HAL open science

Un peu de Mécanique des Milieux Continus

Florence Zara

To cite this version:

Florence Zara. Un peu de Mécanique des Milieux Continus. Doctorat. France. 2017, pp.54. cel-01520209

HAL Id: cel-01520209

https://hal.science/cel-01520209v1

Submitted on 10 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Un peu de Mécanique des Milieux Continus

Florence Zara

Version du 10 mai 2017

Résumé

Ce document présente les notions de mécanique des milieux continus nécessaires à la compréhension du comportement des objets déformables en vue d'effectuer leur simulation. En effet, ces notions sont souvent éparpillées dans la littérature et les notations employées en mécanique diffèrent de celles usuellement employées par les mathématiciens et informaticiens. Je souhaitais ainsi rassembler ces connaissances dans ce document constituant le chapitre 1 de mon HDR.

Université Lyon 1
Faculté des Sciences et Technologies
Département d'Informatique
Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information
LIRIS, UMR 5205 CNRS
Équipe SAARA

Table des matières

1 Introduction 3

2 Cadre de la dynamique newtonienne 4

3 Vecteur de traction et tenseur des contraintes 7

4 Identification de l'équation à résoudre 9

5 Cas des objets élastiques : déformation et déplacement 10

6 Loi de comportement de l'objet 18

7 Energie de déformation élastique 27

8 Retour sur l'équation de la dynamique à résoudre 29

9 Discrétisation du problème continu 31

10 Méthode des éléments finis 35

11 Conclusion 49

Liste des symboles

ϵ^{cd}	Tenseur de déformation de Cauchy-Green droit (appelé tenseur de dilatation)
ϵ^{cg}	Tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche (appelé tenseur de dilatation)
ϵ^{g}	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
λ	Premier coefficient de Lamé
$\mathbb{F}$	Gradient de la déformation
$\mathbb{U}$	Gradient du déplacement
μ	Second coefficient de Lamé appelé module de cisaillement - unité de mesure : le Pascal (Pa)
ν	Coefficient de Poisson du matériau - sans unité
Ω_t	Etat déformé qui correspond à l'état courant au temps t
Ω_0	Etat de référence qui correspond à l'état non-déformé au temps t_0
$\overrightarrow{T}$	Forces de contacts ou de tractions appliquées sur l'objet
Φ	Base de fonctions connues indépendantes (dans le cadre de la MEF)
ϕ	Déformation pour passer de l'état de référence à l'état déformé
ρ	Masse volumique de l'objet
$\bar{\bar{\epsilon}}$	Tenseur de déformation
$\bar{\bar{\sigma}}$	Tenseur de contraintes de Cauchy dont les composantes sont homogènes à une pression - unité de mesure : le Pascal (Pa) ou N.m^{-2}
$\mathbf{a}$	Vecteur des paramètres de l'approximation de l'interpolation (cadre de la MEF)
$\mathbf{X}$	Position initiale d'un point matériel de l'objet - unité de mesure : le mètre (m)
$\mathbf{x}$	Position courante au temps t d'un point matériel de l'objet
$\vec{a}$	Accélération de l'objet - unité de mesure : $m.s^{-2}$
$\vec{F}$	Forces appliquées sur l'objet - unité de mesure : le Newton (N)
$\vec{g}$	Force de la gravité
$\vec{n}$	Normale à la surface
$\vec{u}$	Déplacement d'un point matériel de l'objet
$\vec{v}$	Vitesse de l'objet - unité de mesure : $m.s^{-1}$
d	Dimension de l'objet ($d = 3$ en 3 dimensions)
ds	Elément de surface
dV	Volume élémentaire à l'instant t_0
dv	Volume élémentaire au cours du mouvement
E	Module de Young du matériau - unité de mesure : le Pascal (Pa)
I_{e_1}, I_{e_2}	Invariants du tenseur de déformation

k	Raideur d'un ressort - unité de mesure : N.m^{-1} ou Pa.m
m	Masse de l'objet - unité de mesure : le kilogramme (Kg)
t	Temps - unité de mesure : la seconde (s)
W	Travail d'une force (énergie fournie par la force) - unité de mesure : le Joule (J)
$W(\epsilon)$	Energie de déformation - unité de mesure : le Joule (J).
W_e	Densité d'énergie élastique - unité de mesure : J.m^{-3}

1 Introduction

Les personnes travaillant dans le domaine de l'animation par modèles physiques ont déjà lu à maintes reprises des chapitres de manuscrits de thèse présentant les notions de mécaniques nécessaires à la modélisation du comportement des objets déformables.

Je peux citer ceux de Aurélien Deram (2012), Mathieu Bailet (2014) et Vincent Majorczyk (2015). Il existe également de nombreuses références académiques sur le domaine de la Mécanique des Milieux Continus. Parmi ceux qui m'ont le plus aidée à comprendre ces notions, je peux citer le livre de Coirier and Nadot-Martin (2013) et celui de Belytschko et al. (2000), et comme supports d'enseignement ceux de Christian Olagnon (2010), de Nicolas Moës (2011), de Samuel Forest et al. (2010), de Helmut Klöcker (2003) et de Sifakis and Barbic (2012), ou encore ceux de Hervé Oudin (2008) et Yves Debard Debard (2011) sur la méthode des éléments finis.

En voici encore un... En effet, un de mes souhaits en rédigeant mon Habilitation à Diriger les Recherches (ce document constituant son premier chapitre), était de mettre par écrit les notions acquises au cours de plusieurs années de recherche. N'ayant en effet jamais trouvé de support présentant l'ensemble de ces notions, je souhaitais les regrouper en espérant que cela puisse aider les chercheurs qui débutent dans ce domaine. Je présente ainsi ici les notions théoriques de mécaniques nécessaires à la modélisation et la simulation physique d'objets déformables.

Organisation de ce chapitre : Ce document s'articule de la façon suivante.

- La section 2 présente la dynamique newtonienne avec le rappel du principe fondamental de la dynamique. Nous aborderons ensuite la notion de contraintes appliquées sur l'objet en définissant dans la section 3 le vecteur de tractions en fonction du tenseur de contraintes du matériau. Ces notions permettront de définir dans la section 4, l'équation régissant le mouvement de l'objet.
- La section 5 se focalisera ensuite sur le cas des objets élastiques. Nous définirons les notions de déformation et de déplacement. Nous verrons notamment que le gradient mathématique de ces grandeurs physiques permet d'obtenir des indications sur la variation de ces grandeurs dans toutes les directions de l'espace. Nous verrons ensuite des tenseurs de déformations plus complexes.
- Dans la section 6, nous verrons ensuite que la loi de comportement d'un matériau permet de relier les contraintes appliquées sur l'objet à la déformation subie par celui-ci. Quelques exemples seront donnés pour illustrer le cas de l'élasticité isotrope.
- Dans la section 7, nous aborderons le calcul de l'énergie de déformation élastique.
- Dans la section 8, nous reviendrons sur l'équation à résoudre pour définir le mouvement de l'objet au cours du temps. Puis, dans la section 9, nous verrons comment est établie la formulation discrète du problème initial.
- Enfin, nous présenterons dans la section 10, la méthode des éléments finis (MEF) classiquement utilisée pour la résolution du système discret.

2 Cadre de la dynamique newtonienne

Nous cherchons à reproduire le mouvement d'un objet en calculant l'évolution de sa position au cours du temps. Pour cela, le temps qui est une grandeur continue doit être discrétisé en différents instants t. Soit h le pas de temps de cette discrétisation. Ainsi, si nous considérons que t_0 est le temps initial de la simulation, le temps suivant est $t_1 = t_0 + h$, puis le temps encore suivant est $t_2 = t_1 + h = t_0 + 2\,h$, etc.

Pour calculer la position d'un objet, nous nous appuyons sur la mécanique newtonienne basée sur les lois de Newton qui sont toujours vraies et qui s'appliquent à tout élément solide. La première loi de Newton dit que le mouvement d'un objet est provoqué par les forces qui lui sont appliquées. La seconde loi de Newton, plus connue sous le nom de "Principe Fondamental de la Dynamique", dit que la somme des forces qui sont exercées sur un objet est égale à la masse de l'objet multipliée par son accélération. Si nous nous plaçons dans l'espace 3D, cette seconde loi se formule de la manière suivante :

$$\overrightarrow{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \tag{1}$$

avec m la masse (en Kg) de l'objet qui n'évolue pas dans le temps, $\overrightarrow{F}(t) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur des forces (en N) appliquées sur l'objet à l'instant t, $\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur correspondant à son accélération (en ms^{-2}) à l'instant t. Le vecteur des forces et de l'accélération sont définis à chaque instant t car ils évoluent au cours du temps. Ainsi, connaissant les forces qui sont appliquées sur un objet, nous en déduisons le vecteur accélération de cet objet, la masse étant un paramètre connu de la simulation. Soit :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}.$$

A partir de là, il suffit d'intégrer par rapport au temps le vecteur accélération pour obtenir le vecteur vitesse de l'objet, puisque l'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse. Soit :

$$\vec{v}(t) = \int_t \vec{a}(t)\,dt \;\text{ avec }\; \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t).$$

De la même façon, une fois que nous avons le vecteur vitesse, il suffit de l'intégrer par rapport au temps pour obtenir le vecteur position de l'objet, puisque la vitesse est la dérivée par rapport au temps de la position. Soit :

$$\vec{x}(t) = \int_t \vec{v}(t)\,dt \;\text{ avec }\; \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t).$$

Comme ces intégrales n'ont que très rarement des solutions analytiques, un schéma d'intégration numérique doit généralement être utilisé pour calculer les vecteurs vitesse et position en calculant une approximation des intégrales des vecteurs accélération et vitesse. Le choix du schéma d'intégration employé nécessite alors un compromis entre la précision de son résultat (en choisissant une approximation ayant une erreur plus ou moins grande) et le temps de calcul nécessaire à l'emploi de ce schéma d'intégration numérique.

En animation physique, les schémas d'intégration numérique qui sont privilégiés sont le schéma d'Euler semi-implicite (nécessitant des petits pas de temps pour ne pas faire une erreur trop importante) et le schéma d'Euler implicite (Baraff and Witkin (1998))

(dit inconditionnellement stable, c'est-à-dire donnant une approximation numérique ayant la même erreur quelque soit le pas de temps, mais nécessitant la résolution d'un système linéaire, c'est-à-dire beaucoup plus de calculs que la première méthode). Pour le schéma d'Euler semi-implicite, les calculs sont très simples avec :

$$\begin{cases} \vec{v}(t+h) & = & \vec{v}(t) + h\,\vec{a}(t) \\ \vec{x}(t+h) & = & \vec{x}(t) + h\,\vec{v}(t+h) \end{cases}$$

Au final, la boucle de simulation, c'est-à-dire l'enchaînement des calculs permettant l'obtention de la position d'un objet à chaque instant t, est décrite par les étapes suivantes :

1. Calcul de l'ensemble des forces $\vec{F}(t)$ qui sont exercées sur l'objet.
2. Calcul de l'accélération $\vec{a}(t)$ de l'objet en divisant les forces $\vec{F}(t)$ par la masse m.
3. Calcul des nouvelles vitesse $\vec{v}(t+h)$ et position $\vec{x}(t+h)$ de l'objet par intégration numérique des vecteurs accélération et vitesse précédents.
4. Affichage de l'objet à l'écran en fonction de la nouvelle position $\vec{x}(t+h)$.
5. Puis itération en reprenant l'étape 1 pour obtenir les nouvelles forces $\vec{F}(t+h)$.

A noter que nous considérerons ici l'analyse du mouvement d'objets déformables, c'est-à-dire qu'à la différence des objets rigides, la distance entre deux points quelconques de l'objet peut varier au cours du temps. Ce changement est fonction du matériau considéré. En effet, les mêmes efforts appliqués sur des objets de même géométrie mais de matériaux différents (par exemple caoutchouc et acier) ne conduisent pas à la même déformation (c'est-à-dire au même changement dans la forme des objets). Nous aurons ainsi besoin de définir des relations (appelées lois de comportement) permettant de relier les efforts appliqués à la déformation induite et ceci en fonction du matériau considéré.

L'enjeu de la simulation physique d'objets déformables réside ensuite dans le calcul des forces appliquées sur l'objet simulé. Ces forces sont dites externes quand elles sont relatives aux forces extérieures appliquées sur l'objet (comme la gravité ou des forces de contacts issues de l'interaction avec un autre objet). Ces forces sont dites internes quand elles sont relatives au modèle physique employé pour modéliser le comportement physique de l'objet. Cette modélisation physique de l'objet est usuellement basée sur sa décomposition en éléments. Le modèle physique permet ensuite de déterminer les interactions qu'il y a entre ces éléments, c'est-à-dire de calculer les forces entre ces éléments. Ce calcul est alors plus ou moins complexe et gourmand en temps d'exécution, selon le modèle physique employé ainsi que la décomposition adoptée en un plus ou moins grand nombre d'éléments.

Loi fondamentale de la dynamique. En Mécanique des Milieux Continus, nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à tout élément de volume. Nous définissons ainsi un volume élémentaire dV centré autour de la position géométrique $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ à un instant donné t_0 dans un espace affine euclidien. Nous considérons ensuite que toutes les particules constituant le matériau qui sont présentes à l'instant t_0 dans le volume élémentaire dV restent dans le même volume dv au cours du mouvement de l'objet. Le centre de gravité $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ de l'élément de volume dv caractérisera alors la position du point matériel aux instants t ultérieurs. Le volume élémentaire dV doit être représentatif du matériau et doit rester suffisamment petit devant les dimensions de l'objet étudié.

Soit D_t le domaine du matériau considéré à l'instant t et ∂D_t sa surface. Le volume de l'objet est alors défini par $V = \int_{D_t} dv$. Ensuite, si nous supposons que la mesure masse est continue par rapport au volume de l'objet ayant une vitesse $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t et en notant $\rho = m/V$ la masse volumique de l'objet (soit $m = \rho\, V$), nous pouvons écrire :

$$m\, \vec{a}(t) = m\, \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \rho\, V\, \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\int_{D_t} \rho\, \vec{v}(t)\, dv.$$

Le principe fondamental de la dynamique peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} \rho\, \vec{v}(t)\, dv = \int_{D_t} \rho\, \overrightarrow{f_{ext}}\, dv + \int_{\partial D_t} \overrightarrow{T}\, ds \tag{2}$$

avec $\overrightarrow{f_{ext}} \in \mathbb{R}^3$ les forces extérieures volumiques appliquées sur l'objet et $\overrightarrow{T} \in \mathbb{R}^3$ les forces appliquées sur la surface de l'objet. Ces forces de contacts ou tractions appliquées à la surface correspondent à celles qui sont notamment appliquées sur l'objet pour effectuer des tests de poussée ou de cisaillement. Au final, l'enjeu réside dans le calcul de l'ensemble des forces appliquées sur l'objet dont la réaction va dépendre du matériau de l'objet. Il est important de noter que $\overrightarrow{f_{ext}}$ correspond à des forces volumiques qui s'exercent sur la totalité de l'objet c'est-à-dire que $\overrightarrow{f_{ext}}$ est un vecteur de densité de force par unité de volume, tandis que $\overrightarrow{T}$ correspond aux forces appliquées sur le bord externe de l'objet c'est-à-dire que $\overrightarrow{T}$ correspond à des forces appliquées par unité de surface.

Force de gravité. Comme force volumique considérons l'exemple classique de la densité des forces volumiques exercées par la gravité sur un milieu continu. Soit $\|\vec{g}\| = 9,81\ ms^{-2}$ la constante de gravité. La force de gravité appliquée sur l'objet est alors définie par :

$$\int_{D_t} \rho\, \vec{g}\, dv = \rho\, V\vec{g} = m\, \vec{g}.$$

Conservation de la masse. Il y a un certains nombres d'équations de bilan à respecter lors d'un mouvement dans un milieu continu. La masse de tout domaine matériel reste notamment constante pendant le mouvement de ce domaine induisant :

$$\frac{d}{dt}\, m = \frac{d}{dt}\int_{D_t} \rho\, dv = 0.$$

En utilisant les formules de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, nous obtenons [1, 2] :

$$\int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + div\, (\rho\, \vec{v})\right) dv = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, div\, \vec{v}\right) dv = 0.$$

Nous pouvons alors en déduire les **formes locales de la conservation de la masse** :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + div\, (\rho\, \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, div\, \vec{v} = 0.$$

1. La dérivée particulaire du volume élémentaire dv est égale à $\frac{d}{dt}\,(dv) = div(\vec{v})\, dv$. Toutes les explications se trouvent dans Coirier and Nadot-Martin (2013) et Moës (2011).
2. Pour rappel, soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes (u_1, u_2, u_3), $div\, \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$ (un scalaire).

3 Vecteur de traction et tenseur des contraintes

Concentrons nous maintenant sur les contraintes appliquées sur le bord externe de l'objet. Elles sont caractérisées en un point de l'objet par un vecteur de contraintes (ou vecteur de tractions) qui est défini pour une unité de surface ds autour de ce point par

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}, \quad T_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j \qquad (3)}$$

avec $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la normale à l'élément de surface ds et $\overline{\overline{\sigma}}$ le tenseur de contrainte de Cauchy (représenté dans une certaine base) qui est d'ordre 2 [3].

