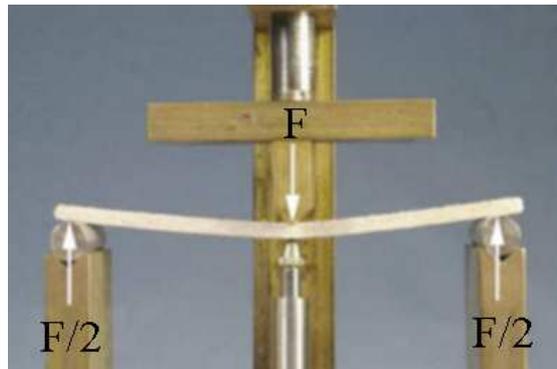


Figure 51 : Essai de flexion 3 points.

Pour des matériaux très homogènes tels que des verres ou des céramiques industrielles, l'essai brésilien n'est pas toujours approprié. On peut alors réaliser des essais de flexion trois ou quatre points. L'inconvénient de ces essais est que la contrainte varie dans la section où se propage la fissure. En effet, dans le cas d'un essai de flexion 3 points par exemple, la contrainte est maximale et compressive au niveau de la surface située sous l'appui ($\sigma = -\sigma_{max}$) puis augmente linéairement jusqu'à atteindre sa valeur maximale sur l'autre face ($\sigma = \sigma_{max}$). Il faut donc s'assurer que la fissure s'est bien initiée au niveau de la surface pour relier l'effort F appliqué sur l'éprouvette au moment de la rupture à la contrainte à rupture du matériau en traction.

Ainsi au niveau de la section centrale de la poutre : $\sigma_{xx} = \frac{3.F.L}{2eh^2} \left(\frac{y}{h} \right)$, où x est l'axe de la poutre, F , l'effort appliqué sur l'appui central, e , l'épaisseur de la poutre et h , sa hauteur.

6.4 Éléments de modélisation de la phase d'endommagement-rupture

On a vu que selon les cas, l'endommagement conduisant à la rupture était soit diffus (avec ou sans déformation plastique) soit très localisé. Ces deux catégories sont associées à des modélisations très différentes.

Lorsque l'endommagement est localisé, la rupture s'initie généralement sur un défaut, plus sévère que les autres. Les contraintes à rupture sont alors distribuées statistiquement selon la nocivité des défauts contenus par les éprouvettes. Il faut alors traiter la rupture à travers une approche statistique.

Lorsque l'endommagement est diffus, la rupture se produit par coalescence de micro-fissures ou de cavités, que le comportement du matériau soit élastoplastique (cas des métaux) ou reste élastique (cas des céramiques qui se fragmentent). Dans ce cas, les contraintes à rupture sont moins dispersées car c'est l'interaction de l'ensemble des défauts qui conduit à la rupture. D'autre part, l'endommagement est progressif et diffus, ce qui permet d'utiliser une théorie d'endommagement fondée sur les concepts de la mécanique des milieux continus.

Enfin dans de nombreux cas, un même matériau peut présenter une transition entre un comportement ductile ou fragile en fonction de la vitesse de sollicitation ou en fonction de la température.

6.4.1 Endommagement localisé, Théorie du maillon faible

◇ Introduction

Pour qu'une fissure conduise à la rupture, il faut d'une part créer cette fissure à partir d'un défaut puis que la fissure se propage. A chacun de ces deux mécanismes peut être associé un seuil de déclenchement.

Il existe une contrainte seuil pour la nucléation d'une fissure sur un défaut (fragmentation d'une inclusion, décohésion de l'interface inclusion matrice, micro-plasticité conduisant à la formation d'une cavité sur un joint de grain etc...).

Il existe également un seuil (appelé ténacité et noté K_{IC}) à partir duquel une fissure se propage de manière instable jusqu'à la rupture de la pièce.

S'il est plus difficile de créer une fissure que de la propager (si K_{IC} est très faible), la rupture se produira à partir du premier défaut sur lequel est apparue une fissure. Ce défaut pourra être considéré comme le **maillon faible du matériau**. La rupture sera plutôt de nature fragile puisque une seule fissure aura permis la rupture de la pièce.

En revanche, s'il est plus difficile de propager une fissure que d'en créer une (si K_{IC} est grand) alors un grand nombre de défauts pourront être créés avant que la rupture ne se produise. Si le comportement du matériau est élasto-plastique, une fissure créée sur une inclusion pourra se déformer et former une cavité plus ou moins sphérique, tandis que d'autres cavités se développent ailleurs dans le matériau sur d'autres défauts. Dans ce cas, même si l'on rompt une zone de matière, la pièce survit et la théorie du maillon faible ne s'applique donc pas.

La compétition entre le seuil de nucléation et le seuil de propagation instable de la fissure permet d'expliquer les transitions d'un endommagement diffus vers un endommagement localisé lorsqu'on augmente la vitesse de déformation ou lorsqu'on abaisse la température.

◇ Théorie du maillon faible : Statistique de Weibull

Si la ténacité du matériau est faible, ou si le matériau contient des défauts de grande dimension, alors le seuil de nucléation d'une fissure pourra être supérieur au seuil de propagation instable de la fissure nouvellement créée. Dans ce cas la théorie du maillon faible s'applique. La première micro-fissure conduit à la rupture de toute la pièce.

Alors la rupture d'éprouvettes de volume donné est statistiquement distribuée du fait d'une probabilité de présence de défauts dans ce volume.

Weibull a proposé une expression de la probabilité de rupture d'un élément de volume sous une contrainte σ qui a la forme suivante :

$$P_R(\sigma) = 1 - \text{Exp} \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

La fonction choisie par Weibull donne une probabilité de rupture égale à zéro quant la contrainte est faible et une probabilité de rupture égale à 1 lorsque celle-ci est élevée. Lorsque $\sigma = \sigma_o$, la probabilité

de rupture est égale à $P_R(\sigma_o) = 1 - 1/e \approx 0.63$. Le coefficient m règle, quant à lui, la largeur de la distribution.

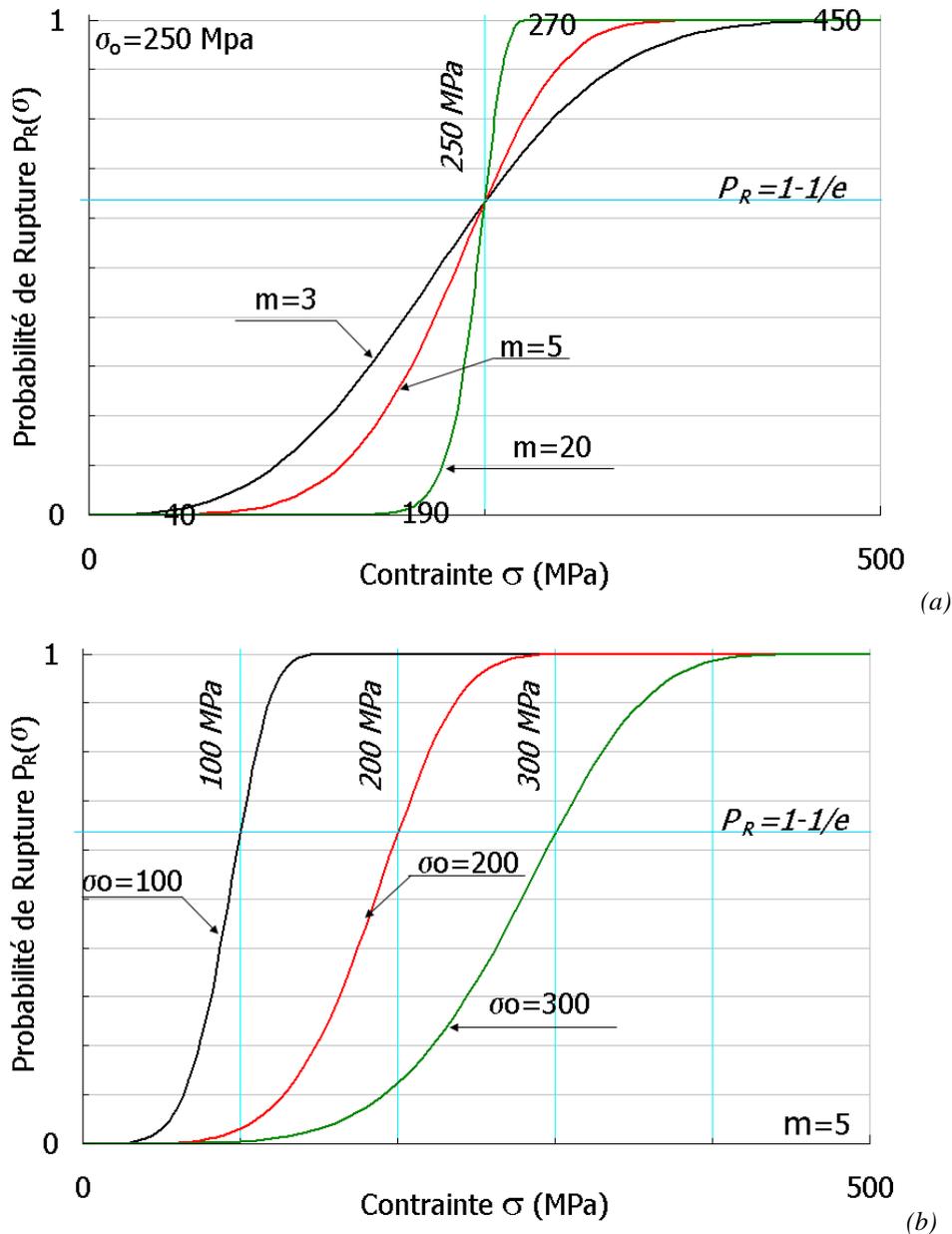


Figure 52 : Allure de la fonction $P_R(\sigma)$ choisie par Weibull pour représenter la probabilité de rupture d'un élément de volume en fonction de la contrainte subie par ce volume. (a) Illustration du rôle de m , $\sigma_o=250$ MPa, si $m=20$, toutes les pièces cassent entre $\sigma=190$ MPa et $\sigma=270$ MPa, la dispersion est faible, si $m=3$, les pièces cassent entre $\sigma=40$ MPa et $\sigma=450$ MPa, la dispersion est élevée. (b) le coefficient σ_o permet de régler la contrainte aux alentours de laquelle se produisent les ruptures.

◇ Identification des paramètres m et σ_o .

Pour identifier les paramètres m et σ_o de la loi de Weibull, il faut dans un premier temps réaliser de nombreux essais de rupture. On dispose alors des probabilités de rupture pour chaque niveau de contrainte atteint dans les essais. Tracer ces résultats dans un diagramme de Weibull permet d'une part de vérifier que le modèle de Weibull s'applique bien à la rupture du matériau étudié et d'autre part d'identifier les paramètres m et σ_o .

En effet compte tenu de la forme de la fonction de Weibull, si on la trace dans un diagramme dit de Weibull, on doit obtenir une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine $m \cdot \ln(\sigma_o)$:

$$P_R(\sigma) = 1 - \text{Exp}\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^m\right] \Rightarrow \text{Ln}[-\text{Ln}[1 - P_R(\sigma)]] = m \text{Ln}[\sigma] - m \text{Ln}[\sigma_o]$$

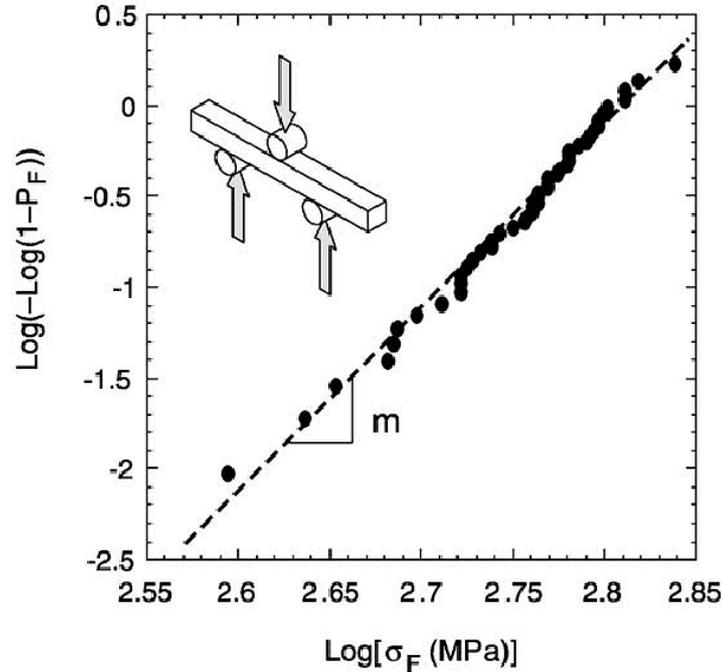
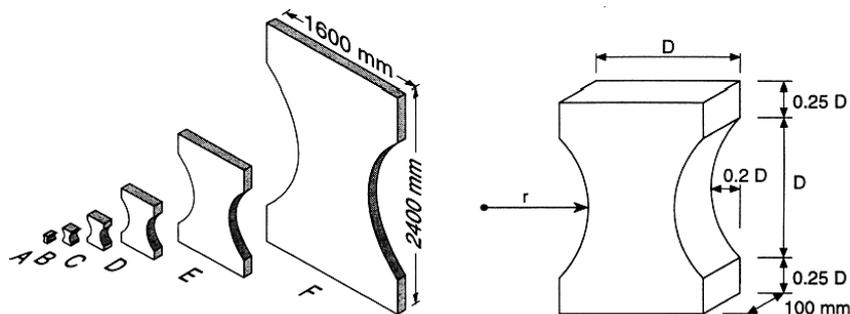


Figure 53 : Exemple de tracé de résultats expérimentaux dans un diagramme de Weibull. On note que les points s'alignent bien sur une droite dont la pente permet de déterminer le coefficient m . (F. Hild)

◇ Effet d'échelle associé à la théorie du maillon faible.

En réalité beaucoup de fonctions mathématiques permettent de représenter une probabilité de rupture, passant de 0 pour de faibles contraintes à 1 pour de fortes contraintes et présentant une transition autour d'un niveau de contrainte intermédiaire. L'intérêt de la fonction proposée par Weibull est qu'elle permet facilement de traiter les effets d'échelle observés dans les matériaux fragiles.



Type	A	B	C	D	E	F
D (mm)	50	100	200	400	800	1600
r (mm)	36.25	72.5	145	290	580	1160

(a)

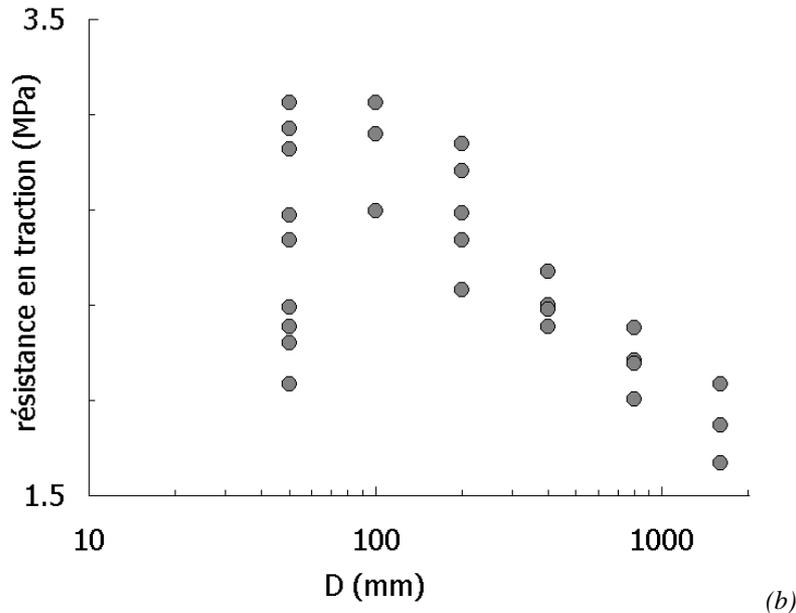


Figure 54 : Illustration de l'effet d'échelle sur un béton. (a) Eprouvettes utilisées, (b) contraintes à rupture mesurée sur les éprouvettes en fonction de leur taille. Plus l'éprouvette est petite, plus la dispersion des résultats est grande mais plus la contrainte moyenne à rupture est élevée (Van Vliet).

On observe généralement que plus le volume de matière testé est petit plus les contraintes à rupture sont dispersées et plus la contrainte moyenne de rupture est grande. En effet plus le volume de matière est grand plus la probabilité de rencontrer un défaut nocif est grande.

Cet effet peut aisément être traduit à l'aide de la fonction de Weibull.

En effet imaginons que les paramètres m et σ_o aient été identifiés sur une éprouvette de volume V_o . Si l'on sollicite maintenant un volume de matière $V=N.V_o$ sous une contrainte homogène σ , la probabilité de non-rupture du volume V sera égale au produit des probabilités de chacun des sous-volumes V_o . En effet si la théorie du maillon faible s'applique, il suffit qu'un élément casse pour que l'ensemble casse.

$$\text{Soit : } P_R(\sigma)^V = 1 - P_V(\sigma)^V = 1 - \prod_{i=1}^N P_V(\sigma)^{V_o} = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P_R(\sigma)^{V_o})$$

En remplaçant il vient :

$$P_R(\sigma)^V = 1 - \prod_{i=1}^N \text{Exp} \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right] = 1 - \text{Exp} \left[- N \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

L'expression de la probabilité de rupture d'un volume V sollicité sous une contrainte homogène σ est donc finalement la suivante :

$$P_R(\sigma)^V = 1 - \text{Exp} \left[- \frac{V}{V_o} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

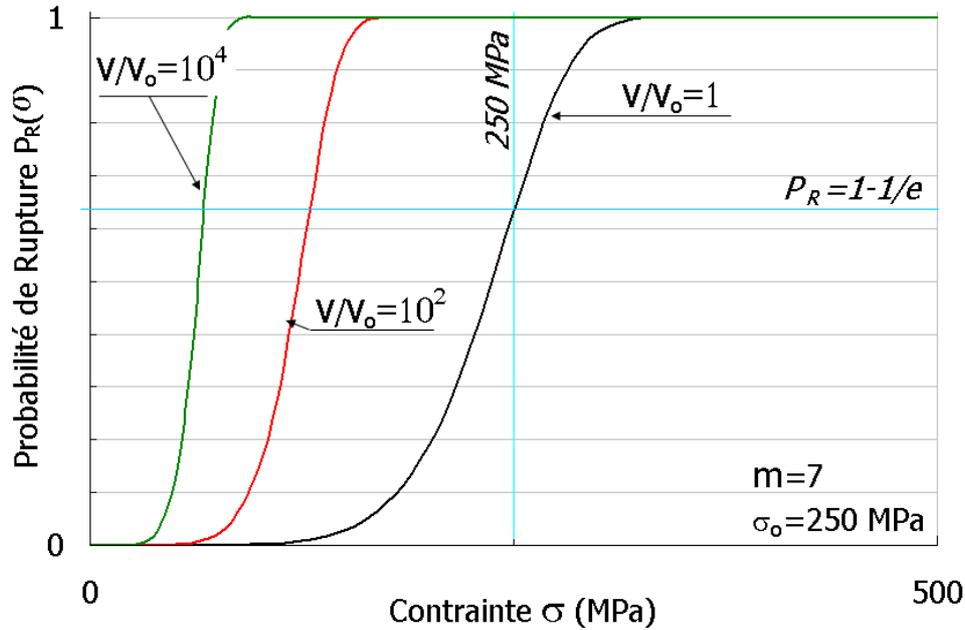


Figure 55 : Allure de la fonction $P_R(\sigma)^V$ avec effet d'échelle de Weibull, $m=5$, $\sigma_o=250$ MPa, on examine le rôle du volume de matière sollicité V/V_o .

◇ Effet d'un champ de contrainte non-homogène

Si maintenant le champ de contrainte n'est pas homogène dans la structure, il suffit de généraliser le raisonnement précédent. Supposons que le volume V soit constitué de sous volumes V_i soumis chacun à une contrainte σ_i , i variant de 1 à N . Alors la probabilité de rupture se calcule comme suit :

$$P_R^V = 1 - \prod_{i=1}^N \text{Exp} \left[-\frac{V_i}{V_o} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right)^m \right] = 1 - \text{Exp} \left[-\sum_{i=1}^N \frac{V_i}{V_o} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

En faisant maintenant tendre les sous-volumes vers zéro il vient :

$$P_R^V = 1 - \text{Exp} \left[-\int_V \frac{dV}{V_o} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

Où σ est la contrainte principale maximale de traction en un point. Si une structure (éprouvette de flexion, pièce complexe...) reste élastique, il est en général possible d'exprimer la contrainte en un point en fonction de la contrainte maximale dans la pièce. On introduit alors la notion de volume effectif pour une structure :

$$V_{eff} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_{max}} \right)^m dV$$

Alors la probabilité de rupture s'écrit :

$$P_R^V = 1 - \text{Exp} \left[-\frac{V_{eff}}{V_o} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

Prenons par exemple une poutre de longueur L à section rectangulaire de hauteur h et de largeur b , soumise à un moment de flexion M . Alors σ_{max} , la contrainte maximale dans la poutre, et σ , la contrainte en un point distant de y de l'axe de la poutre, se calculent comme suit :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I} \quad \sigma = \frac{My}{2I} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

La contrainte n'est positive que dans la partie supérieure de la poutre, alors :

$$V_{\text{eff}} = bL \int_{y=0}^{y=h/2} \left(\frac{2y}{h} \right)^m dy = \frac{b \cdot h \cdot L}{2m+2}$$

Dans une éprouvette de traction simple à section rectangulaire $b \cdot h$ et de hauteur L sollicitée en traction on trouve en revanche

$$V_{\text{eff}} = bhL$$

Aussi le changement d'échelle n'a-t-il pas le même effet sur la distribution des contraintes de rupture en traction et en flexion par exemple.

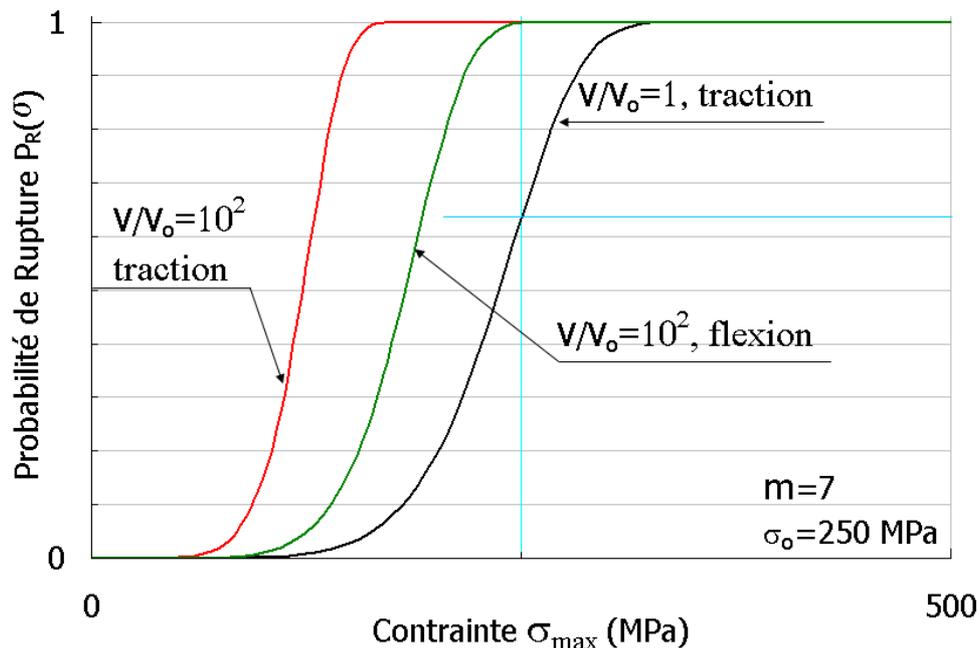


Figure 56 : Effet de la géométrie de l'éprouvette et du chargement sur la distribution des contraintes à rupture (exemple comparaison de la flexion et de la traction simple).

6.4.2 Endommagement diffus, Théorie de Kachanov

La théorie du maillon faible s'applique bien lorsqu'un unique défaut suffit à provoquer la rupture de la pièce. Mais lorsque la rupture se produit par croissance de cavités lors de la rupture ductile d'un métal ou par la coalescence de nombreuses petites fissures lors de la rupture d'une céramique, les défauts doivent interagir pour pouvoir conduire à la rupture.

