



**HAL**  
open science

## Materiali compositi per impiego strutturali

Paolo Vannucci

► **To cite this version:**

Paolo Vannucci. Materiali compositi per impiego strutturali: Metodi di analisi e di progetto. Doctoral. Università di Pisa, Italy. 2007. cel-01529030

**HAL Id: cel-01529030**

**<https://hal.science/cel-01529030>**

Submitted on 30 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

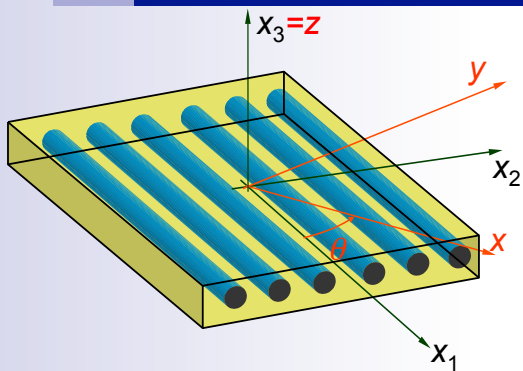
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

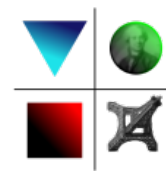
# Materiali compositi per impieghi strutturali

## Metodi di analisi e di progetto



**P. Vannucci**

Université de Versailles et Saint-Quentin-en-Yvelines  
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Paris 6



## Avant-propos

- Questo corso è stato pensato e costruito come un corso di base sui materiali compositi.
- Non ha certamente l'ambizione di coprire tutto questo settore della meccanica, di per sé molto vasto e vario, ma solo quella di voler fornire una prima introduzione ai compositi ad uso strutturale.
- In particolare, non vengono trattati molti problemi tecnologici, legati ad esempio alla messa in opera di strutture in composito od a i processi di produzione di questi materiali, né molte tecniche numeriche avanzate di calcolo o di progetto di strutture in materiali compositi.
- Il corso è infatti centrato su una presentazione classica dei compositi, ed è inteso come un prolungamento ideale verso questi materiali di un corso di meccanica dei continui e delle strutture.
- L'accento è posto su alcuni argomenti classici: anisotropia, omogeneizzazione classica, teorie classiche di resistenza dei solidi anisotropi, meccanica di una lastra, teoria classica dei laminati, teorie di ordine superiore per i laminati ed i sandwich.



## Avant-propos

- Una certa attenzione è poi dedicata ai metodi classici di progettazione dei laminati.
- Infatti, questo punto riveste una particolare importanza per i tecnici implicati nel calcolo delle strutture in composito, e presenta degli aspetti singolari e nuovi rispetto alle strutture costituite da materiali tradizionali.
- L'obiettivo finale del corso è quello di iniziare al calcolo ed al progetto di laminati in composito ad uso strutturale, dando un sufficiente bagaglio di conoscenze di base su questi materiali e sulle loro tecniche di analisi e di progetto.

*Pisa, 30 maggio 2007*

*P. Vannucci*

3



## Contenuto del corso

- |   |     |
|---|-----|
| ■ <b>Capitolo 1.</b> Generalità sui materiali compositi                 | 5   |
| ■ <b>Capitolo 2.</b> Anisotropia: analisi e metodi di rappresentazione  | 51  |
| ■ <b>Capitolo 3.</b> Omogeneizzazione delle proprietà elastiche         | 194 |
| ■ <b>Capitolo 4.</b> Criteri di resistenza per i compositi              | 234 |
| ■ <b>Capitolo 5.</b> Teoria classica dei laminati                       | 286 |
| ■ <b>Capitolo 6.</b> Tipi di laminati di uso frequente                  | 362 |
| ■ <b>Capitolo 7.</b> Alcuni metodi classici di progetto dei laminati    | 383 |
| ■ <b>Capitolo 8.</b> Teorie e soluzioni per laminati e piastre sandwich | 447 |

4



# Capitolo 1

## ■ Generalità sui materiali compositi

<input type="checkbox"/> Cosa sono i materiali compositi	6
<input type="checkbox"/> Prodotti di base e semilavorati	13
<input type="checkbox"/> Tecnologie di produzione	20
<input type="checkbox"/> Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni	28
<input type="checkbox"/> Generalità sulla meccanica dei compositi	39
<input type="checkbox"/> Bibliografia essenziale	48

## Cosa sono i materiali compositi

- **Cos'è un materiale composito?** Per definizione stessa, è un materiale costituito dall'unione di due o più costituenti (le fasi) generalmente distinti in:
  - matrice;
  - fibre;
  - additivi o cariche.
- Le caratteristiche meccaniche essenziali dei compositi sono l'*eterogeneità* e, ma non sempre, l'*anisotropia*.
- Anche se considerati dei materiali moderni, i compositi sono usati da molto tempo e sono stati il risultato di idee volte a fornire all'uomo il materiale adatto alla soluzione dei problemi che si trovava a risolvere; esempi tipici sono i mattoni in argilla e paglia, gli archi *palintonos* e le baliste in legno e tendini di animali, le *katane* giapponesi, ma anche le leghe come il bronzo.
- Alla pagina seguente, alcuni esempi classici e meno classici di materiali compositi.

## Cosa sono i materiali compositi

Tipologia	Esempi	Componenti	Campi di uso
Compositi a matrice organica	cartone pneumatici laminati  plastiche rinforzate	cellulosa, cariche caucciù, acciaio resine organiche, fibre di vetro, carbonio, boro, etc. resine, fibre corte	imballaggi etc. trasporti impieghi strutturali diversi  impieghi diversi
Compositi a matrice minerale	calcestruzzo  compositi C-C  compositi ceramici	cementi, sabbie, ghiaie, additivi C, fibre di C  ceramiche, fibre ceramiche	ingegneria civile  aerospaziale, aviazione, sport, biomeccanica componenti termomeccanici
Compositi a matrice metallica		Al/fibre di B Al/fibre di C	aerospaziale
Leghe	acciai leghe di Al ottoni	C, Fe, Mn, Cr, Al, Cu, Sn etc.	impieghi diversi, strutturali e non

7



## Cosa sono i materiali compositi

- Il concetto chiave dei compositi è quello di unire due o più materiali a caratteristiche diverse, che da soli non hanno un grande pregio ma che uniti esaltano le loro proprietà: *l'unione fa la forza*.
- Inoltre, le fibre di rinforzo hanno proprietà meccaniche nettamente migliori, sia in termini di resistenza che di rigidità, del materiale massivo: questo perché la diminuzione delle dimensioni caratteristiche implica un miglioramento delle prestazioni meccaniche, dovuto, da un lato al fatto che la fibra ha, per il processo costruttivo, una *struttura più perfetta del materiale massivo* e dall'altro alla *diminuzione della probabilità di trovare dei difetti importanti in corpi a dimensioni piccole*.
- Lo sviluppo dei materiali compositi moderni è dovuto essenzialmente alla necessità di far fronte alle esigenze sempre più spinte dell'industria, soprattutto nei settori:
  - aerospaziale e aeronautico;
  - difesa;
  - sport;
  - biomeccanica.

8



## Cosa sono i materiali compositi

- **Tipi di materiali compositi:** generalmente, i materiali compositi sono impiegati sotto forma di corpi bidimensionali, lastre o gusci, e per quanto concerne il loro comportamento meccanico e l'impiego strutturale, si possono dividere in:
  - **compositi a fibra corta:** le fibre sono disperse aleatoriamente in una matrice isotropa; il comportamento meccanico macroscopico è globalmente isotropo;
  - **compositi a fibra lunga:** le fibre sono disposte in modo ordinato e orientato in una matrice isotropa; il comportamento meccanico macroscopico è globalmente anisotropo.
- Questi materiali vengono poi generalmente assemblati per costituire dei macro-materiali compositi, che sono essenzialmente di due tipi:
  - **laminati:** sono ottenuti per sovrapposizione di lamine in composito diversamente orientate; il *comportamento meccanico macroscopico deve essere progettato*;
  - **sandwich:** sono pannelli concepiti per impieghi in flessione; generalmente il comportamento macroscopico è isotropo nel piano.

## Cosa sono i materiali compositi

- **Principali costituenti dei compositi a matrice organica:** sono essenzialmente due, la matrice e le fibre.
- A loro volta, queste sono per lo più dei tipi seguenti:
  - Matrici:
    - resine epossidiche;
    - resine poliuretatiche;
    - resine poliammidiche;
    - resine fenoliche.
  - Fibre:
    - vetro;
    - carbonio;
    - kevlar;
    - boro;
    - berillio.
- Un uso sempre maggiore, legato anche a problemi ambientali, è quello di fibre di origine vegetale (canapa e simili).

## Cosa sono i materiali compositi

### ■ Principali vantaggi dei materiali compositi:

- leggerezza;
- resistenza;
- rigidità;
- buon comportamento alla fatica;
- possibilità di progettare il materiale secondo il proprio bisogno (per i sandwich e i laminati);
- riduzione dei costi di fabbricazione;
- riduzione del peso e dei costi dei giunti.

- Lo svantaggio principale, soprattutto per i materiali a fibra lunga, è il costo, e da un punto di vista meccanico, il comportamento alla rottura, che in genere è fragile.

- I parametri sintetici di valutazione delle prestazioni di un composito sono i rapporti  $E/\rho$  e  $\sigma_{lim}/\rho$ . Nella tabella che segue sono riportati alcuni dati tipici sui compositi.

11



## Cosa sono i materiali compositi

	Materiale	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	E MPa	$\sigma_u$ MPa	$E/\rho$ (A) MN m/kg	$\sigma_u/\rho$ (B) kN m/kg	$\rho/\rho_{ac}$	$E/E_{ac}$	$\sigma_u/\sigma_{u,ac}$	$A/A_{ac}$	$B/B_{ac}$
Forma massiva	Acciaio	7850	210000	360	26,75	45,86	1	1	0,171	1	0,171
	Acciaio alta resist.	7850	210000	2100	26,75	267,52	1	1	1	1	1
	Leghe d'Al	2700	70000	620	25,93	229,63	0,34	0,33	0,295	0,97	5,01
	Legno	500	30000	15	60,00	30,00	0,06	0,14	0,007	2,24	0,65
	Vetro	2500	75000	40	30,00	16,00	0,32	0,36	0,019	1,12	0,35
	Tungsteno	19300	350000	4100	18,13	212,44	2,46	1,67	1,952	0,68	4,63
	Berillio	1830	300000	700	163,93	382,51	0,23	1,43	0,333	6,13	8,34
	Titanio	4610	115000	1900	24,95	412,15	0,59	0,55	0,905	0,93	8,99
Fibre	Vetro E	2540	72400	3500	28,50	1377,95	0,32	0,34	1,667	1,07	30,05
	Vetro S	2480	85500	4600	34,48	1854,84	0,32	0,41	<b>2,190</b>	1,29	40,45
	Carbonio	1380	190000	1700	137,68	1231,88	0,18	0,90	0,810	5,15	26,86
	Carbonio HM	1900	390000	2100	205,26	1105,26	0,24	<b>1,86</b>	1,000	<b>7,67</b>	24,10
	Carbonio HR	1850	240000	3500	129,73	1891,89	0,24	1,14	1,667	4,85	<b>41,25</b>
	Kevlar	1500	130000	2800	86,67	1866,67	0,19	0,62	1,333	3,24	40,70
	Boro	2630	385000	2800	146,39	1064,64	0,34	1,83	1,333	5,47	23,22
	Berillio	1830	300000	1700	163,93	928,96	0,23	1,43	0,810	6,13	20,26
Matrici	Poliestere	1200	3000	80	2,50	66,67	0,15	0,01	0,038	0,09	1,45
	Fenoliche	1200	3000	40	2,50	33,33	0,15	0,01	0,019	0,09	0,73
	Epossidiche	1500	5000	80	3,33	53,33	0,19	0,02	0,038	0,12	1,16
	Poliamidiche	1140	2500	85	2,19	74,56	0,15	0,01	0,040	0,08	1,63

12



## Prodotti di base e semilavorati

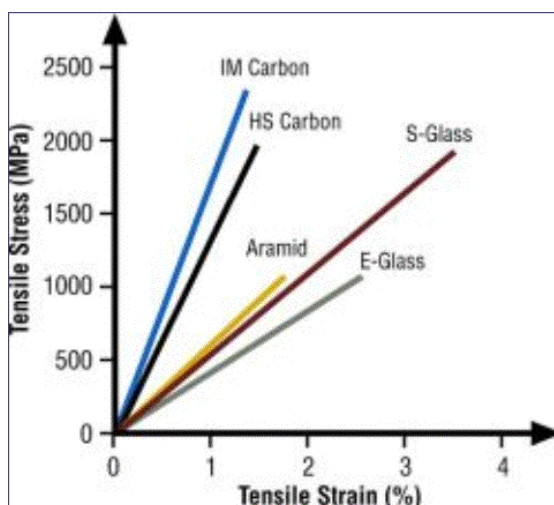
- L'industria produce una serie di prodotti di base e di semilavorati con i quali in seguito vengono assemblati i vari prodotti finali.
- I prodotti di base sono:
  - fibre;
  - mats;
  - tessuti;
  - lamine preimpregnate.
- I semi-lavorati (ma che a volte sono proprio, specie nelle applicazioni di punta, il prodotto finale) sono essenzialmente
  - laminati;
  - sandwich.
- Vediamoli rapidamente.

13



## Prodotti di base e semilavorati

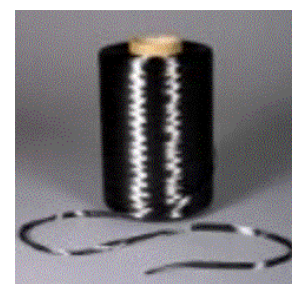
- **Fibre:** sono il costituente base del rinforzo dei compositi; vengono filate in bobine, come un filo qualunque, e sono in genere di vetro o carbonio.



vetro



carbonio



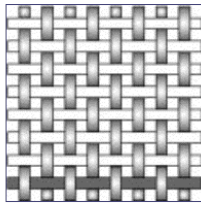
14



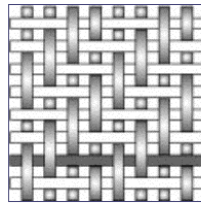


## Prodotti di base e semilavorati

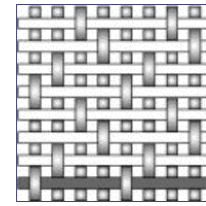
- **Tessuti:** generalmente, i rinforzi sono forniti sotto forma di tessuto; i principali tipi di tessuto sono:



Taffetas (plain)

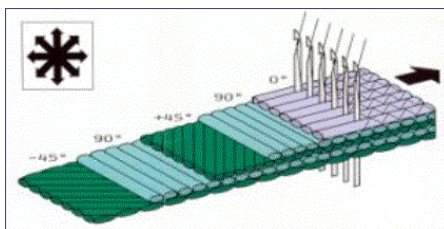


Sergé (twill)

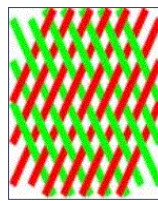


Satin

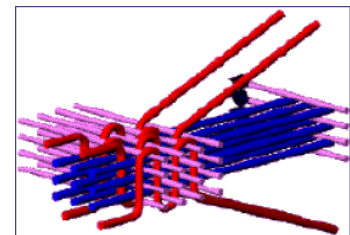
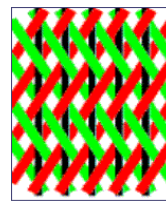
- Esistono anche tessuti multidirezionali, per usi speciali (soprattutto per campi di sforzo tridimensionali).



Stitched



Braided



3D

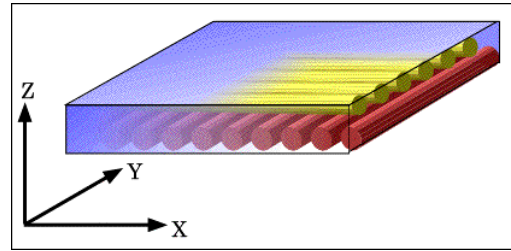


## Prodotti di base e semilavorati

- **Mats:** sono strati di fibre non tessute, disposte aleatoriamente, che sono forniti secchi oppure già impregnati di resina.
- Il comportamento meccanico macroscopico è isotropo.
- L'uso dei mats è in generale riservato a situazioni in cui si ha da un lato necessità di leggerezza e di risposta isotropa, dall'altro dove le caratteristiche meccaniche richieste non sono eccezionali (i mats non hanno delle prestazioni elevate, né in rigidità né in resistenza).
- I vantaggi dei mats risiedono soprattutto nella facilità di messa in opera e di adattabilità alle forme le più diverse e inoltre nel loro costo, più contenuto rispetto ai pannelli a fibre orientate.
- **Lamine pre-impregnate:** sono semilavorati composti da fibre e resina da polimerizzare (in diversi modi).
- Le fibre possono essere disposte in una sola direzione o tessute; il comportamento è sempre anisotropo.

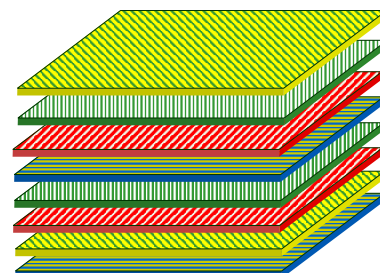
## Prodotti di base e semilavorati

- L'uso delle lamine pre-impregnate è riservato alla fabbricazione dei laminati o degli strati esterni dei pannelli sandwich.
- I vantaggi dell'uso dei pre-impregnati sono molteplici; innanzitutto le elevate prestazioni meccaniche e poi la buona risposta al processo di fabbricazione.
- Generalmente, è con l'uso di tecniche che fanno impiego di pre-impregnati che si ottengono i migliori risultati in termini di assenza di difetti di fabbricazione; per queste ragioni, sono quindi utilizzati per la realizzazione di laminati in impieghi strutturali di punta (aviazione, spazio, sport etc.).
- Consideriamo adesso i due tipi di semilavorati, i laminati ed i pannelli sandwich.



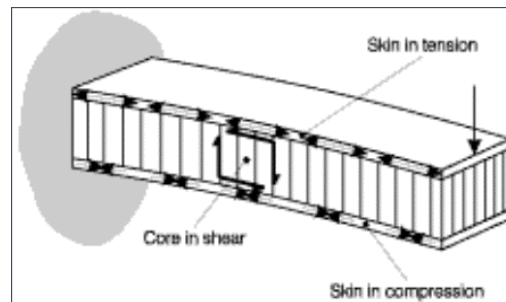
## Prodotti di base e semilavorati

- **Laminati:** sono ottenuti per sovrapposizione di lamine, in genere a rinforzo unidirezionale o tessuto, disposte secondo differenti orientazioni.
- Generalmente l'assemblaggio delle lamine avviene per polimerizzazione dell'insieme, a volte per collaggio (per esempio nella tecnologia del legno compensato). Nel primo caso, quindi, la suddivisione in lamine del prodotto finito è una pura convenzione.
- I laminati vengono utilizzati, come materiali strutturali, laddove vi sia da un lato la necessità di elevate prestazioni meccaniche in termini di rigidità, resistenza, comportamento alla fessurazione, e dall'altro l'esigenza di limitare il peso.
- Questi materiali devono essere progettati secondo le necessità ed oggi si affaccia anche l'idea, e la tecnologia, di realizzare laminati con disposizione continuamente variabile delle fibre, in quantità e direzione.



## Prodotti di base e semilavorati

- I campi di utilizzo principali sono dunque l'aeronautica e lo sport.
- **Sandwich:** i pannelli sandwich sono la generalizzazione della trave a doppio T al caso bidimensionale.
- Il concetto è quello classico di mettere la parte resistente a flessione laddove serve, all'esterno, e riempire la parte centrale con un materiale leggero (schiume solide, balsa, reticoli a nidi d'ape), preposto a trasmettere gli sforzi di taglio.
- I pannelli sandwich sono dunque utilizzati in quei casi in cui l'imperativo della leggerezza è dominante nelle strutture sollecitate essenzialmente in flessione.
- I campi di applicazione strutturale più importanti sono dunque quello navale, aerospaziale, aeronautico, sportivo.



19



## Tecnologie di produzione

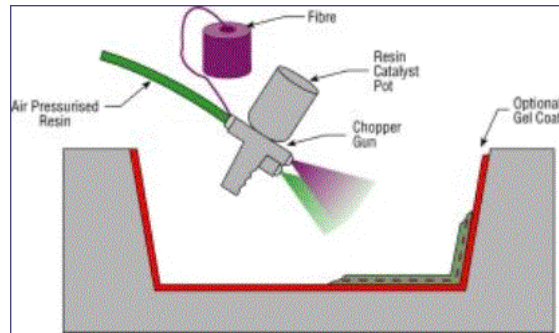
- Vediamo adesso, rapidamente, alcune delle tecnologie di produzione tra le più utilizzate nella fabbricazione dei materiali compositi.
- Queste sono le tecnologie seguenti:
  - a spruzzo;
  - a mano;
  - sotto vuoto;
  - RTM (*Resin Transfer Moulding*);
  - RFI (*Resin Film Infusion*);
  - pre-impregnati (*prepregs*);
  - pultrusione;
  - FW (*Filament Winding*).

20

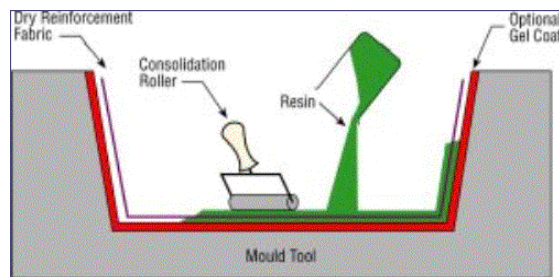


## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia a spruzzo:**  
è un getto in pressione di resina e fibre corte pre-miscelate.



- **Tecnologia a mano:**  
la resina è applicata a mano su uno strato di fibre preapplicato allo stampo.



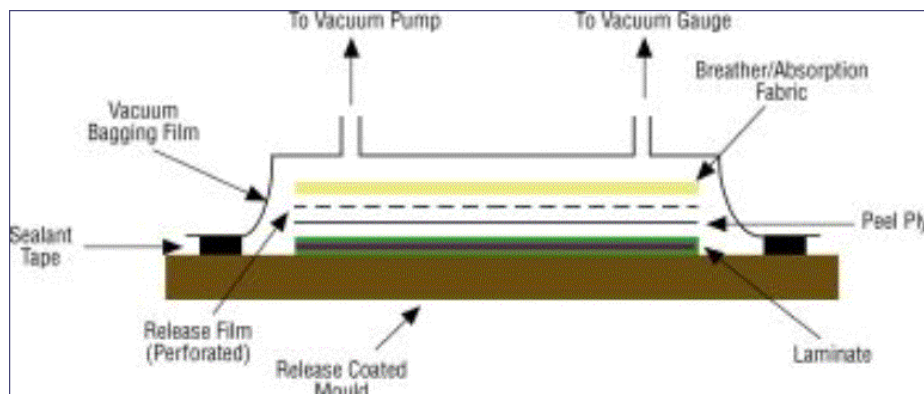
- In entrambi i casi la polimerizzazione avviene, normalmente, a condizioni ambiente, eventualmente con l'aggiunta di catalizzatore.

21



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia sotto vuoto:** La polimerizzazione avviene in uno stampo con *vacuum bag*, che permette di comprimere il manufatto a pressione atmosferica.

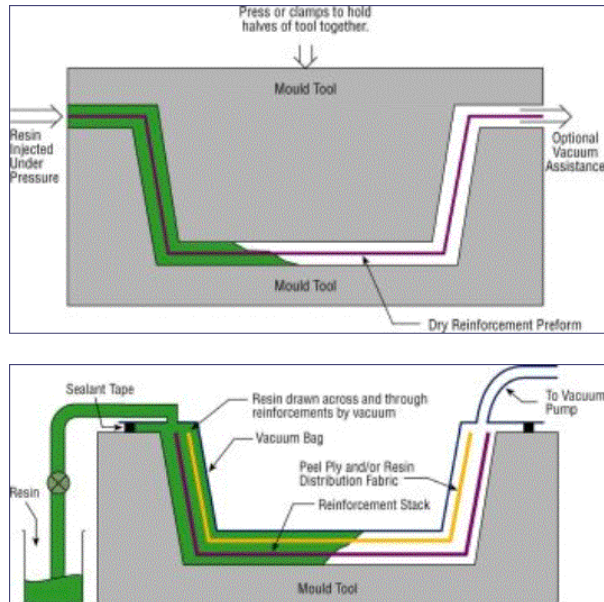


22



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia RTM (*Resin Transfer Moulding*):** il rinforzo è messo a secco nello stampo; in seguito, si procede all'iniezione di resina in pressione, a volte con stampo sotto vuoto.
- La polimerizzazione avviene a temperatura ambiente o a caldo, con o senza catalizzatore.
- Questa tecnologia è la più impiegata nella produzione in grande serie di pezzi a non elevato pregio strutturale.
- Una variante prevede l'iniezione sotto vuoto di resina non in pressione.

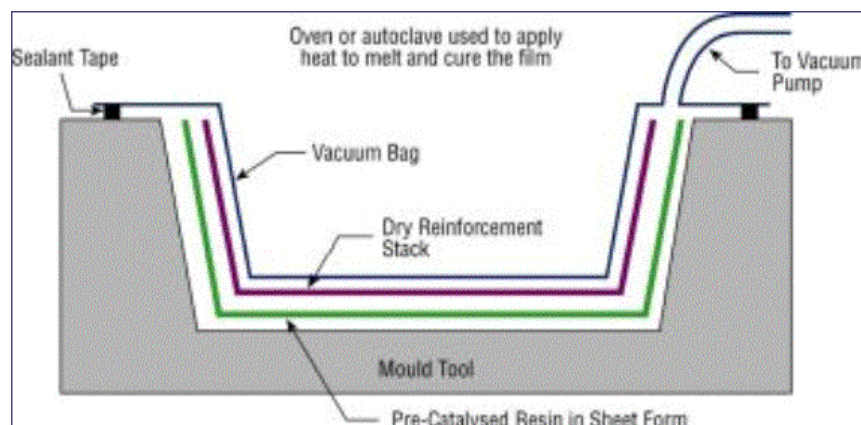


23



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia RFI (*Resin Film Infusion*):** la resina è preapplicata a uno stato semisolido, su uno strato di supporto, e lo stampo è posto sotto vuoto.
- In seguito, la resina viene fatta prima fondere poi polimerizzare tramite apporto di calore.

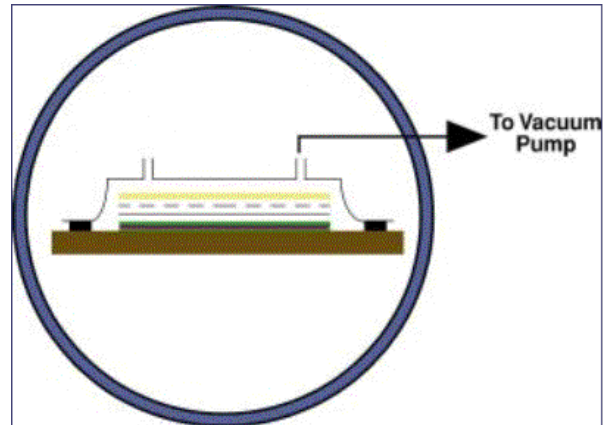


24



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia dei pre-impregnati (*prepregs*):** questa tecnologia è quella più utilizzata per realizzare laminati piani, od anche, in autoclave, con certe curvature.
- Il laminato viene preparato a freddo, sovrapponendo i vari strati di preimpregnato.
- Il manufatto così realizzato viene posto in autoclave o in presse scaldanti per polimerizzare sotto pressione e temperatura (circa 180°C).
- Questa tecnologia, molto costosa, permette di ottenere dei componenti meccanici di alto pregio e di buona qualità di produzione, limitando al minimo i difetti di fabbricazione.

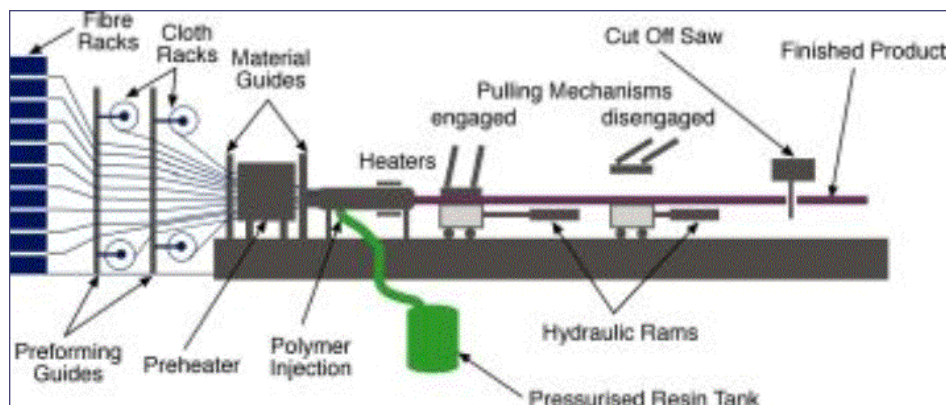


25



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia di pultrusione:** viene impiegata industrialmente, per la produzione in grande serie e in continuo di profilati (gli stessi della serie in acciaio).
- La polimerizzazione avviene a caldo e in breve tempo.

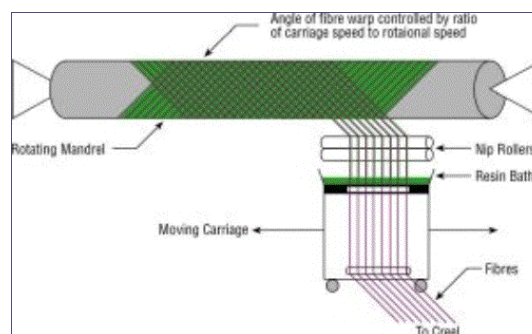


26



## Tecnologie di produzione

- **Tecnologia FW (*Filament Winding*):** è una tecnologia industriale di costruzione di pezzi a simmetria cilindrica o comunque a sezione convessa.
- La fibra è preimpregnata di resina e quindi avvolta in modo regolare e programmato su un mandrino della forma voluta.
- La polimerizzazione può essere a caldo o a temperatura ambiente, tramite catalizzatore o anche tramite raggi UV.
- E' una tecnica molto usata per la costruzione di serbatoi in pressione, ma anche di grandi pezzi, come fusoliere di aerei o corpi di razzi vettori.



27

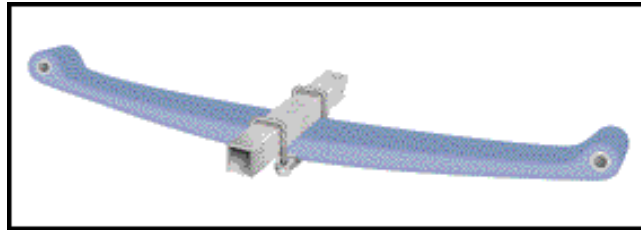
## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- Possiamo adesso in rassegna una serie di esempi a realizzazioni strutturali in materiale composito, appartenenti essenzialmente ai settori:
  - automobilistico;
  - ferroviario;
  - navale;
  - aeronautico;
  - aerospaziale;
  - sportivo.

28

## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

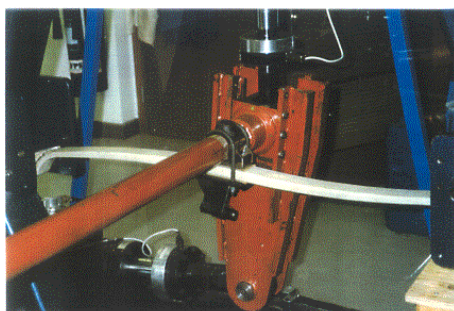
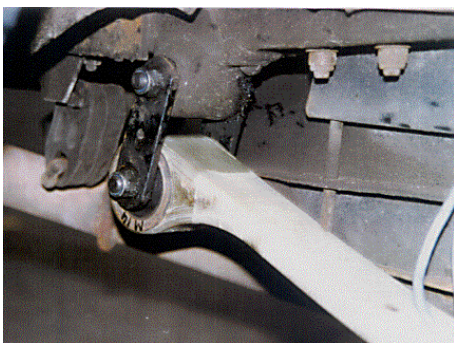
- Settore automobilistico
- Sospensioni a balestra in fibra di vetro.



- Utilizzo di plastiche rinforzate in numerose parti modellate (portiere, paraurti etc).

## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

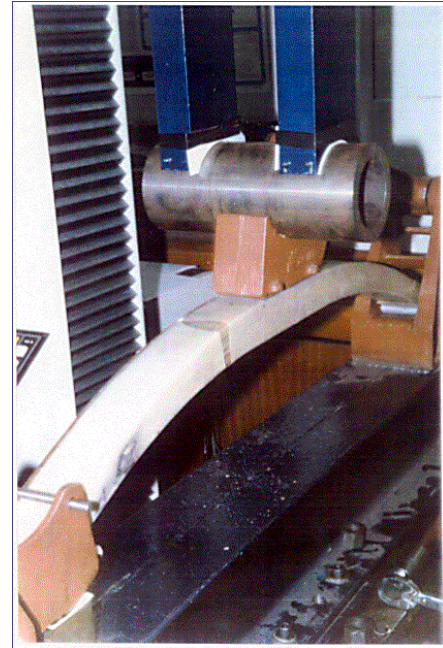
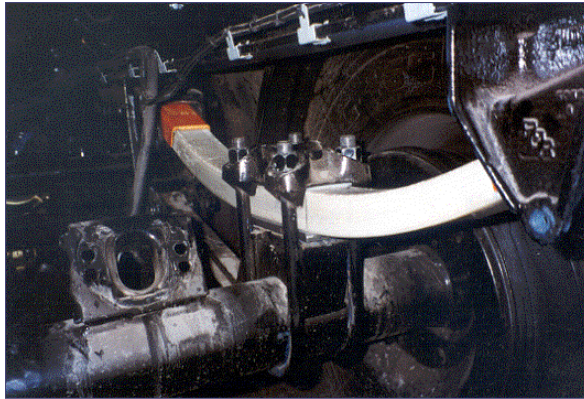
- Il progetto EuroSpring: Taxi Spring, sospensioni in fibra di vetro per i taxi di Londra.





## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- **Il progetto EuroSpring:** Trailer Spring, sospensioni per camion in fibra di vetro



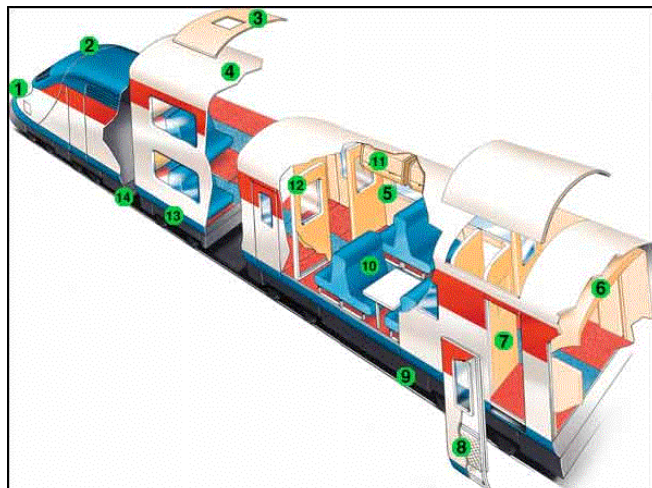
- Peso sospensione in acciaio: 45 kg.
- Peso sospensione in composito: 9 kg.
- Spessore max: 70 mm.

31



## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

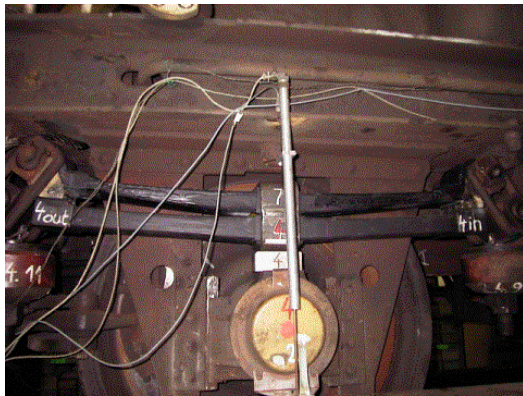
- **Settore ferroviario.**
- Sospensioni in fibra di vetro.
- Parti accessorie non strutturali (pannelli isolanti e fono-assorbenti, parachoc in pannelli sandwich).



32

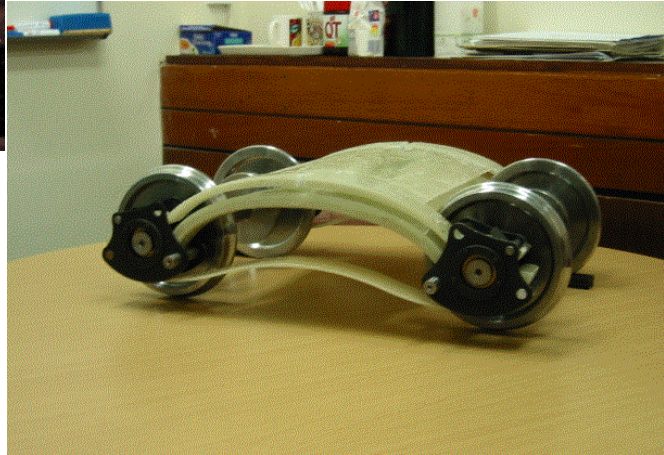


## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni



- **Il progetto Eurobogie** (Eureka Project 1841) Sospensioni a due stadi in fibra di vetro per vagoni merci

- Carrelli di vagoni merci interamente in fibra di vetro, per la diminuzione dell'inquinamento sonoro.



33



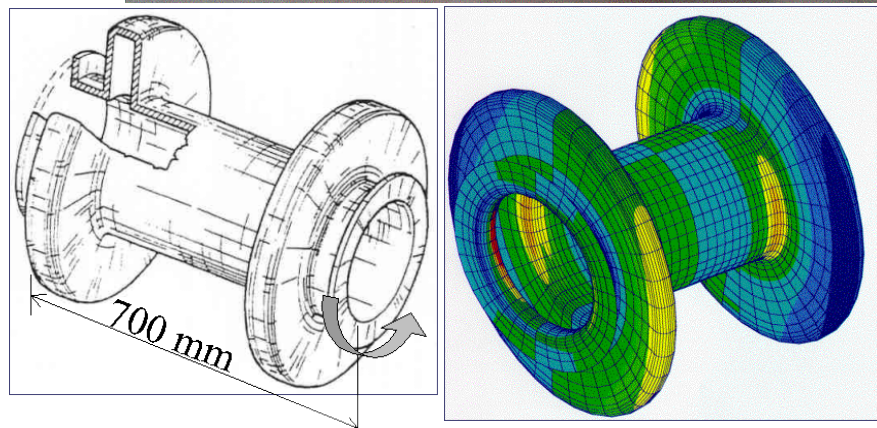
## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- **Due progetti per TGV** (collaborazione ALSTOM, EMSE, ISAT)

- Barra antirollio in carbonio-acciaio



- Giunto Jacquemin in fibra di vetro: trasmissione di potenza



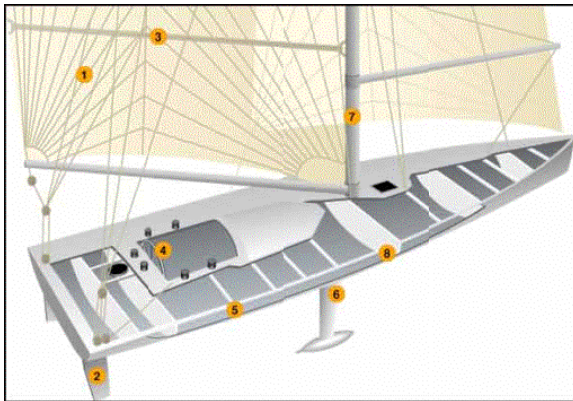
- **Il futuro dei TGV:** carrello motore in fibra di vetro.

34



## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- Settore navale.
- Scafo in sandwich.
- Strutture in composito.
- Albero e vele in carbonio.



35

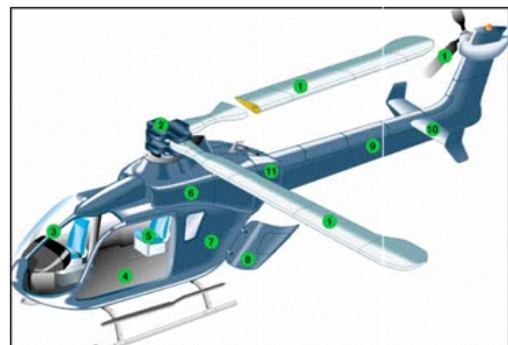


## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- Settore aeronautico.
- Molte parti strutturali e aerodinamiche sono in laminato o in sandwich (nell'A380, la parte che opera la giunzione tra fusoliera e ali è interamente in composito).
- Freni in carbonio (brevetto Messier-Bugatti): matrice in carbonio e fibre non tessute in carbonio.



- Pale di eliche e di turbine, anche a controllo passivo del passo.

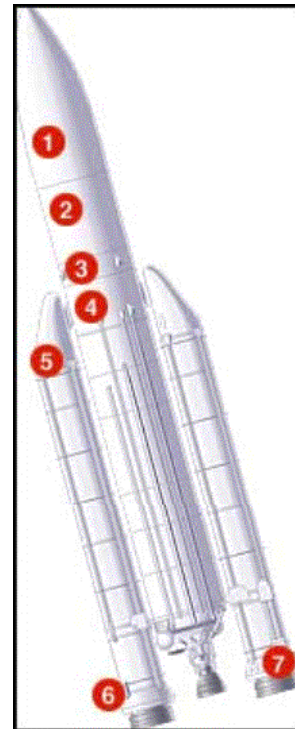
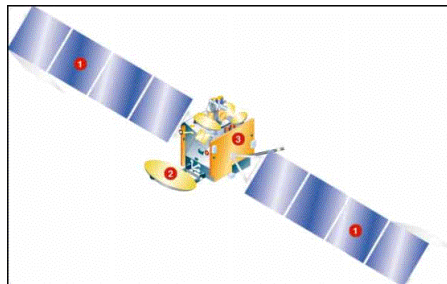


36



## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- **Settore aerospaziale.**
- Parti strutturali di satelliti e vettori (sandwich Al-C, laminati in C e B).
- Protezioni termiche e strutture a deformazione termica direzionale nulla.
- Il risparmio di circa 1 kg di peso strutturale in un satellite per telecomunicazioni, permette la sua sostituzione con materiale elettronico per la realizzazione di canali di ricetrasmisione il cui affitto permette di finanziare il costo di messa in orbita del satellite!



37

## Alcuni esempi di impieghi e realizzazioni

- **Settore sportivo.**
- Scocche e freni in carbonio per vetture da competizione (F1 e formula endurance).
- Biciclette da competizione in carbonio.
- Canoe e kayak in fibra di vetro o di carbonio.
- Sci e racchette da tennis in composito, con anche controllo passivo o attivo delle vibrazioni tramite sistemi piezoelettrici.



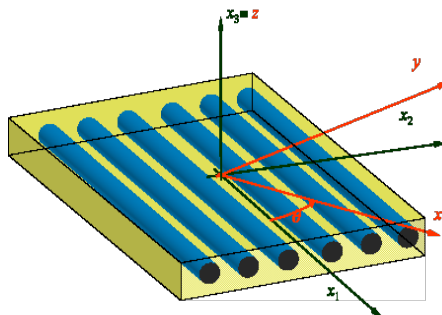
38

## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **I compositi a fibre lunghe dei materiali da progettare:** l'impiego dei materiali compositi permette di risolvere brillantemente quei problemi strutturali dove le proprietà di resistenza e di rigidità devono conciliarsi con le necessità di leggerezza.
- Inoltre, i diversi parametri che determinano il comportamento finale di un composito strutturale offrono al progettista un vasto campo di azione, in cui la *progettazione ottimale del materiale* si afferma come nuova disciplina della meccanica strutturale.
- Tuttavia, i materiali compositi, per la loro natura di *materiali complessi* pongono al progettista dei nuovi problemi, con *fenomeni a volte inattesi e sconosciuti nei materiali tradizionali*.
- **La descrizione dei compositi a diverse scale:** essendo costituito da due fasi un composito è per sua natura un materiale *eterogeneo*.

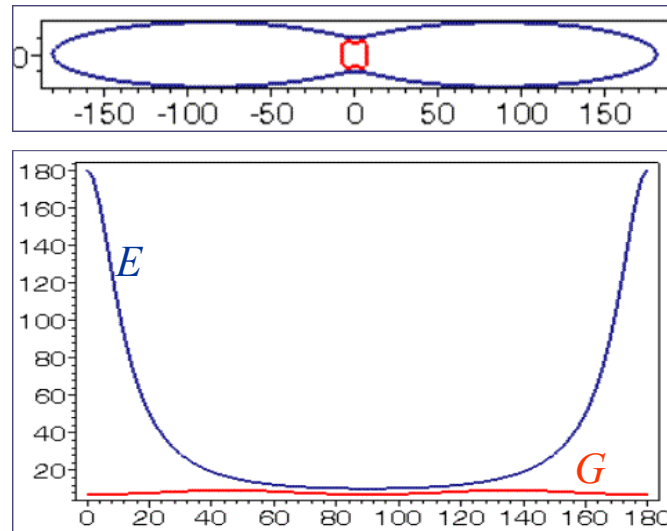
## Generalità sulla meccanica dei compositi

- Inoltre, per i compositi rinforzati con fibre lunghe, l'orientazione del rinforzo determina la direzionalità delle proprietà meccaniche di rigidità e resistenza; la risposta meccanica del materiale dipende dalla direzione: i compositi sono, spesso, dei materiali *anisotropi*.
- Questi due aspetti giocano un ruolo decisivo a scale diverse: a un livello *micromeccanico* l'eterogeneità e a un livello *macroscopico* l'anisotropia.
- **L'analisi macroscopica: l'anisotropia:** una lamina rinforzata da fibre orientate ha sempre un comportamento ortotropo.



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- Un esempio: il diagramma, direzionale e Cartesiano, del modulo di Young e del modulo a taglio per una lamina in carbonio-epoxy a rinforzo unidirezionale,  $V_f=0.7$ .



41



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **L'analisi microscopica: l'eterogeneità.** Lo scopo dell'analisi micromeccanica è quello di recuperare, dalla conoscenza delle proprietà dei singoli componenti e dalla geometria del composito, delle leggi che descrivono il comportamento del composito a un livello macromeccanico come materiale omogeneo: si cercano dunque delle *leggi di omogeneizzazione*.
- Esistono varie *teorie e modelli di omogeneizzazione*; l'approccio classico considera un volume elementare e significativo di composito e, per un comportamento isotropo lineare dei due componenti, ricava le leggi di omogeneizzazione sulla base dell'ipotesi dell'aderenza perfetta tra fibra e matrice.
- **Meccanica della rottura dei compositi:** il comportamento a rottura dei compositi è influenzato da diversi fattori che ne complicano l'analisi e la possibilità di cogliere il fenomeno con un criterio generale e affidabile come con i materiali omogenei e isotropi.

42



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- Le principali ragioni di incertezza e difficoltà sono dovute a:
  - anisotropia;
  - eterogeneità;
  - tipo di carico;
  - difetti di fabbricazione.
- L'anisotropia ha tre conseguenze importanti:
  - forte dipendenza delle caratteristiche di resistenza dalla direzione;
  - impossibilità di disaccoppiare in parti sferica e deviatorica l'energia elastica, e dunque impossibilità di utilizzare il criterio di Huber-Hencky-von Mises;
  - non coassialità dei tensori degli sforzi e delle deformazioni.
- L'eterogeneità può influenzare la rottura locale in diversi modi:
  - *pull-out* (sfilamento fibre dalla matrice);
  - instabilità locale delle fibre in compressione;
  - influenza sulla propagazione delle fessure;
  - differente resistenza in trazione e in compressione.

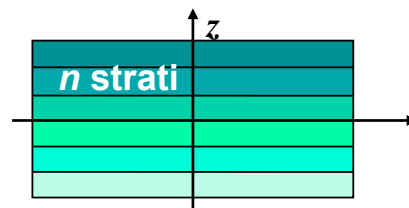
43



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **Meccanica dei laminati:** la teoria classica dei laminati permette di ridurre il comportamento delle diverse lamine che compongono un laminato a quello di una sola piastra equivalente.
- Le ipotesi sono quelle classiche delle piastre-lastre: comportamento elastico lineare, piccole deformazioni e piccoli spostamenti, cinematica alla Kirchhoff, stato piano generalizzato di sforzo.
- In tali ipotesi si arriva alla legge fondamentale dei laminati, che ne descrive il comportamento meccanico (è una legge costitutiva).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$



- Il comportamento è quindi descritto da tre tensori, **A**, **B** e **D**, che in genere non sono uguali: è come se la piastra fosse costituita da materiali diversi secondo il comportamento preso in esame.

44



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **Alcuni problemi tipici dei laminati:** nella meccanica dei laminati, si incontrano alcuni fenomeni e problemi sconosciuti nei materiali classici, come ad esempio:
  - delaminazione: rottura interlaminare provocata dalle tensioni interlaminari;
  - tensioni residue: la loro presenza dipende molto dal processo di fabbricazione; in particolare, se polimerizzato a caldo un laminato sarà sempre soggetto a tensioni interlaminari residue che possono essere anche molto importanti e soprattutto di difficile valutazione;
  - tensioni ai bordi: si può vedere, tramite modelli analitici, che in funzione della sequenza degli strati e del carico, si può avere una concentrazione degli sforzi ai bordi liberi, che può essere anche molto elevata e provocare delaminazione;
  - analisi della rottura: la rottura completa di un laminato è un fenomeno progressivo e spesso difficile da cogliere, sia a livello analitico che, per quanto concerne la sua evoluzione, sperimentale.

## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **Il progetto ottimale dei laminati:** si tratta di una operazione spesso complessa.
- Le difficoltà tipiche dell'ottimizzazione dei laminati sono:
  - forte non linearità (ottimizzazione non convessa);
  - elevata multimodalità;
  - molteplicità degli obiettivi;
  - numero di variabili spesso elevato;
  - soluzioni che a volte i presentano in forma continua;
  - difficoltà relative alla rappresentazione elastica: le trasformazioni cartesiane sono estremamente complesse e non si appoggiano a invarianti tensoriali (come pure la tecnica dei *lamination parameters* basata sui parametri di Tsai e Pagano).
- Poche sono le regole e i metodi utilizzati nella pratica, spesso si tratta di approcci molto semplificati, che restringono molto il campo delle possibilità.



## Generalità sulla meccanica dei compositi

- **Verso l'automatizzazione delle scelte di progetto:** il progetto ottimale dei laminati è ancora oggi argomento di ricerca.
- Infatti, i compositi in generale ed i laminati in particolare sono materiali *complessi* e *complicati* e per il loro progetto si devono determinare numerosi parametri e conciliare diversi obiettivi a volte in contrasto tra loro.
- Il progettista deve quindi fare numerose scelte (a partire, per esempio, dalla scelta del miglior materiale con cui realizzare un laminato), per le quali la semplice esperienza a volte non basta.
- L'obiettivo per il futuro è dunque quello di arrivare ad un sistema in grado di compiere le scelte automaticamente, sulla base di criteri definiti matematicamente: il traguardo è *l'ottimizzazione globale dei laminati*.

## Bibliografia essenziale

- **Meccanica dei materiali compositi in generale:**
  - Jones R. M., **1975:** *Mechanics of composite materials*. Mc Graw-Hill.
  - Tsai S. W., Hahn H. T., **1980:** *Introduction to Composite Materials*. Technomic.
  - Tsai, S. W., **1985:** *Composite design guide*. Technomic.
  - Turvey G. J., Marshall I. H., **1995:** *Buckling and postbuckling of composite plates*. Chapman & Hall (edited).
  - Pedersen P., **1997:** *Elasticity, anisotropy, laminates*. Corso di elasticità scaricabile all'indirizzo web [www.fam.dtu.dk/html/pp.html](http://www.fam.dtu.dk/html/pp.html)
  - Vautrin A., **1997:** *Mechanics of Sandwich Structures*, Kluwer (edited).
  - Vasiliev V. V., Morozov E. V., **2001:** *Mechanics and analysis of composite materials*. Elsevier.
  - Reddy J. N., **2004:** *Mechanics of composite plates and shells: theory and analysis*. 2<sup>nd</sup> Edition. CRC Press.

## Bibliografia essenziale

### ■ Progettazione dei laminati in composito:

- Abrate S., **1994**: Optimal design of laminated plates and shells. *Composite Structures*, v.29, 269-286 (articolo di sintesi).
- Barbero E. J., **1998**: Introduction to composite materials design. Taylor & Francis.
- Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: Design and optimization of laminated composite materials. J. Wiley & Sons, New York.

### ■ Teoria dell'anisotropia in meccanica delle strutture:

- Lekhnitskii S. G., **1944**: *Anisotropic plates*. Edizione inglese: S. W. Tsai & T. Cheron, 1968. Gordon & Breach.
- Lekhnitskii S. G., **1950**: *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Edizione inglese: P. Fern, 1963. Holden-Day.
- Ting T. C. T., **1996**: Anisotropic elasticity: theory and applications. Oxford University Press.

## Bibliografia essenziale

### ■ Alcuni siti internet sui compositi:

- <http://www.netcomposites.com/>
- <http://www.mdacomposites.org/> (applicazioni strutturali civili)
- <http://callisto.my.mtu.edu/> (corso in linea e applicativi MatCad)
- <http://composite.about.com/>

- **Ringraziamento**: per le informazioni e le illustrazioni dei progetti europei Eurospring e Eurobiege del programma di aiuto alla ricerca Eureka, si ringrazia il Professor Giorgio Jeronimidis dell'Università di Reading, UK.

## Capitolo 2

### ■ Anisotropia: analisi e metodi di rappresentazione

<input type="checkbox"/> Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta	53
<input type="checkbox"/> La legge di Hooke per un solido anisotropo	55
<input type="checkbox"/> Notazione tensoriale	61
<input type="checkbox"/> Notazione di Voigt	63
<input type="checkbox"/> Notazione di Pedersen	68
<input type="checkbox"/> Significato fisico delle componenti elastiche	72
<input type="checkbox"/> Rotazione del riferimento	76
<input type="checkbox"/> Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann	88
<input type="checkbox"/> Le diverse simmetrie elastiche	96
<input type="checkbox"/> Le simmetrie dei cristalli	125

## Capitolo 2

<input type="checkbox"/> Le costanti tecniche di elasticità	132
<input type="checkbox"/> Limiti sui moduli elastici	145
<input type="checkbox"/> Il caso di stato piano di tensione	150
<input type="checkbox"/> Rotazione del riferimento nel piano	159
<input type="checkbox"/> I parametri di Tsai e Pagano	164
<input type="checkbox"/> I parametri polari di Verchery	168
<input type="checkbox"/> Alcuni esempi di materiali anisotropi	172

## Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta

- L'anisotropia è la dipendenza di una proprietà fisica dalla direzione.
- Le proprietà che ci interessano qui sono quelle che riguardano la risposta meccanica di un solido, tanto in rigidezza che in resistenza.
- In questo capitolo, ci occuperemo essenzialmente della descrizione della risposta meccanica di solidi anisotropi per quanto riguarda la rigidezza, rinviando al capitolo 4 per una presentazione del comportamento alla rottura di solidi anisotropi.
- Il comportamento anisotropo di un solido comporta una serie di problemi aggiuntivi rispetto al caso isotropo.
- Innanzitutto, le grandezze che descrivono il comportamento meccanico, siano esse delle componenti tensoriali o dei "moduli dell'ingegnere", generalmente non sono delle quantità invarianti, ma dipendono dalla direzione, proprio in virtù del comportamento anisotropo, e quindi rappresentano la risposta del materiale in una direzione ben precisa, non in senso assoluto.

## Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta

- In secondo luogo, queste costanti sono in numero maggiore rispetto al caso isotropo (il che comporta, per esempio, che la caratterizzazione sperimentale di un materiale anisotropo necessita di un numero maggiore di misure indipendenti).
- Inoltre, nelle fasi di calcolo, si deve sovente poter esprimere le caratteristiche meccaniche in un riferimento ruotato; le formule che permettono questo passaggio sono complicate e rendono difficili molti dei problemi di progetto.
- Altri problemi sono causati proprio dalla differenza quantitativa nella risposta meccanica direzionale, che può portare a fenomeni locali pericolosi (per esempio, la delaminazione nei laminati), ma anche dalla impossibilità di applicare criteri di resistenza classici, come quello di Huber-Hencky-von Mises.
- Il calcolo di verifica e di progetto con i materiali anisotropi è quindi, in genere, più delicato e oneroso che con i materiali isotropi.

## La legge di Hooke per un solido anisotropo

- Ci limitiamo qui ad analizzare il comportamento elastico lineare, in piccole deformazioni, di un solido anisotropo alla Green, per il quale quindi si definisce un potenziale elastico  $V$ .
- Il solido è caricato con delle forze di volume  $\mathbf{q}$  e delle forze di superficie  $\mathbf{p}$  su una parte della frontiera.
- Si applica un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile e infinitesimale  $\mathbf{du}$ , tale dunque da poter trascurare la variazione delle forze applicate.
- Il lavoro delle forze applicate è allora (teorema di Clapeyron)

$$\begin{aligned}
 dW &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{du} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{du} \, ds = \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{du} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{du}) \, dv = \\
 &= \int_{\Omega} (\mathbf{q} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{du} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{du}) \, dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, dv.
 \end{aligned}$$

## La legge di Hooke per un solido anisotropo

- La quantità

$$dV = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

rappresenta la variazione di energia potenziale interna per unità di volume in corrispondenza di una variazione infinitesima dello stato di deformazione.

- Nel caso di un corpo elastico, tale quantità  $dV$  deve essere un differenziale esatto; infatti, la variazione totale, per unità di volume, dell'energia potenziale interna in una trasformazione da uno stato  $A$  ad uno stato  $B$ , deve essere, in tal caso, indipendente dal percorso di integrazione:

$$V = \int_A^B dV = V_B - V_A \quad \Leftrightarrow \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.$$

- Ne consegue la *formula di Green*:

## La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- Sviluppando  $V$  in serie di Taylor si ha

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = V(0) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \Big|_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots$$

- Se si ammette che allo stato iniziale, in corrispondenza di forze esterne nulle, sia  $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$  e si pone  $V=0$ , e approssimando  $V$  al solo primo termine non nullo, lecito in piccole deformazioni, si ha

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

con i coefficienti  $E_{ijkl}$  che sono le componenti di un tensore del 4° ordine,  $\mathbf{E}$ , e tali che, per il teorema di Schwarz,

57



## La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \Big|_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_0 = E_{klij}$$

- Applicando allora la formula di Green alla funzione  $V(\boldsymbol{\varepsilon})$  e tenendo conto della relazione qui sopra, che stabilisce l'esistenza delle cosiddette *simmetrie indiciali maggiori*, si ha

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

che è la *legge di Hooke generalizzata*; questa stabilisce la linearità tra le componenti di sforzo e quelle di deformazione; le componenti  $E_{ijkl}$  sono i *moduli di elasticità* (Lekhnitskii), ed  $\mathbf{E}$  è il *tensore elastico*, o *tensore di rigidità elastica*.

- Un approccio alternativo è il seguente: si ipotizza un comportamento lineare, in altre parole la legge di Hooke generalizzata; allora, tramite la formula di Green e per il teorema di Schwarz, si ottengono le simmetrie maggiori per i moduli elastici:

58



## La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = E_{klij} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- Ne consegue

$$dV = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow V = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

- I moduli elastici sono in numero di 81; tuttavia, la simmetria di  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e di  $\boldsymbol{\sigma}$  impone le simmetrie indiciali minori sui moduli elastici:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{jilk} = E_{ijlk};$$

queste 45 relazioni rendono indipendenti solo 36 moduli; le 15 simmetrie maggiori, infine, abbassano questo numero a 21 moduli indipendenti.

- Nel caso di un solido totalmente anisotropo, quindi, il numero delle grandezze necessarie per specificarne la risposta elastica è di 21.

## La legge di Hooke per un solido anisotropo

- Tuttavia, non si conoscono dei solidi totalmente anisotropi: i continui naturali, per esempio i cristalli o il legno, e quelli artificiali, come i compositi strutturali, mostrano sempre una qualche forma di simmetria nel comportamento, cioè una risposta identica in certe direzioni legate da relazioni di simmetria.
- Tali simmetrie sono il più sovente il riflesso di una simmetria materiale, dovuta per esempio all'esistenza di una geometria organizzata della disposizione dei costituenti molecolari, è il caso dei cristalli, oppure alla disposizione ordinata di fibre di rinforzo, come nel caso del legno o dei compositi, mentre nel caso di materiali strutturati, per esempio i laminati, questo tipo di simmetria della costituzione materiale può mancare, pur sussistendo una simmetria della risposta meccanica.

## Notazione tensoriale

- La legge di Hooke può essere rappresentata in modi diversi.
- Il modo più corretto è quello tensoriale, dove le diverse grandezze tensoriali in gioco sono rappresentate nel modo usuale, sia in notazione simbolica, sia in notazione indiciale, facendo uso della convenzione di Einstein sulla somma (ciò che si è fatto sin qui):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl};$$

$$V = \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

- Introducendo il tensore di cedevolezza elastica  $\mathbf{Z}$ , inverso del tensore di rigidità  $\mathbf{E}$ , si ha anche

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma}, \quad \varepsilon_{ij} = Z_{ijkl}\sigma_{kl};$$

$$V = \frac{1}{2}Z_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

## Notazione tensoriale

- Il tensore di cedevolezza ha ovviamente le stesse simmetrie di quello di rigidità.
- Le componenti  $Z_{ijkl}$  di  $\mathbf{Z}$  sono chiamate anche *coefficienti di deformazione* (Lekhnitskii).
- L'inconveniente di questa rappresentazione è la sua pesantezza.
- Per ovviare a questo inconveniente, sono state proposte nel passato notazioni alternative, due di queste sono introdotte qui di seguito.
- Queste notazioni restano comunque una rappresentazione Cartesiana dell'anisotropia, sono soltanto un modo alternativo e più rapido di indicare le componenti tensoriali dei vari tensori, ma bisogna considerare che *trasformano il calcolo tensoriale in calcolo matriciale*.
- Per questa ragione, in tali casi si userà una notazione matriciale, salvo diverso avviso.



## Notazione di Voigt

- Un modo ormai classico di rappresentare la legge di Hooke è quello proposto da Voigt.
- In questa rappresentazione, si sfruttano le simmetrie tensoriali per ridurre il numero delle componenti che vengono considerate e si trasformano i tensori  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  in vettori colonna e il tensore elastico  $\mathbf{E}$  in una matrice simmetrica  $6 \times 6$ : l'approccio diviene puramente matriciale.
- In particolare, la convenzione di Voigt è la seguente

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_3 &= \sigma_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \sigma_5 &= \sigma_{31}, & \sigma_6 &= \sigma_{12}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &= \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}, & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

- Da notare l'utilizzo delle componenti  $\gamma_{ij}$  in luogo di quelle tensoriali, circostanza che causerà dei problemi nel seguito.

## Notazione di Voigt

- La legge di Hooke viene quindi scritta come segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- In forma contratta:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad \sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad C_{ij} = C_{ji}, \quad V = \frac{1}{2}C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

- Grazie all'utilizzo delle componenti  $\gamma_{ij}$ , le componenti  $C_{ij}$  della matrice elastica  $[\mathbf{C}]$  sono uguali alle componenti  $E_{mnpq}$  corrispondenti.

## Notazione di Voigt

- Le simmetrie maggiori di  $\mathbf{E}$  si traducono, nel passaggio alla matrice  $[\mathbf{C}]$ , nella simmetria di quest'ultima.
- Il legame inverso è

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- In forma contratta,

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\}, \quad [\mathbf{S}] = [\mathbf{C}]^{-1}, \quad \varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \quad S_{ij} = S_{ji},$$

$$V = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$



## Notazione di Voigt

- Si deve far attenzione al fatto che stavolta si ottengono come risultato le componenti  $\gamma_{ij}$  e non le  $\varepsilon_{ij}$ .
- Inoltre, a causa di questo, le componenti della matrice di cedevolezza elastica  $[\mathbf{S}]$  non sono tutte uguali alle componenti corrispondenti del tensore di cedevolezza elastica  $\mathbf{Z}$ , ma si ha:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} Z_{ppqq} & 2Z_{pprs} \\ 2Z_{pprs} & 4Z_{pqrs} \end{bmatrix} =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} S_{11} = Z_{1111} & S_{12} = Z_{1122} & S_{13} = Z_{1133} & S_{14} = 2Z_{1123} & S_{15} = 2Z_{1131} & S_{16} = 2Z_{1112} \\ & S_{22} = Z_{2222} & S_{23} = Z_{2233} & S_{24} = 2Z_{2223} & S_{25} = 2Z_{2231} & S_{26} = 2Z_{2212} \\ & & S_{33} = Z_{3333} & S_{34} = 2Z_{3323} & S_{35} = 2Z_{3331} & S_{36} = 2Z_{3312} \\ \hline & & & S_{44} = 4Z_{2323} & S_{45} = 4Z_{2331} & S_{46} = 4Z_{2312} \\ & & & & S_{55} = 4Z_{3131} & S_{56} = 4Z_{3112} \\ & & & & & S_{66} = 4Z_{1212} \end{array} \right]$$

## Notazione di Voigt

- Dunque, l'uso della notazione matriciale di Voigt necessita qualche attenzione.
- Tuttavia, è la notazione la più antica e la più utilizzata nel mondo dei compositi.
- Per questa ragione, sarà utilizzata anche nel seguito di questo corso.

## Notazione di Pedersen

- Un'altra rappresentazione, sempre Cartesiana, dell'anisotropia, è quella proposta, tra gli altri, da Pedersen, Walpole e Rychlewski.
- In questo caso, la relazione tra tensioni e deformazioni è scritta come segue:

$$\{\sigma\} = [L] \{\varepsilon\}$$

dove stavolta

$$\{\sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sigma_5 = \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sigma_6 = \sqrt{2}\sigma_{12} \end{array} \right\}, \quad \{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{array} \right\}, \quad [L] = \left[ \begin{array}{c|c} E & \sqrt{2E} \\ \hline \sqrt{2E} & 2E \end{array} \right],$$

## Notazione di Pedersen

dove l'ultima relazione va letta come specificato qui di seguito:

$$[L] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} L_{11} = E_{1111} & L_{12} = E_{1122} & L_{13} = E_{1133} & L_{14} = \sqrt{2}E_{1123} & L_{15} = \sqrt{2}E_{1131} & L_{16} = \sqrt{2}E_{1112} \\ & L_{22} = E_{2222} & L_{23} = E_{2233} & L_{24} = \sqrt{2}E_{2223} & L_{25} = \sqrt{2}E_{2231} & L_{26} = \sqrt{2}E_{2212} \\ & & L_{33} = E_{3333} & L_{34} = \sqrt{2}E_{3323} & L_{35} = \sqrt{2}E_{3331} & L_{36} = \sqrt{2}E_{3312} \\ \hline & \text{sym} & & L_{44} = 2E_{2323} & L_{45} = 2E_{2331} & L_{46} = 2E_{2312} \\ & & & & L_{55} = 2E_{3131} & L_{56} = 2E_{3112} \\ & & & & & L_{66} = 2E_{1212} \end{array} \right]$$

- La relazione è dunque ancora in forma matriciale.
- La ragione di questa diversa rappresentazione dell'anisotropia risiede nel fatto che il legame inverso conserva la stessa forma di quello diretto, come si evince facilmente considerando la simmetria della relazione inversa.