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ décrit l'état de contrainte en tout point de l'objet et dans toutes les directions. Ses composantes sont homogènes à une pression (en Pa) puisqu'elles correspondent à une force exercée sur une unité de surface autour d'un point (N.m^{-2}). Ce tenseur est symétrique avec $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^T \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Les termes diagonaux du tenseur de contrainte correspondent à des tractions et les termes non diagonaux à du cisaillement. Notons que ces composantes ont des valeurs positives dans le cas de la traction, c'est-à-dire quand nous tirons sur l'objet. Au final, ce tenseur est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Ainsi par symétrie seulement 6 composantes sont nécessaires à sa définition. Nous pouvons alors employer la notation de Voigt [4] consistant à créer un vecteur à partir de la matrice symétrique en supprimant ses doublons :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

La Fig. 1 illustre la signification de ces composantes.

— La composante σ_{12} (ou σ_{xy}) correspond à la composante du tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ en considérant la composante dans la direction de x_2 (ou y) de la contrainte appliquée à la face perpendiculaire à la direction x_1 (ou x).

— Les composantes d'une ligne ou d'une colonne représentent les composantes du vecteur de contraintes s'exerçant sur une face perpendiculaire à un des axes. Par exemple, les composantes de la première ligne $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ sont celles du vecteur de contrainte s'exerçant sur la facette perpendiculaire à la direction x_1 (ou x).

3. Noter que le nombre de barres mises sur le tenseur indique l'ordre du tenseur.

4. Pour retenir cette notation, nous mettons tout d'abord les éléments diagonaux dans l'ordre des indices, puis les éléments non diagonaux. Pour ces derniers en $\mathbb{R}^3$, à la place $i+3$ il n'y a pas d'indice i.

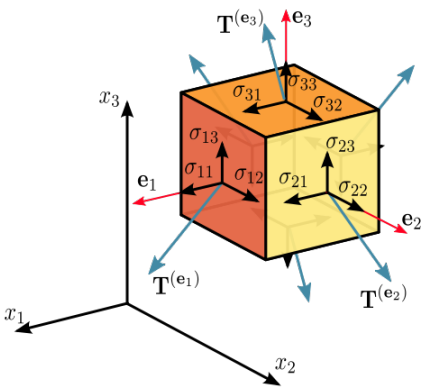


Figure 1 – *Tenseur de contrainte pour un élément 3D de matière [Wikipédia (2016)].*

Pour définir l'ensemble des tractions appliquées sur un élément de matière, il faut ainsi considérer les contraintes appliquées sur chacune de ses faces et dans chaque direction. Considérons par exemple, la face perpendiculaire à la direction x d'un élément de matière de volume $dv = dx\ dy\ dz$ et regardons ce qui se passe dans cette direction uniquement. La surface de cette face est définie par $ds = dy\ dz$. Si nous appliquons une force dans la direction x, nous devons considérer ce qui se passe sur la face positionnée en x, mais également la traction induite sur la face positionnée en $(x-dx)$, c'est-à-dire que nous allons considérer la composante σ_{11} (ou σ_{xx}) en deux points de l'espace (x, y, z) et $(x - dx, y, z)$. En considérant le repère local $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de l'élément de matière, nous avons alors comme traction appliquée à la surface ds :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T}\ ds &= \sigma_{11}(x,y,z)\ dy\ dz\ \overrightarrow{e_1} - \sigma_{11}(x-dx,y,z)\ dy\ dz\ \overrightarrow{e_1} \\
&= (\sigma_{11}(x,y,z) - \sigma_{11}(x-dx,y,z))\ dy\ dz\ \overrightarrow{e_1} \\
&= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}\ dx\ dy\ dz\ \overrightarrow{e_1} \\
&= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}\ dv\ \overrightarrow{e_1}
\end{aligned}$$

Ainsi en considérant toutes les directions pour cette face perpendiculaire à la direction x, nous obtenons comme traction :

$$\overrightarrow{T}\ ds = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}\ dv\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}\ dv\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}\ dv\ \overrightarrow{e_3}$$

Si nous considérons maintenant toutes les faces de notre élément de matière, l'ensemble des forces de traction qui lui sont appliquées peut alors s'exprimer comme la somme entre les forces appliquées sur la face perpendiculaire à la direction x, les forces appliquées sur la face perpendiculaire à la direction y, et celles appliquées à la face perpendiculaire à la direction z. Nous avons ainsi [5] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T}\ ds &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial_x}\ dv\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial_y}\ dv\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial_z}\ dv\ \overrightarrow{e_3} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial_x}\ dv\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial_y}\ dv\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial_z}\ dv\ \overrightarrow{e_3} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial_x}\ dv\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial_y}\ dv\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial_z}\ dv\ \overrightarrow{e_3} \\
&= \overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}}\ dv.
\end{aligned} \tag{6}$$

5. Petit rappel d'analyse vectorielle : si nous considérons $\mathbb{A}$ un tenseur d'ordre 2,
$\overrightarrow{div}\ \mathbb{A} = \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_{12}}{\partial y} + \frac{\partial A_{13}}{\partial z}\right) \overrightarrow{e_1} + \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial x} + \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + \frac{\partial A_{23}}{\partial z}\right) \overrightarrow{e_2} + \left(\frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \frac{\partial A_{32}}{\partial y} + \frac{\partial A_{33}}{\partial z}\right) \overrightarrow{e_3}.$

Nous avons alors défini la somme des tractions appliquées sur un élément en fonction du tenseur de contrainte et du volume de l'élément considéré. A noter que si nous considérons le cas particulier illustré par la Fig. 2, où la même force de pression est appliquée sur chacune des faces de notre élément et que ces forces sont perpendiculaires aux faces (c'est-à-dire que nous n'avons pas de cisaillement), le tenseur de contrainte se résume à :

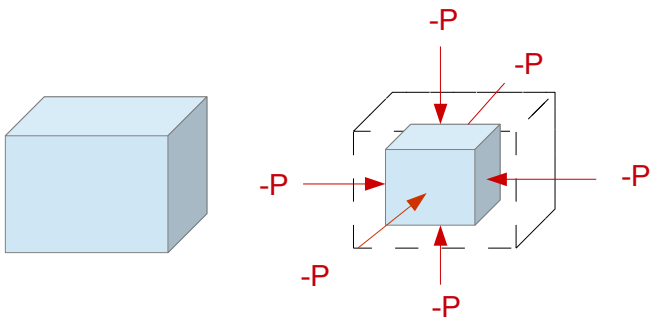


Figure 2 – *Pression homogène appliquée sur un élément de matière.*

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Dans ce cas particulier, nous avons alors [6] :

$$\overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial_x}\,\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial_y}\,\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial_z}\,\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{grad}\,\sigma_0 = \nabla\,\sigma_0. \tag{8}$$

4 Identification de l'équation à résoudre

En nous replaçant dans le cas général et en considérant un élément de volume dv situé au bord externe de l'objet (c'est-à-dire soumis aux forces de tractions), l'équation (2) peut s'écrire de la façon suivante pour cet élément de volume :

$$\rho\,dv\,\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \rho\,\overrightarrow{f_{ext}}\,dv + \overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}}\,dv.$$

Après simplification par le volume dv et en supposant que le vecteur $\overrightarrow{f_{ext}}$ est connu (constituant les données du problème), nous obtenons pour cet élément de volume :

$$\boxed{\rho\,\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \rho\,\overrightarrow{f_{ext}} + \overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}}. \qquad (9)}$$

Ainsi si cet élément de volume n'est soumis qu'à la force volumique de la gravité, l'équation suivante régit le mouvement de l'objet :

$$\rho\,\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \rho\,\vec{g} + \overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}}. \tag{10}$$

Le mouvement est ainsi décrit par une équation vectorielle qui s'ajoute à l'équation scalaire de conservation de la masse, soit un total de $3 + 1 = 4$ équations. Les inconnues

6. Autre rappel d'analyse vectorielle : pour une fonction f, $\overrightarrow{grad}\,f = \nabla\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_3}$.

du problème sont la masse volumique ρ (le volume de l'objet peut changer au cours du mouvement si nous ne considérons pas un objet incompressible), le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$. Nous avons ainsi un total de $1+3+6=10$ inconnues. Il manque donc 6 équations pour résoudre le problème. Pour les obtenir, il faut relier le vecteur vitesse $\vec{v}$ au tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ pour chaque point matériel.

De manière plus générale, il faut réussir à faire le lien entre les contraintes modélisées par le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ en chaque point matériel $\mathbf{X}$ (représenté par un élément de volume élémentaire) et la transformation $\phi(\mathbf{X}, t)$. Nous verrons que c'est la loi de comportement qui permettra de faire ce lien, sachant qu'elle est définie pour un matériau donné (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de loi de comportement universelle).

5 Cas des objets élastiques : déformation et déplacement

Nous analysons le cas particulier des objets élastiques qui sont caractérisés par le fait qu'ils retournent à leur forme initiale une fois que nous relâchons la **contrainte**. Pour caractériser la **déformation** d'un objet élastique, nous allons considérer que cet objet est composé d'un **ensemble de points** et nous allons observer la différence de **déplacement** entre un point de l'objet et un autre point. En effet, imaginez dans votre main un objet déformable (une éponge par exemple). Vous la déplacez sans lui appliquer de contrainte sur ces points (une simple translation). Cet objet n'est pas déformé. Maintenant si vous appuyez dessus, vous appliquez une contrainte qui crée une déformation de l'objet. Cette déformation est caractérisée par le fait que les points de deux bords de l'objet se sont rapprochés. Il y a donc eu une différence de déplacement entre des points de l'objet. Ensuite, cet état déformé est maintenu tant que vous ne relâchez pas la pression que vous appliquez sur cet objet. Vous pouvez déplacez cet objet en maintenant cet **état déformé** en effectuant une simple translation. Par contre, si vous relâchez cette pression, l'objet revient à son **état initial** (dans notre cas uniquement soumis à la force de gravité).

Lien entre déformation et déplacement de l'objet. Nous considérons l'objet au travers de deux états (ou configurations) : l'**état de référence** noté Ω_0 (qui correspond à l'état non-déformé au temps t_0 ou configuration initiale), et un **état déformé** noté Ω_t (qui correspond à l'état courant au temps t). La déformation est une relation entre deux configurations. Nous nous intéressons ainsi à la **déformation** ϕ permettant de passer de l'état de référence de l'objet à son état déformé. Elle permet ainsi de passer de la position initiale $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ d'un point matériel de l'objet de dimension d à sa position courante $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ au temps t avec $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$. La position $\mathbf{X}$ est prise dans l'état de référence et est constante dans le temps. Tandis que la position $\mathbf{x}$ est prise dans l'état déformé et évolue dans le temps. Cette transformation est réversible dans le cas des objets élastiques avec $\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$. En effet, $\phi(\mathbf{X}, t)$ est alors bijective et de classe C^1.

Pour décrire le mouvement, nous pouvons choisir soit le couple $(\mathbf{x}, t)$ appelé variables d'Euler, soit le couple $(\mathbf{X}, t)$ appelé variables de Lagrange. La connaissance de la transformation ϕ ou de son inverse ϕ^{-1} définit alors complètement le mouvement. La Fig. 3 illustre ces notations en considérant $d = 3$.

Intéressons nous également au **déplacement** des points **entre l'état de référence et l'état déformé**. Ce déplacement est défini par $\vec{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ pour un point donné de l'objet. Dans l'espace 3D, nous avons ainsi $u_i = x_i - X_i$ (pour $i = 1, 2, 3$) en considérant une position courante $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ et une position initiale $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$. Nous avons ainsi $\phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} = \mathbf{X} + \vec{u}$ comme relation directe entre la déformation et le déplacement.

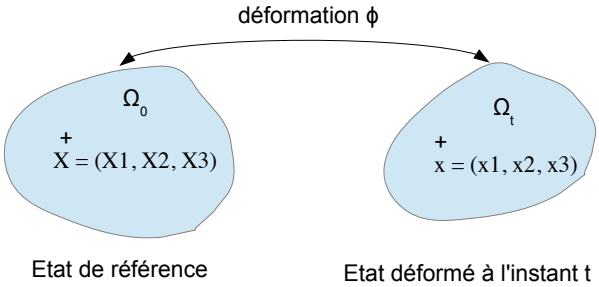
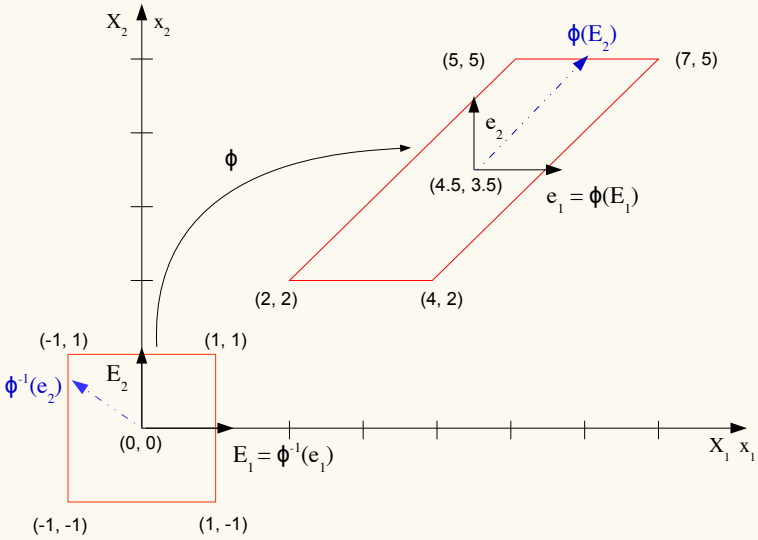


Figure 3 – *Illustration de la déformation ϕ entre l'état de référence Ω_0 et l'état déformé Ω_t.*

Exemple[7]**.** Pour illustrer ces notions, considérons un domaine 2D qui se déforme au cours du temps. La configuration de référence (carré) et celle déformée à l'instant $t = 1$ (parallélogramme) sont présentées sur la figure ci-dessous.



La transformation $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ qui permet de passer de la position initiale $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ (prise dans l'état de référence) à la position courante $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ (prise dans l'état déformé à l'instant t), s'écrit

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{4}(18t + 4X_1 + 6tX_2) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(14t + (4 + 2t)X_2) \end{cases} \tag{11}$$

Les coordonnées spatiales (ou position courante) sont ainsi définies en fonction des coordonnées matérielles (ou position initiale) et du temps t.

Pour $t = 0$, nous avons bien $x_1 = X_1$ et $x_2 = X_2$.

7. Cet exemple est issu du cours de Mécanique des Milieux Continus de Nicolas Moës (2011).

Par ailleurs, nous pouvons observer que le point $\mathbf{X} = (0,0)^T$ pris dans l'état de référence est transformé pour $t = 1$ en $\mathbf{x} = (4.5, 3.5)^T$ dans l'état déformé.

Le déplacement est défini dans cet exemple par

$$\begin{cases} u_1 &= x_1 - X_1 = \frac{1}{4}(18t + 6t\ X_2) \\ u_2 &= x_2 - X_2 = \frac{1}{4}(14t + 2t\ X_2) \end{cases} \tag{12}$$

Gradient des grandeurs physiques. Le gradient d'une quantité donne la façon dont cette quantité varie dans l'espace dans toutes les directions. Le **gradient du déplacement** est défini par $\mathbb{U} = \overline{\overline{grad}}\ \vec{u} = \nabla\vec{u} = \partial\vec{u}/\partial\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Il va ainsi nous donner une indication sur la façon dont le déplacement entre des points de l'objet varie dans l'espace dans toutes les directions. Nous allons le relier au **gradient de la déformation** qui est défini par $\mathbb{F} = \nabla\phi(\mathbf{X}, t) = \partial\phi(\mathbf{X}, t)/\partial\mathbf{X} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, mesurant pour chaque direction de l'espace la variation du point $\mathbf{x}$ par rapport à la variation subie par le point $\mathbf{X}$. $\mathbb{F}$ représente ainsi la jacobienne du mouvement défini par la déformation ϕ. Dans l'espace 3D, nous avons $F_{ij} = \partial x_i/\partial X_j$ pour $i, j = 1, 2, 3.$ et les composantes sont sans dimension correspondant à la dérivée d'une distance par rapport aux directions de l'espace.

Quelques exemples simples de champs de déformation[8].

— Dans le cas où un objet subit une translation de vecteur $\mathbf{w}$ entre l'état de référence et l'état déformé, nous avons :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},\ \mathbf{t}) = \mathbf{X} + \mathbf{w} \quad ; \quad \mathbb{F} = \partial\phi(\mathbf{X}, t)/\partial\mathbf{X} = \mathbb{1}.$$

— Dans le cas où un objet subit un changement d'échelle d'un facteur γ entre l'état de référence et l'état déformé, nous avons :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},\ \mathbf{t}) = \gamma\ \mathbf{X} \quad ; \quad \mathbb{F} = \partial\phi(\mathbf{X}, t)/\partial\mathbf{X} = \gamma\ \mathbb{1}.$$

— Dans le cas où un objet 2D subit un changement d'échelle d'un facteur 0.7 le long de l'axe horizontal et d'un facteur 2 dans le sens vertical, nous avons :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{X},\ \mathbf{t}) = \phi\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7\ X_1 \\ 2\ X_2 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $\mathbb{F}$ mesure dans les trois directions de l'espace, les variations de longueurs de l'objet entre l'état déformé et l'état de référence. Pour cela, nous observons la déformation entre deux points infiniment proches se trouvant initialement à proximité du point $\mathbf{X}$. Cette déformation est donc caractérisée en comparant le vecteur $\overrightarrow{dx}$ entre ces deux points pris dans l'état déformé par rapport au vecteur $\overrightarrow{dX}$ entre ces deux points pris dans leur

8. Ces exemples sont issus du cours de Sifakis and Barbic (2012).

configuration initiale avec $\mathbb{F} = \overrightarrow{dx}/\overrightarrow{dX}$. D'un point de vue physique, $\overrightarrow{dX}$ donne la direction d'une ligne tracée sur Ω_0 passant par $\mathbf{X}$ qui se transforme dans la configuration actuelle Ω_t en une courbe dont la tangente au point $\mathbf{x}$ est $\overrightarrow{dX}$.