◇ Théorie de l'endommagement de Kachanov-Rabotnov, cas uniaxial

Lorsque l'endommagement résulte du comportement collectif de défauts, croissance et coalescence avec interactions entre défauts, on pourra alors utiliser la mécanique de l'endommagement, initiée par les travaux de Kachanov et Rabotnov et développée par Lemaître et Chaboche en France.

Lorsque le matériau est endommagé, une section d'aire S à travers ce matériau, contient une aire S^* de vide. Ainsi l'effort appliqué F , se distribue sur une aire $S_{\text{eff}}=S-S^*$ de matière et non pas sur l'aire totale S . Ceci permet de définir une contrainte effective σ_{eff} . En chargement uniaxial il vient :

$$\sigma_{eff} = \frac{F}{S_{eff}} = \frac{F}{S} \frac{S}{S_{eff}} = \sigma \frac{S}{S - S^*} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

Pour effectuer des calculs sur le milieu endommagé, on peut alors utiliser les concepts de la mécanique des milieux continus, en ajoutant à l'ensemble des variables la variable d'endommagement D . On peut ainsi écrire d'une part la loi de comportement, qui lie contrainte et déformations, en uniaxial :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_D} = \frac{\sigma_{eff}}{E} \quad \text{avec} \quad E_D = E(1 - D)$$

Et d'autre part la loi d'endommagement qui donne l'évolution de l'indicateur d'endommagement D , cette loi d'évolution dépend bien entendu du matériau et du mécanisme d'endommagement considéré :

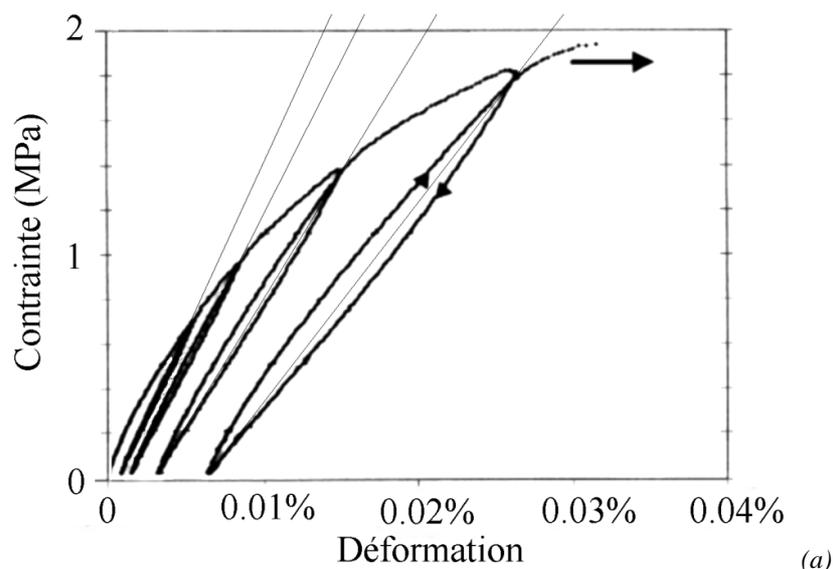
Ainsi pour la rupture ductile, la vitesse de croissance de l'endommagement est liée à la déformation plastique d'une part, puisqu'il faut que le matériau se déforme plastiquement pour que les cavités croissent et à la pression hydrostatique d'autre part puisqu'il faut que le volume des cavités augmente pour que l'endommagement progresse. Il existe de nombreuses lois d'endommagement ductile. La formule suivante, par exemple, a été proposée par J. Lemaître (1987), A et b sont des paramètres à ajuster, E et ν le module d'Young et le coefficient de Poisson :

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{Y}{A} \right)^b \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad \text{avec} \quad Y = \frac{\sigma_{eq}^2 \left(\frac{2(1+\nu)}{3} + \frac{3(1-2\nu)}{\sigma_{eq}^2} p^2 \right)}{2E} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{\text{Tr}\sigma}{3}$$

◇ *Exemple : comportement quasi-fragile du béton*

On distingue clairement la phase d'endommagement diffus de la phase d'endommagement localisé dans un essai réalisé sur un matériau quasi-fragile comme du béton par exemple. Dans la phase d'endommagement localisé (propagation d'une fissure principale), l'effort appliqué sur une éprouvette de traction diminue lorsque le déplacement des mors de la machine augmente. En revanche dans la phase d'endommagement diffus, l'effort reste croissant même si la pente de la courbe contrainte-déformation est décroissante.

Lors de la phase d'endommagement diffus, si l'on effectue des cycles de charge-décharge, on peut observer la chute de module d'élasticité apparent E_D du matériau et en déduire ainsi à travers la théorie de Kachanov l'évolution de l'endommagement avec le niveau de contrainte appliqué.



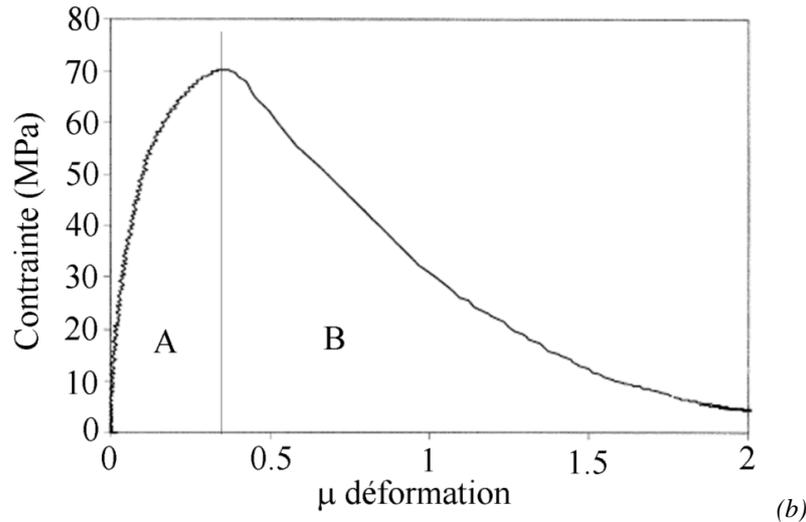


Figure 57 : Exemple d'essai de traction sur un matériau quasi fragile. Ici un béton réfractaire après un essai de feu à 1500°C. (a) La chute de module dans la phase d'endommagement diffus permet de déterminer la loi d'évolution de l'endommagement. (b) lors de l'essai complet, la phase A où la contrainte croît avec la déformation bien que la pente diminue correspond à la phase d'endommagement diffus, la phase B où la contrainte diminue correspond à la phase de propagation d'une fissure principale.

6.5 Les essais de fissuration

6.5.1 Essai Charpy

On peut également caractériser le comportement à la rupture d'une éprouvette contenant un défaut initial. Ce type d'essai permet de s'affranchir plus ou moins de la dispersion caractérisant la phase d'amorçage des défauts. Dans cette catégorie, l'essai le plus ancien (1901) et le plus pratiqué dans le monde est l'essai Charpy, du nom de son inventeur.

L'essai Charpy a pour but de déterminer la résistance aux chocs des matériaux. On mesure ce que l'on appelle leur **résilience**, c'est-à-dire l'énergie consommée pour rompre une éprouvette de référence de section égale à 1cm^2 en utilisant un « mouton-pendule ».

L'éprouvette de référence utilisée est un barreau de longueur 55 mm, à section carrée de dix par dix millimètres et entaillée sur une profondeur de 5 mm. L'entaille peut revêtir diverses formes : en U ou, le plus souvent, en V. Comme il ne s'agit pas d'une fissure parfaite mais d'une entaille, on peut observer une dispersion des résultats liée à la nucléation d'une fissure principale au fond de l'entaille.

L'énergie consommée pour rompre le barreau est mesurée en faisant la différence d'énergie potentielle entre la hauteur de chute du « mouton » et celle à laquelle il remonte après avoir rompu le barreau. Si ce dernier était complètement fragile, le « mouton » remonterait à la même hauteur que celle d'où il a chuté ; s'il était au contraire extrêmement tenace, il ne serait pas rompu et le pendule ne remonterait pas du tout. L'énergie de rupture ainsi déterminée s'appelle la résilience. Plus elle est élevée, plus le matériau est tenace.

Ainsi la résilience, généralement notée K_{CV} se calcule comme suit :
$$K_{CV} \left(J / \text{cm}^2 \right) = \frac{M \cdot g \cdot \Delta h}{1 \text{ cm}^2}$$

Attention : si l'on utilise une éprouvette dont la section est double de celle de référence l'énergie à fournir ne sera pas double, car l'éprouvette est entaillée et il faut tenir compte de l'existence du défaut initial. Or ce défaut n'est pas vraiment une fissure, donc le concept de facteur d'intensité des contraintes n'est pas non plus directement applicable. Cette mesure est donc essentiellement qualitative.

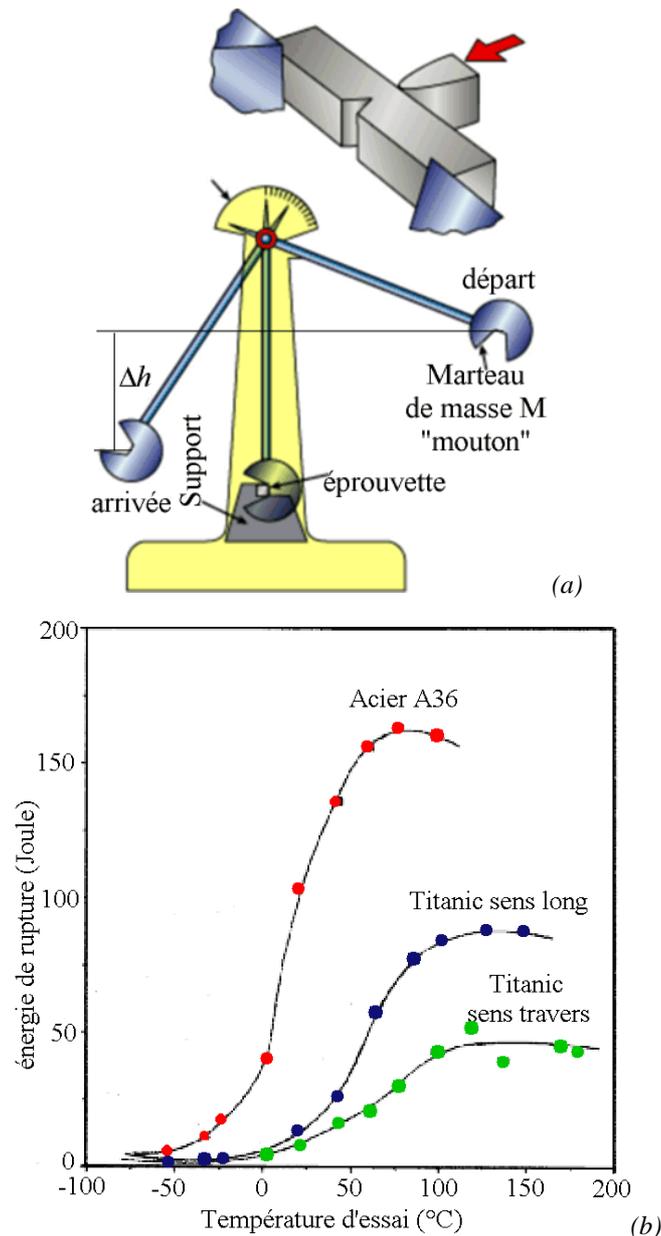


Figure 58 : (a) principe de fonctionnement du « mouton » Charpy. (b) Mesure de la résilience en fonction de la température, sur un acier actuel (A36) de même composition chimique (mais de meilleure qualité) que l'acier employé pour la réalisation de la structure de la coque du Titanic.

La grande simplicité de l'essai en fait, en partie, le succès. Il est susceptible de divers aménagements. Les mesures se font souvent à diverses températures, notamment à basses températures. Cependant, si la simple mesure de la résilience n'est pas compliquée, elle ne procure que des informations qualitatives et ne peut pas être utilisée directement dans un modèle pour dimensionner une structure. En revanche elle permet de classer les matériaux ou d'étudier la dépendance de la résilience à la température par exemple.

Lorsque l'énergie consommée par la rupture est grande, on dira que la rupture est ductile, en revanche lorsque cette énergie est faible on parlera de rupture fragile. Dans les métaux de structure cubique centrée (aciers par ex.) on observe une transition ductile-fragile lorsqu'on abaisse la température. Sur les aciers de bonne qualité, la transition se produit à basse température (-30°C à -50°C) mais lorsque la qualité de l'acier est médiocre cette transition peut être observée autour de la température ambiante.

C'est ce qui explique par exemple les conséquences dramatiques de l'impact d'un iceberg sur la coque du Titanic. L'acier, de qualité médiocre, présentait une transition ductile fragile aux alentours de la température ambiante. Lors du choc le métal s'est rompu de manière fragile, comme du verre.

Attention cependant, dans cet essai, on a ménagé une concentration de contrainte dans l'éprouvette (entaille en V ou en U) mais pas réellement une fissure. Des essais de fissuration ont donc été ultérieurement développés qui permettent de tester réellement les conditions dans lesquelles une fissure se propage ou non.

6.5.2 Eléments de mécanique linéaire de la rupture

◇ Introduction

Des éprouvettes ont été développées dans lesquelles se propagent des fissures de forme et de dimension bien contrôlées. L'intuition indique que la rupture se produira pour un effort plus faible, si la fissure est plus grande et pour un effort plus important si la fissure est plus petite. On peut quantifier cet effet en définissant rigoureusement l'état de sollicitation au voisinage de l'extrémité de la fissure, cet état permettant de déterminer si la fissure se propagera ou non. C'est l'objet de ce que l'on appelle la mécanique de la rupture.

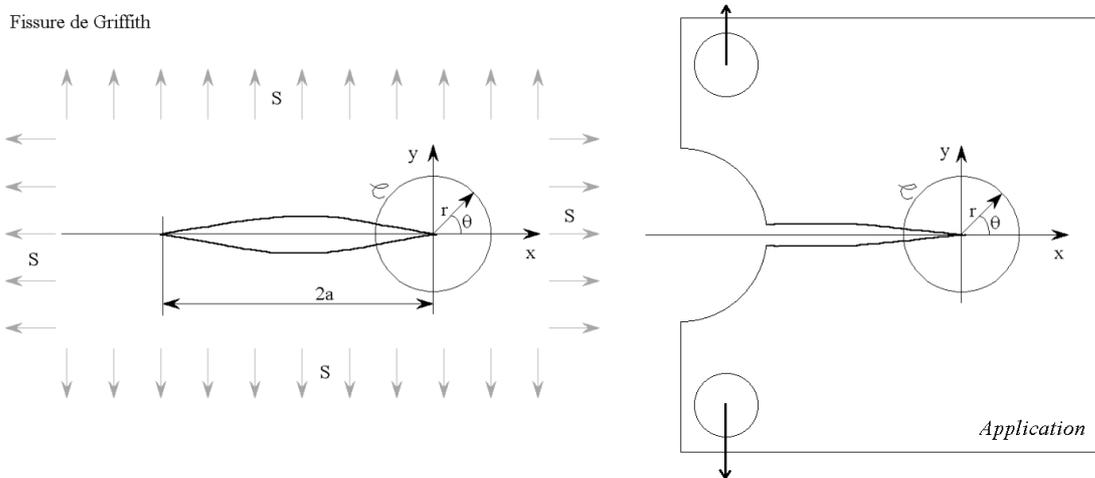


Figure 59 : Fissure de référence de Griffith et système de coordonnées en pointe de fissure. La fissure de Griffith [Griffith, 1921] est une fissure de longueur ($2a$) traversant une plaque infinie soumise à un chargement biaxial pur. À droite, on isole une région à l'extrémité de la fissure est isolée dans la pièce dont on cherche à calculer la résistance.

Lorsqu'on conçoit une structure, on est confronté au fait que des défauts sont susceptibles d'exister en tout point de cette structure. La géométrie du défaut est a priori quelconque. Pour un dimensionnement fondé sur la mécanique de la rupture, seules les configurations les plus sévères sont retenues, c'est à dire des fissures planes, aiguës, placées dans les zones de la structure les plus sollicitées mécaniquement. On cherche donc à établir un critère qui permette de prévoir le risque de rupture sur la base d'une part, du champ de contrainte (σ) calculé pour la structure non-fissurée et d'autre part, d'hypothèses sur la géométrie, l'orientation, la dimension et la position des défauts.

Georges Irwin a établi le premier le concept de mécanique de la rupture en proposant d'isoler une région entourant la pointe de la fissure pour établir les critères de rupture [Irwin, 1957]. Une fissure constitue en effet un concentrateur de contrainte. Les contraintes et les déformations sont maximales dans une région entourant son extrémité. C'est dans cette région, généralement de petite dimension en fatigue, que se produisent les mécanismes physiques conduisant à l'extension de la fissure. Il semble donc suffisant de se limiter à comparer les sollicitations dans cette région seulement, pour prévoir le risque de rupture d'une structure à partir de caractérisations sur éprouvettes.

L'étendue de cette région dépend de la longueur de la fissure et naturellement des contraintes appliquées. Pourtant, en élasticité linéaire, la *distribution* des contraintes autour de l'extrémité de la fissure est indépendante de ces deux derniers éléments, seule son *intensité* (K) l'est. Cette propriété remarquable permet d'établir des critères de rupture dans lesquels n'intervient qu'une seule quantité mécanique, l'intensité des contraintes à l'extrémité de la fissure.

◇ Modes de fissuration.

Une fissure plane se définit par les paramètres suivants, son plan (n), sa frontière (v) et le déplacement relatif de ses faces (u). La fissure se propage dans la direction normale à sa frontière (v) selon trois modes élémentaires de fissuration, ouverture (I), cisaillement plan (II) et cisaillement anti-plan ou déchirure (III).

Le mode d'ouverture, ou mode I, correspond à la composante du déplacement relatif des faces de la fissure selon la normale au plan de la fissure (n). Le mode de cisaillement plan, ou mode II, correspond à la composante du déplacement relatif selon la direction de propagation (v). Enfin le mode de cisaillement anti-plan ou mode III, correspond à la composante tangente au front de la fissure. En élasticité linéaire, la sollicitation à l'extrémité de la fissure est la superposition linéaire des contributions de ces trois modes élémentaires.

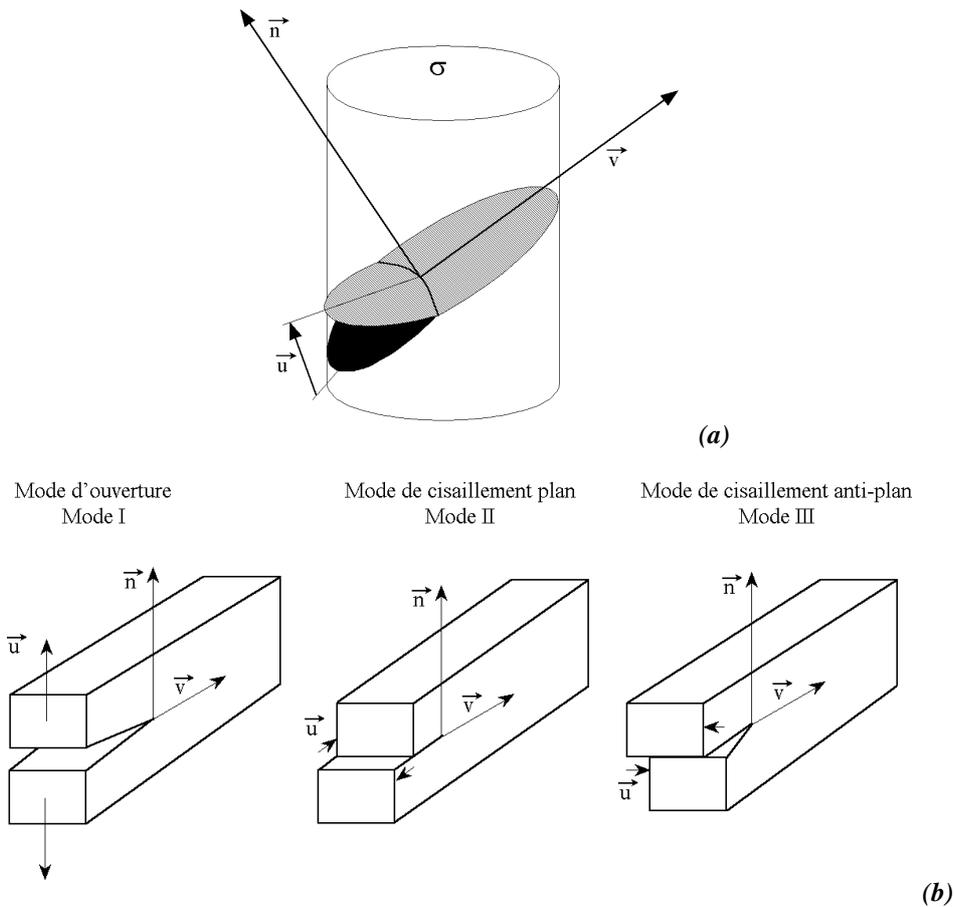


Figure 60 : (a) Paramètres définissant une fissure bi-dimensionnelle, (b) modes de fissuration.

◇ Facteur d'intensité des contraintes

Les solutions analytiques pour les trois modes ont été déterminées de manière similaire en élasticité linéaire (voir les annexes). En contraintes planes $\sigma_{zz}=0$ et $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ et en déformations planes $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$ et $\kappa=3-4\nu$.

Ainsi les champs de contrainte, de déformation et de déplacement en élasticité linéaire sont-ils connus, leur forme ne dépend pas de la longueur de la fissure ou de la contrainte appliquée sur la structure, seule leur intensité en dépend.

Cette intensité, appelée aussi **facteur d'intensité des contraintes** varie linéairement avec la contrainte appliquée et évolue comme la racine d'une dimension caractéristique du défaut. On notera : $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$, où a est la longueur de la fissure, σ la contrainte appliquée et Y un facteur géométrique dépendant de la forme de la fissure (mais pas de sa taille).

Mode I

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}$$

Mode II

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) & u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Mode III

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & u_z &= \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0\end{aligned}$$

Les expressions du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la longueur de la fissure et du type de chargement pour un grand nombre de géométries et de cas de chargement des fissures peuvent être trouvées dans les ouvrages de Tada, Paris et Irwin. [Tada,1985] et de Murakami [Murakami,1987].

Finalement le paramètre mécanique pertinent pour caractériser le comportement d'une fissure est donc le facteur d'intensité des contraintes.

6.5.3 Essais de ténacité

Pour obtenir des données quantitatives, que l'on peut utiliser pour le dimensionnement, on utilise des éprouvettes fissurées et pas simplement entaillées comme dans le cas de l'essai Charpy. En pratique, on usine dans l'éprouvette une entaille aussi proche que possible d'une fissure (par électroérosion par exemple).

Ensuite on applique un chargement croissant à l'éprouvette jusqu'à obtenir la propagation instable de la fissure qui conduit à la rupture (Figure 61 a). On mesure également le déplacement relatif des points d'application de l'effort afin de vérifier que le comportement de la structure fissurée reste bien linéaire jusqu'à la rupture. Si le comportement est linéaire, les concepts de mécanique de la rupture linéaire s'appliquent. Alors, connaissant la relation entre l'effort appliqué sur l'éprouvette et le facteur d'intensité des contraintes pour diverses géométries de fissure et d'éprouvettes, on en déduit le facteur d'intensité des contraintes qui conduit à la rupture brutale ou ténacité (K_{IC}).

En général il est observé que le facteur d'intensité des contraintes pour lequel on obtient la rupture dépend de l'épaisseur de l'éprouvette. Lorsque cette épaisseur devient très petite devant les dimensions de la fissure, le facteur d'intensité des contraintes à la rupture augmente. Le terme de ténacité (K_{IC}) est réservé au cas des pièces épaisses. Lorsque les pièces sont minces, la fissure se propage en mode mixte (mode III, mode I).