## Notazione di Pedersen

- In altre parole, se si pone

$$\{\varepsilon\} = [M]\{\sigma\},$$

con ancora i due vettori colonna delle deformazioni e delle tensioni dati dalle relazioni precedenti, allora la matrice  $[M]$  è data, con ancora lo stesso simbolismo usato per  $[L]$ , dalla relazione

$$[M] = \left[ \begin{array}{c|c} Z & \sqrt{2}Z \\ \hline \sqrt{2}Z & 2Z \end{array} \right],$$

ed in più, ovviamente,

$$[M] = [L]^{-1}.$$

- Questa circostanza riflette il fatto, provato da Mehrabadi e Cowin, 1990, che le due matrici  $[L]$  e  $[M]$  rappresentano un tensore doppio in  $\mathbb{R}^6$ , mentre invece, come già detto,  $[C]$  e  $[S]$  sono semplicemente delle matrici.

## Notazione di Pedersen

- Questo, tra l'altro, implica il fatto che mentre le componenti di  $[L]$  e  $[M]$  si trasformano, per cambiamento di base, con le leggi classiche dei tensori del secondo ordine, e identiche per entrambe le matrici, così non è per  $[C]$  e  $[S]$ , come vedremo in seguito.
- La rappresentazione di Pedersen non è molto diffusa e quindi non sarà utilizzata nel seguito di questo corso.

## Significato fisico delle componenti elastiche

- Il legame costitutivo anisotropo può essere ulteriormente semplificato se, oltre alle simmetrie indiciali, che riducono a 21 il numero dei moduli elastici indipendenti, si prendono in considerazione anche le eventuali simmetrie materiali, queste, ovviamente, dipendenti dal materiale e non comuni a tutti i continui.
- Tuttavia, prima di passare a questo aspetto e dal momento che si dispone del legame elastico anisotropo generale, è bene considerare sin da adesso il significato fisico che i diversi moduli elastici hanno.
- In effetti, nei materiali anisotropi si riscontrano degli effetti meccanici sconosciuti nei materiali classici, cioè elastici e isotropi, e questi effetti sono proprio rappresentati e quantificati dai moduli elastici, o meglio ancora, dai coefficienti di deformazione, cioè dalle componenti del tensore  $\mathbf{Z}$  o della matrice  $[S]$ .
- Per comprendere ciò, si consideri un cubo di materiale elastico anisotropo, sottoposto alla sola tensione normale  $\sigma_1$ , come nella figura seguente.

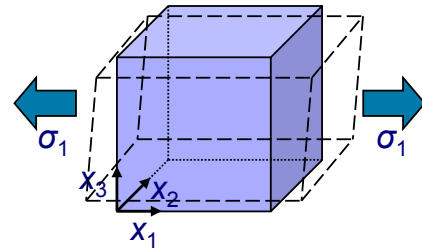
## Significato fisico delle componenti elastiche

- In tal caso si ricava facilmente che

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, & \varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1, & \varepsilon_3 &= S_{31}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= S_{41}\sigma_1, & \varepsilon_5 &= S_{51}\sigma_1, & \varepsilon_6 &= S_{61}\sigma_1, \end{aligned}$$

cioè, in forma tensoriale,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= Z_{1111}\sigma_{11}, & \varepsilon_{22} &= Z_{2211}\sigma_{11}, & \varepsilon_{33} &= Z_{3311}\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{23} &= Z_{2311}\sigma_{11}, & \varepsilon_{31} &= S_{3111}\sigma_{11}, & \varepsilon_{12} &= Z_{1211}\sigma_{11}. \end{aligned}$$



- Si osserva dunque che il materiale subisce non soltanto delle deformazioni normali, ma anche a taglio, pur essendo sottoposto soltanto a uno stato monoassiale di tensione normale.
- Vi sono quindi degli accoppiamenti (dovuti ai termini del tipo  $S_{ij}$ ,  $i=4,5,6$ ,  $j=1,2,3$ ) inesistenti nel caso di un solido isotropo, per il quale i soli accoppiamenti possibili (dovuti ai termini del tipo  $S_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ ,  $i \neq j$ ) sono quelli tra tensioni e deformazioni normali, cioè l'effetto Poisson.

73



## Significato fisico delle componenti elastiche

- Inoltre, l'effetto Poisson non è, in generale, identico nelle due direzioni trasversali (cioè, per esempio,  $S_{21} \neq S_{31}$ ).
- Il cubo cambia quindi non soltanto di volume, ma anche di forma e diventa un prisma irregolare (non si trasforma in un parallelepipedo).
- Allo stesso modo, se il cubo è soggetto a uno stato di taglio puro, per esempio nel piano 1-2 e parallelo ad  $x_1$ , allora si ottiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{15}\sigma_5, & \varepsilon_2 &= S_{25}\sigma_5, & \varepsilon_3 &= S_{35}\sigma_5, \\ \varepsilon_4 &= S_{45}\sigma_5, & \varepsilon_5 &= S_{55}\sigma_5, & \varepsilon_6 &= S_{65}\sigma_5. \end{aligned}$$

- Anche in questo caso si osservano degli accoppiamenti del tipo di quelli già visti nel caso precedente, tra tensioni a taglio e deformazioni normali (dovuti ai termini del tipo  $S_{ij}$ ,  $i=1,2,3$ ,  $j=4, 5, 6$ ).
- In più si nota un accoppiamento tra gli sforzi di taglio in un piano e le deformazioni a taglio nei piani ortogonali (dovuto ai termini di tipo  $S_{ij}$ ,  $i,j=4, 5, 6$ ,  $i \neq j$ ) un effetto analogo all'effetto Poisson, ma stavolta coinvolgente le tensioni e deformazioni a taglio e non quelle normali.

74



## Significato fisico delle componenti elastiche

- Nella matrice  $[S]$  si possono quindi individuare i gruppi di componenti responsabili dei vari effetti, diretti (i termini che si trovano sulla diagonale) o di accoppiamento, come nello schema seguente (è poi immediato trasferire queste considerazioni alle corrispondenti componenti del tensore  $\mathbf{Z}$ ).



- Si riconosce facilmente che una suddivisione simile esiste anche per il tensore di rigidezza  $\mathbf{E}$  e per la corrispondente matrice  $[C]$ .

75



## Rotazione del riferimento

- In molti casi, è necessario operare una rotazione del riferimento e quindi conoscere le nuove componenti elastiche nel nuovo riferimento (per esempio per esaminare le conseguenze delle eventuali simmetrie elastiche, vedi paragrafo seguente). Vediamo quindi come si esegue questa operazione con le varie rappresentazioni dell'anisotropia.

- Consideriamo dapprima la rappresentazione tensoriale: si conosce il legame costitutivo in una base  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , associata al riferimento Cartesiano  $R = \{o; x_1, x_2, x_3\}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

e si vuole conoscerlo nella nuova base  $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ , associata al nuovo riferimento Cartesiano  $R' = \{o; x'_1, x'_2, x'_3\}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}'\boldsymbol{\varepsilon}', \quad \sigma'_{ij} = E'_{ijkl}\varepsilon'_{kl}.$$

- L'apice sta a significare che le componenti delle varie grandezze sono scritte nella base  $B'$ , e non che si tratta di nuove grandezze.

76



## Rotazione del riferimento

- Il problema è quindi quello di trovare le componenti  $E'_{ijkl}$  del tensore  $\mathbf{E}$  scritte per il nuovo riferimento, in funzione di quelle  $E_{ijkl}$  nel vecchio e di quelle del tensore rotazione  $\mathbf{U}$  che trasforma la vecchia base nella nuova.
- Il tensore  $\mathbf{U}$  è un tensore rotazione propria, che opera “materialmente” la rotazione della vecchia base nella nuova, come se si trattasse di un operatore che rigidamente ruota un sistema di 3 assi rigidi nella nuova posizione.
- Le componenti del tensore  $\mathbf{U}$  sono allora facilmente ricavabili: la  $i$ -esima colonna della matrice che rappresenta  $\mathbf{U}$  nella base  $B$  è formata dalle componenti del vettore  $\mathbf{e}'_i$ , scritte nella base  $B$ .
- In altre parole, la componente  $U_{ij}$  è il coseno dell'angolo che il vettore  $\mathbf{e}'_j$  forma con il vettore  $\mathbf{e}_i$ , misurato a partire da quest'ultimo; la matrice  $[U]$  è dunque una matrice di coseni direttori; simbolicamente,

$$\mathbf{U}_B = [\mathbf{e}'_1 | \mathbf{e}'_2 | \mathbf{e}'_3]_B.$$

## Rotazione del riferimento

- Nel caso, molto comune e spesso utilizzato nel seguito, in cui la rotazione del riferimento si riduca ad una rotazione dell'angolo  $\theta$  attorno all'asse  $x_3$ , allora

$$\mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Per come è stato costruito,  $\mathbf{U}$  è il tensore tale che

$$(\mathbf{e}'_i)_B = \mathbf{U}_B(\mathbf{e}_i)_B$$

e quindi anche (da ricordare che  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$  perché  $\mathbf{U}$  è una rotazione)

$$(\mathbf{e}_i)_{B'} = \mathbf{U}_B^T(\mathbf{e}'_i)_{B'}.$$

- Si è qui usato il fatto che  $\mathbf{U}_{B'} = \mathbf{U}_B^T$ , come si riconosce immediatamente.



## Rotazione del riferimento

- Per alleggerire la notazione, l'ultima relazione sarà scritta

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{U}^T \mathbf{e}'_i,$$

sottintendendo dunque che questa operazione fornisce le componenti, rispetto alla base  $B'$ , del vettore  $\mathbf{e}_i$  della base  $B$  e che le componenti del tensore  $\mathbf{U}$  sono quelle nella base  $B$  ma trasposte.

- In rappresentazione indiciale, sarà

$$\mathbf{e}_i = U_{mn}^T (\mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n) \mathbf{e}'_i = U_{mn}^T \delta_{in} \mathbf{e}'_m = U_{im} \mathbf{e}'_m.$$

- Esprimendo il tensore  $\mathbf{E}$  nelle due basi come

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_B &= E_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \\ \mathbf{E}_{B'} &= E'_{mnpq} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_p \otimes \mathbf{e}'_q, \end{aligned}$$

ed inserendo l'espressione qui sopra per esprimere i vettori di  $B$  nella base  $B'$ , si ottiene la ben nota formula

## Rotazione del riferimento

$$E'_{mnpq} = U_{im} U_{jn} U_{kp} U_{lq} E_{ijkl}.$$

- Da notare dunque che le nuove componenti del tensore  $\mathbf{E}$  nella base  $B'$  sono una combinazione lineare delle vecchie componenti, nella base  $B$ , e che i coefficienti di questa combinazione sono funzioni di grado 4 dei coseni direttori della rotazione.
- Da notare anche che se come tensore rotazione  $\mathbf{U}$  si prende, come alcuni testi fanno, il tensore che opera il cambiamento di componenti, e non la rotazione della base, cioè se si prende  $\mathbf{U}^T$  al posto di  $\mathbf{U}$ , nella formula qui sopra si deve ovviamente invertire l'ordine degli indici delle componenti di  $\mathbf{U}$ .
- Questa stessa formula si applica ovviamente anche al tensore  $\mathbf{Z}$ :

$$Z'_{mnpq} = U_{im} U_{jn} U_{kp} U_{lq} Z_{ijkl}.$$

## Rotazione del riferimento

- Consideriamo adesso la rappresentazione di Voigt, per le due basi:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad \{\sigma'\} = [C']\{\varepsilon'\}.$$

- Dapprima, si devono trasformare i vettori colonna che rappresentano i tensori  $\sigma$  e  $\varepsilon$ .
- Per far questo, bisogna ricordare che i tensori del secondo ordine si trasformano come segue:

$$\sigma' = U^T \sigma U, \quad \varepsilon' = U^T \varepsilon U.$$

- Allora, una volta svolti i calcoli e riordinati i tensori in vettori colonna, dove si considerano solo le 6 componenti distinte, si ottiene, per il vettore colonna rappresentante il tensore degli sforzi, la relazione

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\},$$

dove la matrice  $[T]$  è data da

## Rotazione del riferimento

$$[T] = \begin{bmatrix} U_{11}^2 & U_{21}^2 & U_{31}^2 & 2U_{21}U_{31} & 2U_{11}U_{31} & 2U_{21}U_{11} \\ U_{12}^2 & U_{22}^2 & U_{32}^2 & 2U_{22}U_{32} & 2U_{12}U_{32} & 2U_{12}U_{22} \\ U_{13}^2 & U_{23}^2 & U_{33}^2 & 2U_{23}U_{33} & 2U_{13}U_{33} & 2U_{13}U_{23} \\ U_{12}U_{13} & U_{22}U_{23} & U_{32}U_{33} & U_{23}U_{32} + U_{22}U_{33} & U_{13}U_{32} + U_{12}U_{33} & U_{13}U_{22} + U_{12}U_{23} \\ U_{11}U_{13} & U_{21}U_{23} & U_{31}U_{33} & U_{23}U_{31} + U_{21}U_{33} & U_{13}U_{31} + U_{11}U_{33} & U_{13}U_{21} + U_{23}U_{11} \\ U_{11}U_{12} & U_{21}U_{22} & U_{31}U_{32} & U_{22}U_{31} + U_{32}U_{21} & U_{12}U_{31} + U_{32}U_{11} & U_{12}U_{21} + U_{22}U_{11} \end{bmatrix}.$$

- Nel caso del tensore delle deformazioni, questa relazione è ancora valida, ma solo se si prendono in conto le componenti tensoriali, cioè le  $\varepsilon_{ij}$  e non le  $\gamma_{ij}$ .
- Dunque, per trovare l'espressione della matrice che opera la rotazione delle deformazioni in notazione di Voigt, è necessario prendere in conto questo aspetto; ciò si può fare facilmente introducendo la matrice di Reuter,  $[R]$ , che trasforma le componenti tensoriali in componenti di Voigt:

## Rotazione del riferimento

$$\{\varepsilon\}_{Voigt} = [R]\{\varepsilon\}_{tens} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

- Allora, ponendo

$$\{\varepsilon\}_{tens} = [R]^{-1}\{\varepsilon\}_{Voigt}, \quad [R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

si ha evidentemente che, con  $\{\varepsilon\}$  in notazione di Voigt,

## Rotazione del riferimento

$$\{\varepsilon\}' = [R][T][R]^{-1}\{\varepsilon\},$$

- Si dimostra inoltre che

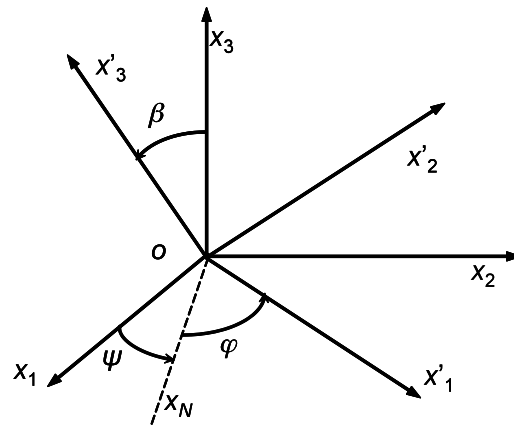
$$[R][T][R]^{-1} = [T]^T,$$

e sviluppando i calcoli si trova

$$[T]^T = \begin{bmatrix} U_{11}^2 & U_{21}^2 & U_{31}^2 & U_{21}U_{31} & U_{11}U_{31} & U_{21}U_{11} \\ U_{12}^2 & U_{22}^2 & U_{32}^2 & U_{22}U_{32} & U_{12}U_{32} & U_{12}U_{22} \\ U_{13}^2 & U_{23}^2 & U_{33}^2 & U_{23}U_{33} & U_{13}U_{33} & U_{13}U_{23} \\ 2U_{12}U_{13} & 2U_{22}U_{23} & 2U_{32}U_{33} & U_{23}U_{32} + U_{22}U_{33} & U_{13}U_{32} + U_{12}U_{33} & U_{13}U_{22} + U_{12}U_{23} \\ 2U_{11}U_{13} & 2U_{21}U_{23} & 2U_{31}U_{33} & U_{23}U_{31} + U_{21}U_{33} & U_{13}U_{31} + U_{11}U_{33} & U_{13}U_{21} + U_{23}U_{11} \\ 2U_{11}U_{12} & 2U_{21}U_{22} & 2U_{31}U_{32} & U_{22}U_{31} + U_{32}U_{21} & U_{12}U_{31} + U_{32}U_{11} & U_{12}U_{21} + U_{22}U_{11} \end{bmatrix}.$$

## Rotazione del riferimento

- Il fatto che  $[T]^{-T}$  non è la matrice  $[T]$ , prova che  $[T]$  non è una matrice che rappresenta un tensore rotazione in  $\mathbb{R}^6$ .
- Se si utilizza il classico metodo degli angoli di Eulero per determinare la rotazione delle due basi, come in figura, si ottiene per  $\mathbf{U}$  l'espressione:



$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \beta) & (-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \beta) & \sin \psi \sin \beta \\ (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \beta) & (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \beta) & -\cos \psi \sin \beta \\ \sin \varphi \sin \beta & \cos \varphi \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- L'espressione di  $[T]$  non viene data qui perché troppo lunga.

## Rotazione del riferimento

- Nel caso in cui la rotazione avvenga attorno all'asse  $x_3$ , la nutazione  $\beta=0$  mentre la precessione  $\psi$  e la rotazione propria  $\varphi$  non sono determinate, ma la loro somma sì ed è proprio l'anomalia  $\theta$  utilizzata in precedenza. Si constata facilmente che in questo caso si ritrova, come giusto, la stessa matrice di pagina 78.
- Da notare comunque che gli angoli di Eulero non sono sempre il modo più pratico di determinare la rotazione relativa di due basi, ma possono essere usati proficuamente in alcuni casi (per esempio per dimostrare l'asserto alla pagina 84).
- Adesso si può esplicitare l'espressione del legame costitutivo matriciale nel riferimento ruotato, in notazione di Voigt:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}' &= [T]\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma\}', \\ \{\varepsilon\}' &= [T]^T\{\varepsilon\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [T]^{-T}\{\varepsilon\}', \\ \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} \rightarrow [T]^{-1}\{\sigma\}' = [C][T]^{-T}\{\varepsilon\}' \rightarrow \{\sigma\}' = [T][C][T]^{-T}\{\varepsilon\}'. \end{aligned}$$

## Rotazione del riferimento

- Dunque,

$$\{\sigma\}' = [C] \{\varepsilon\}', \text{ dove } [C] = [T][C][T]^T.$$

- Per il legame inverso si ottiene invece

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \rightarrow [T]^T \{\varepsilon\}' = [S][T]^{-1} \{\sigma\}' \rightarrow \{\varepsilon\}' = [T]^T [S][T]^{-1} \{\sigma\}',$$

e dunque

$$\{\varepsilon\}' = [S'] \{\sigma\}', \text{ dove } [S'] = [T]^T [S][T]^{-1},$$

il che mostra che la rotazione della matrice  $[S]$  non si opera come la rotazione della matrice  $[C]$ .

- Questa è una delle conseguenze fondamentali della notazione di Voigt, da considerarsi con cura nei calcoli.
- Le componenti di  $[C]'$  e di  $[S]'$  si possono esplicitare in funzione di quelle di  $[C]$  e  $[S]$ ; vedremo le formule relative nel caso piano (pagina 159 e seguenti).

87



## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Sino ad ora si è considerato un continuo completamente anisotropo, detto anche *triclino*; tuttavia, i materiali, naturali o artificiali, presentano sempre delle simmetrie materiali, cioè manifestano un comportamento per il quale la risposta meccanica è sì direzionale, ma si ripete identica secondo certe direzioni.
- E', come già detto, il caso dei cristalli, che dispongono di simmetrie della risposta meccanica per effetto della disposizione dei costituenti molecolari su un reticolo organizzato secondo geometrie precise, ma è anche il caso di altri materiali.
- Ad esempio, gli acciai da laminazione hanno una direzione di simmetria conferita loro dal processo di fabbricazione, che tende ad orientare i grani di minerale secondo una direzione privilegiata.
- Oppure, è ancora il caso di alcune rocce, in genere sedimentarie e metamorfiche, dove il processo di sedimentazione o la spinta tettonica produce una microstruttura orientata dei grani costituenti.

88



## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Sempre in natura, è ancora il caso del ghiaccio del pack, che si forma per cristallizzazione dell'acqua di mare in una sequenza dall'alto verso il basso e con orientazione preferenzialmente verticale di macrocristalli allungati di ghiaccio.
- E infine, è ovviamente il caso di molte essenze legnose, in cui la presenza, più o meno marcata, di fibre nella direzione di accrescimento provoca ancora un comportamento con direzioni di simmetria preferenziale.
- Accanto a questi casi che riguardano materiali più o meno classici, esistono i casi di molti materiali compositi, che sono materiali artificiali in cui le simmetrie nel comportamento meccanico sono indotte da una disposizione preferenziale di fibre di rinforzo.
- Nel caso poi dei laminati formati da strati rinforzati con fibre, la simmetria del comportamento elastico può essere governata dal progettista e può esistere anche in caso di totale mancanza di una sottostante simmetria geometrica del materiale.

## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Nelle direzioni di simmetria materiale le proprietà meccaniche, in particolare quelle elastiche, di cui ci occuperemo qui, sono identiche: queste direzioni sono dette *direzioni equivalenti*.
- Neumann ha enunciato un principio per i cristalli che stabilisce la relazione tra la simmetria materiale e quella elastica: *le proprietà fisiche di un materiale hanno le stesse simmetrie della sua forma cristallina*.
- Tale principio può essere esteso anche ai solidi non cristallini, ma che possiedono comunque una qualche simmetria nella loro costituzione strutturale (ad esempio il legno).
- Tuttavia, si deve sottolineare sin da adesso che il concetto di simmetria elastica è più vasto di quello di simmetria materiale (ossia, di disposizione simmetrica della materia): oltre alle direzioni equivalenti, che coincidono con quelle di simmetria della struttura materiale, esistono altre direzioni in cui le componenti elastiche sono identiche.

## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- La presenza di simmetrie elastiche ha come conseguenza la diminuzione del numero di componenti elastiche indipendenti.
- Il tipo di simmetria elastica determina quindi una classe di materiali elastici lineari.
- Vi sono almeno due modi di trattare l'esistenza delle simmetrie elastiche al fine di ricavarne le conseguenze sulle componenti elastiche.
- Vediamo qui di seguito questi due approcci, sempre però utilizzando la notazione di Voigt.
  
- Siano  $R$  e  $R'$  due riferimenti, simmetrici secondo la forma della simmetria elastica del materiale.
- Il primo modo consiste nello sfruttare l'invarianza del potenziale elastico rispetto al riferimento, mentre il secondo utilizza direttamente la legge di Hooke scritta nei due riferimenti.

## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Poiché le direzioni degli assi corrispondenti dei due riferimenti sono direzioni equivalenti, a causa della simmetria elastica in oggetto, le espressioni della legge di Hooke e del potenziale elastico sono le stesse in  $R$  e in  $R'$ , e questo per uno stato di sforzo o di deformazione qualsiasi.
- Questa circostanza implica che devono essere identiche le componenti elastiche corrispondenti, ossia che nei due riferimenti le matrici  $[C]$  e  $[S]$  sono identiche.
- Dovendo ciò verificarsi per ogni possibile stato di sforzo o di deformazione, ne conseguono delle relazioni sulle componenti di queste matrici (per esempio, alcune si annullano).
  
- Per il primo metodo, si scrive il potenziale elastico nei due riferimenti, conservando la stessa matrice  $[C]$ , se si lavora con le deformazioni, o  $[S]$  se si lavora con le tensioni:

## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

$$V = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\}, \quad V' = \frac{1}{2} \{\varepsilon'\}^T [C] \{\varepsilon'\},$$

$$V = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\}, \quad V' = \frac{1}{2} \{\sigma'\}^T [S] \{\sigma'\}.$$

- Si sfruttano poi le trasformazioni per rotazione dei vettori  $\{\varepsilon\}$  o  $\{\sigma\}$ :

$$\{\sigma'\} = [T] \{\sigma\}, \quad \{\varepsilon'\} = [T]^T \{\varepsilon\}.$$

- Sostituendo nell'espressione corrispondente di  $V'$ , si ha la condizione, data dall'invarianza del potenziale elastico,

$$V = V' \rightarrow \begin{cases} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} = \{[T]^T \{\varepsilon'\}\}^T [C] [T] \{\varepsilon'\} \\ \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} = \{[T] \{\sigma'\}\}^T [S] [T] \{\sigma'\} \end{cases}$$

- Ovviamente, al posto di  $[T]$  si deve inserire la matrice rappresentante la simmetria in questione.

## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Per il secondo metodo, si scrive la legge di Hooke nei due riferimenti, si impone che questa sia la medesima nei due casi, cioè che, per simmetria, nei due sistemi la matrice  $[C]$  sia la medesima, e si sfruttano le formule di rotazione di tensioni e deformazioni:

$$\text{per simmetria si ha } \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \text{ e } \{\sigma'\} = [C] \{\varepsilon'\};$$

$$\text{ma: } \{\sigma'\} = [T] \{\sigma\} \text{ e } \{\varepsilon'\} = [T]^T \{\varepsilon\}$$

$$\downarrow$$

$$[T] [C] \{\varepsilon\} = [C] [T]^T \{\varepsilon\}.$$

- Se si lavora con le tensioni si ha la condizione analoga per le componenti di  $[S]$ ; seguendo lo stesso procedimento si ricava la relazione necessaria di simmetria per la matrice  $[S]$ :

$$[T]^T [S] \{\sigma\} = [S] [T] \{\sigma\}.$$



## Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- L'ultima relazione puo' ricavarsi anche direttamente dalla precedente.
- La matrice  $[T]$  è ancora quella che descrive la simmetria in oggetto; si deve notare che il tensore rotazione  $\mathbf{U}$  che descrive la simmetria, e da cui  $[T]$  dipende, in generale non è una rotazione propria (cioè a determinante +1), potendo rappresentare una riflessione (che comporta una inversione dell'orientazione dello spazio) o una combinazione di rotazioni e riflessioni (quindi con determinante che può assumere il valore -1).
- Di seguito, utilizzeremo il primo metodo perché più semplice da trattare e perché dà luogo a soltanto una equazione scalare invece di 6 equazioni scalari, come è il caso del secondo metodo.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Consideriamo adesso le diverse simmetrie elastiche possibili; queste sono:
  - simmetria rispetto ad un piano;
  - simmetria rispetto a tre piani ortogonali;
  - simmetria di ordine  $n$  rispetto ad un asse;
  - simmetria completa.
- **Simmetria rispetto ad un piano:** questo significa che attraverso ogni punto del continuo, passa un piano avente la proprietà che due direzioni simmetriche rispetto al piano sono direzioni equivalenti.
- In questo caso il tensore  $\mathbf{U}$  rappresenta una riflessione; se il piano di simmetria materiale è ortogonale all'asse  $x_3$ , allora

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Infatti, in questo modo si ottiene una riflessione del riferimento, in cui solo l'asse  $x_3$  cambia di orientazione.
- In questo caso, si ottiene

$$[T] = [T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1,2,3,6; \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 4,5. \end{cases}$$

- Allora la condizione

$$V = V' \rightarrow \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} = \{T\}^T \{\varepsilon'\} [C] \{T\}^T \{\varepsilon'\}$$

si traduce in questo caso in

## Le diverse simmetrie elastiche

$$C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_4 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 + C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon.$$

- La sola possibilità perché questa equazione sia verificata per ogni possibile stato deformativo, è che sia

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0.$$

- La matrice di elasticità si riduce quindi a sole 13 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- In particolare, si assiste, ed è un fatto caratteristico che si risconterà anche nei casi seguenti, alla scomparsa di alcuni termini di accoppiamento.
- Lo stesso procedimento si sarebbe potuto attuare con riguardo alle componenti della matrice  $[S]$ , ottenendo un risultato analogo.
- Da notare che mentre  $\det \mathbf{U} = -1$ ,  $\det [T] = +1$ , confermando il fatto che  $[T]$  non è una matrice rotazione.
- Un materiale che ha una simmetria rispetto ad un piano, si chiama *monoclino*.
- **Simmetria rispetto a tre piani ortogonali:** consideriamo adesso il caso in cui il continuo possieda un altro piano di simmetria, ortogonale al precedente.
- Sia ad esempio  $x_2=0$  questo nuovo piano di simmetria; ripercorrendo la stessa procedura applicata in precedenza, si ha

## Le diverse simmetrie elastiche

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T] = [T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1,2,3,5; \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 4,6. \end{cases}$$

- Si ottiene dunque la relazione

$$C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{54}\varepsilon_5\varepsilon_4 + C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon.$$

- Da questa, si ricavano le ulteriori condizioni sulle componenti di  $[C]$ :

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{54} = 0.$$

- Il numero delle componenti elastiche indipendenti si è dunque ridotto a 9.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Si consideri a questo punto l'esistenza di un terzo piano di simmetria, ortogonale ai due precedenti (evidentemente, il piano  $x_1=0$ , il solo che resta).
- Procedendo come di consueto, si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1,2,3,4; \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 5,6. \end{cases}$$

- Si ottiene quindi la relazione

$$C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + \\
 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{45}\varepsilon_4\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Questa relazione, si riscontra subito, non offre nessuna condizione supplementare sulle componenti di  $[C]$ : l'esistenza di un terzo piano di simmetria, ortogonale ai due precedenti, non aggiunge nulla di nuovo.
- Dato che il procedimento seguito non dipende dall'ordine in cui si considerano le differenti simmetrie, come si constata immediatamente, questa circostanza si può interpretare come il fatto che l'esistenza di soli due piani ortogonali di simmetria è impossibile: un secondo piano di simmetria ortogonale implica necessariamente l'esistenza anche di un terzo piano di simmetria.
- In questi casi, dunque, il numero delle costanti elastiche indipendenti si riduce a 9; questi materiali si dicono *ortogonalmente anisotropi*, o più semplicemente *ortotropi*.
- Molti materiali, naturali o compositi artificiali, sono ortotropi; questa classe di materiali assume dunque una grande importanza nelle applicazioni.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Il legame ortotropo è dunque

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Si osserva che nei materiali ortotropi, rispetto al riferimento di simmetria materiale, detto anche *riferimento di ortotropia*, scompaiono tutti gli accoppiamenti tipici dell'anisotropia, restando solo quelli tra tensioni e deformazioni normali, cioè gli effetti Poisson, in genere distinti, nelle tre direzioni di simmetria.
- Per la matrice  $[S]$  si ottiene ancora un risultato analogo.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine  $n$  rispetto ad un asse:** un asse  $g$  è un asse di simmetria di ordine  $n$  se le direzioni equivalenti formano un insieme di rette che si sovrappongono per rotazione di un angolo  $\theta$  pari a  $2\pi/n$  attorno all'asse  $g$ .
- Nel caso dell'elasticità, si dimostra che possono esistere solo assi di simmetria di ordine 2, 3, 4 e 6.
- Nel seguito, considereremo l'asse  $g$  coincidente con l'asse  $x_3$ .
- Simmetria di ordine 2; in questo caso  $\theta=\pi$  (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di  $180^\circ$  attorno ad  $x_3$ ).
- L'espressione del tensore  $\mathbf{U}$  è quella data a pagina 78, e in questo caso si ottiene

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- A questo tensore rotazione, corrisponde la matrice

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che è la stessa del caso monoclinico.

- Questo implica che il risultato è il medesimo: la simmetria di ordine 2 rispetto ad un asse coincide con la simmetria rispetto ad un piano ortogonale all'asse.
- La matrice  $[C]$  è dunque la stessa del caso monoclinico, come pure la matrice  $[S]$ , e quindi si hanno 13 componenti elastiche indipendenti anche in questo caso.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine 3; in questo caso  $\theta = 2/3 \pi$  (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di  $120^\circ$  attorno ad  $x_3$ ).
- In questo caso si ha

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Esprimendo come di consueto l'uguaglianza del potenziale elastico nei due riferimenti, si ottiene un'equazione piuttosto lunga, che si omette per brevità.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Le condizioni sulle componenti della matrice  $[C]$ , derivanti dall'imporre che la suddetta uguaglianza sia valida per ogni stato di deformazione, sono in totale 14:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{34} = C_{35} = C_{45} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{23} = C_{13},$$

$$C_{24} = -C_{14}, \quad C_{15} = -C_{25}, \quad C_{46} = C_{25}, \quad C_{56} = C_{14}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$

- Il legame elastico in questo caso dipende dunque da 7 componenti elastiche indipendenti

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{25} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & C_{25} \\ -C_{25} & C_{25} & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{14} & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

107



## Le diverse simmetrie elastiche

- In questo caso per la matrice  $[S]$  si ottiene un risultato leggermente differente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & -S_{25} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} & S_{25} & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & S_{25} \\ -S_{25} & S_{25} & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & S_{25} & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Questo è dovuto al fatto che la relazione che lega le componenti di  $[S]$  a quelle del tensore  $\mathbf{Z}$  comporta dei coefficienti 2 e 4, pagina 66.
- D'altra parte, questo risultato si può ritrovare direttamente per inversione della matrice  $[C]$ .

108



## Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine 4; in questo caso  $\theta=\pi/2$  (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di  $90^\circ$  attorno ad  $x_3$ ).
- Questa volta si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Procedendo come al solito, si ottengono le 14 condizioni seguenti:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{36} = C_{46} = C_{56} = 0, \\ C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{13}, \quad C_{26} = -C_{16}, \quad C_{55} = C_{44}.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Anche in questo caso il legame elastico dipende da 7 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Simmetria di ordine 6; in questo caso  $\theta=\pi/3$  (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di  $60^\circ$  attorno ad  $x_3$ ).
- In tal caso si ha



## Le diverse simmetrie elastiche

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Si ottengono in questo caso le 16 condizioni seguenti:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{46} = C_{56} = 0,$$

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{13}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Il legame elastico dipende in questo caso da 5 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Anche in questo caso, come in quello di asse di simmetria di ordine 3, la matrice  $[\mathbf{S}]$  è, per le stesse ragioni addotte in quel caso, leggermente differente:

## Le diverse simmetrie elastiche

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Simmetria di ordine  $\infty$ ; in questo caso la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ha per una rotazione di un angolo  $\theta$  qualsiasi, ovvero, ogni direzione nel piano ortogonale all'asse è direzione equivalente, cioè di simmetria, e l'asse è dunque un asse di simmetria di rotazione.
- In questo caso si ha

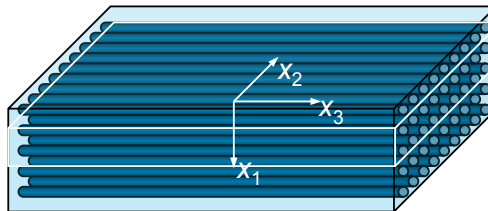
## Le diverse simmetrie elastiche

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

- Procedendo come di consueto, si arriva alle stesse 16 condizioni del caso precedente.
- Questo significa che il caso in esame, che riguarda i cosiddetti materiali *trasversalmente isotropi*, coincide, dal punto di vista elastico, con quello di una simmetria di ordine 6. In altre parole, un asse di simmetria di ordine 6 è anche un asse di simmetria elastica di rotazione, o se si preferisce, un continuo che presenta un asse di simmetria di ordine 6 ha lo stesso comportamento di un continuo che ha una simmetria di rotazione rispetto allo stesso asse.

## Le diverse simmetrie elastiche

- Anche i continui trasversalmente isotropi hanno un comportamento elastico descritto quindi da sole 5 componenti elastiche distinte. Le matrici  $[C]$  ed  $[S]$  sono ovviamente quelle precedenti, del caso  $n=6$ .
- I materiali trasversalmente isotropi sono importanti nelle applicazioni: infatti, un materiale composto da una matrice isotropa rinforzata con fibre orientate disposte in maniera uniforme ha un comportamento isotropo trasverso: la direzione di simmetria è quella delle fibre, mentre tutte le direzioni nel piano ortogonale a questa sono equivalenti, data l'uniformità di distribuzione delle fibre orientate.
- Questo è il caso del legno ed anche dei compositi fibrorinforzati.
- In effetti, una lamina di composito a fibre lunghe, come pure una di legno, è a tutti gli effetti una “fetta” di un solido massivo fibrorinforzato.



115



## Le diverse simmetrie elastiche

- Anche altri materiali già citati, come il ghiaccio del pack, l'acciaio di laminazione o certe rocce, hanno un comportamento isotropo trasverso, determinato sempre dall'esistenza di una direzione di simmetria elastica, prodottasi nel processo di formazione del materiale stesso.
- **Simmetria completa:** nella simmetria completa, detta anche *isotropia*, ogni direzione dello spazio è equivalente, dal punto di vista elastico. Questo significa anche che il legame è indifferente rispetto al riferimento scelto. In altre parole, le componenti dei tensori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Z}$  sono anche degli invarianti tensoriali, e così pure, le componenti delle matrici  $[C]$  e  $[S]$  non variano per cambiamento del riferimento.
- La via seguita sin qui per tutti i casi precedenti di simmetria può essere ancora utilizzata; si può, ad esempio, esprimere il tensore  $\mathbf{U}$  tramite gli angoli di Eulero, e procedere nel solito modo.

116



## Le diverse simmetrie elastiche

- Tuttavia, questa procedura è molto onerosa dal punto di vista del calcolo (si dovrebbe imporre che  $V=V'$  per una rotazione qualsiasi).
- Un altro modo, più rapido, è il seguente: per un materiale trasversalmente isotropo, si impone che la direzione  $x_3$ , dell'asse di simmetria, sia equivalente a una direzione qualsiasi nel piano di isotropia, per esempio la direzione  $x_1$ .
- In tal caso, si ha una trasformazione di riflessione e rotazione, descritta da

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si ottengono quindi le 3 condizioni seguenti

$$C_{33} = C_{11}, \quad C_{13} = C_{12}, \quad C_{44} = C_{66}.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Quindi, come noto, il numero delle componenti elastiche indipendenti si riduce a 2; per un solido isotropo, il legame elastico è

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Da notare che 2 è il numero minimo di grandezze necessarie per caratterizzare un solido in cui si hanno due effetti, uno diretto e uno di accoppiamento (quello di Poisson).
- Per quanto riguarda la matrice  $[\mathbf{S}]$ , si ha

## Le diverse simmetrie elastiche

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Resta da provare che il legame elastico è invariante rispetto ad un cambio di riferimento qualsiasi, condizione necessaria perché il legame trovato sia rappresentativo di un materiale isotropo, cioè completamente simmetrico.
- Si è visto che il cambio di riferimento trasforma le componenti della matrice  $[C]$  secondo la formula

$$[C'] = [T][C][T]^T.$$

## Le diverse simmetrie elastiche

- Prendendo una matrice  $[T]$  che rappresenta una trasformazione qualsiasi, ad esempio utilizzando gli angoli di Eulero (il tensore  $\mathbf{U}$  corrispondente è a pagina 85), si ottiene proprio

$$[C'] = [C] \quad \forall \psi, \varphi, \beta.$$

- Quindi, la matrice  $[C]$  è invariante rispetto ad una rotazione qualsiasi e le sue componenti lo sono ugualmente:  $C_{11}$  e  $C_{12}$  sono degli invarianti, come pure le corrispondenti componenti di  $\mathbf{E}$ ,  $E_{1111}$  e  $E_{1122}$ .
- Si perviene alle stesse conclusioni anche per la matrice  $[S]$ , ed il tensore  $\mathbf{Z}$ , seguendo la medesima procedura, utilizzando la trasformazione

$$[S'] = [T]^T [S] [T].$$

- Infine, si verifica facilmente che il legame isotropo può essere scritto nella classica forma delle *equazioni di Lamé* (1852):

## Le diverse simmetrie elastiche

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right).$$

- Le due costanti di Lamé,  $\lambda$  e  $\mu$ , sono legate alle componenti  $C_{11}$  e  $C_{12}$  dalle relazioni:

$$\lambda = C_{12}, \quad \mu = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$

- Due osservazioni per terminare; la prima concerne l'esistenza dei termini di accoppiamento: si è visto che questi spariscono, in tutto o in parte, per effetto delle simmetrie elastiche.
- Tuttavia, si deve ribadire che, per la maniera stessa con cui si è operato nella riduzione del numero delle componenti elastiche, *questo avviene esclusivamente in un riferimento di simmetria materiale.*

121



## Le diverse simmetrie elastiche

- Infatti, in un riferimento qualsiasi, tutti i termini delle matrici  $[C]$  e  $[S]$ , come pure dei tensori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Z}$ , sono in generale differenti da zero, come si constata facilmente ruotando le espressioni di  $[C]$  e  $[S]$  in un riferimento qualsiasi, per uno dei casi di simmetria elastica visti in precedenza.
- L'unico caso in cui  $[C]$  e  $[S]$  conservano la propria struttura, cioè sono totalmente invarianti, è quello isotropo: l'isotropia non ha mai termini di accoppiamento, tranne quelli tra tensioni e deformazioni normali, ovvia conseguenza del fatto che l'isotropia è la simmetria totale, in ogni riferimento possibile.
- Al contrario, un qualsiasi continuo si comporta, apparentemente, come un solido totalmente anisotropo in un riferimento che non sia un riferimento di simmetria elastica.
- Resta però il fatto che per ciascuna simmetria elastica il numero delle componenti indipendenti non varia; ad esempio, per un materiale ortotropo le 21 componenti elastiche presenti in un

122



## Le diverse simmetrie elastiche

riferimento qualsiasi si possono comunque esprimere in funzione delle sole 9 componenti distinte non nulle presenti nel legame scritto nel riferimento di ortotropia, tramite la regola di cambiamento di riferimento vista in precedenza.

- L'altra osservazione concerne la coassialità dei tensori degli sforzi e delle deformazioni: le equazioni di Lamé mostrano immediatamente che nel caso isotropo questi due tensori sono coassiali.
- Ora, un esempio qualunque basta a far vedere che questo non è, in generale, il caso per un solido anisotropo. Ad esempio, si dimostra facilmente che nel legame cubico,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

123



## Le diverse simmetrie elastiche

che è un legame ortotropo in cui le componenti elastiche secondo i tre assi di simmetria sono identiche (è un caso particolare di ortotropia, le componenti distinte sono solo 3, vedere il paragrafo seguente) tensioni e deformazioni non sono coassiali ogni qualvolta è presente una componente di deformazione di taglio rispetto agli assi di ortotropia.

124



## Le simmetrie dei cristalli

- I cristalli sono, in natura, i continui anisotropi per eccellenza.
- In funzione della sua struttura cristallina, un solido cristallino ha una certa simmetria geometrica cui corrisponde, per il Principio di Neumann, una simmetria elastica.
- Si dimostra che esistono 32 forme di simmetria geometrica dei cristalli, che corrispondono ai modi di cui si dispone per riempire lo spazio tramite ripetizione ordinata di un motivo elementare, la *cella cristallina*.
- Esistono 14 celle cristalline differenti, i cosiddetti *reticoli di Bravais*.
- Le 32 forme di simmetria cristallina possono essere raggruppate in 7 sistemi cristallini, detti *singonie*; ogni singonia ha un comportamento elastico definito, coincidente con uno dei tipi visti in precedenza tra i tipi triclinico, monoclinico, ortotropo, ad asse di rotazione di ordine 3, 4 o 6: eventualmente, in certi casi si hanno ulteriori riduzioni delle costanti elastiche indipendenti, ad esempio perché, a causa della simmetria cristallina, una o più componenti elastiche diventano identiche, senza però cambiare per questo la simmetria elastica.

125



## Le simmetrie dei cristalli

- Le *singonie elastiche* dei cristalli, cioè le loro classi di simmetria elastica, sono tuttavia 9, in quanto si osserva che nel caso di due singonie cristalline si hanno due possibili simmetrie elastiche.
- Vi sono diversi modi di classificare i cristalli e non è certo qui la sede per affrontare questo argomento, per il quale si rinvia a dei testi di cristallografia.
- Nel seguito, si dà una tabella riassuntiva delle singonie, secondo la classificazione di Voigt.
- Gli elementi di simmetria geometrica dei cristalli possono essere:
  - piano di simmetria ortogonale, indicato con P;
  - un asse di rotazione di ordine  $n$ , con  $n=2, 3, 4$  o  $6$ , indicato con  $L^n$ ;
  - un asse di simmetria completa di ordine  $n$ , in cui alla rotazione di ordine  $n$  si aggiunge una simmetria finale rispetto al piano ortogonale all'asse, indicato con  $L_n$ ;
  - un centro di simmetria o inversione, indicato con C.
- Ogni forma di simmetria geometrica è caratterizzata da un insieme definito di elementi di simmetria, P,  $L^n$ ,  $L_n$  e C.

126





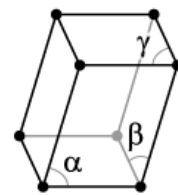
## Le simmetrie dei cristalli

- Ad esempio, se la formula di simmetria è  $L^3_6 3L^2 3PC$ , allora la forma cristallina ha un asse di rotazione di ordine 3, che è anche un asse di simmetria completa di ordine 6, 3 assi di simmetria di ordine 2, 3 piani di simmetria e un centro di simmetria.
- Vediamo dunque in dettaglio le 7 singonie cristalline, secondo la classificazione di Voigt.

### ■ Classe I: singonia triclina

- Forme di simmetria: (1) nessuna, (2) C
- Asse  $x_3$ : un qualunque asse
- Singonia elastica: triclina
- Numero componenti elastiche indipendenti: 21
- Reticolo di Bravais →

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$$



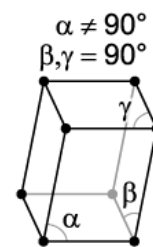
127



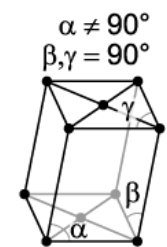
## Le simmetrie dei cristalli

### ■ Classe II: singonia monoclina

- Forme di simmetria: (3)  $L^2$ , (4) P, (5)  $L^2PC$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^2$  o ortogonale a P
- Singonia elastica: monoclina
- Numero componenti elastiche indipendenti: 13
- Reticoli di Bravais →



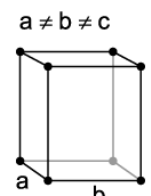
semplice



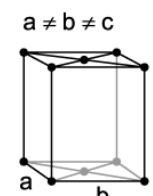
a basi centrate

### ■ Classe III: singonia ortorombica

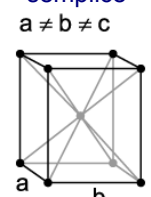
- Forme di simmetria: (6)  $3L^2$ , (7)  $L^2 2P$ , (8)  $3L^2 3PC$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^2$
- Asse  $x_1$ : coincidente con l'altro  $L^2$  o ortogonale a P
- Singonia elastica: ortotropa
- Numero componenti elastiche indipendenti: 9
- Reticoli di Bravais →
- Esempi: topazio, barite



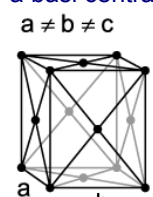
semplice



a basi centrate



a corpo centrato



a facce centrate

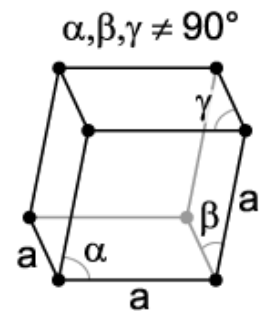
128



## Le simmetrie dei cristalli

### ■ Classe IV: singonia romboedrica o trigonale

- Forme di simmetria: (17)  $L^3L^2$ , (18)  $L^3P$ , (20)  $L^3_6L^2_3PC$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^3$
- Asse  $x_1$ : coincidente con  $L^2$  o ortogonale a P
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 3, con  $C_{25}=0$
- Numero componenti elastiche indipendenti: 6
- Reticolo di Bravais →
- Esempi: calcite, quarzo, tormalina



### ■ Classe IV a: singonia romboedrica o trigonale

- Forme di simmetria: (16)  $L^3$ , (19)  $L^3_6C$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^3$
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 3
- Numero componenti elastiche indipendenti: 7
- Reticolo di Bravais →

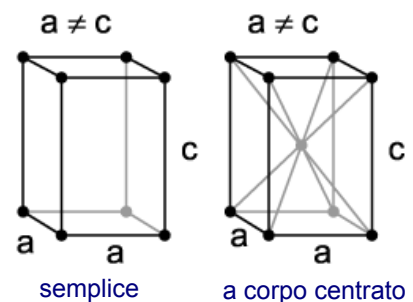
## Le simmetrie dei cristalli

### ■ Classe V: singonia tetragonale

- Forme di simmetria: (10)  $L^4L^2$ , (12)  $L^4P$ , (13)  $L^4L^2_5PC$ , (15)  $L^2_4L^2_2P$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^4$  o  $L^2_4$
- Asse  $x_1$ : coincidente con  $L^2$  o ortogonale a P
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 4, con  $C_{16}=0$
- Numero componenti elastiche indipendenti: 6
- Reticolo di Bravais →

### ■ Classe V a: singonia tetragonale

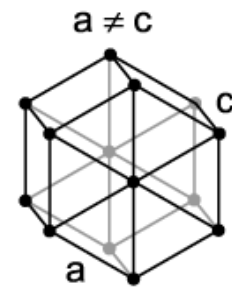
- Forme di simmetria: (9)  $L^4$ , (11)  $L^4PC$ , (14)  $L^2_4$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^4$  o  $L^2_4$
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 4
- Numero componenti elastiche indipendenti: 7
- Reticolo di Bravais →



## Le simmetrie dei cristalli

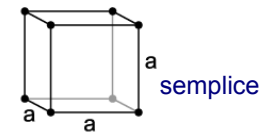
### ■ Classe VI: singonia esagonale

- Forme di simmetria: (21)  $L^3P$ , (22)  $L^3L^24P$ , (23)  $L^6$ , (24)  $L^6L^2$ , (25)  $L^6PC$ , (26)  $L^66P$ , (27)  $L^66L^27PC$
- Asse  $x_3$ : coincidente con  $L^6$  o  $L^3$
- Asse  $x_1$ : coincidente con  $L^2$  quando esiste
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 6
- Numero componenti elastiche indipendenti: 5
- Reticolo di Bravais →
- Esempio: berillio



### ■ Classe VII: singonia cubica

- Forme di simmetria: (28)  $3L^24L^3$ , (29)  $3L^24L^3_63PC$ , (30)  $3L^2_44L^36P$ , (31)  $3L^44L^36L^2$ , (32)  $3L^44L^3_66L^29PC$
- Assi  $x_1$  e  $x_2$ : coincidenti con  $L$  o  $L^2$  o  $L^4$
- Singonia elastica: ortotropa, con i 3 assi equivalenti
- Numero componenti elastiche indipendenti: 3
- Reticolo di Bravais →
- Esempi: salgemma, pirite, fluorite



131



## Le costanti tecniche di elasticità

- Una descrizione alternativa, e molto utilizzata, del comportamento elastico è quella che fa uso delle cosiddette *costanti tecniche* o *dell'ingegnere*.
- Il vantaggio di queste grandezze è quello di quantificare un effetto, diretto o di accoppiamento, dal significato fisico immediato, facilmente identificabile e riproducibile in tests di laboratorio.
- Come conseguenza, queste costanti, sono direttamente deducibili da (più o meno) semplici tests, come ad esempio i tests di trazione.
- Queste costanti tecniche, in numero ovviamente di 21 nel caso più generale di anisotropia totale, sono:
  - 3 moduli di Young  $E_i$ ,  $i=1,2,3$ ;
  - 3 moduli a taglio  $G_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ ;
  - 3 coefficienti di Poisson  $\nu_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ ;
  - 3 coefficienti di Chentsov  $\mu_{ij,kl}$ ,  $i,j,k,l=1,2,3$ ;
  - 9 coefficienti di influenza mutua di 1° o 2° tipo,  $\eta_{ij,k}$  o  $\eta_{i,jk}$ ,  $i,j,k=1,2,3$ ;

132



## Le costanti tecniche di elasticità

- Il modo in cui sono definite le costanti tecniche ed il legame che queste hanno con le componenti elastiche della matrice  $[S]$  e del tensore  $\mathbf{Z}$  è indicato qui di seguito.
- Moduli di Young:** come nel caso isotropo, si definisce il modulo di Young  $E_i$  come:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad i = 1,2,3, \quad \sigma_j = 0 \quad \text{per} \quad j \neq i, \quad j = 1,\dots,6.$$

- Ne conseguono le relazioni

$$S_{11} = Z_{1111} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = Z_{2222} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = Z_{3333} = \frac{1}{E_3}.$$

- Moduli a taglio:** ancora come nel caso isotropo, si definisce il modulo a taglio  $G_{ij}$  come

$$G_{ij} = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}, \quad i, j = 1,2,3, \quad k = 4,5,6, \quad \sigma_h = 0 \quad \text{per} \quad h \neq k, \quad h = 1,\dots,6.$$

## Le costanti tecniche di elasticità

- La corrispondenza tra gli indici  $k$  e quelli  $ij$  è quella usuale di Voigt; inoltre, la simmetria dei tensori  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dà immediatamente  $G_{ij}=G_{ji}$ : i moduli a taglio sono quindi solo 3.
- Ne conseguono le relazioni

$$S_{44} = 4Z_{2323} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = 4Z_{1313} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = 4Z_{1212} = \frac{1}{G_{12}}.$$

- Coefficienti di Poisson:** ancora, la definizione dei coefficienti di Poisson  $\nu_{ij}$  è quella classica:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}, \quad i, j = 1,2,3, \quad \sigma_k = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i, \quad k = 1,\dots,6.$$

- D'altra parte, dalla definizione data dei moduli di Young si ha

$$\varepsilon_j = -\nu_{ij} \varepsilon_i = -\nu_{ij} \frac{\sigma_i}{E_i}, \quad i, j = 1,2,3, \quad \sigma_k = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i, \quad k = 1,\dots,6.$$

## Le costanti tecniche di elasticità

- Ne consegue che

$$S_{ij} = Z_{ijij} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \rightarrow \quad \nu_{ji} = -\frac{S_{ij}}{S_{jj}},$$

cioè le relazioni

$$S_{12} = Z_{1122} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{13} = Z_{1133} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad S_{23} = Z_{2233} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

- Le simmetrie maggiori di  $[S]$ ,  $S_{ij}=S_{ji}$  danno poi le seguenti relazioni di reciprocità, che riducono a 3 i coefficienti di Poisson indipendenti:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- Da notare che non tutti gli autori, come ad esempio Tsai, notano in questo modo i coefficienti di Poisson, che è il modo comune a molti autori che operano nel settore dei compositi (Jones, Lekhnitskii etc.): infatti, è usata anche la notazione seguente,

## Le costanti tecniche di elasticità

$$S_{ij} = Z_{ijij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- In definitiva, questi autori invertono l'ordine degli indici  $i$  e  $j$  in  $\nu_{ij}$  ma la definizione meccanica di coefficiente di Poisson è la medesima.
- **Coefficienti di Chentsov:** si definiscono nel modo seguente:

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{kl}}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kl, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- D'altra parte, dalla definizione data dei moduli di taglio si ha

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij,kl} \varepsilon_{kl} = \mu_{ij,kl} \frac{\sigma_{kl}}{G_{kl}}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kl, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

## Le costanti tecniche di elasticità

- Ne conseguono le relazioni

$$S_{45} = 4Z_{2331} = \frac{\mu_{23,31}}{G_{31}}, \quad S_{46} = 4Z_{2312} = \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}}, \quad S_{56} = 4Z_{3112} = \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}},$$

$$\mu_{23,31} = \frac{S_{45}}{S_{55}}, \quad \mu_{23,12} = \frac{S_{46}}{S_{66}}, \quad \mu_{31,12} = \frac{S_{56}}{S_{66}}.$$

- Le simmetrie maggiori offrono poi le seguenti relazioni di reciprocità, che, insieme alle simmetrie minori, riducono a 3 i coefficienti di Chentsov indipendenti:

$$\frac{\mu_{ij,kl}}{G_{kl}} = \frac{\mu_{kl,ij}}{G_{ij}}.$$

- I coefficienti di Chentsov sono gli analoghi dei coefficienti di Poisson per quanto riguarda gli effetti dovuti alle tensioni di taglio.

## Le costanti tecniche di elasticità

- Coefficienti di influenza mutua di 1° tipo:** sono definiti come

$$\eta_{i,jk} = \frac{\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon_{jk}}, \quad i, j, k = 1,2,3, \quad j \neq k, \quad \sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq jk, \quad p, q = 1,2,3.$$

- Questi coefficienti caratterizzano quindi la deformazione normale in direzione  $i$  per effetto di un taglio agente in direzione  $x_j$  sul piano ortogonale a  $x_k$ .
- Le definizioni date dei moduli di taglio, offrono poi

$$\varepsilon_{ii} = 2\eta_{i,jk}\varepsilon_{jk} = \eta_{i,jk} \frac{\sigma_{jk}}{G_{jk}}, \quad i, j, k = 1,2,3, \quad j \neq k,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq jk, \quad p, q = 1,2,3.$$

- Ne conseguono le 9 relazioni (per le simmetrie minori, l'inversione del gruppo di indici  $jk$  non ha alcun effetto)

## Le costanti tecniche di elasticità

$$\begin{aligned}
 S_{14} = 2Z_{1123} &= \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}}, & S_{15} = 2Z_{1131} &= \frac{\eta_{1,31}}{G_{31}}, & S_{16} = 2Z_{1112} &= \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}, \\
 S_{24} = 2Z_{2223} &= \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}}, & S_{25} = 2Z_{2231} &= \frac{\eta_{2,31}}{G_{31}}, & S_{26} = 2Z_{2212} &= \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}, \\
 S_{34} = 2Z_{3323} &= \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}}, & S_{35} = 2Z_{3331} &= \frac{\eta_{3,31}}{G_{31}}, & S_{36} = 2Z_{3312} &= \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}},
 \end{aligned}$$

e anche le altre 9 relazioni

$$\begin{aligned}
 \eta_{1,23} &= \frac{S_{14}}{S_{44}}, & \eta_{1,31} &= \frac{S_{15}}{S_{55}}, & \eta_{1,12} &= \frac{S_{16}}{S_{66}}, \\
 \eta_{2,23} &= \frac{S_{24}}{S_{44}}, & \eta_{2,31} &= \frac{S_{25}}{S_{55}}, & \eta_{2,12} &= \frac{S_{26}}{S_{66}}, \\
 \eta_{3,23} &= \frac{S_{34}}{S_{44}}, & \eta_{3,31} &= \frac{S_{35}}{S_{55}}, & \eta_{3,12} &= \frac{S_{36}}{S_{66}}.
 \end{aligned}$$

## Le costanti tecniche di elasticità

- **Coefficienti di influenza mutua di 2° tipo:** sono definiti come

$$\eta_{ij,k} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{kk}}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad \sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kk, \quad pq = 1, 2, 3.$$

- Questi coefficienti caratterizzano quindi la deformazione a taglio relativa alle direzioni  $x_i$  e  $x_j$  per effetto di uno sforzo normale in direzione  $k$ .
- Le definizioni date dei moduli di Young, offrono poi

$$2\varepsilon_{ij} = \eta_{ij,k} \varepsilon_{kk} = \eta_{ij,k} \frac{\sigma_{kk}}{E_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kk, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- Ne conseguono le 9 relazioni (per le simmetrie minori, l'inversione del gruppo di indici  $ij$  non ha alcun effetto)

## Le costanti tecniche di elasticità

$$\begin{aligned}
 S_{41} = 2Z_{2311} &= \frac{\eta_{23,1}}{E_1}, & S_{51} = 2Z_{3111} &= \frac{\eta_{31,1}}{E_1}, & S_{61} = 2Z_{1211} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1}, \\
 S_{42} = 2Z_{2322} &= \frac{\eta_{23,2}}{E_2}, & S_{52} = 2Z_{3122} &= \frac{\eta_{31,2}}{E_2}, & S_{62} = 2Z_{1222} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2}, \\
 S_{43} = 2Z_{2333} &= \frac{\eta_{23,3}}{E_3}, & S_{53} = 2Z_{3133} &= \frac{\eta_{31,3}}{E_3}, & S_{63} = 2Z_{1233} &= \frac{\eta_{12,3}}{E_3},
 \end{aligned}$$

e anche le altre 9 relazioni

$$\begin{aligned}
 \eta_{23,1} &= \frac{S_{41}}{S_{11}}, & \eta_{31,1} &= \frac{S_{51}}{S_{11}}, & \eta_{12,1} &= \frac{S_{61}}{S_{11}}, \\
 \eta_{23,2} &= \frac{S_{42}}{S_{22}}, & \eta_{31,2} &= \frac{S_{52}}{S_{22}}, & \eta_{12,2} &= \frac{S_{62}}{S_{22}}, \\
 \eta_{23,3} &= \frac{S_{43}}{S_{33}}, & \eta_{31,3} &= \frac{S_{53}}{S_{33}}, & \eta_{12,3} &= \frac{S_{63}}{S_{33}}.
 \end{aligned}$$

## Le costanti tecniche di elasticità

- In effetti, l'uso dei coefficienti di 1° o 2° tipo è equivalente, essendo questi legati tra loro dalle seguenti relazioni di reciprocità, dovute alle simmetrie maggiori, e che si ottengono immediatamente confrontando le formule di pagina 139 con quelle corrispondenti di pagina 141:

$$\frac{\eta_{ij,k}}{E_k} = \frac{\eta_{k,ij}}{G_{ij}}.$$

- Una osservazione: si nota che i moduli quantificano gli effetti diretti ed i coefficienti gli accoppiamenti.
- Per inversione della matrice [S], si possono esprimere anche i moduli elastici componenti della matrice [C] in funzione delle costanti tecniche.
- Tuttavia, nel caso generale di solido completamente anisotropo, le espressioni che si ottengono sono estremamente complicate e non trascrivibili, per la loro lunghezza.



## Le costanti tecniche di elasticità

- Si riporta tuttavia qui di seguito il caso, importante nelle applicazioni, di un continuo ortotropo, con  $[C]$  scritta nel riferimento di ortotropia (la convenzione di Einstein sulla somma non si applica alle formule seguenti):

$$C_{ii} = \frac{S_{ij}S_{kk} - S_{jk}^2}{S} = \frac{1 - \nu_{jk}\nu_{kj}}{\Delta} E_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k;$$

$$C_{ij} = \frac{S_{ik}S_{kj} - S_{ij}S_{kk}}{S} = \frac{\nu_{ij} + \nu_{ik}\nu_{kj}}{\Delta} E_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k;$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{31}, \quad C_{66} = G_{12},$$

con

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13},$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}.$$

- Nel caso isotropo, come ben noto, le costanti elastiche si riducono semplicemente ad un modulo di Young ed un coefficiente di Poisson.

## Le costanti tecniche di elasticità

- Le equazioni di Lamé in funzione di queste costanti tecniche si scrivono

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} \right),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}.$$

- Le costanti tecniche  $E$  e  $\nu$  sono legate alle costanti di Lamé e alle componenti di  $[C]$  dalle relazioni seguenti:

$$E = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + \mu} = (C_{11} - C_{12}) \frac{C_{11} + 2C_{12}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}},$$

$$\lambda = C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

## Limiti sui moduli elastici

- Le componenti elastiche non possono assumere valori qualsiasi, devono rispettare delle restrizioni, imposte dalla condizione che il lavoro fatto per deformare il corpo deve essere positivo; questo implica, come ben noto, che l'energia di deformazione deve essere positiva per ogni possibile stato deformativo e tensionale:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{o} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}.$$

- Con la notazione di Voigt,

$$V = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{S}] \{\boldsymbol{\sigma}\} > 0 \quad \forall \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad \text{o} \quad \forall \{\boldsymbol{\sigma}\}.$$

- La condizione matematica che assicura il rispetto della condizione sopra è ben nota: le matrici [C] e [S] devono essere definite positive.
- Essendo queste matrici simmetriche, gli autovalori sono reali;

## Limiti sui moduli elastici

basta quindi imporre che tutti gli autovalori siano positivi per ottenere le condizioni ricercate.

- Questo approccio, puramente matematico, porta però a delle complicazioni di calcolo insormontabili; è più facile e più istruttivo utilizzare un approccio meccanico, basato essenzialmente sul fatto che l'energia di deformazione deve essere positiva per ogni possibile stato deformativo o tensionale; scegliendo allora opportunamente il campo di sforzi o di deformazioni, si ottengono facilmente le limitazioni sui valori possibili delle componenti elastiche.
- Si consideri lo stato tensionale

$$\sigma_i \neq 0, \quad \sigma_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad j \neq i.$$

- Allora,

$$\varepsilon_i = S_{ii} \sigma_i, \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} S_{ii} \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, 6.$$

## Limiti sui moduli elastici

- Questo implica che deve essere

$$S_{ij} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6, \quad \rightarrow \quad E_i > 0, \quad G_{ij} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

- Allo stesso modo, si possono imporre delle condizioni al bordo tali che nel corpo esista uno stato deformativo in cui è nulla una sola componente di deformazione:

$$\varepsilon_i \neq 0, \quad \varepsilon_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad j \neq i.$$

- In questo caso

$$\sigma_i = C_{ii} \varepsilon_i, \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} C_{ii} \varepsilon_i^2, \quad i = 1, \dots, 6.$$

- Questo implica che deve essere

$$C_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6.$$



## Limiti sui moduli elastici

- Nel caso di un solido ortotropo, esprimendo le condizioni che riguardano le componenti nel riferimento di ortotropia, le relazioni precedenti implicano, considerando le equazioni di pagina 143 e le limitazioni già trovate sui moduli di Young,

$$1 - \nu_{ij} \nu_{ji} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

- Utilizzando le relazioni di reciprocità sui coefficienti di Poisson, le limitazioni precedenti possono anche scriversi nella forma

$$|\nu_{ij}| < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

o anche

$$|S_{ij}| < \sqrt{S_{ii} S_{jj}}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- A queste condizioni va aggiunta la seguente

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0 \quad \rightarrow$$

$$\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} < \frac{1}{2} \left( 1 - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) < \frac{1}{2}.$$

## Limiti sui moduli elastici

- Se invece si sottopone il corpo ad uno stato di tensione idrostatica, si dimostra in modo analogo (Lekhnitskii) che vale la condizione

$$\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < \frac{3}{2}.$$

- Questa condizione è valida in generale, anche quando il riferimento non è quello di ortotropia e anche per un solido totalmente anisotropo.
- Ricavare le condizioni che riguardano i coefficienti di Chentsov e di influenza mutua è estremamente complesso, perché si devono applicare campi di deformazione o tensione almeno biassiali, con grande complicazione dei calcoli.
- Nel caso isotropo, le condizioni di cui sopra si riducono alle ben note

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2},$$

che equivalgono alle

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda > 0 \quad \rightarrow \quad C_{11} + 2C_{12} > 0, \quad C_{11} - C_{12} > 0.$$

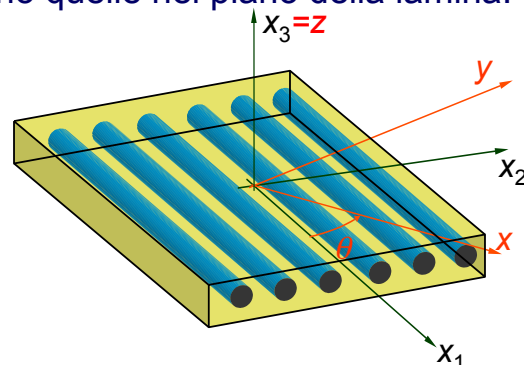
149



## Il caso di stato piano di tensione

- Molto spesso, nelle applicazioni, si ha a che fare con strutture piane sottili; ha quindi interesse esaminare il caso in cui queste lamine siano sottoposte a uno stato piano di tensione: le sole componenti non nulle del tensore degli sforzi sono quelle nel piano della lamina:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$



- Il riferimento è quello in figura; indicheremo con  $\{x_1, x_2, x_3\}$  il riferimento di partenza e con  $\{x, y, z\}$  un altro riferimento ruotato di  $\theta$  in senso antiorario. Nel caso, molto frequente, in cui la lamina sia ortotropa, il primo riferimento è quello di ortotropia, con  $x_1$  l'asse forte, secondo cui cioè si ha il modulo di Young  $E_1 > E_2$ .