Suite de l'exemple. Dans notre cas le gradient du déplacement (12) est défini par

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & t \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Le gradient de la déformation donnée par la relation (11) est défini par

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, le gradient de la déformation $\mathbb{F}$ est dit uniforme car il ne dépend pas de la position initiale (X_1, X_2). Mais dans le cas général, il est courant que celui-ci dépende à la fois de la position initiale et du temps.

Les vecteurs $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ placés initialement selon les axes (X_1, X_2) sont transformés à l'instant $t = 1$ en $\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{E_1}$ et $\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{E_2}$ (en considérant la relation $\overrightarrow{dx} = \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}$) avec

$$\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{E_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{E_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{E_1}$ initialement parallèle à l'axe 1 reste parallèle à cet axe et ne change pas de taille. Par contre, le vecteur $\overrightarrow{E_2}$ initialement parallèle à l'axe 2 tourne de 45 degrés et voit sa taille multipliée par $3/\sqrt{2}$.

Si nous considérons au temps $t = 1$, les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ (parallèle à l'axe 1) et $\overrightarrow{e_2}$ (parallèle à l'axe 2), nous pouvons retrouver leurs orientations dans l'état de référence (en considérant la relation $\overrightarrow{dX} = \mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}$) avec

$$\mathbb{F}^{-1} = \frac{1}{2+t}\begin{bmatrix} 2+t & -3t \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

nous donnant comme relations

$$\mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons également étudier la variation relative d'un volume dV de type parallélépipède formé par les trois vecteurs $\overrightarrow{dX_1}, \overrightarrow{dX_2}, \overrightarrow{dX_3}$. Après déformation, ce volume se transforme en dv qui est formé par les trois vecteurs $\overrightarrow{dx_1}, \overrightarrow{dx_2}, \overrightarrow{dx_3}$. Nous avons alors :

$$\frac{dv}{dV} = \frac{\overrightarrow{dx_1} \cdot (\overrightarrow{dx_2} \wedge \overrightarrow{dx_3})}{\overrightarrow{dX_1} \cdot (\overrightarrow{dX_2} \wedge \overrightarrow{dX_3})} = \frac{(\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX_1}) \cdot ((\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX_2}) \wedge (\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX_3}))}{\overrightarrow{dX_1} \cdot (\overrightarrow{dX_2} \wedge \overrightarrow{dX_3})}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dV} = \frac{det(\mathbb{F})\ (\overrightarrow{dX_1} \cdot (\overrightarrow{dX_2} \wedge \overrightarrow{dX_3}))}{\overrightarrow{dX_1} \cdot (\overrightarrow{dX_2} \wedge \overrightarrow{dX_3})} = det(\mathbb{F}) = J$$

avec $J = det(\mathbb{F})$ le jacobien de la transformation ϕ (c'est-à-dire le déterminant du gradient de la déformation ϕ défini par $\mathbb{F}$). A noter que selon la conservation de la masse, nous avons la relation $dm = \rho\ dv = \rho_0\ dV$ donnant $dv/dV = \rho_0/\rho$. Ce qui amène au final $\rho_0 = J\ \rho$ avec ρ_0 la masse volumique de l'élément de volume dV sur la configuration de référence Ω_0.

Il est également intéressant de relier le gradient de déplacement au gradient de déformation. Partons soit de la définition de la déformation ou soit de la définition du déplacement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla\phi(\mathbf{X}, t) &= \nabla(\mathbf{X} + \vec{u}) \\
&= \nabla\mathbf{X} + \nabla\vec{u} \\
&= \mathbb{1} + \mathbb{U} \\
\mathbb{U} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla\vec{u} = \nabla(\mathbf{x} - \mathbf{X}) &= \nabla(\phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}) \\
&= \nabla\phi(\mathbf{X}, t) - \nabla\mathbf{X} \\
&= \mathbb{F} - \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi comme relations $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$ ou $\mathbb{U} = \mathbb{F} - \mathbb{1}$ qui se notent ainsi dans l'espace 3D pour $i, j = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = F_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \tag{15}$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Suite de l'exemple. Nous retrouvons bien ces relations dans notre exemple avec

$$\mathbb{1} + \mathbb{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} = \mathbb{F}.$$

$$\mathbb{F} - \mathbb{1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & t \end{bmatrix} = \mathbb{U}.$$

Dans certains cas, la définition de $\mathbb{F}$ basée sur l'observation de la variation du vecteur défini entre deux points, ne permet pas de représenter exactement l'état de déformation. En effet, alors que nous traitons un solide indéformable, nous pouvons obtenir un gradient $\mathbb{F}$ différent de l'identité pour certains déplacements. Ce cas arrive notamment dans le cadre d'une rotation autour d'un axe. C'est pourquoi, des tenseurs plus complexes sont employés pour décrire de manière plus précise la déformation et ainsi obtenir une relation plus précise entre la déformation et le déplacement.

Tenseur de déformation. Pour quantifier la déformation, nous allons définir un tenseur de déformation. Ce tenseur noté $\bar{\bar{\epsilon}}$ est sans dimension puisque la déformation n'a pas d'unité. C'est un tenseur symétrique (avec $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$) d'ordre 2 qui est donc diagonalisable dans une base orthonormée. Les valeurs propres sont alors appelées directions principales

de déformation. De la même façon que pour le tenseur de contrainte, ce tenseur possède 9 composantes dans l'espace $3D$ réduit par symétrie à 6 composants pour le définir avec :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Le tenseur de déformation doit être nul pour un mouvement de corps rigide (puisqu'il n'y a pas de variation entre deux points de l'objet lors de son mouvement) et en $\mathbb{F} = \mathbb{1}$ (c'est-à-dire dans la configuration initiale). Nous allons voir dans la suite les mesures de déformation les plus utilisées dans notre domaine.

Le **tenseur de déformation de Cauchy-Green droit** se calcule à partir du carré du vecteur $\overrightarrow{dx}$ avec [9] :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{dx})^2 &= \overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx} = (\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}) \cdot (\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}) \\ &= (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}) \cdot \overrightarrow{dX} \\ &= \overrightarrow{dX} \cdot (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}) \end{aligned}$$

Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par $\epsilon^{cd} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$. Nous obtenons ainsi bien $\epsilon^{cd} = \mathbb{1}$ quand il n'y a pas de variation de distance, car celle-ci n'est plus influencée par la rotation. Il définit une métrique sur la configuration de référence Ω_0 à partir de la métrique canonique sur la configuration actuelle Ω_t.

Suite de l'exemple. Pour $t = 1$, le tenseur de Cauchy-Green droit est défini dans notre cas par

$$\epsilon^{cd} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Le **tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche** se calcule de la même façon à partir du carré du vecteur $\overrightarrow{dX}$ avec [10] :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{dX})^2 &= \overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dX} = (\mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}) \cdot (\mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}) \\ &= ((\mathbb{F}^{-1})^T \, \mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}) \cdot \overrightarrow{dx} \\ &= \overrightarrow{dx} \cdot ((\mathbb{F}^{-1})^T \, \mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}) \\ &= \overrightarrow{dx} \cdot ((\mathbb{F}^T)^{-1} \, \mathbb{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx}) \\ &= \overrightarrow{dx} \cdot (\mathbb{F} \, \mathbb{F}^T)^{-1} \cdot \overrightarrow{dx} \end{aligned}$$

Le tenseur de Cauchy-Green gauche est ainsi défini par $\epsilon^{cg} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T$. Il définit une métrique sur la configuration actuelle Ω_t à partir de la métrique canonique initiale sur Ω_0. Les tenseurs de Cauchy-Green ϵ^{cg} et ϵ^{cd} sont des tenseurs symétriques ($(\epsilon^{cg})^T = \epsilon^{cg}$ et $(\epsilon^{cd})^T = \epsilon^{cd}$) définis positifs et sont appelés tenseurs des dilatations car ils permettent de mesurer l'allongement de la ligne $\overrightarrow{dX}$. Par contre, il faut bien noter que $\epsilon^{cg} \neq (\epsilon^{cd})^T$.

9. A noter que nous avons utilisé la formule $\vec{v} \cdot \mathbb{A} \; \vec{u} = \mathbb{A}^T \vec{v} \cdot \vec{u}$ de l'algèbre tensorielle avec $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs et $\mathbb{A}$ un tenseur d'ordre 2, en considérant dans notre cas $\vec{v} = \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{dX}$, $\mathbb{A} = \mathbb{F}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{dX}$.

10. Petits rappels d'algèbre linéaire : $(\mathbb{A}^{-1})^T = (\mathbb{A}^T)^{-1}$ et $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}$.

Le **tenseur de déformation de Green-Lagrange** est calculé à partir de la différence entre les carrés de la configuration initiale et de la configuration déformée avec :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{dx})^2 - (\overrightarrow{dX})^2 &= \overrightarrow{dX} \cdot (\epsilon^{cd} \cdot \overrightarrow{dX}) - (\overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dX}) \\
&= \overrightarrow{dX} \cdot (\epsilon^{cd}\, \overrightarrow{dX} - \overrightarrow{dX}) \\
&= \overrightarrow{dX} \cdot (\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \overrightarrow{dX} \\
&= 2\, \overrightarrow{dX} \cdot (\frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \overrightarrow{dX})
\end{aligned}$$

Le tenseur de Green-Lagrange est défini par $\epsilon^g = \frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T\mathbb{F} - \mathbb{1})$ donnant la relation

$$\frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{dx})^2 - (\overrightarrow{dX})^2\right] = \overrightarrow{dX} \cdot \epsilon^g \cdot \overrightarrow{dX}.$$

A noter qu'il est ainsi bien nul pour $\mathbb{F} = \mathbb{1}$ c'est-à-dire dans la configuration initiale. Si nous décomposons les vecteurs $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dx}$ selon leurs normales et orientations, nous avons $\overrightarrow{dX} = dL\ \vec{N}$ et $\overrightarrow{dx} = dl\ \vec{n}$ avec dL et dl les normes des vecteurs considérés, $\vec{N}$ et $\vec{n}$ leurs vecteurs élémentaires. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[(dl\ \vec{n} \cdot dl\ \vec{n}) - (dL\ \vec{N} \cdot dL\ \vec{N})\right] &= dL\ \vec{N} \cdot \epsilon^g \cdot dL\ \vec{N} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\left[dl^2 - dL^2\right] &= dL\ \vec{N} \cdot \epsilon^g \cdot dL\ \vec{N} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} &= \vec{N} \cdot \epsilon^g \cdot \vec{N}.
\end{aligned}$$

Si nous considérons le vecteur $\vec{N}$ selon la direction x dans le repère initial, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^g_{11} & \epsilon^g_{12} & \epsilon^g_{13} \\ \epsilon^g_{21} & \epsilon^g_{22} & \epsilon^g_{23} \\ \epsilon^g_{31} & \epsilon^g_{32} & \epsilon^g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon^g_{11}.$$

De même nous obtenons selon les deux autres directions

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^g_{11} & \epsilon^g_{12} & \epsilon^g_{13} \\ \epsilon^g_{21} & \epsilon^g_{22} & \epsilon^g_{23} \\ \epsilon^g_{31} & \epsilon^g_{32} & \epsilon^g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon^g_{22}, \\
\frac{1}{2}\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^g_{11} & \epsilon^g_{12} & \epsilon^g_{13} \\ \epsilon^g_{21} & \epsilon^g_{22} & \epsilon^g_{23} \\ \epsilon^g_{31} & \epsilon^g_{32} & \epsilon^g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \epsilon^g_{33}.
\end{aligned}$$

Les éléments diagonaux du tenseur de déformation de Green-Lagrange donnent ainsi les changements relatifs de longueur des vecteurs élémentaires parallèles aux directions x, y, z de l'état de référence (en considérant la différence entre les carrés de la configuration initiale et de la configuration déformée). Ce tenseur de déformation appelé **tenseur de Green-Lagrange ou de Green ou de Green-Saint-Venant** est largement employé dans la pratique pour quantifier l'intensité de la direction de déformation.

Suite de l'exemple. Pour $t = 1$, le tenseur de Green-Lagrange est défini dans notre cas par

$$\epsilon^g = \frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

La composante ϵ^g_{11} est ainsi nulle indiquant qu'un vecteur unitaire placé selon l'axe 1 dans l'état de référence ne voit pas sa taille évoluer à $t = 1$. Ceci est en accord avec le vecteur $\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{E_1}$ obtenu dans la relation (14) ayant une norme égale à celle de $\overrightarrow{E_1}$.

Considérons désormais le vecteur $\overrightarrow{E_2}$ de l'état de référence. Sa norme initiale est égale à 1 (soit $dL = 1$). Selon la relation (14), il s'est transformé dans l'état déformé à $t = 1$ en $[1.5\ 1.5]^T$ (soit $dl = 3/\sqrt{2}$). Nous avons ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{9}{2} - 1}{1} = \frac{7}{4} \quad = \quad \overrightarrow{E_2} \cdot \epsilon^g \cdot \overrightarrow{E_2} = \epsilon^g_{22}.$$

Ceci est cohérent avec la valeur $7/4$ calculée précédemment pour la composante ϵ^g_{22}.

Pour obtenir la formulation du tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement, nous utilisons la relation $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} \epsilon^g = \frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) &= \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T\mathbb{F} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{U}) - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T + (\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot \mathbb{U} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U} + \mathbb{U}^T \cdot \mathbb{U}) \end{aligned}$$

Nous obtenons au final (pour $i, j = 1, 2, 3$) :

$$\epsilon^g = \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T \cdot \mathbb{U}) + \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U}), \quad \epsilon^g_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right). \tag{17}$$

Ce tenseur présente un terme non-linéaire $\frac{1}{2}(\mathbb{U}^T \cdot \mathbb{U})$ et un terme linéaire $\frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U})$. Dans le cadre de **petites perturbations avec de petits déplacements**, nous pouvons considérer uniquement la partie linéaire de ce tenseur définissant ainsi une relation linéaire (c'est-à-dire une relation d'ordre 1) entre le déplacement et les déformations. Nous parlons alors de "linéarité géométrique". Le tenseur linéarisé est alors défini par :

$$\epsilon^g = \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U}), \quad \epsilon^g_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Nous pouvons remarquer que les termes diagonaux de ce tenseur linéarisé représentent l'allongement relatif dans la direction $\vec{e_i}$ avec :

$$\epsilon^g_{ii} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_i}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial X_i}.$$

Suite de l'exemple. Dans notre cas, si nous prenons la formulation du tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\epsilon^g_{11} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right), \\
\epsilon^g_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right), \\
\epsilon^g_{21} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right), \\
\epsilon^g_{22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\epsilon^g = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 + 5\,t^2/4 \end{bmatrix}.$$

Pour $t = 1$, nous retrouvons le tenseur ϵ^g calculé précédemment en utilisant la formulation en fonction du gradient de la déformation.

Le tenseur de Green-Lagrange linéarisé est défini dans notre cas par

$$\epsilon^g = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons noter que le tenseur de déformation ne prend en compte que les aspects géométriques de la déformation et ne tient pas compte des aspects mécaniques, puisque sa définition ne comporte aucune caractéristique mécanique du matériau considéré.

6 Loi de comportement de l'objet

Il nous reste maintenant à faire le lien entre les contraintes appliquées sur l'objet, qui sont modélisées par le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$, et la déformation engendrée issue de cette contrainte, qui est modélisée par le tenseur de déformation $\overline{\overline{\epsilon}}$. C'est la loi de comportement du matériau qui donne ce lien. Cette relation est décrite de manière générale par

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial W(\overline{\overline{\epsilon}})}{\partial \overline{\overline{\epsilon}}} \tag{19}$$

où $W(\overline{\overline{\epsilon}})$ correspond à l'énergie de déformation. Cette relation n'est pas universelle mais va dépendre du matériau. Elle est mise en avant en observant la réponse du matériau à des sollicitations diverses telles que des essais uni-axiaux (traction, cisaillement).

Trois classes de comportement mécanique se distinguent principalement [11] :

— **L'élasticité.** Le comportement élastique linéarisé uni-axial est symbolisé par un ressort dont l'allongement Δl est proportionnel à la charge appliquée $\overrightarrow{F}$ (en traction

11. Je reprends ici les explications du cours de Forest et al. (2010) sur les lois de comportement.

ou compression). Ceci est valable dans un certain domaine de charge dit domaine d'élasticité. Le facteur de proportionnalité est la souplesse (ou compliance) $1/k$ avec k la raideur du ressort (en N.m^{-1} ou Pa.m). Nous avons alors comme relation linaire entre ces quantités $\overrightarrow{F} = k\ \Delta l$.

— **La viscosité.** Le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation. Dans le cas linéaire nous avons comme relation $\overrightarrow{F} = \eta \dot{\Delta} l$ avec η le coefficient de viscosité de l'amortisseur (en N.m^{-1}.s ou Pa.m.s). Dans ce contexte, plus la vitesse de déformation est rapide plus la force est grande.

— **La plasticité.** La déformation plastique est associée à de la déformation élastique. Au départ, le matériau commence par se déformer de manière réversible, c'est-à-dire qu'il va reprendre sa forme initiale une fois que les sollicitations s'arrêtent (déformation élastique). Puis au delà d'un certain seuil de contrainte, la déformation est définitive c'est-à-dire que le matériau reste déformé une fois les sollicitations terminées. Par exemple un ressort va se déformer définitivement lorsque la force de traction dépasse sa capacité d'allongement élastique. Le comportement plastique uni-axial peut se modéliser comme un frottement solide avec une résistance à la déformation au départ. Le modèle correspond à l'ajout d'une force constante $\overrightarrow{F_0}$ lorsque le glissement a lieu avec $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_0}(\dot{\Delta} l)$.