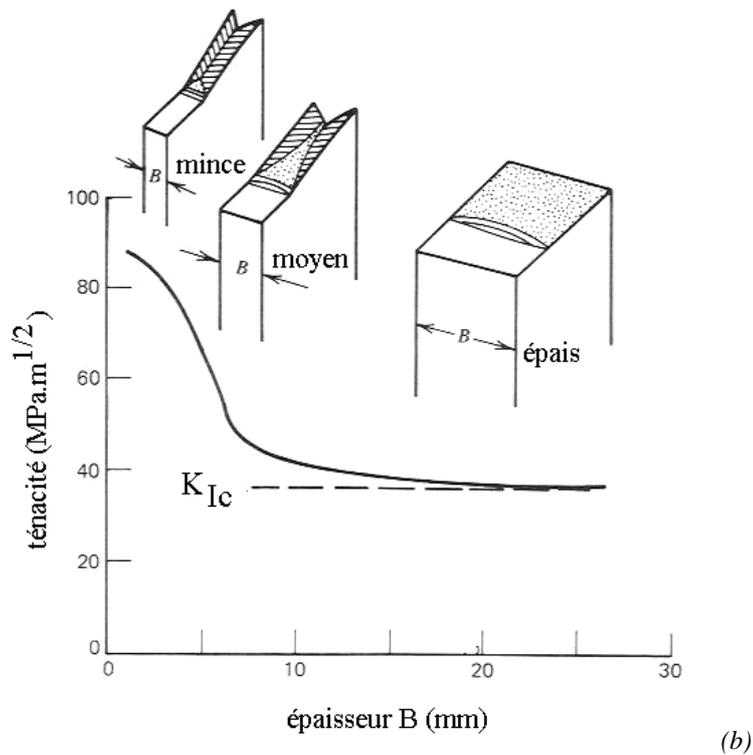
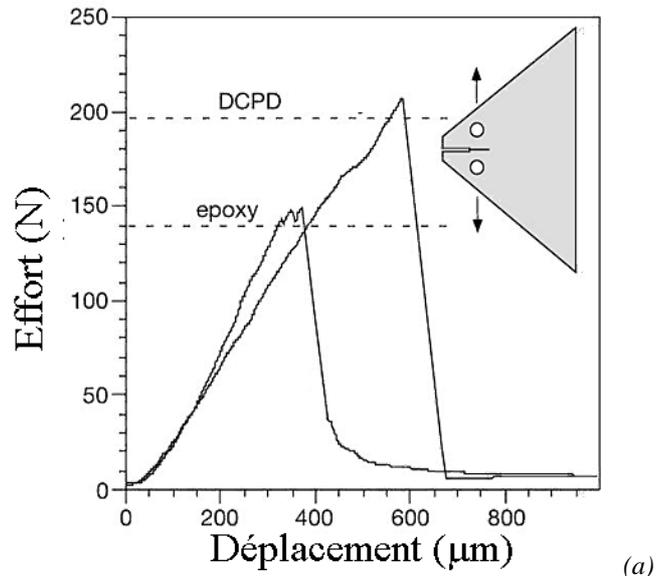


Figure 61 : (a) exemple d'essai de ténacité sur une éprouvette fissurée. On mesure la courbe effort appliqué-déplacement des points d'application de l'effort. La fissure s'ouvre sans se propager puis brutalement se propage jusqu'à la rupture lorsque $K=K_{Ic}$. (b) le facteur d'intensité des contraintes critique pour lequel la fissure se propage de manière instable dépend de l'épaisseur de l'éprouvette, K_{Ic} correspond au cas d'une éprouvette épaisse (déformation plane) (J. Besson).

6.5.4 Théorie de la rupture fragile de Griffith et ténacité K_{Ic}

Vers 1920, Griffith fut le premier à proposer une théorie permettant d'expliquer la propagation instable d'une fissure.

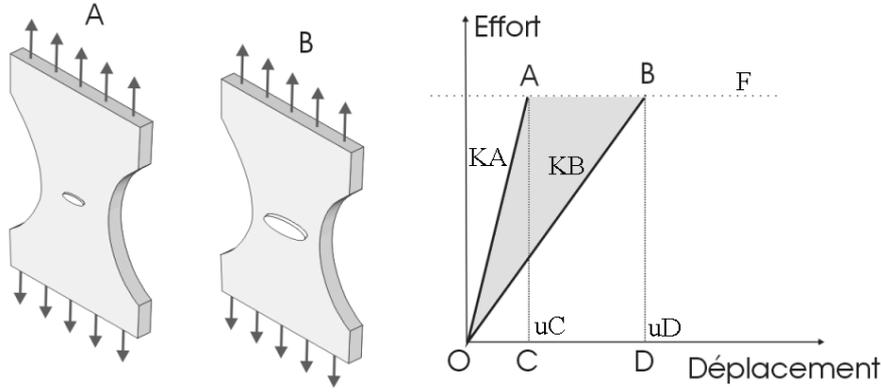


Figure 62 : Illustration : rigidité de deux structures fissurées.

Supposons deux éprouvettes fissurées dont on mesure la rigidité à savoir le rapport entre l'effort appliqué et le déplacement mesuré. Si l'une des éprouvettes (A) contient une fissure de longueur a_1 et l'autre éprouvette (B) une fissure de longueur a_2 avec $a_2 > a_1$, alors la rigidité de l'éprouvette B est plus faible que celle de l'éprouvette A.

Pour un effort donné F, l'énergie élastique stockée dans l'éprouvette B est l'aire du triangle OBD, tandis que celle stockée dans l'éprouvette A est l'aire du triangle OAC.

Lorsque une éprouvette est chargée et que la fissure se propage depuis une longueur a_1 jusqu'à une longueur a_2 sous un effort imposé F, l'énergie fournie W_{OABD} à l'éprouvette contient une part d'énergie élastique stockée W_{OBD} , une part d'énergie consommée W_R par l'extension de la fissure dans le matériau et une part d'énergie cinétique W_c . Soit ici :

$$W_R + W_c = W_{OABD} - W_{OBD} \text{ où } W_{OBD} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K_B} = \frac{1}{2} C_B F^2 \text{ et } W_{OABD} = \frac{1}{2} C_A F^2 + F^2 (C_B - C_A)$$

Où C_B et C_A sont respectivement les complaisances des éprouvettes A et B c'est-à-dire les inverses des rigidités des éprouvettes A et B. En conséquence :

$$W_c + W_R = \frac{1}{2} (C_B - C_A) F^2$$

Et pour une extension infinitésimale de la fissure infinitésimale dA :

$$\frac{dW_c}{dA} + \frac{dW_R}{dA} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dA} F^2$$

Si la fissure se propage de manière stable, quasi-statique, les effets inertiels sont négligeables ; la variation d'énergie cinétique est nulle. Dans ce cas, le taux de variation G de l'énergie élastique est exactement égal au taux d'énergie nécessaire à la création de surface unitaire notée $2\gamma_s$ (J/m²).

$$2\gamma_s = \frac{dW_R}{dA} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dA} F^2 = G$$

Si G n'est pas exactement égal à $2\gamma_s$ alors l'énergie cinétique de la fissure est soit croissante et la fissure voit sa vitesse augmenter, soit décroissante et la fissure s'arrête. Ainsi $G_c = 2\gamma_s$ est le seuil au-delà duquel la fissure devient instable et en deçà duquel, lors d'un chargement monotone, la fissure ne se propage pas.

En appliquant les principes de la mécanique linéaire de la rupture, l'expression du taux de variation de l'énergie élastique par unité d'extension d'aire de fissure se calcule facilement en fonction du facteur d'intensité des contraintes :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \text{ en contrainte plane et } G = \frac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \text{ en déformation plane}$$

Ainsi, la **ténacité K_{IC}** , correspond au facteur d'intensité des contraintes **au-delà duquel la fissure se propage de manière instable** et s'exprime de la façon suivante en fonction de l'énergie de création de surface :

$$K_{Ic} = \sqrt{2E} \sqrt{\gamma_s} \text{ en contrainte plane} \quad \text{et} \quad K_{Ic} = \sqrt{\frac{2E}{(1-\nu^2)}} \sqrt{\gamma_s} \text{ en déformation plane}$$

6.6 Fiche résumé

Définitions :

- On distingue deux modes de rupture, une **rupture ductile** qui requiert beaucoup d'énergie pour rompre une pièce et une **rupture fragile** qui n'en consomme pas ou peu.
- La rupture comprend deux phases, une phase d'endommagement et une phase de fissuration. L'endommagement se produit à l'échelle du matériau et peut être diffus ou localisé. La fissuration correspond à l'extension d'une fissure déjà existante.

Endommagement :

- Endommagement diffus : beaucoup de défauts interagissent pour conduire à la rupture.
 - métaux ductiles, croissance et coalescence de cavités.
 - polymères ductiles, croissance et coalescence de « crazes ».
 - céramiques quasi-fragiles, croissances et coalescences de micro-fissures.
 - En général, consommation d'énergie importante pour la rupture.
 - En général, faible dispersion des contraintes à rupture.
 - Domaine où peut être appliquée la théorie de l'endommagement continu (Kachanov-Rabotnov et col.).
- Endommagement localisé : le premier défaut initié forme une fissure principale qui se propage jusqu'à la rupture.
 - métaux fragiles, amorçage d'une fissure sur une inclusion, propagation par clivage d'une fissure principale.
 - verres : amorçage d'une fissure sur un défaut superficiel (rayure...) et propagation d'une fissure principale de manière fragile.
 - céramiques quasi-fragiles ou métaux ductiles, après la phase d'endommagement diffus propagation d'une fissure principale formée par coalescence de micro-fissures.
 - En général, consommation d'énergie pour la rupture assez faible.
 - En général, forte dispersion des contraintes à rupture et effet d'échelle.
 - Domaine où peut être appliquée la théorie du maillon faible (et la loi de Weibull)

Fissuration

- La **résilience K_{cv}** est l'énergie consommée lors de la rupture d'éprouvettes de référence de section égale à 1cm^2 au cours d'un essai Charpy. Bien qu'elle soit notée à l'aide de la lettre K il ne s'agit pas d'un facteur d'intensité des contraintes.
- Le facteur d'intensité **K_I** caractérise l'intensité du champ de contrainte, de déformation ou de déplacement à l'extrémité d'une fissure dans un milieu élastique. **K_I** est fonction de la dimension de la fissure (avec un facteur $1/2$), du chargement appliqué et de la forme de la fissure. Les champs de contrainte, de déformation ou de déplacement asymptotiques de mode I sont le produits de **K_I** et de champs dits de Westergaard donnés une fois pour toute quelle que soit la forme de la fissure ou le chargement appliqué et ne sont valable qu'au voisinage de l'extrémité de la fissure.
- La **ténacité K_{IC}** est le facteur d'intensité des contraintes pour lequel la rupture devient instable (la vitesse de fissuration augmente).
- La fissuration est instable lorsque **$K_I=K_{IC}$** .
-

6.7 Problèmes

6.7.1 Les aventures de Tintin

Objectifs : Rupture fragile, prise en compte de la probabilité de rupture (Weibull), application à une cloche de scaphandre.

Nous allons tenter de répondre, dans cet exercice, à une question que vous vous êtes sans doute posés en lisant les Aventures de Tintin : « Comment dimensionner les cloches de scaphandre de nos trois héros, Tintin, Milou et le capitaine Haddock ? »

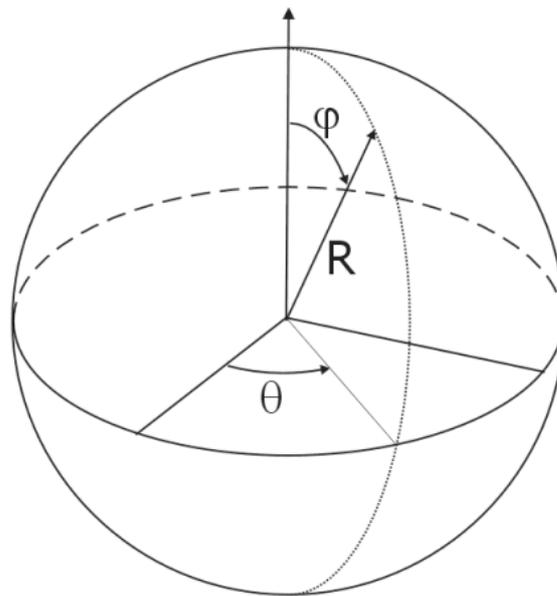
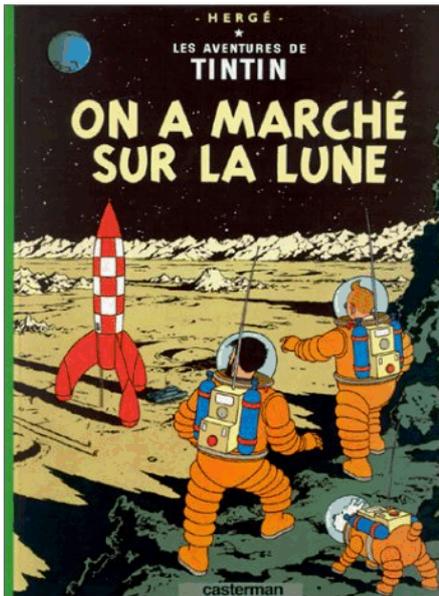


Figure 63 : Coordonnées sphériques

Ces cloches de scaphandre sont en verre, de forme hémisphérique, de rayon R et d'épaisseur e . Le verre est maintenu librement par un joint en caoutchouc sur sa partie inférieure et soumis à une différence de pression $\Delta P = 0.1$ MPa (soit une atmosphère).

Les propriétés du verre employé pour la fabrication de ces cloches sont rassemblées dans le tableau ci-dessous. La rupture d'une des cloches de scaphandre pourrait provoquer un drame. Il s'agit donc de pièces critiques, pour lesquelles nous choisirons une probabilité de rupture de 10^{-6} .

Matériau	Module de Young	Contrainte à rupture moyenne en compression	Ténacité
Verre Sodique	$E = 74$ GPa	$\sigma_R = 1000$ MPa	$K_{IC} = 0.7$ MPa.m ^{1/2}

◇ Question 1 : Mécanisme de rupture fragile

Une campagne d'essais sur 28 éprouvettes de traction en verre sodique a été réalisée pour caractériser le comportement à rupture du matériau. Les résultats de ces essais sont regroupés ci-dessous :

Contrainte à rupture d'éprouvettes (de volume V_0) sollicitées en traction simple (MPa)

Eprouvettes de diamètre $D=10$ mm et de longueur utile $L=1.5D$.

45	49	43	50	46	51	47
41	48	31	52	48.5	43.5	49.5
41.5	47.5	50.5	37	52.5	44	51.5
44.5	47.8	49.8	42.3	46.1	48.2	43.6

- Expliquez la dispersion des contraintes à rupture en traction pour le verre.
- Pour les matériaux fragiles, on observe un effet d'échelle : « plus le volume est grand, plus la contrainte à rupture est faible ». Comment peut-on justifier cette assertion à partir des mécanismes physiques de rupture ?

◇ *Question 2 : Loi de Weibull*

Etant donnée la grande dispersion des contraintes à rupture obtenue, nous ne parlerons plus d'une contrainte à rupture unique mais d'une probabilité de rupture du matériau $P_R(\sigma_R)$ sous une contrainte σ_R .

La probabilité de survie du matériau se calcule alors comme suit : $P_V(\sigma_R) = 1 - P_R(\sigma_R)$

Un ingénieur suédois, **Weibull**, a proposé la loi suivante pour estimer la probabilité de survie d'une éprouvette de volume V_0 d'un matériau fragile donné :

$$P_V(\sigma_i) = \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\}, \text{ où } \sigma_0 \text{ et } m \text{ sont deux paramètres caractéristiques du matériau.}$$

Cette expression n'est valable que pour représenter des résultats d'essais effectués sur des échantillons de même volume V_0 .

- A partir de l'expression proposée par Weibull, tracer la probabilité de survie $P_V(\sigma)$ en fonction de la contrainte σ .
- Commenter l'allure de cette courbe. Quelle signification peut-on donner à la contrainte σ_0 .
- Commenter également l'influence du paramètre m sur l'allure de cette courbe. Pour une même population de défauts, comment se classeront les valeurs de m pour un matériau ductile ou fragile. Pour un matériau fragile, dans quelles configurations peut-on avoir une contrainte à rupture très peu dispersée ?

◇ *Question 3 : Identification des paramètres de la loi de Weibull*

On cherche à identifier les paramètres σ_0 et m de la loi de Weibull à partir des résultats d'essai de traction donnés dans l'énoncé.

- Comment calculer la probabilité de rupture sous une contrainte donnée σ_R à partir des résultats expérimentaux ?
- Comment peut-on alors identifier simplement les deux paramètres de la loi de Weibull.

◇ *Question 4 : Manipulation de la Loi de Weibull*

On donne les valeurs des coefficients de la loi de Weibull pour le matériau étudié : $m=13$ et $\sigma_0=50$ MPa.

- Comment calculer la probabilité de rupture d'une pièce de volume V ($V \gg V_0$), soumise à une contrainte homogène ?

- Quelle est la contrainte maximale admissible pour une pièce de volume $V=V_0$, soumise à une contrainte homogène σ pour avoir une probabilité de rupture de 10^{-6} ?
- Quelle est la contrainte maximale admissible pour une pièce de volume $V=10 V_0$, soumise à une contrainte homogène σ pour avoir une probabilité de rupture de 10^{-6} ?
- Quelle est la contrainte à rupture moyenne du verre lors des essais de traction ? Quelle serait la contrainte à rupture moyenne pour des éprouvettes de volume $V=10. V_0$?

◇ *Question 5 : Application dimensionnement des cloches de scaphandre*

Exprimer la contrainte circonférentielle moyenne $\sigma_{\theta\theta}$ dans la cloche de scaphandre en fonction de ΔP et du rapport e/R . On assimilera la cloche à une sphère creuse à paroi mince, ce qui permet de supposer les contraintes comme homogènes dans la pièce.

- Donnez l'expression de la probabilité de rupture en fonction de l'épaisseur e de verre de la cloche. Quelle est la valeur minimale de e en dessous de laquelle cette méthode n'est pas applicable. (A.N. $R=200$ mm).
- A.N. calculez alors l'épaisseur de verre e au dessus de laquelle la probabilité de rupture sera inférieure à 10^{-6} .
- Calculez alors la taille du défaut critique qui conduirait à la rupture du scaphandre. Que penser du critère de fuite avant rupture ?

7 RUPTURE PAR FATIGUE

7.1 Introduction

La fatigue est un mode de rupture différé qui se produit lorsque le matériau est soumis à des chargements cycliques, et cela même pour des contraintes bien inférieures à sa limite d'élasticité et des températures faibles. Ce mode d'endommagement limite la durée de vie des composants de la plupart des machines et des installations industrielles.

Il existe trois domaines principaux pour les mécanismes de rupture par fatigue, qu'on distingue sur une courbe de Wöhler (voir Figure 64), le domaine de la fatigue oligocyclique (à faible nombre de cycles), le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles et le domaine de l'endurance. On verra qu'à chaque domaine est associée une méthode de calcul de la durée de vie.

7.2 Essais de fatigue conventionnels

7.2.1 Courbes de Wöhler, courbes S-N

Les essais de fatigue conventionnels, pratiqués depuis la fin du 19^{ème} siècle, consistent à soumettre une éprouvette de traction-compression ou de flexion à des cycles de contrainte. La sollicitation de fatigue est caractérisée par l'amplitude de contrainte du cycle de fatigue ($\Delta\sigma$) et par le rapport de charge ($R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$). On mesure le nombre de cycles à rupture N pour chaque type de sollicitation ($\Delta\sigma R$). On trace alors les courbes dites S-N qui donnent la demi-amplitude de contrainte $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ en fonction du nombre de cycles à rupture N pour divers rapport de charge.

Les courbes dites de Wöhler, donnent le nombre de cycles à rupture en fonction de la demi-amplitude $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ de contrainte, pour un rapport de charge $R = -1$.

La première observation que l'on peut faire sur une courbe de Wöhler, est que les durées de vie en fatigue pour une amplitude de contrainte donnée sont distribuées statistiquement. L'origine principale de cette variabilité des durées de vie est l'existence de défauts dans le matériau qui conduisent à l'amorçage et la propagation de fissures. Leurs tailles, formes et positions étant variables, la durée de vie de la pièce est aussi variable. Aussi, un dimensionnement, à partir des courbes de Wöhler, prévoit-il une durée de vie N avec une probabilité de rupture associée $P(N)$. La dispersion des durées de vie augmente lorsque la durée de vie moyenne augmente. Ceci limite l'applicabilité des courbes de Wöhler pour le dimensionnement des organes de sécurité des structures. Pour les autres composants, il est important de bien maîtriser l'origine de la variabilité des durées de vie pour prévoir le risque de rupture du composant, associé à la durée de vie calculée, à partir des données collectées sur éprouvettes.

On distingue trois domaines sur une courbe de Wöhler, le domaine de la fatigue oligo-cyclique (ou fatigue plastique), le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles et le domaine de l'endurance.

La durée de vie la plus courte possible sur la courbe de Wöhler est égale à $1/4$ de cycle et est obtenue lorsque la contrainte appliquée est la contrainte maximale du matériau. Lorsque les contraintes appliquées diminuent, le matériau est sollicité en plasticité et peut endurer un nombre de cycles de fatigue qui dépend de l'amplitude de la déformation plastique qui lui est imposée à chaque cycle. Dans ce régime, dit de *la fatigue oligocyclique*, la durée de vie en fatigue est fortement dépendante du comportement plastique cyclique du matériau.

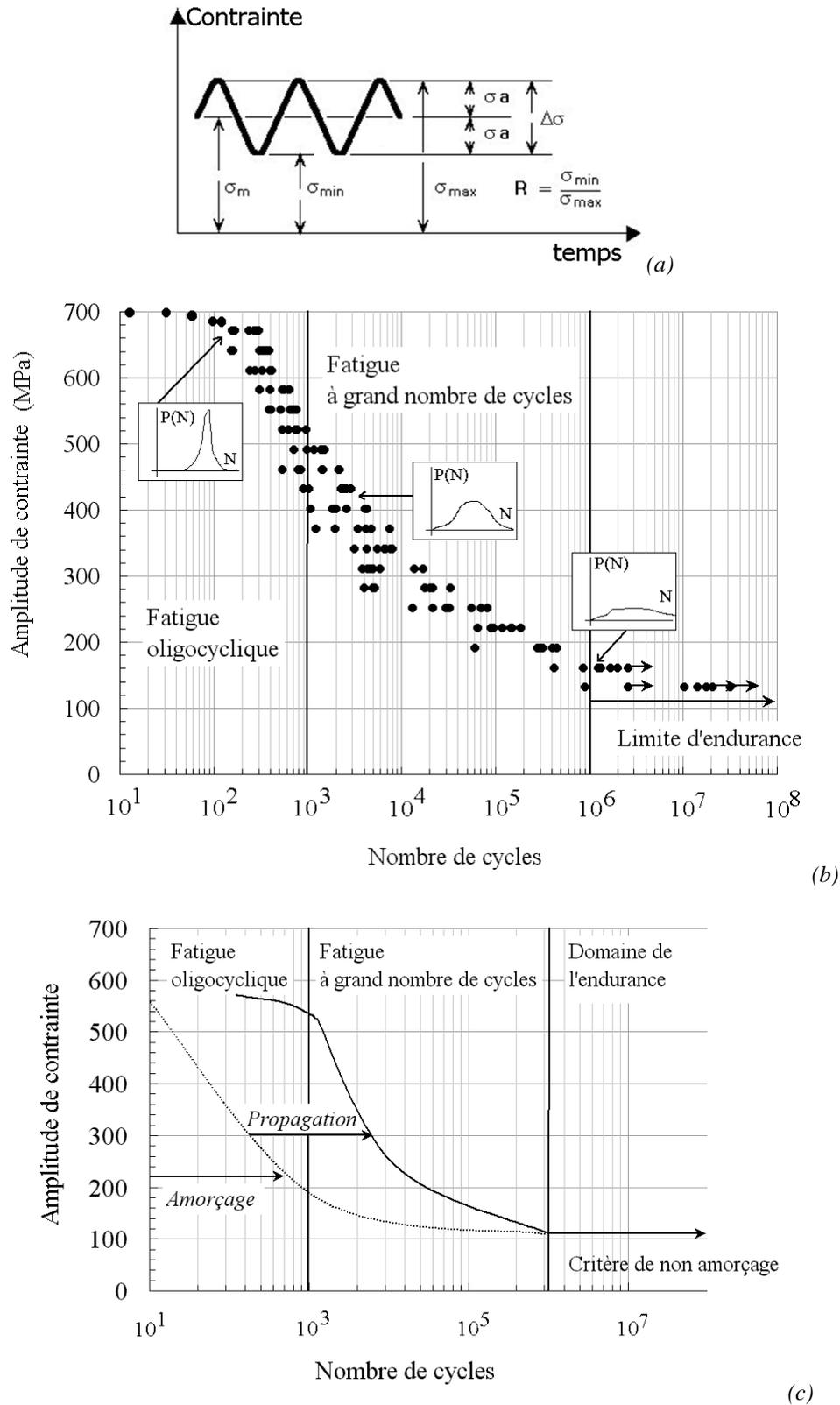


Figure 64 : (a) Paramètres caractérisant une sollicitation de fatigue, (b) Courbe de Wöhler, donnant la durée de vie d'un matériau métallique en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée, pour $R=-1$. (c) illustration de l'importance des mécanismes, amorçage versus fissuration dans la durée de vie par fatigue.