150



## Il caso di stato piano di tensione

- Nel riferimento ruotato  $\{x,y,z\}$  indicheremo le tensioni nel modo seguente (l'indice  $s$  sta per *shear*):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\}' = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

- Si deve fare attenzione al fatto che nel passaggio dal caso tridimensionale a quello bidimensionale, in stato piano di tensione, la matrice  $[C]$  si trasforma mentre  $[S]$  no; questo si può vedere in due modi.
- Nel primo modo, si scrive il legame deformazioni-tensioni considerando che in uno stato piano di tensione si ha

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0.$$

- Dunque, si ha

## Il caso di stato piano di tensione

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Per le componenti di deformazione nel piano, si ha quindi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Dunque, nel passaggio allo stato piano, niente cambia per le componenti di  $[S]$ : les  $S_{ij}$  hanno lo stesso valore in 2 e 3 dimensioni.

## Il caso di stato piano di tensione

- Per le componenti di deformazione fuori piano, si hanno le condizioni imposte dallo stato piano di tensione:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{23} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$

- Ora, la matrice di rigidezza nel piano non è altro che l'inversa della matrice  $[S]_{3 \times 3}$  nel caso piano; le componenti di questa matrice, indicata con  $[Q]$  per distinguerla da  $[C]$ , e chiamata *matrice di rigidezza ridotta*, sono dunque:

$$[Q] = [S]^{-1} \rightarrow [Q] = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} S_{22}S_{66} - S_{26}^2 & S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66} & S_{12}S_{26} - S_{16}S_{22} \\ S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66} & S_{11}S_{66} - S_{16}^2 & S_{12}S_{16} - S_{26}S_{11} \\ S_{12}S_{26} - S_{16}S_{22} & S_{12}S_{16} - S_{26}S_{11} & S_{11}S_{22} - S_{12}^2 \end{bmatrix},$$

$$s = S_{11}S_{22}S_{66} - S_{11}S_{26}^2 - S_{22}S_{16}^2 - S_{66}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{26}S_{16}.$$

## Il caso di stato piano di tensione

- D'altra parte, dato che le componenti di  $[S]$  non sono differenti da quelle del caso tridimensionale, si possono ricavare in funzione delle componenti di  $[C]$ , per inversione di quest'ultima, e sostituirle nell'espressione delle componenti di  $[Q]$ .
- Nel caso generale, questo calcolo, fattibile, dà delle espressioni molto lunghe; si riporta allora qui di seguito il caso di lamina ortotropa, che è quello che ci interessa nelle applicazioni (tutte le lamine fibrorinforzate sono ortotrope).
- Per una lamina ortotropa, nel riferimento di ortotropia, si ha dunque

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0,$$

## Il caso di stato piano di tensione

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & 0 \\ -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_{66}} \end{bmatrix},$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{33}} & 0 \\ \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{33}} & \frac{C_{22}C_{33} - C_{23}^2}{C_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

in breve  $Q_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta}C_{33} - C_{\alpha 3}C_{\beta 3}}{C_{33}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad Q_{66} = C_{66},$

## Il caso di stato piano di tensione

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

- Da notare che nel caso piano sono 4 le quantità necessarie a descrivere il comportamento ortotropo nel riferimento di ortotropia.
- Nel secondo modo, si scrive il legame sforzi deformazioni tenendo in conto che  $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ .
- Queste tre relazioni danno luogo a tre condizioni per le componenti di deformazione fuori piano; limitandoci ancora al caso ortotropo, queste sono

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2}{C_{33}}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0.$$

## Il caso di stato piano di tensione

- Si scrivono quindi le componenti di sforzo nel piano tenendo presenti queste ultime condizioni, in particolare il valore di  $\varepsilon_3$ . Si giunge così allo stesso valore delle componenti di  $[Q]$  già trovate.
- In seguito, si inverte  $[Q]$  per ottenere  $[S]$  in dimensione 2, e inserendo i valori delle componenti di  $[Q]$  in funzione di quelle di  $[C]$  si ottengono le componenti di  $[S]$  nel piano in funzione di quelle di  $[C]$ ; a questo punto, per confronto, si riconosce che, per  $[S]$ , si hanno le stesse componenti che nel caso tridimensionale.
- Tenendo presenti le espressioni trovate per le componenti di  $[Q]$ , le relazioni di reciprocità per i coefficienti di Poisson e la positività dei moduli di Young, si evince che è sempre

$$Q_{ij} > E_i, \quad i = 1, 2.$$

- Per terminare, nel caso isotropo si ha

## Il caso di stato piano di tensione

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}.$$

- Confrontando i valori di  $Q_{11}$  e  $Q_{12}$  con quelli rispettivamente di  $C_{11}$  e  $C_{12}$ , pagina 144, si osserva in un caso particolare la differenza tra le componenti di  $[Q]$  e di  $[C]$ , già introdotta e conseguenza dell'ipotesi di stato piano di tensione (vedere le formule di pagina 155).



## Rotazione del riferimento nel piano

- Si deve spesso conoscere il comportamento elastico in un riferimento ruotato; con riguardo alla figura di pagina 150, si vuole dunque esprimere il legame elastico nel riferimento  $\{x, y, z\}$ .
- Il metodo per esprimere le componenti elastiche e dei tensori degli sforzi e delle deformazioni in un riferimento ruotato si è già visto nel caso generale. Qui è sufficiente specializzare al caso bidimensionale i risultati trovati.
- In particolare, in questo caso si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed operando come visto nel caso generale, ma considerando le sole componenti nel piano, si ottiene

## Rotazione del riferimento nel piano

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} s &= \sin \theta, \\ c &= \cos \theta. \end{aligned}$$

- Le relazioni che ruotano i tensori degli sforzi e delle deformazioni sono ancora

$$\{\sigma\}' = [\mathbf{T}]\{\sigma\}, \quad \{\varepsilon\}' = [\mathbf{R}][\mathbf{T}][\mathbf{R}]^{-1}\{\varepsilon\} = [\mathbf{T}]^T\{\varepsilon\},$$

cioè

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Finalmente, ancora operando nel modo visto per il caso tridimensionale, si ha

## Rotazione del riferimento nel piano

$$\begin{aligned} \{\sigma\}' &= [Q] \{\varepsilon\}', & [Q] &= [T] [Q] [T]^T, \\ \{\varepsilon\}' &= [S] \{\sigma\}', & [S] &= [T]^T [S] [T]^{-1}. \end{aligned}$$

- Le matrici  $[Q]'$  e  $[S]'$  nel riferimento  $\{x, y, z\}$  possono adesso essere esplicitate; nel caso generale di un materiale anisotropo, o comunque quando il riferimento  $\{x_1, x_2, x_3\}$  non è quello di ortotropia, il risultato è il seguente, dato in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}$$

## Rotazione del riferimento nel piano

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xs} \\ S_{xy} \\ S_{ss} \\ S_{ys} \\ S_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -2sc^3 & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2s^3c & s^4 \\ -2sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & sc^3 - s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2s^3c \\ s^2c^2 & s^3c - sc^3 & c^4 + s^4 & -s^2c^2 & sc^3 - s^3c & s^2c^2 \\ 4s^2c^2 & 4(s^3c - sc^3) & -8s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 4(sc^3 - s^3c) & 4s^2c^2 \\ -2s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2(s^3c - sc^3) & s^3c - sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2sc^3 \\ s^4 & -2s^3c & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{16} \\ S_{12} \\ S_{66} \\ S_{26} \\ S_{22} \end{Bmatrix}$$

- Si osserva ancora come la trasformazione di  $[S]$  sia diversa da quella di  $[Q]$ .
- Ovviamente, se  $\{x_1, x_2, x_3\}$  è il riferimento di ortotropia, allora  $Q_{16}=Q_{26}=0$ , come pure  $S_{16}=S_{26}=0$ , e quindi la trasformazione per rotazione si semplifica; ciononostante, nel riferimento  $\{x, y, z\}$  i termini  $Q_{xs}$  e  $Q_{ys}$ , come pure  $S_{xs}$  e  $S_{ys}$ , non sono nulli, a riprova del fatto che fuori assi il comportamento è identico a quello di un solido anisotropo.

## Rotazione del riferimento nel piano

- Grazie all'ultima relazione e alla definizione delle costanti tecniche, si possono trovare queste costanti nel riferimento  $\{x, y, z\}$  quando si conoscano quelle nel riferimento  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ; con ovvio significato dei simboli, si ricava facilmente:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \left( c^4 \frac{1}{E_1} - 2sc^3 \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2s^3c \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + s^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,x} &= \left( 2sc^3 \frac{1}{E_1} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} + 2(s^3c - sc^3) \frac{\nu_{12}}{E_1} - (s^3c - sc^3) \frac{1}{4G_{12}} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 2s^3c \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 \nu_{xy} &= \left( s^2c^2 \frac{1}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - (c^4 + s^4) \frac{\nu_{12}}{E_1} - s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - (s^3c - sc^3) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 G_{xy} &= \left( 4s^2c^2 \frac{1}{E_1} - 4(sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 8s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + (c^4 + s^4 - 2s^2c^2) \frac{1}{4G_{12}} - 4(s^3c - sc^3) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 4s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,y} &= \left( 2s^3c \frac{1}{E_1} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} + 2(sc^3 - s^3c) \frac{\nu_{12}}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{1}{4G_{12}} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 2sc^3 \frac{1}{E_2} \right) E_y \\
 E_y &= \left( s^4 \frac{1}{E_1} - 2s^3c \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2sc^3 \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + c^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

## I parametri di Tsai e Pagano

- Le formule precedenti mostrano una particolarità nella meccanica dei compositi: la difficoltà di rappresentare le quantità che descrivono il comportamento elastico in un riferimento qualsiasi; questa è, come vedremo, una necessità corrente nello studio dei laminati.
- Diversi studiosi si sono dunque preoccupati di trovare una rappresentazione più efficace dell'anisotropia, basata eventualmente su quantità diverse, non necessariamente sulle componenti Cartesiane o sulle costanti tecniche.
- Una rappresentazione alternativa dell'elasticità anisotropa, in dimensione 3, è per esempio quella data da Rychlewski, 1984.
- In elasticità bidimensionale vi sono due tentativi alternativi di un certo rilievo, quello che utilizza i cosiddetti *parametri di Tsai e Pagano* e il *metodo polare di Verchery*.
- Vediamo per cominciare il primo metodo, utilizzato in diverse circostanze, specie in progettazione dei laminati in composito.

## I parametri di Tsai e Pagano

- Tsai e Pagano (1968) hanno utilizzato le trasformazioni delle funzioni circolari per esprimere in modo differente le componenti della matrice  $[Q]$  in un riferimento qualsiasi  $\{x, y, z\}$ :

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta, \\
 Q_{xy} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta, \\
 Q_{xs} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_7 \cos 4\theta + U_3 \sin 4\theta, \\
 Q_{yy} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta, \\
 Q_{ys} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_7 \cos 4\theta - U_3 \sin 4\theta, \\
 Q_{ss} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta.
 \end{aligned}$$

- I 7 parametri  $U_i$  sono i cosiddetti *parametri di Tsai e Pagano*, e sono definiti come segue

## I parametri di Tsai e Pagano

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2}, \\
 U_3 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, & U_4 &= \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, \\
 U_5 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_6 &= \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2}, & U_7 &= \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2}.
 \end{aligned}$$

- Evidentemente, nel caso di materiale ortotropo e se  $\{x_1, x_2, x_3\}$  è il riferimento di ortotropia, allora  $U_6 = U_7 = 0$ .
- I 7 parametri  $U_i$  non sono tutti indipendenti, come è ovvio per il fatto che si utilizzano 7 quantità per esprimerne 6; ad esempio, si dimostra facilmente che

$$U_5 = \frac{U_1 - U_4}{2}.$$

## I parametri di Tsai e Pagano

- Inoltre, contrariamente a quanto erroneamente a volte si afferma nei testi, o comunque con un malinteso senso della parola invariante, i parametri  $U_i$  non sono tutti invarianti tensoriali; si può dimostrare in effetti che  $U_2$  e  $U_3$  dipendono dal riferimento.
- Un ultimo inconveniente di questa rappresentazione è che i parametri  $U_i$  non hanno alcun significato fisico diretto. Questo non permette di esprimere con efficacia alcune proprietà elastiche, come ad esempio le simmetrie.

## I parametri polari di Verchery

- Verchery (1979) ha proposto una rappresentazione alternativa dell'anisotropia bidimensionale, utilizzando una trasformazione di variabile complessa da lui stesso introdotta.
- Nel cosiddetto *metodo polare*, come lui stesso ha chiamato questo approccio, le componenti di un tensore  $\mathbf{L}$  del 4° ordine del tipo dell'elasticità in  $\mathbb{R}^2$  (sia di rigidezza, sia di cedevolezza) sono espresse in funzione di 5 invarianti tensoriali indipendenti e di un angolo, che fissa il riferimento:

$$\begin{aligned}
 L_{1111} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1; \\
 L_{1112} &= R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1; \\
 L_{1122} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0; \\
 L_{1212} &= T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0; \\
 L_{2212} &= -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1; \\
 L_{2222} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1.
 \end{aligned}$$

## I parametri polari di Verchery

- I 4 moduli  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  e la differenza dei due angoli polari  $\Phi_0 - \Phi_1$  sono degli invarianti tensoriali; il loro valore è legato a quello delle componenti Cartesiane nel riferimento  $\{x_1, x_2, x_3\}$  dalle relazioni inverse delle precedenti, che in forma complessa sono

$$\begin{aligned} 8T_0 &= L_{1111} - 2L_{1122} + 4L_{1212} + L_{2222}; \\ 8T_1 &= L_{1111} + 2L_{1122} + L_{2222}; \\ 8R_0 e^{4i\Phi_0} &= L_{1111} - 2L_{1122} - 4L_{1212} + L_{2222} + 4i(L_{1112} - L_{2212}); \\ 8R_1 e^{2i\Phi_1} &= L_{1111} - L_{2222} + 2i(L_{1112} + L_{2212}) \end{aligned}$$

- Fissare un riferimento, consiste dunque a fissare uno dei due angoli polari; nel caso di un materiale ortotropo, fissare  $\Phi_1 = 0$  equivale a scegliere come asse  $x_1$  l'asse secondo cui  $E_1 > E_2$ , ed è la scelta normalmente fatta.
- I vantaggi del metodo polare sono essenzialmente due, e riguardano il cambiamento di riferimento ed il significato meccanico dei parametri polari.

## I parametri polari di Verchery

- Infatti, si dimostra che nel passaggio al riferimento  $\{x, y, z\}$  le nuove componenti Cartesiane si ottengono semplicemente sottraendo l'angolo di rotazione dagli angoli polari:

$$\begin{aligned} L_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xxyy} &= R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xyyy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{xyxy} &= T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{yyxy} &= -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta). \end{aligned}$$

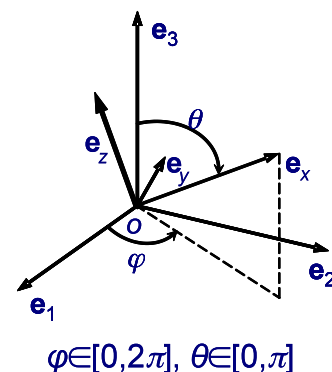
- Inoltre, gli invarianti polari sono legati alle simmetrie elastiche, caratterizzandole in modo invariante; si dimostra in effetti che si hanno le seguenti condizioni necessarie e sufficienti di simmetria elastica nel piano:

## I parametri polari di Verchery

- Ortotropia ordinaria  $\Leftrightarrow \Phi_0 - \Phi_1 = k \frac{\pi}{4}, \quad k = 0,1.$
- Ortotropia  $R_0 \Leftrightarrow R_0=0.$
- Ortotropia quadrata (corrispondente alla singonia cubica in 3 dimensioni)  $\Leftrightarrow R_1=0.$
- Isotropia  $\Leftrightarrow R_0= R_1=0.$
- L'utilizzo di queste relazioni riesce utile soprattutto per analizzare in via analitica certe proprietà elastiche dei laminati e per le fasi di progetto dei laminati rispetto alle loro proprietà elastiche.

## Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Per terminare il capitolo, si riportano di seguito i grafici delle costanti tecniche per qualche materiale anisotropo; l'esame di questi grafici permette di meglio comprendere le tipiche variazioni delle proprietà elastiche secondo la direzione nei solidi anisotropi.
- I diagrammi direzionali rappresentano il valore della costante in una direzione data, proporzionalmente alla lunghezza del segmento tra l'origine e la superficie o la curva, nella direzione in questione.
- I grafici sono ottenuti utilizzando le formule di rotazione delle componenti elastiche o delle costanti tecniche viste in precedenza; nel caso tridimensionale si è utilizzato un cambiamento di riferimento come quello usato in coordinate sferiche: il vettore  $\mathbf{e}_y$  è sempre orizzontale. La direzione di tracciamento della grandezza è quella dell'asse  $\mathbf{e}_x$ .
- Le costanti non indicate sono nulle.



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

- **Quarzo:** classe IV, singonia trigonale o romboedrica, 6 costanti elastiche indipendenti (fonte: Lekhnitskii, Love).

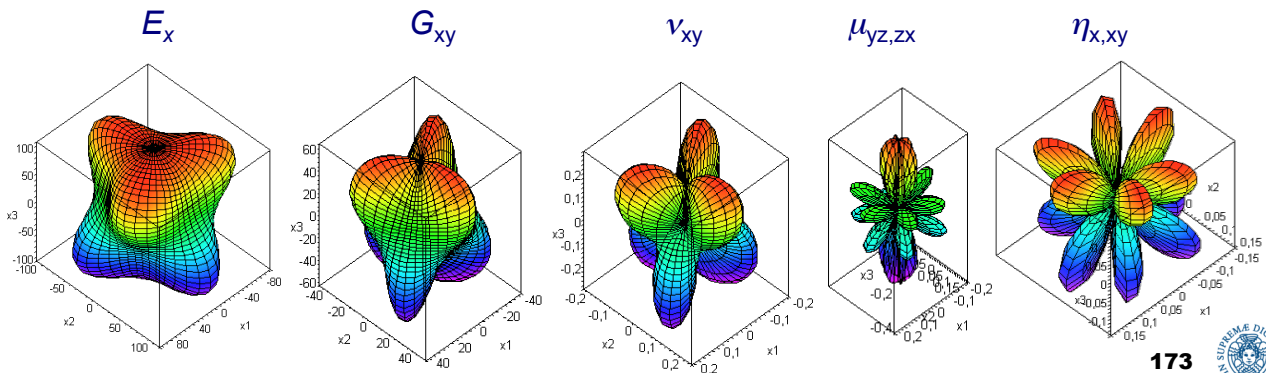
$$[C] = \begin{bmatrix} 86.8 & 7.1 & 14.4 & 17.2 & 0 & 0 \\ 7.1 & 86.8 & 14.4 & -17.2 & 0 & 0 \\ 14.4 & 14.4 & 107.5 & 0 & 0 & 0 \\ 17.2 & -17.2 & 0 & 58.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58.2 & 17.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2 & 39.85 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 78.5 \text{ GPa}, E_3 = 103 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 34.8 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 50.8 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.13, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.12,$$

$$\mu_{31,12} = -0.3, \eta_{2,23} = -\eta_{1,23} = 0.22.$$



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

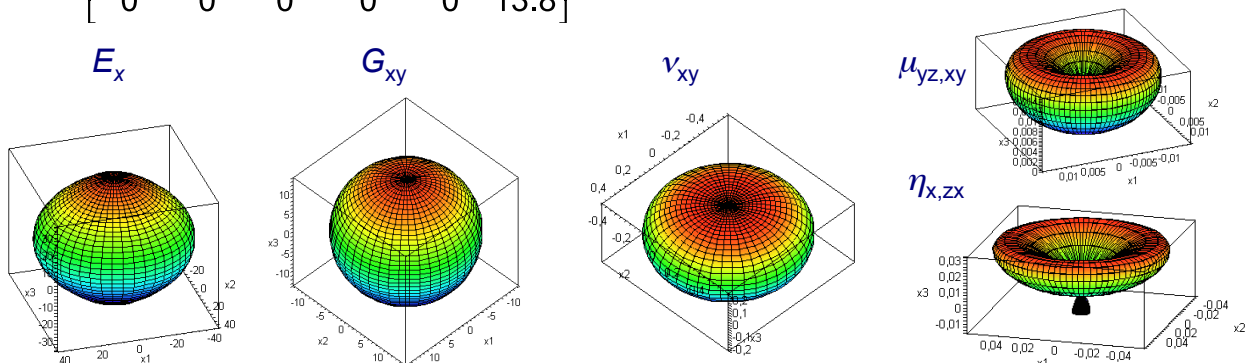
- **Lega Cd-Mg (cadmio-magnesio):** classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 66.4 & 38.8 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 38.8 & 66.4 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 22.9 & 22.9 & 45.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.8 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 41.3 \text{ GPa}, E_3 = 35.1 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 13.8 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 13.3 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.49, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.26.$$





## Alcuni esempi di materiali anisotropi

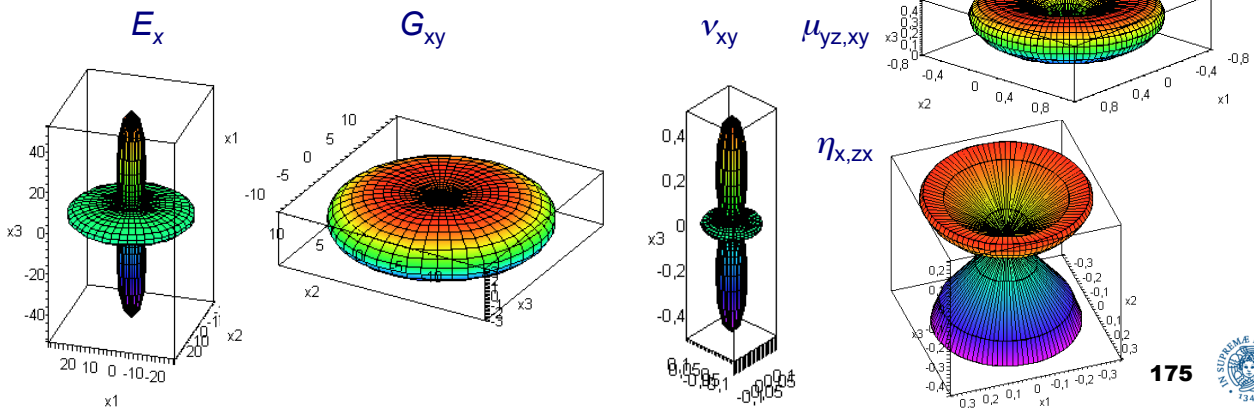
- **RbNiCl<sub>3</sub>**: classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 35.2 & 9.9 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 9.9 & 35.2 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 22.9 & 72.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.6 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 28.1 \text{ GPa}, E_3 = 50.8 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 12.6 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 2.5 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.11, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.27.$$



175



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

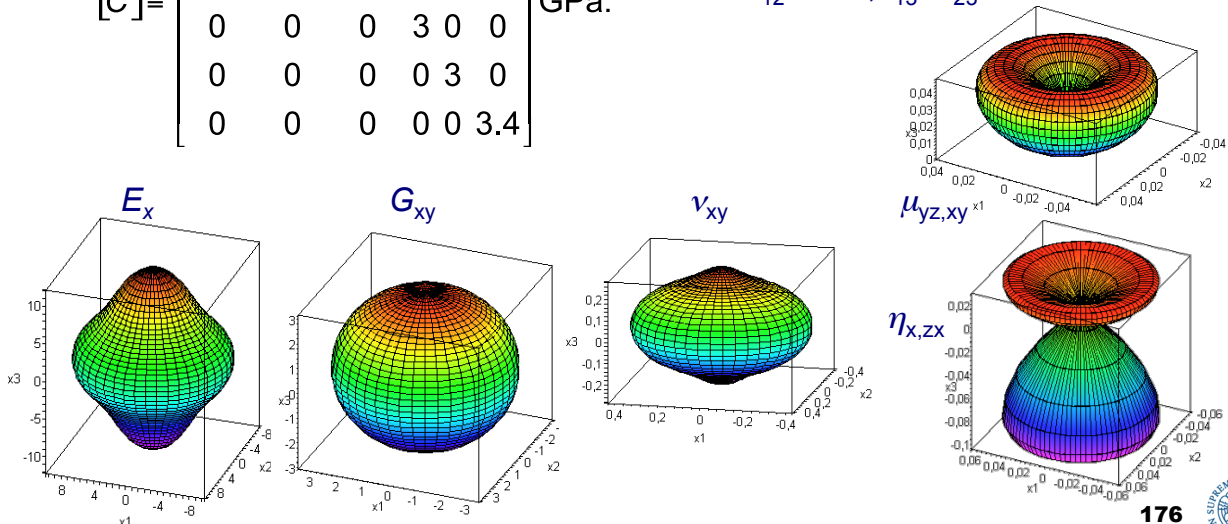
- **Ghiaccio (ghiacciaio Mendenhall; T=270°K)**: classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 13.7 & 6.9 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 6.9 & 13.7 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6 & 5.6 & 14.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 9.6 \text{ GPa}, E_3 = 11.7 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 3.4 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 3 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.41, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.22.$$



176



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

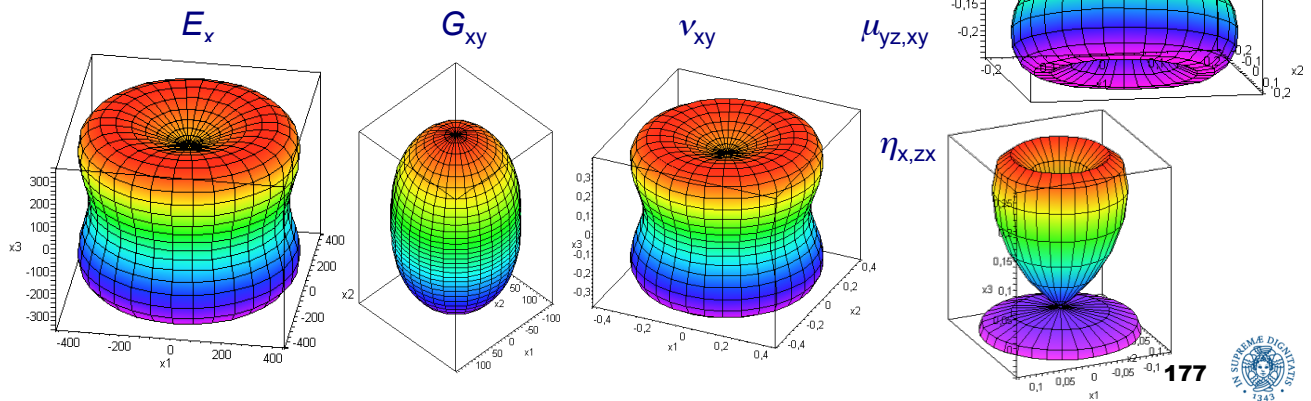
- Titanio-Boride (TiB<sub>2</sub>):** classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 684.3 & 404.2 & 317.7 & 0 & 0 & 0 \\ 404.2 & 684.3 & 317.7 & 0 & 0 & 0 \\ 317.7 & 317.7 & 439.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140.1 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 387.6 \text{ GPa}, E_3 = 253.8 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 140.1 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 250 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.38, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.46.$$



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

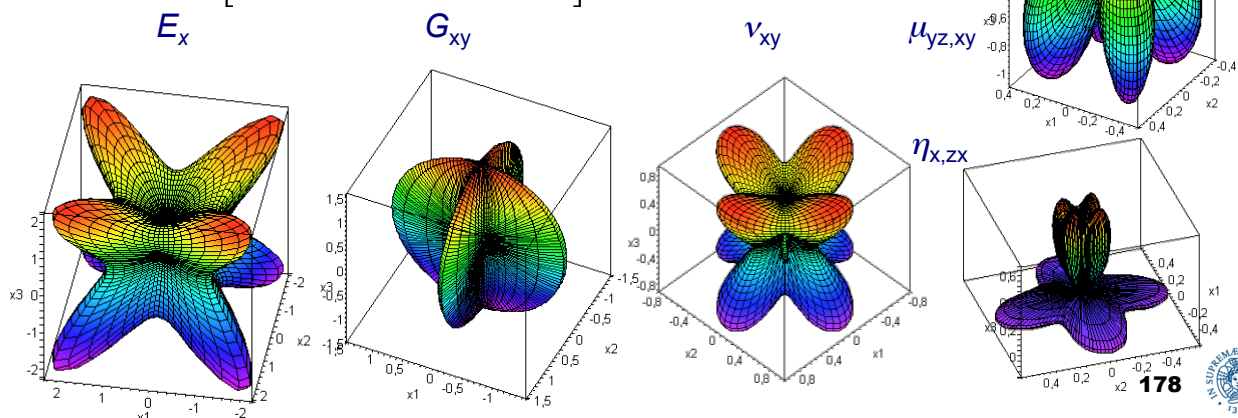
- Cesio:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.1 & 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1 & 2.5 & 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1 & 2.1 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0.6 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 1.5 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.45.$$



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

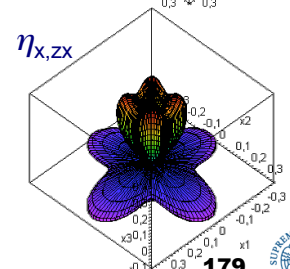
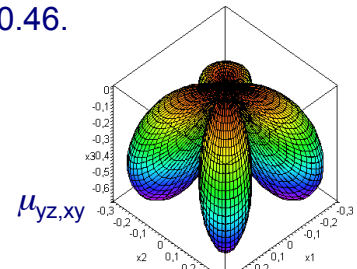
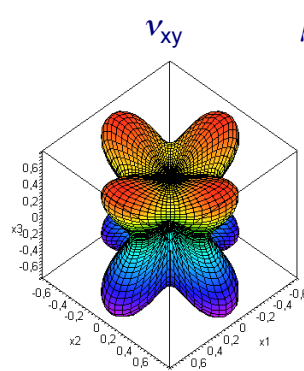
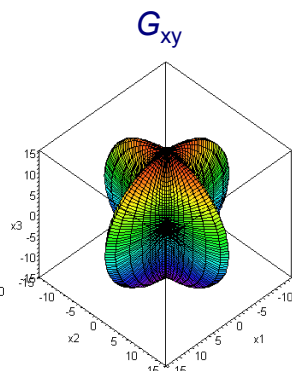
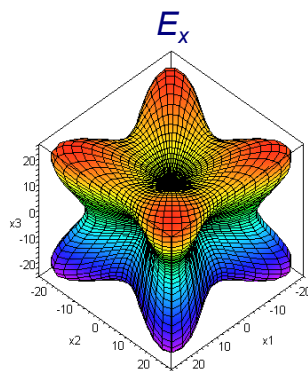
- Piombo:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 48.2 & 40.8 & 40.8 & 0 & 0 & 0 \\ 40.8 & 48.2 & 40.8 & 0 & 0 & 0 \\ 40.8 & 40.8 & 48.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.7 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 10.7 \text{ GPa,}$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 14.7 \text{ GPa,}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.46.$$



179



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

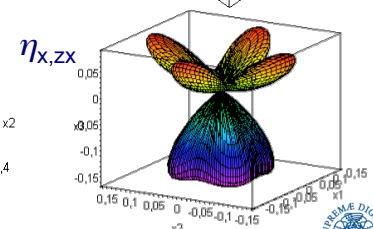
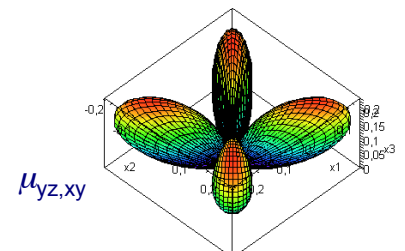
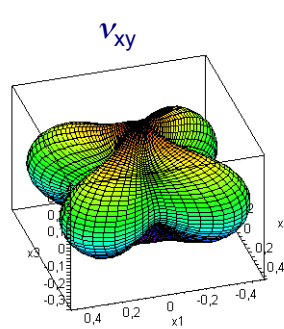
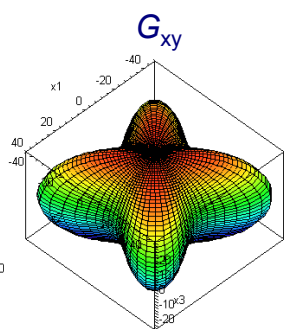
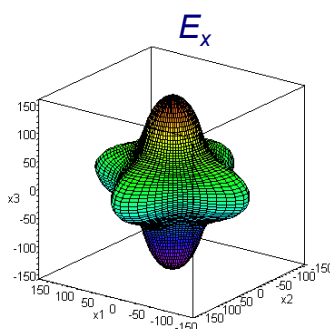
- Niobio:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 243.7 & 130.7 & 130.7 & 0 & 0 & 0 \\ 130.7 & 243.7 & 130.7 & 0 & 0 & 0 \\ 130.7 & 130.7 & 243.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.4 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 152.4 \text{ GPa,}$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 28.4 \text{ GPa,}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.35.$$



180



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

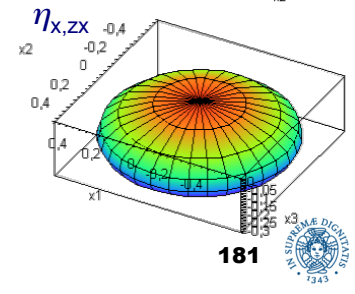
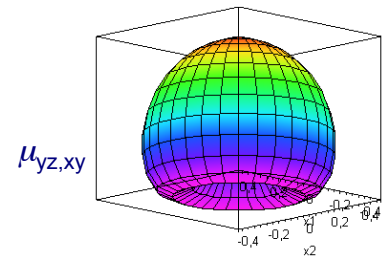
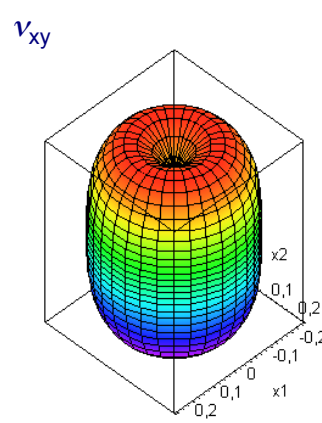
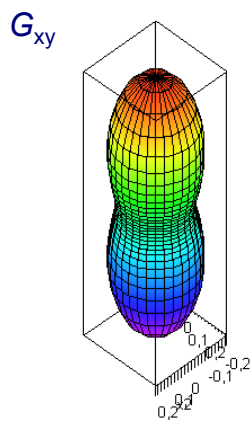
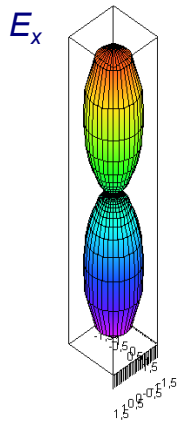
- Legno d'abete:** isotropo trasverso, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Lekhnitskii).

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.11 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.45 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0.13 & 10.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 0.42 \text{ GPa}, E_3 = 10 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 0.17 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 0.75 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.24, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.01.$$



181

## Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Lastre di legno d'abete:** ortotropo (fonte: Lekhnitskii).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 10 & 0.004 & 0 \\ 0.004 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 10 \text{ GPa}, E_2 = 0.42 \text{ GPa}, G_{12} = 0.75 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.01, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 4.28 \text{ GPa}, U_2 = 4.79 \text{ GPa}, U_3 = 0.93 \text{ GPa},$$

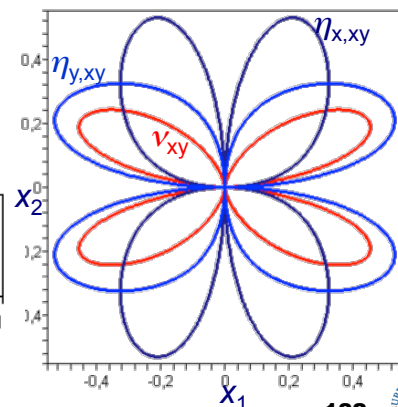
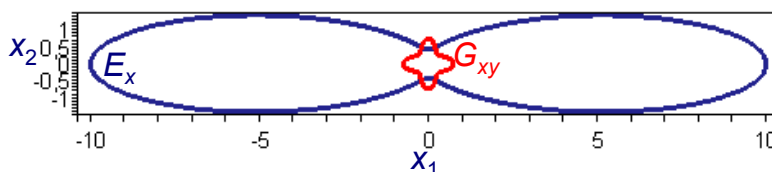
$$U_4 = 0.93 \text{ GPa}, U_5 = 1.68 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 1.68 \text{ GPa}, T_1 = 1.30 \text{ GPa}, R_0 = 0.93 \text{ GPa},$$

$$R_1 = 1.19 \text{ GPa}, \Phi_0 = 0^\circ, \Phi_1 = 0^\circ.$$

NB: è lo stesso materiale del caso precedente, ma con l'asse  $x_3$  che qui è diventato  $x_1$ ;  $[Q]$  si ottiene da  $[C]$  con le formule di pagina 155.

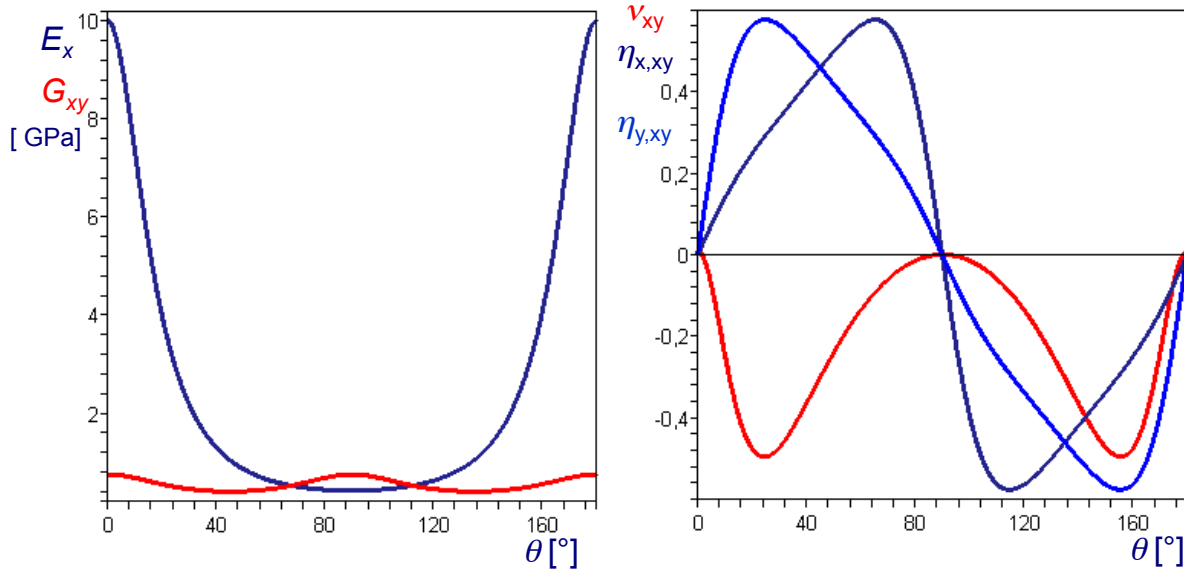
- Grafici direzionali**



182

## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



183



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Boro-epoxy B(4)/5505 Vf=0.5: ortotropo (fonte: Tsai e Hahn).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 206 & 4.27 & 0 \\ 4.27 & 18.59 & 0 \\ 0 & 0 & 5.59 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

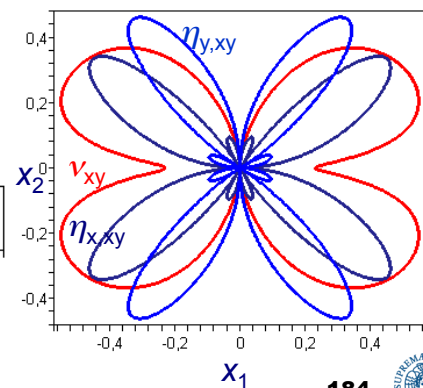
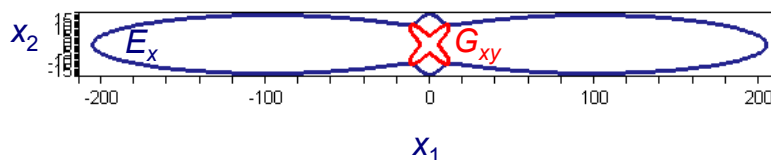
$$E_1 = 205 \text{ GPa}, E_2 = 18.5 \text{ GPa}, G_{12} = 5.59 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.23, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 88.08 \text{ GPa}, U_2 = 93.71 \text{ GPa}, U_3 = 24.21 \text{ GPa},$$

$$U_4 = 28.48 \text{ GPa}, U_5 = 29.80 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 29.80 \text{ GPa}, T_1 = 29.14 \text{ GPa}, R_0 = 24.21 \text{ GPa}, \\ R_1 = 23.42 \text{ GPa}, \phi_0 = 0^\circ, \phi_1 = 0^\circ.$$

### ■ Grafici direzionali

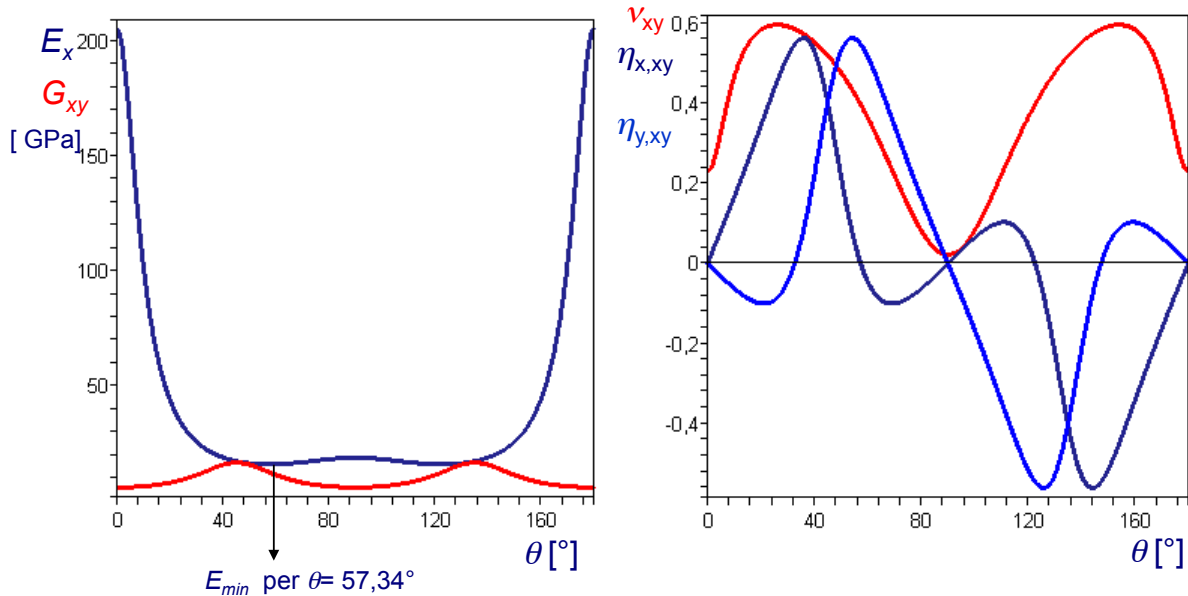


184



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



185



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Carbonio-epoxy T300/5208 Vf=0.7: ortotropo (fonte: tsai e Hahn).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 181.8 & 2.89 & 0 \\ 2.89 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, G_{12} = 7.17 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.28, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

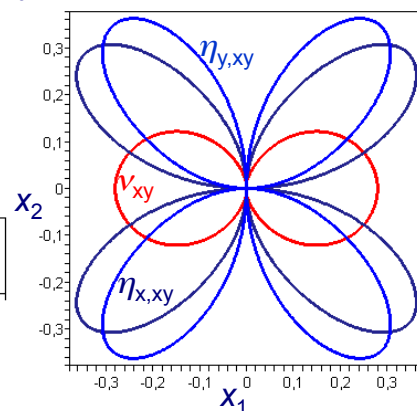
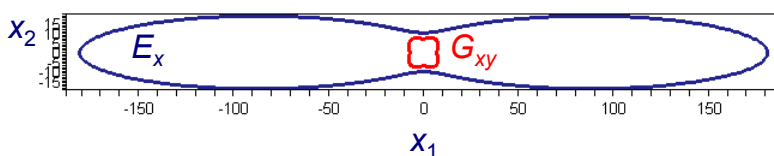
$$U_1 = 76.36 \text{ GPa}, U_2 = 85.72 \text{ GPa}, U_3 = 19.71 \text{ GPa},$$

$$U_4 = 22.60 \text{ GPa}, U_5 = 26.88 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 26.88 \text{ GPa}, T_1 = 24.74 \text{ GPa}, R_0 = 19.71 \text{ GPa},$$

$$R_1 = 21.43 \text{ GPa}, \phi_0 = 0^\circ, \phi_1 = 0^\circ.$$

### ■ Grafici direzionali

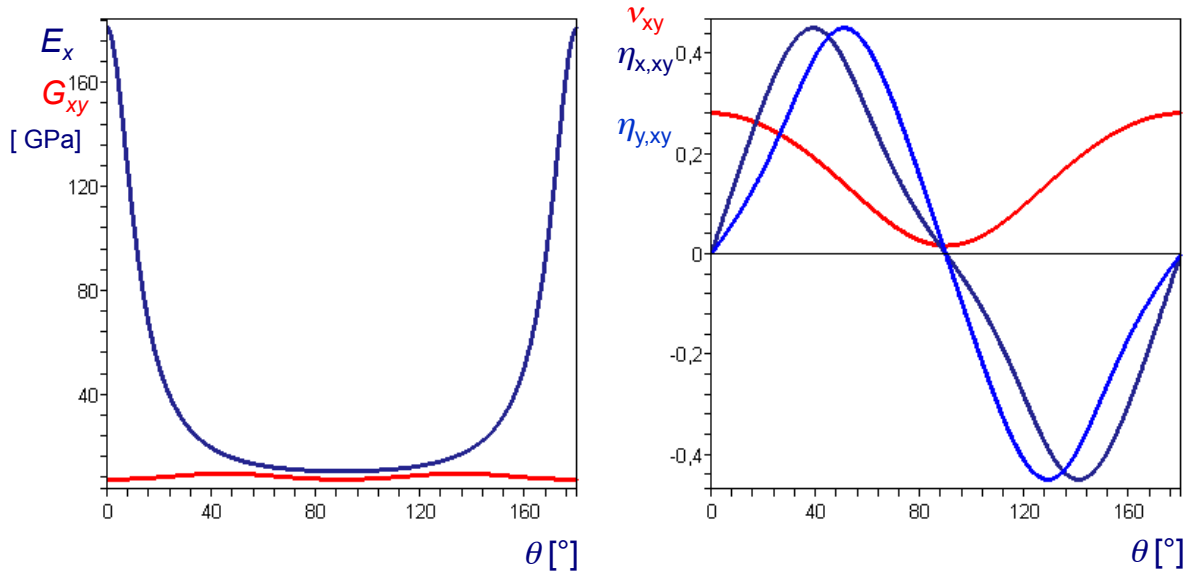


186



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



187



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Vetro-epoxy scotchply 1002 Vf=0.45: ortotropo (fonte: Tsai e Hahn).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 39.17 & 2.18 & 0 \\ 2.18 & 8.39 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

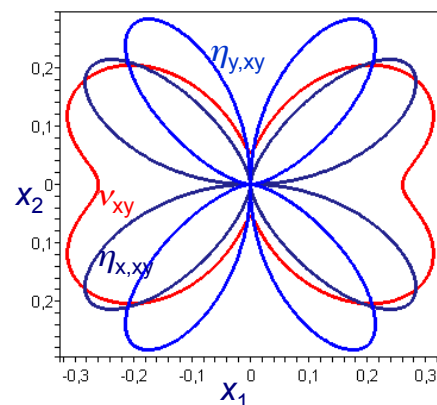
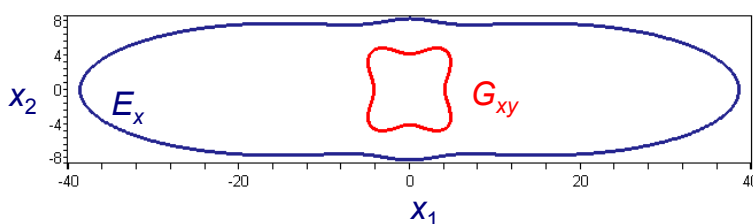
$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, E_2 = 8.27 \text{ GPa}, G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.26, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 20.45 \text{ GPa}, U_2 = 15.39 \text{ GPa}, U_3 = 3.33 \text{ GPa},$$

$$U_4 = 5.51 \text{ GPa}, U_5 = 7.47 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 7.47 \text{ GPa}, T_1 = 6.49 \text{ GPa}, R_0 = 3.33 \text{ GPa}, R_1 = 3.85 \text{ GPa}, \Phi_0 = 0^\circ, \Phi_1 = 0^\circ.$$

### ■ Grafici direzionali

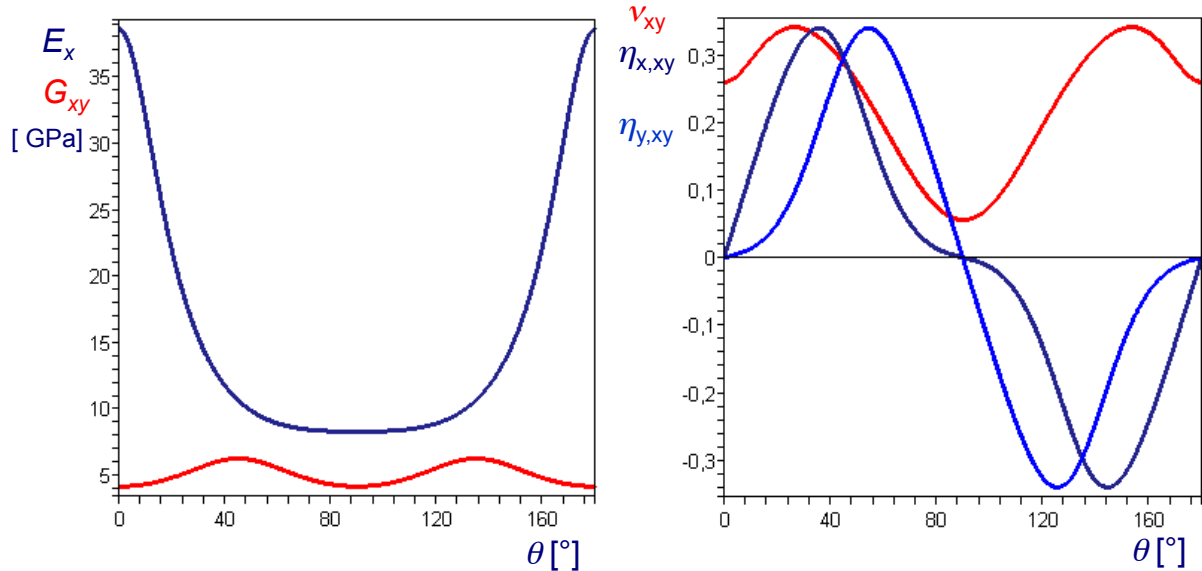


188



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



189



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Vetro-epoxy con rinforzo in tessuto: ortotropia (fonte: Jones).

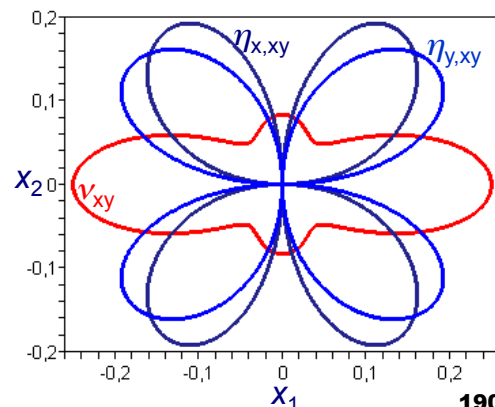
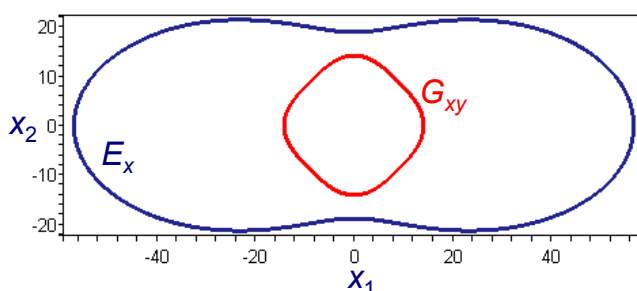
$$[Q] = \begin{bmatrix} 58 & 4.82 & 0 \\ 4.82 & 19.3 & 0 \\ 0 & 0 & 14.14 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$E_1=56.8$  GPa,  $E_2= 18.9$  GPa,  $G_{12}=14.14$  GPa,  
 $\nu_{12}=0.25$ ,  $\eta_{1,12}=\eta_{2,12}=0$ .

$U_1=37.26$  GPa,  $U_2=19.35$  GPa,  $U_3=1.39$  GPa,  
 $U_4=6.21$  GPa,  $U_5=15.52$  GPa,  $U_6=U_7=0$ .

$T_0=15.53$  GPa,  $T_1= 10.87$  GPa,  $R_0= 1.38$  GPa,  
 $R_1= 4.84$  GPa,  $\Phi_0=0^\circ$ ,  $\Phi_1=0^\circ$ .

### ■ Grafici direzionali



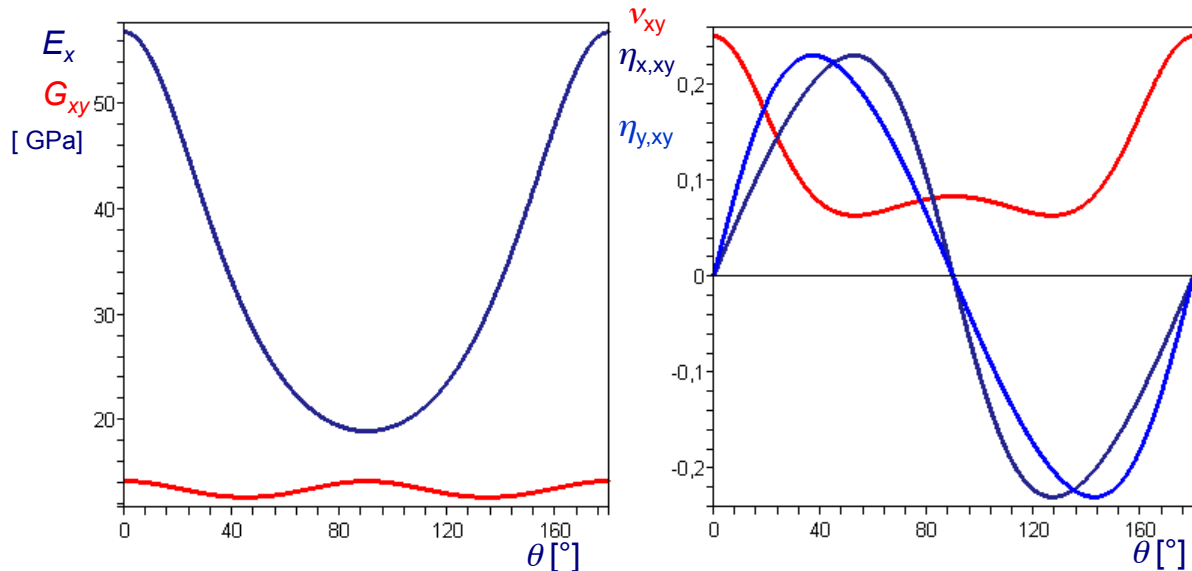
190





## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



191



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Vetro-epoxy con rinforzo in tessuto equilibrato: ortotropia cubica (simmetria del quadrato; fonte: Tsai e Hahn).

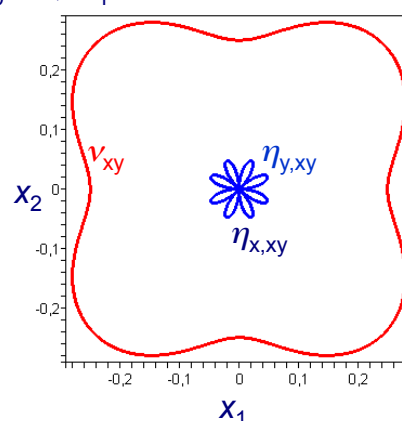
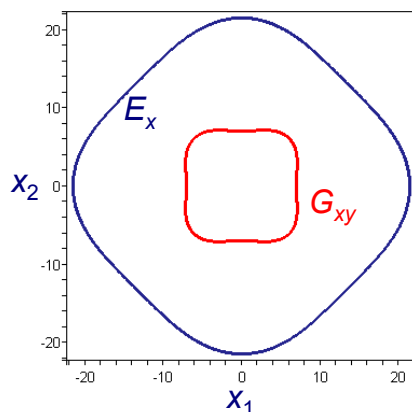
$$[Q] = \begin{bmatrix} 22.93 & 5.73 & 0 \\ 5.73 & 22.93 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 21.5 \text{ GPa}, G_{12} = 7 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 22.13 \text{ GPa}, U_2 = 0 \text{ GPa}, U_3 = 0.8 \text{ GPa}, U_4 = 6.53 \text{ GPa}, U_5 = 7.80 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 7.8 \text{ GPa}, T_1 = 7.17 \text{ GPa}, R_0 = 0.8 \text{ GPa}, R_1 = 0, \Phi_0 = 0^\circ, \Phi_1 = 0^\circ.$$

### ■ Grafici direzionali

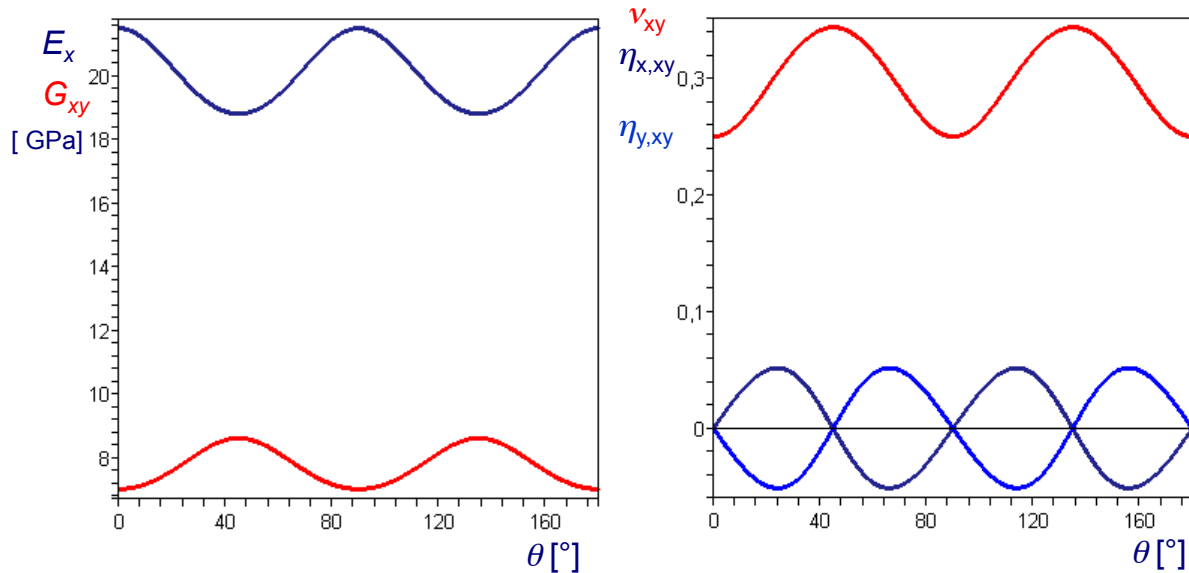


192



## Alcuni esempi di materiali anisotropi

### ■ Grafici Cartesiani



193



## Capitolo 3

### ■ Omogeneizzazione delle proprietà elastiche

□ Scopo delle teorie di omogeneizzazione	195
□ Volume elementare rappresentativo	199
□ La teoria classica	202
□ Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati	213
□ Le formule di Ekvall	222
□ Soluzioni elastiche con contiguità	223
□ Le equazioni di Halpin e Tsai	226
□ Confronto tra le varie teorie	230

194



## Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Nel capitolo precedente, ci si è occupati di uno degli aspetti fondamentali nello studio dei materiali compositi, l'anisotropia.
- L'altro aspetto che caratterizza questo tipo di materiali è l'eterogeneità, che la stessa definizione di materiale composito implica necessariamente (così non è per l'anisotropia: esistono materiali compositi isotropi e materiali omogenei anisotropi).
- L'analisi della risposta meccanica dei continui eterogenei è complicata proprio dal fatto che almeno due specie distinte (le fasi) coesistono nel formare un continuo.
- In genere, una fase, l'*inclusione* o *fibra*, che ha spesso il ruolo di rinforzo meccanico, è dispersa in una fase di basso pregio meccanico, la *matrice*.
- A livello microscopico, locale, la risposta meccanica è quella della fase che occupa la posizione data.
- Tuttavia, la risposta meccanica che si cerca è spesso una risposta ad una scala macroscopica (uno spostamento, una energia di deformazione etc.).

## Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- A questa scala, generalmente non interessa conoscere il reale campo locale di spostamento, deformazione o sforzo.
- Ha quindi senso e utilità il problema seguente: cercare i parametri meccanici di un continuo fittizio, omogeneo (monofase), che ha una risposta meccanica macroscopica uguale a quella del continuo eterogeneo (polifase).
- Si tratta di un *problema di omogeneizzazione*: il continuo eterogeneo è omogeneizzato ad un continuo omogeneo meccanicamente equivalente.
- Le teorie che permettono la soluzione di questo tipo di problemi si chiamano *teorie di omogeneizzazione*; si differenziano per il tipo di ipotesi, per lo scopo dell'omogeneizzazione (periodica, inclusione-matrice, isotropa, anisotropa etc.), per il modello utilizzato etc.
- La teoria generale dell'omogeneizzazione è molto elaborata e fa appello a concetti spesso non banali.

## Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Ci occuperemo nel seguito solo di alcune teorie classiche di omogeneizzazione delle proprietà meccaniche di un composito, teorie relativamente semplici, limitandoci al caso di materiali fibrorinforzati con fibre disposte in modo uniforme e ordinato in una sola direzione.
- Per casi diversi (fibre corte disperse, inclusioni di forme diverse etc.) si rimanda a testi più specifici.
- Nel caso dei compositi fibrorinforzati, lo scopo delle teorie di omogeneizzazione è quello, una volta note le caratteristiche meccaniche delle fasi e la frazione volumica delle fibre, di predire le omologhe caratteristiche meccaniche di un solido omogeneo equivalente, che rimane tuttavia, nel caso in esame di fibre orientate, anisotropo.
- Questo permette di eseguire, ad esempio, dei calcoli di progetto di un materiale composito costituente una struttura.

## Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Si deve tuttavia specificare sin da ora che le teorie di omogeneizzazione sono assai meno precise di quanto non sia spesso necessario, e in fase di realizzazione di un materiale nuovo le prove sperimentali volte a confermare le predizioni fatte con una teoria di omogeneizzazione sono imprescindibili.
- Queste prove servono anche perché nella composizione di un materiale composito giocano alcuni fattori aleatori, che male si colgono con l'aiuto delle teorie di omogeneizzazione, anche qualora queste prendano in conto il carattere stocastico di alcune grandezze (frazione volumica, disposizione, proprietà meccaniche etc.).
- In questo capitolo, ci si occuperà soltanto di omogeneizzazione delle proprietà elastiche, rinviando al capitolo seguente per un breve cenno all'omogeneizzazione delle proprietà di resistenza meccanica.
- Infine, un caso particolare di omogeneizzazione è quello della teoria classica dei laminati, che verrà estesamente considerato nel capitolo 5.

## Volume elementare rappresentativo

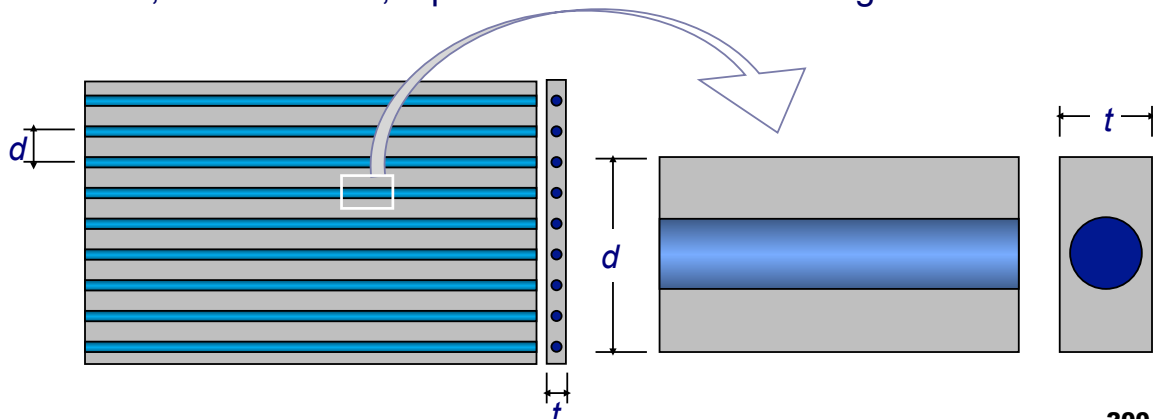
- Un concetto comune a tutte le teorie di omogeneizzazione è quello di *volume elementare rappresentativo*.
- In linea generale, questo è il volume minimo che si deve prendere in conto perché, una volta applicata una teoria di omogeneizzazione, il risultato ottenuto sia rappresentativo del comportamento macroscopico del continuo eterogeneo.
- Al volume elementare rappresentativo si applica un modello meccanico, proprio alla teoria di omogeneizzazione scelta.
- La definizione del volume elementare rappresentativo può non essere banale e in alcuni casi è oggetto di discussione.
- Tuttavia, nei casi che esamineremo, l'individuazione del volume elementare rappresentativo è semplice e immediata, per le simmetrie del problema.
- Un requisito fondamentale del volume elementare rappresentativo, è che la sua composizione in volume rispetti quella media del continuo.