En combinant ces comportements mécaniques élémentaires, nous obtenons des comportements plus complexes comme la viscoélasticité, l'élastoplasticité, la viscoplacité et l'élastoplasticité. Dans le domaine de la simulation d'organes, nous avons vu que nous nous concentrons essentiellement sur le comportement élastique et visqueux des matériaux. C'est-à-dire que dans notre cas, l'objet retourne à sa forme initiale une fois les contraintes appliquées sur celui-ci relâchées. Par contre différentes lois sont alors mises en avant selon la façon dont l'objet retourne à cet état d'équilibre. La Fig. 4 illustre trois comportements : (a) élastique linéaire, (b) élastique non linéaire (ou hyper-élastique) et (c) visco-élastique non linéaire. Dans le cas linéaire, nous avons logiquement une relation linéaire (une droite) entre la contrainte appliquée et la déformation induite, tandis que dans le cas non linéaire nous obtenons une courbe entre ces deux quantités.

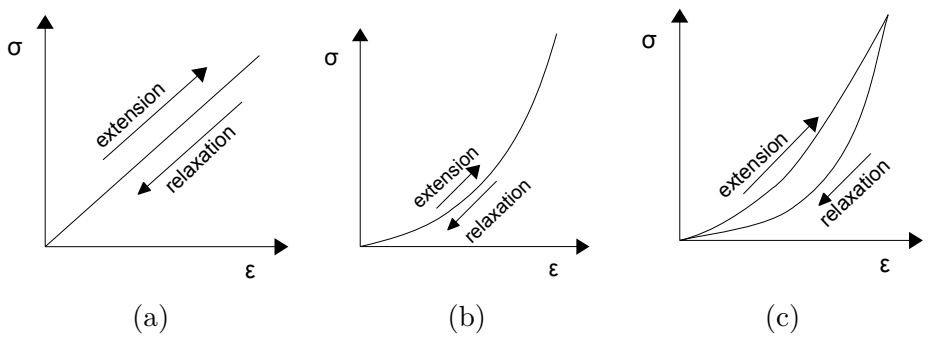


Figure 4 – *Courbe contrainte-déformation pour différentes lois de comportement* $\overline{\overline{\sigma}} = f(\epsilon)$.

La Fig. 5 illustre la réponse d'un matériau aux sollicitations avec une courbe contrainte-déformation. Nous avons schématisé un comportement élastique linéaire en petites déformations puis une phase de plasticité quand la limite élastique du matériau est atteinte et que les sollicitations deviennent trop importantes. Puis si les sollicitations continuent, la limite de rupture peut ensuite être atteinte.

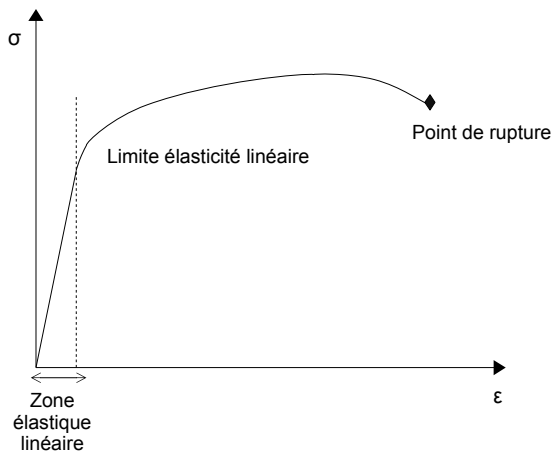


Figure 5 – *Représentation de la courbe contrainte-déformation d'un matériau.*

Cas de l'élasticité linéaire

Concentrons-nous sur le cas de l'élasticité linéaire en nous plaçant en petites déformations. Nous avons alors une loi de comportement linéaire avec une relation d'ordre 1 entre les quantités $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$. Nous parlons alors de "linéarité physique". Cette relation est ainsi du type :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\epsilon}}, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl}\, \epsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ est un tenseur d'ordre 4 (avec $3^4 = 81$ termes) qui spécifie les coefficients élastiques du matériau, c'est-à-dire que ces coefficients indiquent la façon dont le matériau se déforme dans une direction donnée pour une contrainte appliquée sur celui-ci. Les composants de ce tenseur ont la même dimension qu'une pression puisque que ceux de $\overline{\overline{\epsilon}}$ sont sans dimension.

Comme $\overline{\overline{\epsilon}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ sont des tenseurs symétriques, nous avons une symétrie en i, j avec $C_{ijkl} = C_{jikl}$ et une symétrie en k, l avec $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ et nous avons également $C_{ijkl} = C_{klij}$. Au final, nous obtenons 21 termes pour décrire le comportement du matériau. Pour simplifier l'écriture, la convention de sommation d'Einstein [12] (ou convention de l'indice muet répété) peut être employée. La relation précédente s'écrit ainsi de la façon suivante [13] :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\epsilon}}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \epsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Du fait de ces propriétés de symétrie, le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ peut être représenté sous la forme d'une matrice 6×6 où les directions représentent les directions de déformation. Autrement dit, la liaison linéaire ente les tenseurs symétriques $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$ n'ayant chacun que 6 composantes indépendantes peut être réalisée à l'aide de 36 termes seulement. En adoptant la notation

12. La convention de sommation d'Einstein spécifie que quand un indice apparaît deux fois dans la même expression, nous lui faisons prendre les valeurs $1, 2, 3$ et nous sommons.

13. Notons que dans cette expression, les indices i, j ont une valeur fixée (1, 2 **ou** 3) alors que les indices k et l prennent les 3 valeurs (1, 2 **et** 3). Nous parlons alors d'indice franc pour i et j et d'indice muet pour k et l correspondant à l'indice répété sur lequel la sommation est effectuée.

de Voigt pour simplifier l'écriture, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Nous pouvons également présenter cette relation sous sa **forme inversée**, c'est-à-dire en présentant les déformations en fonction des contraintes, avec

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \overline{\overline{\overline{\overline{D}}}} : \overline{\overline{\sigma}}, \quad \epsilon_{ij} = D_{ijkl}\, \sigma_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{22}$$

où le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{D}}}}$ d'ordre 4 possède les mêmes symétries que $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ (*i.e.* $D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{klij}$), ce qui nous donne en notation de Voigt la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1113} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2213} & D_{2212} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3323} & D_{3313} & D_{3312} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2323} & D_{2313} & D_{2312} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1323} & D_{1313} & D_{1312} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1223} & D_{1213} & D_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ permettant de passer des déformations aux contraintes est appelé tenseur de rigidité, et le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{D}}}}$ permettant de passer des contraintes aux déformations est appelée matrice de compliance.

Formulation de la loi de Hooke en fonction de λ et μ. Dans le cas d'un **matériau élastique isotrope**, c'est-à-dire dont le comportement est le même dans toutes les directions, seules deux constantes indépendantes sont nécessaires (au lieu de 21 !). La relation (21) se présente alors sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\,\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\,\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Nous obtenons ainsi les équations dites de Lamé :

$$\begin{cases} \sigma_{11} &= \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\,\mu\,\epsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\,\mu\,\epsilon_{22} \\ \sigma_{33} &= \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\,\mu\,\epsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= 2\mu\,\epsilon_{23} \\ \sigma_{13} &= 2\mu\,\epsilon_{13} \\ \sigma_{12} &= 2\mu\,\epsilon_{12} \end{cases} \tag{24}$$

Ces équations peuvent être écrites de manière générale (appelée **loi de Hooke**) par

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\, Tr(\overline{\overline{\epsilon}})\, \mathbb{1} + 2\,\mu\, \overline{\overline{\epsilon}}, \quad \sigma_{ij} = \lambda\, \epsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\,\mu\, \epsilon_{ij} \text{ pour } i,j = 1,2,3. \tag{25}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ de la relation (20) est alors défini de la façon suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + 2\,\mu\, \delta_{ik}\, \delta_{jl}.$$

Paramètres du matériau. λ et μ sont deux paramètres matériaux scalaires appelés **coefficients de Lamé**. Ils sont définis en fonction du **module de Young** E (ou module d'élasticité) du matériau et de son **coefficient de Poisson** ν avec

$$\lambda = \frac{\nu\, E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

E est exprimé en unité de pression, tandis que ν est sans unité.

Trace du tenseur de déformation. Dans le cas où nous considérons le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé, la trace de ce tenseur présent dans la relation (25) est [14] :

$$\begin{aligned} Tr(\overline{\overline{\epsilon}}) &= \epsilon^g_{11} + \epsilon^g_{22} + \epsilon^g_{33} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ &= \frac{\partial V}{V} \\ &= div\ \vec{u} \end{aligned}$$

Elle représente ainsi le changement de volume de l'objet avec la somme des déformations subies dans les trois directions. $div\ \vec{u}$ peut alors être interprété comme la dilatation volumique relative dans l'hypothèse des petites transformations.

Formulation de la loi de Hooke en fonction de E et ν. Réciproquement, nous pouvons exprimer E et ν en fonction de λ et μ avec

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)}.$$

Nous pouvons alors écrire la loi de Hooke en fonction de E et ν, donnant la relation suivante entre les tenseurs $\overline{\overline{\sigma}}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\,\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\,\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\,\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

14. En désignant par div l'opérateur divergence par rapport aux variables de Lagrange X_1, X_2, X_3. Il est important de noter que l'opérateur divergence sur un tenseur d'ordre 2 donne un vecteur ($\overrightarrow{div}\ \mathbb{A}$), tandis que sur un vecteur nous obtenons un scalaire ($div\ \vec{u}$).

Nous obtenons alors comme équations

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\sigma_{11} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\left[\epsilon_{11}+\dfrac{\nu}{1-2\,\nu}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})\right] \\
\sigma_{22} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\left[\epsilon_{22}+\dfrac{\nu}{1-2\,\nu}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})\right] \\
\sigma_{33} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\left[\epsilon_{33}+\dfrac{\nu}{1-2\,\nu}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})\right] \\
\sigma_{23} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\,\epsilon_{23} \\
\sigma_{13} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\,\epsilon_{13} \\
\sigma_{12} & = & \dfrac{E}{1+\nu}\,\epsilon_{12}
\end{array}\right. \tag{26}$$

Nous pouvons les écrire de manière générale sous la forme :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\overline{\overline{\epsilon}}+\frac{\nu}{1-2\,\nu}\,Tr(\overline{\overline{\epsilon}})\,\mathbb{1}\right),\ \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\epsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\,\nu}\,\epsilon_{kk}\,\delta_{ij}\right)\ \text{pour } i,j=1,2,3.}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ de la relation (20) est alors défini par :

$$C_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\frac{\nu}{1-2\,\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right).$$

Formulation inversée de la loi de Hooke en fonction de de E et ν. Cette relation peut être présentée sous sa forme inversée avec comme relation entre $\overline{\overline{\sigma}}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors les équations appelées **relations de Young**

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\epsilon_{11} & = & \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\
\epsilon_{22} & = & \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})\right] \\
\epsilon_{33} & = & \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right] \\
\epsilon_{23} & = & \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \\
\epsilon_{13} & = & \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{13} \\
\epsilon_{12} & = & \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12}
\end{array}\right.$$

Elles s'écrivent de manière générale sous la forme :

$$\boxed{\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,Tr(\overline{\overline{\sigma}})\,\mathbb{1},\;\; \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \text{ pour } i,j = 1,2,3.} \tag{27}$$

Au final, le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{D}}}}$ de la relation (22) est défini par :

$$D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Formulation inversée de la loi de Hooke en fonction λ et μ. En fonction des coefficients de Lamé, cette forme inversée s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \begin{pmatrix} -2(\lambda+\mu) & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2(\lambda+\mu) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2(\lambda+\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Ceci donne comme équations :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{11} - \dfrac{\lambda}{2\,\mu\,(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \\ \epsilon_{22} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{22} - \dfrac{\lambda}{2\,\mu\,(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \\ \epsilon_{33} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{33} - \dfrac{\lambda}{2\,\mu\,(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \\ \epsilon_{23} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{23} \\ \epsilon_{13} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{13} \\ \epsilon_{12} &= \dfrac{1}{2\,\mu}\sigma_{12} \end{cases}$$

La formulation générale est alors donnée par :

$$\boxed{\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2\,\mu}\,\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,Tr(\overline{\overline{\sigma}})\,\mathbb{1}, \epsilon_{ij} = \frac{1}{2\,\mu}\,\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij},\;\text{ pour } i,j = 1,2,3.}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{D}}}}$ de la relation (22) est ainsi défini par :

$$D_{ijkl} = \frac{1}{2\,\mu}\,\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\lambda}{2\,\mu\,(3\lambda+2\mu)}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}.$$

Exemples de comportement élastique isotrope

Pour illustrer cette section, voici quelques exemples simples de comportements élastiques isotropes qui mettent en avant les formulations des paramètres mécaniques des matériaux (module de Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement).

Cas simple d'une déformation par traction. Considérons un élément de matière soumis à une traction définie par un tenseur de contraintes uniaxial, c'est-à-dire un tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ dont deux de ses valeurs propres sont nulles. La Fig. 6 illustre le cas d'une sollicitation selon l'axe x. Comme la contrainte est définie par le rapport entre la force F exercée sur la surface divisée par l'aire ds de celle-ci, cette valeur propre non nulle est égale à $\sigma_x = F/ds$. Le tenseur de contrainte correspondant est alors défini par :

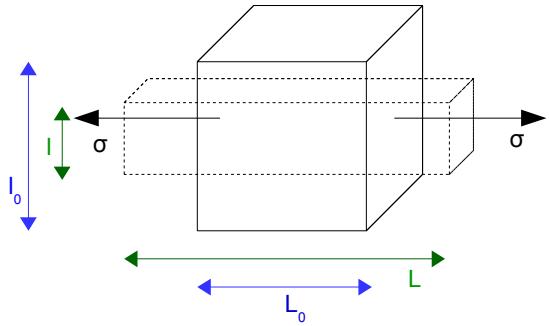


Figure 6 – *Element de matière sollicité selon l'axe x par un tenseur de contraintes uniaxial.*

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'un élément de matière ayant un comportement élastique isotrope, nous pouvons considérer la relation (27) pour observer la déformation induite par cette contrainte en fonction des coefficients E et ν. Nous obtenons alors comme relations non nulles :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} &= \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_x - \dfrac{\nu}{E}\sigma_x = \dfrac{\sigma_x}{E}, \\ \epsilon_{22} &= \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_x, \\ \epsilon_{33} &= \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{33} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_x. \end{cases}$$

Au final, le tenseur de déformation est défini par :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_x}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\nu}{E}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\nu}{E}\sigma_x \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ -\nu\,\sigma_x \\ -\nu\,\sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Ainsi la déformation ϵ_{11} selon l'axe x est égale à la contrainte imposée σ_x divisée par le module de Young E. Autrement dit, le module de Young est défini par le rapport entre la contrainte et la déformation induite par cette sollicitation avec $E = \overline{\overline{\sigma}}/\overline{\overline{\epsilon}}$. La loi de comportement de Hooke s'exprime alors sous la forme $\overline{\overline{\sigma}} = E\,\overline{\overline{\epsilon}}$.

Notons également que cette déformation selon l'axe x est positive. Elle correspond donc à un **étirement** selon l'axe x. Par contre, les déformations selon les axes y et z sont négatives et correspondent donc à un **rétrécissement** de la section selon les axes y et z, appelé **effet Poisson**. Nous pouvons observer ces déformations sur la Fig. 6.

Observons plus précisément la déformation selon l'axe y. Des relations $\epsilon_{22} = -\nu\ \sigma_x/E$ et $\epsilon_{11} = \sigma_x/E$, nous pouvons en déduire que le coefficient de Poisson est défini par [15] :

$$\nu = -\frac{E\ \epsilon_{22}}{\sigma_x} = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = -\frac{(l-l_0)/l_0}{(L-L_0/L_0)} = \frac{(l_0-l)/l_0}{(L-L_0/L_0)},$$

où L, l représentent les longueurs de l'élément selon les axes x et y avant déformation, et L_0, l_0 leurs longueurs selon ces axes quand la contrainte est appliquée. Le coefficient de Poisson correspond ainsi au rapport entre le rétrécissement dans une direction perpendiculaire à l'effort subi et l'allongement dans la direction de l'effort.

Ce coefficient de Poisson est compris entre -1 et $0,5$. Si il est égal à 0, la section n'est pas réduite. Par contre, pour une valeur de $0,5$ le volume est préservé lors de l'étirement (valeur employée dans le cas des matériaux incompressibles). Enfin, les valeurs expérimentales obtenues pour un matériau quelconque sont souvent voisines de $0,3$.

Cas simple d'une déformation par cisaillement. Considérons désormais que notre élément de matière est soumis à un tenseur de contraintes de cisaillement simple, c'est-à-dire un tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ dont l'une des contraintes principales est nulle et les deux autres sont opposées. Un tenseur de contrainte correspondant peut être alors défini par :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Nous considérons de nouveau la relation (27) pour observer la déformation induite par cette contrainte en fonction des coefficients E et ν. En rappelant que le coefficient de Lamé μ est défini par $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, nous obtenons :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{12} & 0 \\ \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(1+\nu)}{E}\tau & 0 \\ \frac{(1+\nu)}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau}{2\mu} & 0 \\ \frac{\tau}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\tau}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons observer qu'un cisaillement pure ne provoque aucune élongation, mais un changement d'angle entre les vecteurs des axes x et y avec $2\ \epsilon_{12} = \tau/\mu$. Le coefficient de Lamé μ (aussi appelé module de cisaillement) joue alors un rôle de raideur de cisaillement.