Lorsque le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité macroscopique, c'est-à-dire dans le régime de la *fatigue à grand nombre de cycles*, la rupture provient de l'amorçage de fissures et de leur propagation par fatigue jusqu'à la rupture. Plus le niveau de contrainte est faible, plus la part de la phase d'amorçage dans la durée de vie augmente. Comme cette phase d'amorçage présente une grande

variabilité, elle n'est pas prise en compte pour le dimensionnement de la durée de vie des organes de sécurité des structures surtout si leur durée de vie doit être grande. Le dimensionnement est alors principalement fondé sur la prévision de la propagation des fissures de fatigue (mécanique de la rupture). On fait l'hypothèse qu'il existe un défaut dans le matériau, placé au point le plus critique de la pièce et dont la dimension est égale au seuil de résolution du moyen de contrôle employé. La durée de vie correspond alors au nombre de cycles nécessaires pour que ce défaut se propage jusqu'à la rupture.

Dans le *domaine de l'endurance*, une asymptote apparaît sur la courbe S-N (mais ce n'est pas toujours vrai), ce qui signifie que la rupture ne se produit pas même au bout d'un nombre de cycles « infini », soit parce qu'aucun défaut ne s'est amorcé, soit parce que les fissures cessent de se propager. Les critères habituellement employés pour dimensionner les structures dans le domaine de l'endurance, sont des critères de non-amorçage de fissures.

7.2.2 Mécanismes d'endommagement.

◇ *Stades d'endommagement.*

On distingue trois stades pour l'endommagement des matériaux par fatigue, la phase d'amorçage des fissures, la phase de propagation des fissures de fatigue et enfin la phase de rupture brutale. Cette dernière phase peut être fragile ou ductile. Elle ne sera pas abordée ici, mais dans le chapitre suivant portant sur les mécanismes de rupture ductile ou fragile.

L'amorçage peut se produire, soit sur un défaut, pré-existant dans le matériau ou créé au cours de la vie du matériau (rayure, piqûre de corrosion etc...), soit par micro-plasticité en surface.

La propagation des fissures par fatigue se distingue par l'existence de lignes sur la surface de rupture marquant des positions d'arrêt du front de la fissure. Ces lignes peuvent être observées à l'échelle macroscopique (on parle alors de lignes d'arrêt), comme à l'échelle microscopique (on parle alors de stries de fatigue).

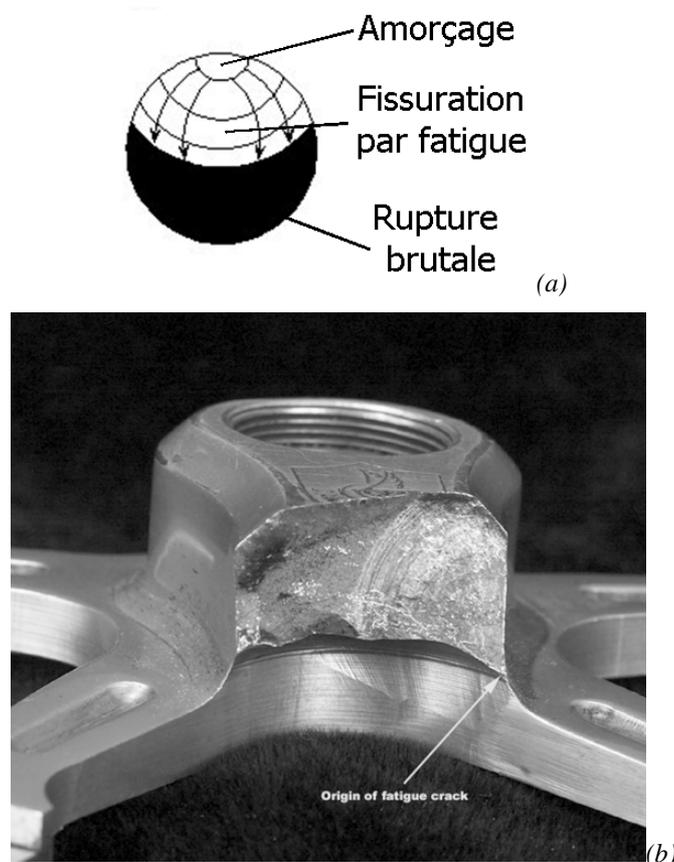


Figure 65 : (a) illustration des trois stades de la rupture par fatigue, l'amorçage, la propagation par fatigue, la rupture brutale, (b) exemple d'une rupture par fatigue.

◇ Phase d'amorçage

– Amorçage sur défaut.

Les défauts qui sont susceptibles de conduire à l'amorçage d'une fissure de fatigue sont nombreux. Quelques exemples de défauts sont donnés ci-dessous, selon la méthode d'élaboration :

Dans les pièces de fonderie les défauts principaux que l'on rencontre sont des ségrégations, des inclusions (Figure 66 (a)) ou encore des retassures. Dans les matériaux frittés, le défaut principal rencontré est la porosité du matériau due à une absence de cohésion entre grains de poudres (Figure 66 (b)). Dans les pièces forgées, les défauts sont ceux du lingot, modifiés par la déformation de corroyage. Les inclusions par exemple, sont brisées et leurs fragments dispersés au cours du corroyage.

Il peut aussi exister dans le matériau des fissures internes liées au procédé de mise en forme ou aux traitements thermiques. Ces fissures sont rares dans les alliages métalliques mais leur répartition n'est pas aléatoire et correspond souvent à un défaut du procédé de mise en forme.

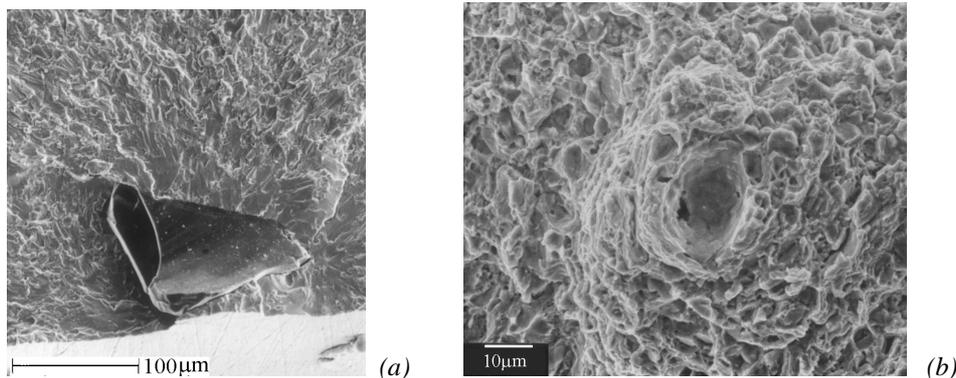


Figure 66 : Amorçage d'une fissure de fatigue, (a) sur une inclusion de céramique subsurfacique, (b) sur une porosité, alliage à base de Nickel N18 élaboré par métallurgie des poudres, [Pommier,1995]

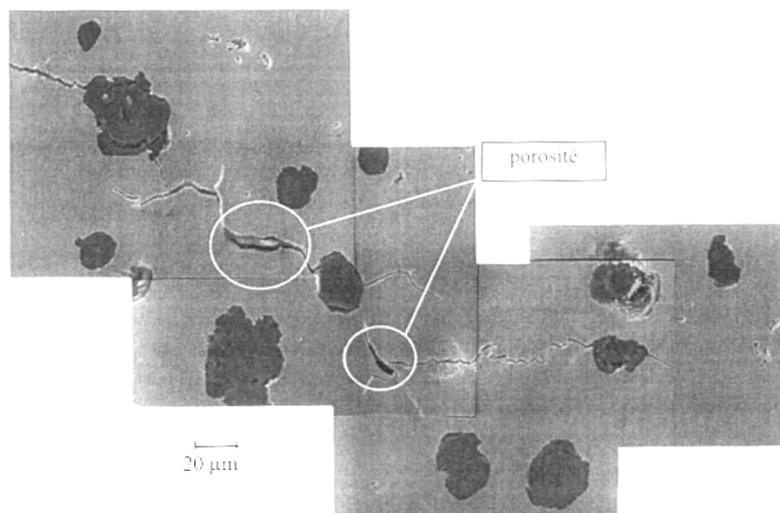


Figure 67 : Amorçage de micro-fissures de fatigue dans une fonte à graphite sphéroïdal, les fissures s'amorcent sur les nodules ou sur les porosités, les porosités sont sévères. [Dierickx,1996]

Les « défauts » peuvent aussi être des constituants du matériau, tels que des particules de seconde phase ou les joints de grains. Sur la Figure 67, extraite de la thèse de P. Dierickx [Dierickx,1996], on peut voir des micro-fissures de fatigue qui se sont formées à la surface d'une fonte à graphite sphéroïdal. Ces microfissures proviennent de porosités et de nodules de graphite.

Pour terminer, l'amorçage est aussi couramment associé aux effets de l'environnement. Comme on le voit sur la Figure 68 (a), des fissures de fatigue peuvent s'amorcer en surface sur une piqure de corrosion. D'autre part, il a été montré par Murakami [Murakami,2000a], qu'une espèce fragilisante (ici l'hydrogène) en solution dans des inclusions, peut être libérée peu à peu dans le métal sous l'effet de la sollicitation mécanique et du temps. Une zone fragilisée se forme alors autour des inclusions, dont la

dimension augmente avec le nombre de cycles et dont la frontière avec la fissure de fatigue est repérable par une modification du contraste en microscopie optique (Figure 68 (b)). Lorsque cette zone est suffisamment grande, une fissure de fatigue peut se propager jusqu'à la rupture, et cela même pour un niveau de contrainte très faible. Ce mécanisme conduit à des ruptures d'éprouvettes pour des durées de vie supérieures à 10^7 cycles.

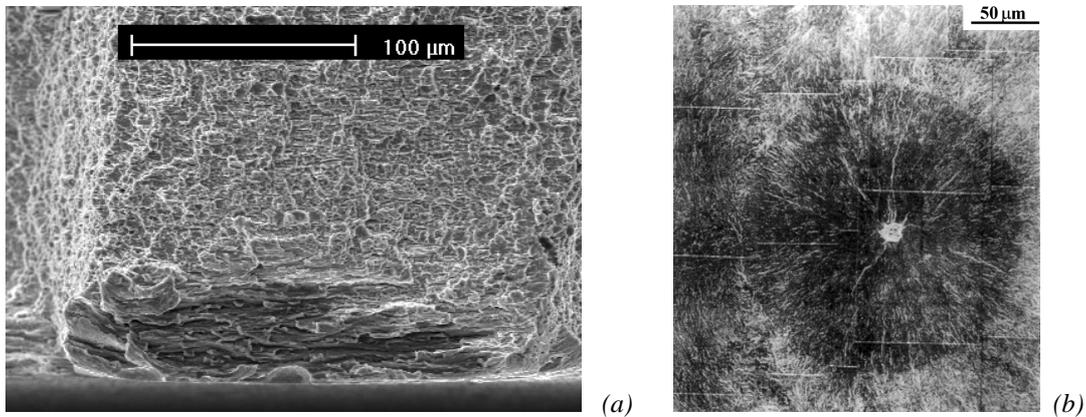


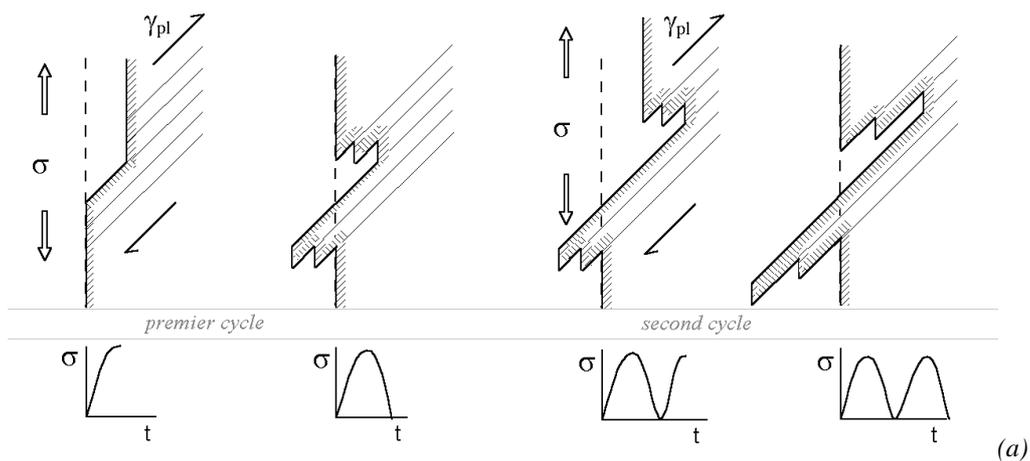
Figure 68 (a) Amorçage d'une fissure de fatigue par corrosion sous contrainte, Zircaloy 4 état détendu [Fandeur, 2001], (b) "optically dark area" [Murakami,2000a].

- Amorçage par micro-plasticité cyclique.

La seconde famille de mécanismes d'amorçage comprend les différents mécanismes d'amorçage associés à une déformation plastique cyclique en surface.

De très nombreux auteurs ont discuté des mécanismes permettant la formation des fissures par micro-plasticité cyclique. La formation d'intrusions et d'extrusions en surface, est généralement invoquée pour expliquer ce mécanisme. Lorsque le matériau est déformé dans son domaine d'élasticité macroscopique, il existe néanmoins des grains qui sont favorablement orientés pour le glissement ou qui sont soumis à une surcontrainte locale et qui entrent en plasticité. Comme cette déformation plastique reste très localisée, elle est quasi-indéetectable à l'échelle macroscopique, on parle alors de micro-plasticité.

Alors comme la déformation plastique est localisée sur des plans de glissements « intenses » des dislocations, des extrusions et intrusions se forment en surface. Au pied de ces reliefs, se forment progressivement des fissures qui se propagent ensuite par fatigue (Figure 69).



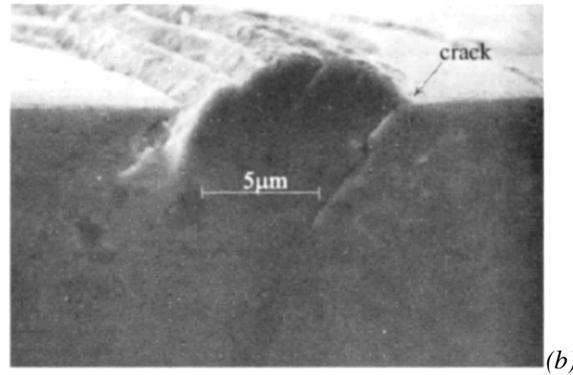


Figure 69 : (a) Mécanisme de formation d'extrusion et intrusion à la surface d'un échantillon sollicité en fatigue sous l'effet d'une déformation plastique cyclique localisée et présentant une certaine irréversibilité. (b) coupe d'une extrusion en surface (Suresh).

Par exemple, au cours de la déformation cyclique d'un Laiton (Figure 70), des marches se forment en surface à l'intersection entre les bandes de glissement des dislocations et la surface. L'évolution du relief de la surface durant les cycles de traction-compression a été suivi par microscopie à force atomique par Nakai [Nakai,1999]. Entre 1.10^4 et 6.10^4 cycles, le nombre de bandes de glissement n'augmente pas, mais le relief s'accroît. Un changement important se produit entre 6.10^4 et $1.2.10^5$ cycles (Figure 70 (d et e)). Les cartes de relief de surface sont tracées pour la contrainte de traction maximale du cycle de fatigue (à gauche), lorsque l'éprouvette est déchargée (au centre) et pour la contrainte de compression maximale du cycle de fatigue (à droite). A partir de $N=1.2.10^5$ (Figure 70 (e)), une « faille » apparaît nettement à l'intersection entre la ligne de glissement intense et la surface, à la contrainte maximale du cycle de fatigue, et se referme lors de la décharge et de la phase de compression, ce qui n'était pas observé pour $N=6.10^4$ cycles (Figure 70 (d)). Ce changement est interprété comme la conséquence de l'amorçage d'une microfissure.

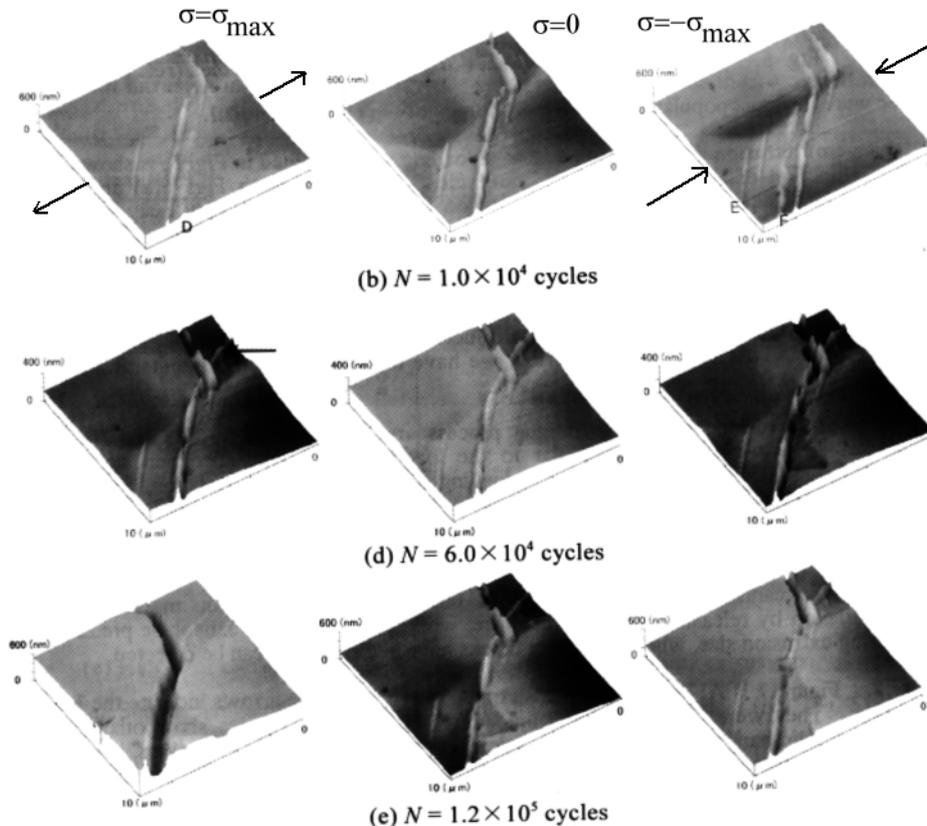


Figure 70 : Suivi par AFM sur une plage de $10\mu\text{m} \times 10\mu\text{m}$ de l'évolution du relief à la surface d'un échantillon sollicité en fatigue alternée à ± 120 MPa et $f=30\text{Hz}$. Laiton α , 70%Cu, 30Zn, $R_e=217\text{MPa}$, $R_m=317\text{MPa}$, $A\%=54\%$, [Nakai,1999].

Une particularité importante de l'amorçage de fissures par micro-plasticité cyclique est le nombre de fissures qui s'amorcent en surface (Figure 71). Les fissures qui s'initient sur des défauts sont rares mais habituellement de grandes dimensions. Au contraire, les micro-fissures amorcées par micro-plasticité cyclique sont nombreuses mais leur longueur est souvent proche de la taille des grains. Des fissures de grande taille se forment alors par coalescence de micro-fissures.

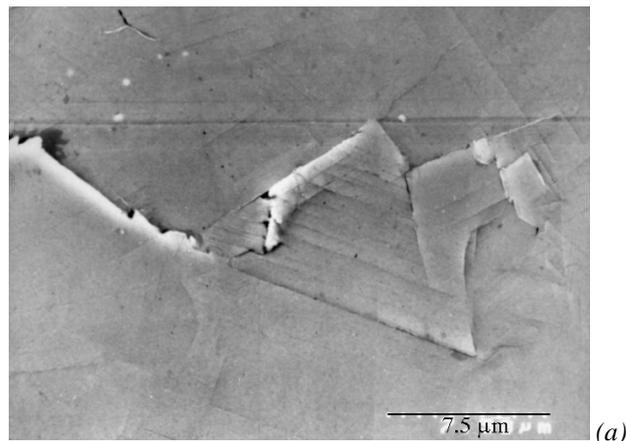


Figure 71 : Réseau de micro-fissures de fatigue à la surface d'une éprouvette lisse de TA6V (800 MPa, $R=-1$) [Le Biavant, 2000].

◇ Phase de propagation

- Stade I : cristallographique

Dans les tout premiers stades de la fissuration, il est généralement observé que la fissure se développe le long des plans de glissement des dislocations (Figure 72(a)). On parle alors de stade cristallographique. Lorsque la fissure se propage ainsi, le long de plans cristallins particuliers, l'aspect de la surface de rupture peut faire penser à une rupture fragile (par clivage), c'est pourquoi on utilise le terme de facettes de pseudo-clivage, bien qu'on y voie aussi des marques laissées par la propagation cyclique de la fissure (Figure 72(b)). Ces faciès de rupture s'observent en général autour des sites d'amorçage des fissures.



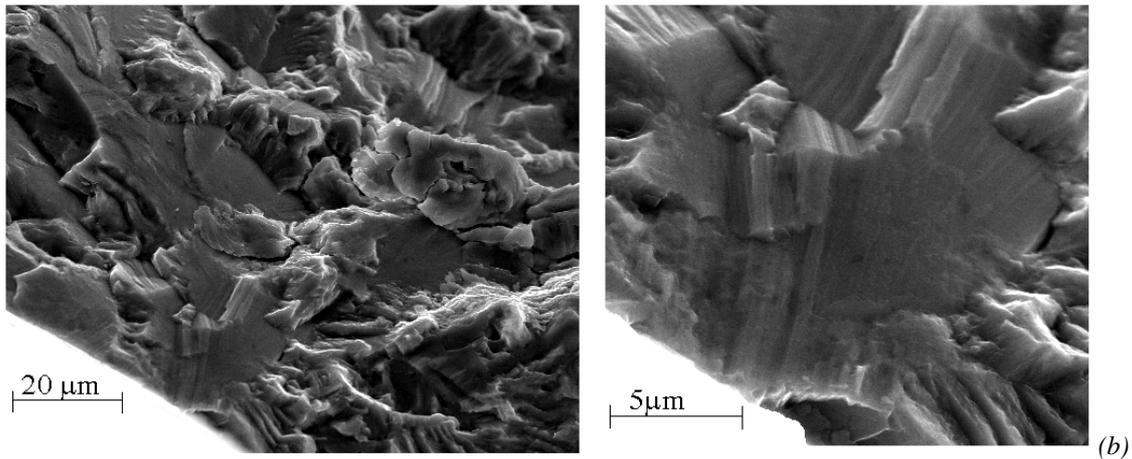


Figure 72: Fissuration par fatigue en stade I. (a) Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante, [Pommier,1992]. La fissure se propage dans un plan moyen entre deux plan de glissement. (b) Facettes de pseudo-clivage de fatigue près du site d'amorçage d'une fissure de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V (20°C) [Sampablo,2000].

Stade II : à stries.

Lorsque la longueur de la fissure augmente, la fissure se propage plus régulièrement, avec une sensibilité moindre à la cristallographie du matériau. On peut alors observer des stries de fatigue sur la surface de rupture (Figure 73 (a)) qui sont typiques d'une propagation par fatigue. Ces stries correspondent aux émoussesments successifs à l'extrémité de la fissure qui se produisent lors des phases d'ouvertures de la fissure (Figure 73 (a)). Ces stries sont également observées dans des matériaux ductiles non-cristallins, tels que des plastiques.