199



## Volume elementare rappresentativo

- Questo significa che la *frazione volumica* dell'inclusione,  $V_f$ , ossia la percentuale in volume dell'inclusione sul volume totale, deve essere identica a quella media del continuo.
- Il caso che ci interessa in questa sede è quello di una lamina rinforzata con fibre unidirezionali uniformemente disposte nel corpo della lamina.
- L'individuazione del volume elementare rappresentativo, in questo caso, non è difficile, e può essere fatta come in figura.

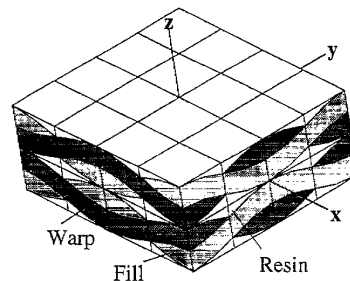


200



## Volume elementare rappresentativo

- Tuttavia, altre geometrie del volume elementare rappresentativo sono possibili; questo può assumere una certa importanza in alcune teorie di omogeneizzazione, soprattutto quando si faccia ricorso a valutazioni numeriche su un volume di geometria definita.
- Nel caso di compositi differenti, la definizione del volume elementare rappresentativo può essere non immediata e può costituire un punto sensibile del processo di omogeneizzazione.
- A titolo di esempio, si riporta in figura il caso di un volume elementare rappresentativo di una lamina in composito rinforzata con un doppio strato di tessuto, utilizzato in uno studio numerico (fonte: Woo & Whitcomb, 1997).



201



## La teoria classica

- Ci prefiggiamo, utilizzando il volume elementare rappresentativo introdotto precedentemente, di ricavare le caratteristiche meccaniche omogeneizzate di una lamina rinforzata con fibre unidirezionali ripartite in modo uniforme.
- Le ipotesi della teoria classica sono:
  - matrice isotropa, di modulo di Young  $E_m$  e coefficiente di Poisson  $\nu_m$ ;
  - fibre isotrope, di modulo di Young  $E_f$  e coefficiente di Poisson  $\nu_f$ ;
  - la frazione volumica delle fibre è nota,  $V_f$ ;
  - il comportamento è elastico lineare;
  - le fibre aderiscono perfettamente alla matrice.
- L'obiettivo è quello di trovare le costanti tecniche omogeneizzate della lamina; a causa della disposizione orientata delle fibre, questa ha un comportamento macroscopico di tipo ortotropo, l'asse  $x_1$  essendo posto convenzionalmente in direzione delle fibre, l'asse  $x_2$  ortogonale a queste, nel piano della lamina, e l'asse  $x_3$  ortogonale alla lamina.

202

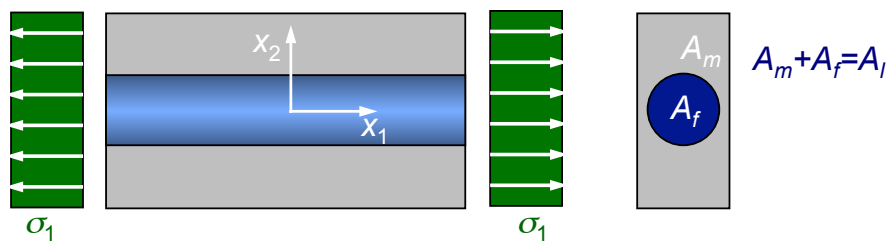


## La teoria classica

- Si devono quindi calcolare 4 costanti:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ .
- **Calcolo di  $E_1$** : il volume elementare rappresentativo è sottoposto ad uno stato di sollecitazione in cui solo  $\sigma_1$  è non nulla, vedi figura.
- L'ipotesi dell'aderenza ha come conseguenza che la deformazione è la medesima in tutti i punti (in particolare, le sezioni rette restano piane):

$$\varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^l,$$

dove l'apice  $m$  indica una quantità relativa alla matrice,  $f$  alla fibra e  $l$  alla lamina.



203



## La teoria classica

- Il legame costitutivo, elastico lineare, implica che

$$\sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l.$$

- Infine, l'equilibrio impone la relazione

$$\sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = \sigma_1^l A_l.$$

- Sostituendo le relazioni del legame costitutivo, tenendo presente l'ipotesi dell'aderenza e il fatto che, per la geometria del volume elementare rappresentativo,

$$\frac{A_f}{A_l} = V_f, \quad \frac{A_m}{A_l} = 1 - V_f,$$

si ottiene immediatamente che

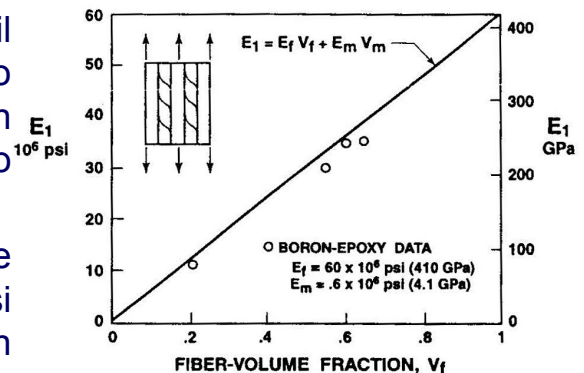
$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m.$$

204



## La teoria classica

- Questa è la celebre *legge delle miscele*, che fornisce il valore omogeneizzato del modulo di Young in direzione longitudinale (quella delle fibre).  $E_1$  dipende linearmente da  $V_f$ , dunque dalla quantità di fibre presenti.
- Generalmente,  $E_f \gg E_m$  (nel caso di un composito vetro-epoxy il rapporto  $E_f/E_m$  è  $\approx 15$ , nel caso del carbonio-epoxy è  $\approx 40$ ). Quindi, con gli usuali valori di  $V_f$  ( $\approx 0.6$ ), si osserva che il modulo  $E_1$  è dominato da  $E_f$ : l'apporto della matrice è spesso trascurabile.
- Il modello utilizzato per ricavare il modulo  $E_1$  è un modello di tipo *parallelo*: matrice e fibre lavorano in parallelo, per il campo di sforzo applicato.
- La legge delle miscele dà ottime predizioni; a titolo di esempio, si riporta un grafico di confronto con dati sperimentali (fonte: Jones).



205



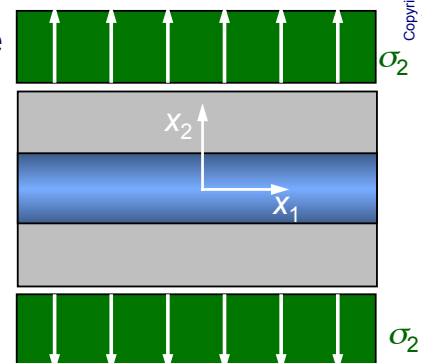
## La teoria classica

- **Calcolo di  $E_2$** : in questo caso, si applica una sollecitazione in cui solo  $\sigma_2$  è non nulla, vedi figura.
- L'equilibrio del volume elementare implica che

$$\sigma_2^f = \sigma_2^m = \sigma_2^l.$$

- La congruenza della deformazione (in media), implica che sia

$$\varepsilon_2^f A_f + \varepsilon_2^m A_m = \varepsilon_2^l A_l.$$



- Questa relazione traduce semplicemente il fatto che la somma degli spostamenti, in direzione  $x_2$ , calcolati su fibra e matrice deve essere uguale a quella totale del volume elementare.
- Utilizzando in questa relazione i legami costitutivi e tenendo presente le relazioni qui sopra, imposte dall'equilibrio del volume elementare, si giunge facilmente al risultato cercato:

206

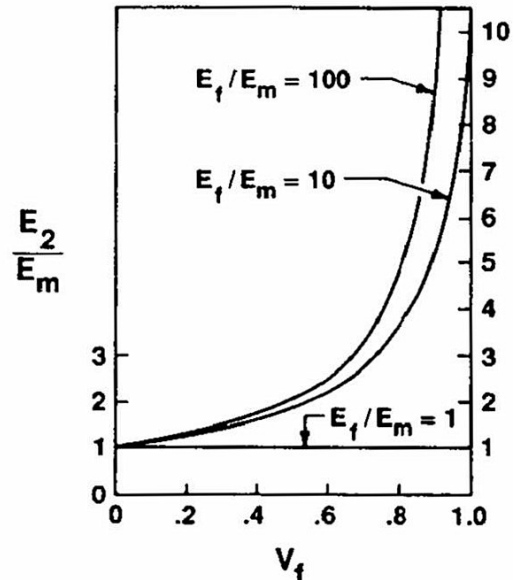




## La teoria classica

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1-V_f}{E_m} \rightarrow E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + (1-V_f) E_f}$$

- La dipendenza di  $E_2$  da  $V_f$  non è più lineare; inoltre, la presenza di fibre dà un contributo minimo a  $E_2$ : le fibre non funzionano come un rinforzo efficace per quanto riguarda la rigidità trasversale.
- Il grafico (fonte: Jones) mostra infatti che il rapporto  $E_2/E_m$  è sensibilmente più grande di 1 solo per elevati, e impraticabili, valori di  $V_f$ ; anche l'aumento del rapporto  $E_f/E_m$  non produce un sostanziale miglioramento. In definitiva,  $E_2$  è un modulo dominato dalla matrice.

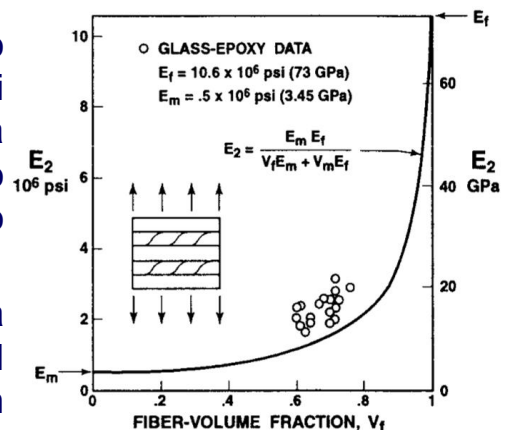


207



## La teoria classica

- Il modello utilizzato è un modello di tipo *serie*: fibra e matrice lavorano in serie per il campo di sforzo applicato.
- Le predizioni di questo modello sono molto meno corrette di quelle della legge delle miscele. In effetti, il modello utilizzato si basa su alcune semplificazioni che sono troppo forti per permettere di ottenere un buon risultato.
- In effetti, in questo modello si sono trascurati gli sforzi e le deformazioni di taglio che nascono all'interfaccia tra fibra e matrice; un modello più corretto avrebbe dovuto prendere in conto l'effettivo comportamento all'interfaccia.
- Un confronto tra le predizioni della formula di omogeneizzazione di  $E_2$  ed alcuni dati sperimentali è mostrato in figura (fonte: Tsai, cfr. libro di Jones).



208



## La teoria classica

- **Calcolo di  $\nu_{12}$ :** come nel calcolo di  $E_1$ , si applica uno stato di sforzo in cui solo  $\sigma_1$  è non nulla.
- Per definizione,

$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l}.$$

- D'altra parte, l'ipotesi dell'aderenza prescrive ancora che

$$\varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^l.$$

- Infine, come nel caso di  $E_2$ , la congruenza, in media, sulle deformazioni trasversali impone ancora la relazione

$$\varepsilon_2^f A_f + \varepsilon_2^m A_m = \varepsilon_2^l A_l.$$

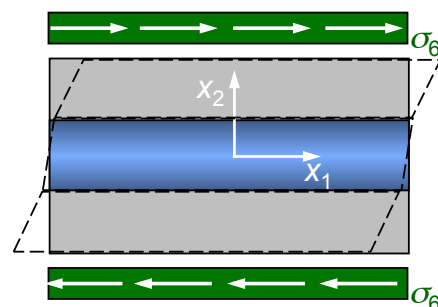
- Sostituendo in quest'ultima relazione le precedenti, si giunge facilmente al risultato cercato:

## La teoria classica

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m.$$

- Il risultato è formalmente identico a quello della legge delle miscele; in effetti, anche in questo caso si ha a che fare con un modello di tipo parallelo.
- Come anche nel caso di  $E_1$ , questa formula permette delle predizioni in buon accordo con i dati dell'esperienza.
- Essendo molto spesso assai prossimi i valori di  $\nu_m$  e  $\nu_f$ ,  $\nu_{12}$  non è dominato né dalla matrice né dalle fibre.

- **Calcolo di  $G_{12}$ :** in questo caso, si applica una sollecitazione in cui solo  $\sigma_6$  è non nulla, vedi figura, in cui si è evidenziata anche la deformazione conseguente.



## La teoria classica

- L'equilibrio del volume elementare impone che sia

$$\sigma_6^f = \sigma_6^m = \sigma_6^l,$$

mentre per il legame costitutivo si ha

$$\sigma_6^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \sigma_6^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \sigma_6^l = G_{12} \varepsilon_6^l.$$

- Infine, la congruenza, in media, della deformazione a taglio prescrive che sia

$$\varepsilon_6^f A_f + \varepsilon_6^m A_m = \varepsilon_6^l A_l.$$

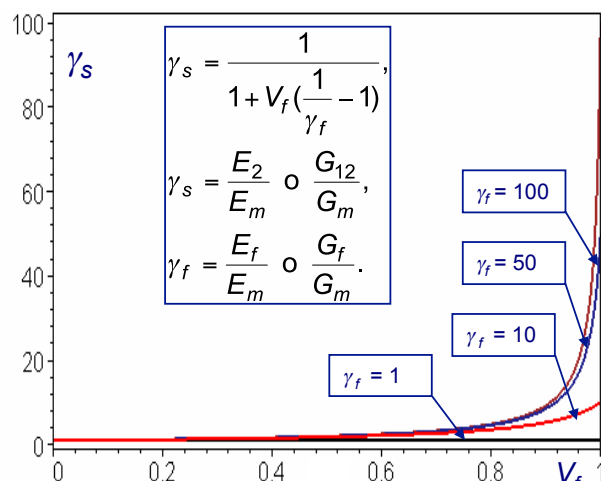
- Sostituendo in quest'ultima relazione le precedenti, si giunge al risultato finale:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \rightarrow G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1-V_f) G_f}.$$

## La teoria classica

- Si ottiene dunque una legge formalmente analoga a quella di  $E_2$ ; in effetti, anche in questo caso si è utilizzato un modello di tipo serie.
- Come nel caso di  $E_2$ , anche per  $G_{12}$  si possono fare le stesse osservazioni, in particolare una discrepanza piuttosto marcata con i dati sperimentali e una dipendenza debole da  $G_f$ :  $G_{12}$  è dominato dalla matrice, in altre parole le fibre hanno uno scarso effetto sul rinforzo a taglio.

- A questo proposito, il grafico a lato mostra questo aspetto: il valore del modulo omogeneizzato non cambia molto rispetto a quello della matrice, anche con fibre ad alto modulo, se non per frazioni volumiche molto elevate.



## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Se è vero, come si è visto anche dai casi sopra riportati, che la predizione analitica del valore delle costanti elastiche omogeneizzate è spesso difficile e incerta, si possono tuttavia in alcuni casi fornire dei limiti teorici al valore di queste grandezze omogeneizzate.
- Questo si può fare con delle tecniche variazionali; a titolo di esempio, e per dare una prospettiva teorica più precisa della teoria classica, vediamo il caso del modulo di Young, per il quale cerchiamo un limite teorico superiore ed inferiore.
- Si deve precisare che quello che viene presentato è valido in generale per un solido bifase isotropo, come è il caso di inclusioni di forma diversa disperse in modo aleatorio in una matrice.
- La tecnica variazionale fa uso dei principi di minimo dell'energia complementare e dell'energia potenziale elastica, rispettivamente per determinare il limite inferiore e superiore del modulo di Young.

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- **Limite inferiore:** consideriamo una barretta di materiale composito sottoposta ad una tensione normale  $\sigma$  applicata alle estremità.
- Un campo di tensione ammissibile (che verifica le equazioni di equilibrio e le condizioni al bordo) è il seguente (asse  $x_1$  longitudinale):

$$\sigma_1^o = \sigma, \quad \sigma_i^o = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$

- Questo campo di tensione in realtà non può esistere nel solido, perché questo è eterogeneo. L'energia di deformazione  $U^o$  che compete a questo campo di sforzo ammissibile è dunque, per il principio dell'energia complementare, superiore a quella che compete all'effettivo campo di sforzo.
- Ora, nel continuo visto come solido omogeneizzato ed isotropo, l'effettivo campo di sforzo conseguente all'applicazione delle azioni di cui sopra è proprio

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Considerando un modulo di Young  $E$  per il solido omogeneizzato di volume  $\Omega$ , l'energia di deformazione che compete a quest'ultimo è

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma^2}{E} dv = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \Omega.$$

- Invece, nel caso di solido eterogeneo,

$$U^o = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1^o \varepsilon_1 dv = \frac{\sigma^2}{2} \left( \int_{\Omega_d} \frac{1}{E_d} dv + \int_{\Omega_m} \frac{1}{E_m} dv \right) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \right) \Omega,$$

dove con l'indice  $d$  si è indicata una grandezza relativa alla fase dispersa (l'inclusione) e con  $m$  relativa alla matrice. In particolare, i volumi occupati dalla fase dispersa e dalla matrice sono rispettivamente

$$\Omega_d = V_d \Omega, \quad \Omega_m = (1 - V_d) \Omega,$$

con  $V_d$  la frazione volumica della fase dispersa.

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Dovendo essere, per il principio di minimo dell'energia complementare,  $U \leq U^o$ , se ne ricava la condizione

$$\frac{1}{E} \leq \frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \quad \rightarrow \quad E \geq \frac{E_m E_d}{V_d E_m + (1-V_d) E_d}.$$

- Si riconosce in questo limite il valore di un modulo in un modello di tipo serie, come è il caso dei moduli  $E_2$  e  $G_{12}$  per i fibrorinforzati unidirezionali.
- **Limite superiore:** consideriamo adesso la barretta sottoposta a un'elongazione longitudinale  $\varepsilon$ ; un campo di deformazione ammissibile (che rispetta il legame spostamenti-deformazioni e le condizioni al bordo) è il seguente:

$$\varepsilon_1^o = \varepsilon, \quad \varepsilon_2^o = \varepsilon_3^o = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4^o = \varepsilon_5^o = \varepsilon_6^o = 0,$$

$\nu$  essendo il coefficiente di Poisson del solido omogeneizzato.

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Questo campo di deformazione in realtà non può esistere nel solido, perché questo è eterogeneo. L'energia di deformazione  $U^o$  che compete a questo campo di deformazione ammissibile è dunque, per il principio dell'energia potenziale elastica, superiore a quella che compete all'effettivo campo di deformazione.
- Ora, nel continuo visto come solido omogeneizzato ed isotropo, l'effettivo campo di deformazione conseguente all'applicazione delle deformazioni imposte di cui sopra è proprio

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0,$$

da cui consegue il valore dell'energia di deformazione, per un solido omogeneizzato avente modulo di Young  $E$  e volume  $\Omega$ ,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon^2 dv = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Omega.$$

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Nel continuo eterogeneo, il campo di sforzo è diverso nelle due fasi; per le equazioni di Lamé (le due fasi sono isotrope) e per il campo di deformazione ammissibile considerato, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1^d &= \frac{1-\nu_d - 2\nu\nu_d}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} E_d \varepsilon, & \sigma_1^m &= \frac{1-\nu_m - 2\nu\nu_m}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} E_m \varepsilon, \\ \sigma_2^d &= \sigma_3^d = \frac{\nu_d - \nu}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} E_d \varepsilon, & \sigma_2^m &= \sigma_3^m = \frac{\nu_m - \nu}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} E_m \varepsilon, \\ \sigma_4^d &= \sigma_5^d = \sigma_6^d = 0, & \sigma_4^m &= \sigma_5^m = \sigma_6^m = 0. \end{aligned}$$

- Ne consegue, per il valore dell'energia di deformazione  $U^o$  che compete a questo campo ammissibile di deformazione,

$$\begin{aligned} U^o &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^o dv = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega_d} \sigma_i^d \varepsilon_i^o dv + \int_{\Omega_m} \sigma_i^m \varepsilon_i^o dv \right) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{1-\nu_d - 4\nu\nu_d + 2\nu^2}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_m - 4\nu\nu_m + 2\nu^2}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} E_m (1-V_d) \right) \Omega. \end{aligned}$$

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Dovendo essere, per il principio di minimo dell'energia potenziale elastica,  $U \leq U^o$ , se ne ricava la condizione

$$E \leq \frac{1-\nu_d - 4\nu\nu_d + 2\nu^2}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_m - 4\nu\nu_m + 2\nu^2}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} E_m (1-V_d)$$

- In questa espressione, il valore del coefficiente di Poisson omogeneizzato,  $\nu$ , è ancora incognito; lo si ricava in accordo col principio di minimo dell'energia potenziale elastica, per il quale dunque  $U^o$  deve essere minimo rispetto all'incognita  $\nu$  per ottenere il limite su  $E$ .
- Deve dunque essere

$$\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U^o}{\partial \nu^2} \right|_{\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0} > 0.$$

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Svolgendo i calcoli si trova che

$$\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0 \quad \text{per} \quad \nu = \frac{(1-\nu_m - 2\nu_m^2)\nu_d E_d V_d + (1-\nu_d - 2\nu_d^2)\nu_m E_m (1-V_d)}{(1-\nu_m - 2\nu_m^2)E_d V_d + (1-\nu_d - 2\nu_d^2)E_m (1-V_d)},$$

$$\frac{\partial^2 U^o}{\partial \nu^2} = 2\varepsilon^2 \Omega \left( \frac{E_d V_d}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} + \frac{E_m V_m}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} \right).$$

- Essendo le due fasi isotrope, e quindi i rispettivi coefficienti di Poisson  $< 1/2$ , si verifica facilmente che la derivata seconda è sempre positiva; dunque, il valore di  $\nu$  qui sopra riportato corrisponde ad un minimo di  $U^o$ . Sostituendolo nell'espressione precedente, si ottiene l'espressione finale per il limite superiore di  $E$ ; questa è molto complicata e si riporta di seguito il valore limite di  $E$  quando  $\nu_d = \nu_m$  (i due valori non sono, in genere, molto diversi):

$$E \leq V_d E_d + (1-V_d) E_m.$$

## Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Si osserva che questo è proprio il valore di un coefficiente elastico nel modello in parallelo, come è il caso di  $E_1$  e  $\nu_{12}$ .
- Quindi, nella teoria classica, le costanti tecniche omogeneizzate corrispondono sia a un limite superiore, nei modelli parallelo, sia a un limite inferiore, nei modelli serie.
- Questo è importante, ad esempio, per capire che le predizioni di  $E_2$  e  $G_{12}$  fatte con le formule della teoria classica sono sempre predizioni per difetto.
- I risultati appena visti, sono stati trovati da Paul, 1960, in relazione a studi sulle leghe. In seguito, sono stati proposti molti modelli, volti a cogliere più in dettaglio il fenomeno e legati a differenti morfologie della fase dispersa. Ad esempio, si ricordano i lavori di Hashin e Shtrikman (1963), in cui la fase dispersa è costituita da sfere e quelli di Hashin e Rosen (1964), più pertinenti al caso dei fibrorinforzati perché la fase è costituita da cilindri; si rimanda alla letteratura specialistica per una analisi più approfondita.

221



## Le formule di Ekvall

- Diversi tentativi sono stati fatti, su base semiempirica, numerica o teorica, per migliorare le predizioni della teoria classica. Vediamone qui di seguito alcuni.
- Ekvall (1961) ha proposto una modifica delle formule di  $E_1$  ed  $E_2$  per tener conto dello stato di tensione triassiale indotto nella matrice dalla presenza delle fibre:

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E'_m, \quad E_2 = \frac{E_f E'_m}{V_f E'_m + (1 - V_f) E_f (1 - \nu_m^2)}$$

- Nelle formule sopra è

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m^2}$$

- Tuttavia, quantitativamente, questa correzione non è significativa per  $\nu_m < 1/4$ .

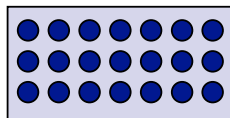
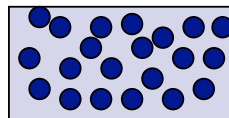
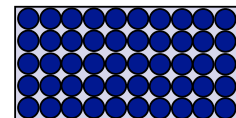
222





## Soluzioni elastiche con contiguità

- La teoria classica considera, almeno implicitamente, il fatto che la disposizione delle fibre sia uniforme e regolare.
- Tuttavia, la disposizione delle fibre non è necessariamente regolare, ma piuttosto le fibre sembrano essere disposte in modo aleatorio.
- Quindi, ad esempio, alcune fibre saranno in contatto tra loro, e questo può, almeno in parte, pregiudicare l'aderenza alla matrice, mentre altre saranno isolate. Ovviamente, più è alta la frazione volumica di fibre, più è probabile che queste si trovino vicine ed in contatto.
- Questo aspetto può essere preso empiricamente in conto tramite il *fattore di contiguità*  $C$ , introdotto da Tsai (1964).  $C$  varia fra 0, fibre isolate, ed 1, fibre tutte in contatto tra loro, vedi figura. Nella realtà, il valore di  $C$  sarà tanto più elevato quanto più è alto  $V_f$ .


 $C=0$ 

 $0 < C < 1$ 

 $C=1$ 

223



## Soluzioni elastiche con contiguità

- Tenendo conto del fattore di contiguità, e utilizzando un approccio elastico in cui la soluzione è trovata come combinazione lineare tra il caso  $C=0$  ed il caso  $C=1$ , Tsai ha ottenuto le formule seguenti:

$$E_1 = k[E_f V_f + E_m (1 - V_f)]$$

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m)(1 - V_f)] \left[ (1 - C) \frac{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_m) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} + C \frac{k_f(2k_m + G_f) - G_f(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_f) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} \right]$$

$$\nu_{12} = (1 - C) \frac{k_f \nu_f (2k_m + G_m) V_f + k_m \nu_m (2k_f + G_m) (1 - V_f)}{k_f (2k_m + G_m) - G_m (k_f - k_m) (1 - V_f)} + C \frac{k_m \nu_m (2k_f + G_f) (1 - V_f) + k_f \nu_f (2k_m + G_f) V_f}{k_f (2k_m + G_m) - G_f (k_f - k_m) (1 - V_f)}$$

224



## Soluzioni elastiche con contiguità

$$G_{12} = (1-C)G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)(1-V_f)}{2G_m + (G_f - G_m)(1-V_f)} + CG_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)(1-V_f)}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m)(1-V_f)},$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}, \quad k_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}.$$

- Il coefficiente  $k$  è il *fattore di disallineamento delle fibre*, introdotto da Tsai per tener conto delle imperfezioni nella direzione delle fibre; il suo valore, da determinare sperimentalmente, e che varia soprattutto in funzione del procedimento di fabbricazione, varia poco, tra 0.9 ed 1.
- Il valore del fattore di contiguità  $C$  deve anch'esso essere determinato sperimentalmente, per diversi valori della frazione volumica  $V_f$ .

## Le equazioni di Halpin e Tsai

- Le teorie di omogeneizzazione più fini esprimono i risultati tramite formule piuttosto complicate e spesso di limitata applicazione (vedi il caso precedente delle soluzioni con contiguità).
- Allo scopo di ottenere delle formule affidabili e semplici per la predizione dei moduli omogeneizzati, Halpin e Tsai (1969) hanno proposto delle equazioni ricavate essenzialmente dall'interpolazione di risultati ottenuti tramite teorie micromeccaniche differenti.
- In particolare, Halpin e Tsai hanno dimostrato che la *soluzione di Hermann* (1967), che è una generalizzazione del cosiddetto *modello autoc coerente di Hill* (1965), può essere ridotta alle seguenti equazioni approssimate per quanto riguarda  $E_2$ ,  $G_{12}$  o  $\nu_{23}$ :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi}.$$

## Le equazioni di Halpin e Tsai

- Nelle equazioni di Halpin-Tsai,  $M$  rappresenta un modulo tra  $E_2$ ,  $G_{12}$  o  $\nu_{23}$ , ed  $M_f$  i corrispondenti moduli delle fibre, cioè  $E_f$ ,  $G_f$  o  $\nu_f$ , mentre  $M_m$  quelli della matrice, ossia  $E_m$ ,  $G_m$  o  $\nu_m$ .
- Per quanto riguarda  $E_1$  e  $\nu_{12}$ , Halpin e Tsai continuano a prendere le formule della teoria classica.
- Il coefficiente  $\xi$  è una misura del rinforzo del materiale composito, rinforzo apportato alla matrice dalla presenza delle fibre.
- $\xi$  dipende dalla geometria delle fibre, dalla loro disposizione e dalla condizione di carico. In genere  $\xi$  deve essere valutato sperimentalmente, e questo è il punto debole delle equazioni di Halpin-Tsai, soprattutto perché, come detto,  $\xi$  dipende anche dalla condizione di carico.
- In particolare, per fibre circolari disposte regolarmente su una maglia quadrata e per  $V_f = 0.55$ , Halpin e Tsai, dal confronto con dati sperimentali, hanno trovato il valore  $\xi = 2$  per  $E_2$  e  $\xi = 1$  per  $G_{12}$ .

## Le equazioni di Halpin e Tsai

- Tuttavia, Hewitt e de Malherbe propongono per la valutazione di  $G_{12}$  la seguente formula empirica per  $\xi$ , che sembra dare un miglior accordo con i dati dell'esperienza:

$$\xi = 1 + 4V_f^{10}.$$

- In teoria,  $\xi$  può variare tra 0 ed  $\infty$ ; si nota facilmente che per  $\xi = 0$ ,

$$\frac{1}{M} = \frac{V_f}{M_f} + \frac{1 - V_f}{M_m},$$

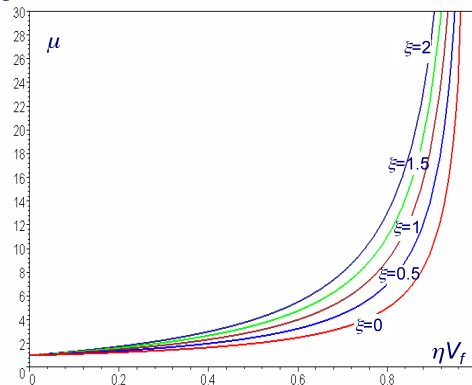
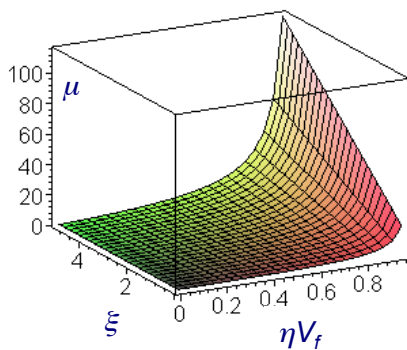
ossia si ottiene il risultato tipico del modello tipo serie, che come visto rappresenta il limite inferiore. All'opposto, per  $\xi = \infty$ ,

$$M = V_f M_f + (1 - V_f) M_m,$$

ossia si ottiene il risultato tipico del modello tipo parallelo, che rappresenta il limite superiore.

## Le equazioni di Halpin e Tsai

- Quindi, in un certo senso, come già anticipato  $\xi$  rappresenta una misura del rinforzo dato alla matrice dalle fibre: più  $\xi$  è grande, più le fibre contribuiscono al rinforzo strutturale della matrice.
- Per quanto concerne la quantità  $\eta$ , si può verificare che per inclusioni rigide  $\eta = 1$ , per un materiale omogeneo  $\eta = 0$  e per vuoti  $\eta = -1/\xi$ .
- Il termine  $\eta V_f$  può essere interpretato come una *frazione volumica ridotta* (perché  $\eta \leq 1$ ). In figura, si riporta il valore di  $\mu = M/M_m$  in funzione di  $\eta V_f$  per vari valori di  $\xi$ .



229

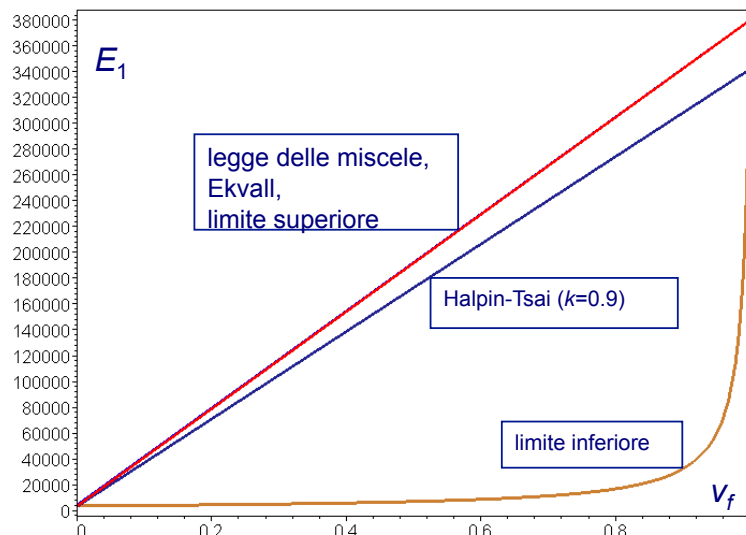


## Confronto tra le varie teorie

- Per concludere, si riportano alcuni diagrammi che permettono di confrontare i risultati delle varie teorie presentate.
- I grafici si riferiscono al caso di un composito carbonio-epoxy, con i seguenti valori dei moduli:

- $E_m = 3.45$  Gpa
- $E_f = 380$  Gpa
- $G_m = 1.327$  GPa
- $G_f = 152$  GPa
- $\nu_m = 0.3, \nu_f = 0.25$

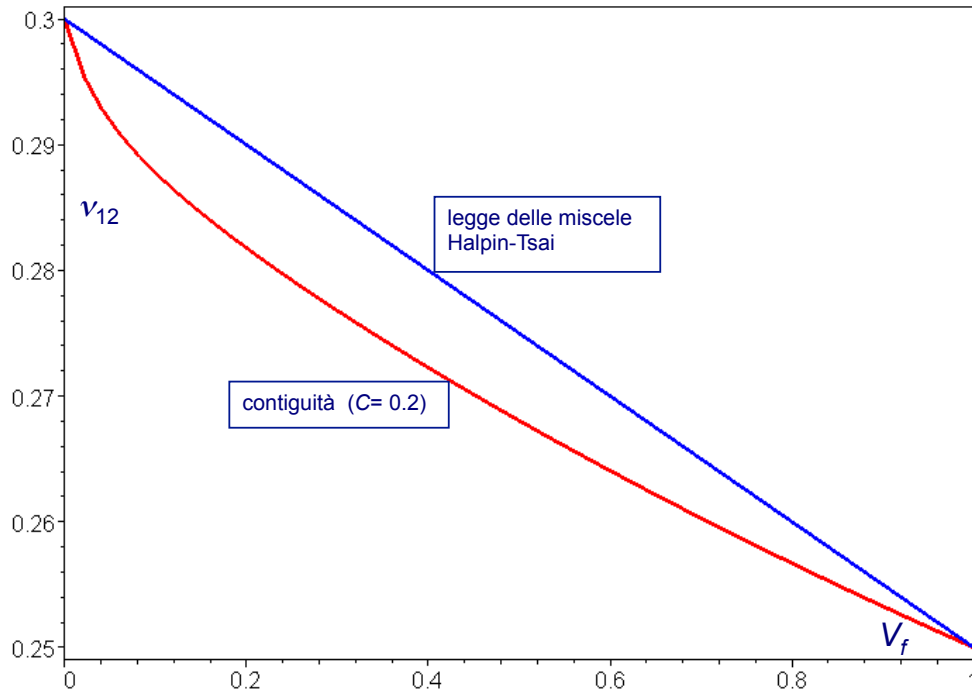
- Come commento generale, si può osservare che la dispersione dei dati è assai forte per  $E_2$  e  $G_{12}$ , molto meno per  $E_1$  e  $\nu_{12}$ .



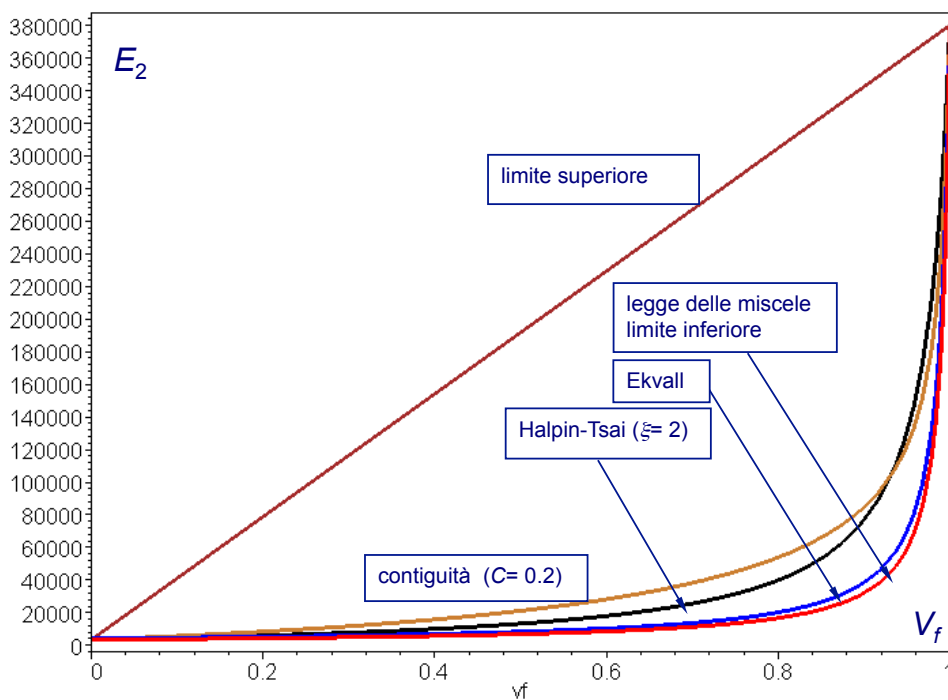
230



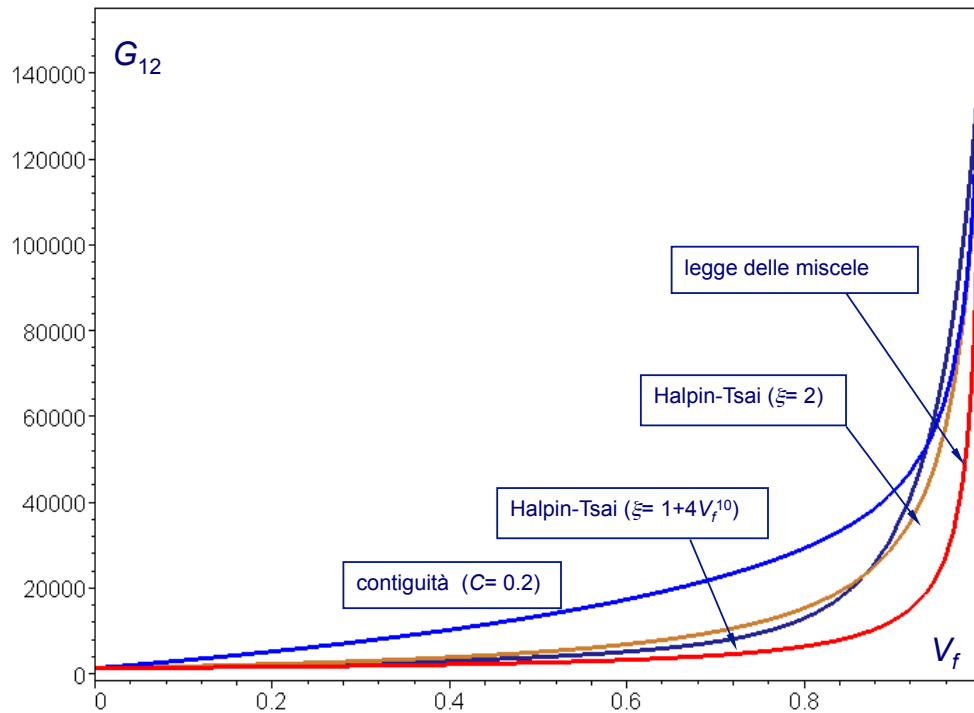
## Confronto tra le varie teorie



## Confronto tra le varie teorie



## Confronto tra le varie teorie



233



## Capitolo 4

### ■ Criteri di resistenza per i compositi

<input type="checkbox"/> Generalità	235
<input type="checkbox"/> Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi	237
<input type="checkbox"/> Il criterio della tensione massima	248
<input type="checkbox"/> Il criterio della deformazione massima	253
<input type="checkbox"/> Il criterio di Tsai-Hill	257
<input type="checkbox"/> Il criterio di Hoffmann	268
<input type="checkbox"/> Il criterio di Tsai-Wu	272
<input type="checkbox"/> Confronti con i dati dell'esperienza	277
<input type="checkbox"/> Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza	282

234



## Generalità

- L'analisi della crisi meccanica, elastica o di rottura, di un materiale eterogeneo e anisotropo presenta dei problemi inesistenti nel caso dei materiali classici, monofase e isotropi.
- Questo ha avuto come effetto la proposizione di un certo numero di criteri di resistenza concepiti ad hoc per questo tipo di materiali.
- Nel seguito, focalizzeremo l'attenzione soprattutto al caso di una lamina ortotropa, che ci interessa di più nelle applicazioni.
- In maniera sintetica, si può dire che gli effetti dell'anisotropia sulla resistenza e sulla formulazione di un criterio di crisi meccanica sono principalmente:
  - la variazione delle caratteristiche di resistenza con la direzione;
  - questo implica, tra l'altro, la necessità di caratterizzare la resistenza, tramite i tests sperimentali, in alcune direzioni privilegiate, in particolare le direzioni di ortotropia (inoltre, tests in direzioni differenti da quelle di simmetria materiale sarebbero molto complicati);
  - la non coassialità di tensioni e deformazioni: nella direzione di massimo sforzo non si ha in genere la direzione di massima deformazione.

235



## Generalità

- Dal canto suo, l'eterogeneità influenza il fenomeno della rottura, o comunque del raggiungimento di uno stato limite, per un effetto struttura interno alla compagine del continuo, il che comporta:
  - l'insorgere di differenti meccanismi locali di rottura (ad esempio il *pull-out*, ossia lo sfilamento delle fibre dalla matrice, l'instabilità locale delle fibre in compressione, il danneggiamento della matrice etc.);
  - l'influenza sulla propagazione delle fessure, spesso benefica;
  - la differente resistenza in trazione e in compressione.
- Nel seguito, ci limiteremo ad analizzare il problema della formulazione di un criterio di crisi per un continuo anisotropo omogeneo, in cui cioè l'eterogeneità non appare nella formulazione del modello.
- In altre parole, ci limiteremo ad analizzare il problema della crisi meccanica di una lamina in composito dal punto di vista macroscopico. Naturalmente, questo implica la rinuncia all'analisi di tutti quei fenomeni localizzati, citati qui sopra, che difficilmente possono essere colti da un'analisi di sintesi.

236



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Si è già detto che l'anisotropia ha diversi effetti rispetto alla formulazione di un criterio di resistenza; in particolare, si deve osservare che, dal momento che le caratteristiche di resistenza variano con la direzione, non è detto che sia la tensione principale massima il parametro che governa il problema.
- In effetti, ciò che si deve confrontare non è il valore della tensione principale massima con il valore massimo della resistenza in quella direzione principale, ma piuttosto il campo di sforzo effettivo con il campo di sforzo ammissibile.
- In altre parole, mentre in un materiale isotropo la resistenza è indipendente dall'orientazione dello stato di sforzo applicato (ruotando le direzioni principali niente cambia), in un materiale anisotropo la resistenza è funzione dell'orientazione del campo di sforzo, a parità di tutti gli altri fattori.
- In particolare, in una lamina ortotropa, la resistenza è funzione dell'orientazione delle tensioni principali rispetto agli assi di ortotropia.

237



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- La maggior parte dei dati sperimentali di resistenza si riferiscono ad un test monoassiale; l'uso di un criterio di resistenza permette, come noto, di interpretare il risultato di questi tests anche per campi di sforzo non monoassiali.
- Nel caso di un materiale anisotropo, una difficoltà ulteriore sta nel fatto che questi tests forniscono dei valori di resistenza monoassiale in direzioni particolari. Si deve dunque tenerne conto nel criterio di resistenza.
- Lo scopo è, come di consueto, quello di ottenere delle superfici o curve limite nello spazio delle tensioni, con il quale confrontare lo stato di tensione attuale.
- Tuttavia, nell'utilizzo delle curve o superfici limite si perdono delle informazioni sul tipo di crisi che si produce: per questa ragione, tali criteri si chiamano anche *fenomenologici*, nel senso che sono in grado di cogliere, più o meno bene, il momento della crisi, ma non la sua ragione, il suo meccanismo.

238





## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- In altri criteri, invece, si considerano dei possibili meccanismi macroscopici di crisi e si considera che questi non siano interagenti tra loro; in tali criteri (tensione massima o deformazione massima), si individua dunque il meccanismo di rottura, almeno macroscopicamente (come già detto, in tutti questi approcci si rinuncia a priori a conoscere nel dettaglio la ragione locale, micromeccanica, della crisi).
- Si deve anche specificare che, contrariamente a quanto accade per i materiali metallici, nei compositi la crisi è praticamente sempre una crisi di rottura: i materiali compositi comuni (carbonio-epoxy, vetro-epoxy etc.) hanno un *comportamento fragile*, senza fase plastica.
- Le superfici o curve limite sono dunque degli involucri limite di rottura e non di plasticità.
- In generale, per una lamina ortotropa, i dati necessari per individuare la crisi sono 5, e quindi 5 sono i tests indipendenti necessari a caratterizzare una lamina ortotropa per quanto riguarda la sua resistenza.

239



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

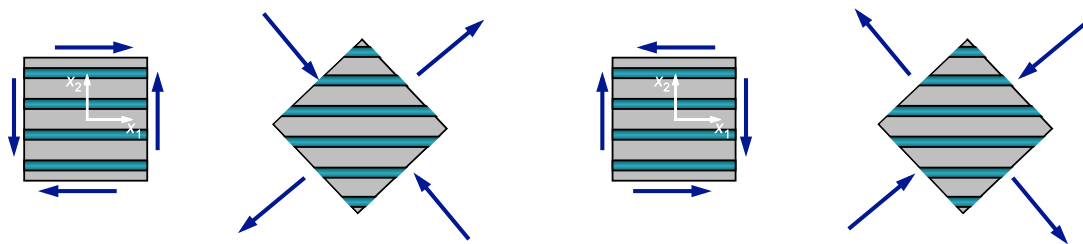
- Infatti, si devono conoscere:
  - $X_t$ : tensione limite di trazione in direzione  $x_1$ ;
  - $X_c$ : tensione limite di compressione in direzione  $x_1$ ;
  - $Y_t$ : tensione limite di trazione in direzione  $x_2$ ;
  - $Y_c$ : tensione limite di compressione in direzione  $x_2$ ;
  - $S$ : tensione limite a taglio.
- Da notare che nel prosieguo i parametri di resistenza sono tutti considerati come quantità positive.
- I parametri di resistenza sono almeno 5 perché in genere la resistenza a compressione è differente da quella a trazione, per differenti ragioni.
- In particolare, se  $x_1$  è la direzione delle fibre (come normalmente si pone), allora in genere si osserva che  $X_c < X_t$ , mentre  $Y_c > Y_t$ .
- Questo perché in direzione longitudinale ( $x_1$ ) le fibre resistono bene alla trazione, e meno bene alla compressione, anche per effetti di instabilità locale delle fibre.

240



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- In direzione trasversale ( $x_2$ ), è il contrario: infatti, mentre a compressione la matrice governa la resistenza, a trazione questa è influenzata dalla presenza delle fibre e dunque dell'interfaccia fibre-matrice, che in genere non assicura lo stesso livello di resistenza; inoltre, la matrice, che spesso ha comportamento fragile, ha in genere una migliore resistenza alla compressione che alla trazione.
- Infine, la resistenza al taglio, essenzialmente data dalla matrice, non dipende dal segno delle tensioni di taglio, come si capisce facilmente per ragioni di simmetria, vedi figura.



241



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Un altro problema che comporta l'anisotropia, rispetto all'elaborazione di un criterio di resistenza, è quello relativo alla decomposizione dell'energia di deformazione in parte sferica e deviatorica.
- Come noto infatti, il criterio di Huber-Hencky-von Mises, normalmente accettato come criterio di plasticità per le leghe isotrope, può essere interpretato come un criterio in cui si limita l'energia di deformazione deviatorica o di *distorsione*, ossia la parte di energia di deformazione che è legata ai cambiamenti di forma ma non di volume.
- I due tensori degli sforzi e delle deformazioni si possono decomporre in parti sferica e deviatorica,

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D, \quad \sigma_S = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{I}, \quad \sigma_D = \sigma - \sigma_S,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D, \quad \varepsilon_S = \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon \mathbf{I}, \quad \varepsilon_D = \varepsilon - \varepsilon_S,$$

242



## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Il presupposto di base per l'applicazione del criterio di Huber-Hencky-von Mises è che la parte deviatorica del tensore degli sforzi produca solo uno stato deformativo deviatorico, in modo che si possa isolare la quota parte di energia di deformazione che è inerente alle distorsioni, quota parte che è la sola ad essere limitata nel criterio suddetto.
- In altre parole, la variazione di volume inerente alla parte deviatorica del tensore degli sforzi deve essere nulla:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma}_D) = 0 &\rightarrow \text{tr} \left[ \mathbf{Z} \left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right) \right] = 0 \rightarrow \\ 3 \text{tr}(\mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma}) - \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{I}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

- In forma indiciale, la condizione sopra è

$$\sigma_{ij} Z_{hhkk} = 3 Z_{jjkl} \sigma_{kl}, \quad h, i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

che in esteso diviene

## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} [Z_{1111} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222} (2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333} (2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] + \\ &+ \frac{2}{3} [Z_{1122} (\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133} (\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233} (\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] + \\ &+ 2(Z_{1123} + Z_{2223} + Z_{3323}) \sigma_{23} + 2(Z_{1113} + Z_{2213} + Z_{3313}) \sigma_{13} + \\ &2(Z_{1112} + Z_{2212} + Z_{3312}) \sigma_{12} = 0. \end{aligned}$$

- Questa quantità non è in generale nulla e quindi, per un corpo anisotropo, uno stato di tensione deviatorico è accompagnato anche da una variazione di volume.
- Del resto, questo è la logica conseguenza di quanto già osservato in precedenza, quando si è discusso degli accoppiamenti tra tensioni e deformazioni, pagina 72 e seguenti, in cui si è notato, ad esempio, che una tensione di taglio è anche accompagnata da una deformazione normale etc.
- Nel caso di un materiale ortotropo, la relazione sopra, scritta nel riferimento d'ortotropia, diviene

## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

$$\frac{1}{3}[Z_{1111}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333}(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] + \frac{2}{3}[Z_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233}(\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] = 0.$$

- Il problema quindi sussiste, come pure, lo si verifica facilmente, anche per i casi di simmetria di ordine 3, 4 e 6 (isotropia trasversa).
- Tuttavia, se si considera il caso della simmetria cubica, cioè di un'ortotropia in cui

$$Z_{1111} = Z_{2222} = Z_{3333}, \quad Z_{1122} = Z_{1133} = Z_{2233},$$

allora si verifica subito che la condizione qui sopra è rispettata.

- Dunque, per un materiale a simmetria cubica, è sempre possibile separare la parte di energia di distorsione da quella volumica. In teoria, quindi, per questi corpi è ancora possibile, almeno come approccio macroscopico, applicare il criterio di Huber-Hencky-von Mises.

## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Fisicamente, questo significa che un corpo a simmetria cubica subisce, per effetto di campi di tensioni sferici, solo variazioni di volume, non di forma.
- Questo non è vero, in generale, nemmeno per un solido ortotropo: a causa delle differenze di rigidità lungo gli assi di ortotropia, un cubo di materiale ortotropo si trasforma, sotto un'azione di tipo idrostatico, in un parallelepipedo, non in un cubo.
- Il caso dell'isotropia può essere visto come un caso particolare della simmetria cubica; inoltre, tramite le equazioni di Lamé si verifica facilmente che

$$\sigma_S = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_S, \quad \sigma_D = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_D.$$

- Il requisito fondamentale, in effetti, per questa decomposizione, è che i moduli di Young e i coefficienti di Poisson nelle tre direzioni di simmetria siano i medesimi, e per questo basta la simmetria cubica, non occorre l'isotropia.

## Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Per terminare, si riporta qui di seguito una tabella con alcuni valori tipici dei parametri di rigidezza e resistenza di lamine in composito unidirezionale (fonte: Jones; i moduli e i parametri di resistenza sono in GPa ).

Proprietà	Vetro-epoxy	Boro-epoxy	Carbonio-epoxy	Kevlar-epoxy
$E_1$	54	207	207	76
$E_2$	18	21	5	5.5
$\nu_{12}$	0.25	0.3	0.25	0.34
$G_{12}$	9	7	2.6	2.1
$X_t$	1.035	1.38	1.035	1.38
$Y_t$	0.028	0.083	0.041	0.028
$S$	0.041	0.124	0.069	0.044
$X_c$	1.035	2.76	0.689	0.276
$Y_c$	0.138	0.276	0.117	0.138

## Il criterio della tensione massima

- Il criterio della tensione massima è un criterio che non considera le interazioni possibili tra i vari meccanismi di rottura, ma si basa sul confronto tra le tensioni effettive e i parametri di resistenza del materiale.
- Dal momento che i parametri di resistenza sono noti solo nelle direzioni di ortotropia, è in quelle direzioni che il confronto si deve operare.
- In altre parole, il criterio della tensione massima confronta le tensioni calcolate nel riferimento di ortotropia con i parametri di resistenza del materiale.
- In definitiva, si assume che si sia raggiunto uno stato di crisi se una delle seguenti 5 condizioni non è rispettata:

$$-X_c \leq \sigma_1 \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t,$$

$$|\sigma_6| \leq S.$$

## Il criterio della tensione massima

- In pratica, è come se si dovessero verificare cinque criteri in luogo di uno solo.
- L'eventuale condizione violata indica anche il meccanismo di crisi; ad esempio, se non si verifica la condizione  $\sigma_2 \leq Y_t$ , significa che la crisi si produrrà per trazione eccessiva in direzione ortogonale alle fibre e quindi per presumibile rottura della matrice.
- Si insiste sul fatto che il confronto si opera nel riferimento di ortotropia, l'unico nel quale si conoscono i parametri di resistenza.
- Simbolicamente, e coerentemente con quanto fatto in precedenza, si indica questo riferimento con gli assi  $\{x_1, x_2\}$ , essendo per convenzione, nel caso unidirezionale,  $x_1$  coincidente con la direzione delle fibre, e quindi le tensioni con  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$ , mentre un altro riferimento sarà indicato con  $\{x, y\}$  e le tensioni in esso valutate con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s$ .
- Il passaggio da un riferimento qualsiasi, in cui sono note le tensioni, a quello di ortotropia si effettua con le formule viste nel capitolo 2:

## Il criterio della tensione massima

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

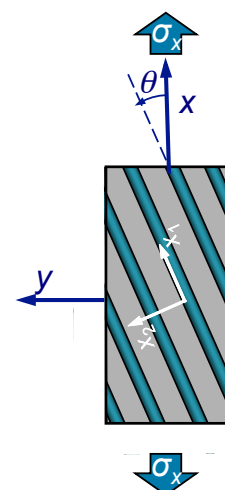
- Il criterio, in un riferimento qualsiasi, è dunque ( $s = \sin \theta$ ,  $c = \cos \theta$ ):

$$-X_c \leq c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y - 2cs \sigma_s \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y + 2cs \sigma_s \leq Y_t,$$

$$|cs \sigma_x - cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s| \leq S.$$

- Consideriamo allora il caso di una lamina unidirezionale sottoposta ad uno stato di tensione monoassiale, di trazione o compressione, variabile con l'inclinazione  $\theta$  rispetto all'asse  $x_1$ , vedi figura.



## Il criterio della tensione massima

- Rispetto al riferimento d'ortotropia, lo stato di tensione è biassiale, per un angolo  $\theta$  qualsiasi. Applicando la formula di rotazione si ottiene

$$-\frac{X_c}{\cos^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta},$$

$$-\frac{Y_c}{\sin^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta},$$

$$|\sigma_x| \leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.$$

- Si possono quindi tracciare le curve corrispondenti ad ognuna delle condizioni qui sopra. Allora,  $\sigma_x$  limite è, per ogni orientazione, il valore che corrisponde alla curva inferiore.
- A titolo di esempio, si riporta il caso di un composito vetro-epoxy, le cui caratteristiche sono indicate qui di seguito. Si sono tracciati due diagrammi, uno con le curve per il caso di tensione monoassiale di trazione, l'altro per tensione di compressione.

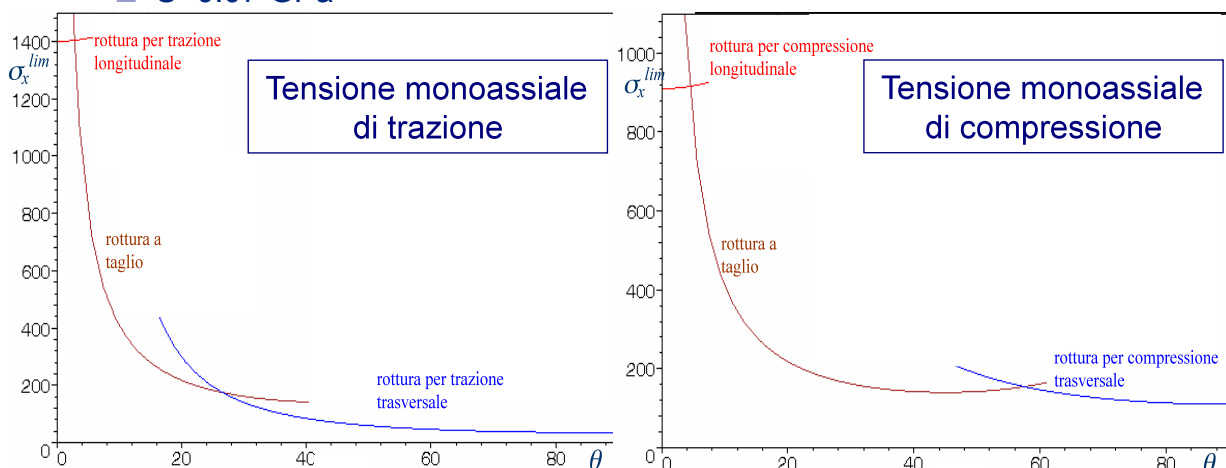
251



## Il criterio della tensione massima

- Caratteristiche meccaniche del composito vetro-epoxy utilizzato:

<input type="checkbox"/> $X_t=1.4$ GPa	$E_1=46$ GPa
<input type="checkbox"/> $X_c=0.91$ GPa	$E_2=10$ GPa
<input type="checkbox"/> $Y_t=0.035$ GPa	$G_{12}=4.6$ GPa
<input type="checkbox"/> $Y_c=0.11$ GPa	$\nu_{12}=0.31$
<input type="checkbox"/> $S=0.07$ GPa	



252



## Il criterio della deformazione massima

- Il criterio della deformazione massima è come quello della tensione massima, con la sola differenza che in questo caso i limiti si pongono sulle deformazioni:

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t}, \\ -Y_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t}, \\ |\varepsilon_6| &\leq S_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

- Con  $X_{\varepsilon c}$  etc. si sono indicate le deformazioni limite.
- Le deformazioni possono essere espresse in funzione delle tensioni, e con le formule di rotazione, si possono scrivere le condizioni sopra in un riferimento qualsiasi:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} = [S][T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} & 0 \\ E_1 & E_1 & 0 \\ -\nu_{12} & 1 & 0 \\ E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{cases}$$

253



## Il criterio della deformazione massima

- Si ottengono dunque le condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} &\leq \frac{1}{E_1} \left[ (c^2 - \nu_{12}s^2) \sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2) \sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12}) \sigma_s \right] \leq X_{\varepsilon t}, \\ -Y_{\varepsilon c} &\leq \frac{1}{E_2} \left[ (s^2 - \nu_{21}c^2) \sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2) \sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21}) \sigma_s \right] \leq Y_{\varepsilon t}, \\ \frac{1}{G_{12}} \left| cs \sigma_x - cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s \right| &\leq S_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

- D'altra parte, il comportamento a rottura dei compositi è, come già detto, il più sovente fragile: la rottura si produce al limite della fase elastica.
- Se si accoglie dunque questa ipotesi, è allora evidente che

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1}, \quad X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1}, \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}, \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2}, \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}}.$$

254





## Il criterio della deformazione massima

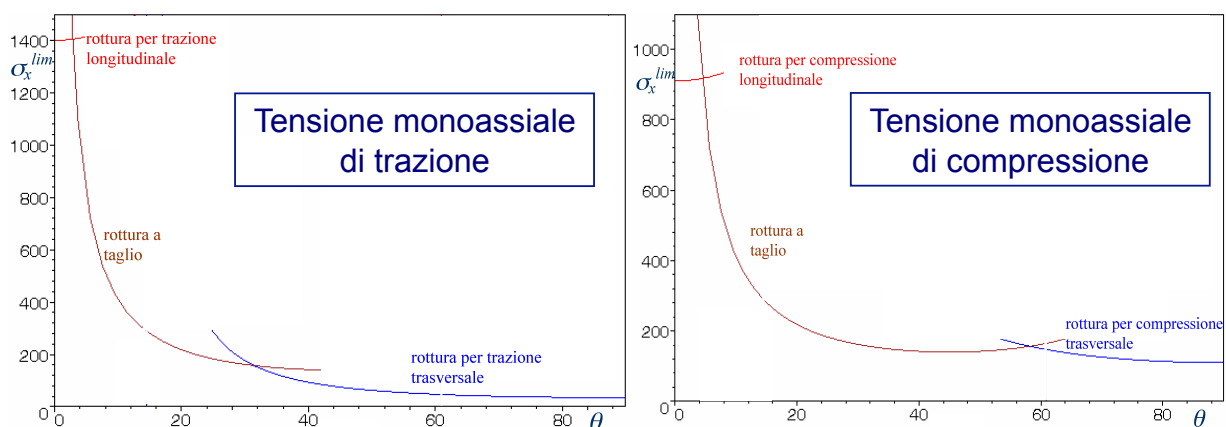
- In tal caso, le condizioni limite diventano

$$\begin{aligned}
 -X_c &\leq (c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12})\sigma_s \leq X_t, \\
 -Y_c &\leq (s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21})\sigma_s \leq Y_t, \\
 |cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| &\leq S.
 \end{aligned}$$

- Si vede dunque che niente cambia, rispetto al criterio della tensione massima, per la verifica a taglio, mentre per la verifica delle tensioni normali c'è unicamente l'apparizione dei coefficienti di Poisson: questo modifica solo leggermente i risultati precedenti, ottenuti con il criterio della tensione massima.
- Si riporta ancora il caso della lamina in vetro-epoxy sottoposta a una tensione monoassiale variabile in orientazione: i risultati sono solo poco dissimili da quelli precedenti, a conferma di quanto detto sopra.

## Il criterio della deformazione massima

$$\begin{aligned}
 -\frac{X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} &\leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta}, \\
 -\frac{Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} &\leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta}, \\
 |\sigma_x| &\leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.
 \end{aligned}$$



## Il criterio di Tsai-Hill

- Il criterio di Tsai-Hill è un criterio fenomenologico che Tsai (1968) ha elaborato per le lamine in composito a partire dal criterio di Hill (1950), pensato in origine per materiali ortotropi qualunque.
- Il criterio di Hill è una generalizzazione del criterio di Huber-Hencky-von Mises, in cui però, a differenza di quest'ultimo, si prende in considerazione tutta l'energia di deformazione, e non solo quella di distorsione, perché, come visto, nel caso anisotropo non è in generale possibile separare la parte di energia di distorsione da quella di cambiamento di volume.
- Il criterio di Hill si formula come segue, nel riferimento di ortotropia:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\sigma_4^2 + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 \leq 1.$$

- I coefficienti  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  sono i parametri di resistenza di Hill; sono da interpretarsi come valori limite di snervamento per i materiali duttili e di rottura per i fragili.



## Il criterio di Tsai-Hill

- Tsai ha semplicemente adattato il calcolo di questi parametri al caso di una lamina ortotropa; per far questo, ha semplicemente considerato dei casi di carico particolarmente semplici.
- Se  $\sigma_6 \neq 0$ ,  $\sigma_i = 0$  per  $i=1, \dots, 5$ , allora il criterio si riduce a

$$2N\sigma_6^2 = 1 \quad \rightarrow \quad N = \frac{1}{2\sigma_6^2}.$$

- Ma se si è allo stato limite, significa che  $\sigma_6$  prende il suo valore limite, che è  $S_{xy}$ ; dunque:

$$N = \frac{1}{2S_{xy}^2}.$$

- In modo analogo, ponendo successivamente  $\sigma_4 \neq 0$  e  $\sigma_5 \neq 0$  con le altre componenti di tensione nulle, si ottiene

$$L = \frac{1}{2S_{yz}^2}, \quad M = \frac{1}{2S_{xz}^2}.$$

## Il criterio di Tsai-Hill

- Se  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_i = 0$  per  $i=2, \dots, 6$ , allora il criterio si riduce a

$$(G + H)\sigma_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad G + H = \frac{1}{\sigma_1^2}.$$

- Ma se si è allo stato limite, significa che  $\sigma_1$  prende il suo valore limite, che è  $X$ ; dunque:

$$G + H = \frac{1}{X^2}.$$

- In modo analogo, ponendo successivamente  $\sigma_2 \neq 0$  e  $\sigma_3 \neq 0$  con le altre componenti di tensione nulle, si ottiene

$$F + H = \frac{1}{Y^2}, \quad F + G = \frac{1}{Z^2}.$$

- Da queste tre ultime condizioni si ricava finalmente

## Il criterio di Tsai-Hill

$$F = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right],$$

$$G = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right],$$

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right].$$

- Quindi, il criterio di Hill si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_3}{Z} \right)^2 - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_2 - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right) \sigma_1 \sigma_3 - \\ & - \left( \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sigma_2 \sigma_3 + \left( \frac{\sigma_4}{S_{yz}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_5}{S_{xz}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_6}{S_{xy}} \right)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

## Il criterio di Tsai-Hill

- Nel caso di una lamina in stato piano di tensione,  $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$ , e quindi ci si riduce a

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1.$$

- D'altra parte, per una lamina in composito,  $Z=Y$  (ricordarsi quanto detto a pagina 115 sulle lamine in composito) e  $S_{xy}=S$ . Dunque

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 \leq 1.$$

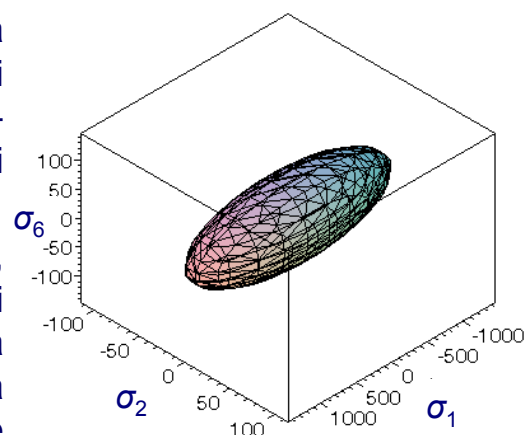
- Questa equazione è quella che esprime il criterio di Tsai-Hill per una lamina ortotropa in stato piano di tensione, che è il caso di interesse nello studio dei materiali compositi.
- Si devono fare alcune osservazioni su questo criterio. Innanzitutto, si ha adesso una sola condizione in luogo di cinque; si può dunque tracciare la superficie limite nello spazio delle tensioni.