15. A noter qu'il en serait de même en observant la déformation ϵ_{33} selon l'axe z avec $\nu = -\epsilon_{33}/\epsilon_{11}$.

7 Energie de déformation élastique

Voyons pour finir comment s'établit l'expression de l'énergie de déformation en fonction des contraintes et déformations du matériau.

Le travail d'une force correspond à l'énergie fournie par cette force quand son point d'application se déplace, c'est-à-dire quand l'objet subissant la force se déplace ou se déforme. Le travail est exprimé en joules (J), et il est généralement noté W pour le terme anglais *Work*. Pour un petit déplacement $d\vec{u}$ du point d'application de la force, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est défini par [16] :

$$dW = \vec{F}(\vec{u}) \cdot d\vec{u}.$$

Nous en déduisons que le travail de la force pour un déplacement imposé fini est égal à la circulation du point d'application de la force le long du trajet C (correspondant à un déplacement imposé final u_{final}) avec :

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{u}) \cdot d\vec{u} = \int_0^{u_{final}} \vec{F}(\vec{u}) \cdot d\vec{u}.$$

Considérons maintenant un solide élastique isotrope ayant atteint son point d'équilibre après avoir été soumis à l'application de charges complexes. Nous notons $\overrightarrow{f_{ext}} \in \mathbb{R}^3$ les forces extérieures volumiques appliquées sur le domaine D_t de l'objet et $\overrightarrow{T} \in \mathbb{R}^3$ les forces appliquées sur la surface ∂D_t de l'objet au temps t.

A partir de ce point d'équilibre, nous incrémentons ensuite les forces en notant $d\vec{u}$ l'incrément des déplacements au point d'application de chacune des forces. En reprenant l'équation (2) du principe fondamental de la dynamique (établissant la somme des forces appliquées sur l'objet), nous en déduisions que l'énergie fournie par les forces appliquées à partir de cet état d'équilibre est définie par :

$$\begin{aligned} dW &= \int_{D_t} \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \cdot d\vec{u} \, dv + \int_{\partial D_t} \overrightarrow{T} \cdot d\vec{u} \, ds \\ &= \int_{D_t} \rho \sum_{j=1}^{3} F_j \, du_j \, dv + \int_{\partial D_t} \sum_{j=1}^{3} T_j \, du_j \, ds \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite faire apparaître le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ en remplaçant les tractions $\overrightarrow{T}$ par la projection des contraintes sur la normale $\vec{n}$ à l'élément de surface ds considéré. Nous avons alors :

$$\int_{\partial D_t} \sum_{j=1}^{3} T_j \, du_j \, ds = \int_{\partial D_t} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \, n_i \, du_j \, ds = \int_{\partial D_t} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \, du_j \, n_i \, ds.$$

En utilisant la convention de sommation d'Einstein, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{j=1}^{3} \int_{D_t} \rho \, F_j \, du_j \, dv + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial D_t} \sigma_{ij} \, du_j \, n_i \, ds \\ &= \int_{D_t} \rho \, F_j \, du_j \, dv + \int_{\partial D_t} \sigma_{ij} \, du_j \, n_i \, ds. \end{aligned}$$

16. Je reprends ici en partie les explications du cours de Klöcker (2003) sur la formulation de l'énergie.

Le théorème de flux-divergence (ou théorème de Green-Ostrogradski) permet ensuite de transformer l'intégrale sur la surface ∂D_t en une intégrale sur le volume D_t du matériau. Nous avons ainsi

$$\int_{\partial D_t} \sigma_{ij}\ du_j\ n_i\ ds \quad = \quad \int_{D_t} \frac{\partial(\sigma_{ij}\ du_j)}{\partial x_i}\ dv = \int_{D_t} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\ du_j + \sigma_{ij}\ \frac{\partial\ du_j}{\partial x_i} \right)\ dv$$

donnant comme formulation de l'énergie

$$dW \quad = \quad \int_{D_t} \left(\rho\ F_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \right)\ du_j\ dv + \int_{D_t} \sigma_{ij}\ \frac{\partial\ du_j}{\partial x_i}\ dv.$$

Rappelons que selon l'équation (9), nous avons $\rho\ \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \rho\ \overrightarrow{f_{ext}} + \overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}}$. Ainsi à l'état d'équilibre (où l'accélération de l'objet est par définition nulle), la première intégrale de volume de la formulation de l'énergie est nulle amenant la relation suivante :

$$dW \quad = \quad \int_{D_t} \sigma_{ij}\ \frac{\partial\ du_j}{\partial x_i}\ dv.$$

Dans le cas de petites déformations, nous pouvons considérer le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé (noté ϵ^g avec $\epsilon^g_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$). En rappelant que le tenseur de contraintes est symétrique (*i.e.* $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), nous avons alors :

$$\begin{aligned} dW &= \int_{D_t} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}\ \frac{\partial\ du_j}{\partial x_i} + \sigma_{ji}\ \frac{\partial\ du_i}{\partial x_j} \right)\ dv \\ &= \int_{D_t} \sigma_{ij}\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\ du_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\ du_i}{\partial x_j} \right) dv \\ &= \int_{D_t} \sigma_{ij}\ d\epsilon^g_{ij}\ dv. \end{aligned}$$

Le travail de la force ou l'énergie de déformation élastique (exprimée en J) s'écrit ainsi

$$W \quad = \quad \int_{D_t} \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij}\ d\epsilon^g_{ij}\ dv$$

avec une densité d'énergie élastique (ou énergie élastique par unité de volume) exprimée en J.m^{-3} qui est définie par :

$$W_e = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij}\ d\epsilon^g_{ij} = \int_0^{\epsilon} \overline{\overline{\sigma}} : d\epsilon^g.$$

Dans le cas où les contraintes sont linéairement proportionnelles aux déformations (avec $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \epsilon^g$), nous avons :

$$\begin{cases} W = \displaystyle\int_{D_t} \left(\int_0^{\epsilon} (\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \epsilon^g) : d\epsilon^g \right)\ dv = \frac{1}{2} \int_{D_t} (\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \epsilon^{g2})\ dv \\ W_e = \displaystyle\int_0^{\epsilon} (\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \epsilon^g) : d\epsilon^g = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \epsilon^{g2}) \end{cases}$$

L'énergie de déformation élastique s'exprime ainsi par

$$W = \frac{1}{2} \int_{D_t} (\overline{\overline{\sigma}} : \epsilon^g)\ dv = \frac{1}{2} \int_{D_t} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\ \epsilon^g_{ij}\ dv \tag{29}$$

et la densité d'énergie élastique par

$$W_e = \frac{1}{2}\,(\overline{\overline{\sigma}} : \epsilon^g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\;\epsilon^g_{ij}. \tag{30}$$

Dans le cas d'un **matériau élastique isotrope** dont le comportement suit la loi de Hooke, les contraintes peuvent être exprimées en fonction des déformations et en fonction des coefficients de Lamé avec $\sigma_{ij} = \lambda\;\epsilon^g_{kk}\;\delta_{ij} + 2\;\mu\;\epsilon^g_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, 3$. L'énergie de déformation élastique par unité de volume est alors définie par

$$\begin{aligned} W_e &= \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii}\right)^2 - 2\;\mu\;\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\epsilon_{ii}\;\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\;\epsilon_{ij}) \\ &= \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) I_{e_1}^2 - 2\;\mu\;I_{e_2} \end{aligned}$$

avec I_{e_1}, I_{e_2} les invariants du tenseur de déformation définis par :

$$\begin{cases} I_{e_1} &= Tr(\overline{\overline{\epsilon}}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}, \\ I_{e_2} &= \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\epsilon_{ii}\;\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\;\epsilon_{ij}) = \epsilon_{11}\;\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\;\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\;\epsilon_{11} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{23}^2 - \epsilon_{31}^2. \end{cases}$$

Cette expression peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} W_e &= \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)\left(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2\right) + \lambda\,(\epsilon_{11}\;\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\;\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\;\epsilon_{11}) + 2\mu\left(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}\,Tr(\overline{\overline{\epsilon}})^2 + \mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ij}\;\epsilon_{ij}. \end{aligned}$$

avec $Tr(\overline{\overline{\epsilon}})^2 = \epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + 2\;\epsilon_{11}\;\epsilon_{22} + 2\;\epsilon_{22}\;\epsilon_{33} + 2\;\epsilon_{33}\;\epsilon_{11}$.

8 Retour sur l'équation de la dynamique à résoudre

Rappelons que notre objectif était de résoudre l'équation (9) gouvernant le mouvement de l'objet. Pour cela, nous avions besoin de relier la vitesse $\vec{v}(t)$ de l'objet au tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$. Comme illustré par la Fig. 7, ce lien va être effectué en exprimant la vitesse et le tenseur de contraintes en fonction du déplacement $\vec{u}(t)$.

— Pour la vitesse, cette relation est immédiate puisque la vitesse correspond à la dérivée par rapport au temps du déplacement avec $\vec{v}(t) = d\vec{u}(t)/dt$.

— Pour le tenseur de contraintes, nous allons utiliser la loi de comportement de l'objet puisqu'elle permet de relier le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ à la déformation $\overline{\overline{\epsilon}}$. Ensuite il suffit d'exprimer la déformation en fonction du déplacement $\vec{u}(t)$, pour au final relier $\overline{\overline{\sigma}}$ à $\vec{u}(t)$.

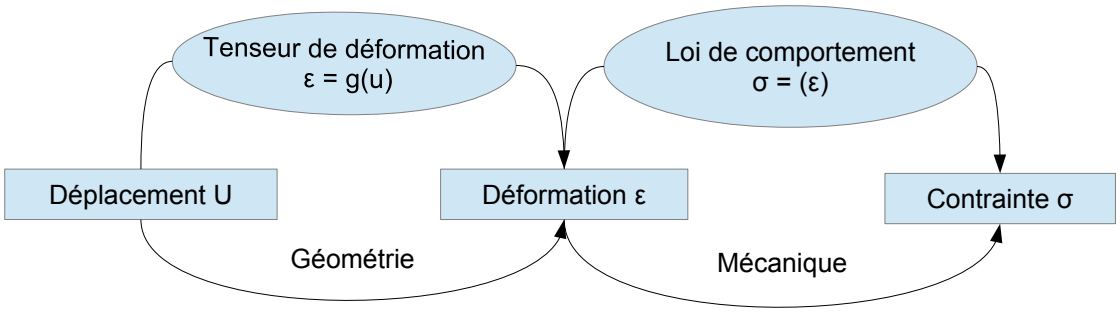


Figure 7 – *Récapitulatif des relations existantes entre le déplacement $\vec{u}(t)$ de l'objet, sa déformation (tenseur $\overline{\overline{\epsilon}}$), et les contraintes (tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$) appliquées sur celui-ci.*

Pour définir la formulation de l'équation du mouvement de l'objet, nous devons ainsi choisir le tenseur de déformation et la loi de comportement associés à l'objet que nous souhaitons simuler.

Cas d'un matériau élastique isotrope

Si nous considérons un matériau élastique isotrope dont le comportement est régi par la loi de Hooke définie en fonction des coefficients de Lamé par $\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\ Tr(\overline{\overline{\epsilon}})\ \mathbb{1} + 2\ \mu\ \overline{\overline{\epsilon}}$ et en considérant le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé défini par $\epsilon^g = \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u})$, nous obtenons [17] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}} &= \overrightarrow{div}\ (\lambda\ Tr(\epsilon^g)\ \mathbb{1} + 2\ \mu\ \epsilon^g) \\
&= \lambda\ \overrightarrow{div}\ (Tr(\epsilon^g)\ \mathbb{1}) + 2\ \mu\ \overrightarrow{div}\ (\epsilon^g) \\
&= \lambda\ \nabla\ (Tr(\epsilon^g)) + 2\ \mu\ \overrightarrow{div}(\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u})) \\
&= \lambda\ \nabla\ (Tr(\epsilon^g)) + \mu\ \overrightarrow{div}(\nabla\vec{u}^T) + \mu\ \overrightarrow{div}(\nabla\vec{u}) \\
&= \lambda\nabla\ (div\ \vec{u}) + \mu\ \nabla(div\ \vec{u}) + \mu\ \Delta\vec{u} \\
&= (\lambda + \mu)\ \nabla\ (div\ \vec{u}) + \mu\ \Delta\vec{u} \\
&= (\lambda + \mu)\ \nabla\ (div\ \vec{u}) + \mu\ \left(\nabla\ (div\ \vec{u}) - \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right) \\
&= (\lambda + 2\ \mu)\ \nabla\ (div\ \vec{u}) - \mu\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}
\end{aligned}$$

L'équation du mouvement peut alors s'écrire de la manière suivante (appelée **équation de Navier de l'élasticité linéaire isotrope**) :

$$\rho\ \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \rho\ \overrightarrow{f_{ext}}(t) + (\lambda + \mu)\ \nabla\ (div\ \vec{u}(t)) + \mu\ \Delta\vec{u}(t) \tag{31}$$

$$= \rho\ \overrightarrow{f_{ext}}(t) + (\lambda + 2\ \mu)\ \nabla\ (div\ \vec{u}(t)) - \mu\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}(t). \tag{32}$$

où $\overrightarrow{f_{ext}}(t)$ incorpore la force de la gravité $\vec{g}$.

17. Pour rappel, la trace du tenseur de Green-Lagrange linéarisé est définie par $Tr(\epsilon^g) = div\ \vec{u}$.
Au niveau mathématiques, nous avons : $\overrightarrow{div}\ \nabla\ \vec{a} = \Delta\ \vec{a} = \nabla\ (div\ \vec{a}) - \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{a}$ où $\overrightarrow{rot}\ \vec{a} = \nabla \wedge \vec{a}$. Le laplacien est défini par $\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ représentant ainsi la courbure dans les différentes directions de l'espace.

L'équation du mouvement est ensuite résolue pour obtenir le déplacement $\vec{u}(t)$ de l'objet à chaque pas de temps. Comme nous ne pouvons que rarement résoudre cette équation de manière analytique (c'est-à-dire qu'il est rare de trouver une solution formelle au problème), une méthode d'approximation numérique est alors employée pour résoudre cette équation de manière discrète. Pour cela, le problème mathématique initialement défini sur un milieu continu est transformé en un problème discret (équation matricielle) de dimension finie. Puis, la méthode des éléments finis (MEF) est généralement employée pour la résolution numérique du problème discret. La discrétisation de l'équation initiale repose alors sur la définition d'un maillage représentant l'objet, c'est-à-dire que l'objet (ou de manière plus générale le domaine) est discrétisé en un ensemble d'éléments et les équations sont résolues sur chacun des noeuds de ces éléments. Nous obtenons alors une solution approchée de l'équation initiale définissant le déplacement de l'objet.

9 Discrétisation du problème continu

Détaillons maintenant l'obtention de la formulation discrète du problème de la dynamique newtonienne. L'écriture de cette formulation passe par la reformulation de l'équation du mouvement en équations différentielles ou intégrales. Cette formulation intégrale peut être obtenue de deux façons différentes et équivalentes : soit en utilisant la méthode des résidus pondérés (qui introduit une notion d'erreur), soit en définissant des formulations variationnelles du problème. Nous allons présenter ces deux types d'approches ainsi que la discrétisation du problème mécanique qui en découle [18].

Méthode des résidus pondérés. Reprenons l'équation de la dynamique newtonienne décrivant le mouvement de tout objet déformable. Nous avons vu qu'à l'intérieur du domaine D_t que constitue l'objet au temps t, nous avons :

$$\forall M \in D_t, \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} + \overrightarrow{div} \, \overline{\overline{\sigma}}.$$

Cette équation dite locale est complétée par des équations définies sur la surface ∂D_t de l'objet appelées *conditions limites*. Dans notre cas, elles sont de deux types avec :

— Les conditions limites en déplacement : $\forall M \in \Gamma_u$, $\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u_d}(t)$ où Γ_u représente une partie de la surface ∂D_t de l'objet sur laquelle le déplacement $\vec{u_d}$ est imposé.

— Les conditions limites en contraintes : $\forall M \in \Gamma_\sigma, \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T_d}$ où Γ_σ représente une partie de la surface ∂D_t de l'objet sur laquelle les vecteurs de contraintes $\vec{T_d}$ (et non le tenseur de contraintes) sont imposés. Si la surface est libre, $\vec{T_d}$ est nul.

— A noter que nous avons $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial D_t$ et $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, c'est-à-dire que, pour une partie donnée de la surface, nous contraignons soit le déplacement de la surface, soit les vecteurs de contraintes appliqués sur elle, mais jamais les deux en même temps.

Ce problème mécanique défini par une équation locale et des conditions limites doit ainsi être résolu pour obtenir le champ vectoriel $\vec{u}(t)$ définissant le déplacement de l'objet. Formulons-le de manière plus générale pour présenter la méthode des résidus pondérés.