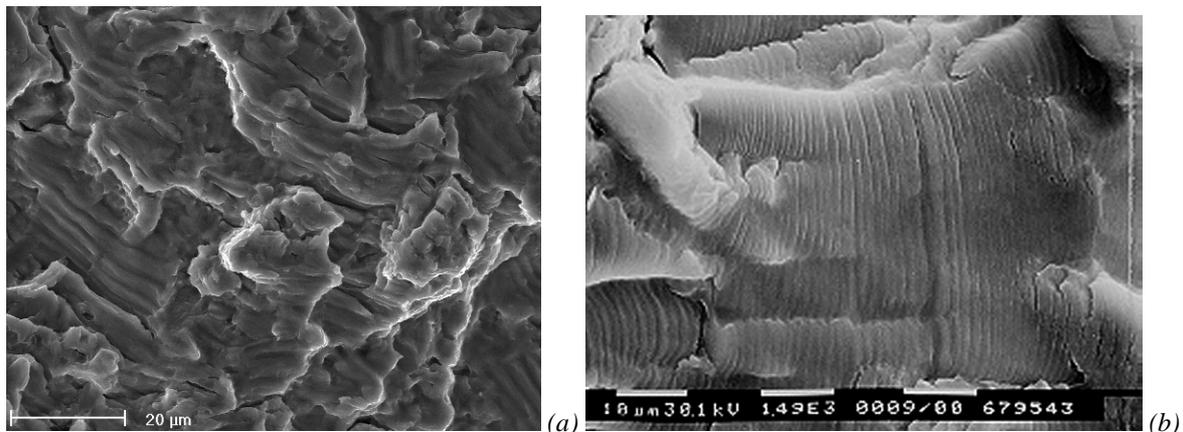


Figure 73 (a) Stries de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V ($K_{max}=40 \text{ MPa}(m^{1/2})$, 20°C) [Malherbe,2000] (photo par I. Nedbal), (b) Stries de fatigue dans un alliage d'aluminium.

Les mécanismes permettant la propagation des fissures par fatigue en stade I et en stade II sont illustrés par la Figure 74 et la Figure 75 et ont été proposés respectivement par Laird [Laird,1967] et Neumann [Neumann,1969].

Lorsque le nombre de systèmes de glissement actifs est faible à l'extrémité de la fissure, soit du fait du faible niveau de contrainte appliqué, soit du fait de la structure du cristal, soit encore d'une tendance du matériau à localiser les déformations, la fissure peut néanmoins se propager. Elle glisse alternativement (Figure 74) sur un système puis un autre [Neumann,1969] lors de l'ouverture. Une branche de fissure se forme sur chaque plan de glissement. A la décharge, une déformation plastique en retour se produit, mais les nouvelles surfaces, exposées à l'environnement externe lors de l'ouverture de la fissure, ne se résorbent pas lors de la décharge. La fissure s'est donc étendue d'une longueur qui dépend du cosinus de l'angle entre la direction de glissement et le plan de la fissure. La propagation provient donc d'une composante du glissement dans la direction de propagation. La fissure se propage alors, sur un plan moyen à l'intersection des deux systèmes de glissement actifs et laisse de nombreuses branches secondaires de part et d'autre de ce plan (Figure 74).

Lorsque la déformation plastique à l'extrémité de la fissure est plus homogène, le mécanisme de formation des stries est essentiellement géométrique [Laird,1967] (Figure 75). La fissure s'ouvre sous l'effet des contraintes appliquées (a), et s'é moussse au fur et à mesure que le niveau de contrainte augmente (d). L'é mousssement plastique correspond à un allongement de la matière dans la direction normale au plan de la fissure et à une contraction dans la direction de propagation, puisque la déformation plastique se fait sans changement de volume. Lors de la décharge, la fissure se referme (e-f). L'extrémité de la fissure subit donc une déformation plastique en retour. La fissure s'est donc propagée d'une longueur approximativement égale à son é mousssement (Figure 75).

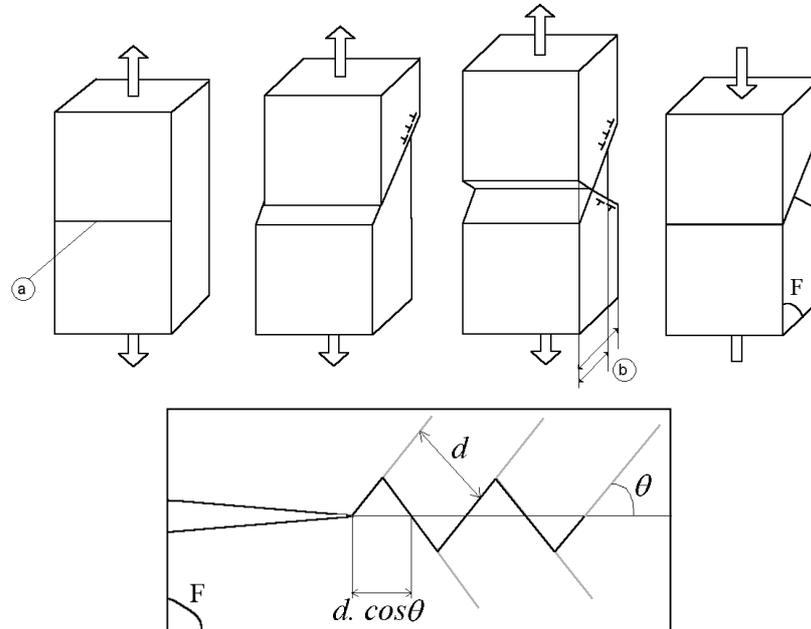


Figure 74: Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Neumann [Neumann,1969], (a) extrémité de la fissure, (b) contraction plastique dans la direction de propagation, liée au glissement double.

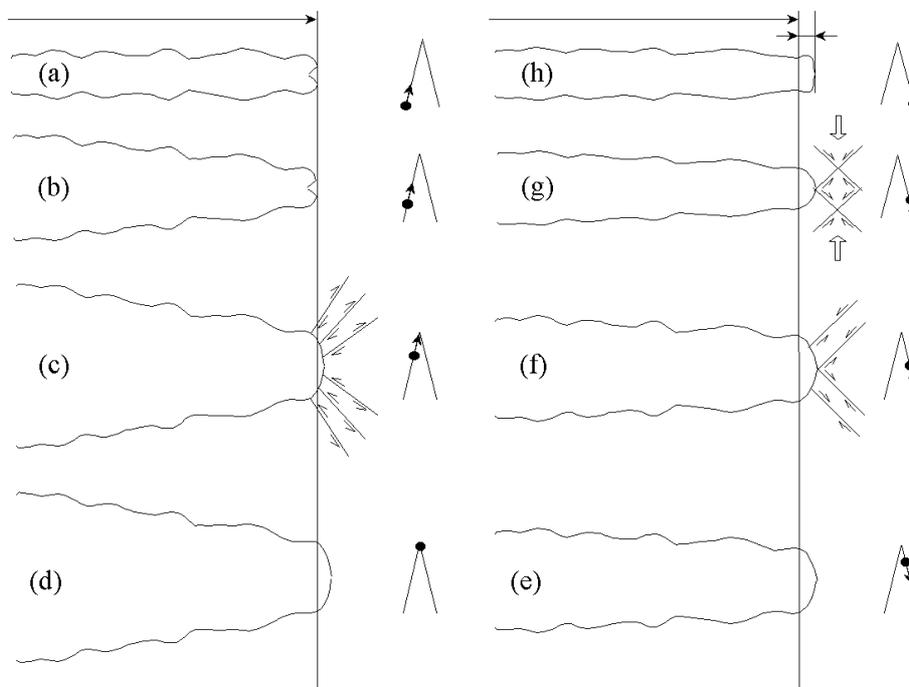


Figure 75: Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Laird [Laird,1967]

Ce mécanisme de propagation géométrique (Figure 75) est très général et permet d'expliquer aussi la formation de stries de fatigue dans des matériaux ne possédant pas de plans de glissement, comme des polymères thermoplastiques par exemple.

7.2.3 Essais complémentaires

◇ *Fatigue oligo-cyclique*

Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, on distingue encore trois comportements pour le matériau lorsqu'on applique des cycles de traction-compression à force imposée sur une éprouvette, l'adaptation, l'accommodation et le rochet.

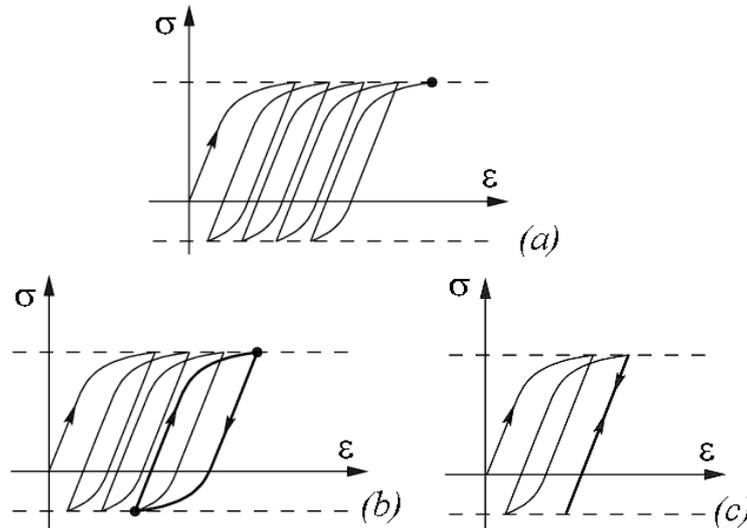


Figure 76 : Illustration des phénomènes (a) de rochet, (b) d'accommodation et (c) d'adaptation

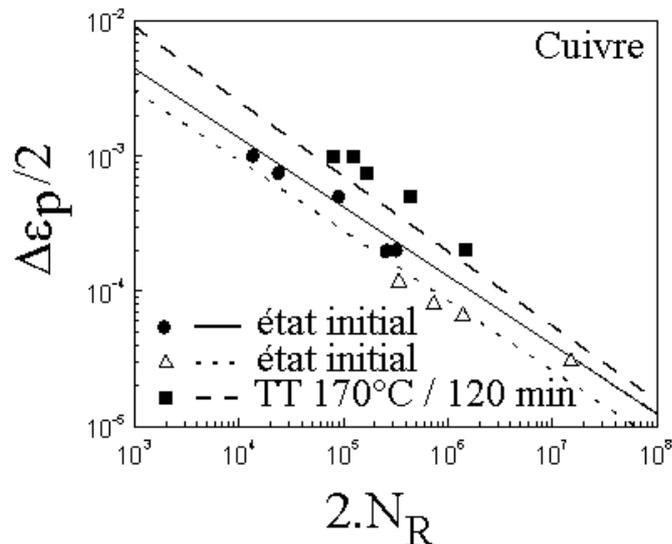


Figure 77 : Résultats d'un essai de Manson-Coffin sur du cuivre pur, à l'état écroui et après un traitement thermique. La demi-amplitude $\Delta\epsilon_p/2$ de la déformation plastique au cours d'un cycle est tracée en fonction du nombre de cycle à rupture N_R .

Si lorsqu'on applique des cycles de contrainte à une éprouvette la déformation plastique de l'éprouvette augmente progressivement à chaque cycle, on parle alors de *rochet* (Figure 76 (a)). Le critère de rupture est généralement de comparer la déformation de rochet à la déformation plastique répartie maximale admissible par le matériau.

Si au contraire les cycles se stabilisent, on parle alors d'*accommodation* (Figure 76 (b)). On peut dans ce cas relier le nombre de cycles à rupture à la demi-amplitude de la déformation plastique à chaque cycle. On observe que les résultats expérimentaux s'alignent sur une droite dans un diagramme bi-logarithmique (Figure 77), ainsi on peut généralement écrire la loi dite de Manson-Coffin dans le régime de fatigue oligocyclique :

$$N_R = A(\Delta\epsilon_p)^n$$

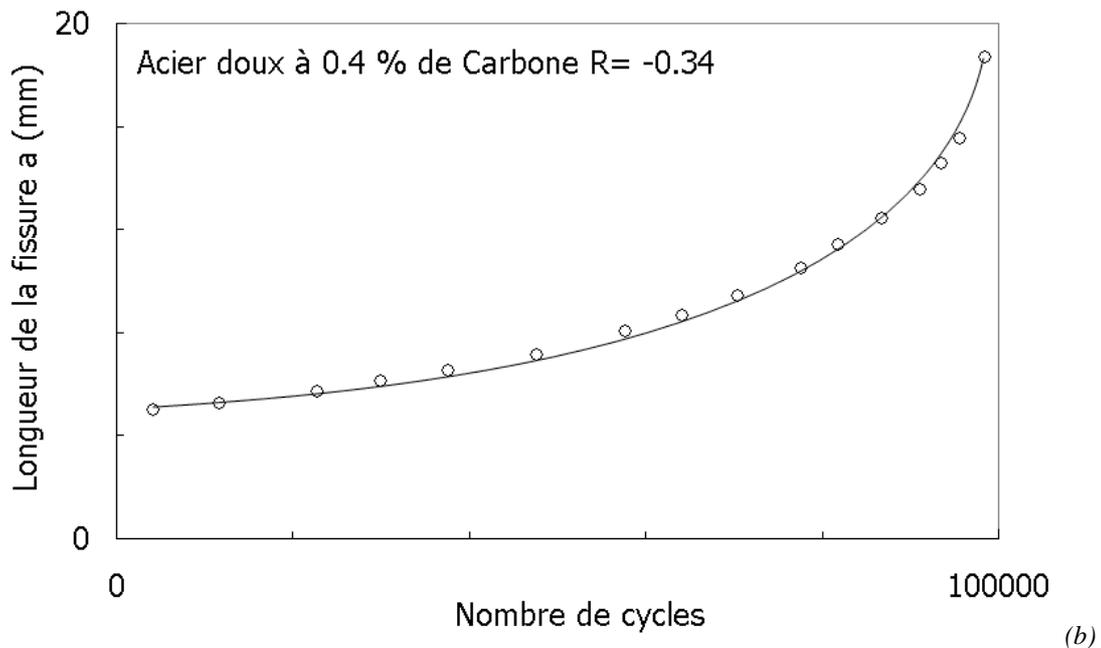
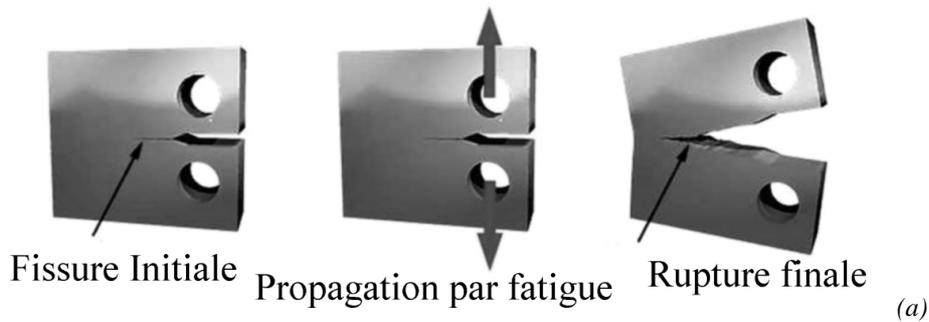
Si enfin au bout de quelques cycles, du fait de l'écroutissage, le comportement du matériau devient élastique, on parle alors *d'adaptation* (Figure 76 (c)). Dans ce cas on se retrouve alors dans le régime de la fatigue à grand nombre de cycles.

◇ Fatigue à grand nombre de cycles

Comme on l'a dit plus haut, lorsque le nombre de cycles à rupture augmente, la part de la phase d'amorçage dans la durée de vie augmente et de fait la dispersion des durées de vie en fatigue pour une même amplitude de contrainte augmente aussi.

Si on cherche à dimensionner des composants de sécurité pour lesquels la probabilité de rupture tolérée doit être infime (par exemple 1 pour dix millions voire moins), le nombre d'essais de fatigue conventionnel à réaliser devient considérable, et leur durée est d'autant plus longue que la durée de vie est grande. Ainsi il devient prohibitif de caractériser les niveaux de contraintes à rupture pour des durées de vie importantes (quelques 100 000 cycles) avec une probabilité de rupture très faible.

On fait alors une hypothèse conservatrice, on suppose qu'il existe un défaut dans le matériau dont la dimension est égale au seuil de résolution du moyen de contrôle employé. Ensuite on cherche à définir le nombre de cycles nécessaires pour que ce défaut se propage jusqu'à la rupture. Pour cela on réalise des essais de fissuration en employant des éprouvettes fissurées qui sont sollicitées en fatigue.



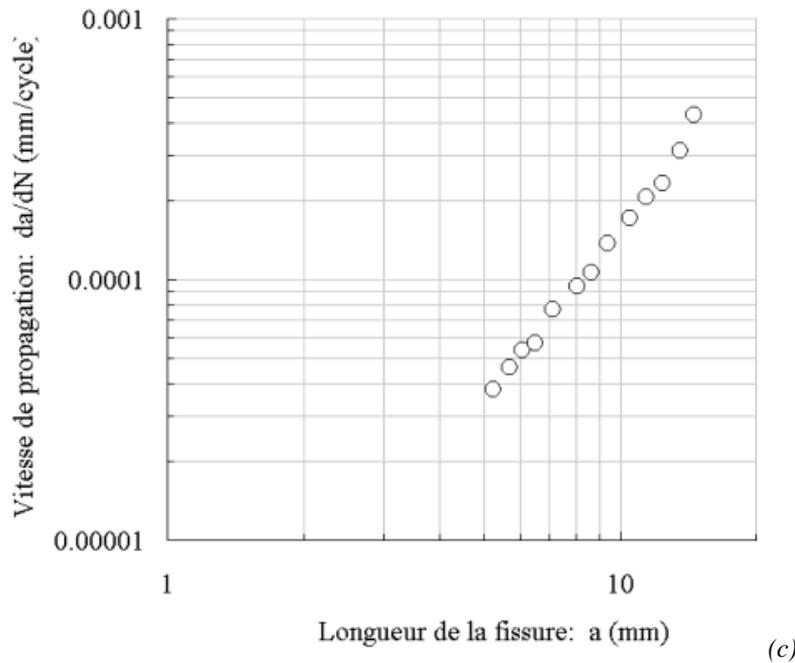


Figure 78 : (a) Exemple d'éprouvette employée pour caractériser la propagation des fissures de fatigue. (b) résultats expérimentaux obtenus par Rami Hamam sur un acier doux pour une amplitude d'effort appliquée constante. (c) La vitesse de fissuration augmente avec la longueur de la fissure.

Lors de ces essais on mesure l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles appliqué pour une amplitude d'effort ou de contrainte constante. On constate en général que la vitesse de propagation de la fissure sous amplitude de contrainte constante dépend fortement de la longueur de la fissure. La mécanique de la rupture permet de définir les paramètres mécaniques contrôlant la vitesse de fissuration.

7.3 Analyse d'un essai de fissuration par fatigue

Finalement, les champs de contraintes et de déformation autour de la zone plastique à l'extrémité de la fissure sont connus pour chaque mode de fissuration si l'on connaît le facteur d'intensité des contraintes. D'autre part, le chargement de fatigue est cyclique. Deux variables s'imposent donc, l'amplitude de variation du facteur d'intensité des contraintes (ΔK) et le rapport de charge $R=K_{\min}/K_{\max}$.

7.3.1 Régimes de fissuration par fatigue, Loi de Paris.

Au début des années soixante, Paris, Gomez et Anderson ont corrélié la vitesse de fissuration par fatigue à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes [Paris, 1961].

Ce diagramme, tracé en coordonnées logarithmiques, fait apparaître trois régimes (Figure 79).

◇ Loi de Paris

Un régime central (régime B), dans lequel la vitesse de fissuration est proportionnelle à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes à une puissance m . Les valeurs de m s'étagent généralement entre 2 et 4, voire 5 pour des alliages peu résistants à la fissuration par fatigue. Dans le cas de l'acier doux étudié m est trouvé égal à 3.5. Ce régime est appelé le régime de Paris [Paris, 1961].

◇ *Ténacité*

Au-delà (régime C), les vitesses de fissuration sont supérieures à celles prévues par la loi de Paris, la fissure se propage de manière instable pour $K_I=K_{IC}$. On appelle K_{IC} la ténacité en mode I du matériau.

◇ *Seuil de non-propagation*

En deçà (régime A), les vitesses de fissuration sont inférieures à celles prévues par la loi de Paris. Lorsque ΔK diminue jusqu'à atteindre le seuil de non-propagation ΔK_{th} , la vitesse de fissuration diminue rapidement, et la fissure semble apparemment s'arrêter ou du moins sa propagation devient indétectable.

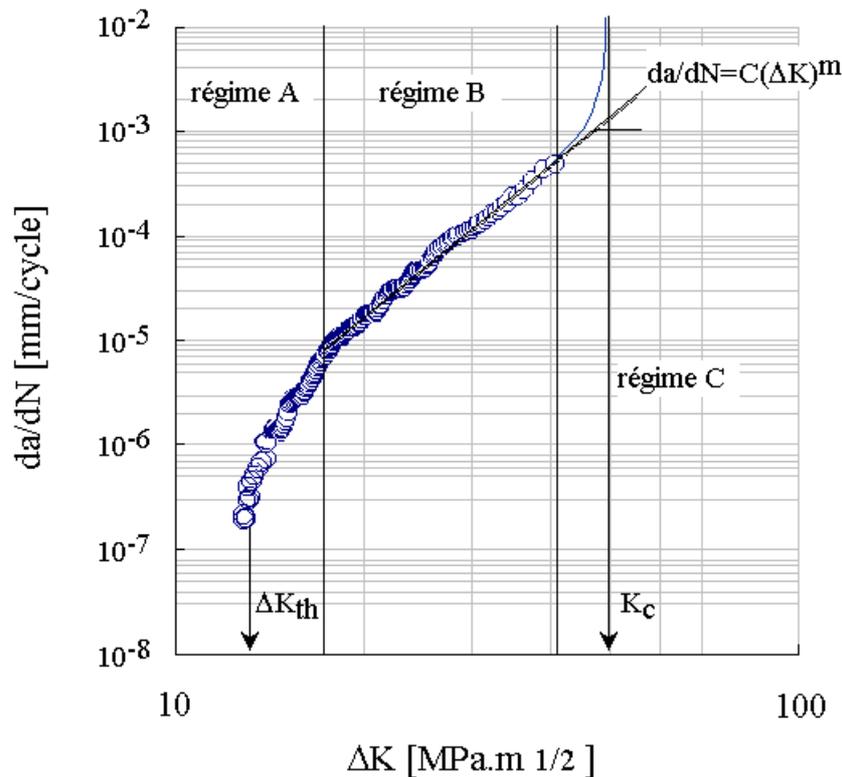


Figure 79 : Vitesses de fissuration mesurée sur éprouvette CT, sur un acier doux à 0.38 % de carbone à température ambiante et $R=0$. [Pommier,2001b], Illustration des différents régimes de propagation par fatigue.

L'intérêt de cette approche en fatigue réside dans la zone B, où régime de Paris, qui permet à l'ingénieur de construire une méthode de dimensionnement des pièces de sécurité. Si l'on considère, par exemple, une fissure centrale de Griffith dans une plaque sollicitée en traction cyclique ($0 < S < S_y$), dont la taille initiale est a_0 . La rupture se produit pour $K=K_c$. La durée de vie se calcule par intégration de la loi de Paris :

$$K = K_c \Rightarrow S_y \sqrt{\pi a_c} = \underbrace{K_c \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{S_y} \right)^2}_{\text{Calcul de la dimension du défaut critique}} \quad \text{avec} \quad \underbrace{\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m}_{\text{Loi de Paris}} \Rightarrow N = \underbrace{\int_{a=a_0}^{a=a_c} \frac{da}{C \cdot (\Delta S_y \sqrt{\pi a})^m}}_{\text{Calcul de la durée de vie par intégration de la loi de Paris entre } a_0 \text{ et } a_c}$$

7.3.2 Origine physique des trois régimes de fissuration par fatigue.

La corrélation entre la vitesse de fissuration macroscopique et le pas des stries sur la surface de rupture a été montrée par R. Pelloux [Pelloux, 1969]. Des mesures précises de pas de stries ont été

réalisées en microscopie à balayage par Nedbal [Nedbal,1989], sur des matériaux variés qui montrent que, dans le régime de Paris, la propagation de la fissure est principalement pilotée par le mécanisme de formation des stries.