261



## Il criterio di Tsai-Hill

- Il grafico a lato presenta questa superficie, tracciata nel riferimento di ortotropia, per il composito in vetro-epoxy già utilizzato negli esempi precedenti (pagina 252).
- Il criterio è dunque ben interattivo, prevede cioè l'interazione tra i meccanismi di rottura, almeno a livello macroscopico, ma fenomenologico, non è capace cioè di determinare la causa della crisi, il meccanismo di rottura.



- In secondo luogo, l'equazione precedente determina la condizione limite; quindi uno stato ammissibile di tensione è quello in cui il primo membro dell'equazione precedente assume un valore inferiore ad 1.

262



## Il criterio di Tsai-Hill

- Infine, ed è il problema principale del criterio di Tsai-Hill, non si è fatta alcuna distinzione tra la resistenza alla trazione e quella alla compressione, che come si è visto sono in genere differenti.
- Questo inconveniente è insito nel criterio di Hill, che all'origine era concepito per materiali metallici e cercava di cogliere il momento della crisi elasto-plastica; in quel contesto, la resistenza non dipende dal segno delle tensioni.
- La superficie del grafico precedente è dunque valida, a rigore, solo laddove le tensioni sono di trazione, altrove deve essere sostituita con una superficie tracciata prendendo in conto le caratteristiche di resistenza a compressione.
- Ancora una volta, utilizzando come in precedenza la formula di rotazione delle tensioni, pagina 250, si ottiene l'espressione del criterio in un riferimento qualsiasi:

## Il criterio di Tsai-Hill

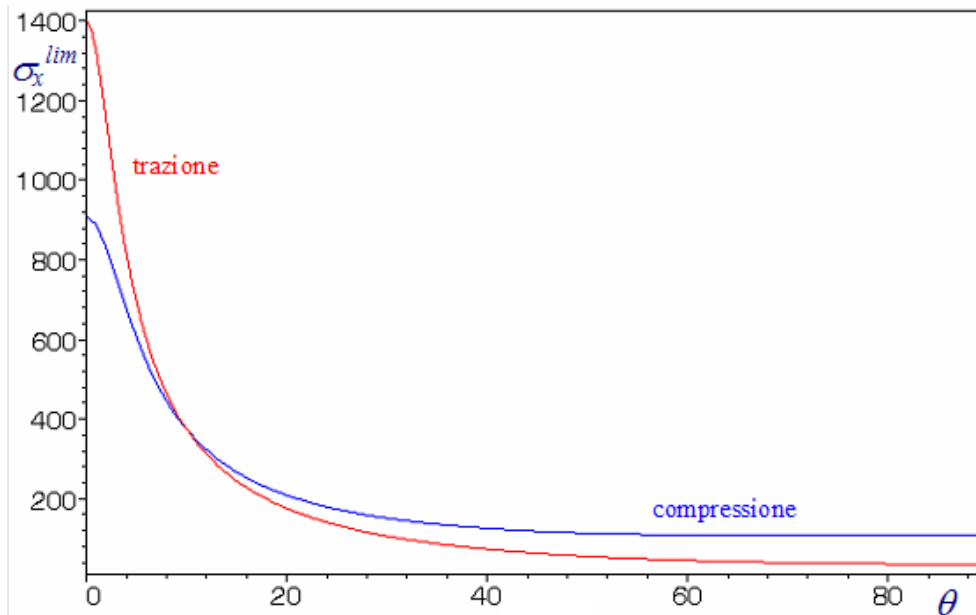
$$\left( \frac{c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y - 2cs \sigma_s}{X} \right)^2 + \left( \frac{s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y + 2cs \sigma_s}{Y} \right)^2 - \frac{(c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y - 2cs \sigma_s)(s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y + 2cs \sigma_s)}{X^2} + \left[ \frac{cs \sigma_x - cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s}{S} \right]^2 \leq 1.$$

- Infine, nel caso, come in precedenza, di uno stato di tensione monoassiale variabile con l'orientazione, si ottiene la curva limite

$$\sigma_x^2 \left[ \frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \right] = 1.$$

- Di seguito, si riportano le curve limite, per trazione e compressione, date dall'equazione sopra nel caso del composito in vetro-epoxy già trattato.

## Il criterio di Tsai-Hill

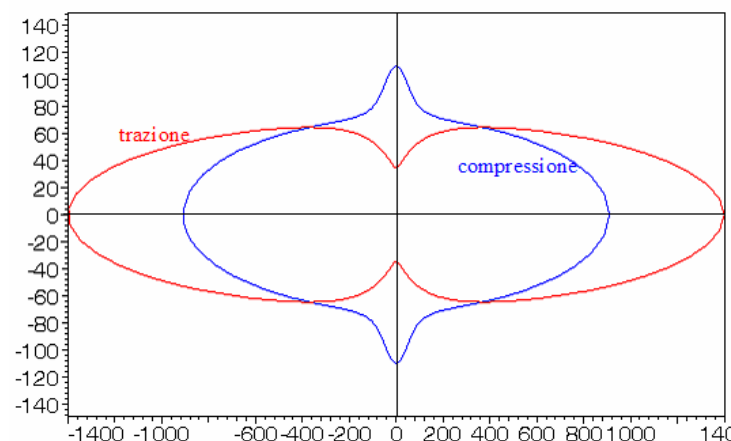


265



## Il criterio di Tsai-Hill

- Il diagramma seguente presenta le stesse curve, ma in grafico direzionale.

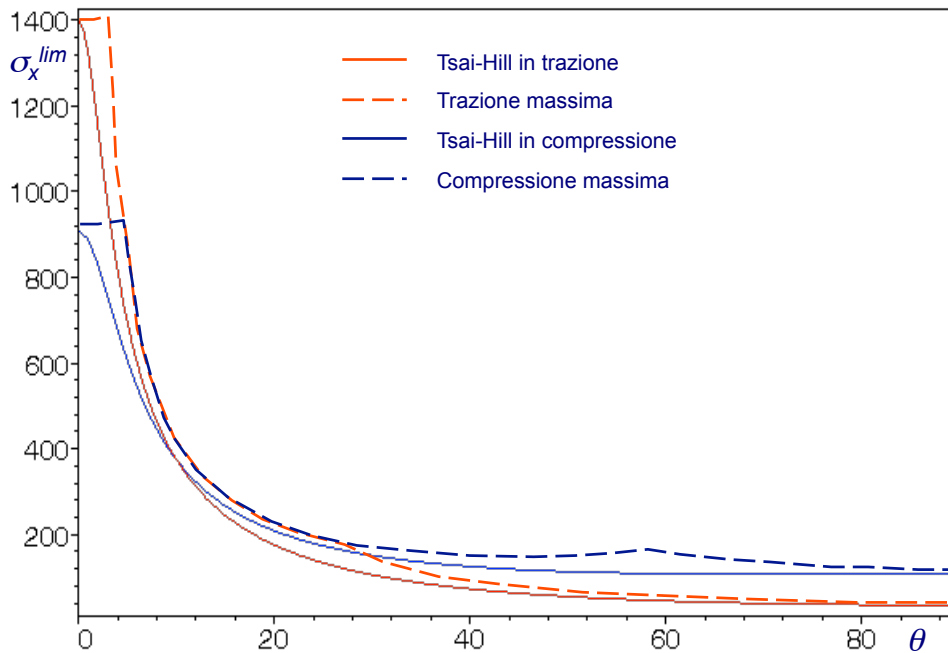


- Infine, si riporta il confronto tra il criterio di Hill e quello della tensione massima, per il caso in esame; si nota la potenza del criterio di Hill, che riesce, con una sola curva, a rappresentare tutti i casi del criterio della tensione massima.

266



## Il criterio di Tsai-Hill



267



## Il criterio di Hoffmann

- Il criterio di Hoffmann (1967) è una generalizzazione del criterio di Hill, in cui si prende in conto la differenza di resistenza in trazione e in compressione.
- La condizione di ammissibilità del campo delle tensioni per il criterio di Hoffmann si scrive come segue

$$C_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\sigma_4^2 + C_8\sigma_5^2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1.$$

- Le 9 costanti  $C_i$  sono determinate in base alle 9 resistenze nelle direzioni di ortotropia,  $X_t, X_c, Y_t, Y_c, Z_t, Z_c, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$ , con un procedimento analogo a quello visto per il criterio di Tsai-Hill.
- Si ottengono le seguenti relazioni:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right], \quad C_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right],$$

268



## Il criterio di Hoffmann

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right],$$

$$C_4 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad C_5 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad C_6 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c},$$

$$C_7 = \frac{1}{S_{yz}^2}, \quad C_8 = \frac{1}{S_{xz}^2}, \quad C_9 = \frac{1}{S_{xy}^2}.$$

- Nel caso di stato piano di tensione, la condizione si riduce a

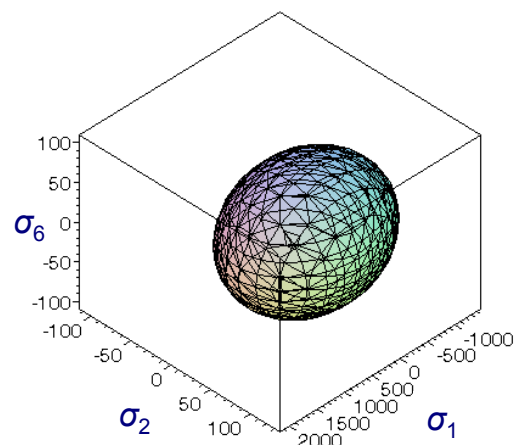
$$C_1 \sigma_2^2 + C_2 \sigma_1^2 + C_3 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4 \sigma_1 + C_5 \sigma_2 + C_9 \sigma_6^2 \leq 1.$$

- Quindi, per una lamina ( $Z_t=Y_t$ ,  $Z_c=Y_c$ ,  $S_{xy}=S$ ) si ottiene:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1.$$

## Il criterio di Hoffmann

- L'equazione precedente definisce la superficie limite di Hoffmann nello spazio delle tensioni, nel riferimento di ortotropia.
- Nel caso di uguale resistenza a trazione e compressione, si verifica immediatamente che il criterio di Hoffmann coincide con quello di Tsai-Hill.
- I termini che sono lineari nelle componenti di tensione servono a rappresentare una diversa resistenza in trazione e compressione, e spostano la superficie limite, che è un'ellissoide, nello spazio delle tensioni.
- La figura seguente rappresenta la superficie limite nel caso del composito in vetro-epoxy già più volte visto.





## Il criterio di Hoffmann

- La superficie limite è un ellissoide simmetrico rispetto al piano  $\sigma_6=0$ , il cui centro si trova in corrispondenza del punto

$$\sigma_1 = \frac{X_t + X_c}{2} + \frac{Y_t + Y_c}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{Y_t + Y_c}{2} + \frac{(X_t + X_c)Y_t Y_c}{4X_t X_c}, \quad \sigma_6 = 0.$$

- L'angolo che il primo asse dell'ellissoide forma con l'asse  $x_1$  è

$$\beta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left( \frac{Y_t Y_c}{X_t X_c} - 1 \right).$$

- Il criterio di Hoffmann è, da un punto di vista del calcolo, il più semplice da utilizzare, soprattutto se si considerano procedure automatiche di calcolo.

## Il criterio di Tsai-Wu

- Tsai e Wu (1971) hanno proposto un criterio tensoriale per i materiali ortotropi, in cui il numero dei parametri di resistenza è superiore a quello dei criteri precedenti, allo scopo di meglio interpolare i dati dell'esperienza.
- In questo criterio, si introducono due tensori di resistenza,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{F}$ , il primo di ordine 2 e il secondo di ordine 4. Questi tensori hanno le simmetrie dell'elasticità.
- Il criterio di resistenza, scritto nel riferimento di ortotropia e in notazione di Voigt, è il seguente:

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i, h, k = 1, \dots, 6.$$

- Nel caso di una lamina in stato piano di tensione, la condizione qui sopra si riduce a

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i, h, k = 1, 2, 6 \quad \rightarrow$$

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 \leq 1.$$

## Il criterio di Tsai-Wu

- Vale, per i termini lineari e la forma della superficie limite, quanto già osservato nel criterio di Hoffmann.
- I parametri  $f_i$  e  $F_{ij}$  si determinano in modo analogo a quanto fatto nei criteri precedenti.
- Se  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_i = 0$  per  $i=2,6$ , allora il criterio si riduce a

$$f_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1.$$

- Allo stato limite,  $\sigma_1$  diventa  $X_t$  se la tensione è di trazione,  $X_c$  se di compressione; considerando questi due casi distinti, si ottengono dunque le due relazioni

$$f_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_c X_t}.$$

- In modo analogo, se  $\sigma_2 \neq 0$ ,  $\sigma_i = 0$  per  $i=1,6$ , si ottiene

$$f_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_c Y_t}.$$

## Il criterio di Tsai-Wu

- Se poi è  $\sigma_6 \neq 0$ ,  $\sigma_i = 0$  per  $i=1,2$ , e considerando che non c'è differenza di resistenza con il segno della tensione a taglio, si ottiene

$$f_6 = 0, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}.$$

- La determinazione dell'ultimo termine  $F_{12}$  è più delicata: non si dispone di ulteriori tests monoassiali e dunque deve essere ricavato tramite un test biassiale in cui  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ .
- Ora, non soltanto i tests biassiali sono più difficili da essere eseguiti, ma di questi tests ne esiste una infinità diversa, per il valore relativo delle due tensioni.
- Se ad esempio si prende uno stato di tensione biassiale con  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , si ottiene la condizione

$$(f_1 + f_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1.$$

## Il criterio di Tsai-Wu

- Utilizzando le espressioni appena trovate per gli altri parametri di resistenza, si ottiene dunque

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right].$$

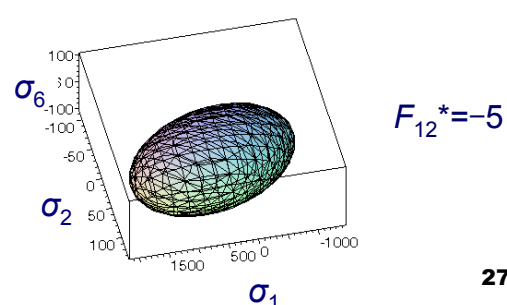
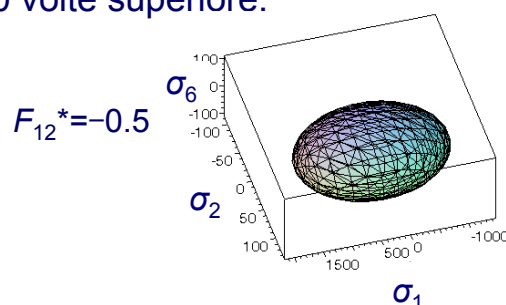
- Quindi, il valore di  $F_{12}$  dipende non soltanto dal valore degli altri parametri di resistenza, ma anche dal livello di tensione  $\sigma$  con cui si produce la rottura biassiale.
- Diversi autori considerano che il termine  $F_{12}$  ha scarsa importanza sul risultato finale e addirittura, propongono semplicemente di porlo uguale a zero. Altri hanno mostrato sperimentalmente che questo termine produce una piccola variazione dei risultati anche quando sia variato di un ordine di grandezza.
- Ad ogni modo, il criterio di Tsai-Wu viene scritto in genere nel modo seguente:

## Il criterio di Tsai-Wu

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} \leq 1,$$

con  $F_{12}^* = F_{12} X_t X_c$ .

- Si osserva immediatamente che se  $F_{12}^* = -1/2$ , il criterio di Tsai-Wu coincide con quello di Hoffmann, che quindi ne è un caso particolare. Se inoltre le resistenze a trazione e compressione sono uguali, allora Tsai-Wu coincide con Tsai-Hill.
- A titolo di esempio, si riportano le superfici limite per il caso più volte trattato del composito vetro-epoxy, per i valori  $F_{12}^* = -1/2$  e  $-5$ , cioè 10 volte superiore.



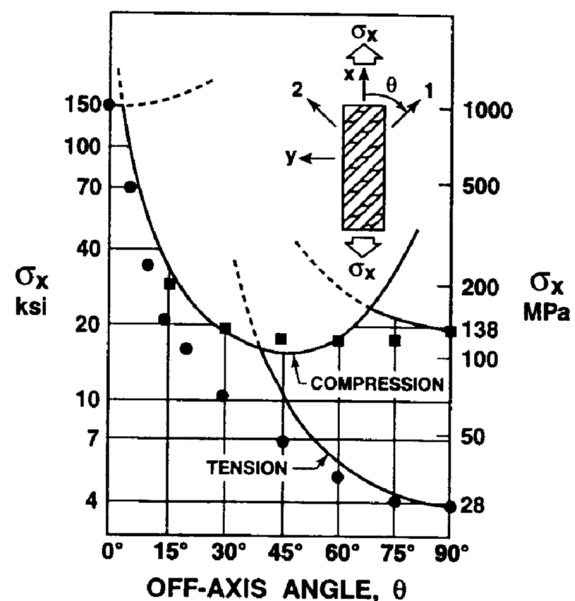
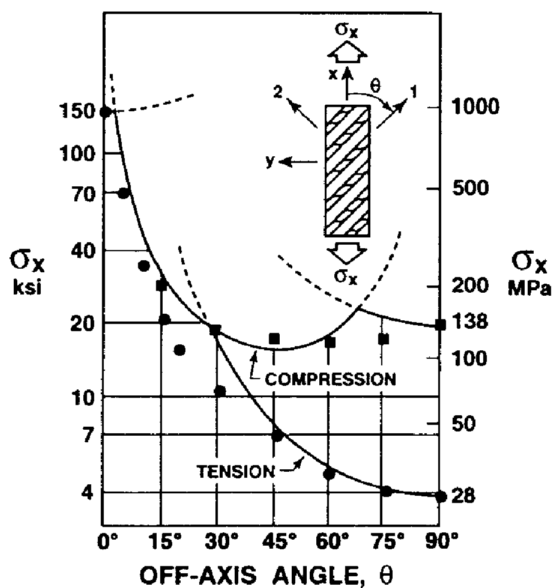
## Confronti con i dati dell'esperienza

- Si riportano di seguito alcuni grafici che riguardano il caso trattato di uno stato monoassiale di tensione ad orientazione variabile, in cui certi dati dell'esperienza sono confrontati con le predizioni fatte tramite uno dei criteri passati in rassegna.
- I dati, tratti dal libro di Jones, si riferiscono ad una campagna di tests condotta da Tsai principalmente su compositi in vetro-epoxy; i dati caratteristici sono quelli riportati nella tabella a pagina 247, a eccezione del parametro  $S$  che vale 0.055 Gpa.
- Nel confronto dei dati sperimentali con i criteri della tensione e della deformazione massima, si nota che le "cuspidi" nelle curve teoriche in realtà non trovano riscontro nei dati sperimentali, che seguono un andamento più regolare.
- Questo è interpretato da alcuni come una prova del fatto che esiste una interazione tra i modi di rottura.

## Confronti con i dati dell'esperienza

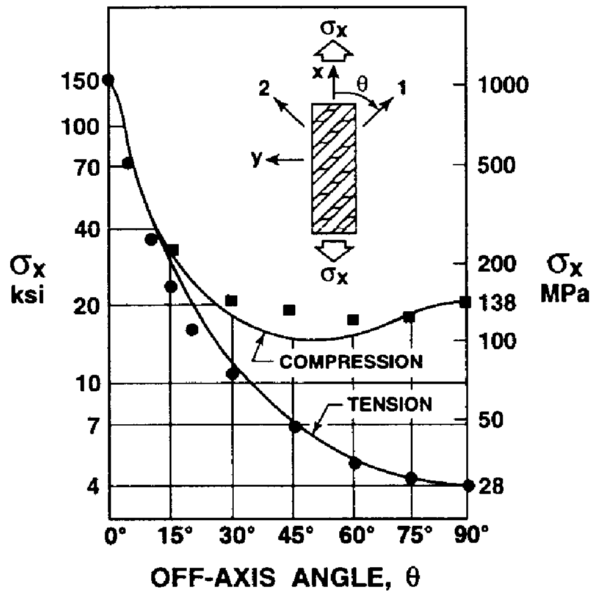
Criterio della tensione massima

Criterio della deformazione massima

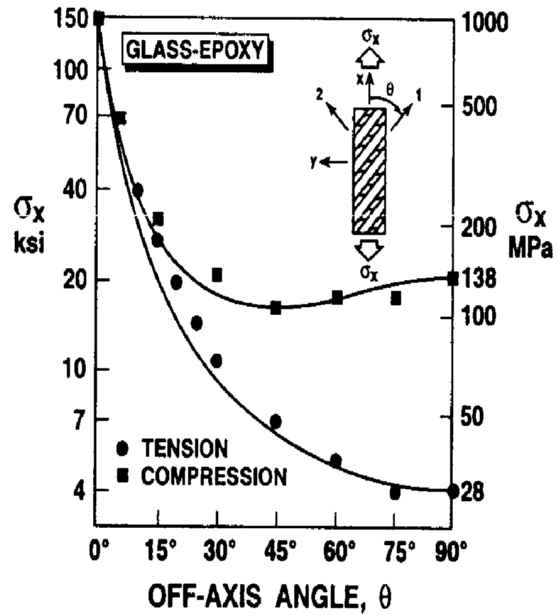


## Confronti con i dati dell'esperienza

Criterio di Tsai-Hill

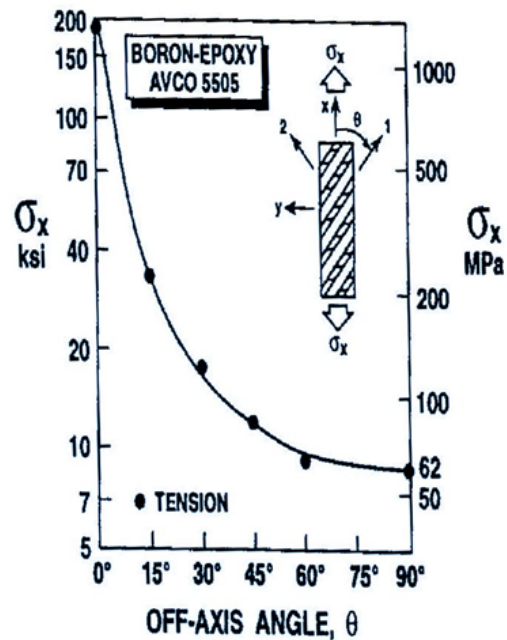
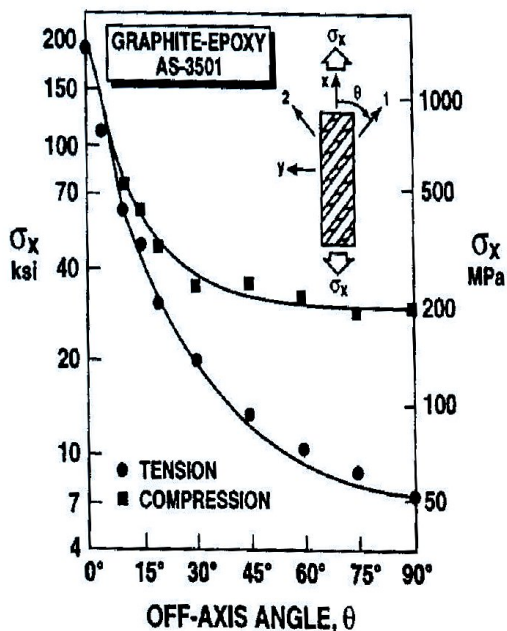


Criterio di Hoffmann



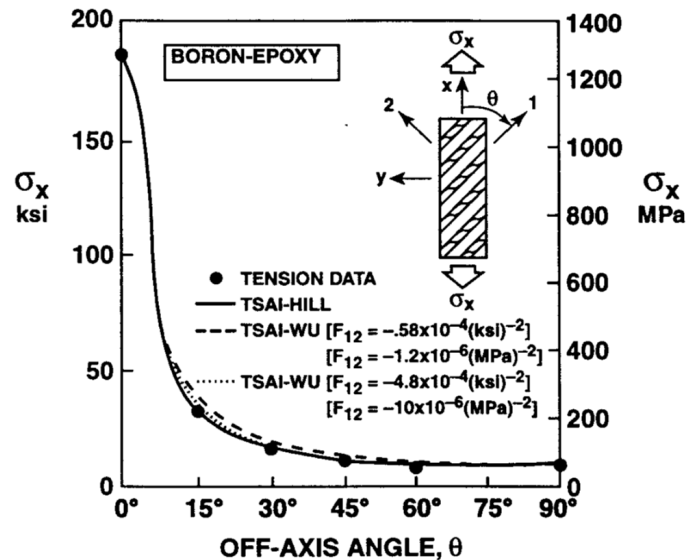
## Confronti con i dati dell'esperienza

- I grafici che seguono sono relativi al criterio di Hoffmann, su compositi in carbonio-epoxy e boro-epoxy.



## Confronti con i dati dell'esperienza

- Per terminare, un diagramma che riguarda il criterio di Tsai-Wu, con due valori distinti di  $F_{12}$ , e il confronto con i dati dell'esperienza su un composito in boro-epoxy e con i risultati del criterio di Tsai-Hill.
- Come si può notare, i risultati delle tre curve sono molto vicini tra loro e ai dati sperimentali.



281



## Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

- Diamo alcuni cenni, adesso, ai modelli utilizzati per predire la resistenza di una lamina in funzione dei parametri di resistenza delle fasi; in altre parole, ci occupiamo brevemente di omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza.
- In particolare, ci limiteremo a dare alcuni cenni all'omogeneizzazione della resistenza alla trazione in direzione delle fibre; si rimanda alla letteratura specializzata per un approfondimento della materia.
- Il modello che consideriamo è il seguente:
  - fibre tutte della stessa resistenza
  - rottura fragile delle fibre
  - comportamento elastico lineare di fibre e matrice
  - deformazione limite delle fibre inferiore a quella della matrice
- Se la frazione volumica delle fibre,  $V_f$ , è sufficientemente grande, la crisi del composito si ha quando le fibre sono deformate al loro valore limite:

282



## Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

$$\varepsilon_{\max}^l = \varepsilon_{\max}^f \cdot$$

- Poiché le fibre hanno una deformazione limite inferiore a quella della matrice, non possono dilatarsi quanto quest'ultima e costituiscono il lato debole del composito.
- Per l'ipotesi dell'aderenza, infatti, la deformazione delle fibre e della matrice è la medesima; questo peraltro comporta che la resistenza del composito in direzione delle fibre è data ancora dalla legge delle miscele, come si evince facilmente:

$$\sigma_{\max}^l = V_f \sigma_{\max}^f + (1 - V_f) \sigma_{\varepsilon}^m,$$

dove  $\sigma_{\varepsilon}^m$  è la tensione nella matrice in corrispondenza del valore limite di deformazione nelle fibre.

- Naturalmente, perché il rinforzo sia efficace, si desidera che sia

$$\sigma_{\max}^l > \sigma_{\max}^m.$$

## Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

- Le due equazioni precedenti permettono di trovare il valore minimo di  $V_f$  per avere un rinforzo della matrice da parte delle fibre:

$$V_f^{crit} = \frac{\sigma_{\max}^m - \sigma_{\varepsilon}^m}{\sigma_{\max}^f - \sigma_{\varepsilon}^m}.$$

- Per valori inferiori della frazione volumica, la resistenza è dominata dalla matrice: le fibre sono trascinate dalla matrice nella sua deformazione e possono quindi rompersi per valori relativamente piccoli del carico applicato.
- Se tutte le fibre si rompono allo stesso momento, il composito avrà ancora una capacità di far fronte al carico applicato se

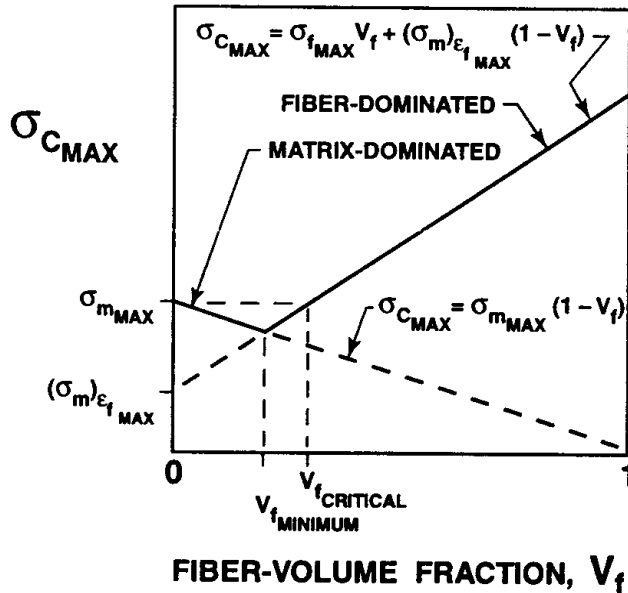
$$\sigma_{\max}^l < (1 - V_f) \sigma_{\max}^m.$$

- In questo caso, solo la matrice, ovviamente, è attiva.
- In definitiva, il composito si frattura per rottura delle fibre se

## Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

$$\sigma_{\max}^I = V_f \sigma_{\max}^f + (1 - V_f) \sigma_{\epsilon}^m \geq (1 - V_f) \sigma_{\max}^m$$

- Da questa condizione si evince il valore minimo di  $V_f$  per avere una rottura del composito provocata dalla rottura delle fibre:



$$V_f^{\min} = \frac{\sigma_{\max}^m - \sigma_{\epsilon}^m}{\sigma_{\max}^f + \sigma_{\max}^m - \sigma_{\epsilon}^m}$$

- Il comportamento è meglio compreso grazie al grafico a lato (fonte: Jones): se  $V_f < V_f^{\min}$ , è la matrice che governa la rottura, e il valore limite resta inferiore a quello della matrice fino a  $V_f^{\text{crit}}$ ; solo per valori superiori si ha un rinforzo efficace da parte delle fibre.

## Capitolo 5

### Teoria classica dei laminati

<input type="checkbox"/> Introduzione	287
<input type="checkbox"/> Il modello meccanico	291
<input type="checkbox"/> La legge fondamentale dei laminati	298
<input type="checkbox"/> I tensori normalizzati	317
<input type="checkbox"/> Inversione della legge fondamentale dei laminati	321
<input type="checkbox"/> Laminati accoppiati e disaccoppiati	325
<input type="checkbox"/> I moduli elastici del monostrato equivalente	330
<input type="checkbox"/> Il comportamento igro-termo-elastico	334
<input type="checkbox"/> Il caso dei laminati a strati identici	350
<input type="checkbox"/> L'utilizzo del metodo polare	355



## Introduzione

- Le lamine in composito non sono mai utilizzate da sole, ma sotto forma di laminati, ossia in piastre ottenute sovrapponendo più strati, generalmente identici.
- Le caratteristiche meccaniche di rigidità e resistenza degli strati comunemente impiegati rendono infatti impossibile l'utilizzo di lamine singole, e questo principalmente a causa di:
  - una troppo forte anisotropia della risposta elastica, almeno per le lamine a rinforzo unidirezionale;
  - una troppo piccola resistenza in direzione trasversale;
  - un troppo piccolo spessore ( $\approx 0.125$  mm per i preimpregnati in carbonio), che rende da un lato la rigidità, specialmente quella in flessione, troppo piccola e dall'altro un forte pericolo di instabilità a compressione, nelle due direzioni.
- Le lamine vengono dunque utilizzate per creare laminati, sovrapponendo un numero sufficiente di strati, secondo i bisogni progettuali.

## Introduzione

- Questa operazione permette di creare delle piastre le cui caratteristiche meccaniche, di rigidità e resistenza, possono essere oggetto di progettazione.
- In effetti, mentre per una piastra in materiale omogeneo il solo parametro progettuale è lo spessore, una volta scelto il materiale, un laminato ha delle caratteristiche meccaniche finali che dipendono sia da quelle degli strati che lo compongono, sia dal numero di questi strati e soprattutto dalla loro orientazione relativa.
- L'utilizzo di un laminato necessita dunque di una fase progettuale e di verifica.
- La fase progettuale deve comprendere normalmente la progettazione della resistenza e della rigidità. Bisogna specificare che questo comporta non solo la determinazione di requisiti minimi di resistenza e rigidità, secondo i bisogni progettuali, ma anche il tipo di risposta elastica (ortotropa, isotropa etc.).
- Un laminato è in definitiva un *materiale complesso completamente da progettare*.

## Introduzione

- La teoria classica dei laminati risponde a questo scopo; il suo obiettivo è infatti quello di fornire un modello matematico capace di sintetizzare la risposta elastica di un laminato come se questo fosse costituito semplicemente da un solo strato equivalente.
- Si tratta in definitiva, come già anticipato, di un processo di omogeneizzazione, sullo spessore della piastra, delle caratteristiche meccaniche macroscopiche di rigidezza.
- I risultati della teoria classica sono condensati in una legge, che formalizza la risposta elastica della piastra monostrato equivalente del laminato, ed avente lo stesso spessore totale.
- Si deve precisare sin da ora che la teoria classica dei laminati è soltanto un modello matematico, che si basa sulla teoria classica delle piastre inflesse, e che come questa è soggetta a giuste critiche, ancora più importanti nel caso dei laminati per una serie di fattori dipendenti dall'anisotropia e soprattutto dall'eterogeneità (sovrapposizione di strati).

## Introduzione

- Pur non fornendo tutti i risultati meccanici di rilievo (soprattutto le tensioni e deformazioni fuori piano), essa è utile in fase di progetto, ed è indispensabile nella predizione delle caratteristiche elastiche globali del laminato.
- Nel seguito, viene innanzitutto introdotto il modello meccanico e quindi viene ricavata la legge fondamentale dei laminati.
- In un secondo tempo, si esamina il comportamento igro-termo-elastico, sempre nel quadro della teoria classica dei laminati, e dopo si considera il caso particolare di laminati a strati identici.
- Si introduce infine l'uso della rappresentazione polare nella teoria classica dei laminati perché questo permette di meglio comprendere alcuni aspetti progettuali.
- Si è detto che la teoria classica trova la sua migliore applicazione nella fase di progetto. A tutt'oggi, la progettazione dei laminati è argomento di ricerca, in quanto non si dispone ancora di un unico metodo capace di rispondere a tutti i bisogni progettuali. A questo aspetto sono dedicati i capitoli che seguono.

## Il modello meccanico

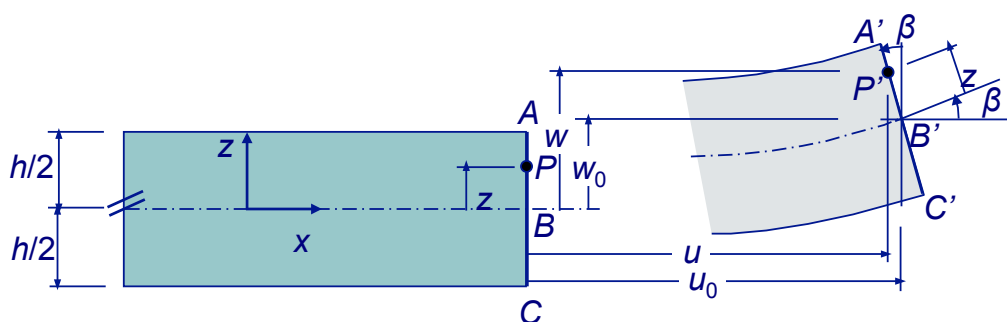
- La teoria classica dei laminati si basa sulle seguenti ipotesi:
  - aderenza perfetta tra gli strati;
  - comportamento elastico lineare degli strati costituenti;
  - piccoli spostamenti, rotazioni e deformazioni;
  - spessore totale piccolo;
  - modello cinematico di Kirchhoff.
- Si ricorda che il modello di Kirchhoff comporta tre ipotesi che riguardano la deformazione di ogni segmento retto ortogonale al piano medio, segmento che in questo modello si postula rimanere:
  - rettilineo;
  - ortogonale al piano;
  - di lunghezza inalterata.
- La scelta di questo modello cinematico ha, come ben noto, delle conseguenze meccaniche importanti; in particolare, come vedremo, non si può risalire alle deformazioni da taglio, sullo spessore della piastra.

291



## Il modello meccanico

- Consideriamo dunque, tramite l'aiuto della figura, quali sono nel piano  $x$ - $z$  le conseguenze delle ipotesi assunte (nel piano  $y$ - $z$  si ha una situazione analoga). Si cerca lo spostamento  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  di un punto qualsiasi  $P$ , di coordinate  $(x, y, z)$ .



- Il punto  $B$  ( $z=0$ ) si porta in  $B'$ , con uno spostamento verticale  $w_0$ ,  $u_0$  in direzione  $x$  e  $v_0$  in direzione  $y$ .

292



## Il modello meccanico

- Lo spostamento in direzione  $x$  di un punto  $P$ , situato sulla verticale di  $B$  a distanza  $z$  dal piano medio, sarà

$$u = u_0 - z \sin \beta,$$

dove  $\beta$  è l'angolo che la normale in  $B'$  alla superficie media forma con l'asse  $z$ . Da notare che la distanza di  $P'$  dalla superficie media è ancora  $z$ , per l'ipotesi assunta di indeformabilità del segmento verticale.

- Lo spostamento di  $P$  in direzione  $z$  sarà invece

$$w = w_0 + z (\cos \beta - 1).$$

- Poiché per ipotesi il segmento normale al piano medio resta rettilineo e ortogonale alla superficie media deformata, l'angolo  $\beta$  è anche l'angolo che il piano tangente alla superficie media forma con l'asse  $x$ .

## Il modello meccanico

- Infine, essendo per ipotesi gli spostamenti e le rotazioni piccoli, è

$$\beta \cong \sin \beta \cong \tan \beta = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \cos \beta \cong 1.$$

- Ne consegue che nelle ipotesi assunte è

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x},$$

e analogamente

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y},$$

mentre per lo spostamento verticale si ottiene

$$w = w_0 \quad \forall z.$$

- Il campo di spostamenti di un punto  $P$  di coordinate  $(x, y, z)$  è dunque

## Il modello meccanico

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \\ v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \\ w_0(x,y) \end{Bmatrix}$$

- Da notare che il campo di spostamenti è lineare in  $z$ .
- Le deformazioni si calcolano facilmente: dall'ipotesi che queste sono infinitesime si trae per il campo di deformazioni

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right] - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y},$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right] = 0,$$

## Il modello meccanico

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right] = 0,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} = 0.$$

- La conseguenza delle assunzioni sul comportamento cinematico è dunque che *il campo di deformazioni è piano*.
- Se si indica con  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  il tensore delle piccole deformazioni del piano medio,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix},$$

## Il modello meccanico

e con  $\mathbf{\kappa}$  l'opposto del tensore delle curvatures del piano medio, assimilabile all'hessiano della funzione  $w_0(x,y)$ , grazie all'ipotesi di piccoli spostamenti e rotazioni,

$$\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix},$$

si ottiene finalmente, per il tensore delle deformazioni,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + Z \mathbf{K} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix}.$$

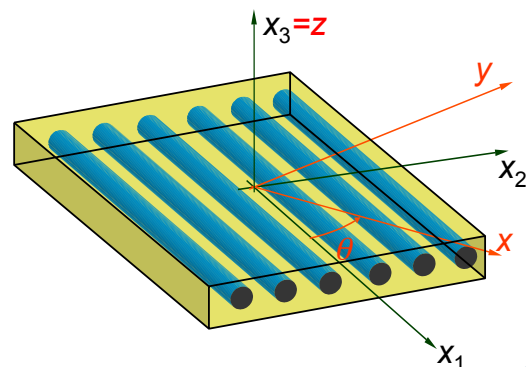
- Si nota che i vari tensori piani sono stati scritti in notazione di Voigt e ridotti quindi a vettori colonna, come è la consuetudine.

297



## La legge fondamentale dei laminati

- La conoscenza del campo di deformazioni permette di risalire, tramite il calcolo delle tensioni, alle risultanti delle azioni interne, legando quindi queste ultime alle deformazioni. Questo è lo scopo principale della teoria classica dei laminati.
- Abbiamo visto che, nel modello meccanico assunto, il campo di deformazioni è piano. Ci prefiggiamo adesso, in primo luogo, di passare al campo delle tensioni.
- Questo passaggio è solo in apparenza immediato, mentre in realtà necessita una certa attenzione.
- Innanzitutto, fissiamo la situazione: si devono calcolare le tensioni in una lamina come in figura, considerando che deformazioni e tensioni devono essere note, in generale, nel riferimento qualsiasi  $\{x, y, z\}$ , nel quale le indicheremo con un apice ( $\varepsilon'_i$  e  $\sigma'_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ ).



298



## La legge fondamentale dei laminati

- Se si considera un materiale qualunque, a seguito del fatto che si ha uno stato di deformazione piano, le tensioni nel riferimento qualunque, saranno del tipo

$$\sigma'_i = C'_{1i}\varepsilon'_1 + C'_{2i}\varepsilon'_2 + C'_{6i}\varepsilon'_6, \quad i = 1, \dots, 6.$$

- Quindi, lo stato di tensione non è, in generale, piano. Se però si considera la situazione reale, dei materiali a rinforzo direzionale in cui, come da figura, il comportamento è isotropo trasverso, con direzione  $x_1$  dell'asse ortogonale al piano di isotropia, per i quali

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

299



## La legge fondamentale dei laminati

allora si riconosce, seguendo le procedure viste per una rotazione di  $\theta$  attorno all'asse  $x_3$  della matrice  $[C]$ , che

$$\begin{aligned} C'_{14} = C'_{24} = C'_{64} = C'_{15} = C'_{25} = C'_{65} &= 0, \\ C'_{13} = C_{12}c^2 + C_{23}s^2, \quad C'_{23} = C_{12}s^2 + C_{23}c^2, \quad C'_{63} &= -sc(C_{12} - C_{23}), \\ s = \sin\theta, \quad c = \cos\theta. \end{aligned}$$

- La prima linea qui sopra è vera anche per il caso più generale di lamina ortotropa con asse  $x_3$  di ortotropia.
- Ne consegue

$$\sigma'_3 \neq 0, \quad \sigma'_4 = \sigma'_5 = 0.$$

- In altre parole, mentre lo stato di deformazione è piano, quello di tensione non lo è; in generale infatti

$$\sigma'_3 = (C_{12}c^2 + C_{23}s^2)\varepsilon'_1 + (C_{12}s^2 + C_{23}c^2)\varepsilon'_2 - sc(C_{12} - C_{23})\varepsilon'_6.$$

300



## La legge fondamentale dei laminati

- A stretto rigore, quindi, non è possibile utilizzare i risultati visti in precedenza che riguardano il legame costitutivo per uno stato piano di tensione.
- Tuttavia, si ammette ancora che questo sia possibile, in altre parole si considera che sia  $\sigma'_3=0$ .
- Alcuni autori, per esempio Lekhnitskii, Jones, Pedersen, ammettono semplicemente questo fatto come ipotesi di base della teoria classica dei laminati.
- Una giustificazione di questa assunzione, può tuttavia essere trovata in quello che normalmente si ammette anche nella teoria classica delle piastre: sulle superfici esterne della piastra, il valore della tensione  $\sigma'_3$  è pari a quello delle pressioni di contatto, che generalmente sono inferiori, per i carichi distribuiti ordinari, di uno o due ordini di grandezza rispetto alle tensioni ammissibili, a cui sono prossime le componenti nel piano del tensore degli sforzi.

## La legge fondamentale dei laminati

- Essendo poi lo spessore piccolo, se le tensioni variano con continuità, è lecito ammettere che il valore assoluto di  $\sigma'_3$  resti limitato e quindi trascurabile rispetto a quello delle tensioni nel piano.
- Questo argomento è classico in meccanica delle piastre; ovviamente, questa approssimazione non può essere considerata valida laddove si abbiano stati di tensione triassiali significativi, come è il caso delle zone di appoggio o incastro e quelle dei carichi concentrati.
- Un commento ulteriore riguarda la plausibilità meccanica delle assunzioni fatte: in effetti, queste conducono per i laminati a due conseguenze importanti.
- La prima, riguarda le tensioni da taglio in direzione  $x_3$ ,  $\sigma'_4$  e  $\sigma'_5$ : essendo queste nulle, è in principio impossibile l'equilibrio di un elemento di piastra sotto l'azione di carichi ortogonali al piano medio.



## La legge fondamentale dei laminati

- Questo fatto è ben noto anche nella teoria classica delle piastre e si sana in quel caso con il ricorso alle equazioni di equilibrio.
- La seconda, si osserva direttamente dall'ultima equazione: la tensione  $\sigma'_3$  è discontinua all'interfaccia degli strati. Questo è un paradosso che deriva dal modello cinematico adottato e che rende in principio più delicata l'ammissibilità dell'ipotesi che sia  $\sigma'_3$  trascurabile.
- Entrambi questi paradossi sono risolti, per i laminati, facendo ricorso a teorie di ordine superiore.
- Queste indicazioni servono, insieme ad altre, a meglio comprendere il campo di applicazione della teoria classica dei laminati, che come già detto va vista soprattutto come uno strumento in grado di predire il comportamento elastico globale del laminato, piuttosto che come una teoria capace di calcolare con finezza appropriata i veri campi di sforzo e deformazione nel continuo stratificato.

## La legge fondamentale dei laminati

- Ammettendo dunque che lo stato di tensione sia piano, si può utilizzare come legame costitutivo quello già introdotto,

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

con le componenti  $Q_{ij}$  funzione delle  $C_{ij}$ , vedere pagina 155.

- Nel riferimento qualunque  $\{x, y, z\}$ , sarà

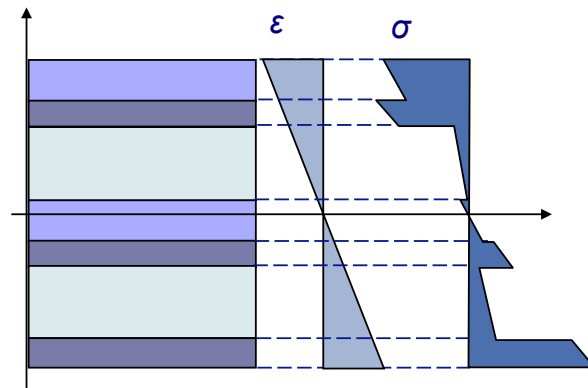
$$\{\sigma'\} = [Q']\{\varepsilon'\},$$

con le componenti della matrice  $[Q]'$  date a pagina 161.

- Da ricordarsi che in un riferimento qualunque, la matrice  $[Q]'$  non è in generale ortotropa, in altre parole, la lamina si comporta come un materiale anisotropo.

## La legge fondamentale dei laminati

- Un'ulteriore osservazione è la seguente: nel modello adottato, il campo di deformazione è unico per tutto il laminato, ossia vi è continuità di deformazione tra uno strato e l'altro.
- Così non è per le tensioni; infatti, dalle formule della pagina precedente si osserva che, essendo in generale gli strati differenti e diversamente orientati, questi hanno rigidità diverse nelle stesse direzioni e quindi sono diversamente sollecitati per uno stesso livello di deformazione.
- Un esempio, puramente qualitativo, di ciò che accade è quello in figura, che mette in evidenza l'esistenza di discontinuità, che possono essere anche forti, delle tensioni all'interfaccia degli strati.



305



## La legge fondamentale dei laminati

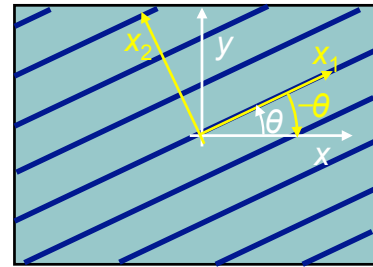
- Nel calcolo della matrice  $[Q]'$  con le formule di pagina 161 si deve tuttavia fare un'ulteriore attenzione.
- Infatti, quelle formule permettono il calcolo della matrice di rigidità nel passaggio dal riferimento  $\{x_1, x_2, x_3\}$  al riferimento  $\{x, y, z\}$ , ruotato dell'angolo  $\theta$  in senso trigonometrico.
- Ora, quando si ha a che fare con un laminato, ciò che naturalmente si fa è di fissare un riferimento unico, proprio al laminato, in cui si esprimeranno tutte le grandezze tensoriali e vettoriali di ciascuno strato e della piastra in generale.
- Questo riferimento non coincide necessariamente con il riferimento di ortotropia di tutti gli strati, potendo questi avere una orientazione qualunque.
- In effetti, le proprietà finali del laminato si ottengono proprio per rotazione relativa degli strati, in modo da ottimizzare il comportamento voluto.
- Sia dunque  $\{x, y, z\}$  il riferimento globale del laminato.

306



## La legge fondamentale dei laminati

- Allora la situazione che si presenta d'ordinario è la seguente, vista nel piano  $x$ - $y$ : uno strato che è ruotato dell'angolo  $\theta$  rispetto al riferimento del laminato,  $\{x, y, z\}$ .
- Si deve considerare il fatto che normalmente si conoscono le proprietà elastiche dello strato, in altre parole la matrice  $[Q]$  o i moduli dell'ingegnere che le corrispondono, nel riferimento  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , che chiameremo *materiale* e che coincide con quello di ortotropia, con in genere l'asse  $x_1$  che è l'asse forte, quello disposto lungo le fibre per gli strati a rinforzo unidirezionale.
- Questo implica che il calcolo della matrice  $[Q]'$  si deve effettuare con le formule viste, ma considerando che adesso la rotazione da compiere a partire dal riferimento di ortotropia è  $-\theta$ , e non  $\theta$ .
- Dunque, se si vogliono considerare come angoli di rotazione quelli misurati in senso trigonometrico a partire dal riferimento del laminato



## La legge fondamentale dei laminati

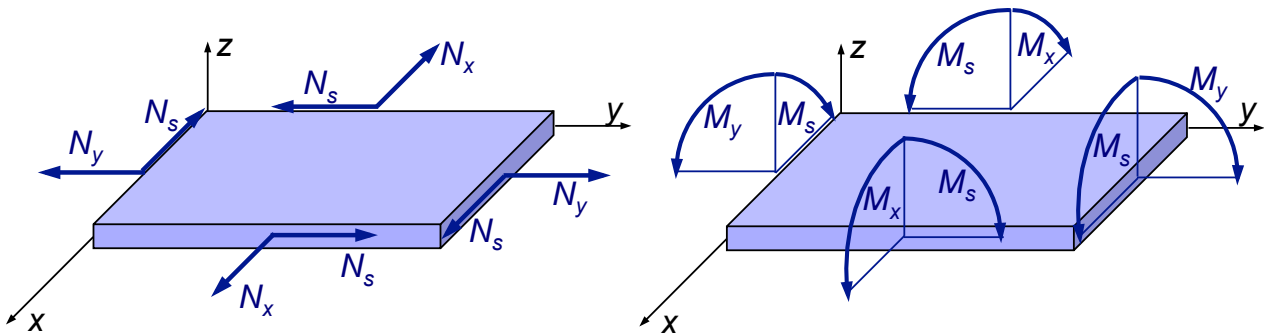
(perché sono questi in effetti gli angoli che si usano per il progetto e l'analisi del laminato) allora nelle formule che danno le componenti di  $[Q]'$ , pagina 161, si deve cambiare il segno delle potenze dispari di  $\sin \theta$ .

- La matrice che dà le caratteristiche elastiche di uno strato ruotato di  $\theta$  in senso trigonometrico rispetto al riferimento del laminato è dunque la seguente:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4s^3c & s^4 \\ sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & 3s^2c^2 - s^4 & -s^3c \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 - 3s^2c^2 & -sc^3 \\ s^4 & 4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}$$

## La legge fondamentale dei laminati

- A questo punto, si può procedere al calcolo delle azioni interne; tenuto conto delle ipotesi fatte e dei loro risultati, in particolare dell'assenza delle tensioni in direzione  $z$ , le sole azioni interne che si possono calcolare con il modello meccanico utilizzato sono le azioni di *membrana* (o di *lastra*) e quelle di *flessione* (o di *piastra*), ossia gli sforzi normali e tangenziali nel piano medio e i momenti flettenti e torcenti del piano medio. Questi sono riassunti in figura.



## La legge fondamentale dei laminati

- Ovviamente, le azioni interne sono forze e momenti per unità di lunghezza.
- Da notare che non tutti gli autori utilizzano la stessa nomenclatura per i momenti flettenti e nemmeno la stessa convenzione sui segni (ad esempio Jones).
- Quella adottata qui è coerente con la definizione stessa di momento flettente o torcente, in altre parole è quella che si ottiene spontaneamente sviluppando i calcoli indicati qui di seguito, nel riferimento adottato (come in Lekhnitskii o Vinson-Sierakowski; Vasiliev e Morozov utilizzano invece un riferimento orientato negativamente).
- La definizione delle azioni interne è classica e immediata: se  $h$  è lo spessore del laminato, allora

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz.$$

- In termini di componenti, utilizzando ancora la notazione di Voigt, è

## La legge fondamentale dei laminati

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s dz \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s z dz \end{Bmatrix}.$$

- Il carattere tensoriale, di tensori del secondo ordine, di **N** e **M** discende direttamente dalla loro definizione.
- Il legame tra le azioni interne e le deformazioni del laminato si ottiene inserendo nelle relazioni sopra il legame costitutivo discusso in precedenza, e svolgendo l'integrazione. Nel far questo, si deve tener conto, ed è un punto essenziale, del fatto che il laminato è composto da più strati, in generale differenti e diversamente orientati rispetto al riferimento globale  $\{x,y,z\}$ .
- L'integrazione deve essere quindi spezzata in tante parti distinte quanti sono gli strati che compongono il laminato e in ciascuna di queste parti si deve prendere in considerazione la rigidità propria allo strato e alla sua orientazione, che chiameremo  $\delta$ .

311



## La legge fondamentale dei laminati

- Dal momento che nel modello adottato il campo di deformazione è unico per tutti gli strati e descritto da due tensori che non dipendono dalla coordinata  $z$ , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\kappa}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz \right] \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned}$$

- Nelle equazioni sopra,  $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$  indica la matrice  $[Q]$  dello strato  $k$  che è ruotato di  $\delta_k$  in senso trigonometrico rispetto al riferimento globale  $\{x,y,z\}$ .

312



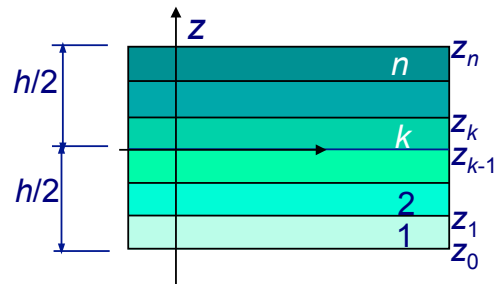
## La legge fondamentale dei laminati

- Al fine di rendere la scrittura più semplice, si è utilizzata la notazione tensoriale invece di quella, più corretta, matriciale usata sinora; così si farà anche nel seguito.
- I limiti di integrazione  $z_{k-1}$  e  $z_k$  sono rispettivamente le quote delle facce inferiore e superiore dello strato  $k$ , secondo lo schema di figura (strati numerati a partire dal basso);  $n$  è il numero totale degli strati.
- Nelle equazioni precedenti si pone

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz,$$

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz,$$

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz.$$



## La legge fondamentale dei laminati

- Essendo i  $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$  indipendenti dalla coordinata  $z$ , si ha che

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \mathbf{Q}_k(\delta_k).$$

- Si ottiene dunque quella che è la *legge fondamentale dei laminati*, che scritta in forma matriciale simbolica è

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$

- Questa è una vera e propria legge costitutiva, che nel quadro delle ipotesi assunte lega le azioni interne al campo di deformazione.

## La legge fondamentale dei laminati

- Questo risultato deve essere adeguatamente commentato.
- In effetti, si vede che

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa},$$

e che

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- Quindi, le azioni di lastra sono legate non solo alle deformazioni del piano medio, ma anche alle curvature di questo; allo stesso modo, i momenti flettenti e torcenti sono legati non solo alle curvature del piano medio, ma anche alle deformazioni di questo.
- In altre parole vi è un accoppiamento tra azioni di lastra e curvature e tra momenti e deformazioni del piano medio e questi accoppiamenti sono descritti dal medesimo tensore  $\mathbf{B}$ , che è appunto denominato *tensore di accoppiamento lastra-piastra* (o *membrana-flessione*).



## La legge fondamentale dei laminati

- Questo effetto è sconosciuto nelle piastre monostrato ed è per la presenza di questo accoppiamento che si è obbligati a trattare insieme il caso di lastra e piastra, spesso presentati in modo distinto nella teoria classica.
- Il tensore  $\mathbf{A}$  è un tensore di rigidità che lega le azioni e le deformazioni di lastra, mentre il tensore  $\mathbf{D}$  lega i momenti con le curvature. Per questo,  $\mathbf{A}$  è detto *tensore di rigidità membranale* e  $\mathbf{D}$  *tensore di rigidità flessionale*.
- Dalla definizione stessa dei tre tensori che descrivono, in rigidità, il comportamento elastico di un laminato, ne discende che, essendo simmetrici i tensori di rigidità degli strati,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T.$$

## I tensori normalizzati

- Nella legge fondamentale dei laminati, i tre tensori **A**, **B** e **D** hanno dimensioni differenti:

$$[\mathbf{A}] = [F/L] \quad (\text{N/m}),$$

$$[\mathbf{B}] = [F] \quad (\text{N}),$$

$$[\mathbf{D}] = [FL] \quad (\text{Nm}).$$

- Di conseguenza, i tre tensori non sono direttamente confrontabili.
- Inoltre, questi tre tensori sono dei tensori di rigidità che descrivono la risposta elastica di un laminato avente uno spessore totale  $h$ .
- Ora, lo scopo principale, già annunciato, della teoria classica, è quello di dare una legge capace di simulare il comportamento del laminato multistrato come se questo fosse costituito da un solo strato, avente lo spessore totale del laminato (è una teoria monostrato).

## I tensori normalizzati

- I tensori sopra introdotti descrivono dunque il comportamento elastico di questo monostrato elasticamente equivalente al laminato.
- Ci si può allora porre il seguente quesito: quali sono le caratteristiche elastiche del materiale fittizio costituente questo monostrato elasticamente equivalente al laminato?
- Dato che ci si è ridotti ad un monostrato, quindi omogeneo, anche se in generale anisotropo, la risposta è immediata, e si trova direttamente nella teoria delle piastre omogenee (per **B** è convenzionale): le caratteristiche elastiche di questo materiale fittizio si trovano a partire dai tensori di rigidità tramite le operazioni seguenti:

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{h}, \quad \mathbf{B}^* = 2 \frac{\mathbf{B}}{h^2}, \quad \mathbf{D}^* = 12 \frac{\mathbf{D}}{h^3}.$$

- Il simbolo \* indica dunque i tensori normalizzati; è facile vedere che i tensori normalizzati hanno tutti le stesse dimensioni, quelle di un modulo  $[FL^{-2}]$ , (MPa), e quindi sono direttamente confrontabili.



## I tensori normalizzati

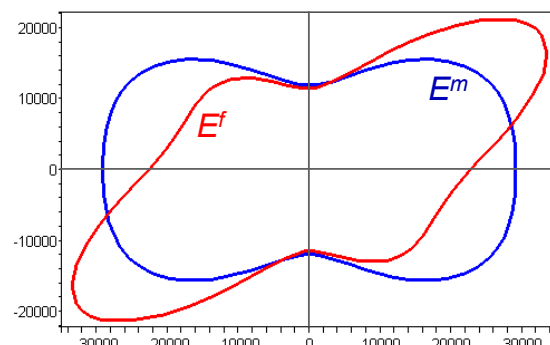
- In effetti, il significato meccanico dei tensori normalizzati è quello di essere dei tensori di elasticità del materiale elastico fittizio costituente il monostrato equivalente.
- Ora, in generale si ha che  $\mathbf{A}^*$  è diverso da  $\mathbf{D}^*$ , il che significa che in realtà è come se il monostrato equivalente fosse costituito da due materiali fittizi distinti, uno per il comportamento di membrana e uno per quello di flessione: i comportamenti di lastra e di piastra sono differenti (questo è vero, ovviamente, anche per l'accoppiamento, ma in quel caso l'interpretazione è più sfuggente).
- In altre parole, si ha in generale a che fare con una piastra che può, ad esempio, essere ortotropa in membrana ed in flessione, ma con assi di ortotropia ruotati; oppure, un laminato può essere isotropo in membrana e completamente anisotropo in flessione e così di seguito, gli esempi possono moltiplicarsi.
- Non solo, ma anche il valore delle componenti di rigidezza dei materiali fittizi sono diversi.

319



## I tensori normalizzati

- Concretamente, questo significa che uno stesso provino ricavato da un laminato e sottoposto a tests di laboratorio, mostrerà dei valori differenti, ad esempio, del modulo di Young equivalente, in un test di flessione ed in uno di trazione.
- Il comportamento elastico di un laminato visto come un corpo equivalente omogeneizzato ad un monostrato è dunque quello di un corpo complesso, che si caratterizza per un accoppiamento membrana-flessione e per un diverso comportamento elastico di lastra e di piastra.
- Un esempio è dato nella figura qui a lato, che mostra il diagramma direzionale del modulo di Young in membrana (ortotropo) ed in flessione (anisotropo) per uno stesso laminato (sequenza  $[30^\circ/-30^\circ/0^\circ/-30^\circ/30^\circ]$  in vetro-epoxy).



320



## Inversione della legge fondamentale dei laminati

- L'inversione della legge fondamentale dei laminati è semplice e si può fare in diversi modi.
- Ad esempio,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o \rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} \rightarrow \\ \boldsymbol{\varepsilon}^o &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{N} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

- Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \\ \boldsymbol{\kappa} &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

## Inversione della legge fondamentale dei laminati

- Si pone allora

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b}_1 &= -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b}_2 &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}, \end{aligned}$$

e si riconosce facilmente che, per la simmetria di  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}]^T = [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})]^{-1} = \\ &= [\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T(\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

- Analogamente, si ricava che  $\mathbf{d}=\mathbf{d}^T$ , mentre invece

## Inversione della legge fondamentale dei laminati

$$\mathbf{b}_1^T = (-\mathbf{aBD}^{-1})^T = -(\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{a}^T = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Ba} \neq \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_2^T = (-\mathbf{dBA}^{-1})^T = -(\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{d}^T = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Bd} \neq \mathbf{b}_2.$$

- Tuttavia,

$$(\mathbf{b}_1^T)^{-1} = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Ba})^{-1} = -\mathbf{a}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{b}_2^{-1} = (-\mathbf{dBA}^{-1})^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{d}^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{BA}^{-1} \mathbf{B}) = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1^T)^{-1},$$

e quindi, per l'unicità dell'inverso,

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^T.$$

- Si pone allora

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b},$$

e si ottiene infine l'inversione della legge fondamentale dei laminati:

323



## Inversione della legge fondamentale dei laminati

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}.$$

- Dunque, anche se la matrice della legge inversa ha conservato la simmetria globale, non ha più tutte le simmetrie della matrice della legge diretta, dal momento che  $\mathbf{b}$  non è simmetrico, in generale.
- In effetti, mentre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  sono dei veri tensori di rigidità, per esempio sono definiti positivi,  $\mathbf{B}$  non lo è, non è definito e non ha le stesse simmetrie del suo inverso.
- Dalle relazioni alla pagina precedente, si ricava per  $\mathbf{b}$  un'espressione simile a quelle ottenute per  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{d}$ :

$$(\mathbf{b}^T)^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = (\mathbf{B} - \mathbf{DB}^{-1} \mathbf{A})^{-1}.$$

324



## Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Gli effetti dell'accoppiamento lastra-piastra possono essere meglio valutati utilizzando la legge inversa dei laminati.
- Infatti, supponiamo che il laminato sia sottoposto soltanto a delle azioni membranali, cioè  $\mathbf{M}=\mathbf{O}$ ; allora

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{O} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{a}\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b}^T\mathbf{N}.$$

- A seguito dell'accoppiamento, le azioni membranali provocano nel laminato non solo una deformazione del piano medio, ma anche una curvatura. Se per esempio il laminato è sottoposto soltanto ad una forza membranale monoassiale, sia  $N_x$ , allora

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = N_x \begin{Bmatrix} b_{xx} \\ b_{xy} \\ b_{xs} \end{Bmatrix}.$$

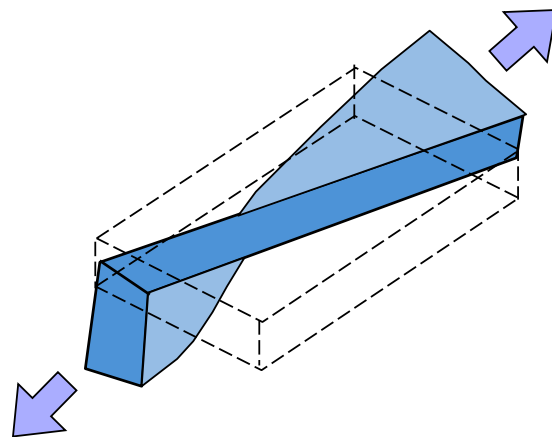
- In altre parole, il laminato si incurva nelle due direzioni e si torce.

325



## Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Se invece si fosse applicato un momento  $M_x$ , avremmo ottenuto un risultato analogo per quanto riguarda le deformazioni nel piano.
- Alcune volte, questi effetti deformativi dovuti all'accoppiamento membranale-flessionale sono ricercati e sfruttati per certi scopi.
- Ad esempio, l'accoppiamento che provoca una torsione come effetto di una trazione (vedi figura) è a volte utilizzato nelle eliche dei generatori eolici e delle pale di elicottero per effettuare un controllo passivo automatico del passo dell'elica.
- In genere, tuttavia, l'accoppiamento è un effetto parassita indesiderato, ed i progettisti fanno in modo di eliminarlo (vedremo come nel capitolo seguente).



326



## Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Si parla allora di *laminati disaccoppiati*, per i quali  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$  e quindi

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- Inoltre, in tal caso si ha immediatamente che

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}^{-1}.$$

- Allora, in questo caso, ed in generale solo in questo caso, c'è corrispondenza di simmetria elastica tra i tensori diretti ed inversi.
- In altre parole, per un laminato disaccoppiato  $\mathbf{a}$  ed  $\mathbf{A}$  hanno le stesse simmetrie elastiche, e così pure  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{D}$ .
- Ad esempio, se  $\mathbf{A}$  è ortotropo,  $\mathbf{a}$  lo è ancora e con gli stessi assi di ortotropia.



## Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Questo non è vero, in generale, per un laminato accoppiato; per convincersene, basta considerare, ad esempio, la formula che dà il tensore  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \left( \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1}.$$

- Le eventuali simmetrie di  $\mathbf{a}$  sono determinate da quelle di  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ , che non sono in generale le stesse.
- Ad esempio, un laminato accoppiato e con  $\mathbf{A}$  isotropo avrà, in generale,  $\mathbf{a}$  completamente anisotropo. Si ha dunque il caso di una risposta elastica che non ha le stesse simmetrie in rigidezza e in cedevolezza.
- Questa situazione è tipica dei laminati accoppiati; per questa ragione, parlare di simmetrie elastiche per un laminato è difficile e delicato. Quello che si può affermare è che se una simmetria elastica esiste, questa concerne una rigidezza o una cedevolezza di lastra o di piastra e non, in generale, l'intero comportamento del laminato.

## Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Vedremo nel capitolo seguente una classe di laminati per i quali la definizione di simmetria elastica è precisa ed assume la stessa valenza che nel caso di un monostrato.
- Rimane il fatto che, in generale, non si può sempre parlare di simmetria elastica corrispondente ad una simmetria materiale, ossia ad una soggiacente simmetria geometrica, ad esempio nella disposizione degli strati.
- E' infatti possibile ottenere una qualsiasi simmetria elastica con una disposizione di un numero sufficiente di strati disposti senza alcuna simmetria geometrica.
- Tutto questo fa capire come il concetto di simmetria materiale per i laminati sia ben più delicato e articolato che quello utilizzato per i continui omogenei o dei monostrato.
- Quello che rimane, tuttavia, è che ci si può sempre limitare a considerare le simmetrie tensoriali, e questo è sempre possibile ed ha una affinità completa con quello che si fa nel caso dei continui omogenei.

## I moduli elastici del monostrato equivalente

- Come già anticipato, i tensori normalizzati rappresentano il comportamento di un materiale fittizio con cui è realizzato un monostrato equivalente, di identico spessore del laminato.
- E' quindi lecito chiedersi quali sono i moduli dell'ingegnere di questo materiale fittizio, in altre parole, quali sono i moduli dell'ingegnere del laminato visto come un continuo omogeneo.
- I moduli sono definiti a partire dalle componenti del tensore di cedevolezza, ossia, in questo caso, dei tensori inversi, **a**, **b** e **d** normalizzati:

$$\mathbf{a}^* = h \mathbf{a} = \left( \mathbf{A}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^* \right)^{-1},$$

$$\mathbf{b}^* = \frac{h^2}{2} \mathbf{b} = \left( \mathbf{B}^* - \frac{1}{3} \mathbf{D}^* \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{A}^* \right)^{-1},$$

$$\mathbf{d}^* = \frac{h^3}{12} \mathbf{d} = \left( \mathbf{D}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{A}^{*-1} \mathbf{B}^* \right)^{-1}.$$

## I moduli elastici del monostrato equivalente

- I moduli dell'ingegnere sono dunque definiti come d'abitudine, in funzione delle componenti dei tensori di cedevolezza:

$$E_x^m = \frac{1}{a_{xx}^*}, \quad E_y^m = \frac{1}{a_{yy}^*}, \quad G_{xy}^m = \frac{1}{a_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^m = -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^m = \frac{a_{xs}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^m = \frac{a_{ys}^*}{a_{yy}^*};$$

$$E_x^f = \frac{1}{d_{xx}^*}, \quad E_y^f = \frac{1}{d_{yy}^*}, \quad G_{xy}^f = \frac{1}{d_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^f = -\frac{d_{xy}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^f = \frac{d_{xs}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^f = \frac{d_{ys}^*}{d_{yy}^*}.$$

- Con l'apice  $m$  si sono indicati i moduli che descrivono il comportamento di membrana, con  $f$  quelli del comportamento in flessione.
- I moduli dell'accoppiamento si introducono nello stesso modo, con le componenti di  $\mathbf{b}^*$ , ma in genere non si utilizzano perché il loro significato meccanico è meno diretto.

## I moduli elastici del monostrato equivalente

- Il calcolo dei moduli dell'ingegnere in un riferimento qualsiasi, ruotato di  $\theta$  rispetto a quello globale, si fa ancora utilizzando delle formule di trasformazione analoghe a quelle di pagina 163.
- Allo stesso modo, le componenti di  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  in un riferimento ruotato di  $\theta$  rispetto a quello globale, e quelle dei corrispondenti tensori normalizzati, si ottengono tramite delle formule di trasformazione analoghe a quelle di pagina 161, introdotte per la matrice  $[\mathbf{Q}]$ , mentre per i tensori inversi  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{d}$  e i loro corrispondenti normalizzati si devono usare le formule di pagina 162, introdotte per la matrice  $[\mathbf{S}]$ .
- Infatti, si deve tener conto del fatto che nella definizione dei tensori  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  si è utilizzata la notazione di Voigt, con la convenzione che ne segue sulla componente di deformazione di taglio, a indice misto. Di conseguenza, le trasformazioni per rotazione dei tensori di rigidezza e di cedevolezza non sono uguali. In definitiva, tutti i tensori di rigidezza si comportano come la matrice  $[\mathbf{Q}]$  e tutti quelli di cedevolezza come la matrice  $[\mathbf{S}]$ .

## I moduli elastici del monostrato equivalente

- Una sola avvertenza rispetto alle formule sopra citate: in esse, il riferimento di partenza era  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , riferimento materiale della lamina, e quello di arrivo  $\{x, y, z\}$ , un riferimento qualsiasi.
- In questo caso, il riferimento di partenza è quello globale del laminato, che si è chiamato  $\{x, y, z\}$ , e quello di arrivo è un riferimento qualsiasi, che chiameremo  $\{x', y', z'\}$ .
- Quindi, ad esempio, per il tensore **A** la trasformazione per rotazione va letta come segue (per gli altri si procede analogamente):

$$\begin{Bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{xs} \\ A'_{xy} \\ A'_{ss} \\ A'_{ys} \\ A'_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{xs} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{ys} \\ A_{yy} \end{Bmatrix}$$

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Come ogni altro materiale, i compositi fibrorinforzati sono sensibili alle azioni della temperatura, che provocano delle deformazioni.
- Queste azioni sono particolarmente importanti nel caso dei laminati, che spesso sono realizzati con un processo di polimerizzazione termica sotto pressione costante (cottura a  $\sim 180^\circ\text{C}$ ).
- In aggiunta, si deve considerare la possibilità che il materiale si deformi per assorbimento di umidità; questo fenomeno si produce nei compositi a matrice organica (ad esempio resine epossidiche).
- Vediamo quindi cosa accade in queste circostanze; l'obiettivo è quello di trovare una generalizzazione della legge fondamentale dei laminati in modo da tener conto degli effetti igro-termo-elastici.
- La teoria che segue è una generalizzazione al caso dei multistrato anisotropi della teoria classica delle piastre sottoposte a variazioni termiche, oltre che ad azioni meccaniche.
- Le ipotesi meccaniche di base sono le medesime già viste per la teoria classica dei laminati.



## Il comportamento igro-termo-elastico

- In generale, si può dire che la deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è la somma di tre termini:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_c,$$

con  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$  la quota di deformazione dovuta alle forze applicate,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  quella dovuta alla variazione termica e  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  quella dovuta alla variazione di concentrazione di umidità.

- Naturalmente, per la legge di Hooke è

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma},$$

e si ammette che sia

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = t\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = c\boldsymbol{\beta}.$$

- Nelle equazioni precedenti,  $t$  e  $c$  sono rispettivamente la variazione di temperatura e di concentrazione di umidità rispetto ad uno stato in cui si considerano nulle le deformazioni termiche e igroscopiche;  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  sono rispettivamente i tensori del secondo ordine dei coefficienti di dilatazione termica e igroscopica.

335



## Il comportamento igro-termo-elastico

- L'inversione della legge precedente dà

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_c) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} - t\mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} - c\mathbf{E}\boldsymbol{\beta}.$$

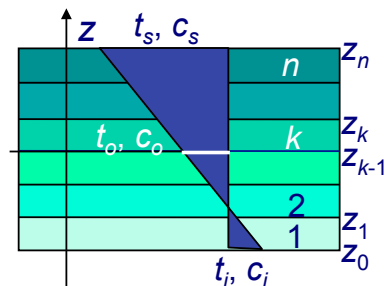
- Consideriamo dunque il caso di un laminato.
- L'ipotesi classica che si fa è che il laminato sia sottoposto ad un *flusso permanente di calore e di umidità* e che le *proprietà fisiche del laminato siano costanti attraverso lo spessore*; è il caso dei laminati a strati identici, ma non soltanto.
- In tale ipotesi, la variazione di  $t$  e di  $c$  attraverso lo spessore è lineare e si può porre, vedi figura,

$$t = t_o + \frac{\Delta t}{h}z, \quad c = c_o + \frac{\Delta c}{h}z, \quad \text{dove}$$

$$t_o = \frac{t_s + t_i}{2}, \quad c_o = \frac{c_s + c_i}{2}, \quad \Delta t = t_s - t_i, \quad \Delta c = c_s - c_i.$$

- Di conseguenza, nel quadro della teoria classica dei laminati il campo di tensione nello strato  $k$  del laminato sarà

336



## Il comportamento igro-termo-elastico

$$\sigma_k = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\kappa} \right] - \left( t_o + \frac{\Delta t}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k) - \left( c_o + \frac{\Delta c}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\beta}_k(\delta_k).$$

- Con ovvio significato dei simboli,  $\boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k)$  e  $\boldsymbol{\beta}_k(\delta_k)$  indicano rispettivamente il tensore dei coefficienti di dilatazione termica e igroscopica dello strato numero  $k$ , ruotato dell'angolo  $\delta_k$ .
- Se adesso questa relazione si usa nel calcolo delle azioni interne  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$ , con le formule già impiegate nella teoria classica, accanto ai termini già visti, che conducono ai tensori  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ , si hanno altri termini, che tengono conto dell'apporto delle variazioni termiche e igroscopiche:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} - t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} - c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

dove i tensori del secondo ordine  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  descrivono rispettivamente, in rigidità, il comportamento termoelastico di membrana, l'accoppiamento termoelastico membrana-flessione ed il

## Il comportamento igro-termo-elastico

comportamento termoelastico in flessione. In altre parole, sono corrispondenti di  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  per le rigidità termoelastiche.

- I tensori  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  svolgono rispettivamente gli stessi ruoli ma nei riguardi delle variazioni di umidità.
- I tensori sopra sono dati dalle relazioni seguenti, che si ottengono immediatamente inserendo nel calcolo delle azioni interne la formula delle tensioni alla pagina precedente:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \gamma_k(\delta_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \gamma_k(\delta_k), \\ \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \gamma_k(\delta_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \gamma_k(\delta_k), \\ \mathbf{W} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \gamma_k(\delta_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \gamma_k(\delta_k), \\ &\text{dove } \gamma_k(\delta_k) = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k). \end{aligned}$$

## Il comportamento igro-termo-elastico

- In modo analogo si ha

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k),$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\beta}_k(\delta_k)$ .

- La legge di pagina 337 generalizza la legge fondamentale dei laminati nel caso in cui si abbiano effetti igro-termici. L'inversione di questa legge può farsi nel seguente modo: si pone

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

e si ottiene

## Il comportamento igro-termo-elastico

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

di cui si conosce già la relazione inversa:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix}.$$

- Dunque, tenendo conto dell'espressione di  $\mathbf{N}^*$  e  $\mathbf{M}^*$ , si ha infine

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix},$$

dove

## Il comportamento igro-termo-elastico

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{a}\mathbf{U} + \mathbf{b}\mathbf{V} = \mathbf{a}[\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}) \\
 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}\mathbf{W} = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}) \\
 \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{V} = \mathbf{d}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) \\
 \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{V} + \mathbf{d}\mathbf{W} = \mathbf{d}[\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V})
 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \mathbf{a}\mathbf{F} + \mathbf{b}\mathbf{G} = \mathbf{a}[\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}) \\
 \mathbf{g}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{G} + \mathbf{b}\mathbf{H} = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}) \\
 \mathbf{g}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{F} + \mathbf{d}\mathbf{G} = \mathbf{d}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}) \\
 \mathbf{h} &= \mathbf{b}^T\mathbf{G} + \mathbf{d}\mathbf{H} = \mathbf{d}[\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G})
 \end{aligned}$$

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Si osserva dunque che il legame termoelastico inverso dipende non da 3 tensori, ma da 4, essendo in generale  $\mathbf{v}_1$  diverso da  $\mathbf{v}_2$ . Tuttavia, i tensori termoelastici inversi indipendenti non sono 4, ma solo 3, perché esiste la relazione seguente, facilmente ricavabile dalle precedenti

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{v}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W})]$$

- La stessa osservazione vale per il comportamento igro-elastico, per il quale si ha una relazione analoga alla precedente

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{g}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{H})]$$

- E' utile fare alcune osservazioni sui risultati trovati.
- Innanzitutto, si conferma che i laminati sono continui "complessi" per il fatto che ancora una volta il comportamento igro-termo-elastico in cedevolezza non è retto da leggi del tutto "simmetriche" rispetto a quelle in rigidezza.

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Infatti, si hanno due diversi tensori di accoppiamento termo- e igro-elastico, anche se non indipendenti.
- E' importante capire il significato dei tensori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{w}$  (per i tensori  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  e  $\mathbf{h}$  vale un discorso analogo).
- Confrontando la legge inversa di pagina 340 con le relazioni che danno in generale le deformazioni, pagina 335, si evince immediatamente quanto segue.
- Il tensore  $\mathbf{u}$  descrive le deformazioni del piano medio per una variazione di temperatura costante sullo spessore; il significato fisico delle sue componenti è dunque quello di essere dei *coefficienti di dilatazione termica del monostrato equivalente*. In altre parole,  $\mathbf{u}$  è per il laminato ciò che  $\alpha$  è per una lamina.
- Il tensore  $\mathbf{v}_1$  descrive le deformazioni del piano medio per una variazione lineare antisimmetrica della temperatura sullo spessore; le sue componenti hanno un significato analogo a quelle di  $\mathbf{u}$ , con la differenza vista sul campo di temperatura, variabile in questo caso.

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Il tensore  $\mathbf{w}$  descrive le curvature di origine termica dovute ad una variazione lineare antisimmetrica della temperatura sullo spessore; le sue componenti sono dei *coefficienti di curvatura termica del monostrato equivalente*.
- Infine, il tensore  $\mathbf{v}_2$  descrive le curvature di origine termica dovute ad una variazione di temperatura costante sullo spessore; le sue componenti hanno un significato analogo a quelle di  $\mathbf{w}$ , con la differenza vista sul campo di temperatura, costante in questo caso.
- A causa dell'accoppiamento  $\mathbf{v}_1$ , un laminato sottoposto a variazione termica lineare e antisimmetrica sullo spessore non soltanto si curva, come una piastra omogenea, ma anche si dilata nel suo piano medio, in modo diverso nelle varie direzioni a causa dell'anisotropia (ed è anche possibile avere delle direzioni in cui la deformazione è in realtà una contrazione).
- A causa invece dell'accoppiamento  $\mathbf{v}_2$ , un laminato sottoposto a variazione termica costante sullo spessore non soltanto si

## Il comportamento igro-termo-elastico

deformerà nel suo piano medio, ma anche si incurverà, ancora una volta in modo in generale diverso secondo la direzione a causa dell'anisotropia.

- Questo fatto è importante in quanto come detto spesso i laminati vengono prodotti per polimerizzazione sotto temperatura piuttosto elevata (intorno ai 180°C).
- Quindi, se il laminato ha un accoppiamento di tipo  $\mathbf{v}_2$ , una volta raffreddato non manterrà la forma originaria e prevista, ma si incurverà (per esempio una lastra diventa un guscio).
- Di conseguenza, il controllo dell'accoppiamento termo-elastico è importante in fase di progetto di un laminato.
- Alcune considerazioni circa le relazioni tra l'accoppiamento elastico e quello termo- o igro-elastico possono essere fatte nel caso di laminati a strati identici (vedi pagina 360).
- Invece, nel caso di laminati a strati qualsiasi, la sola cosa che si può affermare è che un eventuale disaccoppiamento elastico ( $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ ) non

345



## Il comportamento igro-termo-elastico

comporta necessariamente un disaccoppiamento termo- o igro-elastico ( $\mathbf{V}=\mathbf{G}=\mathbf{O}$ ), e viceversa.

- Tuttavia, se  $\mathbf{V}=\mathbf{O}$  si ha che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}\mathbf{W} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{U} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} = -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}.$$

- In altre parole, possono esistere laminati accoppiati elasticamente ( $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$ ), ed accoppiati termo-elasticamente in cedevolezza ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\neq\mathbf{O}$ ), ma disaccoppiati termoelasticamente in rigidezza ( $\mathbf{V}=\mathbf{O}$ ).
- Se però, oltre a  $\mathbf{V}=\mathbf{O}$  è anche  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ , allora il disaccoppiamento è totale ( $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{O}$ ).
- Una situazione analoga si ha ovviamente per il caso igro-elastico.
- Una considerazione a parte merita il problema della rotazione del riferimento. I tensori igro- termo- elastici sono tensori del secondo ordine, e scritti secondo la notazione di Voigt.

346



## Il comportamento igro-termo-elastico

- Quindi le loro componenti in un riferimento  $\{x',y',z'\}$  ruotato dell'angolo  $\theta$  rispetto al riferimento  $\{x, y, z\}$  si ottengono tramite delle formule analoghe a quelle di pagina 160.
- In particolare, quelle di  $\{\sigma\}$  riguardano ovviamente i tensori di rigidità ( $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$ ), mentre quelle di  $\{\varepsilon\}$  riguardano i tensori di cedevolezza ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  e  $\mathbf{h}$ ); si ha dunque, per esempio con riferimento ad  $\mathbf{U}$  ed  $\mathbf{u}$ ,

$$\begin{Bmatrix} U'_x \\ U'_y \\ U'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_s \end{Bmatrix}$$

- Come già nel caso dei tensori elastici, anche stavolta si deve fare attenzione al fatto che quando le suddette formule di rotazione si usano per ruotare nel riferimento globale del laminato le proprietà di uno strato descritte nel suo riferimento materiale, si devono cambiare di segno le potenze dispari di  $\sin\theta$ .

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Le matrici di trasformazione sono dunque, per questa operazione e ancora con riferimento ad  $\mathbf{U}$  ed  $\mathbf{u}$ ,

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

- Ovviamente, per gli altri tensori si applicano le stesse trasformazioni.
- Le dimensioni dei vari tensori sono le seguenti ( $\tau$  indica una temperatura)

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_1] &= [\text{L}/\tau] \quad (\text{m}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_2] &= [1/(\text{L}\tau)] \quad (1/\text{m}^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{w}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

## Il comportamento igro-termo-elastico

- Dunque, i tensori  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  non hanno nemmeno le stesse dimensioni, mentre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  sì. Questo non accade per i tensori di rigidezza termoelastica, che hanno le dimensioni seguenti

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}] &= [F/L\tau] \quad (\text{N/m}^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{V}] &= [F/\tau] \quad (\text{N}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{W}] &= [FL/\tau] \quad (\text{Nm}/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

- Questi possono essere normalizzati come  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{h}, \quad \mathbf{V}^* = 2 \frac{\mathbf{V}}{h^2}, \quad \mathbf{W}^* = 12 \frac{\mathbf{W}}{h^3}.$$

- Le dimensioni sono allora  $[F/L^2\tau]$  ( $\text{N}/\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ). I tensori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{w}$  non vengono in genere normalizzati, perché hanno già il significato fisico e le dimensioni volute (coefficienti di dilatazione, o di curvatura, termica).

## Il caso dei laminati a strati identici

- La maggior parte dei laminati sono composti da strati identici, costituiti cioè dallo stesso materiale e aventi lo stesso spessore.
- Questa classe di laminati non è importante solo per le applicazioni, ma anche per i risvolti teorici. Infatti, solo in ipotesi di strati identici si riescono a ottenere delle regole generali sul comportamento e la progettazione dei laminati, come vedremo nel capitolo seguente.
- La circostanza di avere degli strati identici comporta delle semplificazioni nei risultati sin qui trovati.
- Innanzitutto, con la numerazione degli strati utilizzata (vedi pagina 313), si ha subito che

$$z_k = -\frac{h}{2} + k \frac{h}{n} = \frac{2k-n}{2n} h.$$

- Inoltre, la rigidezza degli strati dipende solo dalla loro orientazione, non dal materiale, che è il medesimo per tutti gli strati.



## Il caso dei laminati a strati identici

- In definitiva, sostituendo nelle formule di pagina 314 e di pagina 338 e 339 si ottiene

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

$$\mathbf{U} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \gamma(\delta_k),$$

$$\mathbf{F} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \lambda(\delta_k).$$

- I coefficienti  $b_k$  e  $d_k$  sono dati dalle formule che seguono:

$$b_k = 2k - n - 1,$$

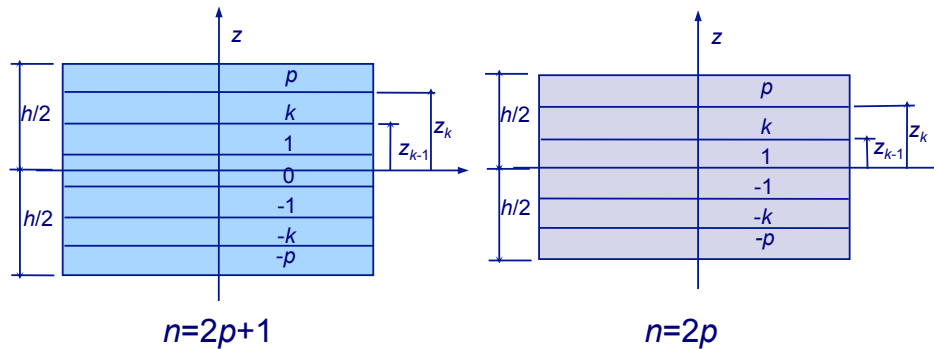
$$d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- Da notare che la somma dei  $b_k$  è nulla mentre quella dei  $d_k$  vale  $n^3$ .

## Il caso dei laminati a strati identici

- La prima osservazione che si può fare, è che il comportamento di lastra, tensori  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$ , non dipende dalla posizione degli strati sulla sequenza: *cambiare la sequenza degli strati senza cambiarne l'orientazione non varia le rigidzze di membrana*. Si può dimostrare che questo è vero anche per il caso di laminati a strati non identici.
- Questo non accade per i tensori di accoppiamento e per quelli di rigidzza in flessione: la posizione di uno strato sulla sequenza di impilamento influisce linearmente sull'accoppiamento e quadraticamente sulla rigidzza in flessione.
- Come vedremo, questo fatto è ciò che principalmente rende molto difficile la progettazione in flessione dei laminati.
- Nel prosieguo, risulterà utile anche un'altra numerazione degli strati, fatta a partire dal piano medio e rappresentata nella figura che segue.

## Il caso dei laminati a strati identici



- In tal caso, si ha che

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{2k+1}{2} \frac{h}{n}, & z_{k-1} &= \frac{2k-1}{2} \frac{h}{n}, & \text{per } n &= 2p+1, \\
 z_k &= k \frac{h}{n}, & z_{k-1} &= (k-1) \frac{h}{n} & \text{se } k > 0, \\
 z_k &= (k+1) \frac{h}{n}, & z_{k-1} &= k \frac{h}{n} & \text{se } k < 0,
 \end{aligned}$$

per  $n = 2p$ .

## Il caso dei laminati a strati identici

- Allora, si ottiene

$$b_k = \begin{cases} 2k & \text{se } n = 2p+1, \\ 2k - \frac{k}{|k|}, & b_0 = 0 \text{ se } n = 2p; \end{cases} \quad d_k = \begin{cases} 12k^2 + 1 & \text{se } n = 2p+1, \\ 12k^2 - 12|k| + 4, & d_0 = 0 \text{ se } n = 2p. \end{cases}$$

- Con questa numerazione, le sommatorie che appaiono nelle definizioni di **A**, **B**, **D** etc. sono estese da  $k=-p$  a  $k=p$ .
- Queste formule permettono di verificare subito che i coefficienti  $b_k$  variano linearmente con la posizione dello strato e che hanno una distribuzione antisimmetrica rispetto al piano medio.
- Invece, i coefficienti  $d_k$  variano quadraticamente ed hanno una distribuzione simmetrica rispetto al piano medio.

## L'utilizzo del metodo polare

- Si fa qui cenno all'utilizzo del metodo polare nella teoria classica dei laminati, in quanto questo permette di meglio evidenziare alcune proprietà e risultati generali concernenti i laminati a strati identici.
- Le leggi di composizione dei tensori che descrivono il comportamento dei laminati (**A**, **B**, **D**, **U** etc.) si applicano a una qualunque rappresentazione tensoriale, non solo quindi alle componenti cartesiane, ma anche a quelle polari (del resto, basta un rapido esame delle relazioni di pagina 170 per convincersene).
- Questa osservazione ci offre immediatamente le componenti polari dei tensori propri al laminato. Si deve inoltre ricordare che la rotazione da far subire alle componenti tensoriali è  $-\delta_k$ , se  $\delta_k$  è l'angolo di cui è ruotato in senso trigonometrico lo strato  $k$  rispetto al riferimento globale del laminato.
- Se i simboli  $\bar{\phantom{x}}$ ,  $\hat{\phantom{x}}$  e  $\bar{\phantom{x}}^*$  apposti sopra una quantità si riferiscono rispettivamente al comportamento di membrana, di accoppiamento e di flessione, allora si ha, per il caso di laminati a strati identici,

## L'utilizzo del metodo polare

tensore **A** :

$$\bar{T}_0 = h T_0,$$

$$\bar{T}_1 = h T_1,$$

$$\bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0} = \frac{h}{n} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} = \frac{h}{n} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tensore **B** :

$$\hat{T}_0 = 0,$$

$$\hat{T}_1 = 0,$$

$$\hat{R}_0 e^{4i\hat{\Phi}_0} = \frac{1}{2n^2} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1 e^{2i\hat{\Phi}_1} = \frac{1}{2n^2} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore **A\*** :

$$\bar{T}_0^* = T_0,$$

$$\bar{T}_1^* = T_1,$$

$$\bar{R}_0^* e^{4i\bar{\Phi}_0} = \frac{1}{n} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1^* e^{2i\bar{\Phi}_1} = \frac{1}{n} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tensore **B\*** :

$$\hat{T}_0^* = 0,$$

$$\hat{T}_1^* = 0,$$

$$\hat{R}_0^* e^{4i\hat{\Phi}_0} = \frac{1}{n^2} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1^* e^{2i\hat{\Phi}_1} = \frac{1}{n^2} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

## L'utilizzo del metodo polare

tensore  $\mathbf{D}$  :

$$\tilde{T}_0 = \frac{h^3}{3} \frac{T_0}{4},$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{h^3}{3} \frac{T_1}{4},$$

$$\tilde{R}_0 e^{4i\tilde{\Phi}_0} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1 e^{2i\tilde{\Phi}_1} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\delta_k}.$$

tensore  $\mathbf{D}^*$  :

$$\tilde{T}_0^* = T_0,$$

$$\tilde{T}_1^* = T_1,$$

$$\tilde{R}_0^* e^{4i\tilde{\Phi}_0} = \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1^* e^{2i\tilde{\Phi}_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\delta_k}.$$

- Si osserva allora che la parte isotropa di  $\mathbf{B}$  è nulla, e quindi che questo tensore è un tensore costituito da termini a media nulla. Per i laminati a strati identici, *disaccoppiamento e isotropia di  $\mathbf{B}$  coincidono*.
- Inoltre, per questa ragione, si ha, vedi pagina 170, che  $B_{xy} = B_{ss}$ .

## L'utilizzo del metodo polare

- Invece, per i tensori  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{D}^*$  la parte isotropa è la medesima ed è identica a quella dello strato di base. Questo significa che il comportamento medio (parte isotropa) del monostrato equivalente è identico al comportamento medio dello strato di base.
- Inoltre, per questi laminati, a strati identici, si è potuto, per ciascuna quantità, separare la parte che attiene alle proprietà del singolo strato da quella che è invece determinata dalla sequenza degli strati e dalla loro orientazione.
- Vedremo che questa separazione è importante nelle tecniche di progettazione dei laminati.
- Lo stesso tipo di risultati si ha per i tensori che descrivono il comportamento igro- termo- elastico.
- Limitandoci ai soli tensori  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , si ha infatti (per i tensori  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  ed  $\mathbf{H}$  si hanno dei risultati analoghi):

## L'utilizzo del metodo polare

tensore **U** :

$$\bar{T} = h T,$$

$$\bar{R} e^{2i\bar{\Phi}} = \frac{h}{n} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tensore **U\*** :

$$\bar{T}^* = T,$$

$$\bar{R}^* e^{2i\bar{\Phi}} = \frac{1}{n} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tensore **V** :

$$\hat{T} = 0,$$

$$\hat{R} e^{2i\hat{\Phi}} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore **V\*** :

$$\hat{T}^* = 0,$$

$$\hat{R}^* e^{2i\hat{\Phi}} = \frac{1}{n^2} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore **W** :

$$\tilde{T} = \frac{h^3}{3} \frac{T}{4},$$

$$\tilde{R} e^{2i\tilde{\Phi}} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k};$$

tensore **W\*** :

$$\tilde{T}^* = T,$$

$$\tilde{R}^* e^{2i\tilde{\Phi}} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k}.$$

## L'utilizzo del metodo polare

- Ancora una volta, la parte isotropa di **V** è nulla, come per **B**, e quella di **U\*** e **W\*** è identica a quella dello strato di base, come per **A\*** e **D\***.
- Inoltre, confrontando **B** e **V**, si osserva immediatamente che, se gli strati sono identici,

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{O},$$

ma il contrario non è vero. In altre parole, si possono avere laminati disaccoppiati termoelasticamente, ma accoppiati elasticamente. Questa proprietà può essere talvolta opportunamente sfruttata, ad esempio per la realizzazione di eliche termoformate a controllo passivo del passo (Winkler, 1986).

- Invece, un laminato elasticamente disaccoppiato sarà anche sempre termoelasticamente disaccoppiato (se a strati uguali).
- Quanto detto va precisato meglio; infatti, si è già osservato, pagina 346, che se **V=O**,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{bW}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T \mathbf{U}.$$

## L'utilizzo del metodo polare

- In altre parole, il disaccoppiamento termoelastico si ha, in un tal caso e per laminati a strati diversi, solo in rigidezza, per  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$ , ma non in cedevolezza, per  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ .
- Tuttavia, da quanto visto si evince che nel caso di strati identici il disaccoppiamento elastico implica tutti i disaccoppiamenti:

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{V} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{G} = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{O}.$$

## Capitolo 6

### ■ Tipi di laminati di uso frequente

<input type="checkbox"/> Introduzione	363
<input type="checkbox"/> Laminati disaccoppiati	365
<input type="checkbox"/> Laminati equilibrati	367
<input type="checkbox"/> Laminati <i>angle-ply</i>	371
<input type="checkbox"/> Laminati <i>cross-ply</i>	372
<input type="checkbox"/> Laminati quasi isotropi	373
<input type="checkbox"/> Laminati isotropi	374
<input type="checkbox"/> Laminati quasi omogenei	377

## Introduzione

- In questo capitolo si considerano alcuni tipi di laminati di uso frequente nelle applicazioni e le loro proprietà elastiche.
- I risultati che seguono riguardano solo i laminati a strati identici, in quanto solo in tal caso si possono dare delle regole generali riguardanti le proprietà elastiche e la loro progettazione.
- In effetti, nel capitolo precedente si è visto come il comportamento di un laminato a strati identici sia condizionato, da un lato dalle proprietà elastiche dello strato di base, dall'altro dalla sequenza degli strati e dalla loro orientazione.
- Un punto fondamentale riguarda proprio le orientazioni: i vari strati sono in genere orientati in modo diverso, e quindi, come più volte notato, nelle formule che forniscono i vari tensori che descrivono il comportamento di un laminato, i tensori di rigidità degli strati devono essere ruotati nel riferimento globale del laminato. Questo si fa con la trasformazione di pagina 308.

## Introduzione

- Ora, se si osservano le formule di questa trasformazione si nota che esse dipendono da combinazioni di quarto grado delle funzioni circolari dell'orientazione  $\delta_k$  dello strato.
- Questo implica che la progettazione di un laminato quando le orientazioni degli strati sono le variabili di progetto è un problema molto complicato e in generale a soluzione non unica (se formulato come un problema di ottimo è non convesso).
- Allora, si sono sviluppate negli anni tutta una serie di regole pratiche per progettare i laminati, in particolare per ottenere dei laminati rispondenti a certi requisiti di rigidità in termini di simmetrie elastiche (si è già notato che il disaccoppiamento per i laminati a strati identici può essere visto come un problema di isotropia di **B**).
- Queste regole sono solo, in generale, delle *condizioni sufficienti, ma non necessarie*, per ottenere una certa proprietà. Si tratta il più delle volte di regole semplici, a volte intuitive, che hanno dato luogo ad alcune classi di laminati di uso particolarmente frequente.

## Laminati disaccoppiati

- La proprietà più ricercata in un laminato è il disaccoppiamento elastico, cioè si vuole sempre, tranne alcuni casi particolari cui si è fatto cenno,  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ .
- Se si considerano allora le formule di pagina 351 (Cartesiane) o anche di pagina 356 (polari) e si ricorda che i coefficienti  $b_k$  variano linearmente sullo spessore e che sono antisimmetrici rispetto al piano medio, si ricava subito che una condizione sufficiente per avere  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$  è quella di disporre gli strati in modo simmetrico rispetto al piano medio, ossia in modo che

$$\delta_k = \delta_{-k}, \quad \forall k = -p, \dots, p.$$

- Questa regola, molto semplice, è quella seguita nella quasi totalità dei casi. Tuttavia, si deve sottolineare che, contrariamente a quanto spesso affermato a torto, questa regola non è necessaria, ma solo *sufficiente* per il disaccoppiamento elastico.

## Laminati disaccoppiati

- Già nel 1982 Caprino e Crivelli Visconti avevano dimostrato l'esistenza di laminati disaccoppiati a sequenza non simmetrica.
- In seguito, Vannucci e Verchery (1998) hanno mostrato che il numero di soluzioni disaccoppiate simmetriche è molto esiguo in una classe più vasta di laminati disaccoppiati (sequenze *quasi-banali*).
- Inoltre, lo svantaggio più grande a utilizzare le sequenze simmetriche, sta nel fatto che, se si vuole ottenere il disaccoppiamento, si è spesso obbligati a raddoppiare il numero degli strati; in altre parole, l'utilizzo delle sequenze simmetriche nella ricerca di laminati aventi certe proprietà, comporta spesso un numero di strati molto superiore a quello minimo con cui si sarebbero potute ottenere le stesse proprietà richieste.
- La ricerca di laminati disaccoppiati a sequenza non simmetrica è possibile sia in modo esatto, facendo ricorso al concetto di sequenza quasi-banale, sia in modo approssimato, utilizzando procedure numeriche di ricerca.



## Laminati equilibrati

- I laminati equilibrati (*balanced* in inglese) sono quelli per cui ad ogni strato orientato dell'angolo  $\theta$  corrisponde uno strato orientato dell'angolo  $-\theta$ . Si tratta quindi di laminati a numero pari di strati.
- Se inoltre la sequenza è simmetrica, allora si ha anche il disaccoppiamento.
- L'interesse di questa classe di laminati sta nel fatto che hanno un comportamento ortotropo in membrana.
- Infatti, per questi laminati,

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k) = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{n/2} [\mathbf{Q}(\delta_k) + \mathbf{Q}(-\delta_k)]$$

- Ora, dato che lo strato di base è sempre ortotropo, se si considera, vedi formule a pagina 308, che

$$Q_{xs}(-\theta) = -Q_{xs}(\theta),$$

$$Q_{ys}(-\theta) = -Q_{ys}(\theta),$$

## Laminati equilibrati

si ricava immediatamente, per la formula di  $\mathbf{A}$ , che

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- Dunque, il laminato è ortotropo in membrana nel riferimento globale della piastra.
- Questo in generale non è vero in flessione. Infatti,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

e la presenza dei coefficienti  $d_k$  non permette di ottenere automaticamente l'ortotropia di flessione. Tuttavia, dal momento che (vedi pagina 354)  $d_k = d_{-k}$ , se la sequenza è *antisimmetrica*, cioè se  $\delta_{-k} = -\delta_k$ , si ha che

$$d_{-k} Q_{xs}(\delta_{-k}) = -d_k Q_{xs}(\delta_k),$$

$$d_{-k} Q_{ys}(\delta_{-k}) = -d_k Q_{ys}(\delta_k).$$

## Laminati equilibrati

- Dunque,

$$D_{xs} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k Q_{xs}(\bar{\delta}_k) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^0 d_k [Q_{xs}(\bar{\delta}_k) - Q_{xs}(\bar{\delta}_k)] = 0,$$

$$D_{ys} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k Q_{ys}(\bar{\delta}_k) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^0 d_k [Q_{ys}(\bar{\delta}_k) - Q_{ys}(\bar{\delta}_k)] = 0,$$

e quindi il laminato è ortotropo anche in flessione, non solo in membrana.

- Tuttavia, essendo la sequenza non simmetrica, il laminato sarà in generale accoppiato (ma non necessariamente; Valot e Vannucci, 2005, hanno mostrato l'esistenza di laminati completamente ortotropi, antisimmetrici e disaccoppiati).
- Quindi, se anche **A** e **D** sono ortotropi, in generale **a** e **d** non lo saranno, essendo **B** ≠ **O** (vedere formule a pagina 322); è un caso tipico che mostra la difficoltà di definire le simmetrie elastiche per i laminati: si ha ortotropia in rigidezza, ma non in cedevolezza, a causa dell'accoppiamento.

## Laminati equilibrati

- Questo esempio mostra la difficoltà di ottenere laminati che siano ortotropi in flessione e disaccoppiati. Questo problema è ancora oggi una difficoltà maggiore nell'ottimizzazione dei laminati rispetto ai problemi di stabilità elastica.
- In effetti, la messa a punto di metodi, analitici e numerici, per la ricerca di laminati disaccoppiati e ortotropi in flessione è ancora oggetto di ricerca; ancora più difficile è la ricerca di laminati completamente ortotropi e disaccoppiati, ed eventualmente con gli stessi assi di ortotropia in membrana ed in flessione. In tali casi, si deve in genere ricorrere a metodi numerici, se non si vuol far uso di sequenze *cross-ply* (vedi oltre).

## Laminati *angle-ply*

- Un laminato *angle-ply* è un caso particolare di laminato equilibrato, in cui si ha una sola orientazione possibile,  $\theta$ , e la sua opposta,  $-\theta$ .
- In questo caso, si ha che

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k) = \frac{h}{2} [\mathbf{Q}(\theta) + \mathbf{Q}(-\theta)] = h \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix}.$$

- Il laminato è ortotropo in membrana e le componenti  $Q_{xx}$  etc qui sopra sono quelle della lamina, ruotate di  $\theta$  rispetto al riferimento globale (formule di pagina 308).
- Come già detto per il caso dei laminati equilibrati,  $\mathbf{D}$  non è ortotropo, in generale.
- Normalmente, si utilizzano sequenze *angle-ply* simmetriche.

## Laminati *cross-ply*

- I laminati *cross-ply* hanno strati orientati solo a  $0^\circ$  o  $90^\circ$ .
- In questo modo, essendo gli strati ortotropi e con gli assi di ortotropia coincidenti con quelli del laminato, questo è completamente ortotropo, sia per  $\mathbf{A}$  che per  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ .
- E' il caso dei pannelli multistrato in legno.
- Contrariamente a quanto spesso si afferma, il loro comportamento resta ortotropo, non isotropo, nemmeno se si ha lo stesso numero di strati nelle due direzioni ortogonali.

## Laminati quasi isotropi

- Nella letteratura tecnica si indica con *quasi-isotropo* un laminato per il quale la sequenza comporta solo delle orientazioni a  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ .
- Inoltre, il numero degli strati a  $45^\circ$  deve essere uguale a quello a  $-45^\circ$ .
- In queste condizioni, si evince subito, basta ricordare quanto detto su angle-ply e cross-ply, che il comportamento in membrana è ortotropo.
- In aggiunta, se il numero degli strati in ogni direzione è identico, allora il comportamento di membrana è isotropo, ma non quello di flessione, vedi paragrafo seguente, da cui il nome dato al tipo di sequenza.
- Questi laminati sono molto utilizzati soprattutto in aeronautica. La ragione è che essi offrono una buona uniformità in rigidità e resistenza secondo tutte le direzioni, ed anche un buon contrasto alla propagazione delle fessure.

## Laminati isotropi

- Anche se nella maggior parte dei loro impieghi i laminati in composito hanno un comportamento anisotropo, concepito secondo i bisogni strutturali, in certi casi si usano laminati a risposta isotropa.
- Questo è necessario per esempio quando si debbano conciliare i requisiti di leggerezza con quelli di una risposta elastica che si desidera costante con la direzione, in genere perché causata da azioni di diversa natura e direzione.
- Werren e Norris (1950) hanno dato per primi una regola semplice, sufficiente ma non necessaria, per l'isotropia in membrana: se lo strato di base è a rinforzo unidirezionale, si deve disporre lo stesso numero  $q$  di strati secondo  $m$  orientazioni diverse, con  $m \geq 3$ , sfalsate di un angolo costante pari a  $\pi/m$ .
- Soluzioni possibili sono dunque delle sequenze di tipo

$$\begin{aligned}
 &0^\circ_q/60^\circ_q/-60^\circ_q, \quad q=n/3; \\
 &0^\circ_q/45^\circ_q/-45^\circ_q/90^\circ_q, \quad q=n/4; \\
 &0^\circ_q/36^\circ_q/72^\circ_q/108^\circ_q/144^\circ_q, \quad q=n/5; \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

## Laminati isotropi

- Se il rinforzo dello strato di base è in tessuto equilibrato, allora si dimostra facilmente, con il metodo polare, che basta disporre un numero identico di strati a  $0^\circ$  e a  $45^\circ$ .
- Generalmente, si applica la regola di Werren e Norris a sequenze simmetriche, così da ottenere laminati disaccoppiati e isotropi in membrana.
- Utilizzando il metodo polare, Person, Vannucci e Verchery (2000) hanno dato un'altra condizione sufficiente ed esatta per costruire laminati isotropi in membrana, senza che si tratti di una soluzione di tipo Werren e Norris.
- L'isotropia totale, di **A** e di **D**, o anche solo di **D**, è molto più complicata e non esistono regole generali.
- Alcune soluzioni esatte sono state date da Paradies (1996) per la sola isotropia di flessione.
- La prima soluzione esatta di un laminato totalmente isotropo è dovuta a Verchery e Vong (1986), con una sequenza di 48 strati.

375



## Laminati isotropi

- Successivamente, dei tentativi sono stati fatti da diversi ricercatori per trovare soluzioni esatte totalmente isotrope con un numero sempre inferiore di strati; Vannucci e Verchery hanno proposto 5 soluzioni totalmente isotrope, esatte, non simmetriche a 18 strati, che sembra essere il numero minimo per una soluzione esatta.
- Per via numerica, diversi studiosi hanno poi trovato soluzioni approssimate totalmente isotrope con un minimo di 12 strati unidirezionali; non sembra possibile ottenere l'isotropia totale con un numero inferiore di strati unidirezionali (non a simmetria del quadrato o  $R_0$ -ortotropi).
- Se invece si utilizzano strati a ortotropia particolare (simmetria del quadrato o ortotropia  $R_0$ ), allora si possono ottenere soluzioni approssimate totalmente isotrope con 7 strati (Grédiac, 2001, Vannucci, 2002), che sembra essere il numero minimo di strati necessario per ottenere l'isotropia totale.

376



## Laminati quasi-omogenei

- Un laminato, si è già detto, ha in genere un comportamento diverso in membrana ed in flessione, cioè in generale  $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{D}^*$ , ed in più è, se non si prendono le dovute precauzioni, accoppiato,  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ .
- Tuttavia, è possibile fare in modo che il laminato si comporti a tutti gli effetti come se fosse costituito da un unico strato, quindi come se fosse omogeneo; un tal laminato è detto *quasi-omogeneo*.
- Questa nozione è stata introdotta per primo da Verchery (Verchery e Kandil, 1988), che ne ha anche fornito le prime soluzioni. Successivamente, è stata ripresa da Wu e Avery (1992), con lo stesso significato, ed in seguito da Grédiac (1998) e da Verchery e Vannucci (1998), che ne hanno dato un metodo di ricerca di soluzioni esatte (sequenze quasi-banali).
- L'utilizzo di laminati quasi-omogenei può rivelarsi utile in diverse circostanze, per esempio nel caso dell'elaborazione di tests sperimentali particolari oppure in certi problemi di ottimizzazione.

## Laminati quasi-omogenei

- Per analizzare la quasi-omogeneità si introduce il *tensore di omogeneità*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^* - \mathbf{D}^* .$$

- Allora, un laminato è quasi-omogeneo se e solo se

$$\mathbf{B} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}.$$

- Si ha dunque, per un laminato a strati identici,

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

$$c_k = n^2 - d_k = -2n^2 - 12k(k - n - 1) - 4 - 6n.$$

- E' interessante anche scrivere le condizioni della quasi-omogeneità in polare, ed utilizzando la numerazione degli strati di pagina 353, quella con gli strati numerati a partire dal centro.

## Laminati quasi-omogenei

- Infatti, in tal caso si ottiene facilmente che le componenti polari di  $\mathbf{C}$ , indicate dal simbolo  $\check{\sim}$ , sono

$$\begin{aligned}\check{T}_0 &= 0, \\ \check{T}_1 &= 0, \\ \check{R}_0 e^{4i\check{\Phi}_0} &= \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\Phi_0} \sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k}, \\ \check{R}_1 e^{2i\check{\Phi}_1} &= \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k},\end{aligned}$$

con

$$c_k = \begin{cases} 4(p^2 + p - 3k^2) & \text{se } n = 2p + 1, \\ 4[p^2 - 3k^2 + 3|k| - 1] c_0 = 0 & \text{se } n = 2p. \end{cases}$$

## Laminati quasi-omogenei

- Si osserva che, come già per  $\mathbf{B}$ , anche per  $\mathbf{C}$  la parte isotropa è nulla, e quindi la quasi-omogeneità si interpreta in termini di simmetrie elastiche come l'isotropia dei tensori  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .
- Inoltre, i coefficienti  $c_k$  variano quadraticamente sullo spessore e sono simmetrici rispetto al piano medio.
- Un laminato sarà quindi quasi-omogeneo se e solo se

$$\begin{aligned}\sum_{k=-p}^p b_k e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k} &= 0, \\ \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k} &= 0.\end{aligned}$$

- Queste sono 8 condizioni reali da rispettare; in effetti, le condizioni sono 12, corrispondenti all'annullamento delle 12 componenti Cartesiane dei 2 tensori  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , ma come si è visto in

## Laminati quasi-omogenei

polare, 4 condizioni sono automaticamente rispettate, quelle riguardanti le componenti polari di isotropia, se gli strati sono identici, e dunque non restano che 8 condizioni indipendenti, che in polare sono quelle indicate qui sopra.

- La nozione di quasi-omogeneità può essere estesa al caso termoelastico: un laminato è quasi-omogeneo termoelasticamente se, oltre alle condizioni elastiche di quasi-omogeneità, è anche

$$\mathbf{L} = \mathbf{O},$$

dove  $\mathbf{L}$  è il tensore di omogeneità termoelastica:

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^* - \mathbf{W}^*.$$

- Utilizzando le espressioni viste per  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{W}$  si ottiene

$$\mathbf{L} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n c_k \gamma(\delta_k),$$

i coefficienti  $c_k$  essendo gli stessi del tensore  $\mathbf{C}$ .



## Laminati quasi-omogenei

- Ancora una volta, passando alle componenti polari di  $\mathbf{L}$  si trova

$$\check{T} = 0, \quad \check{R} e^{2i\check{\Phi}} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k}.$$

- Dunque, la condizione aggiuntiva per la quasi-omogeneità termoelastica è

$$\sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k} = 0.$$

- Ora, questa è già una delle condizioni precedenti, il che significa che un laminato quasi-omogeneo elasticamente lo è anche termoelasticamente, ma il contrario non è in generale vero (nel senso che esistono laminati che verificano  $\mathbf{B}=\mathbf{L}=\mathbf{O}$  ma non  $\mathbf{C}=\mathbf{O}$ ).
- In altre parole, la coincidenza delle caratteristiche elastiche rende anche uguali i coefficienti termici, di dilatazione e di curvatura, in ogni direzione, ma non il contrario.
- Per la parte igro-elastica si hanno risultati analoghi.



## Capitolo 7

### ■ Alcuni metodi classici di progetto dei laminati

<input type="checkbox"/> Considerazioni generali	384
<input type="checkbox"/> I parametri di laminazione	390
<input type="checkbox"/> Il metodo di Miki	400
<input type="checkbox"/> Progetto della rigidità	412
<input type="checkbox"/> Progetto della resistenza	433
<input type="checkbox"/> Approcci numerici moderni	440

## Considerazioni generali

- I capitoli precedenti hanno mostrato alcune caratteristiche dei laminati, dal punto di vista meccanico, che potremmo condensare in:
  - accoppiamento membrana-flessione;
  - diverso comportamento in membrana e in flessione;
  - caratteristiche dipendenti dall'orientazione degli strati: simmetrie, rigidità, resistenze etc.
- In una parola, si può dire che un laminato è un *materiale da progettare*.
- Ma quando si dice questo, si deve capire cosa ciò implica nel caso di un laminato.
- In effetti, per un materiale classico, come un metallo, il solo dato di progetto di una piastra è lo spessore.
- Invece, in un laminato, si devono stabilire tre tipi di dati:
  - il numero degli strati;
  - l'orientazione degli strati;
  - il materiale degli strati.

## Considerazioni generali

- Anche limitandosi al caso, come faremo nel seguito, di un laminato a strati identici, e fissando *a priori* il numero degli strati, ciò che si fa il più delle volte, resta il problema di progettare prendendo come variabili di progetto le orientazioni degli strati.
- Crescendo il numero degli strati, il numero delle variabili di progetto cresce e dunque si ha a che fare in genere con problemi a molte variabili.
- Inoltre, basta uno sguardo alle formule di composizione dei tensori **A**, **B**, **D** etc., e alle formule di rotazione di pagina 308 per comprendere le difficoltà che si incontrano.
- Infatti, le variabili di progetto, le orientazioni degli strati, appaiono nelle componenti dei tensori sotto forma di argomento di funzioni circolari, in combinazioni di quarto grado di queste.
- Inoltre, i requisiti di rigidezza, come il modulo di Young in una direzione, si calcolano a partire dalle componenti dei tensori inversi **a**, **d** etc. e questo complica ulteriormente le cose.

## Considerazioni generali

- Non si deve poi dimenticare che accanto alla massimizzazione o minimizzazione di una certa grandezza, si vuole che il laminato rispetti certi requisiti elastici generali, riconducibili tutti ad una simmetria elastica: ortotropia in membrana e/o in flessione, disaccoppiamento etc. e questi requisiti non sono semplici da ottenersi.
- In definitiva, il progetto di un laminato è un'operazione difficile, per la quale non esistono ancora dei metodi universalmente validi.
- L'orientazione degli studiosi è allora stata, nel passato, quella di una semplificazione del problema.
- Dal momento che i requisiti più difficili da ottenersi sono quelli relativi alle simmetrie elastiche, in genere ci si è limitati a cercare delle soluzioni per una classe di laminati (ad esempio gli *angle-ply* simmetrici) capaci di garantire automaticamente certi requisiti, come il disaccoppiamento e l'ortotropia in membrana, i più richiesti nelle applicazioni.

## Considerazioni generali

- Questo approccio permette di semplificare drasticamente il problema, ma lo trasforma anche radicalmente al punto, ad esempio, di non permettere più una vera ottimizzazione in peso.
- In certi casi, i problemi sono così difficili che si rinuncia a risolverli, tipico il caso dell'ortotropia in flessione.
- In questo senso, i metodi classici di progetto dei laminati, alcuni dei quali sono indicati succintamente qui di seguito, somigliano più a delle *rules of thumb* che a dei veri e propri metodi di progetto ottimale.
  
- I primi lavori sull'ottimizzazione dei laminati risalgono agli anni 70, e riguardano principalmente:
  - la rigidezza;
  - la resistenza;
  - le frequenze proprie;
  - il carico critico.

## Considerazioni generali

- Altri lavori riguardano invece delle proprietà più specifiche dei laminati, come
  - la minimizzazione dei coefficienti di dilatazione termica in una direzione;
  - la distribuzione ottimale degli assi di ortotropia etc.
- Nella quasi totalità dei lavori le orientazioni degli strati sono le variabili di progetto, poche volte sono gli spessori degli strati. In ogni caso, tutti i lavori considerano dei laminati a strati identici, ipotesi che sarà adottata anche nel prosieguo del capitolo.
- Solo pochissime ricerche, ed in genere assai recenti, considerano la possibilità di sequenze non simmetriche.
  
- Recentemente, alcuni tentativi sono stati fatti per sistematizzare in modo più generale il problema del progetto di un laminato e per affrancarsi dai metodi classici e dalla limitatezza delle soluzioni che questi offrono.

## Considerazioni generali

- Questi approcci moderni si appoggiano sempre alla formulazione di un problema di ottimo e spesso fanno ricorso, dato il forte carattere di non convessità (ed in realtà in alcuni casi di continuità di soluzioni) a degli algoritmi moderni di tipo metaeuristico.
- Nel prosieguo di questo capitolo, si passano in rassegna alcuni approcci classici di progettazione dei laminati e in seguito si fa cenno ad alcuni tentativi moderni di soluzione numerica dei problemi di progetto dei laminati.

## I parametri di laminazione

- Nel caso di un laminato a strati identici, si è già visto (pagina 351) che

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

con

$$b_k = 2k - n - 1, \quad d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- Ora, se gli strati sono identici, le diverse componenti dei vari tensori dipendono, da un lato dalle caratteristiche elastiche dello strato di base, e dall'altro da una combinazione di funzioni circolari delle orientazioni.
- In principio, questi due fattori si possono separare, dal momento che, essendo le caratteristiche elastiche di base comuni a tutti gli strati, queste non dipendono dalle sommatorie che appaiono nelle formule di composizione dei tensori di rigidità.

## I parametri di laminazione

- Questa separazione tra "parte elastica" e "parte geometrica" nella rigidezza di un laminato si opera facilmente e ancora meglio se si fa ricorso ai parametri di Tsai e Pagano o al metodo polare.
- Nel primo caso, se il materiale di base è ortotropo e le sue proprietà note nel riferimento materiale, con qualche passaggio semplice si giunge a

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per le componenti della rigidezza in membrana, a

## I parametri di laminazione

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & -\xi_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & \xi_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per quelle di accoppiamento ed a

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & -\xi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & \xi_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

## I parametri di laminazione

per quelle di flessione. Nelle formule sopra, i parametri  $U_i$  sono i parametri di Tsai e Pagano, in numero di soli 5 per le ipotesi fatte circa la simmetria dello strato di base:

$$U_1 = \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, \quad U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2},$$

$$U_3 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8},$$

$$U_4 = \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, \quad U_5 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}.$$

- Si ribadisce che, essendo gli strati identici, questi parametri sono delle costanti in un processo di ottimizzazione, una volta scelto il materiale di base. Per questa ragione vengono chiamati invariati da alcuni autori, ma questo evidentemente deve essere inteso nel senso appena detto, e non equivocato con l'uso corrente del termine invariante in algebra tensoriale.

393



## I parametri di laminazione

- Invece, i parametri  $\xi_i$ , introdotti da Tsai e Hahn (1980), sono detti *parametri di laminazione (lamination parameters)* e sono definiti come

$$\xi_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 4\delta_k,$$

per il comportamento in membrana,

394



## I parametri di laminazione

$$\xi_5 = \int_{-h/2}^{h/2} z \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_6 = \int_{-h/2}^{h/2} z \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_7 = \int_{-h/2}^{h/2} z \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_8 = \int_{-h/2}^{h/2} z \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 4\delta_k,$$

per l'accoppiamento e

## I parametri di laminazione

$$\xi_9 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_{10} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 4\delta_k.$$

per la flessione.

- I parametri di laminazione descrivono interamente l'influenza della "geometria", in termini di numero, disposizione e orientazione degli strati, sulla rigidità del laminato.
- Alcuni autori ne danno una definizione leggermente differente ma equivalente.

## I parametri di laminazione

- Con il metodo polare, si utilizzano le formule di pagina 356 e seguenti e si considera che lo strato di base è ortotropo.
- Allora, scegliendo  $\Phi_1=0$ , che corrisponde a scegliere l'asse  $x_1$  come asse forte di ortotropia, si ha, pagina 171, che  $\cos 4\Phi_0=(-1)^k$ ,  $k=0,1$  e che  $\sin 4\Phi_0=0$ ; si ottiene allora, con semplici passaggi, che

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_2 & 4\xi_1 \\ 1 & 2 & \xi_2 & -4\xi_1 \\ -1 & 2 & -\xi_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_4 & 2\xi_3 \\ 0 & 0 & -\xi_4 & 2\xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

## I parametri di laminazione

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_6 & 4\xi_5 \\ 0 & 0 & \xi_6 & -4\xi_5 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_8 & 2\xi_7 \\ 0 & 0 & -\xi_8 & 2\xi_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_{10} & 4\xi_9 \\ 1 & 2 & \xi_{10} & -4\xi_9 \\ -1 & 2 & -\xi_{10} & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{12} & 2\xi_{11} \\ 0 & 0 & -\xi_{12} & 2\xi_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$



## I parametri di laminazione

- Fondamentalmente, la struttura delle formule è la stessa che con i parametri di Tsai e Pagano, ma sono diversi i coefficienti che descrivono le proprietà materiali.
- Il vantaggio nell'uso del metodo polare sta nel fatto che i 4 parametri polari sono legati direttamente alle simmetrie elastiche, vedi pagina 171.
- Per questa stessa ragione può rivelarsi più utile utilizzare le formule di pagina 356 e seguenti, che sono direttamente legate alle simmetrie elastiche del laminato, ogni volta che queste sono un obiettivo facente parte del processo di ottimizzazione dello stesso laminato.
- Con semplici passaggi si mostra che anche i tensori di rigidezza igro- e termo- elastica dipendono dagli stessi parametri di laminazione.

## Il metodo di Miki

- Miki ha proposto per primo (1982) un metodo generale, grafico e analitico, basato sull'uso dei *lamination parameters*;
- Questo metodo è approssimato, e concerne ovviamente la progettazione di laminati a strati identici, inizialmente solo per le proprietà di membrana (tensore **A**), e ci limiteremo quasi esclusivamente a considerare questo caso.
- All'origine, il metodo di Miki concerne solo i laminati equilibrati e simmetrici.
- In tal caso, il comportamento è ortotropo, il che implica

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- Inoltre, la simmetria garantisce che **B=O**. Dunque, i soli parametri di laminazione  $\xi_1$  e  $\xi_2$  definiscono interamente il progetto in membrana di un laminato disaccoppiato, se il materiale è già scelto.
- Inoltre, supponiamo che vi siano  $n_g$  gruppi di orientazioni possibili  $\pm\bar{\alpha}_k$ , con  $n_k$  strati a  $\pm\bar{\alpha}_k$ .

## Il metodo di Miki

- Allora, i parametri di laminazione  $\xi_1$  e  $\xi_2$  (i soli che interessano nel seguito, ma per gli altri si può ovviamente procedere in modo analogo) possono essere riscritti come

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_2 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 4\delta_k,$$

dove

$$v_k = \frac{n_k}{n}$$

è la frazione di strati del gruppo  $k$ , a orientazione  $\pm\delta_k$ , sul totale degli strati (da alcuni chiamata *frazione volumica degli strati*).

## Il metodo di Miki

- Nel metodo di Miki si prendono proprio questi due parametri come variabili libere, in altre parole si opera un cambio di variabile di progetto, il quale adesso avviene nello spazio dei parametri di laminazione, di dimensione 2, che in genere è ridotta rispetto alla dimensione dello spazio delle autentiche variabili di progetto, le orientazioni.
- Inoltre, se si osservano le formule di pagina 391, basate sui parametri di Tsai e Pagano, o quelle di pagina 397, che fanno uso dei parametri polari, si vede che tutte le componenti cartesiane di  $\mathbf{A}$  sono funzioni lineari di  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .
- Consideriamo dapprima un laminato *angle-ply*, cioè un laminato equilibrato in cui vi sia solo un angolo possibile di orientazione (con il suo opposto),  $\delta$ ; quindi  $n_g=1$ ,  $v_1=1$ .
- In questo caso, si ha ovviamente che

$$\xi_1 = \cos 2\delta, \quad \xi_2 = \cos 4\delta = 2\xi_1^2 - 1.$$

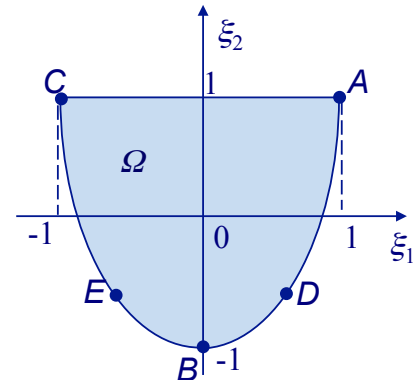
## Il metodo di Miki

- In altre parole, i laminati angle-ply sono rappresentati nel piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  da un arco di parabola, vedi figura, delimitato dalla condizione trigonometrica

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1.$$

- In particolare, i punti indicati corrispondono a dei laminati particolari:

- $A=(1,1)$  :  $\delta=0^\circ$ ;
- $B=(0,-1)$ :  $\delta=\pm 45^\circ$ ;
- $C=(-1,1)$ :  $\delta=90^\circ$ ;
- $D=(1/2,-1/2)$ :  $\delta=\pm 30^\circ$ ;
- $E=(-1/2,-1/2)$ :  $\delta=\pm 60^\circ$ ;



- Nel caso in cui si abbiano diverse orientazioni possibili  $\pm\delta_k$ , allora si dimostra che la seconda equazione alla pagina precedente diviene una condizione limite:

$$\xi_2 \geq 2\xi_1^2 - 1,$$



## Il metodo di Miki

e quindi la regione ammissibile  $\Omega$  nel piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  è il settore di parabola delimitato dalle condizioni

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 2\xi_1^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1.$$

- Ogni punto del dominio  $\Omega$  è detto *punto di laminazione*. Ad esso corrisponde una sola coppia  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , e dunque un solo tensore  $\mathbf{A}$ , ma questo stesso punto di laminazione può essere ottenuto con diverse combinazioni di orientazioni di uno stesso numero, o di un numero diverso, di strati.
- Questo è il punto essenziale: *non vi è corrispondenza biunivoca tra la rigidità e la sequenza degli strati*.
- Dunque, se si risolve il problema con i parametri di laminazione, si deve disporre successivamente di un criterio per risalire alle orientazioni o comunque per poterle scegliere.
- A questo scopo, è importante osservare che è possibile legare i punti di laminazione sul bordo di  $\Omega$  con quelli all'interno di  $\Omega$ .

## Il metodo di Miki

- Infatti, le formule di pagina 401 mostrano che i parametri di laminazione sono funzioni lineari delle frazioni volumiche degli strati, le  $v_k$ .
- Allora, i parametri di laminazione lungo una linea retta che collega due punti di  $\Omega$  rappresentano dei laminati con frazioni volumiche proporzionali alla distanza tra questi due punti.
- In altre parole, il vettore di frazioni volumiche  $\mathbf{v}_Q=(v_1, \dots, v_g)$  di un punto di laminazione  $Q$  che si trova tra i punti  $P$  e  $R$ , distanti  $\ell$ , sarà

$$\mathbf{v}_Q = (1-r)\mathbf{v}_P + r\mathbf{v}_R,$$

dove  $r\ell$  è la distanza di  $Q$  da  $P$  e  $\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_R$  i vettori delle frazioni volumiche di  $P$  e  $R$ .

- Allora, i punti che si trovano tra  $A$  e  $C$ , vedi figura precedente, saranno dei laminati con strati a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  soltanto, dunque  $AC$  è la linea dei *cross-ply*.

## Il metodo di Miki

- Ad esempio, il punto  $P=(0.2,1)$  rappresenta un *cross-ply* in cui il 60% degli strati sono a  $0^\circ$  ed il 40% a  $90^\circ$ ; è il caso dei laminati tipo  $[0_3/90_2]_s$ , ad esempio.
- La linea  $AC$  è un caso particolare, perché è l'unica che giace interamente sul bordo di  $\Omega$ .
- La regola precedente sulle frazioni volumiche degli strati si applica tuttavia ad una linea qualunque, che passerà in generale all'interno di  $\Omega$ .
- Ora, un qualunque punto interno a  $\Omega$  appartiene a infinite linee rette distinte, il che significa che a ciascun punto di laminazione, e dunque a ciascun tensore  $\mathbf{A}$ , corrispondono diversi (in generale infiniti) laminati distinti, come già anticipato.
- Si consideri ad esempio l'origine  $O$  del piano  $\xi_1-\xi_2$ , il punto  $\xi_1=\xi_2=0$ . si osserva immediatamente dalle formule di pagina 397 che questo corrisponde a tutti e soli i laminati che hanno un comportamento isotropo in membrana. Ma come ottenerli a partire dalle considerazioni precedenti?

## Il metodo di Miki

- Il punto  $O$  appartiene a diversi segmenti, tra cui ad esempio:
  - il segmento  $AE$ ;  $O$  dista  $r \neq 2/3 \ell$  da  $A$  e dunque avrà  $2/3$  di strati a  $\pm 60^\circ$  e  $1/3$  a  $0^\circ$ ; quindi si ottiene un laminato isotropo in membrana disponendo un numero identico di strati a  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $-60^\circ$  (soluzione di Werren e Norris);
  - il segmento  $CD$ ; il ragionamento è analogo, stavolta si ottiene una soluzione con strati in egual numero a  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $-30^\circ$  (la soluzione precedente ruotata di  $30^\circ$ );
  - il segmento verticale  $\xi_1=0$ , che va dal punto  $(0,1)$ , in cui si ha la stessa quantità di strati a  $0^\circ$  e a  $90^\circ$ , ed il punto  $B$ , in cui si ha la stessa quantità di strati a  $\pm 45^\circ$ ; dal momento che  $O$  si trova a metà strada tra questi due punti, sarà composto da un numero uguale di strati a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $-45^\circ$  (soluzione quasi-isotropa, altro tipo di soluzione di Werren e Norris);
  - il segmento orizzontale  $\xi_2=0$ ; in questo caso si ottiene facilmente che la soluzione è quella precedente ruotata di  $22,5^\circ$ .

## Il metodo di Miki

- Naturalmente, altre combinazioni sono possibili, prendendo in considerazione altri segmenti (cioè, la condizione di Werren e Norris è solo sufficiente per l'isotropia di membrana).
- Ora, un punto di laminazione, come già detto, può rappresentare diversi laminati; tuttavia, dal momento che un punto è definito da due soli parametri, due angoli sono sufficienti per ottenere un laminato con le caratteristiche volute.
- In altre parole, nella classe dei laminati simmetrici ed equilibrati bastano due gruppi di orientazioni,  $\pm\delta_1$  e  $\pm\delta_2$  per ottenere le caratteristiche di rigidità in membrana ricercate.
- Allora, una volta individuato il punto di laminazione, basta far passare un segmento da questo punto e trovarne le intersezioni con la frontiera di  $\Omega$  (sulla quale, si ricorda, si trovano proprio solo le soluzioni di tipo  $\pm\delta$ , eccetto sul segmento  $AC$ ); procedendo poi come descritto in precedenza si ottiene una soluzione possibile.