Pour un point $M = (x, y, z)$ au temps t, nous considérons un système qui est défini à la fois par des équations différentielles établies sur le domaine D_t et par des équations

18. Je reprends ici l'ensemble des explications proposées dans le cours de Hervé Oudin (2008).

établies sur sa frontière ∂D_t, avec :

$$\begin{array}{ll} \forall M \in D_t, & L(u) = f(M,t) \quad \text{équation locale} \\ \forall M \in \partial D_t, & C(u) = e(M,t) \quad \text{conditions aux limites} \end{array}$$

Nous appelons alors *résidu* l'erreur commise pour une approximation u^* du champ scalaire u qui satisfasse les conditions. Pour simplifier, si nous considérons que l'approximation u^* choisie satisfait les conditions aux limites avec $C(u^*) = C(u)$, nous pouvons considérer uniquement l'équations locale pour définir le résidu. Nous avons alors :

$$\forall M \in D_t, \quad R(u^*) = L(u^*) - L(u) = L(u^*) - f(M,t).$$

Nous définissons ensuite un ensemble de *fonctions dites de pondération (ou de test)* $\psi_i(M)$ définies sur le domaine D_t. La méthode des résidus pondérés consiste en effet à annuler l'erreur commise sur le résidu en le pondérant sur le domaine par un nombre fini de fonctions $\psi_i(M)$. Nous obtenons alors les **formulations intégrales** suivantes définies pour les différentes fonctions de pondération :

$$\forall \psi_i(M), \quad \int_{D_t} \psi_i(M) R(u^*)\, dv = 0.$$

Ainsi, au lieu de résoudre l'équation mathématique $R(u) = 0$, nous considérons un problème équivalent défini par

$$\forall \psi, \int_{D_t} \psi\ R(u)\, dv = 0. \tag{33}$$

Pour obtenir une approximation numérique de la solution du problème (qui ne se résout pas analytiquement), nous restreignons alors le nombre de fonctions de pondérations. Nous définissons ainsi un système matriciel d'ordre n puisqu'en définissant n fonctions de pondération, nous définissons n équations de la forme :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1,n], \quad & \int_{D_t} \psi_i(M)\ R(u^*)\, dv = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_{D_t} \psi_i(M)\ (L(u^*) - f(M,t))\, dv = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_{D_t} \psi_i(M)\ L(u^*)\, dv - \int_{D_t} \psi_i(M)\ f(M,t)\, dv = 0. \end{aligned}$$

Le nombre n de fonctions de pondération correspond généralement au nombre de paramètres de l'approximation u^* (permettant ainsi l'obtention du même nombre d'équations que de paramètres). L'approximation u^* est en effet définie en fonction de *fonctions de forme* $N_i(M)$ (constituant une base de fonctions pour construire la solution) et de paramètres notés $q_i(t)$ définissant les paramètres de l'approximation (constituant les participations des différentes fonctions de forme dans la solution du problème).

L"**approximation** u^* **de la solution** est alors de la forme :

$$\begin{aligned} u^*(M,t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(M)\ q_i(t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y,z)\ q_i(t) = (N_1(x,y,z), N_2(x,y,z), \ldots, N_n(x,y,z)) \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \quad \mathbf{N}(x,y,z)^T\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{N}(M)^T\ \mathbf{q}(t) \end{aligned}$$

conduisant au système constitué des n équations suivantes :

$$\begin{aligned}\forall i \in [1,n], \quad & \int_{D_t} \psi_i(M)\ L\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(M)\ q_i(t)\right)\ dv - \int_{D_t} \psi_i(M)\ f(M,t)\ dv = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_{D_t} \psi_i(M)\ L\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(M)\ q_i(t)\right)\ dv = \int_{D_t} \psi_i(M)\ f(M,t)\ dv.\end{aligned}$$

Ainsi en définissant la matrice K (de taille $n \times n$) et le vecteur $\mathbf{F}$ (de taille n) par

$$K = \int_{D_t} \psi(M)\ L\left(\mathbf{N}(M)^T\right) dv, \ \ \mathbf{F} = \int_{D_t} \psi(M)\ f(M,t)\ dv,$$

nous obtenons l'équation matricielle $K\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}$ dont la solution $\mathbf{q}(t)$ fournit les paramètres de l'approximation.

Dans le cadre de l'équation du mouvement, le **résidu** est défini par

$$\forall M \in D_t,\ R(u^*) = \rho\ \frac{d^2\vec{u^*}(t)}{dt^2} - \rho\ \overrightarrow{f_{ext}} - \overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}}$$

conduisant à la **formulation intégrale** suivante du problème :

$$\forall \psi_i(M),\ \int_{D_t} \psi_i(M)\ \rho\ \frac{d^2}{dt^2}\vec{u^*}(t)\ dv = \int_{D_t} \psi_i(M)\left(\rho\ \overrightarrow{f_{ext}} + \overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}}\right)\ dv.$$

Le problème est ensuite résolu en restreignant à n le nombre de fonctions de pondération ψ_i et en construisant une approximation de la solution de la forme $\vec{u}^* = \mathbf{N}(M)^T\ \mathbf{q}(t)$ pour un paramètre $\mathbf{q}(t)$ et en considérant n fonctions de forme N_i, pour $i \in [1,n]$.

Au final, nous devons résoudre le système $K\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}$ où :

$$K = \int_{D_t} \psi(M)\ \rho\ \frac{d^2}{dt^2}\left(\mathbf{N}(M)^T\right)\ dv, \ \ \mathbf{F} = \int_{D_t} \psi(M)\ \left(\rho\ \overrightarrow{f_{ext}} + \overrightarrow{div}\ \overline{\overline{\sigma}}\right)\ dv.$$

En introduisant une notion d'erreur sur les équations et en utilisant des fonctions de pondération $\psi_i(M)$ et des fonctions de forme $\mathbf{N}(M)$, la méthode des résidus pondérés permet ainsi de reformuler le problème initialement défini sur un milieu continu en un problème discret en passant par une reformulation en intégrales des équations.

Deux approches sont ensuite adoptées pour définir les fonctions de pondération :

— Nous pouvons employer des fonctions de Dirac comme fonctions de pondérations, annulant ainsi l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine.

— Nous pouvons employer les mêmes fonctions pour les fonctions de forme et les fonctions de pondération (méthode de Galerkin). De plus, si les opérateurs employés sont symétriques, nous obtenons alors des matrices symétriques.

D'autres méthodes sont utilisées pour construire une approximation de la solution. Nous présentons dans la suite une approche basée sur la formulation variationnelle de l'équation. Dans le cours de Hervé Oudin (2008), vous pouvez également retrouver l'approche basée sur le *principe des travaux virtuels* qui amène à la même formulation du système matricielle que celui que nous allons maintenant présenter.

Formulation variationnelle. Repartons de nouveau de l'équation générale décrivant le mouvement d'un objet déformable selon la dynamique newtonienne. Nous avons

$$\forall M \in D_t, \quad \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} - \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{\sigma}} - \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} = 0.$$

Cette équation est équivalente à : $\forall \vec{\psi}, \quad \displaystyle\int_{D_t} \vec{\psi} \cdot \left(\rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} - \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{\sigma}} - \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv = 0.$

Par ailleurs, en utilisant les relations $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{u} = div(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{u}) - \vec{u} \cdot \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{\sigma}}^T$ et $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}^T \vec{u} = div(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{u}) - \vec{u} \cdot \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{\sigma}}$ et en sachant que le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est symétrique (*i.e.* $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^T$), nous pouvons établir la relation $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} = div(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{\psi}) - \vec{\psi} \cdot \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{\sigma}}$.

Nous avons alors [19] :

$$\begin{aligned}
\forall \vec{\psi}, \quad & \int_{D_t} \left(\vec{\psi} \cdot \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} - div(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{\psi}) - \psi \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int_{D_t} \left(\vec{\psi} \cdot \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} - \psi \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv - \int_{D_t} div(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{\psi}) \, dv = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int_{D_t} \left(\vec{\psi} \cdot \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} - \psi \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv - \int_{\partial D_t} \vec{\psi} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \, ds = 0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite introduire les conditions limites appliquées à la frontière ∂D_t de l'objet. Nous avons vu qu'elles étaient de deux types : en déplacement sur la partie Γ_u de la surface avec $\forall M \in \Gamma_u, \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u_d}(t)$ et en contraintes sur la partie Γ_σ de la surface avec $\forall M \in \Gamma_\sigma, \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T_d}$. Nous obtenons ainsi :

$$\int_{D_t} \left(\vec{\psi} \cdot \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} - \psi \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv - \int_{\Gamma_u} \vec{\psi} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{\psi} \cdot \vec{T_d} \, ds = 0.$$

De plus, en utilisant des fonctions de pondération qui sont à valeur nulle sur la frontière Γ_u de l'objet avec $\forall M \in \Gamma_u, \vec{\psi}(M) = \vec{0}$ induisant $\int_{\Gamma_u} \vec{\psi} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \, ds = 0$, nous obtenons la **formulation variationnelle** suivante :

$$\int_{D_t} \left(\vec{\psi} \cdot \rho \, \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} \right) dv + \int_{D_t} \left(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\, \vec{\psi} \right) dv - \int_{D_t} \left(\psi \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{ext}} \right) dv = \int_{\Gamma_\sigma} \left(\vec{\psi} \cdot \vec{T_d} \right) ds.$$

avec $\forall M \in \Gamma_u, \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u_d}(t)$ et $\vec{\psi}(M) = \vec{0}$.

Cette formulation variationnelle est équivalente au système d'équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire que la solution exacte de cette formulation intégrale est la même que celle du système initial. Mais comme il est rare de trouver une solution formelle, la solution recherchée est mise comme précédemment sous la forme d'une combinaison linéaire de n fonctions dites *fonctions de forme*. L'idée est ensuite d'*affaiblir* une des formes intégrales en ne la satisfaisant que pour n *fonctions de pondération*. A noter que si nous construisons une solution satisfaisant toutes les conditions limites nous retombons sur la méthode des résidus pondérés. Mais en pratique, nous construisons une approximation $\vec{u}^*$ satisfaisant les conditions limites en déplacement avec $\forall M \in \Gamma_u, \vec{u}^* = \vec{u_d}$.

19. En utilisant le théorème de flux-divergence (ou de Green-Ostrogradski) : $\displaystyle\int_{D_t} div\vec{A} \, dv = \int_{\partial D_t} \vec{A} \cdot \vec{n} \, ds$.

Pour simplifier, nous considérons des conditions aux limites sur Γ_u telles que $\vec{u}^* = \vec{0}$ et nous employons la méthode de Galerkin pour le choix des fonctions de pondération, c'est-à-dire que nous utilisons les mêmes fonctions pour les fonctions de forme et pour les fonctions de pondération. L'approximation construite a ainsi la forme :

$$\mathbf{u}^*(M,t) = \mathbf{N}(M)\ \mathbf{q}(t)$$

avec $\mathbf{N}(M)$ la matrice construite à partir des fonctions de forme et $\mathbf{q}(t)$ le vecteur des paramètres de l'approximation. La forme matricielle des fonctions de pondération est alors définie par :

$$\psi(M) = \mathbf{N}(M)\ \delta\mathbf{q}$$

Si nous reprenons la formulation intégrale, nous devons exprimer $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\ \vec{\psi}$. Pour cela nous utilisons les formes matricielles associées aux lois de comportement avec $\sigma(M) = \mathbf{C}(M)\ \epsilon(M)$ et aux relations entre déformations et déplacements avec $\epsilon(M) = \mathbf{L}\ \mathbf{u}(M)$ où $\mathbf{L}$ est la matrice d'opérateurs différentiels correspondant à l'expression du gradient symétrique du champ de déplacements. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\sigma}}^* : \overline{\overline{grad}}\ \vec{\psi} &= \psi(M)^T\ \mathbf{L}^T\ \underbrace{\mathbf{C}(M)\ \mathbf{L}\ \mathbf{u}^*(M)}_{\sigma^*(M)} \\
&= \underbrace{(\mathbf{N}(M)\ \delta\mathbf{q})}_{\psi(M)}{}^T\ \mathbf{L}^T\ \mathbf{C}(M)\ \mathbf{L}\ \underbrace{\mathbf{N}(M)\ \mathbf{q}(t)}_{u^*} \\
&= \delta\mathbf{q}^T(\mathbf{L}\ \mathbf{N}(M))^T\ \mathbf{C}(M)\ \mathbf{L}\ \mathbf{N}(M)\ \mathbf{q}(t).
\end{aligned}$$

En définissant $\mathbf{B}(M) = \mathbf{L}\ \mathbf{N}(M)$, nous obtenons

$$\overline{\overline{\sigma}}^* : \overline{\overline{grad}}\ \vec{\psi} = \delta\mathbf{q}^T\ \mathbf{B}(M)^T\ \mathbf{C}(M)\ \mathbf{B}(M)\ \mathbf{q}(t)$$

que nous reportons dans la formulation variationnelle :

$$\forall \delta\mathbf{q}^T, \delta\mathbf{q}^T \int_{D_t} \left(\mathbf{N}^T\ \rho\ \mathbf{N}\ \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}\ \mathbf{q} - \mathbf{N}^T \rho\ \mathbf{f}_{ext}\right) dv = \delta\mathbf{q}^T \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T\ \mathbf{T}_d\ ds.$$

Au final nous obtenons l'équation matricielle $\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$ avec

$$\mathbf{M} = \int_{D_t} \mathbf{N}^T\ \rho\ \mathbf{N}\ dv,\ \mathbf{K} = \int_{D_t} \mathbf{B}^T\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}\ dv,\ \mathbf{F} = \int_{D_t} \mathbf{N}^T \rho\ \mathbf{f}_{ext}\ dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T\ \mathbf{T}_d\ ds,$$

où $\mathbf{N}$ correspond à la matrice des fonctions de forme, $\mathbf{C}$ (issue de la loi de comportement) est la matrice faisant le lien entre les contraintes et les déformations, $\mathbf{B} = \mathbf{L}\ \mathbf{N}$ où $\mathbf{L}$ est la matrice des opérateurs différentiels permettant d'exprimer les déformations en fonction des déplacements.

10 Méthode des éléments finis

Nous venons de présenter comment était établie la formulation discrète du problème de la dynamique newtonienne. Reste maintenant à résoudre le système discret obtenu afin de définir le déplacement de l'objet considéré. La méthode des éléments finis (MEF) [20] est alors adoptée pour cette résolution. Cette méthode repose sur la discrétisation du domaine continu en sous domaines et dans la définition d'une approximation de la solution en chacun des points de ces sous domaines. Ces solutions dites élémentaires obtenues sur chacun des sous domaines sont ensuite assemblées pour établir la solution complète du problème.

20. Je reprends encore ici les explications et illustrations du cours de Hervé Oudin (2008) sur la MEF.

Discrétisation géométrique du domaine La méthode des éléments finis repose sur la discrétisation du modèle continu en sous domaines qui sont appelés *éléments finis*. Ces éléments sont de forme géométrique simple. En 2D, nous utilisons des triangles et des quads, et des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D. L'union de ces éléments constitue le maillage de l'objet. Les maillages constitués du même type d'élément (c'est-à-dire d'éléments de même géométrie) sont généralement privilégiés. Il est possible d'employer des maillages non réguliers, c'est-à-dire présentant des éléments de tailles variables. Il est ainsi usuel de raffiner les zones d'intérêt et d'utiliser des éléments plus grossiers dans les zones de moindre intérêt ou dans les zones où la solution varie peu. Par contre, il faut veiller à ce que les éléments soient faiblement distordus pour faciliter la convergence des méthodes numériques employées. L'approximation de la solution est ensuite calculée en des points donnés du maillage appelés noeuds, permettant d'obtenir par interpolation la solution en chacun des points du domaine. En fonction de l'interpolation utilisée, nous pouvons considérer comme noeuds uniquement les sommets des éléments ou ajouter d'autres noeuds comme les points du milieu de chacune des arêtes des éléments.

La génération du maillage de l'objet constitue ainsi une phase importante de l'emploi de la méthode par éléments finis pour l'obtention de résultats appropriés. Il s'agit en effet de trouver le bon compromis entre la taille des éléments finis (générant un plus ou moins grand nombre de noeuds) et la modélisation géométrique idéale de l'objet simulé.

Approximation nodale. Comme mentionné précédemment, après avoir décomposé le domaine initial D_t en un ensemble de sous domaines D_e de forme géométrique simple, la méthode des éléments finis est basée sur la construction pour chacun de ces sous domaines d'une approximation $\mathbf{u}^*$ du champ des variables $\mathbf{u}$. Cette approximation est construite uniquement à partir des valeurs approchées obtenues en chacun des noeuds des éléments considérés. Nous parlons alors d'approximation nodale.

Si nous considérons le sous domaine élémentaire D_e, l'approximation nodale est définie par

$$\forall M \in D_e, \mathbf{u}^*(M) = \mathbf{N}(M)\ \mathbf{u}_n \tag{34}$$

avec $\mathbf{u}^*(M)$ la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément D_e, $\mathbf{u}_n$ les variables nodales relatives aux noeuds d'interpolation de l'élément et $\mathbf{N}$ la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément.

Si nous notons M_i les noeuds de l'élément pour lesquels l'approximation $\mathbf{u}^*$ est identifiée par rapport à la valeur du champ de variables $\mathbf{u}$, nous avons

$$\forall M_i, \quad \begin{cases} \mathbf{u}^*(M_i) = \mathbf{u}_i \\ N_j(M_i) = \delta_{ij} \end{cases} \tag{35}$$

L'interpolation nodale est alors construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M, \mathbf{u}^*(M) = \Phi(M)\ \mathbf{a} \tag{36}$$

avec Φ une base de fonctions connues indépendantes (par exemple une base polynomiale) et $\mathbf{a}$ le vecteur des paramètres de l'approximation (sans signification physique). Ainsi en identifiant aux noeuds l'approximation $\mathbf{u}^*$ à la valeur du champ de variables $\mathbf{u}$, nous pouvons exprimer les paramètres $\mathbf{a}$ en fonction des variables nodales $\mathbf{u}_n$ avec

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}^*(M_n) = \Phi(M_n)\ \mathbf{a}.$$

Par inversion nous obtenons $\mathbf{a} = \mathbf{T}\ \mathbf{u}_n$. Si nous récapitulons, nous avons comme relations $\mathbf{u}^*(M) = \mathbf{N}(M)\ \mathbf{u}_n = \Phi(M)\ \mathbf{a} = \Phi(M)\ \mathbf{T}\ \mathbf{u}_n$ donnant la matrice des fonctions d'interpolation $\mathbf{N}(M) = \Phi(M)\ \mathbf{T}$.