Le pas de strie moyen est mesuré sur les surfaces de rupture dans une plage de largeur Δl (Figure 80) [Nedbal,1989]. Le rapport D , entre la vitesse de propagation de la fissure da/dN , et le pas de strie, est tracé sur la Figure 80, en fonction du pas de strie. Pour des pas de strie compris entre $0.05 \mu\text{m}$ et $2 \mu\text{m}$, la vitesse de propagation est de l'ordre d'une strie par cycle. Dans ce régime, la propagation de la fissure est donc bien régie principalement par la formation des stries.

Au-delà, pour un pas de strie supérieur à $2 \mu\text{m}$, il est observé que la vitesse de fissuration est supérieure à une strie par cycle. D'autres mécanismes de rupture contribuent à la propagation tels que des micro-déchirures ductiles et du clivage. Ainsi, dans le régime C, de forts écarts à la loi de Paris sont observés.

Enfin, pour un pas de strie inférieur à $0.05 \mu\text{m}$, la vitesse de fissuration da/dN est inférieure à une strie par cycle (régime A). Le processus de croissance est discontinu, la fissure se propage dans certains grains bien orientés en pointe de fissure, tandis qu'elle reste bloquée en d'autres points [Nedbal,1989]. Ceci introduit un effet d'échelle. En effet, si le nombre de grains sur le front de la fissure est important, il se trouvera toujours des grains dans lesquels la fissure se propage et d'autres où elle est arrêtée. La vitesse de fissuration moyenne est alors faible mais régulière. En revanche, si le nombre de grains sur le front de la fissure est faible, la vitesse de fissuration da/dN est extrêmement variable, au cours de la propagation et d'une fissure à l'autre. Dans ce régime, où la vitesse de fissuration est très faible, les mécanismes physiques dépendants du temps prennent une grande importance ; corrosion de surface, fragilisation par diffusion en volume, croissance d'une couche d'oxyde, relaxation des contraintes.

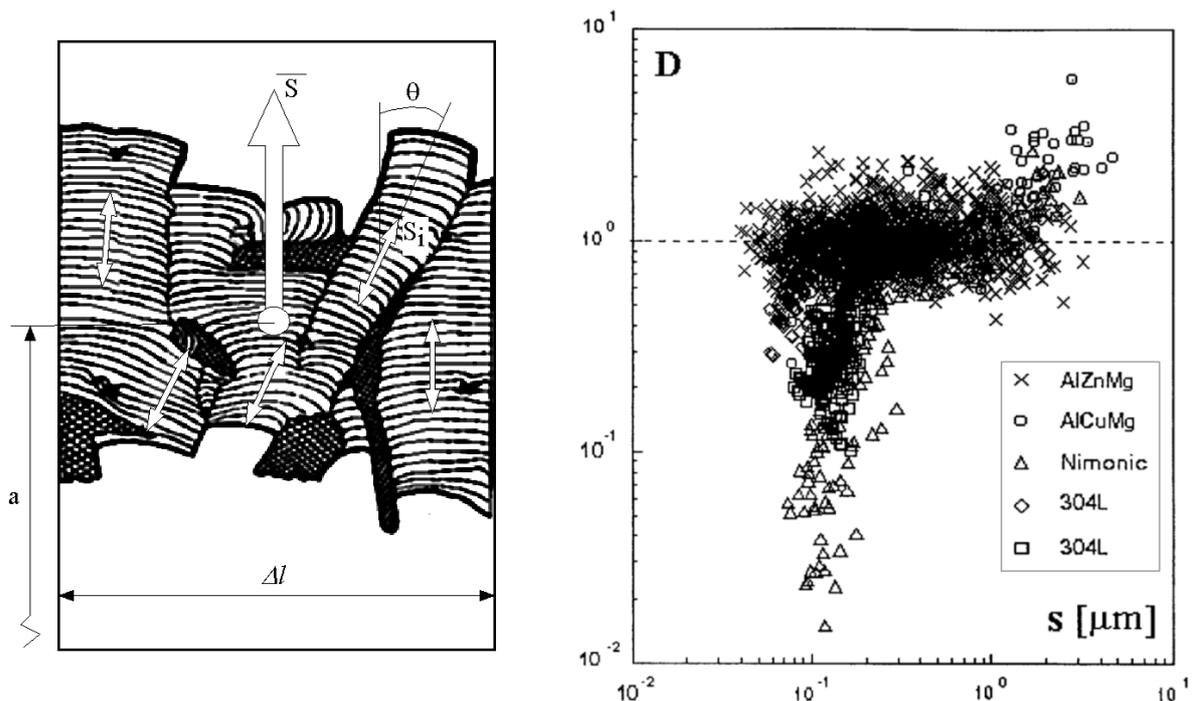


Figure 80 : Méthode de mesure d'un pas de strie moyen sur une surface de rupture à gauche. A droite, rapport D de la vitesse de fissuration mesurée da/dN et du pas de strie S , tracé en fonction du pas de strie pour divers matériaux [Nedbal, 1989].

7.4 Fiche résumé

◇ *Essai de fatigue*

- La fatigue consiste à solliciter cycliquement un matériau, ce qui conduit à son endommagement puis à sa rupture.
- Essais conventionnels, courbes S-N (amplitude de contrainte / nombre de cycles appliqués) ou de Wöhler. Plus l'amplitude de contrainte est faible plus la durée de vie augmente. A même amplitude de contrainte, les résultats expérimentaux sont toujours dispersés.
 - **Domaine de la fatigue oligocyclique**, faible durée de vie, amplitude de contrainte élevée, déformation plastique cyclique. Dispersion faible, Loi de Manson-Coffin : $N_R = A(\Delta\epsilon_p)^n$, N_R nombre de cycles à rupture, $\Delta\epsilon_p$ amplitude de la déformation plastique cyclique.
 - **Domaine de la fatigue à grand nombre de cycles** : phase d'amorçage des défauts, très dispersée, et phase de propagation de ces défauts, moins dispersée. La dispersion augmente lorsque la durée de vie augmente.
 - **Domaine de l'endurance** : durée de vie « infinie », faible amplitude de contrainte, ce domaine n'existe pas toujours.

◇ *Mécanismes d'endommagement, cas des métaux*

- Phase d'amorçage :
 - Amorçage sur des défauts du matériau (inclusion, porosité, retassure etc...) ou se formant au cours de la vie du matériau (rayure, piqûre de corrosion), dispersion des nombres de cycles à l'amorçage.
 - Amorçage par micro-plasticité, des fissures se forment sur les bandes de glissement intenses des dislocations, moins de dispersion
- Phase de propagation : propagation de la fissure cycle à cycle avec formation de stries sur la surface de rupture, en général assez peu de dispersion de la vitesse de fissuration.

◇ *Mécanique de la rupture*

- Modes de fissuration : déplacement relatif des faces de la fissure. Mode I ouverture, Mode II cisaillement plan, Mode III cisaillement antiplan
- Solution élastique connue pour chaque mode, la forme du champ est donnée, son intensité dépend d'un unique paramètre pour chaque mode, le facteur d'intensité des contraintes K_I , K_{II} ou K_{III} . Le facteur d'intensité des contraintes est proportionnel à la contrainte appliquée sur l'éprouvette et proportionnel à la racine d'une dimension caractéristique de la fissure (ex. sa longueur a)
- Essai de fissuration par fatigue, vitesse de fissuration (da/dN) en fonction du facteur d'intensité des contraintes K_I , ou K_{II} ou K_{III}
 - Si l'amplitude ΔK_I est inférieure au seuil de non propagation ΔK_{th} , la vitesse est nulle
 - Dans le régime de Paris : $\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$
 - Si le facteur d'intensité des contraintes atteint une valeur critique appelée ténacité du matériau K_{IC} la fissure se propage de manière brutale

7.5 Problèmes

7.5.1 Choix de matériaux pour la réalisation d'un réservoir sous pression :

Objectifs : Dimensionnement avec prise en compte de la fissuration, ténacité, propagation des fissures de fatigue

On désire réaliser un réservoir destiné à stocker un gaz sous une pression de 21 MPa (210 bars). Le réservoir est dimensionné, pour rester dans son domaine d'élasticité d'une part avec un coefficient de sécurité de 1.6, et d'autre part pour qu'un éventuel défaut conduise à une fuite plutôt qu'à une explosion. Il faudra donc faire intervenir la notion de ténacité du matériau, qui représente sa résistance à la propagation instable d'une fissure.



- Le réservoir est supposé cylindrique à parois minces
- La longueur L est fixée
- Le rayon, l'épaisseur et la masse par unité de longueur sont à déterminer.
- A l'issue de ce dimensionnement, on désire connaître la durée de vie en fatigue de la pièce :
 - après un essai de timbrage (pression test de 1.5 fois la pression de service)
 - après un contrôle non-destructif par ultrasons pour lequel est garantie la détection de défauts dont une dimension est supérieure à 2 mm.

Les propriétés de quelques matériaux sont fournies dans le tableau ci-dessous :

Matériau	Limite d'élasticité ($R_{p0.2}$) (MPa)	densité, (ρ) (kg/m^3)	Ténacité, (K_{IC}) ($\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$)	Exposant de la loi de Paris (m) (da/dN en m/cycles)	Constante de la loi de Paris (C) (da/dN en m/cycles)
20 ND 3	450	7800	220	2.9	$4.3 \cdot 10^{-13}$
35 NCD 16	1500	7800	80	2.5	$3.9 \cdot 10^{-11}$
XC38	325	7800	60	3.5	$1.5 \cdot 10^{-11}$
TA6V	827	4480	96	2.5	$2.4 \cdot 10^{-10}$
7075-T6	620	2700	55	2.88	$1.0 \cdot 10^{-9}$

n.b : Pour simplifier les calculs on suppose que le facteur d'intensité des contraintes se calcule de la façon suivante à partir de la plus grande dimension (2a) d'un défaut : $K_I = 2\sigma_\infty\sqrt{a}$, où σ_∞ est la plus grande contrainte principale.

◇ *Question 1 : Dimensionnement du réservoir*

On se place dans un repère cylindrique dans lequel σ est diagonal
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Calculez σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr}
- Exprimer le critère permettant de vérifier que la pièce reste dans son domaine d'élasticité.
- Exprimer le critère permettant de vérifier qu'il y aura fuite avant rupture. L'éclatement du réservoir étant à éviter dans tout les cas.
- Point de fonctionnement, calculer le couple (rayon, épaisseur) optimal qui est l'intersection des deux critères et noté (R_{opt}, e_{opt}) . Expliquez en quoi ce point est un optimum.
- Calculez l'évolution du rapport $f = \text{volume stocké} / \text{masse de réservoir}$ en fonction du rayon du réservoir. Donnez la valeur maximale de ce rapport.
- A.N. Pour chaque matériau, calculez R_{opt} , e_{opt} , f_{max} . Discutez des choix de matériau en fonction des types de réservoir, grand réservoir terrestre, grand réservoir embarqué, petit réservoir embarqué...

◇ *Question 2 : Calcul de la durée de vie du réservoir.*

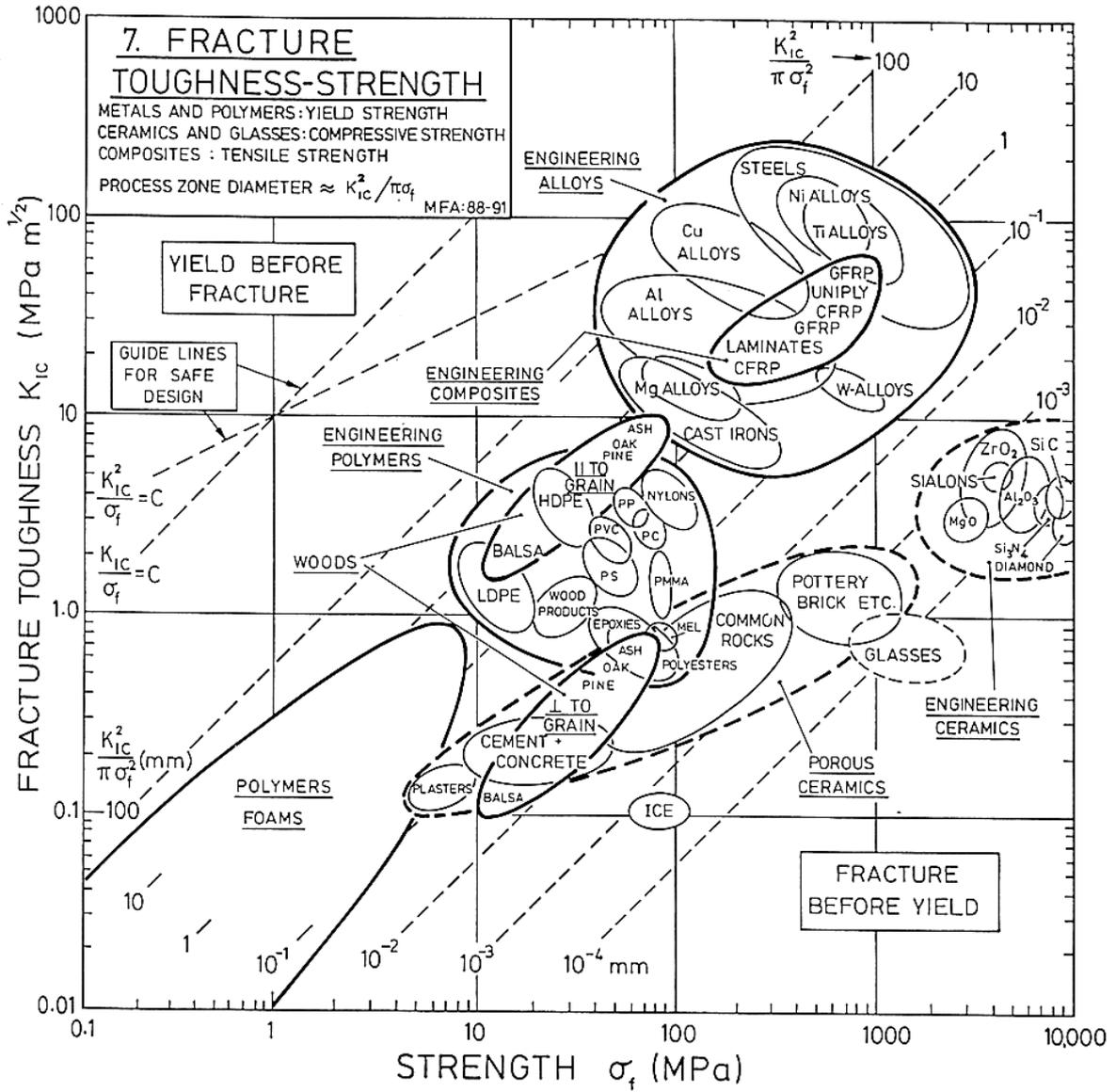
- Essai de Timbrage

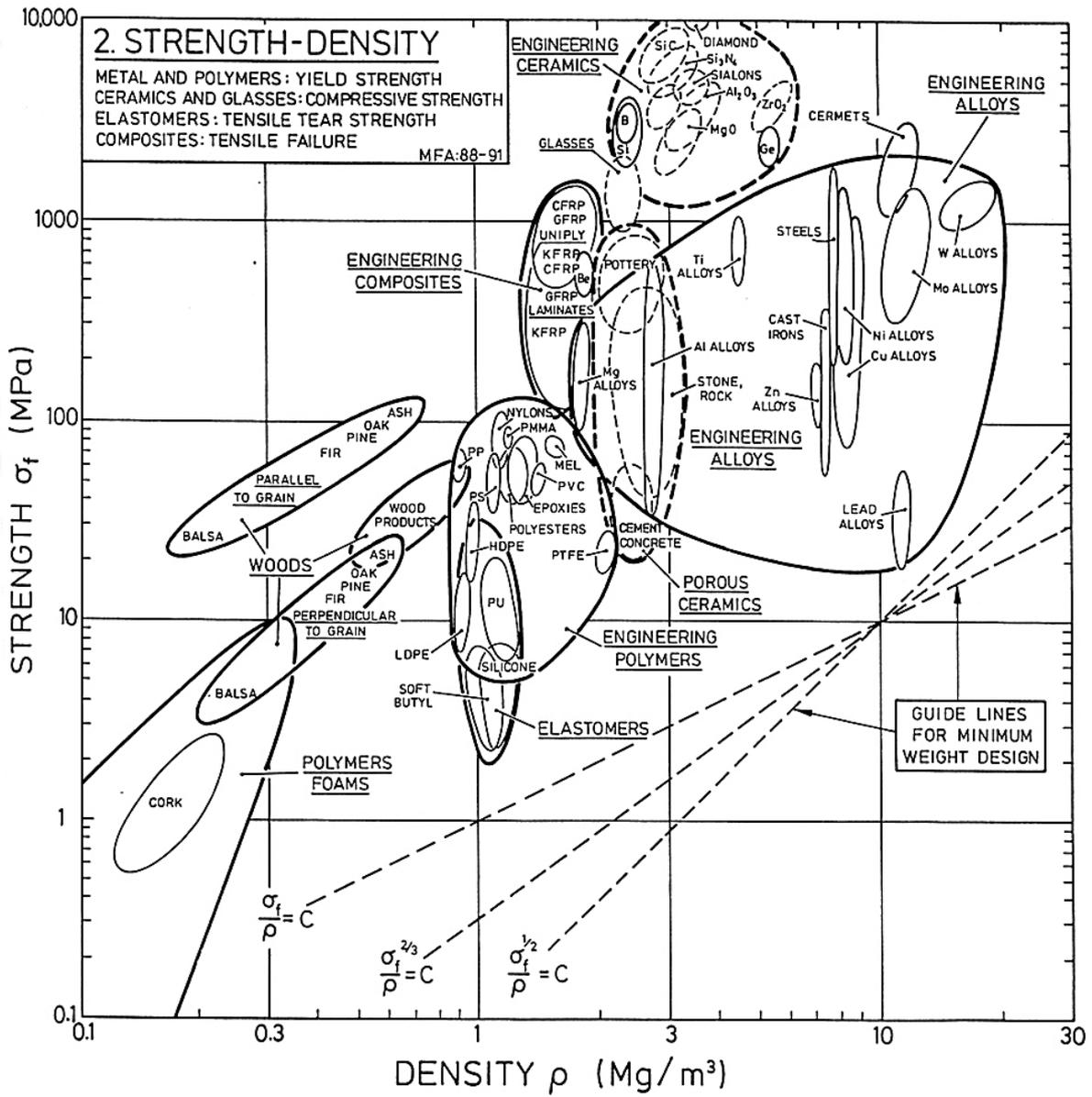
Cet essai est un essai de contrôle destructif. Une pression supérieure à la pression de service (1.5 P) est appliquée au réservoir (d'où le coefficient de sécurité 1.6 sur Rp0.2). Si la pièce contient un défaut tel que $K=K_{IC}$ le réservoir se rompt. L'essai doit être réalisé en fosse. Calculez la valeur maximale a_T du défaut potentiel dans un réservoir qui a résisté à l'essai de timbrage. On suppose que le réservoir a des dimensions optimales $R=R_{opt}$, $e=e_{opt}$.
- Contrôle non-destructif

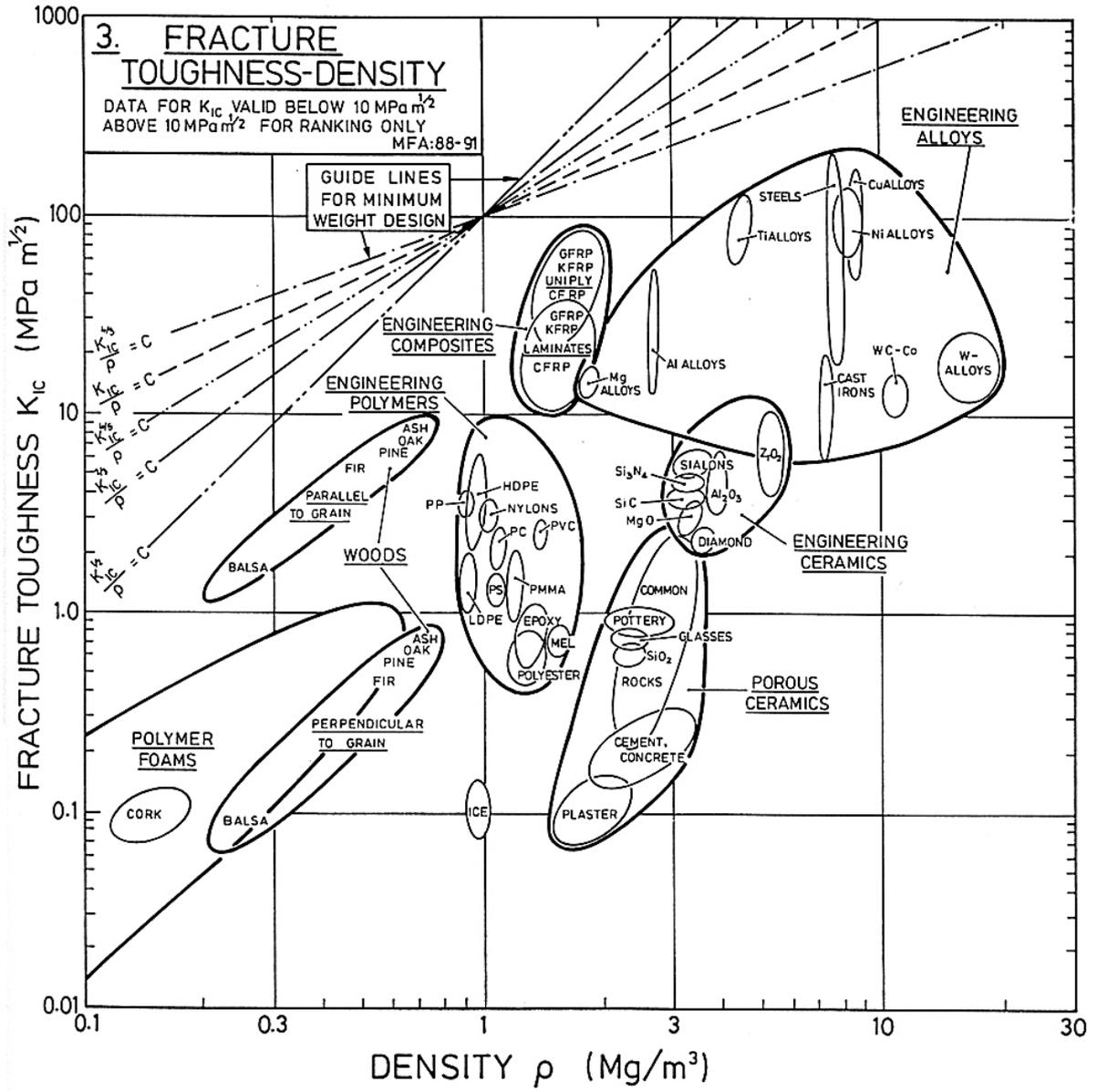
Un contrôle non-destructif par ultrasons permet de détecter des défauts d'une longueur $a_{US}=2\text{mm}$. Dans quel cas doit on appliquer l'essai de timbrage et dans quel cas doit on préférer le contrôle par US.
- Calcul de la durée de vie

Connaissant les coefficients m et C de la Loi de Paris : $\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$, calculez la durée de vie minimale du réservoir, en fonction de la dimension initiale de la fissure ($a=a_T$ ou $a=a_{US}$) et de sa dimension finale.
- A.N. Choix de matériau pour une bouteille de plongée

Calculez les durées de vie du réservoir pour chaque matériau. Quels sont les matériaux candidats pour la réalisation d'une bouteille de plongée ? Quels autres critères devront être pris en compte ? Même question pour la réalisation d'une cuve de centrale nucléaire.







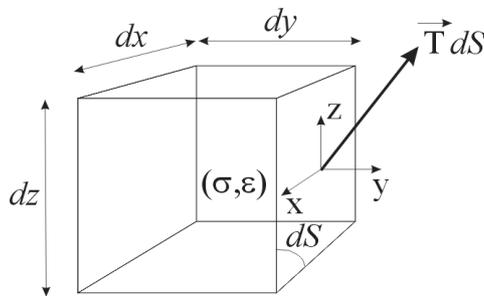
8 ANNEXES

8.1 Quelques rappels de mécanique des milieux continus.

Il s'agit ici de rappeler quelques notions de mécanique des milieux continus, dont nous aurons besoin dans ce cours. Pour le reste, il est fortement conseillé de se reporter au cours de MMC.