## Il metodo di Miki

- Analiticamente, per un laminato con due gruppi di orientazioni, si ha

$$\xi_1 = \nu_1 \cos 2\delta_1 + \nu_2 \cos 2\delta_2, \quad \xi_2 = \nu_1 \cos 4\delta_1 + \nu_2 \cos 4\delta_2.$$

con ovviamente

$$\nu_2 = 1 - \nu_1.$$

- Quindi, sono 3 i parametri da scegliere per ottenere un laminato corrispondente ad un punto di laminazione voluto; dalle equazioni sopra, si possono ricavare due di questi parametri se se ne fissa un terzo.
- Se ad esempio si fissa  $\nu_1$ , si ottengono le orientazioni nella forma

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \arccos Q_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \arccos Q_2,$$

dove

$$Q_1 = \frac{2\nu_1\xi_1 \pm \sqrt{2\nu_1\nu_2(1 + \xi_2 - 2\xi_1^2)}}{2\nu_1}, \quad Q_2 = \frac{\xi_1 - \nu_1 Q_1}{\nu_2}.$$

## Il metodo di Miki

- Miki ha anche considerato il caso di laminati equilibrati con alcuni strati a  $0^\circ$  (l'ortotropia di membrana si conserva, si constata facilmente).
- In questo caso,

$$\xi_1 = \nu_1 \cos 2\delta_1 + \nu_2 \cos 2\delta_2 + \nu_3,$$

$$\xi_2 = \nu_1 \cos 4\delta_1 + \nu_2 \cos 4\delta_2 + \nu_3,$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1.$$

- Per una scelta fatta di 2 dei 3 parametri di laminazione, si ottiene

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{\xi_1 - \nu_2 \Theta - \nu_3}{\nu_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \arccos \Theta, \quad \text{dove}$$

$$\Theta = \frac{-K_b \pm \sqrt{K_b^2 - K_a K_c}}{K_a}, \quad K_a = 2\nu_2(\nu_1 + \nu_2), \quad K_b = 2\nu_2(\nu_3 - \xi_1),$$

$$K_c = 2\nu_3^2 + 2(\nu_1 - 2\xi_1)\nu_3 - (1 + \xi_2)\nu_1 + 2\xi_1^2.$$

## Il metodo di Miki

- Si deve comunque tener conto del fatto, da un lato, che non tutti i segmenti passanti per un punto di laminazione possono essere presi in considerazione per ottenere un laminato con le proprietà cercate, dall'altro, che le frazioni volumiche, soprattutto per laminati a basso numero di strati, non sono tutte disponibili, dovendo queste essere delle frazioni del numero totale degli strati, e non dei reali qualsiasi.
- Miki e Sugiyama (1991) hanno generalizzato questo approccio per prendere in considerazione il fatto che il numero degli strati in ogni orientazione è un intero, sostanzialmente individuando a priori sul dominio  $\Omega$  un reticolo di punti capaci di dar luogo a laminati con frazioni volumiche degli strati derivanti da rapporti tra numeri interi di uso relativamente frequente.

## Progetto della rigidezza

- Vediamo adesso come si procede, col metodo di Miki, per la progettazione di un laminato rispondente ad alcuni criteri tipici di progetto, riguardanti i moduli di rigidezza in membrana.
- Innanzitutto, ricordiamo l'espressione dei moduli in membrana per un laminato ortotropo (vedi pagina 331):

$$E_x^m = \frac{1}{a_{xx}^*}, \quad E_y^m = \frac{1}{a_{yy}^*}, \quad G_{xy}^m = \frac{1}{a_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^m = -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}.$$

- Essendo il laminato disaccoppiato (sequenza simmetrica per ipotesi),  $\mathbf{a}^* = \mathbf{A}^{*-1}$  e in definitiva si ottiene

$$E_x^m = \frac{1}{h} \left( A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right), \quad E_y^m = \frac{1}{h} \left( A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right), \quad G_{xy}^m = \frac{A_{ss}}{h}, \quad \nu_{xy}^m = \frac{A_{xy}}{A_{yy}}.$$

- In termini di parametri di laminazione si ottiene dunque

## Progetto della rigidezza

$$E_x^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$E_y^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = U_5 - \xi_2 U_3, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{U_4 - \xi_2 U_3}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

con i parametri di Tsai e Pagano, mentre col metodo polare è

$$E_x^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1},$$

$$E_y^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 + 4R_1 \xi_1},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = T_0 - (-1)^k R_0 \xi_2, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1, \xi_2) = -\frac{T_0 - 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}.$$

413



## Progetto della rigidezza

- La massimizzazione della rigidezza in direzione  $x$ , ad esempio, corrisponde dunque al problema di minimo in forma standard seguente:

$$\min -E_x^m(\xi_1, \xi_2) = -\left[ U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3} \right]$$

$$\text{con } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Con i parametri polari si ha

$$\min -E_x^m(\xi_1, \xi_2) = -\frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}$$

$$\text{con } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Questo problema ha senso soltanto se si aggiungono altre condizioni, ad esempio su un minimo della rigidezza trasversale, altrimenti la soluzione è ben nota, si devono semplicemente disporre tutti gli strati con le fibre in direzione  $x$ .

414





## Progetto della rigidezza

- La funzione da minimizzare non è lineare, ed è convessa nello spazio dei parametri di laminazione ma non nello spazio delle orientazioni (vedi le formule di pagina 401).
- La soluzione di questo problema necessita, in generale, di un approccio numerico.
- Più semplice è il progetto di un laminato avente il modulo a taglio massimo.
- Si tratta di risolvere il problema di minimo in forma standard

$$\min -G_{xy}^m(\xi_2) = \xi_2 U_3 - U_5$$

$$\text{con } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Questo problema non è lineare, ma la soluzione si trova sul bordo del dominio ammissibile, perché la funzione obiettivo è lineare; si vede immediatamente che il laminato che massimizza la rigidezza a taglio in membrana è del tipo

415



## Progetto della rigidezza

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \xi_2 = -1 & \text{ se } U_3 > 0 \text{ sequenza } \textit{angle-ply} \text{ di tipo } \pm 45^\circ; \\ \xi_1 = \text{qualsunque}, \xi_2 = 1 & \text{ se } U_3 < 0 \text{ sequenza } \textit{cross-ply}. \end{aligned}$$

- Normalmente  $U_3 > 0$ , e dunque è una sequenza di tipo  $\pm 45^\circ$  che generalmente massimizza la rigidezza a taglio in membrana.
- Con il metodo polare, si sarebbe ottenuto:

$$\min -G_{xy}^m(\xi_2) = -T_0 + (-1)^k R_0 \xi_2$$

$$\text{con } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- La soluzione è dunque

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \xi_2 = -1 & \text{ se } k = 0 \text{ sequenza } \textit{angle-ply} \text{ di tipo } \pm 45^\circ; \\ \xi_1 = \text{qualsunque}, \xi_2 = 1 & \text{ se } k = 1 \text{ sequenza } \textit{cross-ply}. \end{aligned}$$

- In entrambi i casi,

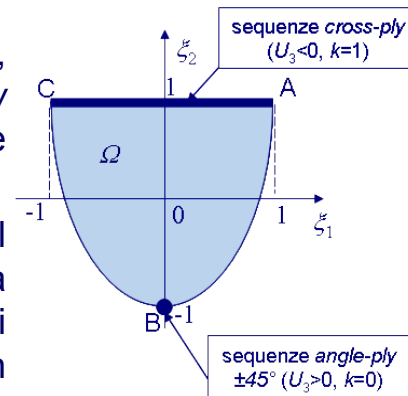
$$\max G_{xy}^m = T_0 + R_0 \quad (= U_3 + U_5).$$

416



## Progetto della rigidezza

- In effetti, il caso di un materiale con  $U_3 > 0$ ,  $k=0$ , è quello che Pedersen chiama un *low shear modulus material*, mentre  $U_3 < 0$ ,  $k=1$ , è un *high shear modulus material*.
- In quest'ultimo caso, la rigidezza a taglio del laminato è massimizzata ponendo gli strati a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , secondo una percentuale qualsiasi (infinite soluzioni teoriche): la sequenza non influisce sul valore finale della rigidezza a taglio in membrana.



- Un problema diverso, e più semplice, è quello di determinare un laminato avente un modulo dato.
- In questo caso, è utile tracciare le curve di isovalori dei moduli, che si ricavano dalle funzioni di pagina 413:

417



## Progetto della rigidezza

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 - U_2 E_x^m \xi_1 + E_x^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_x^m)} \quad \text{curve di isovalori di } E_x^m,$$

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 + U_2 E_y^m \xi_1 + E_y^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_y^m)} \quad \text{curve di isovalori di } E_y^m,$$

$$\xi_2 = \frac{U_5 - G_{xy}^m}{U_3} \quad \text{curve di isovalori di } G_{xy}^m,$$

$$\xi_2 = \frac{\nu_{xy}^m U_2 \xi_1 - \nu_{xy}^m U_1 + U_4}{U_3 (1 + \nu_{xy}^m)} \quad \text{curve di isovalori di } \nu_{xy}^m.$$

- Con i parametri polari si ottiene

418



## Progetto della rigidezza

$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)E_x^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0(8T_1 - E_x^m)} \quad \text{curve di isovalori di } E_x^m,$$

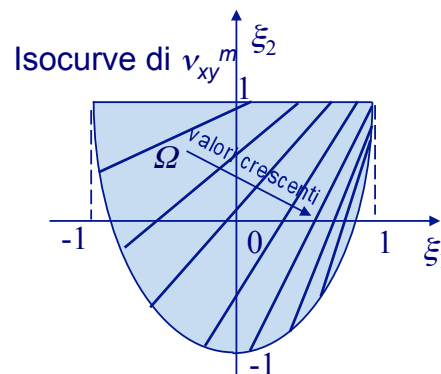
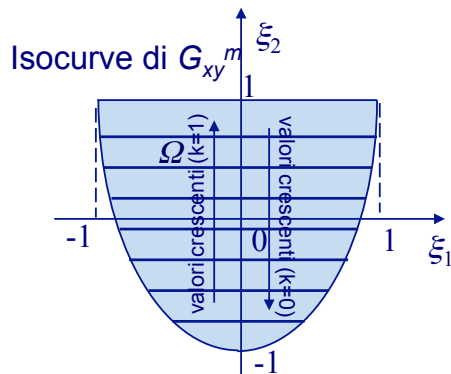
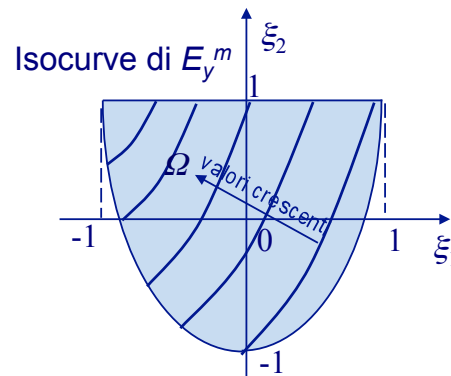
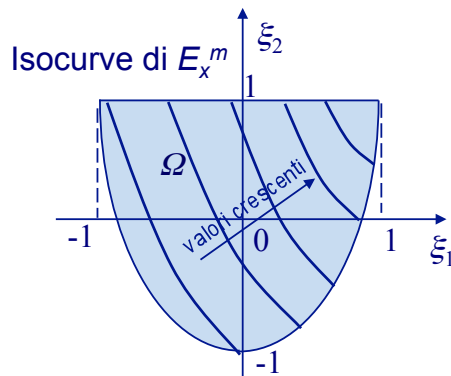
$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 + 4R_1\xi_1)E_y^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0(8T_1 - E_y^m)} \quad \text{curve di isovalori di } E_y^m,$$

$$\xi_2 = \frac{T_0 - G_{xy}^m}{(-1)^k R_0} \quad \text{curve di isovalori di } G_{xy}^m,$$

$$\xi_2 = \frac{2T_1 - T_0 - (T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)v_{xy}^m}{(-1)^k R_0(1 + v_{xy}^m)} \quad \text{curve di isovalori di } v_{xy}^m.$$

- Le figure seguenti mostrano l'andamento qualitativo delle isocurve dei moduli dell'ingegnere in membrana.

## Progetto della rigidezza



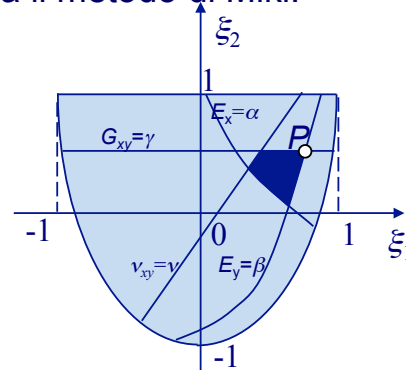
## Progetto della rigidezza

- Vediamo con alcuni esempi come si applica il metodo di Miki.
- Esempio 1 (Miki): si vuole progettare un laminato tale che:

$E_x^m$  sia massimo,

con le condizioni:

$$E_x^m > \alpha, E_y^m > \beta, G_{xy}^m > \gamma, \nu_{xy}^m < \nu.$$



- Si sceglie allora un materiale di base per cui il dominio ammissibile, definito dalle condizioni qui sopra, sia contenuto in  $\Omega$ .
- Si conosce dunque la regione di  $\Omega$  cui il punto di laminazione deve appartenere. Tramite le isocurve di  $E_x^m$ , si riconosce che il punto di ottimo è allora il punto  $P$  in figura (se  $U_3 > 0, k=0$ ).
- Si conoscono adesso i parametri di laminazione della soluzione e per determinare le orientazioni si procede come visto in precedenza.

421



## Progetto della rigidezza

- Esempio 2 (Gürdal, Haftka, Hajela): progettare un laminato con strati in carbonio-epoxy ( $E_1 = 128$  GPa,  $E_2 = 13$  GPa,  $G_{12} = 6.4$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ) tale da massimizzare  $E_x^m$  e da rispettare le condizioni seguenti:  $G_{xy}^m \geq 25$  GPa,  $\nu_{xy}^m \leq 1$ .
- Calcoliamo dapprima i parametri di Tsai e Pagano (o quelli polari) per lo strato di base: si ottiene (formule di pagina 156 e 393)

$$U_1 = 57.547 \text{ GPa}, \quad U_2 = 58.030 \text{ GPa}, \quad U_3 = 13.604 \text{ GPa}, \\ U_4 = 17.540 \text{ GPa}, \quad U_5 = 20.004 \text{ GPa},$$

oppure

$$T_0 = 20 \text{ GPa}, \quad T_1 = 18.772 \text{ GPa}, \quad R_0 = 13.604 \text{ GPa}, \\ R_1 = 14.508 \text{ GPa}, \quad \Phi_0 = \Phi_1 = 0^\circ (\rightarrow k = 0).$$

- Determiniamo il dominio ammissibile in  $\Omega$ : le rette che corrispondono alle due condizioni sono nell'ordine

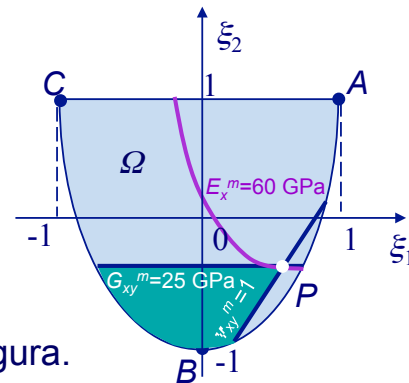
422



## Progetto della rigidezza

$$\xi_2 = -0.3673,$$

$$\xi_2 = 2.1328 \xi_1 - 1.4704.$$



- Il dominio ammissibile è rappresentato in figura.
- Allora, ricordando l'andamento delle isocurve di  $E_x^m$ , si ricava che il punto di laminazione che massimizza  $E_x^m$  sotto le condizioni poste è il punto  $P=(0.5172, -0.3672)$ .
- Si può dunque calcolare (ad esempio tramite le formule di pagina 413) il valore di  $E_x^m$  ottenuto; si ricava  $E_x^m=60$  GPa.
- Resta soltanto da decidere come ottenere il laminato che ha queste caratteristiche. Per far questo, si può seguire il procedimento analitico di pagina 409. Se si prende  $\nu_1=0.5$ , si ottiene facilmente

$$\delta_1 = 21.20^\circ, \quad \delta_2 = 36.39^\circ.$$

## Progetto della rigidezza

- Quindi, il laminato è composto da una sequenza simmetrica di un ugual numero di strati disposti secondo le orientazioni  $\pm 21.20^\circ$ ,  $\pm 36.39^\circ$ . Il minimo numero di strati è dunque 8.
- Altri problemi di progetto delle proprietà di membrana possono essere trattati nello stesso modo, tra cui, ad esempio, quello della progettazione dei coefficienti di espansione termica.
- Più difficile è la progettazione della rigidezza in flessione. In tal caso infatti le formule di pagina 396 mostrano che nella definizione dei parametri di laminazione entrano anche i coefficienti  $d_k$ , e dunque la posizione dello strato sulla sequenza di impilamento.
- Inoltre, si è già detto della difficoltà di ottenere allo stesso tempo il disaccoppiamento membrana-flessione e l'ortotropia in flessione.

## Progetto della rigidità

- Questo vuol dire che, *a priori*, non si possono ritenere nulli i termini  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ , e dunque che si dovrebbe lavorare con 4 parametri di laminazione e non con 2. In definitiva, l'approccio di Miki, a rigore, non è più possibile in flessione.
- Per ovviare a questo inconveniente e continuare ad utilizzare un metodo del tipo di quello di Miki, molti autori fanno l'ipotesi che i termini  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ , pur se presenti, siano trascurabili.
- In sostanza, considerano il laminato come ortotropo in flessione, ma si deve precisare che questa assunzione non ha fondamento scientifico preciso, e non è escluso che, *a posteriori*, le componenti  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$  si rivelino di valore consistente.
- Con questo approccio, ci si riduce a considerare solo i parametri di laminazione  $\xi_9$  e  $\xi_{10}$ , per i quali valgono delle limitazioni analoghe a  $\xi_1$  e  $\xi_2$  (Miki, 1985):

$$-1 \leq \xi_9 \leq 1, \quad 2\xi_9^2 - 1 \leq \xi_{10} \leq 1.$$

## Progetto della rigidità

- Le considerazioni fatte nel caso del comportamento di membrana si possono quindi fare anche nel caso della flessione; in particolare, i parametri di laminazione possono essere riscritti, per un laminato equilibrato, come

$$\xi_9 = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_{10} = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 4\delta_k,$$

$$s_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} d_j}{n^3}, \quad \text{somma estesa agli } n_k \text{ strati del gruppo di orientazione } k.$$

- Si verifica facilmente che vale ancora la regola per cui la somma degli  $s_k$  è uguale all'unità.
- In particolare, se si prendono solo due gruppi di orientazioni,  $\pm\delta_1$  e  $\pm\delta_2$ , allora si ottiene una soluzione identica a quella di pagina 409, laddove si sostituiscono  $\xi_1$  e  $\xi_2$  con  $\xi_9$  e  $\xi_{10}$ .

## Progetto della rigidezza

- Il progetto della rigidezza flessionale è necessario anche in due circostanze importanti: il progetto rispetto al carico critico di stabilità o rispetto alle frequenze proprie.
- In entrambi i casi, si deve specificare la geometria e le condizioni di vincolo della piastra, e per il caso del carico critico anche il tipo di sollecitazione di membrana (in genere, un carico agente nel piano medio della lastra e sul suo contorno).
- Le soluzioni di cui si dispone riguardano in genere le piastre rettangolari ortotrope in flessione, con assi di ortotropia paralleli ai lati della piastra.
- Questa sembra essere una condizione indispensabile per poter ottenere una soluzione analitica (in forma chiusa o in forma di serie) a qualunque problema di piastra anisotropa; non esistono infatti soluzioni analitiche di nessun tipo per piastre rettangolari ortotrope fuori asse; in definitiva, la presenza dei termini di accoppiamento flessione-torsione,  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ , preclude, apparentemente, la possibilità di trovare una soluzione analitica.

427



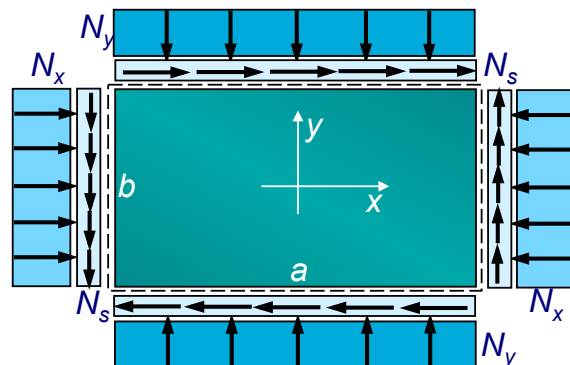
## Progetto della rigidezza

- Nel caso del progetto del carico critico di stabilità, se  $N_s=0$  e se il carico è applicato solo sul bordo (vedi figura), per una piastra appoggiata sul contorno si può esprimere la freccia come

$$w_0 = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

dove  $m$  e  $n$  sono il numero di semi-onde, rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$ , della deformata sinusoidale della piastra per perdita di stabilità.

- La piastra si considera essere disaccoppiata (per esempio per la simmetria della sequenza) e ortotropa (eventualmente perché si considerano nulli  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ ). Come visto, questa ipotesi è, il più delle volte, una approssimazione, eventualmente da verificare a posteriori.



428



## Progetto della rigidezza

- In tali ipotesi, si conosce il valore del moltiplicatore critico di stabilità  $\lambda$  del carico  $\mathbf{N}=(N_x, N_y, 0)$ , vedi capitolo seguente:

$$\lambda = \pi^2 \frac{D_{xx} \frac{m^4}{a^4} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_{yy} \frac{n^4}{b^4}}{N_x \frac{m^2}{a^2} + N_y \frac{n^2}{b^2}}$$

- Si nota che  $\lambda$  dipende dall'anisotropia di flessione e dal rapporto  $a/b$ ; è quindi impossibile dire a priori a quale forma modale corrisponde il carico critico più piccolo.
- Normalmente, si vuole massimizzare  $\lambda$ ; quindi, per ogni forma modale cioè per ogni scelta di  $m$  e  $n$ , si deve massimizzare la funzione

$$f = D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

## Progetto della rigidezza

- Utilizzando i parametri di laminazione, si ha, per ogni forma modale, il seguente problema di ottimo in forma standard

$$\begin{aligned} \min f(\xi_9, \xi_{10}) = & -[U_1(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta(U_4 + 2U_5) + \\ & + \xi_9 U_2(\alpha^2 - \beta^2) + \xi_{10} U_3(\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2)] \\ \text{con } & \xi_9 - 1 \leq 0, \quad -1 - \xi_9 \leq 0, \quad \xi_{10} - 1 \leq 0, \quad \xi_9^2 - \xi_{10} - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

- Con i parametri polari si ottiene invece

$$\begin{aligned} \min f(\xi_9, \xi_{10}) = & -(T_0 + 2T_1)(\alpha + \beta)^2 - 4R_1\xi_9(\alpha^2 - \beta^2) - (-1)^k R_0\xi_{10}(\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2) \\ \text{con } & \xi_9 - 1 \leq 0, \quad -1 - \xi_9 \leq 0, \quad \xi_{10} - 1 \leq 0, \quad \xi_9^2 - \xi_{10} - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

- Si nota che la funzione da minimizzare dipende linearmente da  $\xi_9$  e  $\xi_{10}$  ed il problema è convesso nello spazio dei parametri di laminazione.



## Progetto della rigidezza

- La funzione  $f(\xi_9, \xi_{10})$  descrive quindi un piano (le sue isocurve sono dunque delle rette parallele) e questo implica che il massimo si trova sul bordo di  $\Omega$ : i laminati che massimizzano il carico critico sono dei laminati *angle-ply*.
- Si deve tuttavia ricordare che il più delle volte queste soluzioni sono approssimate, per quanto detto in precedenza; la valutazione dei valori dei termini  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$  è importante, e dovrebbe considerare la perturbazione del carico critico provocata dalla loro eventuale presenza.
- Per quanto riguarda il progetto delle frequenze proprie, consideriamo solo il caso in cui si voglia massimizzare la prima frequenza propria, e per una piastra rettangolare, di massa unitaria  $\mu$ , appoggiata sul contorno, ortotropa negli assi  $x$  e  $y$ , a sequenza simmetrica; insomma, lo stesso tipo di piastra già considerato per il caso del carico critico.

431



## Progetto della rigidezza

- Si cerca normalmente una soluzione nella forma

$$w_0 = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} t.$$

- In tal caso, le frequenze proprie sono date da (capitolo seguente)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\mu} \left[ D_{xx} \alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) \alpha \beta + D_{yy} \beta^2 \right]$$

- Per massimizzare la frequenza di un certo modo si deve dunque massimizzare la stessa funzione che rende estremo il carico critico dello stesso modo: i laminati che massimizzano il carico critico di un modo massimizzano dunque anche la frequenza corrispondente.

432



## Progetto della resistenza

- Il progetto della resistenza è più complicato di quello della rigidità, per vari motivi.
- Innanzitutto, si deve specificare una situazione di carico, ed in generale questa dipende da almeno 6 parametri, le componenti di  $\mathbf{M}$  ed  $\mathbf{N}$  (escludendo per semplicità le sollecitazioni di altra natura, come quelle termiche).
- In seguito, si deve poter risalire dalle sollecitazioni ai limiti ammissibili, e questo per ciascuno strato, non potendosi sapere *a priori* quale sia lo strato più sollecitato.
- Inoltre, questo comporta la scelta di un criterio di resistenza, e questi non sono equivalenti, soprattutto dal punto di vista del calcolo.
- I metodi per il progetto in resistenza sono dunque meno ben stabiliti che quelli in rigidità.
- Qui di seguito, si fa solo un cenno ad una applicazione possibile del metodo di Miki anche al caso del progetto della resistenza.

433



## Progetto della resistenza

- Consideriamo dunque il caso di un laminato equilibrato, simmetrico, sollecitato solo nel suo piano ( $\mathbf{M}=\mathbf{O}$ ).
- Le deformazioni negli strati sono le medesime, e date in questo caso dalla relazione

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}.$$

- D'altra parte,  $\mathbf{A}$  è funzione dei parametri di laminazione  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , pagina 391 e 397, e dunque svolgendo i calcoli con i parametri di Tsai e Pagano si trova

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{h} \frac{(U_1 - U_2 \xi_1 + U_3 \xi_2) N_x - (U_4 - U_3 \xi_2) N_y}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2 \xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4) \xi_2},$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{h} \frac{(U_1 + U_2 \xi_1 + U_3 \xi_2) N_y - (U_4 - U_3 \xi_2) N_x}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2 \xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4) \xi_2},$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{h} \frac{N_s}{U_5 - U_3 \xi_2}.$$

434



## Progetto della resistenza

- Con i parametri polari si ottiene invece

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{8h} \frac{(T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1 + (-1)^k R_0\xi_2)N_x + (T_0 - 2T_1 + (-1)^k R_0\xi_2)N_y}{T_0T_1 - 2R_1^2\xi_1^2 + (-1)^k R_0T_1\xi_2}$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{8h} \frac{(T_0 + 2T_1 + 4R_1\xi_1 + (-1)^k R_0\xi_2)N_y + (T_0 - 2T_1 + (-1)^k R_0\xi_2)N_x}{T_0T_1 - 2R_1^2\xi_1^2 + (-1)^k R_0T_1\xi_2}$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{h} \frac{N_s}{T_0 - (-1)^k R_0\xi_2}$$

- Queste componenti tensoriali della deformazione devono in seguito essere trasformate, per ciascuno strato, al fine di esprimerle nel riferimento materiale dello strato, ruotato in senso trigonometrico di un angolo  $\delta_k$  rispetto al riferimento globale del laminato.
- Questo si fa utilizzando le formule di pagina 160:

## Progetto della resistenza

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix}, \quad c = \cos \delta_k, \quad s = \sin \delta_k.$$

- Consideriamo per semplicità solo il caso di un laminato equilibrato con due soli possibili gruppi di orientazioni,  $\pm\delta_1$  e  $\pm\delta_2$ .
- In tal caso, ricordando le formule di pagina 409, si ottengono con alcune trasformazioni le espressioni delle componenti di deformazione nei due gruppi di strati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{1+Q_k}{2} & \frac{1-Q_k}{2} & \frac{\sin(\arccos Q_k)}{2} \\ \frac{1-Q_k}{2} & \frac{1+Q_k}{2} & -\frac{\sin(\arccos Q_k)}{2} \\ -\sin(\arccos Q_k) & \sin(\arccos Q_k) & Q_k \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

## Progetto della resistenza

- Adesso, si possono ricavare le tensioni in ciascuno strato (per le ipotesi fatte, la matrice  $[Q]$  è la stessa per ogni strato):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k .$$

- Disponendo delle tensioni nei due gruppi di strati, si possono rappresentare nel piano dei parametri di laminazione,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , dei limiti imposti sulle tensioni massime (criterio della tensione massima), o su una loro combinazione (criteri di Tsai-Hill, Hoffmann, Tsai-Wu), o fermandosi alle deformazioni, i limiti propri al criterio della deformazione massima.
- In tal modo, si definisce sul dominio  $\Omega$  una regione ammissibile, eventualmente determinata anche da altre condizioni, ad esempio sulla rigidità, nella quale si può determinare un punto di laminazione ottimale per un dato problema (per esempio,  $E_x^m$  max).

437



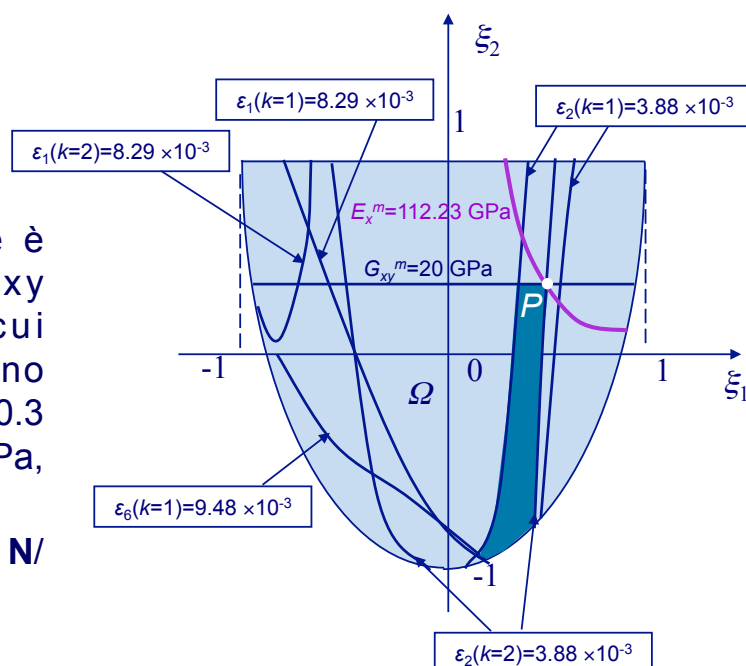
## Progetto della resistenza

- A titolo di esempio, si riporta il caso seguente (Gürdal, Haftka, Hajela): si deve massimizzare  $E_x^m$  con le condizioni:

- $G_{xy}^m \geq 20$  GPa;
- $\varepsilon_1 \leq 8.29 \times 10^{-3}$ ;
- $\varepsilon_2 \leq 3.88 \times 10^{-3}$ ;
- $\varepsilon_6 \leq 9.48 \times 10^{-3}$ .

- Il materiale di base è un carbonio-epoxy T300-5208, le cui caratteristiche sono  $E_1 = 181$  GPa,  $E_2 = 10.3$  GPa,  $G_{12} = 7.17$  GPa,  $\nu_{12} = 0.28$ .

- La sollecitazione è:  $\mathbf{N}/h = \{0.5, 0.25, 0\}$  GPa.



438



## Progetto della resistenza

- Le curve rappresentanti i vari vincoli sono mostrate nella figura precedente; il dominio ammissibile è indicato in blu scuro, ed il punto di laminazione che massimizza  $E_x^m$  è il punto  $P = (0.397, 0.349)$ , per il quale si ottiene, per  $\nu_1 = 0.4$ ,  $Q_1 = -0.4842$  e  $Q_2 = 0.9838$ , da cui i due angoli del primo gruppo (40% degli strati)  $\delta_1 = \pm 59.48^\circ$  e del secondo (60% degli strati)  $\delta_2 = \pm 5.16^\circ$ .
- Per il modulo di Young, si ottiene il valore  $E_x^m = 112.23$  GPa.
- Una soluzione possibile è un 20 strati simmetrico, con 8 strati nel primo gruppo e 12 nel secondo, in modo da rispettare la condizione di laminato equilibrato e le frazioni volumiche degli strati, ad esempio

$$[\delta_1/-\delta_1/\delta_2/-\delta_2/ \delta_2/-\delta_2/ \delta_2/-\delta_2/-\delta_1/\delta_1]_s.$$

## Approcci numerici moderni

- Il breve panorama dei metodi di progetto presentato permette di mettere in evidenza alcuni punti critici di questi metodi classici.
- Il più importante, è che in effetti *quasi mai si cerca una autentica soluzione ottimale a un dato problema*.
- In effetti, la scelta di cercare la soluzione in una classe particolare di laminati (soprattutto gli equilibrati simmetrici) restringe drasticamente lo spazio di ricerca, eliminando alla base delle soluzioni possibili, spesso le vere soluzioni ottimali.
- D'altra parte, come si è visto, questa strategia è utilizzata per due ragioni fondamentali: da un lato, per ridurre la complicazione del problema (per esempio, perché permette di limitare il numero delle variabili di progetto), dall'altro, per assicurarsi *a priori* alcune caratteristiche meccaniche di difficile progettazione e formalizzazione matematica in un problema di ottimo.
- Queste assunzioni hanno dei risvolti importanti, soprattutto per la progettazione in flessione, per la quale quasi tutte le soluzioni

## Approcci numerici moderni

disponibili in letteratura, ad esempio per il carico critico, sono in principio approssimate (perché si trascura il progetto di  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ ).

- Vista la complessità del problema di progetto di un laminato, la via più indicata è quella di utilizzare dei metodi propri all'ottimizzazione strutturale.
- In tal modo, è possibile formalizzare in modo classico, nell'ambito di questa disciplina, un problema di progetto che permetta di prendere in conto non soltanto l'obiettivo primo della progettazione (ad esempio, la massimizzazione della rigidità), ma anche i requisiti sulle simmetrie elastiche (disaccoppiamento, ortotropia in membrana e/o in flessione etc.) che normalmente fanno parte integrante del progetto di un laminato.
- Questi requisiti possono essere formalizzati sia sotto forma di vincoli imposti alla ricerca dell'ottimo, sia, in alcuni casi, come parte integrante della funzione obiettivo.

## Approcci numerici moderni

- In altre parole, si può parlare oggi di *ottimizzazione globale* di un laminato.
- Questa prospettiva è permessa in gran parte dalle tecniche moderne di ottimizzazione.
- Non si deve infatti dimenticare che la complessità intrinseca dei problemi che si incontrano nella progettazione dei laminati (funzioni obiettivo non convesse con un numero elevato di variabili di progetto), comporta che il più delle volte si ha a che fare con problemi di minimo aventi una grande molteplicità di soluzioni (minimi assoluti e non), a volte con veri e propri domini di soluzioni (soluzioni non isolate).
- Inoltre spesso, per consuetudini costruttive, si limitano le orientazioni possibili ad un insieme piuttosto ristretto di angoli (per esempio,  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ), e quindi si deve operare con variabili discrete.

## Approcci numerici moderni

- Queste difficoltà sono affrontate dalle tecniche moderne di ottimizzazione, che possono trattare con successo problemi non convessi, di grandi dimensioni e con variabili di ogni tipo: sono le cosiddette *metaeuristiche di ottimizzazione*.
- Si tratta di algoritmi capaci di trattare problemi complicati ispirandosi non alle tecniche matematiche classiche (discesa verso il minimo di un "individuo", guidato dalle "informazioni" date dalla funzione obiettivo), ma ad altre leggi della natura, provenienti da diversi contesti:
  - metallurgico: metodo del *simulated annealing*;
  - sociologico: metodo tabu;
  - biologico: algoritmi genetici o evolutivi, metafore immunologiche, *particle swarm optimization*, colonie di formiche, reti neurali etc.
- I metodi applicati con più successo nel campo della progettazione dei laminati sono il metodo del *simulated annealing* e gli algoritmi genetici.

## Approcci numerici moderni

- In questi algoritmi, si fa evolvere, con un criterio di selezione ispirato dalla funzione obiettivo, una popolazione di "individui" candidati a essere soluzione del problema dato.
- Sono metodi di ordine 0 (nessun bisogno di calcolare le derivate della funzione obiettivo) e quindi ben adatti a rappresentare qualunque tipo di variabile, continua o discreta.
- Per il fatto poi che lavorano non su un solo "individuo" ma su tutta una popolazione, aggirano alla base, statisticamente, il problema della non convessità, ed il rischio dunque di convergere verso soluzioni non ottimali (minimi locali).
- Per questa ragione si prestano molto bene a trattare dei problemi di progettazione ottimale dei laminati, per i quali la funzione obiettivo è sempre una combinazione di funzioni trigonometriche delle orientazioni, e quindi fortemente non convessa.
- Molti studi sono stati condotti recentemente da diversi studiosi, come Haftka, Gürdal, Hajela, Le Riche, Grédiac etc.

## Approcci numerici moderni

- In questi studi, i problemi affrontati coprono uno spettro molto più vasto di quello, ristretto, visto nei paragrafi precedenti, e questo è possibile grazie al punto di vista totalmente diverso: si formalizza un problema di minimo e se ne cerca la soluzione con una metaeuristica.
- Tuttavia, in diversi di questi studi, si resta ancorati a scelte fatte *a priori*, e volte a garantire l'esistenza delle simmetrie elastiche desiderate.
- Studi più recenti (Vannucci & Vincenti, etc.), basati su una generalizzazione radicale del problema di progetto di un laminato come problema di minimo, permettono di ottenere la più grande generalità nella ricerca delle soluzioni ottimali e di affrancarsi dunque dai vincoli classici che si impongono generalmente al progetto di un laminato (tipicamente, la simmetria della soluzione).
- A titolo di esempio, si mostra il caso di un laminato a 12 strati in carbonio-epoxy T300-5208 (pagina 438), con  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{A}$  ortotropo e

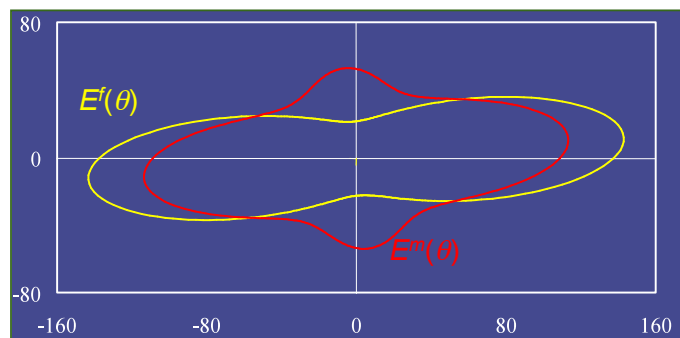
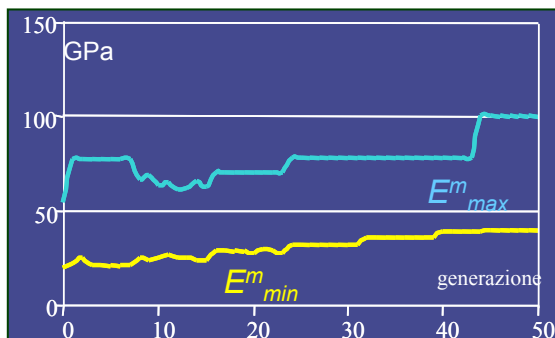
445



## Approcci numerici moderni

tale da rispettare le condizioni seguenti:  $E_{max}^m \geq 100$  GPa ( $0.55 E_1$ ) e  $E_{min}^m \geq 40$  GPa ( $3.88 E_2$ ). In aggiunta, le orientazioni devono essere dei multipli di  $15^\circ$  (Vannucci e Vincenti).

- Il problema è stato risolto con un algoritmo genetico; la soluzione è  $[0^\circ/30^\circ/-15^\circ/15^\circ/90^\circ/-75^\circ/0^\circ/45^\circ/-75^\circ/0^\circ/-15^\circ/15^\circ]$ .
- In figura, si riporta il grafico direzionale di  $E^m$  e  $E^f$  e la variazione, durante le generazioni (50 in totale) di  $E_{min}^m$  e  $E_{max}^m$ .



446





## Capitolo 8

### ■ Teorie e soluzioni per laminati e piastre sandwich

□ Introduzione	448
□ Equazioni di equilibrio di un laminato	450
□ Stabilità elastica di un laminato	472
□ Vibrazioni trasversali di un laminato	488
□ Il calcolo delle tensioni di taglio	495
□ Le tensioni ai bordi liberi	503
□ La teoria di Reissner-Mindlin	516
□ Teorie di ordine superiore per i laminati	528
□ La teoria di Verchery-Pham Dang per i sandwich	533
□ La teoria tridimensionale di Pagano	535

## Introduzione

- Da quanto visto sinora, la teoria classica dei laminati concerne essenzialmente la riduzione del comportamento del laminato ad un monostrato equivalente.
- Il comportamento del laminato è descritto, come visto, da tre tensori, **A**, **B** e **D**; quando questi siano noti, se si accettano le ipotesi di base della teoria classica, l'analisi della risposta meccanica di un laminato si riconduce a quella del monostrato equivalente.
- Per esso, si possono allora adottare i metodi classici di analisi delle piastre anisotrope, considerando però l'eventuale presenza dell'accoppiamento membranale-flessionale.
- Questa parte viene rapidamente richiamata nei primi tre paragrafi di questo capitolo, per l'analisi statica dapprima e per quella dinamica e di stabilità dopo, insieme ad un cenno a metodi tradizionali di soluzione in forma analitica.
- Tuttavia, si è già avuto modo in precedenza di sottolineare le inconsistenze della teoria classica, che è densa di paradossi

## Introduzione

meccanici, di cui il più importante è forse l'impossibilità di predire le tensioni da taglio, la cui esistenza è necessaria per l'equilibrio in caso di azioni applicate normali al piano medio.

- Nei due paragrafi seguenti, si introduce dapprima il modo con cui si può completare, in alcuni casi, la teoria classica al fine di includere nel calcolo le tensioni tangenziali in direzione ortogonale al piano medio, e si dà poi un cenno al problema delle tensioni al bordo libero, importanti nella meccanica dei laminati in quanto possono dar luogo al fenomeno della delaminazione.
- L'esistenza di queste tensioni ai bordi liberi mette ancor più in evidenza i limiti della teoria classica dei laminati.
- Si procede allora, nei paragrafi successivi, ad una breve presentazione delle teorie di ordine superiore per i laminati e le piastre sandwich, terminando con la soluzione tridimensionale esatta di Pagano.
- Per ragioni di spazio, questo capitolo non può scendere nei dettagli delle diverse teorie, per i quali si rimanda ai testi specializzati.

449



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Consideriamo un elemento infinitesimo di piastra, soggetto alle azioni interne di figura e a sole azioni esterne ortogonali al piano medio  $p(x, y)$ .
- Rispetto alla teoria classica, volendo qui trovare le equazioni di equilibrio, si devono anche introdurre le risultanti, per unità di lunghezza, delle azioni di taglio, normalmente indicate, in meccanica dei laminati, con  $Q_x$  e  $Q_y$  e definite come

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dz \end{Bmatrix}$$

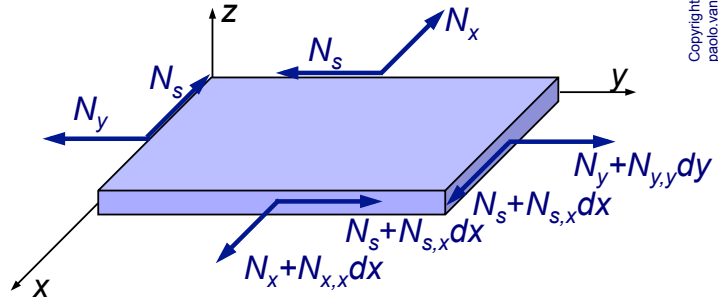
- Con riferimento alle figure seguenti, le equazioni di equilibrio nelle tre direzioni e alla rotazione attorno ai due assi si scrivono facilmente e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene (le virgole indicano derivazione):

450

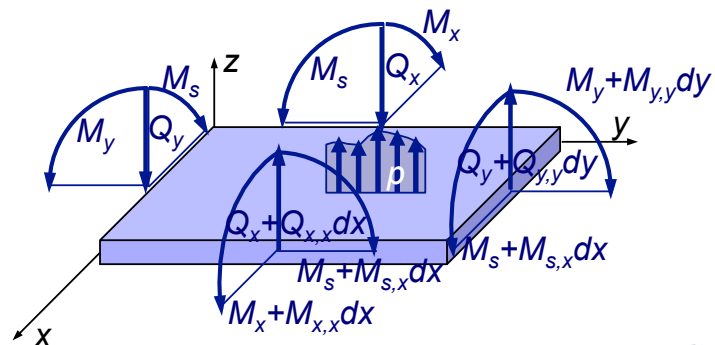


## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{s,y} &= 0, \\ N_{s,x} + N_{y,y} &= 0, \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} &= -p, \\ M_{x,x} + M_{s,y} &= Q_x, \\ M_{s,x} + M_{y,y} &= Q_y. \end{aligned}$$



- Le ultime due equazioni definiscono le risultanti delle forze di taglio, anche qualora queste non siano ricavabili in termini di tensioni, come nella teoria classica.



451



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Sostituendo le ultime due equazioni in quella di equilibrio secondo z, la terza, si ottiene

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} = -p.$$

- Le condizioni al contorno riguardano il dato meccanico (le risultanti) o quello cinematico (gli spostamenti duali).
- Se adesso si introduce un modello cinematico ed un legame costitutivo, si possono legare le risultanti alle componenti di spostamento ed esprimere così le equazioni di equilibrio in termini di queste ultime.
- In particolare, prendendo il modello di Kirchhoff, quello della teoria classica, il legame tra risultanti e componenti di spostamento è dato dalla legge fondamentale dei laminati:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

452



## Equazioni di equilibrio di un laminato

che esplicitata in funzione delle componenti di spostamento del piano medio è

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix}$$

- La sostituzione di queste relazioni nelle equazioni di equilibrio fornisce la generalizzazione completa, nell'ambito della teoria classica dei laminati, delle equazioni delle piastre inflesse sottili di Germain-Lagrange (1811):

## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{aligned} & A_{xx}u_{0,xx} + 2A_{xs}u_{0,xy} + A_{ss}u_{0,yy} + A_{xs}v_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} + A_{ys}v_{0,yy} - \\ & - B_{xx}w_{0,xxx} - 3B_{xs}w_{0,xyy} - (B_{xy} + 2B_{ss})w_{0,xyy} - B_{ys}w_{0,yyy} = 0, \\ & A_{xs}u_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ys}u_{0,yy} + A_{ss}v_{0,xx} + 2A_{ys}v_{0,xy} + A_{yy}v_{0,yy} - \\ & - B_{xs}w_{0,xxx} - (B_{xy} + 2B_{ss})w_{0,xyy} - 3B_{ys}w_{0,xyy} - B_{yy}w_{0,yyy} = 0, \\ & D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} + 4D_{xs}w_{0,xxxy} + 4D_{ys}w_{0,xyyy} - \\ & - B_{xx}u_{0,xxx} - 3B_{xs}u_{0,xyy} - (B_{xy} + 2B_{ss})u_{0,xyy} - B_{ys}u_{0,yyy} - \\ & - B_{xs}v_{0,xxx} - (B_{xy} + 2B_{ss})v_{0,xyy} - 3B_{ys}v_{0,xyy} - B_{yy}v_{0,yyy} = p. \end{aligned}$$

- Un modo compatto di scrivere queste equazioni è il seguente:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

- Gli  $L_{ij}$  sono degli operatori differenziali definiti come segue

## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$L_{11} = A_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{xs} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{ss} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{22} = A_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2A_{ys} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{ss} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{33} = D_{xx} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{xs} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{ys} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{yy} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{xs} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{xy} + A_{ss}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{ys} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{13} = L_{31} = -B_{xx} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3B_{xs} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (B_{xy} + 2B_{ss}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{ys} \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{23} = L_{32} = -B_{xs} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{xy} + 2B_{ss}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{ys} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{yy} \frac{\partial^3}{\partial y^3}.$$

## Equazioni di equilibrio di un laminato

- In realtà, queste equazioni sono molto complicate, sono completamente accoppiate e non vengono quasi mai utilizzate direttamente.
- Una semplificazione notevole, e di interesse, si ha quando il laminato è disaccoppiato,  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ . In tal caso si ottiene

$$A_{xx} u_{0,xx} + 2A_{xs} u_{0,xy} + A_{ss} u_{0,yy} + A_{xs} v_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss}) v_{0,xy} + A_{ys} v_{0,yy} = 0,$$

$$A_{xs} u_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss}) u_{0,xy} + A_{ys} u_{0,yy} + A_{ss} v_{0,xx} + 2A_{ys} v_{0,xy} + A_{yy} v_{0,yy} = 0,$$

$$D_{xx} w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) w_{0,xyy} + D_{yy} w_{0,yyyy} + 4D_{xs} w_{0,xxxy} + 4D_{ys} w_{0,xyyy} = p.$$

- Le due prime equazioni sono accoppiate, ma disaccoppiate dalla terza, che può essere risolta indipendentemente, riflesso del fatto che il comportamento di membrana e di flessione sono indipendenti.
- Nell'ulteriore ipotesi che il laminato sia ortotropo e che gli assi di ortotropia, sia in membrana che in flessione, corrispondano con quelli del riferimento, si ha

## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{aligned} A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} &= 0, \\ (A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{yy}v_{0,yy} &= 0, \\ D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} &= p. \end{aligned}$$

- Utilizzando le relazioni che legano le componenti di **A** e **D** rispettivamente ai moduli dell'ingegnere in membrana ed in flessione, pagina 330 e seguenti, si ottiene infine

$$\begin{aligned} \frac{E_x^m}{1 - \nu_{xy}^m \nu_{yx}^m} u_{0,xx} + G_{xy}^m u_{0,yy} + \left( \frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1 - \nu_{xy}^m \nu_{yx}^m} + G_{xy}^m \right) v_{0,xy} &= 0, \\ \left( \frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1 - \nu_{xy}^m \nu_{yx}^m} + G_{xy}^m \right) u_{0,xy} + G_{xy}^m v_{0,xx} + \frac{E_y^m}{1 - \nu_{xy}^m \nu_{yx}^m} v_{0,yy} &= 0, \\ \frac{E_x^f}{1 - \nu_{xy}^f \nu_{yx}^f} w_{0,xxxx} + 2 \left( \frac{\nu_{xy}^f E_y^f}{1 - \nu_{xy}^f \nu_{yx}^f} + 2G_{xy}^f \right) w_{0,xyy} + \frac{E_y^f}{1 - \nu_{xy}^f \nu_{yx}^f} w_{0,yyyy} &= \frac{12}{h^3} p. \end{aligned}$$

## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Queste sono le equazioni di equilibrio delle lastre e piastre sottili ortotrope, negli assi di ortotropia, valide anche per il caso di laminati disaccoppiati.
- Per i monostrati ed i laminati quasi-omogenei, i moduli in membrana ed in flessione sono identici.
- Si verifica facilmente che in caso di comportamento isotropo le equazioni si riducono a

$$\begin{aligned} 2u_{0,xx} + (1 - \nu^m)u_{0,yy} + (1 + \nu^m)v_{0,xy} &= 0, \\ (1 + \nu^m)u_{0,xy} + (1 - \nu^m)v_{0,xx} + 2v_{0,yy} &= 0, \\ \nabla^4 w_0 &= \frac{12(1 - \nu^{f2})}{E^f h^3} p. \end{aligned}$$

- L'ultima equazione è la classica equazione delle piastre sottili di Germain-Lagrange.

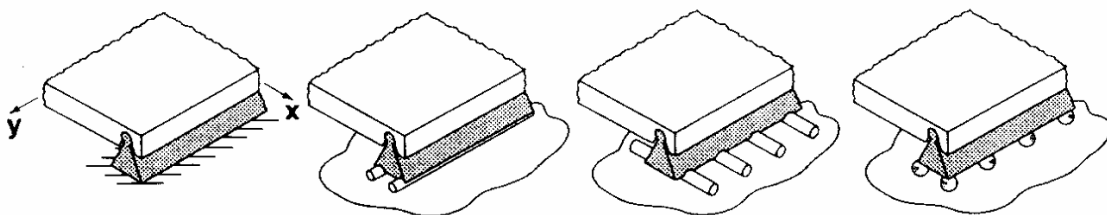
## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Nello specificare le condizioni ai bordi, si deve tener presente che nel caso dei laminati si devono considerare non soltanto gli spostamenti secondo  $z$ , ma anche secondo gli altri due assi; così pure per le caratteristiche meccaniche duali degli spostamenti.
- Generalmente, si considerano le due possibilità di bordo semplicemente appoggiato e di bordo incastrato.
- In realtà, per quanto appena detto, ciascuna di queste due possibilità si declina in 4 casi differenti, illustrati nelle figure seguenti (tratte dal libro di Jones), rispettivamente per il caso di appoggio (simbolo  $S$ , *supported*) e incastro (simbolo  $C$ , *clamped*).
- In caso di bordo libero, la condizione di tipo  $w_0=0$  deve essere sostituita da quella di Kirchhoff sul taglio:

$$M_{n,t} + Q_n = K_n,$$

dove  $n$  indica la normale uscente dal bordo e  $t$  la tangente al bordo;  $K_n$  è la forza di Kirchhoff e costituisce il dato al bordo.

## Equazioni di equilibrio di un laminato



(S1)

$$w = 0$$

$$M_x = 0$$

$$u = 0$$

$$v = 0$$

(S2)

$$w = 0$$

$$M_x = 0$$

$$N_x = 0$$

$$v = 0$$

(S3)

$$w = 0$$

$$M_x = 0$$

$$u = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

(S4)

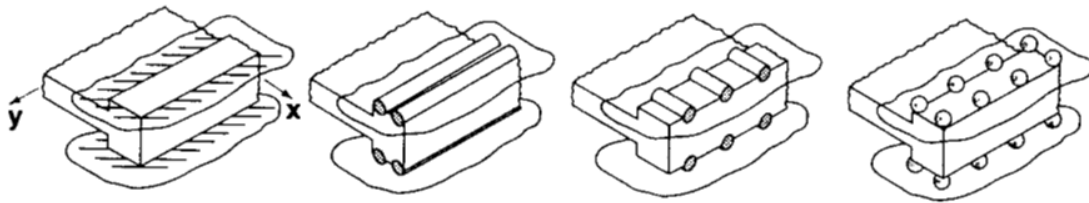
$$w = 0$$

$$M_x = 0$$

$$N_x = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

## Equazioni di equilibrio di un laminato


**(C1)**

$$w = 0$$

$$w_{,x}$$

$$u = 0$$

$$v = 0$$

**(C2)**

$$w = 0$$

$$w_{,x}$$

$$N_x = 0$$

$$v = 0$$

**(C3)**

$$w = 0$$

$$w_{,x}$$

$$u = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

**(C4)**

$$w = 0$$

$$w_{,x}$$

$$N_x = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Diamo adesso un cenno ai metodi di soluzione delle equazioni viste e ad alcuni risultati di letteratura riguardanti il caso di laminati inflessi.
- Il metodo più utilizzato per trovare una soluzione alle equazioni di equilibrio è quello di Navier: il carico  $p$  e la freccia  $w_0$  sono sviluppati in serie doppie di Fourier:

$$p(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

- Le differenti espressioni dei coefficienti  $p_{mn}$  determinano il tipo di carico; ad esempio, il caso di carico uniforme è dato da

$$p_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn}, \quad m \text{ e } n \text{ dispari.}$$



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- La forma data allo spostamento trasversale  $w_0$  permette di prendere automaticamente in conto le condizioni di appoggio semplice al bordo di una piastra rettangolare di lati  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ .
- Una soluzione esatta si ottiene nel caso di laminati disaccoppiati ortotropi almeno in flessione e con assi di ortotropia paralleli ai lati. E' il caso dei cross-ply simmetrici, ad esempio, ma non solo.
- In tal caso, si verifica facilmente che la precedente espressione di  $w_0$  in serie doppia di Fourier è la soluzione, ossia soddisfa alle equazioni al bordo e sul campo

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyxy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = p,$$

se

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^4} \frac{p_{mn}}{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

- Nota la funzione  $w_0$ , si possono ricavare le deformazioni e quindi le tensioni, strato per strato.

463



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Consideriamo adesso il caso di un laminato ancora disaccoppiato, ma non più ortotropo in flessione, oppure con gli assi di ortotropia ruotati rispetto ai lati della piastra.
- L'equazione sul campo è adesso la seguente, dove compaiono i termini di accoppiamento flessione-torsione,  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ :

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyxy} + D_{yy}w_{0,yyyy} + 4D_{xs}w_{0,xxxy} + 4D_{ys}w_{0,xyyy} = p.$$

- Gli stessi termini di accoppiamento compaiono anche nelle condizioni naturali al contorno, vedi pagina 453:

$$M_x = -D_{xx}w_{0,xx} - D_{xy}w_{0,yy} - 2D_{xs}w_{0,xy} = 0 \quad \text{per } x = 0, a,$$

$$M_y = -D_{xy}w_{0,xx} - D_{yy}w_{0,yy} - 2D_{ys}w_{0,xy} = 0, \quad \text{per } y = 0, b.$$

- Ora, è proprio la presenza di questi termini di accoppiamento che ha reso sin qui vana la ricerca di soluzioni esatte, ancorché sotto forma di espansioni in serie.

464



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Infatti, l'espressione data dello spostamento trasversale  $w_0$  è un tipico caso di separazione delle variabili,  $x$  e  $y$ .
- Nel caso di presenza dei termini di accoppiamento  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ , una tale espressione non soddisfa più le equazioni sul campo e quelle naturali ai bordi, o se si vuole, le variabili non sono più separabili.
- Questo problema si presenta non solo nel metodo di Navier, ma anche in tutti gli altri metodi di espansione in serie tentati sinora, basati anche su approcci diversi, come il metodo di Rayleigh-Ritz o quello di Galerkin, e per diversi problemi e modelli: lo si ritrova in analisi della stabilità e delle vibrazioni, nella soluzione tridimensionale esatta di Pagano e in quella per le piastre sandwich di Verchery-Pham Dang (vedi più avanti), etc.
- In tutti questi casi, il procedimento è diverso, su più punti, rispetto a quello visto qui sopra, ma l'effetto della presenza dei termini  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$  è il medesimo.
- In definitiva, si conoscono soluzioni analitiche solo per il caso di piastre rettangolari ortotrope con gli assi di ortotropia paralleli ai lati.

465



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Ashton (1967) ha utilizzato il metodo di Rayleigh-Ritz per dare una soluzione approssimata a questo problema, in cui sostanzialmente si rinuncia a soddisfare alle condizioni naturali sul bordo.
- Utilizzando l'espansione in serie di Fourier vista troncata a  $m=n=7$ , ha ottenuto, per un laminato in cui

$$D_{xx} = D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = 1.5D_{xx}, \quad D_{xs} = D_{ys} = -0.5D_{xx},$$

il valore della freccia massima, in caso di carico uniforme  $p$ ,

$$w_{\max} = 0.00425 \frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

- Se invece si cerca una soluzione con il metodo di Navier, ignorando la presenza dei termini di accoppiamento  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ , si ottiene

$$w_{\max} = 0.00324 \frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

466

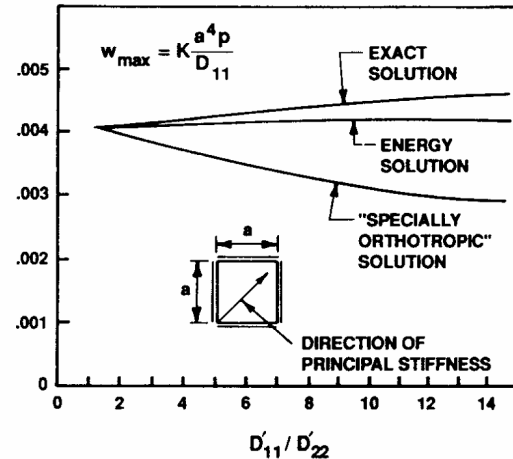


## Equazioni di equilibrio di un laminato

- La soluzione esatta è invece stata ottenuta sempre da Ashton, impiegando un metodo di identificazione della rigidità con il caso di piastre isotrope in forma di parallelogramma, per le quali si dispone di soluzioni esatte, e vale

$$w_{\max} = 0.00452 \frac{a^4 p}{D_{xx}}$$

- Quindi, la soluzione trovata con il metodo energetico (Rayleigh-Ritz) sottostima la freccia del 6%, mentre quella approssimata, considerando la piastra *specially-orthotropic*, cioè ortotropa con gli assi di ortotropia paralleli ai lati, la sottostima del 28%.



- In figura (Jones), si evidenzia come l'approssimazione diventi, in entrambi i casi, sempre peggiore con l'aumento del rapporto  $D_{11}/D_{22}$ .

467



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Consideriamo adesso il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni, quindi ortotropo in membrana e flessione, con assi paralleli ai lati, ma accoppiato; in particolare, si verifica facilmente che in tal caso si ha  $A_{xx}=A_{yy}$ ,  $D_{xx}=D_{yy}$ ,  $B_{yy}=-B_{xx}$ , mentre sono nulle le altre componenti di **B**.

- Le equazioni sono allora

$$A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} - B_{xx}w_{0,xxx} = 0,$$

$$(A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{xx}v_{0,yy} + B_{xx}w_{0,yyy} = 0,$$

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyy} + D_{xx}w_{0,yyy} - B_{xx}(u_{0,xxx} - v_{0,yyy}) = p.$$

- Whitney (1968) ha risolto queste equazioni per il caso di appoggio semplice di tipo S2 (vedi pagina 460): nel caso in cui il carico sia dato dall'espansione in serie di Fourier di pagina 462, la soluzione è del tipo

468



## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$u_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

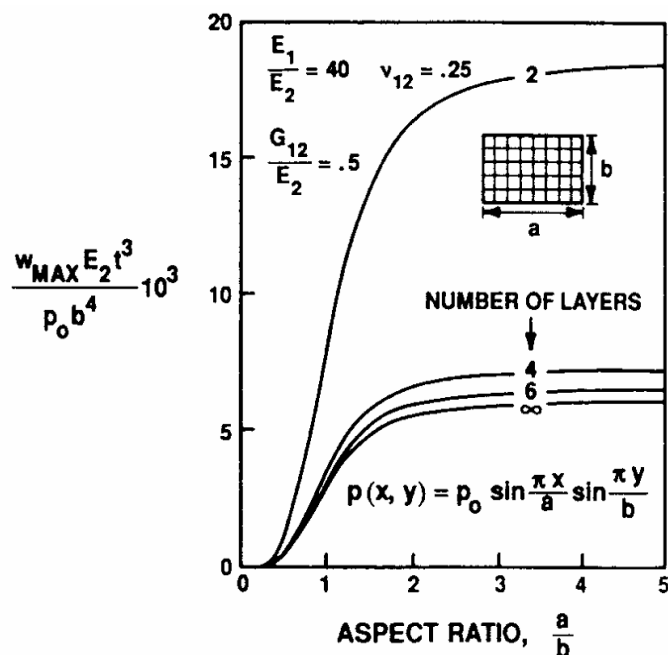
$$v_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

- Se il carico è costituito da una sola armonica, allora il sistema di equazioni ammette una soluzione esatta; il caso di un carico espresso da più armoniche si può quindi risolvere con il principio di sovrapposizione degli effetti.
- Per studiare gli effetti dell'accoppiamento sul valore della soluzione, Jones ha studiato il caso in cui un laminato *cross-ply* antisimmetrico di spessore totale costante è ottenuto con un numero crescente di strati, da 2 fino ad infinito (in quest'ultimo caso, l'accoppiamento tende a zero).

## Equazioni di equilibrio di un laminato

- In figura, si ha il grafico della freccia massima in funzione del rapporto  $a/b$  per i vari casi, quando il carico sia una semplice sinusoide ( $m=n=1$ ).
- Tra il caso di un laminato disaccoppiato (infiniti strati) e quello di un laminato con il massimo dell'accoppiamento, 2 strati, la freccia aumenta di circa un fattore 3.
- L'accoppiamento ha quindi l'effetto di una diminuzione della rigidità flessionale apparente del laminato.



## Equazioni di equilibrio di un laminato

- Infine, consideriamo il caso di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, quindi ortotropo in membrana e flessione, con assi paralleli ai lati, ma accoppiato; in particolare, si verifica facilmente che in tal caso si ha  $B_{xs}$  e  $B_{ys}$  diversi da zero, mentre sono nulle le altre componenti di  $\mathbf{B}$ . L'accoppiamento è quindi diverso da quello del caso precedente.
- In tal caso, le equazioni sono

$$\begin{aligned}
 A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} - 3B_{xs}w_{0,xx} - B_{ys}w_{0,yy} &= 0, \\
 (A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{yy}v_{0,yy} - B_{xs}w_{0,xxx} - 3B_{ys}w_{0,xy} &= 0, \\
 D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xxxy} + D_{yy}w_{0,yyyy} - \\
 - B_{xs}(3u_{0,xxx} + v_{0,xxx}) - B_{ys}(u_{0,yyy} + 3v_{0,xy}) &= p.
 \end{aligned}$$

- Withney (1968) ha risolto questo caso per le condizioni di appoggio semplice di tipo S3 (vedi pagina 460); se ancora il carico è espresso in serie di Fourier, la soluzione è del tipo

471



## Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
 w_0(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.
 \end{aligned}$$

- Come nel caso precedente, la soluzione analitica esiste se il carico è rappresentato da una sola armonica; si procede dunque, nel caso generale, con il principio di sovrapposizione degli effetti.
- Lo stesso tipo di studio visto in precedenza, condotto su un laminato con numero di strati che aumenta per uno spessore totale costante, è stato realizzato anche in questo caso da Jones.
- Il grafico seguente mostra il risultato per una piastra quadrata, in funzione dell'angolo di orientazione degli strati,  $\theta$ .
- Lo stesso tipo di considerazioni possono essere fatte.