Comme bases polynomiales complètes, nous pouvons considérer en 2D la base linéaire $(1, x, y)$ avec 3 variables ou la base quadratique $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ avec 6 variables. En 3D, il y a la base linéaire $(1, x, y, z)$ avec 4 variables ou avec 10 variables la base quadratique $(1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, z^2, yz)$. Pour utiliser ce type de bases, le nombre de termes de la base polynomiale complète doit être égal au nombre de variables nodales à identifier.

Fonctions d'interpolation sur un élément triangulaire en 2D. Illustrons ces notions en considérant un triangle en 2D défini par 3 noeuds de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et (x_3, y_3) et en utilisant la base polynomiale linéaire $\Phi(M) = \Phi(x, y) = (1, x, y)$ pour construire les fonctions d'interpolation de cet élément triangulaire.

Nous recherchons ainsi une approximation polynomiale linéaire à 3 paramètres de la forme $\mathbf{u}^*(M) = \mathbf{u}^*(x, y) = \Phi(M)\ \mathbf{a}$ conduisant à la solution approchée linéaire :

$$\mathbf{u}^*(x, y) = (1\ x\ y) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\ x + \mathbf{a}_3\ y.$$

Nous identifions ensuite le champ de déplacement au niveau des valeurs nodales $\mathbf{u}_i$ avec $\mathbf{u}^*(x_i, y_i) = \mathbf{u}_i$. Nous obtenons alors le système matriciel suivant :

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^*(x_1, y_1) \\ \mathbf{u}^*(x_2, y_2) \\ \mathbf{u}^*(x_3, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x_1, y_1) \\ \Phi(x_2, y_2) \\ \Phi(x_3, y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}.$$

La relation inverse est de la forme :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2\ A} \begin{pmatrix} \delta_{23} & \delta_{31} & \delta_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n} \tag{37}$$

avec A l'aire du triangle et $x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j$ et $\delta_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. Si nous reportons ce résultat dans l'approximation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^*(x, y) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}}_{\Phi(M)} \underbrace{\frac{1}{2\ A} \begin{pmatrix} \delta_{23} & \delta_{31} & \delta_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\ A} \begin{pmatrix} \delta_{23} + y_{23}\ x + x_{32}\ y & \delta_{31} + y_{31}\ x + x_{13}\ y & \delta_{12} + y_{12}\ x + x_{21}\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}(x,y)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n} \\
&= \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solution approchée est ainsi de la forme :

$$\mathbf{u}^*(x,y) = \mathbf{u}_1\ N_1(x,y) + \mathbf{u}_2\ N_2(x,y) + \mathbf{u}_3\ N_3(x,y)$$

avec $N_i(x,y)$ les fonctions d'interpolation attachées aux noeuds (x_i, y_i) du triangle ayant comme valeurs nodales $\mathbf{u}_i$ et qui sont définies par : $N_i(x,y) = \frac{1}{2\,A}\left(\delta_{jk} + y_{jk}\ x - x_{jk}\ y\right)$.

Si nous les présentons sous une forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} & \delta_{23} \\ y_{31} & x_{13} & \delta_{31} \\ y_{12} & x_{21} & \delta_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

donnant comme relation inverse :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{pmatrix},$$

A noter que la somme des $N_i(x,y)$ vaut ainsi 1, et que nous avons comme relations : $x = N_1(x,y)\ x_1 + N_2(x,y)\ x_2 + N_3(x,y)\ x_3$ et $y = N_1(x,y)\ y_1 + N_2(x,y)\ y_2 + N_3(x,y)\ y_3$.

L'approximation nodale est généralement construite sur des éléments dits de référence ayant une forme géométrique simple. Puis, une transformation géométrique est utilisée pour passer de l'élément de référence à l'élément dit réel, c'est-à-dire à l'élément quelconque du domaine discrétisé. Pour cela, il faut bien entendu que l'élément de référence et l'élément réel soient de même nature. A noter qu'il existe deux types d'élément de référence. Les éléments de type Lagrange qui disposent d'une variable nodale par noeuds de l'élément. Il faut ainsi augmenter le nombre de noeuds pour augmenter le nombre de variables nodales. Les éléments de type Hermite dont le nombre de variables nodales est augmenté en considérant également les valeurs des dérivées du champ aux noeuds.

Triangle T3 ou CST (*Constant Strain Triangle*). Comme élément de référence pour un triangle 2D, nous pouvons considérer un triangle rectangle défini dans le repère de référence $\mathbf{s} = (s,t)$ par les 3 noeuds de coordonnées $(0,0), (1,0), (0,1)$.

Comme valeurs respectives de ces noeuds, nous considérons les valeurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Nous faisons ainsi correspondre les noeuds $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)$ de l'élément réel défini précédemment avec les 3 noeuds respectifs de cet élément de référence. Le point (s,t) sur l'élément de référence est ainsi le correspondant du point (x,y) de l'élément réel.

Construisons les fonctions d'interpolation de cet élément de référence en utilisant, de la même façon que pour l'élément réel, la base polynomiale linéaire $(1,s,t)$. Nous avons vu que la solution approchée était de la forme $\mathbf{u}^*(M) = \mathbf{u}^*(s,t) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\ s + \mathbf{a}_3\ t$.

En identifiant le champ de déplacement aux 3 valeurs nodales du triangle, c'est-à-dire en considérant que $u^*(0,0) = \mathbf{u}_1, u^*(1,0) = \mathbf{u}_2$ et $u^*(0,1) = \mathbf{u}_3$, nous obtenons :

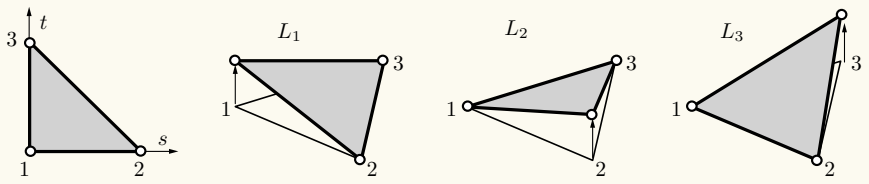
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{u}_1,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \text{ et } \mathbf{a}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1.$$

La solution approchée est alors de la forme :

$$\mathbf{u}^*(M) = \mathbf{u}^*(s,t) \quad = \quad (1\ s\ t) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{(1-s-t\ \ s\ t)}_{\mathbf{N}(s,t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n}.$$

Nous obtenons ainsi les fonctions d'interpolation linaires représentées ci-dessous :

$$N_1(s,t) = L_1 = 1 - s - t, \quad N_2(s,t) = L_2 = s, \quad N_3(s,t) = L_3 = t.$$



A noter que l'expression de ces fonctions d'interpolation est plus simple sur l'élément de référence que sur l'élément réel et ne dépend pas des coordonnées de l'élément réel.

La somme de ces fonctions d'interpolation vaut ainsi toujours 1 et nous pouvons également vérifier la relation $N_j(M_i) = \delta_{ij}$ avec

$$\begin{cases} N_1(0,0) = 1,\ N_1(0,1) = 0,\ N_1(1,0) = 0 \\ N_2(0,0) = 0,\ N_2(0,1) = 0,\ N_2(1,0) = 1 \\ N_3(0,0) = 0,\ N_3(0,1) = 1,\ N_3(1,0) = 0 \end{cases}$$

Quantités élémentaires. La méthode des éléments finis repose sur la discrétisation du domaine en éléments. Il est alors nécessaire de définir pour chacun de ces éléments les formes matricielles et vectorielles issues de la formulation intégrale du problème de la dynamique newtonienne. Pour présenter cette démarche, prenons comme point de départ la forme intégrale de notre problème issue du Principe des Travaux Virtuels (PTV).

Etant donné un système matériel D_t, l'idée du PTV consiste à définir en fonction d'un déplacement virtuel $\delta\vec{u}$, le travail virtuel des quantités d'accélération δA et le travail virtuel des efforts δT. Sachant que nous avons à tout instant $\delta A = \delta T$, nous avons :

$$\forall \delta\vec{u}, \underbrace{\int_{D_t} \left(\rho\ \delta\vec{u} \cdot \ddot{\vec{u}}\right) dv}_{\delta A} = \underbrace{-\int_{D_t} \left(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}}\ \delta\vec{u}\right) dv + \int_{D_t} \left(\delta\vec{u} \cdot \rho\ \overrightarrow{f_{ext}}\right) dv + \int_{\partial D_t} \left(\delta\vec{u} \cdot \vec{T}\right) ds}_{\delta T}.$$

Ensuite pour chacun des éléments D_e du domaine discrétisé, nous utilisons l'approximation nodale $\mathbf{u}^*(M)$ pour exprimer le champ de déplacement $\vec{u}$ et le champ des déplacements virtuels $\delta\vec{u}$. Cette approximation étant définie pour tout point M de D_e par $\mathbf{N}(M)\ \mathbf{u}_n$, nous obtenons pour le premier terme de l'égalité précédente :

$$\int_{D_e} \left(\rho\ \delta\vec{u}(M) \cdot \ddot{\vec{u}}(M)\right) dv = \delta\mathbf{u}_n{}^T \int_{D_e} \left(\mathbf{N}(M)^T\ \rho\ \mathbf{N}(M)\ \right) dv\ \ddot{\mathbf{u}}_n = \delta\mathbf{u}_n{}^T\ M_e\ \ddot{\mathbf{u}}_n$$

avec $\mathbf{M}_e$ la **matrice élémentaire des masses** définie par

$$\mathbf{M}_e = \int_{D_e} \Big(\mathbf{N}(M)^T \, \rho \, \mathbf{N}(M) \Big) \, dv.$$

Par ailleurs, le **tenseur des déformations** peut être exprimé par

$$\epsilon(M) = \mathbf{L} \, \vec{u}(M) = \mathbf{L} \, \mathbf{N}(M) \, \mathbf{u}_n = \mathbf{B}(M) \, \mathbf{u}_n.$$

où $\mathbf{L}$ est la matrice d'opérateurs différentiels correspondant à l'expression du gradient symétrique du champ de déplacements et $\mathbf{B}$ la matrice d'opérateurs différentiels appliquées aux fonctions d'interpolations $\mathbf{N}$.

La loi de comportement permet par ailleurs de relier le tenseur de contraintes avec le tenseur des déformations avec

$$\sigma(M) = \mathbf{C}(M) \, \epsilon(M) = \mathbf{C}(M) \, \mathbf{B}(M) \, \mathbf{u}_n.$$

Etant données ces relations, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{D_e} \Big(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad}} \, \delta\vec{u} \Big) \, dv &= \int_{D_e} \Big(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\epsilon}} \Big) \, dv \\ &= \delta\mathbf{u}_n^T \int_{D_e} \Big(\mathbf{B}(M)^T \, \mathbf{C}(M) \, \mathbf{B}(M) \Big) \, dv \, \mathbf{u}_n \\ &= \delta\mathbf{u}_n^T \, \mathbf{K}_e \, \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

avec $\mathbf{K}_e$ la **matrice élémentaire des raideurs** définie par

$$\mathbf{K}_e = \int_{D_e} \Big(\mathbf{B}(M)^T \, \mathbf{C}(M) \, \mathbf{B}(M) \Big) \, dv.$$

Enfin nous avons également :

$$\int_{D_e} \Big(\delta\vec{u} \cdot \rho \, \overrightarrow{f_{d_{ext}}} \Big) \, dv + \int_{\partial D_e} \Big(\delta\vec{u} \cdot \overrightarrow{T_d} \Big) \, ds = \delta\mathbf{u}_n^T \, \mathbf{F}_{de}$$

avec $\mathbf{F}_{de} = \int_{D_e} \Big(\mathbf{N}(M)^T \rho \, \mathbf{f}_{d_{ext}} \Big) \, dv + \int_{\partial D_e} \Big(\mathbf{N}(M)^T \, \mathbf{T}_d \Big) \, ds$
où $\overrightarrow{f_{d_{ext}}}$ et $\overrightarrow{T_d}$ représentent les forces extérieures et le vecteur de contraintes pour l'élément D_e qui sont ensuite exprimés dans une base cohérente avec le même choix de la discrétisation que $\delta\vec{u}$ pour devenir respectivement $\mathbf{f}_{d_{ext}}$ et $\mathbf{T}_d$.

Au final, si nous reprenons la formulation intégrale issue du PTV, nous obtenons l'équation matricielle suivante pour chacun des éléments D_e du domaine discrétisé :

$$\forall D_e, \quad \delta\mathbf{u}_n^T \, \mathbf{M}_e \, \ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\mathbf{u}_n^T \, \mathbf{K}_e \, \mathbf{u}_n = \delta\mathbf{u}_n^T \, \mathbf{F}_{de}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}_e \, \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_e \, \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_{de}$$

Matrice $\mathbf{B}(M)$ pour un élément triangulaire 2D. Reprenons notre élément réel triangulaire 2D. Le champ de déplacement est défini dans le plan par le vecteur $(u\ v)^T$.

Le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\epsilon(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad = \quad \mathbf{L} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{L}$ est la matrice d'opérateurs différentiels. En prenant l'approximation nodale du champ de déplacement définie par $\mathbf{u}^*(M) = \mathbf{N}(M)\ \mathbf{u}_n$, nous avons :

$$\begin{cases} u(x,y) = u_1\ N_1(x,y) + u_2\ N_2(x,y) + u_3\ N_3(x,y) \\ v(x,y) = v_1\ N_1(x,y) + v_2\ N_2(x,y) + v_3\ N_3(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{,x} &= u_1\ N_{1,x} + u_2\ N_{2,x} + u_3\ N_{3,x} \\ v_{,y} &= v_1\ N_{1,y} + v_2\ N_{2,y} + v_3\ N_{3,y} \\ u_{,y} + v_{,x} &= u_1\ N_{1,y} + v_1\ N_{1,x} + u_2\ N_{2,y} + v_2\ N_{2,x} + u_3\ N_{3,y} + v_3\ N_{3,x} \end{cases}$$

Le tenseur des déformations s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\epsilon(M) \quad = \quad \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}\ \mathbf{N}(x,y)} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n} = \mathbf{B}(M)\ \mathbf{u}_n.$$

Pour construire la matrice $\mathbf{B}(M) = \mathbf{L}\ \mathbf{N}(x,y)$, nous devons ainsi calculer les dérivées premières des fonctions d'interpolation $\mathbf{N}(M)$ par rapport aux coordonnées (x,y).

En considérant les fonctions $N_i(x,y)$ associées au triangle, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} N_1(x,y) = N_{1,x} = \frac{1}{2A}\ y_{23} \ ; \ \frac{\partial}{\partial y} N_1(x,y) = N_{1,y} = \frac{1}{2A}\ x_{32} \\ \frac{\partial}{\partial x} N_2(x,y) = N_{2,x} = \frac{1}{2A}\ y_{31} \ ; \ \frac{\partial}{\partial y} N_2(x,y) = N_{2,y} = \frac{1}{2A}\ x_{13} \\ \frac{\partial}{\partial x} N_3(x,y) = N_{3,x} = \frac{1}{2A}\ y_{12} \ ; \ \frac{\partial}{\partial y} N_3(x,y) = N_{3,y} = \frac{1}{2A}\ x_{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} N_i(x,y) = N_{i,x} = \frac{1}{2A}\ y_{jk} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} N_i(x,y) = N_{i,y} = \frac{1}{2A}\ x_{kj}$$

que nous pouvons exprimer sous la forme pseudo matricielle suivante :

$$[N_{,j}] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{1,y} \\ N_{2,x} & N_{2,y} \\ N_{3,x} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons également noter que :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial N_1(x,y)} = x_1 \ ; \ \dfrac{\partial x}{\partial N_2(x,y)} = x_2 \ ; \ \dfrac{\partial x}{\partial N_3(x,y)} = x_3 \\ \dfrac{\partial y}{\partial N_1(x,y)} = y_1 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial N_2(x,y)} = y_2 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial N_3(x,y)} = y_3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial x}{\partial N_i(x,y)} = x_i \ ; \ \frac{\partial y}{\partial N_i(x,y)} = y_i.$$

Au final, la matrice $\mathbf{B}(M)$ relative à l'élément triangulaire 2D est définie par :

$$\mathbf{B}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cccccc} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{array} \right].$$

Elle est ainsi identique pour tout point $M = (x, y)$ de l'élément considéré, c'est-à-dire qu'elle est constante sur l'élément. Il en est de même pour le tenseur $\epsilon(M) = \mathbf{B}(M)\ \mathbf{u}_n$.

Cette propriété a le mérite de faciliter le calcul de la matrice élémentaire des raideurs. Pour un élément triangulaire de surface A et d'épaisseur h, nous avons ainsi :

$$\mathbf{K}_e = \int_{D_e} \Big(\mathbf{B}(M)^T\ \mathbf{C}(M)\ \mathbf{B}(M) \Big)\, dv = h\ A \Big(\mathbf{B}(M)^T\ \mathbf{C}(M)\ \mathbf{B}(M) \Big).$$

Passage de l'élément de référence à l'élément réel. Les expressions des matrices élémentaires utilisent des opérateurs différentiels et des intégrales sur le domaine élémentaire D_e. Pour effectuer ces calculs, nous les réalisons tout d'abord sur les éléments de référence (pour lesquels les fonctions d'interpolation et leurs dérivées sont connues et sur lesquels les calculs peuvent être réalisés analytiquement), puis nous employons une transformation géométrique pour passer de l'élément de référence à l'élément réel.