8.1.1 Tenseur des contraintes

On se donne un petit volume de matière dV . On suppose, dans le cadre de ce cours, qu'il ne possède pas de mouvement de solide rigide (rotation ou déplacement global significatif) et qu'en outre ses déformations sont très petites. On lui attache donc **un repère cartésien fixe $(0, x, y, z)$** .



On définit alors la contrainte $\underline{\sigma}$ qui s'exerce sur cet élément de volume de la façon suivante : si \vec{T} est la force par unité de surface qui s'exerce sur l'une de ses faces de normale \vec{n} , alors $\underline{\sigma}$ est tel que :

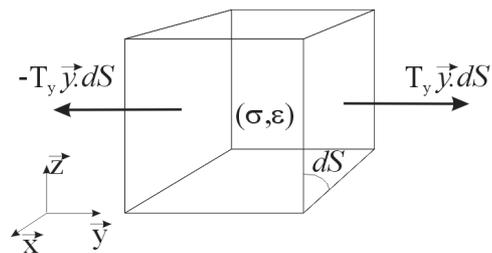
$$\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$$

T étant un vecteur « force par unité de surface » à trois composantes, et la normale à la face du volume étant un vecteur directeur à trois composantes, $\underline{\sigma}$ est un opérateur 3x3, appelé **tenseur des contraintes**, dont les composantes sont des efforts par unité de surface.

◇ Exemple n°1 : traction simple

Si un cube de matière est en équilibre sous un effort par unité de surface T_y appliqué sur sa face droite et dirigé selon la direction y et sous un effort par unité de surface $-T_y$ appliqué sur sa face gauche et dirigé selon la direction y , et qu'aucun autre effort ne s'exerce sur l'élément de volume, alors le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z)} = T_y \vec{y} \otimes \vec{y}$$



On peut ainsi utiliser soit la notation matricielle, en précisant dans quelle base sont exprimées les composantes du tenseur, soit la notation tensorielle qui est telle que, soit trois vecteurs quelconques $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, le tenseur noté $\vec{a} \otimes \vec{b}$ est un opérateur linéaire tel que, si on l'applique à un vecteur \vec{c} quelconque le résultat obtenu est le produit scalaire des vecteurs \vec{b} et \vec{c} porté par le vecteur \vec{a} , soit:

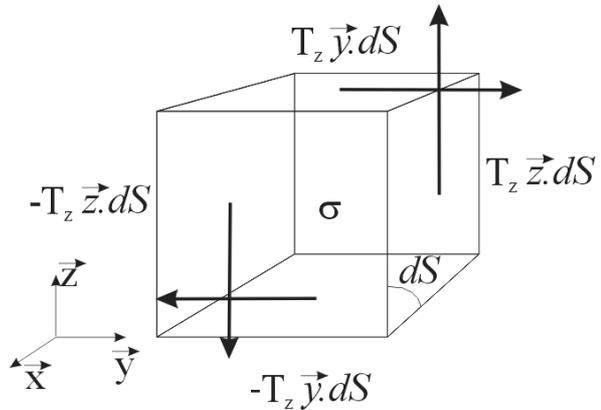
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

◇ Exemple n°2 : cisaillement

Si le volume de matière est en équilibre sous un effort par unité de surface T_z dirigé sur sa face droite selon la direction z et sur sa face gauche selon la direction $-z$, et qu'aucun autre effort ne s'exerce sur l'élément de volume, alors un couple dirigé selon la direction x apparaît.

On fait l'hypothèse, en mécanique des milieux continus, que l'on ne transmet pas de couple à l'échelle de l'élément de volume. Cela impose que le tenseur des contraintes soit symétrique. Dans notre cas particulier, des efforts s'exercent donc sur les faces de normale z , et le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z \\ 0 & T_z & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = T_z (\vec{y} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{y})$$



◇ Cas général

Pour un chargement quelconque de l'élément de volume, le tenseur des contraintes s'écrit de la façon suivante, en notation matricielle ou tensorielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

ou

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} (\vec{x} \otimes \vec{x}) + \sigma_{yy} (\vec{y} \otimes \vec{y}) + \sigma_{zz} (\vec{z} \otimes \vec{z}) + \sigma_{xy} (\vec{x} \otimes \vec{y} + \vec{y} \otimes \vec{x}) + \sigma_{xz} (\vec{x} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{x}) + \sigma_{yz} (\vec{y} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{y})$$

Alors l'effort s'exerçant sur une facette quelconque de normale \vec{n} et de surface dS se calcule comme suit :

$$\vec{F}_{ndS} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS = dS \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ndS} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS = (\bar{x} \cdot \vec{n}) \sigma_{xx} dS \bar{x} + (\bar{y} \cdot \vec{n}) \sigma_{yy} dS \bar{y} + (\bar{z} \cdot \vec{n}) \sigma_{zz} dS \bar{z} \\ &+ \sigma_{xy} dS ((\bar{y} \cdot \vec{n}) \bar{x} + (\bar{x} \cdot \vec{n}) \bar{y}) + \sigma_{xz} dS ((\bar{z} \cdot \vec{n}) \bar{x} + (\bar{x} \cdot \vec{n}) \bar{z}) \\ &+ \sigma_{yz} dS ((\bar{y} \cdot \vec{n}) \bar{z} + (\bar{z} \cdot \vec{n}) \bar{y}) \end{aligned}$$

8.1.2 Tenseur des déformations

On définit également la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ de l'élément de volume de la façon suivante. Si \vec{u} est le champ de déplacement des points de la matière entre un état initial et un état actuel infiniment proche :

$$\vec{u} = u_x(x, y, z) \bar{x} + u_y(x, y, z) \bar{y} + u_z(x, y, z) \bar{z}$$

Alors, la déformation de la matière entre l'état initial et l'état actuel, se calcule de la façon suivante dans un repère cartésien :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

◇ Exemples :

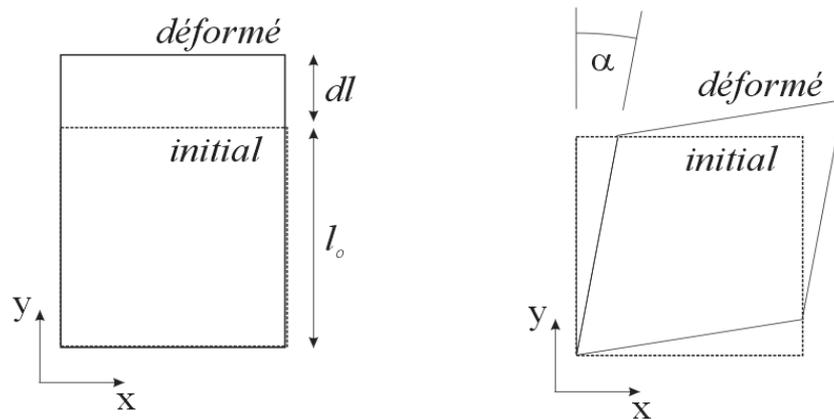


Figure 81 : élongation simple à gauche et cisaillement simple à droite.

Cas de l'élongation simple

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dl}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{dl}{l_0} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y$$

Cas du cisaillement simple

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \alpha (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x)$$

8.1.3 Puissance de déformation

On peut alors calculer la densité volumique de puissance des efforts appliqués à un élément de volume dV comme la trace du produit du tenseur des contraintes par le tenseur des vitesses de déformation (voir cours de MMC ou faire un bilan de puissance sur un cube) :

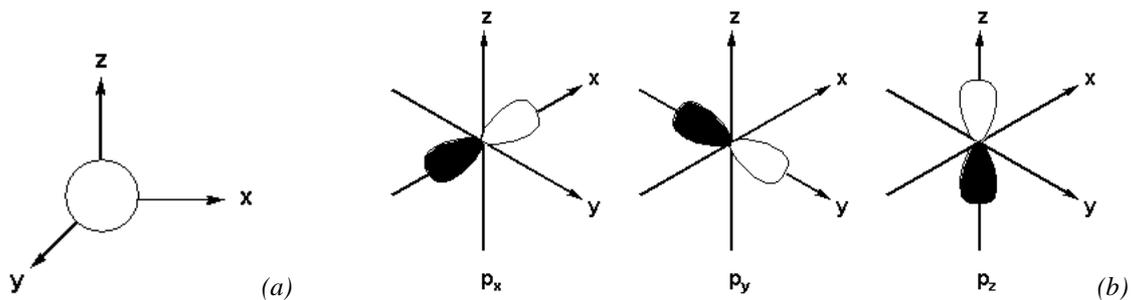
$$P_{ext} = Tr \left(\underline{\underline{\sigma}} \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} \right)$$

8.2 Quelques rappels de physique.

◇ Orbitales atomiques

L'atome est constitué d'un noyau (neutrons et de protons) et d'électrons chargés négativement. Le numéro atomique Z représente le nombre de protons et d'électrons dans le noyau.

Autour d'un noyau existent des régions appelées orbitales dans lesquelles un électron a une probabilité de 95 % de se trouver. Les orbitales ont des formes différentes selon le nombre quantique λ qui les caractérise (orbitales s, p, d, f). Le nombre quantique magnétique m détermine la direction de l'orbitale.



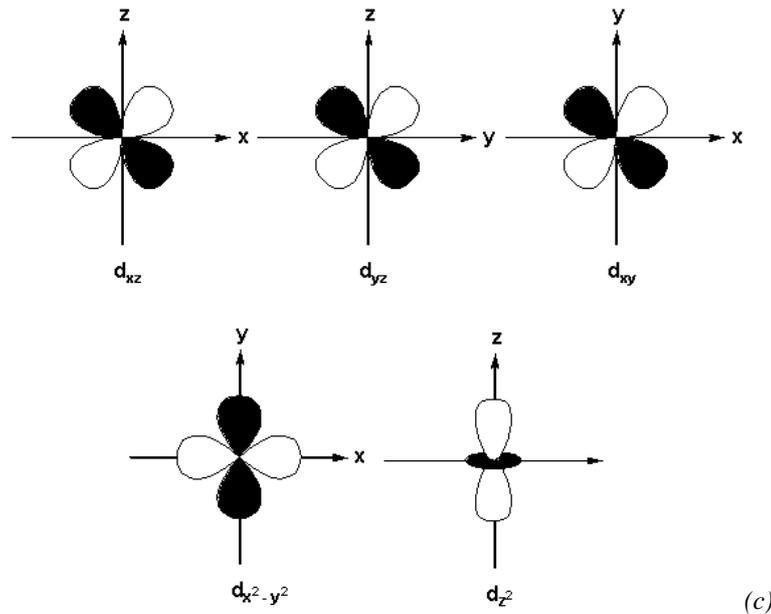


Figure 82 (a) Les orbitales s : $\lambda = 0$ et $m = 0$, contiennent jusqu'à 2 électrons (b) Les orbitales p : $\lambda = 1$ et $m = -1, 0, +1$, contiennent jusqu'à 6 électrons (c) Les orbitales d : $\lambda = 2$ et $m = -2, -1, 0, +1, +2$ contiennent jusqu'à 10 électrons

Les orbitales représentées sur la Figure 82 se déforment lorsque se forme une liaison. Dans les cristaux métalliques, les orbitales extérieures des atomes coalescent pour former une orbitale continue dans tout le cristal. Cette continuité permet aux électrons de se déplacer dans tout le cristal, ce qui donne aux métaux leur caractère conducteur.

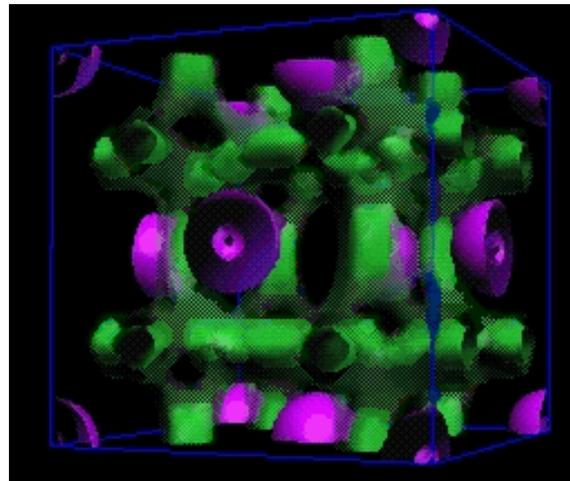


Figure 83 : Orbitales dans un cristal d'Aluminium. Les orbitales externes des atomes d'Al ont coalescé lors de la formation du cristal ce qui conduit à un domaine de présence pour l'électron continu à travers tout le cristal, ce qui lui donne son caractère conducteur (<http://www.lct.jussieu.fr/silvi/metal.html>).

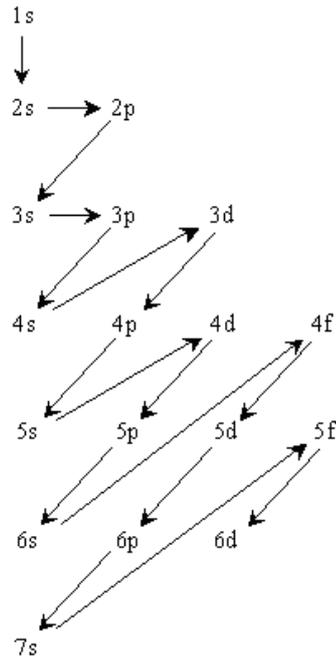
◇ Règle de remplissage des orbitales atomiques

Si le numéro atomique de l'élément est Z , il faut distribuer Z électrons sur les différentes orbitales autour du noyau.

Règle 1) dans une orbitale, deux électrons seulement peuvent coexister, celui de spin $+1/2$ et celui de spin $-1/2$.

Règle 2) Les orbitales s contiennent 2 électrons au plus, les orbitales p six électrons au plus, et les orbitales d 10 électrons au plus.

Règle 3) Les orbitales sont remplies dans l'ordre suivant (règle de Klechkowski)



Règle 4) un couple d'électrons de spins opposés est plus stable qu'un couple d'électrons de même spin.

Règle 5) une orbitale pleine est plus stable qu'une orbitale partiellement remplie.

Notation) On décrit la structure électronique d'un atome, comme suit, d'abord le numéro de la couche, ensuite la lettre caractérisant l'orbitale (s, p, d, ou f) et enfin le nombre d'électrons dans cette orbitale. Ainsi pour un atome de numéro atomique $Z=11$, aura-t-on la structure suivante ($1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$)

◇ *Table de Mendeleev.*

La table de Mendeleev permet de classer les éléments selon leurs propriétés chimiques. On y distingue essentiellement :

Des lignes horizontales appelées périodes dans lesquelles les éléments sont disposés de gauche à droite selon l'ordre croissant de leur numéro atomique Z .

Des colonnes verticales qui correspondent à des "familles" ou des groupes chimiques, les éléments définis par une colonne possèdent une configuration électronique identique de leur couche externe et donc des propriétés chimiques voisines.

		Groupes																	
		1											13	14	15	16	17	18	
		s1											p1	p2	p3	p4	p5	p6	
Périodes	1	1 H 1.008											13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.07	17 Cl 35.45	18 Ar 39.95	
	2	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.81	6 C 12.01	7 N 14.01	8 O 16.00	9 F 19.00	10 Ne 20.18
	3	11 Na 22.99	12 Mg 24.31	3 d1	4 d2	5 d3	6 d4	7 d5	8 d6	9 d7	10 d8	11 d9	12 d10	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.07	17 Cl 35.45	18 Ar 39.95
	4	19 K 39.10	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.88	23 V 50.94	24 Cr 52.00	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.93	28 Ni 58.69	29 Cu 63.55	30 Zn 65.39	31 Ga 69.72	32 Ge 72.39	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.90	36 Kr 83.80
	5	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc (98)	44 Ru 101.1	45 Rh 102.9	46 Pd 106.4	47 Ag 107.9	48 Cd 112.4	49 In 114.8	50 Sn 118.7	51 Sb 121.8	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.3
	6	55 Cs 132.9	56 Ba 137.3	57 La *(138.9)	72 Hf 178.5	73 Ta 180.9	74 W 183.9	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 190.2	78 Pt 195.1	79 Au 197.0	80 Hg 200.5	81 Tl 204.4	82 Pb 207.2	83 Bi 209.0	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
	7	87 Fr (223)	88 Ra (226)	89 Ac ~(227)	104 Rf (257)	105 Db (260)	106 Sg (263)	107 Bh (262)	108 Hs (265)	109 Mt (266)	110 Ds (271)	111 Uuu (272)	112 Uub (277)						

Figure 84 : Tableau périodique des éléments (Los Alamos National Laboratory's Chemistry Division.)

8.3 Le facteur d'intensité des contraintes

Le facteur d'intensité des contraintes a été introduit par Irwin [Irwin,1957] en utilisant la méthode de résolution de Weestergaard [Westergaard,1939] et les travaux de mathématiciens soviétiques comme Mushkevichvili. Un calcul approché avait été effectué auparavant par Williams qui permet de généraliser la forme de la solution à toute géométrie de fissure [Williams, 1952].

8.3.1 Méthode de résolution de problèmes plans en élasticité isotrope.

En élasticité plane, le tenseur des contraintes ne contient que trois inconnues, σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{yy} . Le tenseur des contraintes recherché doit satisfaire l'équilibre des efforts :

$$\overrightarrow{Div} \underline{\underline{\sigma}} + \overrightarrow{f}_v = \rho \vec{a}$$

Si le problème est statique, si les forces de volume sont négligeables, et pour un problème plan (x,y) l'équilibre se traduit donc par deux équations sur les termes du tenseur des contraintes :

$$\overrightarrow{Div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow_{2D} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

En petites déformations, le champ de déplacement (u) permet de définir le tenseur des déformations ($\underline{\varepsilon}$) et d'en déduire les équations de compatibilité entre les termes de ce tenseur :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^T) \xrightarrow{2D} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

L'équation de compatibilité des déformations permet de déduire une troisième équation sur les termes du tenseur des contraintes en utilisant la loi de comportement pour l'élasticité isotrope.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\ \quad + \text{Loi de Hooke} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \end{array} \right. \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2}$$

Le problème comporte donc trois fonctions inconnues (σ_{xx} , σ_{yy} , et σ_{xy}) et trois équations différentielles à deux variables spatiales (x et y). La fonction d'Airy (F), permet de le ramener à un problème comportant une seule inconnue (F) et une seule équation différentielle à deux variables spatiales (x et y). Si F est choisie telle que :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Rightarrow \left\{ 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0} \right\}$$

Les deux équations d'équilibre sont automatiquement vérifiées par le choix même de la fonction F et l'équation de compatibilité devient une équation biharmonique. On peut encore simplifier le problème en introduisant une variable complexe $z=x+iy$, et une fonction complexe $Z(z)$. On remarque alors que :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad Z = f(z) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = Z^{(1)} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = iZ^{(1)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = Z^{(4)} \\ \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} = -Z^{(4)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = 0 \quad \forall Z = f(z)$$

On montre ainsi que si la fonction d'Airy F est exprimée comme une combinaison de parties réelles et imaginaires de Z , xZ ou yZ , alors l'équation bi-harmonique est toujours vérifiée. La difficulté se réduit maintenant à trouver la fonction complexe Z , d'une unique variable complexe z , qui vérifie toutes les conditions aux limites et de symétrie du problème.

8.3.2 Fonction de Westergaard.

La fonction de Westergaard [Westergaard, 1939] s'applique à des problèmes qui présentent une symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$. C'est bien le cas de la fissure de Griffith. A l'infini :

$$\sigma_{\infty} = S(\bar{e}_x \otimes \bar{e}_x + \bar{e}_y \otimes \bar{e}_y) \quad \text{Avec l'expression de F : } \begin{cases} S = \frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial x \partial y} \\ S = \frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\infty} = S \frac{y^2}{2} + f_1(x)y + f_2(x) \\ F_{\infty} = h_1(y)y + h_2(x) \\ F_{\infty} = S \frac{x^2}{2} + g_1(y)x + g_2(y) \end{cases}$$

Ceci implique que : $F_{\infty} = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c_1 x + c_2 y + c$, où c_1 , c_2 et c sont des constantes.

Mais compte tenu de la symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$, c_1 et c_2 sont nulles et : $F_{\infty} = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c$

Il faut maintenant exprimer la condition de chargement biaxial à l'infini sous la forme d'une condition aux limites pour Z .

$$\text{Posons : Si } Z_{\infty} = S \frac{z^2}{2} + c, \Rightarrow Z_{\infty} = S \frac{x^2 - y^2}{2} + c + i.Sxy \quad \text{et} \quad y \frac{\partial Z_{\infty}}{\partial y} = -Sy^2 + iSxy$$

$$\text{Avec } F = \text{Re}(Z) + y \text{Im}(Z^{(1)}) \text{ alors } F_{\infty} = \text{Re} \left[Z_{\infty} - y \frac{\partial Z_{\infty}}{\partial y} \right] = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c$$

Avec l'expression des termes du tenseur des contraintes en fonction de F , et cette expression de F en fonction de Z , le problème s'écrit, en éliminant F :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \text{Re} Z^{(2)} - y \text{Im} Z^{(3)} \\ \sigma_{yy} = \text{Re} Z^{(2)} + y \text{Im} Z^{(3)} \\ \sigma_{xy} = -y \text{Re} Z^{(3)} \end{cases} \quad \text{et} \quad Z_{\infty}^{(1)} = Sz$$

Cette solution est applicable à tout problème plan quasistatique et en élasticité infinitésimale isotrope, présentant une symétrie par rapport à $x=0$ et à $y=0$.

8.3.3 Singularité en pointe de fissure.

On dispose désormais d'une expression des contraintes en fonction de Z et de la condition aux limites pour Z à l'infini. Il reste maintenant à introduire la ou les fissures avec une symétrie par rapport à x et y .

Dans le cas de la fissure de Griffith (Figure 4.1), le champ de contrainte présente deux singularités aux deux extrémités de la fissure. C'est à dire en $y=0$ et $x=-a$ et en $y=0$ et $x=a$, soit en $z=a$ et $z=-a$. Il vient que les dérivées seconde et troisième de Z ont en facteur le terme $(z^2 - a^2)^{\beta}$, où β est négatif. De plus, la valeur à l'infini de Z permet de définir les degrés en z de $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ et $Z^{(3)}$. Si l'on pose :

$$Z^{(1)} = S\sqrt{z^2 - a^2} \quad \text{alors} \quad Z_{\infty}^{(1)} = Sz \quad \text{et} \quad Z^{(2)} = \frac{Sz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad Z^{(3)} = \frac{-Sa^2}{(\sqrt{z^2 - a^2})^3}$$

Cette solution vérifie les conditions aux limites à l'infini (z grand devant a) et présente deux singularités en $z=a$ et $z=-a$. Comme on connaît l'expression des composantes du tenseur des contraintes en fonction de Z , on dispose d'une expression exacte du champ de contrainte dans la plaque infinie percée d'une fissure de Griffith centrale. On trouve de la même manière les solutions pour d'autres problèmes de fissures avec une symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$. Une plaque multifissurée, par exemple.

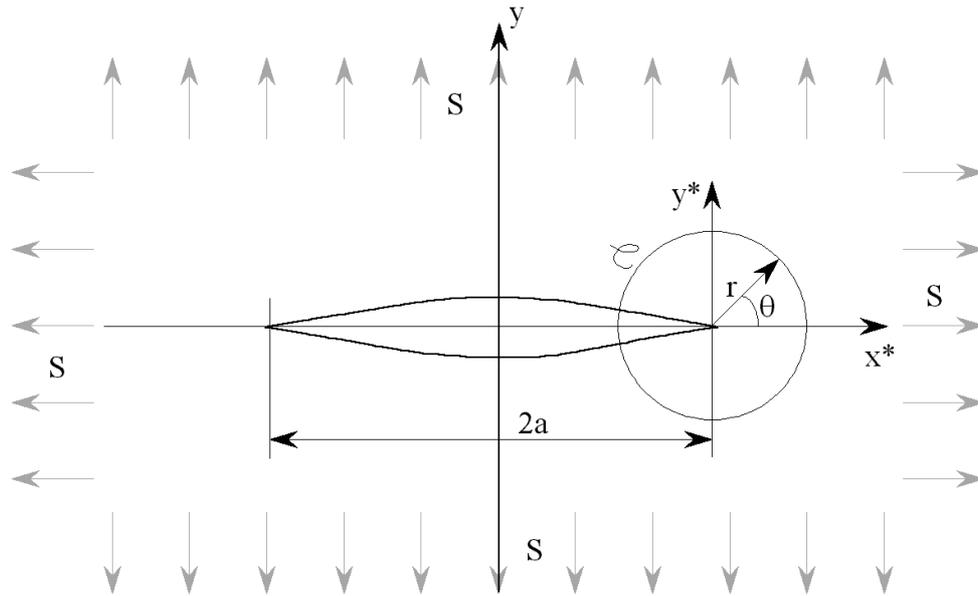


Figure 4.1: Fissure de Griffith et changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques centrées sur l'une des pointes de la fissure

Pour établir un critère de rupture [Irwin, 1957], il faut maintenant isoler la région à l'extrémité de la fissure. Pour cela, on effectue un changement de variable de façon à se placer en coordonnées polaires, autour de l'une des deux extrémités de la fissure [Irwin, 1957] (Figure 4.1) et un développement asymptotique au premier ordre :

$$\left. \begin{array}{l} z = a + r.e^{i\theta} \\ r \ll a \end{array} \right\} \Rightarrow Z^{(2)} = S \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} .e^{-i\theta/2} \quad \text{et} \quad Z^{(3)} = -\frac{S}{r} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} .e^{-i3\theta/2}$$

Il suffit d'exprimer les composantes du tenseur des contraintes, pour en déduire les champs de contrainte à l'extrémité de la fissure. On introduit aussi, historiquement, le périmètre du contour $C : (2\pi r)$. Si le chargement, biaxial à l'infini, présente des intensités différentes dans les deux directions principales x et y , le résultat dérive du calcul ci-dessus par superposition. En effet, la composante selon $\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x$ ne se projette sur aucun mode de fissuration et n'interfère donc pas avec la fissure. L'expression de la solution asymptotique pour les contraintes à l'extrémité de la fissure est donc, après développements, pour un chargement biaxial à l'infini :

$$\text{Si } \sigma_{\infty} = S_x \cdot \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + S_y \cdot \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y \Rightarrow \sigma_{\infty} = S_y \cdot (\vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x) + (S_x - S_y) \cdot \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x$$

$$\text{alors : } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + (S_x - S_y) \\ \sigma_{yy} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

8.3.4 Facteur d'intensité des contraintes.

La propriété remarquable de cette solution est que le **même** terme amplificateur $(S_y(\pi a)^{1/2})$ apparaît dans **toutes** les composantes du tenseur des contraintes. Si $|S_x - S_y| \ll S_y \sqrt{\pi a}$, la forme du champ des contraintes et des déformations à l'extrémité de la fissure est donc indépendante de la géométrie de la fissure et des contraintes appliquées sur la structure. Seule l'intensité de ces champs en dépend. Les critères de rupture peuvent donc s'écrire en fonction d'une seule quantité mécanique, le facteur d'intensité des contraintes [Irwin, 1957]. C'est un résultat important, puisque le nombre de paramètres d'un critère (et donc le nombre d'essais de caractérisation nécessaires) est a priori une fonction puissance du nombre de variables qui interviennent dans le critère.

Pour la fissure de Griffith, le facteur d'intensité des contraintes K (ici en mode I) et la contrainte T, sont définis

$$\text{de la façon suivante } \begin{cases} K_I = S_y \sqrt{\pi a} \\ T = S_x - S_y \end{cases}.$$

Et dans le cas général, le champ de contrainte à l'extrémité de la fissure s'écrit, en mode I :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned}$$

Les solutions analytiques pour les trois modes ont été déterminées de manière similaire. En contraintes planes $\sigma_{zz}=0$ et $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ et en déformations planes $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$ et $\kappa=3-4\nu$. (Les expressions du facteur d'intensité des contraintes pour un grand nombre de géométries et de cas de chargement des fissures peuvent être trouvées dans les ouvrages de Tada, Paris et Irwin. [Tada,1985] et de Murakami [Murakami,1987]).

Solution asymptotique en mode I

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}$$

Solution asymptotique en mode II

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

Solution asymptotique en mode III

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & u_z &= \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} &= 0\end{aligned}$$

8.3.5 Quelques expressions du facteur d'intensité des contraintes.

On donne ci-dessous l'expression du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la longueur de la fissure et du chargement pour quelques géométries classiques d'éprouvettes.

◇ *Eprouvette CCT : center cracked tension (Figure 85)*

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{1 - 0.025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{b} \right)^4}{\sqrt{\cos \left(\frac{\pi a}{2b} \right)}}$$

◇ *Eprouvette DENT : double edge noched tension (Figure 85)*

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{1.122 - 0.561 \left(\frac{a}{b} \right) - 0.205 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.471 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 0.190 \left(\frac{a}{b} \right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$$

◇ *Eprouvette SENT : single edge noched tension (Figure 85)*

L'éprouvette est soumise à un effort axial F par unité d'épaisseur et à un couple par unité d'épaisseur M . Dans l'éprouvette non fissurée la contrainte est maximale sur la face gauche et minimale sur la face droite et varie linéairement entre ces deux points. On a alors :

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{2b} + \frac{6M}{b^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\min} = \frac{F}{2b} - \frac{6M}{b^2}$$

Alors le facteur d'intensité des contraintes se calcule comme suit :

$$K_I = K_I^F + K_I^M$$

Avec

$$K_I^F = \sigma\sqrt{\pi a} \left(1.122 - 0.231 \left(\frac{a}{2b} \right) + 10.55 \left(\frac{a}{2b} \right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{2b} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{2b} \right)^4 \right)$$

Et

$$K_I^M = \sigma\sqrt{\pi a} \left(1.122 - 1.4 \left(\frac{a}{2b} \right) + 7.33 \left(\frac{a}{2b} \right)^2 - 13.08 \left(\frac{a}{2b} \right)^3 + 14.0 \left(\frac{a}{2b} \right)^4 \right)$$

Ces formules sont correctes à 5% près de $a=0$ jusqu'à $a=1.2b$.

◇ *Calcul par superposition (Figure 85)*

Si maintenant le champ de contrainte dans l'éprouvette non fissurée prend une forme plus complexe, on peut alors calculer le facteur d'intensité des contraintes en utilisant le principe de superposition.

Supposons un chargement de forme complexe $\sigma_{yy}(x)$ dans l'éprouvette non-fissurée.

Alors un point à la distance c de la surface de l'éprouvette non-fissurée, situé sur le plan où se trouverait la fissure si l'éprouvette était fissurée, est soumis à un effort P par unité d'épaisseur $P = \sigma_{yy}(c)dc$

Le facteur d'intensité des contraintes correspondant se calcule comme suit :

$$dK_I(c) = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{3.52 \left(1 - \frac{c}{a} \right)}{\left(1 - \frac{a}{2b} \right)^{3/2}} - \frac{\left(4.35 - 5.28 \frac{c}{a} \right)}{\left(1 - \frac{a}{2b} \right)^{1/2}} + \left\{ \frac{1.30 - 0.30 \left(\frac{c}{a} \right)^{3/2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2}} + 0.83 - 1.76 \frac{c}{a} \right\} \left\{ 1 - \frac{a}{2b} \left(1 - \frac{c}{a} \right) \right\} \right)$$

Alors le facteur d'intensité des contraintes pour le champ de contrainte complexe se calcule comme suit :

$$K_I = \int_{c=0}^{c=a} dK_I(c)dc$$

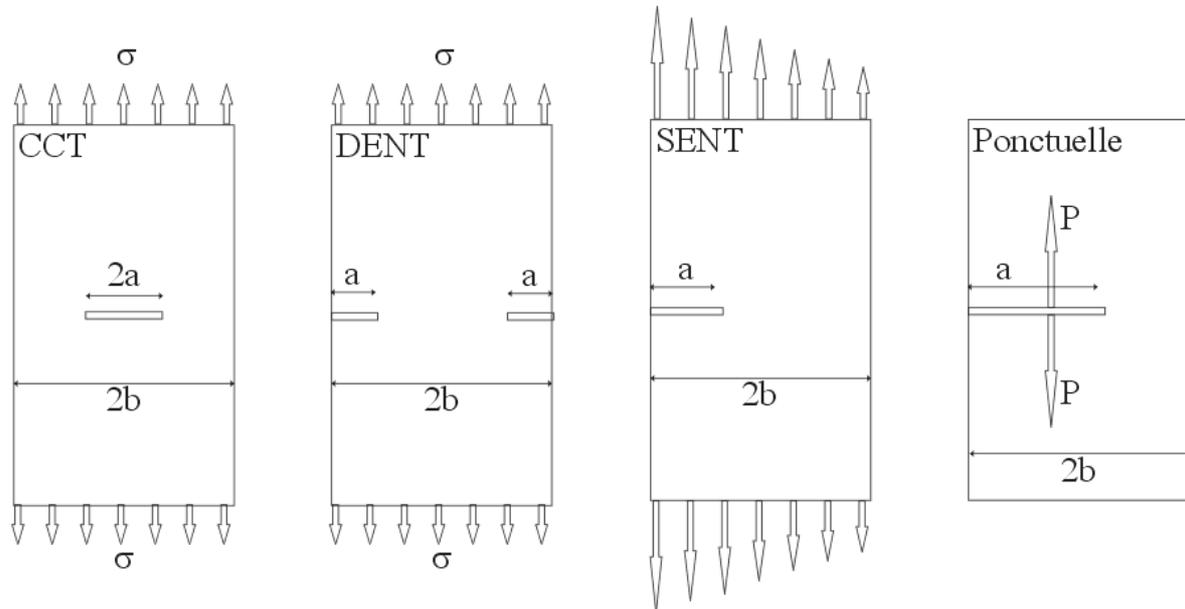


Figure 85 : Quelques géométries de structures fissurées (CCT) center cracked tension, (DENT) double edge notched tension, (SENT) single edge notched tension, la dernière permet par superposition de calculer des cas de chargement plus complexes.



Le Verre Blindé

Problème

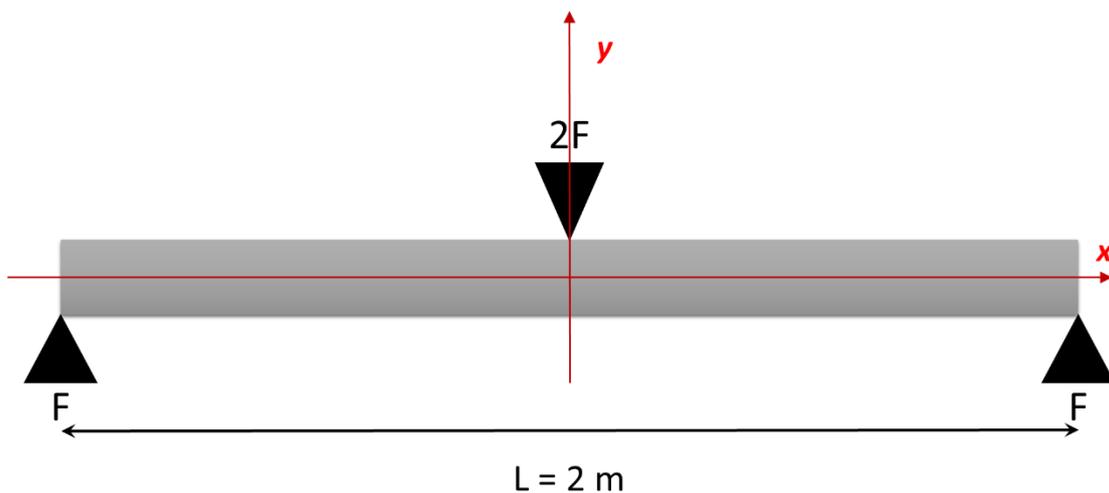
Le verre blindé est un assemblage de plusieurs feuilles de verre associées entre elles par des films intercalaires de polymère thermoplastique. Cet assemblage est aussi appelé verre feuilleté.

Il est utilisé pour des applications variées de sécurité bâtiment, automobile, aéronautique ou ferroviaire avec des critères et des normes variant selon les besoins ou les applications. En aéronautique, par exemple, le pare-brise d'un l'avion doit résister aux impacts d'oiseaux (oies dans le pire des cas). Les essais consistent à envoyer des poulets (non congelés !) sur le pare-brise du cockpit, à des vitesses de plus de 800 km/h. Dans le cas du transport ferroviaire, le risque principal est un acte de malveillance, les pare brises sont donc dimensionnés pour ne pas être traversés par un parpaing de 20 kg lancé à 300 km/h sur le pare-brise. 300 km/h étant la vitesse d'un TGV. Pour l'automobile, il s'agit principalement de contenir les morceaux du pare-brise en cas d'accident avec un autre véhicule pour éviter que les fragments ne blessent le conducteur ou les passagers (essai d'impact par un autre véhicule à 50km/h). Enfin pour le bâtiment ou l'automobile peuvent aussi être utilisés des verres blindés pour résister aux effractions et aux tirs d'armes à feu.

Nous allons étudier ici le comportement d'un verre blindé selon le nombre et les épaisseurs de ses couches de verre et de film intercalaire.

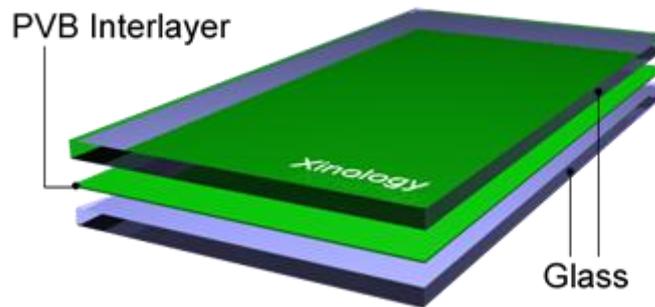
Hypothèses du problème

Pour simplifier l'étude du problème, bien que ce soit peu réaliste, on le traitera en bidimensionnel plutôt qu'en tridimensionnel. On considère ainsi une plaque de vitrage de longueur $L = 2\text{ m}$ et de largeur $W = 1\text{ m}$ travaillant en flexion 3 points. On notera e_{tot} son épaisseur. On fera l'hypothèse que le vitrage est soumis à un impact « mou », tel que le choc d'un oiseau, et que l'effet de cet impact peut être assimilé à un effort $2F$ appliqué au centre de la plaque (F dépendant de la masse et de la vitesse de l'oiseau) et mettant celle-ci en flexion.



La plaque de vitrage est constituée de plusieurs couches de verre et de films intercalaires de butyral de polyvinyle (P.V.B.). Les couches externes sont toujours en verre. L'assemblage est symétrique par rapport au plan de la plaque. Le nombre N de couches de verre est pair. Le vitrage contient $N-1$ films intercalaires dont un est situé au centre de l'empilement.

Les plaques de verre ont une épaisseur $e_1 = 6 \text{ mm}$ et les films de PVB une épaisseur de $e_2 = 0,4 \text{ mm}$.



Les propriétés principales des deux matériaux sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Propriété / Matériau	PVB	Verre
Masse Volumique	$\rho_2 = 1070 \text{ kg / m}^3$	$\rho_1 = 2400 \text{ kg / m}^3$
Contrainte maximale en traction	$R_{m2} = 19,6 \text{ MPa}$	$\sigma_{R1} = 25 \text{ MPa}^*$
Contrainte maximale en compression	R_{m2}	$R_{m1} = 400 \text{ MPa}$
Allongement plastique à rupture $A_{\%p}$	$A_{\%p2} = 350\%$	Non pertinent
Ténacité	Non pertinent	$K_{Ic} = 0,77 \text{ MPa.m}^{1/2}$
Module d'élasticité	$E_2 = 5 \text{ MPa}$	$E_1 = 60\,000 \text{ MPa}$
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_2 = 170 \cdot 10^{-6} \text{ m / m }^\circ\text{C}$	$\alpha_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m / m }^\circ\text{C}$
Température de fusion	160 à 210°C	> 1000°C

*Contrainte à rupture moyenne (50% de probabilité) en surface d'une couche de verre de 6mm d'épaisseur, 2m de long et 1m de large, travaillant en flexion.

Question 1 :

1.1) Calculer la masse par mètre carré et l'épaisseur du vitrage en fonction du nombre de couches de verre utilisées en fonction des données du problème.

1.2) Application numérique : $N=2$, $N=4$ et $N=8$

Question 2 :

L'assemblage est réalisé dans le domaine de fusion du PVB puis refroidi jusqu'à la température ambiante. La température à partir de laquelle le PVB peut être supposé comme présentant un comportement élasto-plastique est de **100°C**.

2.1) A température ambiante, quelles sont les contraintes internes existant dans l'assemblage verre / polymère ? Expliquer d'abord le phénomène et calculez ensuite les contraintes internes dans le vitrage en fonction des données du problème.

2.2) Application numérique : $N=2$, $N=4$ et $N=8$

Question 3 :

Le champ de déformation est supposé bi-linéaire dans la plaque en flexion :

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = -\varepsilon_{max} \left(\frac{2y}{Ne_1 + (N-1)e_2} \right) \left(\frac{|L-2x|}{L} \right)$$

On suppose que le champ de contrainte est uniaxial partout :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on peut écrire la relation suivante :

$$F \frac{L}{2} = -W \int_{-\frac{e_{tot}}{2}}^{\frac{e_{tot}}{2}} \sigma_{xx}(0, y) y dy$$

- 3.1) Quel principe, appliqué à quel système, permet d'établir l'équation ci-dessus ?
- 3.2) Quelles sont, en fonction de N, les positions y_i de chacune des surfaces et des interfaces ?
- 3.3) Calculer le champ de contrainte $\sigma_{xx}(x=0, y)$ en $x=0$, en fonction de la valeur de la déformation ε_{max} , en supposant que le verre et le PVB restent élastiques. En déduire la relation entre ε_{max} et l'effort F. En déduire également la relation entre le niveau de contrainte maximum atteint dans le verre σ_{max} et l'effort F, en fonction de N.
- 3.4) A quelles conditions et en quel point un film de PVB entre t'il en plasticité ?
- 3.5) Calculer alors le champ de contrainte $\sigma_{xx}(x=0, y)$ en $x=0$, en fonction de la valeur de la déformation ε_{max} , en supposant que le verre reste élastique et qu'un film de PVB est entré en plasticité. En déduire la relation entre ε_{max} et l'effort F. En déduire également la relation entre le niveau de contrainte maximum atteint dans le verre σ_{max} et l'effort F, en fonction de N
- 3.6) Application numérique : N=2, N=4 et N=8
- 3.7) A quelles conditions sur F et en quel point une couche de verre se rompt-elle ?
- 3.8) Application numérique : N=2, N=4 et N=8
- 3.9) Après la première rupture à quelles conditions et en quel point une seconde couche de verre se rompt-elle ?

Question 4 :

On suppose qu'il est possible de faire varier l'épaisseur des plaques de verre et des films de plastique par un même facteur noté β , c'est à dire $e_{1*} = \beta e_1$ et $e_{2*} = \beta e_2$.

Comment peut-on optimiser la résistance du vitrage (effort F conduisant à la rupture de la première couche de verre) par unité de masse de vitrage, en fonction de β et de N ?

Discutez.

Question 5 : résistance aux impacts « durs »

Un impact « dur » est un impact (jet de pierre, coup de hache...) au cours duquel la plaque de verre qui est entrée en contact avec l'objet impacteur est brisée au niveau du point d'impact, et parfois les plaques de verres des couches suivantes également. Les fragments restent « collés » sur le film intercalaire ce qui limite les conséquences de l'impact et en particulier les risques de blessures de personnes par les fragments.

Lors d'un impact « dur », toute l'énergie cinétique E_c de l'objet impacteur doit être « consommée » par la rupture du verre. A cette condition, l'objet impacteur perdra alors toute son énergie cinétique (il ne traverse pas le vitrage) et aucune énergie cinétique ne sera transmise aux fragments de verre (ceux-ci restent bien collés aux films intercalaires de PVB).

On note G_c l'énergie de rupture par unité de surface avec $G_c = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2$, où K_{Ic} est la ténacité du matériau et où $\nu = 0.3$.

5.1) Déterminer l'aire fissurée totale nécessaire pour absorber toute l'énergie cinétique de l'impact. Connaissant l'épaisseur de la couche de verre, en déduire la longueur totale de fissuration nécessaire.

5.2) En supposant que la rupture se fasse depuis le point d'impact, avec des fragments de dimension et de forme supposé uniforme, c'est-à-dire des fragments carrés de côté d . Combien de fragments doit on former pour absorber l'énergie cinétique du choc ? Si une couche est entièrement fragmentée avant de fragmentée la suivante, combien de couche seront brisées ?



5.3) Applications numériques :

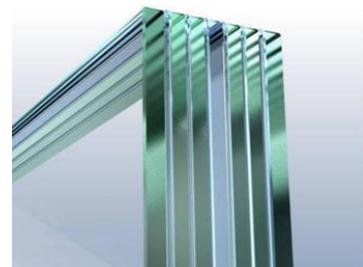
- $d = 15$ mm, $\beta = 1$, $N=2$, $N=4$ et $N=8$
- Pare-brise de TGV masse de **20 kg** lancé à **300 km/h**,
- Vitrage de protection pare-balle : 9 mm Parabellum masse de **8 g** et vitesse de **350 m/s**

5.4) Pour améliorer la résistance à la rupture du vitrage, faut il augmenter ou diminuer d ? Comment, en pratique, pourrait-on contrôler la valeur de d ?

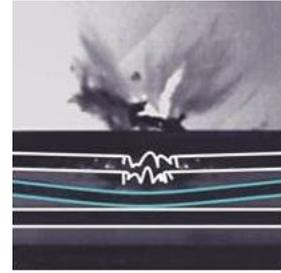
Question 6 :

Dans certains cas un espace libre est maintenu au centre de l'assemblage à la place d'un film intercalaire.

Pouvez-vous expliquer comment l'insertion de cet espace libre peut modifier les propriétés suivantes du vitrage ? Précisez également les différences éventuelles sur chacune des propriétés selon que l'espace libre est maintenu sous vide, laissé sous air à pression atmosphérique, ou dans lequel est maintenu une surpression d'air.



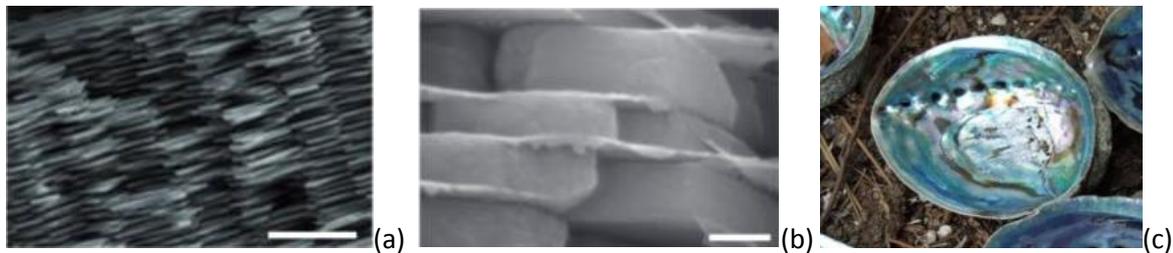
- 6.1) Résistance à la rupture en cas de choc « mou » ?
6.2) Thermique ?
6.3) Acoustique ?
6.4) Résistance à la rupture en cas de choc « dur » ? Pour cette dernière question, vous pouvez vous appuyer sur l'illustration ci-contre ?



Question 7 :

La nacre est un matériau naturel qui fascine du fait de ses performances exceptionnelles et est un modèle pour élaborer de nouveaux matériaux « bioinspirés ».

La nacre est constituée de plaquettes d'aragonite (CaCO_3 - céramique élastique-fragile de masse volumique 4430 kg/m^3), occupant 75% du volume et d'un « mortier » intercalaire liant ces plaquettes, qui est une protéine, assimilable à un polymère élasto-plastique. En vous appuyant sur les questions précédentes pouvez-vous deviner quelles performances, en particulier, peuvent être exceptionnelles et expliquer pourquoi ?



Nacre d'ormeaux. (a et b) microstructure, (c) coquillage.

Les barres d'échelle valent, (a) $10 \mu\text{m}$ et (b) 500 nm .