472



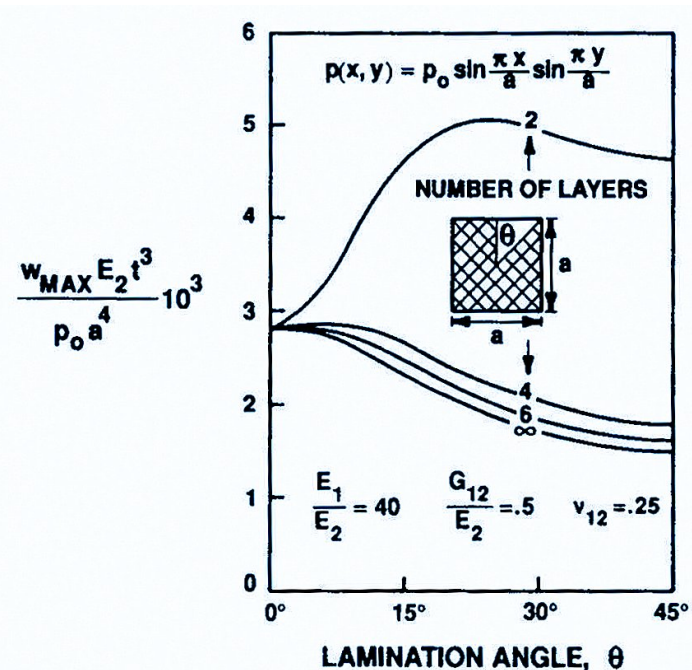
## Equazioni di equilibrio di un laminato

- In particolare, si verifica facilmente che in un caso come questo si ha

$$B_{xs} = \frac{h^2}{2n} Q_{xs},$$

$$B_{ys} = \frac{h^2}{2n} Q_{ys}.$$

- Dunque, se il numero  $n$  degli strati aumenta, i coefficienti di accoppiamento diminuiscono e con essi il loro effetto sul valore dello spostamento.



## Stabilità elastica di un laminato

- Diamo ora un cenno alla teoria classica della stabilità dei laminati, quella cioè che si basa sul modello di Kirchhoff e su un'analisi linearizzata, capace di cogliere il valore del carico critico (se esiste) e la deformata modale.
- Vi sono diversi modi per giungere alla scrittura delle equazioni di stabilità di un laminato.
- Una via classica (cfr. ad esempio l'articolo di Leissa nel libro di Turvey e Marshall in bibliografia), è quella di riscrivere le equazioni di equilibrio della piastra, come fatto nel paragrafo precedente, ma in corrispondenza di una configurazione inflessa della piastra, vicina alla configurazione di partenza e sotto l'azione di forze distribuite non solo ortogonali al piano medio ma anche parallele,  $q_x$  e  $q_y$ .
- Trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore, si giunge con alcuni passaggi alle seguenti equazioni di equilibrio:

## Stabilità elastica di un laminato

$$N_{x,x} + N_{s,y} + q_x = Q_x w_{0,x},$$

$$N_{s,x} + N_{y,y} + q_y = Q_y w_{0,y},$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} + p = 0,$$

$$M_{x,x} + M_{s,y} = Q_x,$$

$$M_{s,x} + M_{y,y} = Q_y.$$

- Nelle equazioni sopra, si ammette che le forze di taglio  $Q_x$  e  $Q_y$ , come pure le inclinazioni del piano medio  $w_{0,x}$  e  $w_{0,y}$  siano piccole; trascurando allora i termini relativi e sostituendo le ultime due equazioni nelle prime tre, si giunge a

$$N_{x,x} + N_{s,y} + q_x = 0,$$

$$N_{s,x} + N_{y,y} + q_y = 0,$$

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} + p = 0.$$

## Stabilità elastica di un laminato

- A questo punto, si considera che ciascuna delle grandezze che appaiono nelle precedenti equazioni possa essere scritta come la somma di due parti, una parte iniziale (indice  $i$ ), che esiste prima dell'instabilità, ed una parte dovuta all'instabilità (indice  $b$ , *buckling*); ad esempio

$$N_x = N_x^i + N_x^b.$$

- Inoltre, si assume che la piastra sia piana fino all'instabilità e che nessuna forza si aggiunga in fase instabile, ossia

$$w_0 = w_0^b, \quad q_x = q_x^i, \quad q_y = q_y^i, \quad p = p^i.$$

- Prima dell'instabilità, le equazioni precedenti si riducono a quelle classiche di equilibrio,

$$N_{x,x}^i + N_{s,y}^i + q_x^i = 0,$$

$$N_{s,x}^i + N_{y,y}^i + q_y^i = 0,$$

$$M_{x,xx}^i + 2M_{s,xy}^i + M_{y,yy}^i + p^i = 0.$$

## Stabilità elastica di un laminato

- Le equazioni di equilibrio di pagina 475 si riducono allora a

$$N_{x,x}^b + N_{s,y}^b = 0,$$

$$N_{s,x}^b + N_{y,y}^b = 0,$$

$$M_{x,xx}^b + 2M_{s,xy}^b + M_{y,yy}^b + N_x^i w_{0,xx} + 2N_s^i w_{0,xy} + N_y^i w_{0,yy} = 0.$$

- Nello scrivere queste equazioni, si sono trascurati i termini

$$N_x^b w_{0,xx} + 2N_s^b w_{0,xy} + N_y^b w_{0,yy}$$

considerati piccoli rispetto agli ultimi tre della terza equazione. Inoltre, se non si trascurassero non si giungerebbe a delle equazioni lineari, dato che i termini del tipo  $N_x^b$  etc. dipendono da  $w_0$ .

- Le equazioni precedenti sono le equazioni di stabilità delle piastre nella loro forma fondamentale.

## Stabilità elastica di un laminato

- Se adesso si fa riferimento alla teoria classica dei laminati, si possono, come già fatto nel caso delle equazioni di equilibrio, esprimere le risultanti in termini delle componenti di spostamento del piano medio, pagina 453, e si ottengono allora, con alcuni passaggi, le equazioni della stabilità delle piastre nella forma seguente

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- L'equazione sopra definisce un problema omogeneo, ed i termini  $L_{ij}$  sono gli stessi operatori differenziali definiti a pagina 455 (per semplicità, si omettono gli indici  $i$  e  $b$ ), mentre  $F$ , che rappresenta il carico nel piano medio, è

$$F = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$



## Stabilità elastica di un laminato

- Le equazioni precedenti, a causa dell'accoppiamento membrana-flessione, sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali dell'8° ordine, come accade nel caso della teoria classica dei gusci sottili.
- Le equazioni si semplificano nel caso di laminato disaccoppiato,  $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ : le due prime equazioni si riducono alle classiche equazioni di equilibrio di lastra, prime due equazioni di pagina 456, e si disaccoppiano dalla terza, che diviene

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 4D_{xs}w_{0,xxxy} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyyy} + 4D_{ys}w_{0,xyyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy}$$

- Questa è l'equazione dell'instabilità di una piastra monostrato anisotropa, del 4° ordine, oppure, come visto, di un laminato disaccoppiato.
- Nel caso particolare in cui il comportamento di flessione sia



## Stabilità elastica di un laminato

ortotropo (quello di membrana non entra in gioco nella teoria linearizzata), l'equazione sopra si semplifica in

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy}$$

- Le equazioni precedenti permettono di ricavare il carico critico e la forma modale. I metodi normalmente utilizzati, sono gli stessi visti per la soluzione delle equazioni di equilibrio.
- In particolare, si conosce la soluzione esatta del carico critico per un laminato rettangolare, appoggiato sui bordi, ortotropo in flessione con gli assi di ortotropia paralleli ai lati, disaccoppiato e soggetto a solo carico biassiale,  $\mathbf{N}=(N_x, N_y, 0)$ .
- In tal caso, l'equazione sul campo è

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = N_x w_{0,xx} + N_y w_{0,yy}$$

## Stabilità elastica di un laminato

e se si utilizza ancora l'espressione di pagina 462 per esprimere lo spostamento  $w_0$ , si ha che le equazioni sul campo e al bordo sono soddisfatte se il moltiplicatore del carico  $\lambda$  è

$$\lambda = \pi^2 \frac{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}{N_x\alpha + N_y\beta}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

- Ovviamente, il moltiplicatore critico di stabilità è il più piccolo valore di  $\lambda$ ; è difficile dire *a priori* quale questo sia, perché dipende da  $m$ ,  $n$  e dai coefficienti elastici  $D_{ij}$ , oltre che dal rapporto tra  $N_x$  e  $N_y$  e tra  $a$  e  $b$ .
- Ad esempio, se  $N_y=0$ , cioè se si ha compressione solo lungo l'asse  $x$ , allora il valore critico si ha per  $n=1$ , ma per quanto riguarda  $m$  niente si può dire in generale.
- Si consideri (Jones) il caso di un laminato per il quale

$$D_{xx} = 10D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = D_{yy}.$$

481



## Stabilità elastica di un laminato

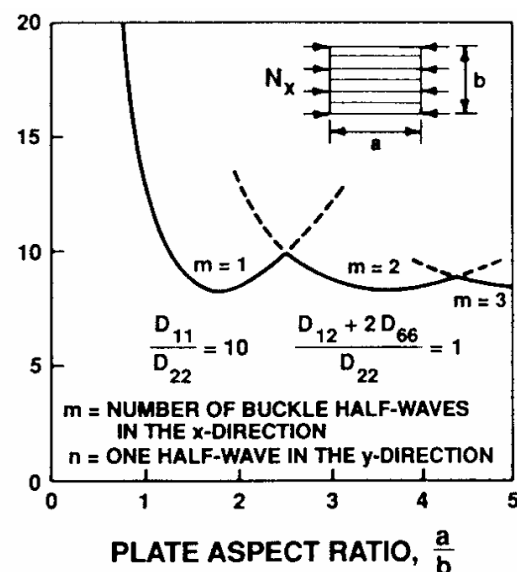
- I valori di  $N_x$  critico in funzione di  $m$  e del rapporto  $a/b$  è in figura.
- Si osserva che per  $a/b < \sim 2.5$ ,  $m=1$ , cioè il modo ha una sola semionda; per  $a/b$  si ha

$$N_x^{crit} = 13 \frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$

- Per  $a/b$  che tende verso infinito, il numero delle semionde aumenta ed il carico critico tende verso

$$N_x^{crit} = 8.32456 \frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$

- Per altri materiali, si ottengono comportamenti analoghi.



482



## Stabilità elastica di un laminato

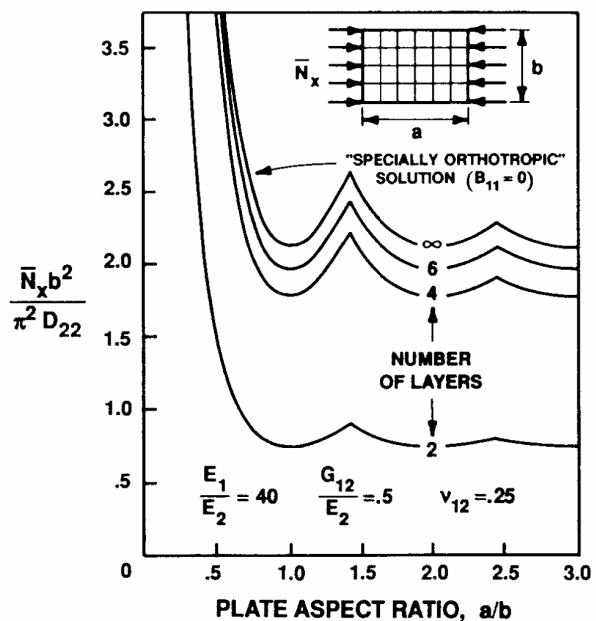
- Il caso di laminati disaccoppiati ma non ortotropi, oppure ortotropi ma ruotati rispetto ai lati della piastra, è stato ancora trattato da Ashton e Waddoups (1969) con lo stesso metodo visto per la flessione, o ancora da Chamis (1968), con il metodo di Galerkin.
- L'effetto dei termini di accoppiamento flessione-torsione  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$  è quello di diminuire il carico critico; in definitiva, assumere che un laminato si comporti come ortotropo in flessione quando non lo è, come si fa spesso in progettazione, non è un procedimento conservativo.
- Il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni, già trattato per la flessione, è stato considerato e risolto da Jones nello stesso caso della flessione e per un carico monoassiale  $N_x$ .
- Senza entrare nei dettagli della soluzione, piuttosto complicata, si riporta di seguito una figura analoga, per quanto riguarda il valore del carico critico, a quella riportata a pagina 470 per la freccia.

483



## Stabilità elastica di un laminato

- Essa riporta la variazione del valore critico di stabilità di  $N_x$ , quando si lasci invariato lo spessore totale e si aumenti il numero degli strati.
- Anche in questo caso, l'effetto dell'accoppiamento membrana-flessione è quello di diminuire il carico critico.
- Withney (1968) ha risolto il caso, analogo a quello in flessione di pagina 471, di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, ancora soggetto a carico uniassiale  $N_x$ , e per le stesse condizioni viste in flessione.

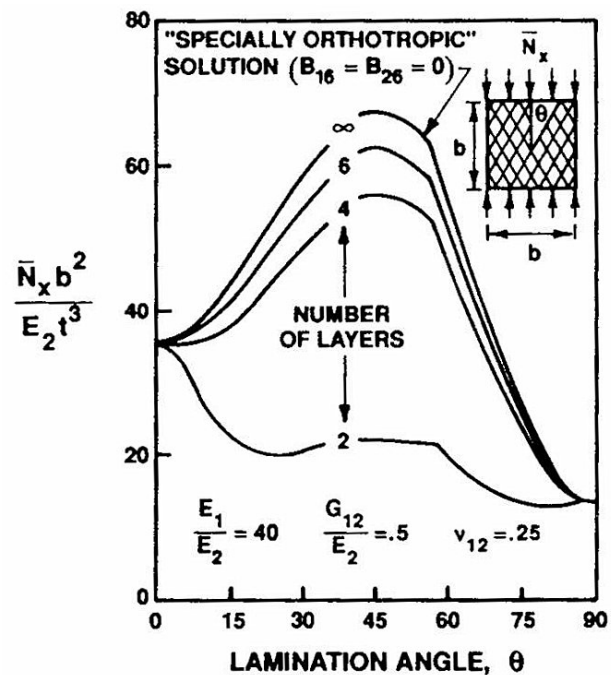


484



## Stabilità elastica di un laminato

- Ancora una volta si tralascia la soluzione (vedere Jones per maggiori dettagli) ma si riporta una figura analoga alla precedente, che mostra la variazione del carico critico con l'angolo di orientazione e il numero degli strati, quando lo spessore totale sia conservato costante.
- Si conferma ancora che la presenza dell'accoppiamento membrana-flessione ha come effetto la diminuzione del carico critico.
- Si deve però fare una precisazione.



## Stabilità elastica di un laminato

- In effetti, la presenza di un accoppiamento membrana-flessione ha, il più delle volte, un effetto perturbativo sul comportamento della piastra.
- Infatti, sappiamo che tale accoppiamento ha come effetto l'insorgere di curvature, e quindi di spostamenti trasversali, a seguito dell'applicazione di carichi membranali.
- In altre parole, l'accoppiamento produce un effetto di *imperfezione automatica*, insita nel laminato all'insorgere del carico, che normalmente cancella il fenomeno propriamente detto della perdita di stabilità di una configurazione fondamentale di equilibrio in corrispondenza di una biforcazione di quest'ultimo.
- Insomma, la presenza dell'accoppiamento produce spostamenti trasversali non appena si applica il carico membranale, ben prima dell'insorgere dell'instabilità.
- Gli spostamenti trasversali si accrescono quindi progressivamente, e non esiste una configurazione banale di equilibrio.

## Stabilità elastica di un laminato

- L'effetto dell'accoppiamento sulla biforcazione e stabilità è in definitiva simile a quello di una imperfezione geometrica.
- Tuttavia, in alcuni casi si ha ancora l'apparizione di una biforcazione dell'equilibrio anche in presenza di accoppiamento membrana-flessione.
- Per maggiori dettagli, si rinvia al libro di Jones o al citato articolo di Leissa, dove si analizza anche quali debbano essere le forze trasversali o le coppie al bordo da applicare alla piastra accoppiata per mantenerne la configurazione piana e quindi permettere il prodursi della biforcazione.

## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Consideriamo adesso il caso delle vibrazioni trasversali libere di piccola ampiezza di un laminato attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.
- Le equazioni del moto per un tale problema si ricavano semplicemente da quelle viste per la stabilità, aggiungendo però al carico trasversale le forze di inerzia,  $-\mu w_{0,tt}$ , dove  $\mu$  è la massa del laminato per unità di superficie e  $w_{0,tt}$  è la derivata seconda dello spostamento  $w_0$  rispetto al tempo.
- Sviluppando ancora i calcoli come visto, le equazioni di pagina 477 diventano

$$N_{x,x} + N_{s,y} = 0,$$

$$N_{s,x} + N_{y,y} = 0,$$

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} + N_x^i w_{0,xx} + 2N_s^i w_{0,xy} + N_y^i w_{0,yy} = \mu w_{0,tt}.$$

- L'indice  $i$  resta a identificare la parte di carico assiale applicata al laminato in corrispondenza dell'equilibrio.

## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Procedendo poi come già visto per la stabilità, ossia inserendo nelle equazioni sopra il legame tra azioni e spostamenti della teoria classica, si ottengono finalmente le equazioni cercate:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- L'equazione sopra definisce un problema omogeneo, ed i termini  $L_{ij}$  sono gli stessi operatori differenziali definiti a pagina 455 (per semplicità, si omettono gli indici  $i$  e  $b$ ), mentre  $F$  rappresenta il carico, nel piano medio e dovuto alle forze di inerzia:

$$F = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- L'equazione sopra è utilizzata per la ricerca delle frequenze proprie e dei modi propri di vibrare.

489



## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Se  $\mathbf{N}^i = \mathbf{0}$ , cioè se la piastra non è soggetta ad uno stato di forze membranali impresse, si parla di frequenze naturali ed in tal caso

$$F = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- Nel seguito, si danno dei cenni di soluzioni per la ricerca delle frequenze naturali, cioè considereremo sempre  $\mathbf{N}^i = \mathbf{0}$ , ancora per i 4 casi visti in precedenza per la flessione e la stabilità.
- Iniziamo dunque con il caso di una piastra rettangolare semplicemente appoggiata, costituita da un laminato disaccoppiato ortotropo almeno in flessione e con assi di ortotropia paralleli ai lati.
- In tale situazione, si ottiene ancora una soluzione esatta, prendendo come espressione dello spostamento trasversale

$$w_0(x, y, t) = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} t.$$

490



## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Si è dunque, classicamente, separata la parte dipendente dal tempo da quella dipendente dalla posizione, o se si vuole, il modo, determinato dalla scelta di  $m$  e  $n$ , dalla frequenza,  $\omega_{mn}$ .

- L'equazione sul campo in questo caso è

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xyxy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = -\mu w_{0,tt}$$

- La scelta fatta per  $w_0$  soddisfa l'equazione sul campo e quella ai bordi se la frequenza è

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\mu} \left[ D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2 \right], \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{n^2}{b^2}$$

- La frequenza naturale fondamentale si ha per  $m=n=1$ , come per una piastra isotropa. Questa corrispondenza di modi non si verifica però, in generale, per le frequenze superiori.

## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Il caso di laminati disaccoppiati ma non ortotropi, oppure ortotropi ma ruotati rispetto ai lati della piastra, presenta gli stessi problemi visti per la flessione e la stabilità, dovuti ai termini di accoppiamento flessione-torsione  $D_{xs}$  e  $D_{ys}$ ; tuttavia, nessun risultato numerico approssimato per questo caso sembra essere disponibile in letteratura.

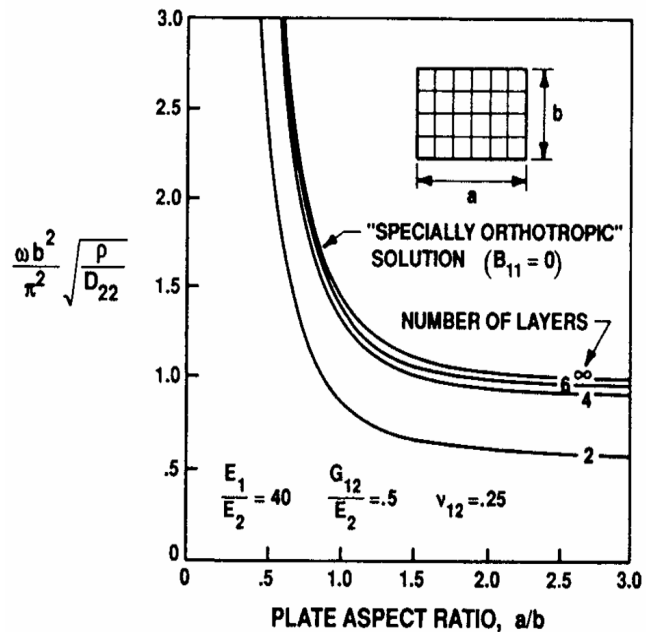
- Il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni è stato trattato da Withney (1968); la soluzione è complicata e si rimanda al libro di Jones per ulteriori dettagli.

- Tuttavia, in questo caso non si può affermare, come nel precedente, che la frequenza fondamentale corrisponda sempre al caso  $m=n=1$ .

- Si riporta di seguito una figura che, come già fatto per la flessione e la stabilità, mostra la variazione della frequenza fondamentale in funzione del rapporto  $a/b$  per un laminato avente uno spessore totale costante ma diversi numeri di strati.

## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Si osserva che l'effetto dell'accoppiamento è quello di ridurre la frequenza fondamentale, e questo conferma quanto già visto in precedenza per flessione e stabilità: in entrambi i casi l'accoppiamento aveva un effetto di diminuzione della rigidità apparente a flessione.
- Per terminare, il caso di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, è stato ancora risolto da Withney (1968).

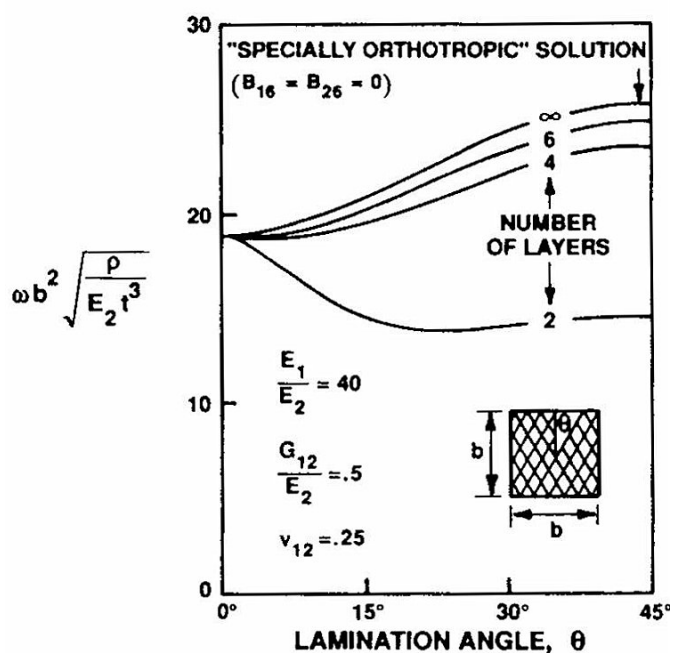


493



## Vibrazioni trasversali di un laminato

- Tralasciando la soluzione, per la quale si rimanda al testo di Jones, e per la quale valgono le stesse osservazioni fatte al caso precedente, si riporta una figura corrispondente alla precedente, per lo stesso tipo di analisi, ma in funzione dell'orientazione  $\theta$  degli strati di una piastra quadrata.
- Si osserva l'effetto dell'accoppiamento, che provoca ancora una diminuzione della frequenza fondamentale.



494





## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Consideriamo adesso il calcolo delle tensioni di taglio attraverso lo spessore del laminato, ossia le tensioni  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ .
- Si è visto che queste non si possono ricavare dalla teoria classica attraverso le equazioni costitutive, in quanto nel modello le deformazioni corrispondenti  $\varepsilon_{zx}$  e  $\varepsilon_{zy}$  sono nulle, per la cinematica adottata (conservazione della normale alla superficie media).
- Si apre qui una parentesi per aggiungere una precisazione, forse non fondamentale ma chiarificativa: quanto appena detto è una giustificazione classica ma solo parziale della necessità di "regolare la questione delle tensioni di taglio".
- Infatti, anche nel caso in cui lo stato di deformazione sia piano, ciò che accade nella teoria classica come conseguenza dell'ipotesi cinematica di Kirchhoff, le tensioni trasversali calcolate tramite la legge costitutiva non sono necessariamente nulle; in particolare, non lo sono per un materiale anisotropo qualsiasi, vedi pagina 299.

## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Lo sono invece per un materiale ortotropo in cui l'asse  $z$  è di ortotropia, e *a fortiori* per un materiale trasversalmente isotropo, con  $z$  tra gli assi di isotropia trasversa, e per un materiale isotropo.
- Sono proprio questi ultimi due i casi che ci interessano, il primo per i materiali compositi e l'altro per quelli classici.
- Questo indica che il modello cinematico da solo non giustifica la necessità di indagare a fondo le tensioni da taglio, perché questa necessità è più profonda e attiene a problemi di consistenza meccanica di una teoria delle piastre.
- In altre parole, e per terminare con questa parentesi, se si applicasse il modello di Kirchhoff ad un materiale anisotropo qualsiasi, si potrebbero calcolare delle tensioni di taglio, ma non sarebbero quelle corrette.
- Si è poi visto come ricavare, tramite le equazioni di equilibrio, le risultanti  $Q_x$  e  $Q_y$  delle tensioni di taglio, necessarie all'equilibrio ogni volta che si ha un carico trasversale al piano medio.

## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Tramite le equazioni indefinite di equilibrio è anche possibile ricavare le tensioni  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ , con un procedimento analogo, ma più elaborato e complesso, di quello utilizzato per le piastre isotrope monostrato.
- Infatti, le prime due componenti dell'equazione indefinita di equilibrio

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

scritte in ipotesi di forze di massa  $\mathbf{b}$  nulle, sono

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0,$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} = 0.$$

- Allora, per ciascuno strato  $k$  si possono ricavare le tensioni nel piano in funzione delle componenti di spostamento, utilizzando il legame costitutivo.
- Per semplificare, conviene fare questa operazione nel riferimento materiale di ogni strato (il riferimento può quindi cambiare al cambiare dello strato)

497



## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Allora, con alcuni passaggi si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & -[Q_{11}u_{0,11} + Q_{66}u_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})v_{0,12}]k_3 + \\ & + [Q_{11}w_{0,111} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,122}] \frac{x_3^2}{2} + c_1, \\ \sigma_{23} = & -[Q_{66}v_{0,11} + Q_{22}v_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})u_{0,12}]k_3 + \\ & + [Q_{22}w_{0,222} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,112}] \frac{x_3^2}{2} + c_2. \end{aligned}$$

- Le costanti di integrazione si possono determinare solo se la sequenza è simmetrica e se non vi sono deformazioni membranali, imponendo la continuità delle tensioni all'interfaccia degli strati e che la tensione si annulli sulle facce esterne (assenza di carico radente).
- Una soluzione in un caso particolare (*cross-ply* o comunque strati tutti con gli assi di ortotropia paralleli) è data da Lekhnitskii.

498



## Il calcolo delle tensioni di taglio

- In tutti gli altri casi, il sistema lineare che si ottiene per il calcolo delle costanti di integrazione è sovradeterminato, e quindi in generale non si può risolvere.
- Quindi, non è in generale possibile per i laminati il calcolo delle tensioni da taglio partendo dalla teoria classica.
- Un'altra osservazione: le equazioni indefinite di equilibrio che abbiamo appena usato per le tensioni da taglio portano ad un paradosso, anche per un monostrato isotropo.
- Infatti, esse mostrano che le tensioni da taglio non sono nulle, e che quindi lo stato di tensione è ben lungi dall'essere piano, anche nel caso di una deformazione puramente membranale.
- Tuttavia tale stato di tensione, a risultante nulla sullo spessore, è compatibile solo con delle tensioni tangenziali opposte applicate sulle facce, tensioni che hanno una risultante flettente!

## Il calcolo delle tensioni di taglio

- In un certo senso, i paradossi del modello classico non finiscono mai...
- In definitiva: se, accettato il modello di Kirchhoff, e quindi il fatto che le deformazioni da taglio sono nulle, si calcolano le tensioni da taglio con il legame costitutivo di un materiale almeno ortotropo, con  $z$  asse di ortotropia, si trovano tensioni da taglio nulle, ma se, con lo stesso modello, si utilizzano le equazioni indefinite di equilibrio e il legame costitutivo ortotropo per calcolare le tensioni di taglio, queste non sono nulle nemmeno per uno stato di deformazione membranale, cioè costante sullo spessore.
- Queste circostanze ci fanno comprendere la necessità di una teoria più fine, che prenda in conto sin dal modello cinematico l'esistenza di deformazioni da taglio e quindi delle tensioni da taglio ad esse collegate.

## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Resta tuttavia da stabilire quale modello cinematico scegliere, perché questo influenza poi il calcolo delle tensioni da taglio.
- Prima di esaminare brevemente questo aspetto, si analizza per sommi capi nel paragrafo seguente un problema che mostra l'importanza di disporre di un metodo di calcolo affidabile per le tensioni trasversali: si tratta di un modello semplice, che mette in evidenza l'esistenza delle cosiddette *tensioni al bordo libero*.
- Per terminare, si fa cenno ad un metodo approssimato riportato da Jones, invero assai complicato, valido solo per piastre rettangolari appoggiate costituite da laminati simmetrici con ogni strato ortotropo e con assi di ortotropia paralleli ai lati della piastra.
- Si riporta solo il grafico seguente, in cui l'analisi della variazione della freccia massima in funzione del rapporto lato/spessore mostra la necessità, per le piastre non sottili, di ricorrere a modelli cinematici diversi da quello classico, e non solo per il calcolo delle tensioni di taglio.

501



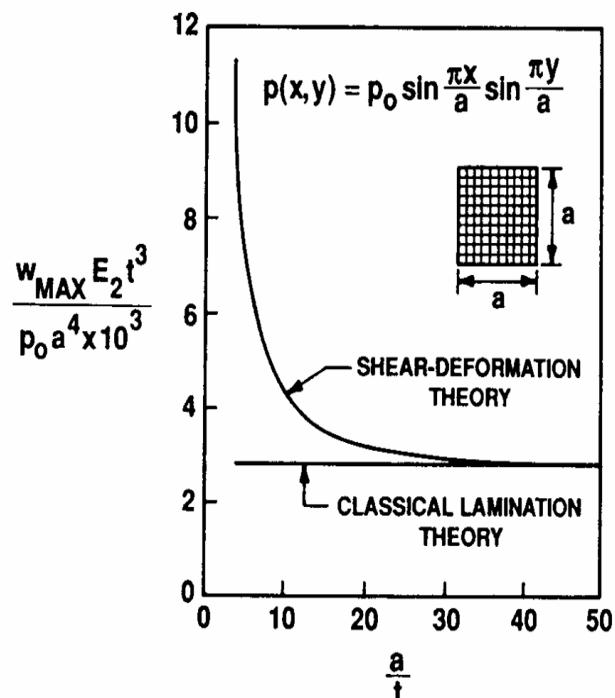
## Il calcolo delle tensioni di taglio

- Il grafico si riferisce ad una piastra quadrata, a sequenza  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , sottoposta ad un carico sinusoidale, il cui materiale costituente gli strati è un carbonio-epoxy le cui caratteristiche sono

$$E_1/E_2 = 40, \quad G_{12}/E_2 = 0.6,$$

$$G_{13}/E_2 = 0.5, \quad \nu_{13} = 0.25.$$

- Si osserva che solo per valori molto elevati ( $> \sim 30$ ) del rapporto lato/spessore la teoria classica dà risultati corretti per la freccia massima.



502

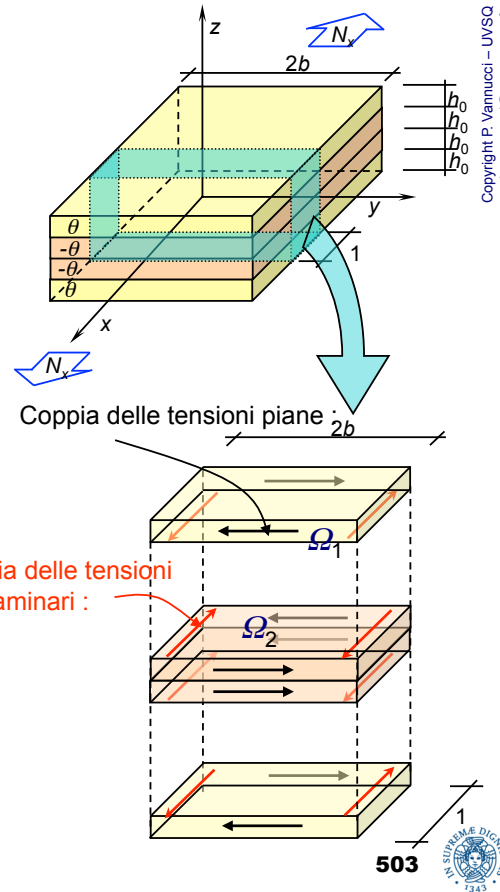


## Le tensioni ai bordi liberi

- Consideriamo una piastra rettangolare, formata da un laminato a 4 strati, simmetrico, angle-ply come in figura, essendo  $\theta$  l'angolo di laminazione. La larghezza della piastra è  $2b$ , ed è sottoposta soltanto ad una trazione  $N_x$ , come in figura.
- Applicando la legge fondamentale dei laminati a questo caso ( $\mathbf{M}=\mathbf{O}$  e  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ ) si ottiene, per le deformazioni espresse nel riferimento di ortotropia dello strato:

$$\{\varepsilon\} = [T]^T [A]^{-1} \{N\} =$$

$$= \frac{1}{4h_0} \frac{N_x}{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2} \begin{Bmatrix} Q_{yy}c^2 - Q_{xy}s^2 \\ Q_{yy}s^2 - Q_{xy}c^2 \\ -2cs(Q_{xy} + Q_{yy}) \end{Bmatrix}$$



503

## Le tensioni ai bordi liberi

- Mentre  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono le stesse per tutti gli strati,  $\varepsilon_6$  cambia di segno con l'orientazione,  $\pm\theta$ .
- Se si calcolano poi le tensioni, nel riferimento della piastra, si ottiene

$$\{\sigma\}'_k = [Q]'_k \{\varepsilon\}' = [Q]'_k [A]^{-1} \{N\} = \frac{N_x}{4h_0} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{Q_{xs}Q_{yy} - Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2} \end{Bmatrix}_k$$

- Dunque,  $\sigma_s = \sigma_{xy}$  non è nulla. Tuttavia, la condizione ai bordi liberi laterali,  $y=\pm b$ , impone che sia

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0.$$

- Si ha quindi una contraddizione con quanto trovato sopra tramite la legge costitutiva, in quanto in generale

504

## Le tensioni ai bordi liberi

$$\sigma_{xy} = \frac{N_x}{4h_0} \frac{Q_{xs}Q_{yy} - Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2} \neq 0.$$

- Naturalmente, può accadere che per alcuni valori dell'orientazione  $\theta$  il numeratore si annulli, ma in generale sarà diverso da 0.
- Il risultato trovato è meccanicamente impossibile. Inoltre, se si considerano stavolta i lati della piastra ortogonali all'asse  $x$ , si ottiene ancora la stessa incongruenza per le tensioni  $\sigma_{yx}$ .
- Si ha dunque un paradosso meccanico, che si può spiegare con il modello della figura di pagina 503: isolando una striscia di laminato di lunghezza unitaria e separando i vari strati, si vede che ciascuno strato è sottoposto ad una coppia dovuta alla presenza, nello spessore dello strato, delle tensioni  $\sigma_{xy}$ .
- Dal momento che  $\sigma_{yy}=0$  e che  $\sigma_{xx}$  ha una distribuzione costante lungo  $y$ , tale coppia può essere equilibrata solo da altre tensioni, quelle che le lamine si scambiano tra loro.

## Le tensioni ai bordi liberi

- Tali tensioni, dette tensioni di taglio interlaminari (*shear interlaminar stresses*) saranno del tipo  $\sigma_{xz}$  e tali da equilibrare la coppia dovuta alle tensioni  $\sigma_{xy}$ :

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{xy} dy dz + \int_{\Omega_2} 2y\sigma_{xz} dx dy = 0.$$

- Dunque, per reciprocità, anche le tensioni  $\sigma_{zx}$  saranno non nulle.
- Questo modello, assai elementare, spiega la necessità dell'esistenza di tensioni da taglio anche nel caso estremamente semplice esaminato, in cui non è *a priori* prevedibile, apparentemente, l'esistenza di tali tensioni.
- Il problema viene dall'aver considerato uno stato di tensione piano, come conseguenza dell'applicazione diretta della legge costitutiva al tensore delle deformazioni derivante dall'ipotesi di Kirchhoff, e dall'aver trascurato le tensioni  $\sigma_{zz}$ .
- In definitiva, anche se lo stato di sollecitazione è piano, quello di tensione non lo è necessariamente.

## Le tensioni ai bordi liberi

- La valutazione delle tensioni di taglio appare quindi in tutta la sua importanza: se da un lato, come visto nell'esempio conclusivo del paragrafo precedente, una cinematica corretta, che prenda in conto gli effetti di taglio, è importante per ben definire l'effettiva rigidità di un laminato, globalmente molto più sensibile di piastre monostato al fenomeno della deformazione da taglio, dall'altro è importante poter ben valutare, localmente, le tensioni da taglio.
- Queste infatti devono essere prese in conto, a rigore, in una verifica di resistenza del materiale e inoltre possono dar luogo, soprattutto presso i bordi liberi, all'insorgere di fenomeni di delaminazione, di distacco cioè delle lamine, provocati proprio dalle tensioni interlaminari e da quelle, non messe in evidenza dal modello presentato, di tipo  $\sigma_{zz}$ , agenti in una direzione in cui, in generale, la resistenza dello strato di base è più debole.
- Si deve dunque analizzare il problema con un approccio tridimensionale.

507



## Le tensioni ai bordi liberi

- La legge costitutiva di uno strato nel suo riferimento materiale è allora, pagina 103,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Ruotando questa relazione per scriverla nel riferimento del laminato si ottiene (si indicano con un apice le componenti scritte in questo riferimento):

508



## Le tensioni ai bordi liberi

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix}$$

- Se le forze di volume sono nulle e considerando lo stato di sollecitazione  $\mathbf{N}=(N_x, 0, 0)$ , per il quale le componenti di tensione non dipendono da  $x$ , le equazioni indefinite di equilibrio si riducono a

$$\sigma'_{6,2} + \sigma'_{5,3} = 0,$$

$$\sigma'_{2,2} + \sigma'_{4,3} = 0,$$

$$\sigma'_{4,2} + \sigma'_{3,3} = 0.$$

## Le tensioni ai bordi liberi

- Inoltre, per le simmetrie del problema e per il fatto che le componenti di tensione non sono funzione di  $x$ , le componenti di spostamento devono avere la forma

$$u = \lambda x + U(y, z), \quad \lambda > 0, \quad \text{con} \quad U(y, z) = -U(-y, z) = U(y, -z),$$

$$v = V(y, z), \quad \text{con} \quad V(y, z) = -V(-y, z) = V(y, -z),$$

$$w = W(y, z), \quad \text{con} \quad W(y, z) = W(-y, z) = -W(y, -z).$$

- Infatti, si verifica facilmente, utilizzando il legame costitutivo, che solo in tal modo le componenti di tensione non dipendono da  $x$  e rispettano le simmetrie del problema.
- Se si introduce nelle equazioni di equilibrio il legame costitutivo visto e si esprimono le componenti di deformazione in funzione delle componenti di spostamento espresse come sopra, si ottengono le equazioni di equilibrio in funzione di  $U$ ,  $V$  e  $W$ , che descrivono gli spostamenti:

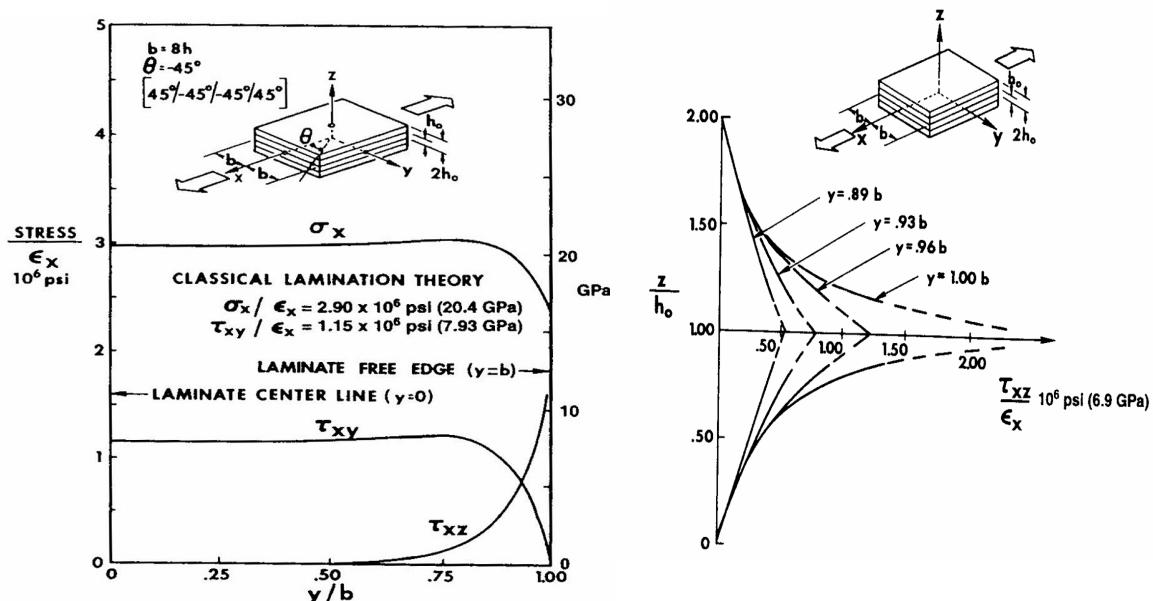


## Le tensioni ai bordi liberi

$$\begin{aligned}
 C'_{66} U_{,yy} + C'_{55} U_{,zz} + C'_{26} V_{,yy} + C'_{45} V_{,zz} + (C'_{36} + C'_{45}) W_{,yz} &= 0, \\
 C'_{26} U_{,yy} + C'_{45} U_{,zz} + C'_{22} V_{,yy} + C'_{44} V_{,zz} + (C'_{23} + C'_{44}) W_{,yz} &= 0, \\
 (C'_{36} + C'_{45}) U_{,yz} + (C'_{23} + C'_{44}) V_{,yz} + C'_{44} W_{,yy} + C'_{33} W_{,zz} &= 0.
 \end{aligned}$$

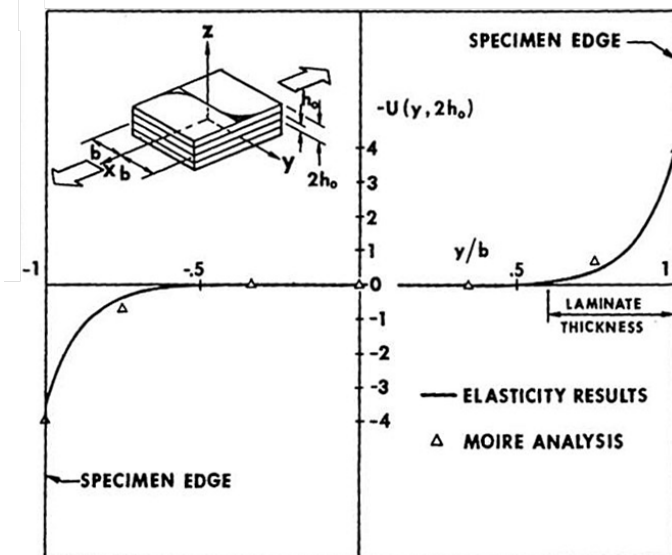
- Queste equazioni devono essere risolte per via numerica, dopo aver precisato le idonee condizioni ai bordi.
- Jones presenta i risultati di questa analisi su una piastra in cui  $b=8h_0$  e il materiale è un carbonio-epoxy.
- In particolare, si osserva, figura seguente (tratta dal Jones, come le successive), che la presenza delle tensioni di taglio interlaminari si concentra in una zona a ridosso del bordo libero, e di estensione all'incirca uguale allo spessore totale del laminato.
- Il fenomeno è quello di un comportamento di tipo strato limite: in una zona a ridosso di una superficie singolare, in questo caso il bordo, si manifestano dei fenomeni che alterano l'andamento regolare delle varie grandezze.

## Le tensioni ai bordi liberi



## Le tensioni ai bordi liberi

- La seconda figura a pagina precedente mostra la variazione delle tensioni di taglio sullo spessore.
- Si nota che queste crescono tendendo verso l'interfaccia tra i due strati, che sembra essere una superficie di singolarità per le tensioni di taglio.
- La figura a lato mostra invece lo spostamento longitudinale,  $u(y, z)$ , in superficie in funzione dell'ascissa  $y$ .
- Come si nota, anche qui l'effetto di bordo altera sensibilmente il regolare andamento dello spostamento.



513



## Le tensioni ai bordi liberi

- Il semplice modello analizzato non deve però trarre in inganno: esso permette di mettere in evidenza l'esistenza delle tensioni interlaminari di tipo  $\sigma_{xz}$ , ma anche le tensioni di tipo  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{zz}$  possono esistere, per lo stesso tipo di carico, provocate da una diversa sequenza di laminazione, o a causa di altri tipi di carico.
- Ad esempio, se i due strati esterni sono a  $90^\circ$  e quelli centrali a  $0^\circ$ , allora si mette in evidenza l'esistenza di una tensione di tipo  $\sigma_{yy}$  sullo spessore degli strati pari a

$$\sigma_{yy} = -\frac{N_x}{2h_0} \frac{(Q_{11} - Q_{22})Q_{12}}{(Q_{11} + Q_{22})^2 - 4Q_{12}^2}$$

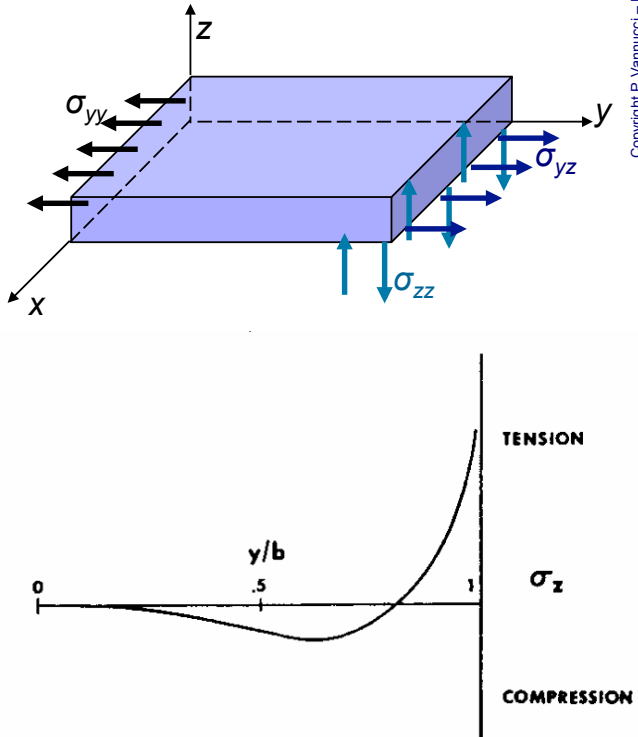
- Ora, se si isola una porzione di strato come nella figura alla pagina seguente, si osserva che per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse  $x$  devono sussistere delle tensioni normali  $\sigma_{zz}$ , la cui distribuzione deve essere evidentemente equilibrata.

514



## Le tensioni ai bordi liberi

- Una distribuzione plausibile delle tensioni  $\sigma_{zz}$  per questo caso è stata proposta da Pipes e Pagano, vedi figura (Jones).
- Si vede che essa tende a zero al di fuori dello strato limite adiacente al bordo e di estensione uguale allo spessore della piastra, mentre in prossimità del bordo tende verso infinito.
- Queste tensioni sono quindi in grado di provocare la delaminazione al bordo per distacco delle parti, in teoria anche per deboli valori delle forze applicate.



515



## La teoria di Reissner-Mindlin

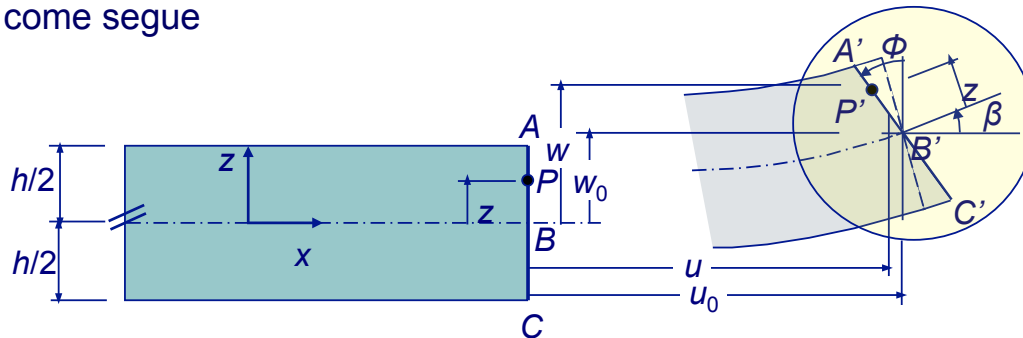
- Si è già detto che i problemi principali della teoria classica derivano dallo stesso modello cinematico.
- In particolare, delle tre ipotesi del modello di Kirchhoff riguardanti la cinematica del segmento normale al piano medio, quella che pone i problemi principali è quella che prevede che tale normale resti ancora perpendicolare alla superficie media deformata.
- Appare quindi inevitabile rimuovere questa ipotesi, al fine di mettere in evidenza l'esistenza di deformazioni da taglio nello spessore della piastra ed in seguito poterne dedurre le corrispondenti tensioni.
- Nel modello che segue le altre ipotesi sul comportamento del segmento normale rimangono.
- In particolare, esso resta piano e non subisce deformazioni estensionali.
- Queste due ipotesi sono ben rispettate nella realtà, tranne che nei casi di piastre molto spesse. Il modello che andiamo a vedere si presta quindi ragionevolmente bene per l'analisi di piastre moderatamente spesse.

516



## La teoria di Reissner-Mindlin

- Il modello meccanico classico, pagina 292 viene quindi modificato come segue



- La rotazione della normale non è più uguale all'angolo  $\beta$  che la tangente al piano medio forma con l'orizzontale, ma è un angolo indipendente da questo,  $\Phi$ .
- Si deve subito dire che l'ipotesi classica vincolava la deformazione ad una condizione molto forte, che aveva come conseguenza fondamentale quella di eliminare la deformazione a taglio e gli

517



## La teoria di Reissner-Mindlin

spostamenti che ne conseguono, e quindi globalmente di sovrastimare l'effettiva rigidità della piastra.

- Circa la rotazione  $\Phi$ , si fa l'ipotesi che questa resti di piccola entità, in modo tale che

$$\sin \Phi \cong \tan \Phi \cong \Phi, \quad \cos \Phi \cong 1.$$

- Ne consegue che

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \Phi_x(x, y),$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \Phi_y(x, y),$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) \quad \forall z.$$

- Le incognite cinematiche sono adesso, oltre a  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$ , anche le rotazioni  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$ ; queste sono tutte funzioni di  $x$  ed  $y$ , e quindi ci si può ancora ridurre ad un modello bidimensionale.
- Se adesso si calcolano le deformazioni, si ottiene

518



## La teoria di Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right] - \frac{z}{2} \left[ \frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x} \right], \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\Phi_x(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\Phi_y(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

## La teoria di Reissner-Mindlin

- Dunque, adesso le deformazioni  $\varepsilon_{xz}$  ed  $\varepsilon_{yz}$  non sono nulle, ma assumono un valore costante sullo spessore.
- Questo costituisce un difetto del modello, in quanto se si calcolano le tensioni corrispondenti tramite la legge costitutiva, queste assumono un valore costante, se il materiale è almeno ortotropo con l'asse z asse di ortotropia, mentre invece sappiamo che queste tensioni non possono essere costanti, e che si annullano obbligatoriamente sulle superfici della piastra se questa non è soggetta a carichi distribuiti radenti.
- Il campo di deformazioni nel piano viene ancora scritto come somma di due parti, una dovuta alle deformazioni del piano medio ed una dovuta alle curvature del piano medio:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix}.$$

## La teoria di Reissner-Mindlin

- Rispetto alla teoria classica, è però la definizione delle curvature che cambia, in quanto non sono più direttamente legate allo spostamento  $w_0$ :

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

- Se adesso si introducono le risultanti della azioni interne, definite a pagina 310 per le azioni di membrana ed i momenti flettenti e torcenti, e a pagina 450 per le azioni di taglio, si nota innanzitutto che niente cambia per il calcolo dei tensori **A**, **B** e **D**: *il comportamento elastico nel piano non è modificato dal cambiamento di modello.*

521



## La teoria di Reissner-Mindlin

- D'altra parte, in caso contrario, la definizione delle simmetrie elastiche di un laminato dipenderebbe, paradossalmente, dalla teoria di piastra utilizzata.
- Il modello cinematico invece cambia la definizione di curvatura ed introduce nuove variabili cinematiche.
- Per quanto concerne le risultanti di taglio, il loro calcolo presuppone dapprima il calcolo delle tensioni di taglio  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ .
- Per un materiale ortotropo in cui l'asse  $z$  è asse d'ortotropia, la matrice di rigidezza  $[C]$  è quella di pagina 509, per cui si ha che

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_4 \\ \epsilon'_5 \end{Bmatrix}$$

- Se si è nel riferimento di ortotropia, allora  $C_{44}=G_{23}$  e  $C_{55}=G_{13}$ . Se il materiale è isotropo trasverso nel piano 23, come è il caso di una lamina unidirezionale con le fibre in direzione  $x_1$ , allora  $C_{55}=C_{66}$  e dunque  $G_{13}=G_{12}$ .

522



## La teoria di Reissner-Mindlin

- Una avvertenza: come nel caso tridimensionale, si sono indicate con l'apice le grandezze tensoriali in un riferimento che non è quello di ortotropia.
- Per le componenti piane, seguendo la consuetudine, si era scelto di utilizzare in tal caso i simboli  $x$ ,  $y$  ed  $s$  al posto di 1, 2 e 5.
- Purtroppo, nel caso tridimensionale non vi è, per la notazione di Voigt, una convenzione analoga per gli indici 3, 4 e 5, e dunque si è scelto di utilizzare i simboli numerici con l'apice a indicare il fatto che non si è, in generale, nel riferimento di ortotropia del materiale.
- In particolare, nel caso di un laminato, con l'apice si indicano le grandezze nel riferimento globale della piastra.
- In definitiva, la corrispondenza tra componenti con indici letterali e componenti con indici numerici ed apici è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{zy} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}.$$

## La teoria di Reissner-Mindlin

- Le relazioni costitutive precedenti mostrano un paradosso di questa teoria, già in parte accennato: le tensioni di taglio sono costanti nello spessore di ogni strato, non si annullano sulle facce della piastra e non vi è continuità delle tensioni di taglio all'interfaccia degli strati, in quanto in generale

$$\begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \neq \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_{k+1}.$$

- Se invece si integrano le equazioni indefinite di equilibrio, dopo aver preso in conto il legame costitutivo e l'espressione delle deformazioni in funzione delle incognite cinematiche, pagina 519, si ottiene, come anche nel caso della teoria classica, una variazione parabolica delle tensioni di taglio sullo spessore.
- Per prendere in conto tutto ciò, nella teoria di Reissner-Mindlin, detta anche teoria FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*) si introduce una *funzione di ponderazione*  $f(z)$  continua sullo spessore:

## La teoria di Reissner-Mindlin

$$f(z) = \frac{5}{4} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

- Questa funzione, il cui integrale sullo spessore vale  $5/6 h$ , e quindi introduce un fattore di riduzione di  $5/6$  nel calcolo delle risultanti di taglio, permette di ottenere una variazione parabolica delle tensioni di taglio sullo spessore e al contempo di rispettare le condizioni di annullamento delle stesse in corrispondenza delle facce esterne, ma non assicura comunque la continuità delle tensioni di taglio alle interfacce degli strati.
- Il calcolo delle risultanti di taglio tenendo conto della funzione di ponderazione e del legame costitutivo è dunque il seguente:

525



## La teoria di Reissner-Mindlin

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] (C'_{44} \varepsilon'_4 + C'_{45} \varepsilon'_5) dz \\ \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] (C'_{45} \varepsilon'_4 + C'_{55} \varepsilon'_5) dz \end{Bmatrix}$$

- I coefficienti elastici sono costanti strato per strato mentre le deformazioni sono costanti su tutto lo spessore; si ottiene dunque

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{44} & H'_{45} \\ H'_{45} & H'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{Bmatrix}$$

dove i coefficienti di rigidezza a taglio  $H_{ij}$  sono dati da

$$H'_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \left[ z_k - z_{k-1} - \frac{4}{3} \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{h^2} \right] (C'_{ij})_k, \quad i, j = 4, 5.$$

526





## La teoria di Reissner-Mindlin

- Nel caso di laminati a strati identici, allora l'espressione precedente si semplifica:

$$H'_{ij} = \frac{5}{12} \frac{h}{n^3} \sum_{k=1}^n C'_{ij} (3n^2 - d_k) \quad i, j = 4, 5,$$

dove i coefficienti  $d_k$  sono già stati definiti a pagina 351,

$$d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- Sono note alcune soluzioni basate sul metodo di Navier per le piastre simmetriche, rettangolari, appoggiate sui bordi e con gli assi di ortotropia in flessione paralleli ai lati (e.g. Whitney, 1972, vedi Jones).

## Teorie di ordine superiore per i laminati

- La teoria di Reissner-Mindlin è migliore della teoria classica, sia perché fornisce dei risultati migliori per quanto riguarda gli spostamenti trasversali, maggiori perché la piastra è più deformabile, sia perché permette di calcolare le tensioni di taglio.
- Tuttavia, non è ancora soddisfacente per diversi aspetti; ad esempio, non assicura la continuità delle tensioni di taglio alle interfacce degli strati e non permette il calcolo delle tensioni di tipo  $\sigma_{zz}$ , che abbiamo visto essere importanti per i fenomeni di delaminazione ai bordi liberi.
- Inoltre, anche la valutazione dello spostamento trasversale  $w_0$ , anche se migliore rispetto alla teoria classica, non possiede ancora una sufficiente precisione.
- Per queste ragioni sono state proposte negli anni un gran numero di teorie di ordine superiore per la modellazione dei laminati.
- Non è il caso in questa sede di approfondire questo tipo di argomenti, molto specialistici.

## Teorie di ordine superiore per i laminati

- Tuttavia, si vuole qui dare solo una rapidissima panoramica dello stato dell'arte in materia di teorie per i laminati.
- In linea generale, le teorie per i laminati si dividono in:
  - teorie monostrato equivalente (ESL: *equivalent single layer*); sia la teoria classica che la teoria di Reissner-Mindlin rientrano in questa categoria;
  - teorie strato per strato (LW: *layer-wise theory*).
- Appartengono alla prima categoria tutte quelle teorie in cui si cerca di ridurre il comportamento del laminato a quello di un monostrato equivalente.
- Esse sono caratterizzate dal fatto che il numero delle variabili cinematiche non dipende da quello degli strati.
- Appartengono alla seconda categoria le teorie in cui la descrizione degli spostamenti in ogni singolo strato è fatta con funzioni proprie allo strato ed indipendenti da quelle degli altri strati.

## Teorie di ordine superiore per i laminati

- Per il fatto di usare un campo di spostamenti definito strato per strato, queste teorie sono in genere più precise delle altre; sono tuttavia più pesanti dal punto di vista computazionale.
- Le condizioni di continuità alle interfacce possono essere imposte agevolmente nelle teorie del secondo tipo.
- Nel campo delle teorie ESL, si ricordano soltanto la teoria TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*), Reddy, 1983, in cui la normale al piano medio ruota e si ingobba secondo una cubica in  $z$ , in modo da ottenere una variazione parabolica delle deformazioni, e quindi delle tensioni, sullo spessore, e le teorie di tipo Zig-Zag (Di Sciuva, 1984, Murakami, 1986), in cui il campo di spostamenti negli strati è differente ma si assicura la loro continuità alle interfacce.
- Un'altra distinzione che viene spesso fatta è quella relativa alla formulazione di una teoria.

## Teorie di ordine superiore per i laminati

- Generalmente, si distingue in teorie che si basano su una formulazione negli spostamenti e che quindi utilizzano un principio variazionale di tipo principio dei lavori virtuali, oppure che utilizzano un approccio misto, dove si definiscono come campi indipendenti alcune componenti di spostamento e di tensione; in tal caso, si fa ricorso al principio di Hellinger-Reissner per la formulazione variazionale del problema.
- Una estesa discussione delle possibili teorie si può trovare in letteratura in alcuni lavori di Reddy e di Carrera, ai quali si rimanda.
- A titolo di esempio, si riporta una tabella tratta da un articolo di Carrera e Ciuffreda (*A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems*, Composite Structures, 69, 2005).
- Sono confrontati i valori della freccia massima per due laminati *cross-ply* quadrati a 3 e 4 strati, il secondo antisimmetrico (e accoppiato).

531



## Teorie di ordine superiore per i laminati

- I valori in questione sono calcolati con 38 teorie differenti, partendo dalla teoria classica, in basso (CLT, *Classical Lamination Theory*), fino alla soluzione esatta in elasticità tridimensionale (vedi oltre, soluzione di Pagano).
- I risultati sono forniti per due valori del rapporto lato/spessore,  $a/h=4$  e 6.
- Si nota che la teoria classica sottostima in maniera inaccettabile lo spostamento, mentre la teoria tipo FSDT, anche se non ancora soddisfacente, dà una stima comunque largamente migliore.
- Questo mostra che la teoria classica sovrastima in modo eccessivo la rigidità.

	$a/h = 4$		$a/h = 6$	
	$N_f = 3$	$N_f = 4$	$N_f = 3$	$N_f = 4$
3D[23]	2.887	4.181	1.635	2.556
LM4	2.887	4.181	1.625	2.556
LM3	2.887	4.181	1.635	2.556
LM2	2.891	4.181	1.635	2.556
LM1	3.539	4.710	1.880	2.803
EMZC3	2.881	4.102	1.634	2.514
EMZC2	2.831	3.478	1.602	2.195
EMZC1	2.904	3.300	1.634	2.095
EMZC3d	2.898	4.124	1.637	2.516
EMZC2d	2.848	3.488	1.602	2.195
EMZC1d	2.904	3.306	1.634	2.098
EMC4	2.721	3.885	1.534	2.391
EMC3	2.744	3.696	1.543	2.285
EMC2	2.244	3.158	1.284	2.031
EMC1	3.515	3.681	1.844	2.257
EMC3d	2.717	3.869	1.529	2.381
EMC2d	2.744	3.660	1.542	2.268
EMC1d	2.109	3.029	1.225	1.972
EMC1d	2.196	3.142	1.258	2.014
LD4	2.887	4.180	1.634	2.556
LD3	2.887	4.180	1.634	2.556
LD2	2.864	4.165	1.629	2.553
LD1	2.783	4.058	1.583	2.495
EDZ3	2.876	4.089	1.633	2.506
EDZ2	2.781	3.377	1.583	2.150
EDZ1	2.798	3.170	1.586	2.037
EDZ3d	2.893	4.110	1.636	2.507
EDZ2d	2.798	3.392	1.586	2.149
EDZ1d	2.798	3.177	1.586	2.040
ED4	2.684	3.830	1.514	2.361
ED3	2.687	3.595	1.514	2.238
ED2	2.074	2.984	1.219	1.952
ED1	2.091	2.924	1.209	1.917
ED4d	2.703	3.842	1.517	2.361
ED3d	2.703	3.606	1.517	2.238
ED2d	2.090	2.988	1.211	1.950
FSDT	2.091	2.924	1.211	1.919
CLT	0.5075	1.115	0.5075	1.115

532



## La teoria di Verchery-Pham Dang per i sandwich

- I pannelli sandwich sono caratterizzati dal fatto che mentre le due pelli, cioè gli strati esterni, sono in genere rigidi e molto sottili, lo strato centrale, l'anima, è spesso e poco rigido.
- In una tale situazione è ancor più necessario disporre di una buona teoria, che prenda in debito conto le deformazioni di taglio.
- Esistono diverse teorie *ad-hoc* per le piastre sandwich (a tale scopo si rimanda al testo in bibliografia edito da A. Vautrin).
- Qui si vuole succintamente parlare della teoria di Verchery-Pham Dang (1976), che è una delle prime teorie miste per le piastre e che conduce ad una soluzione esatta, utilizzando l'approccio di Navier, per le piastre rettangolari appoggiate sul contorno, ortotrope e con assi di ortotropia paralleli ai lati.
- Senza entrare nei dettagli, nel modello di Verchery et Pham Dang, le variabili indipendenti sono gli spostamenti nel piano e le tensioni  $\sigma_{i3}$ ,  $i=1,2$ .
- La tensione  $\sigma_{33}$  si ottiene dalle equazioni di equilibrio.

533



## La teoria di Verchery-Pham Dang per i sandwich

- Il campo di spostamenti assunto è continuo alle interfacce, costante nelle pelli e linearmente variabile nell'anima. Una tale assunzione è giustificata dal piccolo spessore delle pelli.
- Si assume poi che l'anima lavori solo a taglio e si assegnano le variazioni delle tensioni da taglio.
- Queste possono essere di due tipi: costanti nell'anima e lineari nelle pelli, oppure costanti nell'anima e quadratiche nelle pelli.
- Con questa teoria si possono prendere in conto sia la continuità degli spostamenti che quello delle tensioni di taglio e di  $\sigma_{33}$  alle interfacce.
- Le equazioni di equilibrio e le condizioni al bordo associate sono recuperate con una formulazione variazionale mista.
- Per maggiori dettagli, si rinvia all'articolo: *Pham Dang, T., Verchery, G.: Théorie des plaques sandwich assurant la continuité du déplacement et de la contrainte aux interfaces. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, 2 A, 1976.*

534



## La teoria tridimensionale di Pagano

- Per terminare questo capitolo, si fa solo un cenno alla teoria elaborata nel 1969 da N. J. Pagano in un celebre articolo: *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates* (Journal of Composite Materials, 4, 1970).
- L'importanza di questa teoria risiede nel fatto che essa è una soluzione esatta tridimensionale in teoria lineare dell'elasticità.
- Essa riguarda il calcolo di piastre laminate e sandwich, ma è applicabile anche alle piastre con un singolo strato, e non ha restrizioni sullo spessore.
- Ogni strato della piastra deve essere ortotropo e avere gli assi di ortotropia paralleli ai lati; la restrizione usuale, già più volte commentata, è quindi ancora più forte in questo caso, perché riguarda non solo l'intera piastra ma ciascuno strato.
- La soluzione è trovata con un procedimento che fa uso di autofunzioni di tipo esponenziale e trigonometrico, e si deve

## La teoria tridimensionale di Pagano

risolvere un sistema di equazioni diverso per ciascuna armonica in cui un carico ortogonale è decomposto, il che può comportare delle complicazioni numeriche.

- Tuttavia, la soluzione di Pagano è molto utilizzata come soluzione di riferimento, in quanto nell'ambito dell'elasticità lineare è esatta ed è una soluzione tridimensionale, nella quale cioè non si fanno ipotesi cinematiche sul comportamento della piastra.
- Un punto discusso della soluzione di Pagano è semmai quello delle condizioni al contorno, che traducono la condizione bidimensionale di appoggio.