Cette transformation géométrique permet ainsi de définir les coordonnées (x, y, z) de tout point 3D de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point 3D correspondant de l'élément de référence. Par ailleurs, cette transformation géométrique est une bijection, c'est-à-dire que tout point (x, y, z) de l'élément réel a un seul antécédent de coordonnées (s, t, u) et est ainsi l'image de ce point. Par contre, un élément de référence permet de générer une classe d'éléments réels en fonction de la transformation géométrique employée.

A noter que si les noeuds d'interpolation et les noeuds géométriques sont confondus, les fonctions de transformations géométriques $\mathbf{N}_g$ sont identiques aux fonctions d'interpolation $\mathbf{N}$ utilisées pour définir l'approximation nodale. L'élément de référence est alors dit **iso-paramétrique**. La transformation géométrique est dans ce cas définie par :

$$x = \mathbf{N}_g(s,t,u)\ \mathbf{x}_n \ ; \ y = \mathbf{N}_g(s,t,u)\ \mathbf{y}_n \ ; \ z = \mathbf{N}_g(s,t,u)\ \mathbf{z}_n.$$

avec $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n$ les coordonnées des n noeuds de l'élément réel et $\mathbf{N}_g(s, t, u)$ les fonctions de transformation géométrique permettant de passer de l'élément réel à l'élément de référence.

Revenons aux calculs relatifs à la définition des matrices élémentaires. Nous avons vu que ces calculs faisaient apparaître des opérateurs différentiels appliquées aux fonctions d'interpolation $\mathbf{N}$. Or en pratique nous ne connaissons que les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées $\mathbf{r} = (s, t, u)$ de l'élément de référence, alors qu'il est nécessaire de savoir les exprimer par rapport aux coordonnées réelles $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Pour cela nous définissons la **matrice jacobienne de la transformation J** en utilisant les règles de dérivation en chaîne. Nous obtenons ainsi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}}.$$

En considérant un élément de référence iso-paramétrique, nous pouvons alors écrire que la matrice jacobienne est définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_g(s,t,u)\,\mathbf{x}_n & \mathbf{N}_g(s,t,u)\,\mathbf{y}_n & \mathbf{N}_g(s,t,u)\,\mathbf{z}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} N_{ig}(s,t,u)\,x_i & \sum_{i=1}^{n} N_{ig}(s,t,u)\,y_i & \sum_{i=1}^{n} N_{ig}(s,t,u)\,z_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} N_{1g}(s,t,u) & \dots & N_{ng}(s,t,u) \\ N_{1g}(s,t,u) & \dots & N_{ng}(s,t,u) \\ N_{1g}(s,t,u) & \dots & N_{ng}(s,t,u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_g(s,t,u) \\ \mathbf{N}_g(s,t,u) \\ \mathbf{N}_g(s,t,u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n & \mathbf{y}_n & \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{N}_g(s,t,u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{N}_g(s,t,u) \\ \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{N}_g(s,t,u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n & \mathbf{y}_n & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour chaque élément de la discrétisation, nous pouvons exprimer la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ en fonction des dérivées des fonctions connues de transformation géométrique $\mathbf{N}_g$ et des coordonnées $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n$ des noeuds géométriques de l'élément réel. $\mathbf{J}$ est ainsi le produit d'une matrice $3 \times n$ par une matrice $n \times 3$, toutes deux connues.

La relation inverse $\mathbf{J}^{-1}$ (qui existe puisque la transformation géométrique doit être une bijection) permet par ailleurs de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation avec :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Connaissant les dérivées premières des fonctions d'interpolations N_i par rapport aux coordonnées de l'élément de référence (s, t, u), ces relations contribuent à la construction de la matrice $\mathbf{B}(s, t, u)$ à partir de la matrice $\mathbf{B}(x, y, z)$ s'exprimant en fonction des dérivées premières des fonctions d'interpolations N_i par rapport aux coordonnées réelles (x, y, z).

La jacobienne de la transformation permet aussi de passer de l'intégrale d'une fonction $f(x, y, z)$ définie sur l'élément réel D_e à l'intégration sur l'élément de référence D_{ref} avec

$$\int_{D_e} f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \int_{D_{ref}} f(s, t, u)\ det(\mathbf{J})\ ds\ dt\ du.$$

A noter que le calcul de l'intégration se fait rarement de manière analytique, mais plutôt de manière numérique sous la forme

$$\int_{D_{ref}} f(s, t, u)\ ds\ dt\ du = \sum_{i=1}^{N_{pi}} f(\xi_i)\ w_i$$

avec N_{pi} le nombre de points d'intégration sur l'élément de référence D_{ref}, ξ_i les coordonnées paramétriques des points d'intégration et w_i les poids d'intégration.

Les matrices élémentaires s'écrivent alors sous la forme suivante :

— matrice élémentaire des masses : $\mathbf{M}_e = \int_{D_{ref}} \Big(\mathbf{N}(\xi)^T\ \rho\ \mathbf{N}(\xi)\ det(\mathbf{J})\Big)\ ds\ dt\ du,$

— matrice élémentaire des raideurs : $\mathbf{K}_e = \int_{D_{ref}} \Big(\mathbf{B}(\xi)^T\ \mathbf{C}(\xi)\ \mathbf{B}(\xi)\ det(\mathbf{J}\Big)\ ds\ dt\ du,$

— vecteur des forces extérieures : $\mathbf{F}_{de} = \int_{D_{ref}} \Big(\mathbf{N}(\xi)^T \rho\ \mathbf{f}_{d_{ext}} det(\mathbf{J}\Big)\ ds\ dt\ du.$

Triangle T3 ou CST (*Constant Strain Triangle*). Nous avons vu que pour un élément réel triangulaire 2D défini par les noeuds (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3), nous pouvons utiliser l'élément de référence T3 défini par les noeuds $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Nous devons alors définir la transformation géométrique qui va permettre de passer de l'élément de référence (défini dans le repère $\mathbf{r}$) à notre élément réel (défini dans le repère $\mathbf{x}$). Il faut savoir que l'élément T3 est iso-paramétrique. Les noeuds utilisés pour l'interpolation de l'approximation nodale du champs de déplacement sont ainsi confondus avec les noeuds géométriques utilisés pour la transformation géométrique.

Les fonctions de transformation géométrique $\mathbf{N}_g(s,t)$ sont dans ce cas identiques aux fonctions $\mathbf{N}(s,t)$ de l'approximation nodale. Dans le cas de l'utilisation de la base polynomiale linéaire $(1, s, t)$, nous avons ainsi : $\mathbf{N}_g(s,t) = \mathbf{N}(s,t) = (1-s-t \;\; s \;\; t)$.

La transformation géométrique est alors définie par

$$x = (1-s-t \;\; s \;\; t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_{21}\, s + x_{31}\, t + x_1$$

$$y = (1-s-t \;\; s \;\; t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_{21}\, s + y_{31}\, t + y_1$$

Ensuite, pour le calcul des opérateurs différentiels, nous devons définir la matrice jacobienne de la transformation géométrique. Pour un élément, elle est définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s}\mathbf{N}_g(s,t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{N}_g(s,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n & \mathbf{y}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s}(1-s-t \;\; s \;\; t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(1-s-t \;\; s \;\; t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice inverse est ainsi définie par :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

où A est l'aire de l'élément réel et $det(\mathbf{J}) = 2A = x_{21}\, y_{31} - x_{31}\, y_{21}$.

$\mathbf{J}$ étant constante sur l'élément, nous pouvons calculer analytiquement les intégrales des matrices élémentaires. Pour cela, notons h l'épaisseur uniforme de l'élément de référence. Ses frontières sont données par les droites $s = 0, t = 0$ et $s + t = 1$. Dans cet élément de référence, t varie ainsi de 0 à 1. Ensuite pour t fixé, s varie de 0 à $1-s$.

Le calcul des intégrales élémentaires s'écrit ainsi de la façon suivante :

— pour la matrice élémentaire des masses :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e &= \int_{D_e} \Big(\mathbf{N}(x,y)^T \; \rho \; \mathbf{N}(x,y)\Big) \, dx \; dy \; dz \\
&= h \int_{D_{ref}} \Big(\mathbf{N}(s,t)^T \; \rho \; \mathbf{N}(s,t) \; det(\mathbf{J})\Big) \, ds \; dt \\
&= h \int_{t=0}^{1} \left(\int_{s=0}^{1-s} \Big(\mathbf{N}(s,t)^T \; \rho \; \mathbf{N}(s,t) \; 2A\Big) \, ds \right) dt
\end{aligned}$$

— pour la matrice élémentaire des raideurs :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e &= \int_{D_e} \Big(\mathbf{B}(x,y)^T \; \mathbf{C}(x,y) \; \mathbf{B}(x,y)\Big) \, dx \; dy \; dz \\
&= h \int_{D_{ref}} \Big(\mathbf{B}(s,t)^T \; \mathbf{C}(s,t) \; \mathbf{B}(s,t) \; det(\mathbf{J}\Big) \, ds \; dt \\
&= h \int_{t=0}^{1} \left(\int_{s=0}^{1-s} \Big(\mathbf{B}(s,t)^T \; \mathbf{C}(s,t) \; \mathbf{B}(s,t) \; 2A\Big) \, ds \right) dt
\end{aligned}$$

Il faut ainsi définir la matrice $\mathbf{B}(M)$ nécessitant le calcul des dérivées premières des fonctions d'interpolation $\mathbf{N}$ sachant que $\epsilon(M) = \mathbf{L} \; \mathbf{u}(M) = \mathbf{L} \; \mathbf{N}(M)\mathbf{u}_n = \mathbf{B}(M) \; \mathbf{u}_n$.

Le champ de déplacement $\mathbf{u} = (u \; v)^T$ peut alors être vu comme une fonction de (x, y) ou de (s, t). Si nous considérons l'approximation nodale dans le repère $\mathbf{r}$ avec $\mathbf{u}^*(s,t) = \mathbf{N}(s,t) \; \mathbf{u}_n$, les composantes u et v sont définies en fonction de (s, t) par :

$$\begin{pmatrix} u(s,t) \\ v(s,t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(s,t) & 0 & N_2(s,t) & 0 & N_3(s,t) & 0 \\ 0 & N_1(s,t) & 0 & N_2(s,t) & 0 & N_3(s,t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(s,t)} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} u(s,t) & = & (1-s-t) \; u_1 + s \; u_2 + t \; u_3 & = & (u_2 - u_1) \; s + (u_3 - u_1) \; t + u_1 \\ v(s,t) & = & (1-s-t) \; v_1 + s \; v_2 + t \; v_3 & = & (v_2 - v_1) \; s + (v_3 - v_1) \; t + v_1 \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors facilement calculer les dérivées premières par rapport à $\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial u(s,t)}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v(s,t)}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Puis, nous avons les relations suivantes en utilisant les règles de dérivation en chaînes :

$$\frac{\partial u(s,t)}{\partial \mathbf{x}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{J}^{-1}} \frac{\partial u(s,t)}{\partial \mathbf{r}} \; ; \; \frac{\partial v(s,t)}{\partial \mathbf{x}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{J}^{-1}} \frac{\partial v(s,t)}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(s,t)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 - u_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v(s,t)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v(s,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\epsilon(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\,\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(M)} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Le champ des déformations $\epsilon(M)$ est ainsi constant à l'intérieur de l'élément de référence ainsi appelé élément T3 ou CST pour *Constant Strain Triangle*.

Nous retombons sur la formulation que nous avions établie précédemment à partir des fonctions d'interpolations $\mathbf{N}_i(x,y)$ exprimées en fonction des coordonnées du repère de l'élément réel. Mais cette fois-ci, la formulation a été établie en partant des expressions des fonctions d'interpolation $\mathbf{N}_i(s,t)$ établies à partir du repère de l'élément de référence.

Assemblage. Après avoir défini une approximation de la solution sur chacun des éléments finis, et construit pour chacun de ces éléments les matrices élémentaires de la forme intégrale du problème, la méthode des éléments finis nécessite l'assemblage de ces matrices élémentaires. Nous obtenons ainsi les équations relatives au domaine D_t entier pour permettre ensuite sa résolution globale. En effet, il est important de noter qu'il n'est pas possible de résoudre indépendamment chacun des systèmes puisque les conditions aux frontières sont définies uniquement sur les frontières du système global et non sur les frontières de chacun des éléments finis.

L'assemblage des matrice élémentaires de masse M_e et de raideur K_e, ainsi que l'assemblage du vecteur des forces s'effectuent en sommant les termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément. Si nous considérons le domaine D_t décomposé en n_e éléments, nous avons comme relations définissant les matrices et vecteur globaux :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{e=1}^{n_e} D_e \simeq D_t, \\ \displaystyle\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_n^T \, \mathbf{M}_e \, \ddot{\mathbf{u}}_n = \delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{M} \, \ddot{\mathbf{U}}, \\ \displaystyle\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_n^T \, \mathbf{K}_e \, \mathbf{u}_n = \delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{U}, \\ \displaystyle\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_n^T \, \mathbf{F}_{de} = \delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{F}_d \end{cases}$$

Après assemblage, nous obtenons au final la forme matricielle suivante de la formulation intégrale issue du Principe des Travaux Virtuels sur le domaine D_t :

$$\delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{M} \, \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \, \mathbf{F}_d$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M} \, \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \, \mathbf{U} = \mathbf{F}_d.$$

Cette équation est ensuite résolue en utilisant une méthode d'intégration numérique.

Récapitulatif des étapes de calculs de la MEF.

Pour résumer, voici les différentes étapes de calculs effectués lors de l'emploi de la méthode des éléments finis.

- **Pour les différents éléments de références utilisés**
  - Création de la table des coordonnées ξ_i et poids w_i pour les N_{pi} points d'intégration
  - Calcul des fonctions d'interpolation $\mathbf{N}$
  - Calcul des fonctions de transformation géométrique $\mathbf{N}_g$
  - Calcul des dérivées des fonctions $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_g$ aux points d'intégration

- **Pour** chaque élément **faire**
  - **Pour** chaque point d'intégration ξ_i **faire**
    - Calcul de $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^{-1}$ et $det(\mathbf{J})$ au point d'intégration ξ_i
    - Construction des matrices $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}(\xi_i)$ et $\mathbf{N}(\xi_i)$
    - Calcul de $\mathbf{B}(\xi_i)^T\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}(\xi_i)\ det(\mathbf{J})\ w_i$
    - Calcul de $\mathbf{N}(\xi_i)^T\ \rho\ \mathbf{N}(\xi_i)\ det(\mathbf{J})\ w_i$
    - Calcul de $\mathbf{N}(\xi_i)^T\ \mathbf{f}_d(\xi_i)\ det(\mathbf{J})\ w_i$
    - Accumulation dans les matrices $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{F}_d$
  - **Fin** de l'intégration
- **Fin** de la boucle sur les éléments

- Emploi d'une méthode d'intégration numérique pour résoudre l'équation

11 Conclusion

J'ai présenté dans ce document les notions de la Mécanique des Milieux Continus qu'il est nécessaire d'acquérir quand nous souhaitons comprendre et modéliser le comportement d'un objet déformable. Si nous souhaitons être au plus proche de son comportement réel, il est nécessaire d'identifier par des expérimentations mécaniques, sa loi de comportement ainsi que ses paramètres mécaniques associés, permettant la définition des équations de la mécanique décrivants son mouvement. Ces équations sont ensuite résolues à chaque pas de temps de la simulation par la méthode dite des éléments finis.

Références

M. Bailet. *Modèles biomécaniques pour la simulation interactive de l'accouchement*. Theses, Université Joseph Fourier, Dec. 2014. URL https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01158380.

D. Baraff and A. Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '98, pages 43–54, New York, NY, USA, 1998. ACM. ISBN 0-89791-999-8. doi : 10.1145/280814.280821. URL http://doi.acm.org/10.1145/280814.280821.

T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. J. Wiley & sons, Chichester, New York, Weinheim, 2000. ISBN 0-471-98773-5. URL http://opac.inria.fr/record=b1128458. Autres tirages : 2001, 2003, 2004, 2005, 2008.

J. Coirier and C. Nadot-Martin. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 6 2013.

Y. Debard. Méthode des éléments finis : élasticité plane. Mar. 2011. URL http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi.

A. D. Deram. *Environnement générique pour la validation de simulations médicales*. Theses, Université de Grenoble, Oct. 2012. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00793236.

S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, S. Kruch, V. Maurel, and M. Mazière. Mécanique des milieux continus. 2010. URL http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/mmc_paris.php.

H. Klöcker. Mécanique des milieux continus. 2003. URL http://mms2.mines-paristech.fr/ressources/ens_polycopies.php.

V. Majorczyk. *Modélisation des interactions entre solides déformables et films fluides pour la simulation médicale temps-réel*. Theses, Université des Sciences et Technologies de Lille, Apr. 2015. URL https://hal.inria.fr/tel-01165320.

N. Moës. Mécanique des milieux continus. Sept. 2011. URL https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00612360.

C. Olagnon. Elasticité et résistance des matériaux. 11 2010. URL http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/pont.php?cle=RPNE000047A.

H. Oudin. Méthode des éléments finis. Lecture, Sept. 2008. URL https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00341772.

E. Sifakis and J. Barbic. Fem simulation of 3d deformable solids : A practitioner's guide to theory, discretization and model reduction. In *ACM SIGGRAPH 2012 Courses*, SIGGRAPH '12, pages 20 :1–20 :50, New York, NY, USA, 2012. ACM. ISBN 978-1-4503-1678-1.

Wikipédia. Tenseur — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur.