



HAL
open science

Modélisation et simulation de la cavitation

Eric Goncalves da Silva

► **To cite this version:**

Eric Goncalves da Silva. Modélisation et simulation de la cavitation. Doctorat. 14^{ème} Ecole de Mécanique des Fluides Numérique, Porquerolles, France. 2015, pp.70. cel-01420468

HAL Id: cel-01420468

<https://hal.science/cel-01420468v1>

Submitted on 20 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut PPrime - ISAE-ENSMA

MODELISATION ET SIMULATION DE LA CAVITATION

Eric Goncalves - juin 2015

Table des matières

I	Généralités	1
I.1	Introduction	1
I.2	Les différents types de cavitation	2
I.3	Les caractéristiques de la cavitation	4
II	Modélisation des écoulements liquide-vapeur	7
II.1	Introduction	7
II.1.1	Les méthodes de résolution directe	7
II.1.2	Les méthodes de résolution moyennée	7
II.2	Bilans globaux	8
II.3	Les équations locales instantanées	9
II.3.1	Equation locale instantanée de la masse	10
II.3.2	Equation locale instantanée de la qdm	11
II.3.3	Equation locale instantanée d'énergie totale	11
II.4	Bilans moyennés	11
II.4.1	Fonction indicatrice de phase	11
II.4.2	Opérateurs locaux moyennés dans le temps	12
II.4.3	Décomposition des variables pondérées par la masse	13
II.4.4	Opérateur de moyenne d'ensemble	13
III	Equation de bilan moyennée	15
III.1	Equations locales moyennées sur le temps de présence	15
III.1.1	La méthode	15
III.1.2	Bilan de masse moyenné sur le temps de présence T_k de la phase k	16
III.1.3	Bilan de qdm moyenné sur le temps de présence T_k de la phase k	16
III.1.4	Bilan d'énergie totale moyenné sur le temps de présence T_k	17
III.2	Les différents modèles	17
III.3	Modèle 1-fluide ou modèle de mélange homogène	18
III.3.1	Variables thermodynamiques de mélange	18
III.3.2	Vitesses de mélange, vitesse relative, vitesse de diffusion	19
III.3.3	Tenseur des contraintes du mélange	19
III.3.4	Flux de chaleur de mélange	20
III.3.5	Bilan de masse du mélange	20

III.3.6	Bilan de quantité de mouvement du mélange	21
III.3.7	Bilan d'énergie totale du mélange	22
III.3.8	Termes de turbulence	23
III.4	Les équations de bilan du modèle de mélange homogène	24
III.4.1	Hypothèses effectuées	24
III.4.2	Hypothèse supplémentaire	24
III.4.3	Modèle de mélange homogène équilibré	25
III.4.4	Modèle de mélange homogène relaxé	25
III.5	Modèle à 5 équations	27
III.6	Les modèles bi-fluide à 6 ou 7 équations	28
III.6.1	Modèle à 7 équations de Saurel et Le Métayer	28
III.6.2	Modèle à 6 équations du code Neptune de EDF	29
IV	Equations moyennées de la turbulence	31
IV.1	Equations pour les fluctuations	31
IV.1.1	Equation pour les fluctuations de la masse	31
IV.1.2	Equation pour les fluctuations de la quantité de mouvement	31
IV.2	Equation pour les tensions de Reynolds	32
IV.3	Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente	33
IV.4	Equation de transport du taux de dissipation	37
V	Simulation numérique d'écoulements cavitants	39
V.1	Introduction	39
V.2	Lois d'état et contraintes thermodynamiques	39
V.2.1	Condition sur l'entropie	41
V.2.2	Conditions sur la vitesse du son	42
V.3	Modélisation de la turbulence et modèle de paroi	43
V.3.1	Etude de lois de paroi	44
V.4	Méthodes numériques	48
V.5	Codes compressible et incompressible	52
V.5.1	Préconditionnement du système compressible à 3 équations	54
V.5.2	Préconditionnement du système compressible à 4 équations	55
V.5.3	Comparaison de codes compressible et incompressible	58
V.6	Cavitation non isotherme	60
V.6.1	Régime inertiel, régime thermique et temps caractéristiques	61
V.6.2	Refroidissement et échauffement dans un Venturi en fréon R-114	62
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	65

Chapitre I

Généralités

I.1 Introduction

La cavitation est un phénomène qui apparaît fréquemment dans les composants hydrauliques classiques tels que les pompes, vannes, turbines et hélices. Des survitesses locales imposées par la géométrie, par des phénomènes de cisaillements, d'accélération ou de vibrations peuvent engendrer des baisses locales de pression dans le fluide. Lorsqu'en certains points de l'écoulement la pression est inférieure à la pression de vapeur du fluide, il se produit une vaporisation partielle et des structures de vapeur prennent naissance. Les structures ainsi formées sont entraînées par l'écoulement et lorsqu'elles atteignent une zone de pression plus élevée elles se condensent et implosent violemment. La cavitation conduit à des pertes importantes de performance de l'installation, à des problèmes d'instabilités de fonctionnement des machines et à l'érosion des parois du composant. C'est ainsi une source de problèmes techniques primordiaux dans le domaine des turbomachines hydrauliques et de la construction navale. Compte tenu de la complexité des phénomènes physiques entrant en jeu dans la cavitation, et malgré d'excellentes études menées sur le sujet, les mécanismes physiques de base de la cavitation ne sont pas à ce jour entièrement connus.

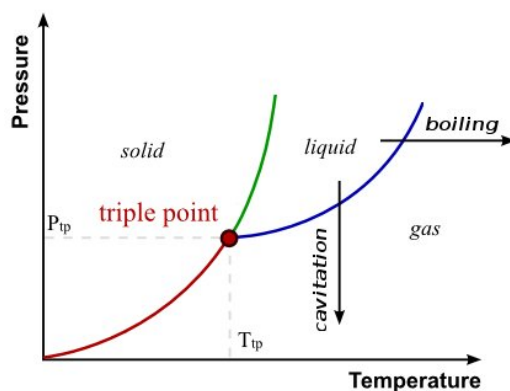


FIGURE I.1 – Diagramme thermodynamique pression-température

Dans un grand nombre d'applications comme l'exploitation des turbines pour la production

d'hydroélectricité, les pompes d'injection des ergols pour la propulsion spatiale ou encore les hélices des navires, la cavitation est un phénomène néfaste que l'on cherche à éviter car il est responsable :

- d'une chute de performance des turbomachines.
- d'une modification des efforts sur la machine.
- de l'érosion prématurée des matériaux par l'implosion des bulles de vapeur en proximité de la paroi.
- de vibration et de bruits.
- d'une fluctuation du débit.

Cependant, il est à noter que dans certains cas, la cavitation est un phénomène recherché. Pour la propulsion d'objets sous-marins tel que des torpilles, des études sur la supercavitation (poche de vapeur qui englobe l'ensemble du véhicule) permettant de réduire la traînée de l'engin sont effectuées. D'autre part, la cavitation est utilisée pour le nettoyage de certains équipements par érosion contrôlée.

I.2 Les différents types de cavitation

Selon les différents paramètres caractérisant un écoulement, la cavitation peut prendre plusieurs formes :

- Cavitation par bulles (bubble cavitation)

Des bulles de vapeur se forment dans les zones de basse pression puis implosent lorsqu'elles rencontrent un gradient de pression adverse. Ce type de cavitation se rencontre principalement sur des profils portants, des pales d'hélices ou des aubes de turbines.

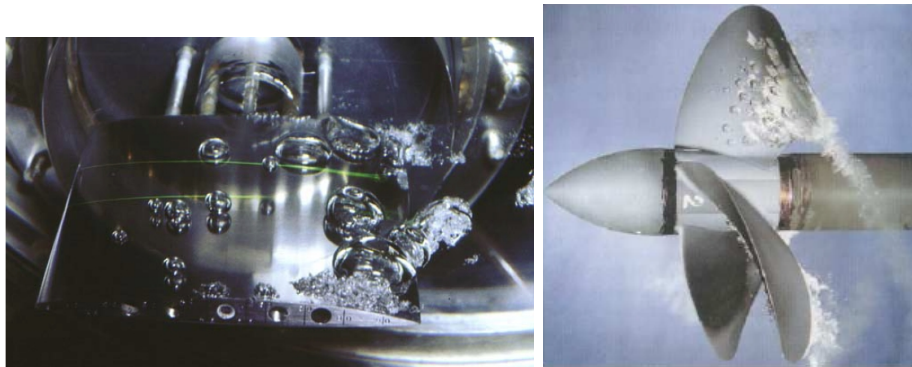


FIGURE I.2 – Cavitation par bulles, photos extraites de [35]

- Cavitation par poches ou cavités (pocket or sheet cavitation)

Sur des profils (aubes de turbines, pales d'hélices) ou des Venturis, lorsque l'incidence augmente, une poche de vapeur se forme au voisinage du bord d'attaque (ou du col) et peut s'étendre jusqu'au bord de fuite. Dans de nombreux cas, la poche est instationnaire et sa dynamique est liée à un écoulement de retour dit jet rentrant. Selon les configurations, le jet rentrant peut être assez étendu pour casser la poche et générer un lâcher de structures plus ou moins périodique (poche oscillante auto-entretenu ou poche pulsée). Dans d'autres

cas, une dynamique instationnaire apériodique avec une recirculation en aval de la poche plus ou moins étendue se met en place.



FIGURE I.3 – Cavitation par poches en Venturi (gauche) et sur hélice (droite)

- Cavitation dans les tourbillons marginaux (tip-vortex cavitation)

Dans les tourbillons marginaux en bout de pale ou d'aile, la pression peut localement être très faible, ce qui donne naissance à des bulles de cavitation se répartissant sous forme de filaments.

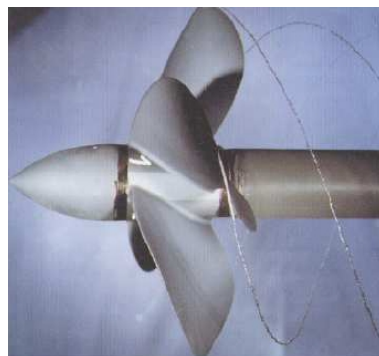


FIGURE I.4 – Cavitation par filaments sur une hélice

- Cavitation dans les zones cisillées (shear cavitation)

Dans des zones de cisaillement ou de fortes turbulences, la baisse de pression locale peut être suffisante pour entraîner une vaporisation partielle du liquide.

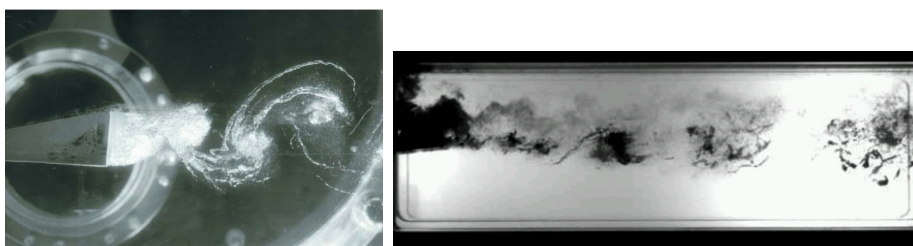


FIGURE I.5 – Cavitation en zones cisillées et couche de mélange

A ces applications hydrauliques s'ajoutent les études de bulles isolées : collapse d'une bulle, oscillation de bulles dans un champ de pression, sonoluminescence...

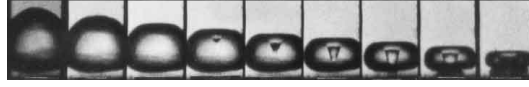


FIGURE I.6 – Collapse d'une bulle et microjet

I.3 Les caractéristiques de la cavitation

La création, le transport et la destruction de vapeur au sein de l'écoulement liquide sont responsables de plusieurs traits caractéristiques des écoulements cavitants :

- Transfert de masse et thermodynamique hors équilibre (état métastable).

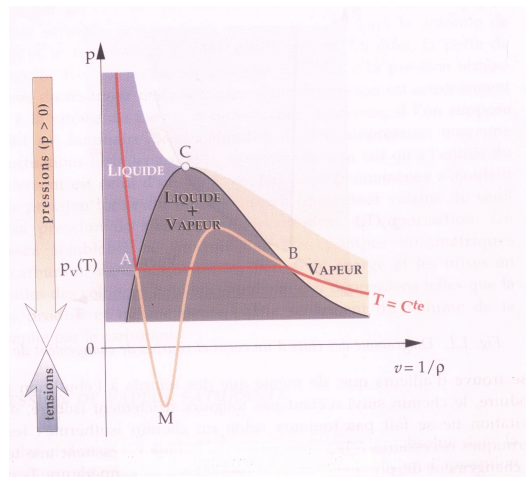


FIGURE I.7 – Diagramme de phase et pression négative

- Forte réduction de la vitesse du son dans le mélange et donc présence d'une grande variété de nombre de Mach dans l'écoulement. Ces écoulements juxtaposent ainsi des zones compressibles et incompressibles.

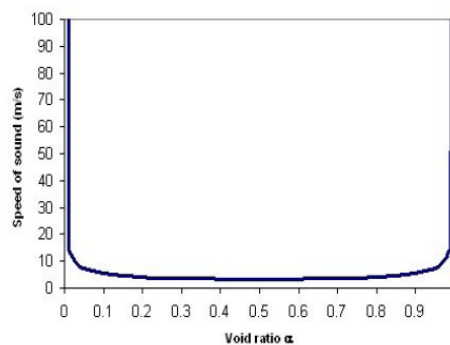


FIGURE I.8 – Vitesse du son sans transfert dans un mélange liquide/vapeur

- Forts gradients de masse volumique et de pression.
Pour de l'eau le rapport entre ρ_l et ρ_v est de 50000.
- Interaction turbulence-cavitation.
Des effets de compressibilité et d'anisotropie sur le champ turbulent se produisent.
- Instabilités de poche et instationnarités périodiques ou non.
Selon les conditions de l'écoulement (vitesse, incidence...) et le paramètre de cavitation $\sigma_\infty = \frac{P_\infty - P_{vap}}{0.5\rho_\infty U_\infty^2}$, différents régimes sont observés.

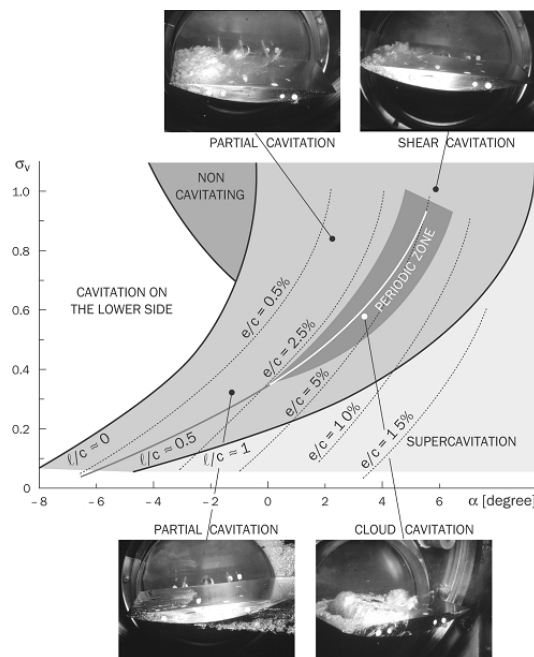


FIGURE I.9 – Cartographie des régimes de poche sur hydrofoil

- Effets tridimensionnels.
La topologie des poches de cavitation est complètement tridimensionnelle (même en géométrie 2D).



FIGURE I.10 – Poche tridimensionnelle sur hydrofoil

- Pour certains fluides (dits thermosensibles), la cavitation est non isotherme ce qui induit un couplage avec la thermique.

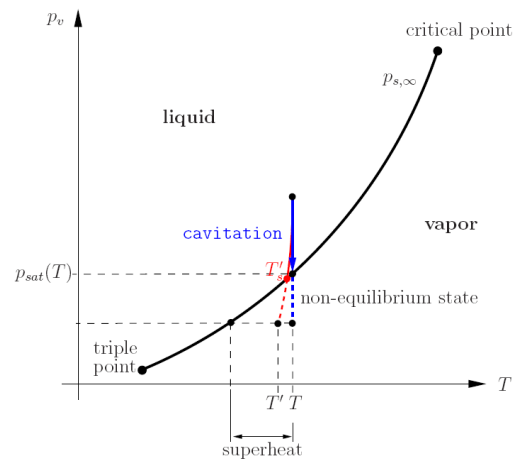


FIGURE I.11 – Cavitation non isotherme

Chapitre II

Modélisation des écoulements liquide-vapeur

II.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre seulement au cas des écoulements diphasiques gaz-liquide. On distingue deux grandes approches :

- les méthodes directes ou à suivi d'interface
- les méthodes moyennées ou de diffusion de l'interface

II.1.1 Les méthodes de résolution directe

Les méthodes dites de résolution directe permettent de résoudre toutes les échelles spatiales et temporelles des écoulements diphasiques. Ce sont des méthodes qui, tout en résolvant les équations de Navier-Stokes, reconstruisent les interfaces et décrivent leur propagation.

Il existe différents moyens de représenter l'évolution spatio-temporelle d'une interface :

- Front tracking (lagrangien)
- Level Set (eulérien)
- Volume Of Fluid (eulérien)

Le changement de phase est un phénomène difficile à prendre en compte dans ces méthodes, car il fait alors apparaître plusieurs vitesses au niveau de l'interface (vitesses des phases plus vitesse de l'interface). De plus, la reconstruction de l'interface en écoulements tridimensionnels peut s'avérer difficile et coûteuse en temps de calcul.

II.1.2 Les méthodes de résolution moyennée

Le point de départ de ces méthodes est l'utilisation des lois de conservation instantanées de la mécanique des fluides pour chaque phase. Les interfaces apparaissent comme des surfaces de discontinuité pour les différentes propriétés du fluide, les bilans fondamentaux s'y expriment donc sous la forme de "relations de saut".

Il existe de nombreuses manières de "moyenner". On peut effectuer des moyennes des lois de conservation :

- dans l'espace
- dans le temps
- statistiquement sur un ensemble de mesures
- ou par une combinaison des précédentes (espace/temps, statistique/espace...).

De manière similaire à l'utilisation de l'approche RANS pour les écoulements monophasiques turbulents, la moyenne temporelle est très utilisée pour les écoulements diphasiques, particulièrement s'ils sont turbulents. En effet, les phénomènes de transport étant fortement dépendant des fluctuations locales des variables, il est plus facile dans ce cas de lier les lois d'état et de comportement nécessaires à la fermeture du problème avec des mesures expérimentales [49].

II.2 Bilans globaux

Considérons un volume matériel $\mathcal{V}(t)$ composé de deux volumes non matériels $\mathcal{V}_1(t)$ et $\mathcal{V}_2(t)$ occupés par deux phases différentes 1 et 2. Ces deux volumes non matériels sont délimités par des surfaces $a_1(t)$ et $a_2(t)$ également matérielles et une surface $a_i(t)$ séparant les deux phases : l'interface à travers laquelle auront lieu les échanges entre phases. La courbe $C(t)$ correspond à l'intersection de l'interface $a_i(t)$ avec le volume $\mathcal{V}(t)$ (Figure II.1).

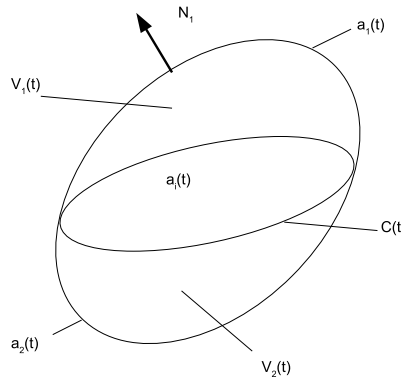


FIGURE II.1 – Schéma volume matériel $\mathcal{V}(t)$ et aire interfaciale a_i

Le bilan de masse exprime que la masse contenue dans le volume matériel $\mathcal{V}(t)$ ne varie pas dans le temps, soit (d/dt désigne la dérivée particulière) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 d\mathcal{V} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Le bilan de qdm exprime que le taux de variation dans le temps de la qdm linéaire du fluide contenu dans le volume matériel \mathcal{V} est égal à la somme des forces extérieures agissant sur le fluide. Ces forces se composent :

- des forces de volume agissant sur $\mathcal{V}_1(t)$ et $\mathcal{V}_2(t)$

- des forces de surface agissant sur $a_1(t)$ et $a_2(t)$ ($a_i(t)$ est intérieure à \mathcal{V})
- des forces de ligne agissant sur $C(t)$ (résultant de la tension de surface σ).

En appelant :

F_1 et F_2 les forces volumiques extérieures par unité de masse

\mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 les tenseurs des contraintes sur les surfaces a_1 et a_2

n_k le vecteur unitaire normal aux surfaces délimitant le volume \mathcal{V}_k (orienté vers l'extérieur)

σ la tension interfaciale agissant sur la ligne $C(t)$ où les deux phases sont en contact entre elles et avec l'extérieur

N le vecteur unitaire normal à $C(t)$ situé dans le plan tangent à l'interface a_i (N orienté vers l'extérieur)

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 v_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 v_2 d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 F_1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 F_2 d\mathcal{V} \\ &+ \int_{a_1(t)} \mathbb{T}_1 \cdot n_1 dS + \int_{a_2(t)} \mathbb{T}_2 \cdot n_2 dS + \int_{C(t)} \sigma N dl \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Le bilan d'énergie totale (interne + cinétique) exprime que le taux de variation dans le temps de l'énergie totale du volume matériel est égal à la puissance des forces extérieures (de volume, de surface, de ligne) et des flux de chaleur entrant dans $\mathcal{V}(t)$ à travers les surfaces extérieures $a_1(t)$ et $a_2(t)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 F_1 \cdot v_1 d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 F_2 \cdot v_2 d\mathcal{V} + \int_{a_1(t)} (\mathbb{T}_1 \cdot n_1) \cdot v_1 dS + \int_{a_2(t)} (\mathbb{T}_2 \cdot n_2) \cdot v_2 dS \\ &+ \int_{C(t)} \sigma N \cdot v_i dl - \int_{a_1(t)} q_1 \cdot n_1 dS - \int_{a_2(t)} q_2 \cdot n_2 dS \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

où v_i est la vitesse de déplacement d'un point de l'interface (vitesse non matérielle a priori).

A l'instant t , on peut représenter l'interface par une relation du type :

$$f(x, t) = 0 \quad \text{x est un point de l'interface} \quad (\text{II.4})$$

Alors à $t + dt$, on doit avoir $f(x + v_i dt, t + dt) = 0$

Or on a : $\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \cdot \nabla f = 0$ et n un vecteur normal à a_i est défini par : $n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

II.3 Les équations locales instantanées

On transforme les bilans intégraux de façon à ne faire apparaître que des intégrales volumiques sur \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 et une intégrale surfacique sur a_i . Les intégrands des termes volumiques nous fourniront alors les équations locales instantanées phasiques (c'est-à-dire valable dans les différentes phases) alors que l'intégrand du terme surfacique (sur a_i) nous fournira les relations de saut valables uniquement sur les interfaces. Pour cela, on utilise les lois mathématiques suivantes :

- Règle de Leibnitz

Pour un volume quelconque $\mathcal{V}(t)$, délimité par une surface $a(t)$ dont les points se déplacent à la vitesse v_a , on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} f(M, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(M, t) d\mathcal{V} + \int_{a(t)} f v_a \cdot n dS \quad (\text{II.5})$$

où n est un vecteur unitaire normal à la surface a , orienté par convention positivement vers l'extérieur de \mathcal{V} .

- Théorème du transport de Reynolds

Pour une fonction f_a définie sur la surface $a(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)} f_a dS = \int_{a(t)} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} + f_a \nabla \cdot v_a \right) dS \quad (\text{II.6})$$

- Théorème de Gauss

$$\int_{a(t)} P n dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla P d\mathcal{V} \quad \text{pour un scalaire P} \quad (\text{II.7})$$

$$\int_{a(t)} V \cdot n dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot V d\mathcal{V} \quad \text{pour un vecteur V} \quad (\text{II.8})$$

$$\int_{a(t)} T \cdot n dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot T d\mathcal{V} \quad \text{pour un tenseur T} \quad (\text{II.9})$$

II.3.1 Equation locale instantanée de la masse

On part du bilan global sur le volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \rho_2 d\mathcal{V} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Utilisons la relation (II.5) pour exprimer $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_k} \rho_k d\mathcal{V}$ soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_k} \rho_k d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{a_k} \rho_k v_{ak} \cdot n_k dS + \int_{a_i} \rho_k v_i \cdot n_k dS \quad (\text{II.11})$$

et comme a_k est une surface matérielle $v_{ak} = v_k =$ vitesse de la phase k en un point de a_k .

Alors, en utilisant (II.8), on peut écrire :

$$\int_{a_k} \rho_k v_k \cdot n_k dS = \int_{\mathcal{V}_k} \nabla \cdot \rho_k v_k d\mathcal{V} - \int_{a_i} \rho_k v_k \cdot n_k dS \quad (\text{II.12})$$

Le bilan global de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{V}_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_1 v_1 \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_2 v_2 \right) d\mathcal{V} + \int_{a_i} [\rho_1 (v_i - v_1) \cdot n_1 + \rho_2 (v_i - v_2) \cdot n_2] dS = 0$$

qui se décline en :

- les équations de continuité phasiques (c'est-à-dire valables uniquement dans les volumes occupés par les phases)

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k v_k) = 0 \quad \text{pour } k=1,2 \quad (\text{II.13})$$

- le bilan interfacial (valable uniquement sur l'interface a_i cf. Figure II.1)

$$\rho_1(v_1 - v_i).n_1 + \rho_2(v_2 - v_i).n_2 = 0 \quad (\text{II.14})$$

On pose $\dot{m}_k = \rho_k(v_k - v_i).n_k$ le débit massique par unité de surface de transfert de la phase k vers la phase k' . La relation de saut permet donc d'écrire : $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$

II.3.2 Equation locale instantanée de la qdm

Equation pour la phase $k=1,2$:

$$\frac{\partial \rho_k v_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k v_k^2) = \rho_k F_k + \operatorname{div} \mathbb{T}_k \quad (\text{II.15})$$

Bilan interfacial :

$$\dot{m}_1 v_1 + \dot{m}_2 v_2 - \mathbb{T}_1.n_1 - \mathbb{T}_2.n_2 - (\nabla_s.n)\sigma n = 0 \quad (\text{II.16})$$

avec $\nabla_s.n = -2H$ où H représente la courbure moyenne de l'interface : $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ R_1 et R_2 étant les 2 rayons de courbure principaux pris algébriquement sur la normale n à l'interface quelle que soit son orientation, c'est-à-dire n_1 ou n_2 . Ce terme correspond à la force interfaciale due à la présence de la tension de surface.

II.3.3 Equation locale instantanée d'énergie totale

Equation pour la phase $k=1,2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \left(e_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \operatorname{div} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_k \right] = \rho_k F_k.v_k + \operatorname{div}(\mathbb{T}_k.v_k - q_k) \quad (\text{II.17})$$

Bilan interfacial :

$$\dot{m}_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + \dot{m}_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + q_1.n_1 + q_2.n_2 - (\mathbb{T}_1.n_1).v_1 - (\mathbb{T}_2.n_2).v_2 = 0 \quad (\text{II.18})$$

II.4 Bilans moyennés

Pour plus de détail sur ces bilans moyennés, on peut consulter Ishii [49] et Delhaye [28, 31].

II.4.1 Fonction indicatrice de phase

Elle est définie par :

$$X_k(M, t) = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente au point } M \text{ au temps } t \\ 0 & \text{si la phase } k \text{ n'est pas présente en } M \text{ à } t \end{cases}$$

La FIP est "mesurée" par des sondes locales dont la réponse est différente selon la phase dans laquelle elles sont plongées. C'est le cas par exemple des sondes optiques pour les écoulements diphasiques liquide-gaz qui détectent la phase présente dans le volume de mesure (le plus petit possible) par variation de l'indice de réfraction entre le liquide et la vapeur (le signal est transmis hors de la fibre optique lorsque celle-ci est plongée dans la phase liquide alors qu'il est réfléchi si elle est plongée dans la phase gazeuse).

II.4.2 Opérateurs locaux moyennés dans le temps

On s'intéresse à l'évolution des grandeurs phasiques locales pendant un intervalle de temps T autour du temps t courant. Cela revient à "gommer" l'aspect fluctuation, fluctuations résultant des fluctuations au sein des phases ainsi que des passages successifs des interfaces au point considéré. Classiquement, on doit choisir une valeur de T qui soit grande vis-à-vis de l'échelle de temps des fluctuations turbulentes et petite vis-à-vis de l'échelle de temps de l'écoulement. Sur cet intervalle de temps T , la phase k est présente au point M considéré pendant un intervalle de temps $T_k(x, t)$ (temps de présence cumulé de la phase k en M entre $t - T/2$ et $t + T/2$).

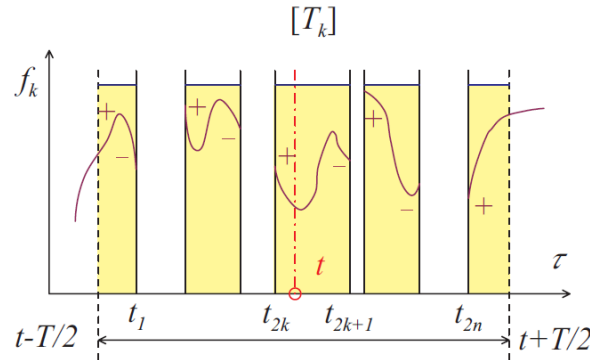


FIGURE II.2 – Représentation d'une fonction définie sur un intervalle de temps. T est le temps d'intégration de la fonction $f(x, t)$. $[T]$ est l'intervalle de temps de largeur T centrée sur le temps de prise de moyenne, t . $[T_k]$ est l'ensemble des intervalles de temps où la phase k est présente au point considéré. on note t_{2k} les instants où le point considéré entre dans la phase k et t_{2k+1} les instants où il en sort.

Les valeurs locales peuvent alors être moyennées soit sur l'intervalle de temps T , soit sur l'intervalle $T_k(x, t)$. On définit pour une grandeur $G(x, t)$:

$$\bar{G} = \frac{1}{T} \int_{[T]} G(x, \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \bar{G}_k = \frac{1}{T} \int_{[T]} G_k(x, \tau) d\tau \quad (\text{II.19})$$

$$\text{la moyenne sur le temps de présence } T_k \text{ se note : } \bar{G}_k^X \text{ ou } \bar{\bar{G}}_k = \frac{1}{T_k} \int_{[T_k]} G_k(x, \tau) d\tau \quad (\text{II.20})$$

On définit alors le **taux de présence local** $\alpha_k(x, t)$ par :

$$\alpha_k(x, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} X_k(M, \tau) d\tau = \bar{X}_k(M, t) = \frac{T_k}{T} = \frac{\bar{\bar{G}}_k}{\bar{G}_k} \quad (\text{II.21})$$

Il en découle les relations suivantes : $\bar{G} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 = \alpha_1 \bar{\bar{G}}_1 + \alpha_2 \bar{\bar{G}}_2$.

Comme $T = T_1 + T_2$, on a l'égalité : $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Pour des grandeurs massiques $G = \rho\phi$, il est défini **une moyenne pondérée par la masse** :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}_k = \frac{\overline{\rho_k\phi_k}}{\bar{\rho}_k} = \frac{\overline{\overline{\rho_k\phi_k}}}{\overline{\overline{\rho_k}}} \quad (\text{II.22})$$

On montre la relation suivante : $\tilde{\phi} = \frac{\sum \alpha_k \overline{\overline{\rho_k\phi_k}}}{\sum \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}}} = \frac{\sum \overline{\overline{\rho_k\phi_k}}}{\sum \overline{\overline{\rho_k}}}$.

En particulier, on a l'égalité : $\bar{\rho} = \sum_k \overline{\overline{\rho_k}} = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}}$

II.4.3 Décomposition des variables pondérées par la masse

Les variables sont décomposées en une partie moyenne en temps pondérée par la masse et une fluctuation diphasique et turbulente (équivalent de la moyenne de Favre). On a ainsi, pour une grandeur massique ϕ_k :

$$\rho_k = \overline{\overline{\rho_k}} + \rho'_k, \quad v_k = \widetilde{v}_k + v''_k, \quad \phi_k = \widetilde{\phi}_k + \phi''_k \quad (\text{II.23})$$

$$\overline{\overline{\rho'_k}} = 0, \quad \overline{\overline{\rho_k v''_k}} = 0, \quad \overline{\overline{\rho_k \phi''_k}} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Propriétés des moyennes : $\overline{(\widetilde{G})} = \overline{G}$; $\widetilde{\widetilde{G}} = \widetilde{G}$; $\overline{(\widetilde{G})} = \widetilde{G}$; $\overline{(\widetilde{G}_k)} = \widetilde{G}_k$; $\overline{(\overline{\overline{G_k}})} = \overline{\overline{G_k}}$

On montre les relations suivantes :

$$\overline{G_k} = \alpha_k \overline{\overline{G_k}} = \alpha_k (\widetilde{G}_k + \overline{\overline{G'_k}}) \quad (\text{II.25})$$

$$\overline{G'_k} = \overline{G_k} - \widetilde{G}_k = \alpha_k \overline{\overline{G'_k}} - (1 - \alpha_k) \widetilde{G}_k \quad (\text{II.26})$$

II.4.4 Opérateur de moyenne d'ensemble

La fonction indicatrice de phase $X_k(M, t)$ obéit à l'équation topologique :

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + v_i \cdot \text{grad } X_k = 0 \quad (\text{II.27})$$

X_k étant constante par morceau, cette équation est non triviale aux points situés à l'interface. On introduit une processus de moyenne d'ensemble $\mathcal{E}(\cdot)$ [3, 33], qui vérifie la règle de Gauss (au sens des distributions) :

$$\mathcal{E} \left(X_k \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \mathcal{E} \left(\frac{\partial X_k f}{\partial x} \right) - \mathcal{E} \left(f_{i,k} \frac{\partial X_k}{\partial x} \right) \quad (\text{II.28})$$

et la règle de Liebzniz :

$$\mathcal{E} \left(X_k \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \mathcal{E} \left(\frac{\partial X_k f}{\partial t} \right) - \mathcal{E} \left(f_{i,k} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right) \quad (\text{II.29})$$

où f est une fonction régulière par morceau.

En employant ces règles de calcul pour le système des équations d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(X_k \rho_k)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E}(X_k \rho_k u_k) &= \mathcal{E}(\rho_k (u_k - v_i) \cdot \operatorname{grad} X_k) \\ \frac{\partial \mathcal{E}(X_k \rho_k u_k)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E}(X_k \rho_k u_k \otimes u_k + X_k P_k) &= \mathcal{E}((\rho_k u_k (u_k - v_i) + P_k) \cdot \operatorname{grad} X_k) \\ \frac{\partial \mathcal{E}(X_k \rho_k E_k)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{E}(X_k \rho_k E_k u_k + X_k P_k u_k) &= \mathcal{E}((\rho_k E_k (u_k - v_i) + P_k u_k) \cdot \operatorname{grad} X_k)\end{aligned}$$

On définit alors :

la fraction de volume de la phase k : $\alpha_k = \mathcal{E}(X_k)$,

la densité moyenne : $\langle \rho_k \rangle = \frac{\mathcal{E}(X_k \rho)}{\alpha_k}$,

la vitesse moyenne : $\langle u_k \rangle = \frac{\mathcal{E}(X_k \rho u)}{\alpha_k \langle \rho_k \rangle}$, etc.

Les équations d'Euler moyennes pour chaque phase s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \langle \rho_k \rangle \langle u_k \rangle) &= \mathcal{E}(\rho_k (u_k - v_i) \cdot \operatorname{grad} X_k) \\ \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle \langle u_k \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \langle \rho_k \rangle \langle u_k \rangle \otimes \langle u_k \rangle + \alpha_k \langle P_k \rangle) &= \mathcal{E}((\rho_k u_k (u_k - v_i) + P_k) \cdot \operatorname{grad} X_k) \\ \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle \langle E_k \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \langle \rho_k \rangle \langle E_k \rangle \langle u_k \rangle + \alpha_k \langle P_k \rangle \langle u_k \rangle) &= \mathcal{E}((\rho_k E_k (u_k - v_i) + P_k u_k) \cdot \operatorname{grad} X_k)\end{aligned}$$

auxquelles il faut ajouter l'équation topologique

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathcal{E}(v_i \cdot \operatorname{grad} X_k) = 0 \quad (\text{II.30})$$

Chapitre III

Equation de bilan moyennée

III.1 Equations locales moyennées sur le temps de présence

Nous présentons en premier lieu deux outils mathématiques nécessaires pour ce calcul.

III.1.1 La méthode

Considérons un point $M(x, t)$ dans un écoulement diphasique et un intervalle de temps $[t - T/2; t + T/2]$ centré sur un instant t . Soit $T_k(x, t)$ le temps de présence de la phase k au point x pendant l'intervalle de temps T et $\alpha_k(x, t)$ le taux de présence local de la phase k . Intégrons l'équation de bilan de masse locale instantanée de la phase k sur le temps de présence T_k de la phase k au point x :

$$\int_{T_k(x,t)} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dt + \int_{T_k(x,t)} \text{div}(\rho_k v_k) dt = 0 \quad (\text{III.1})$$

Du fait de la présence d'interfaces, la permutation des opérateurs de dérivée et d'intégration fait apparaître des termes supplémentaires. Pour transformer l'équation, on a recouru aux formes limites de la règle de Leibniz et du théorème de Gauss.

III.1.1.1 Forme limite de la règle de Leibniz

Cette forme limite permet de permuter les opérateurs différentiels du premier terme de l'équation. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{T_k(x,t)} f_k(x, t) dt = \int_{T_k(x,t)} \frac{\partial f_k}{\partial t} dt + \sum_{\text{disc. de [T]}} \frac{1}{|v_i \cdot n_k|} f_k v_i \cdot n_k \quad (\text{III.2})$$

où la somme finie du deuxième membre porte sur toutes les discontinuités de la fonction f_k appartenant à l'intervalle de temps T , i.e. sur toutes les interfaces passant au point x pendant l'intervalle de temps T . On introduit δ_I une distribution de Dirac associée à l'interface, on a la relation :

$$\sum_{\text{disc. de [T]}} \frac{1}{T |v_i \cdot n_k|} = \delta_I \quad (\text{III.3})$$

III.1.1.2 Forme limite de la règle de Gauss

Cette forme limite permet de permuter les opérateurs différentiels du second terme de l'équation. Elle s'écrit :

$$\int_{T_k(x,t)} \operatorname{div} B_k(x,t) dt = \operatorname{div} \int_{T_k(x,t)} B_k dt + \sum_{\text{disc.}} \frac{1}{|v_i \cdot n_k|} n_k \cdot B_k \quad (\text{III.4})$$

III.1.2 Bilan de masse moyenné sur le temps de présence T_k de la phase k

Appliquons les formes limites de la règle de Leibniz et du théorème de Gauss à l'équation de bilan de masse locale instantanée. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{T_k(x,t)} \rho_k dt - \sum_{\text{disc.}} \frac{1}{|v_i \cdot n_k|} \rho_k v_i \cdot n_k + \\ \operatorname{div} \int_{T_k(x,t)} \rho_k v_k dt + \sum_{\text{disc.}} \frac{1}{|v_i \cdot n_k|} \rho_k v_k \cdot n_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

En introduisant l'opérateur de moyenne temporelle cette équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_k \overline{\rho_k}) + \operatorname{div} (T_k \overline{\rho_k v_k}) + \sum_{\text{disc.}} \frac{1}{|v_i \cdot n_k|} \rho_k (v_k - v_i) \cdot n_k = 0 \quad (\text{III.6})$$

En introduisant $\dot{m}_k = \rho_k (v_k - v_i) \cdot n_k$ le débit massique par unité de surface de transfert de la phase k vers la phase k' et la taux de présence local α_k , nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \overline{\rho_k}) + \operatorname{div} (\alpha_k \overline{\rho_k v_k}) = \Gamma_k \quad \text{avec} \quad \Gamma_k = - \sum_{\text{disc.}} \frac{\dot{m}_k}{T |v_i \cdot n_k|} \quad (\text{III.7})$$

où Γ_k est le taux local de production de masse de phase k par unité de volume. Ce terme représente les échanges de masse par évaporation ou condensation sur l'interface. Il est inconnu et il faudra l'exprimer en fonction des variables du problème par une relation de fermeture appropriée pour clore le système d'équations. On a la relation : $\sum_k \Gamma_k = 0$.

Remarques : Nous pouvons obtenir une équation de bilan de masse pour le mélange en additionnant membre à membre les équations de bilan de masse écrites pour chacune des phases, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \overline{\rho_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2}) + \operatorname{div} (\alpha_1 \overline{\rho_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2}) = 0 \quad (\text{III.8})$$

III.1.3 Bilan de qdm moyenné sur le temps de présence T_k de la phase k

La méthode utilisée pour le bilan de masse peut être appliquée à l'équation de bilan de quantité de mouvement, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \overline{\rho_k v_k}) + \operatorname{div} (\alpha_k \overline{\rho_k v_k v_k}) &= \operatorname{div} (\alpha_k \overline{\mathbb{T}_k}) + \alpha_k \overline{\rho_k F_k} \\ &- \sum_{\text{disc.}} \frac{(\dot{m}_k v_k - n_k \cdot \mathbb{T}_k)}{T |v_i \cdot n_k|} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où le terme de somme discrète représente l'apport de quantité de mouvement lié au changement de phase et l'action cumulée sur l'intervalle de temps $[T]$ des efforts appliqués aux interfaces sur la phase k .

III.1.4 Bilan d'énergie totale moyenné sur le temps de présence T_k

Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right)} \right] + \operatorname{div} \left[\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_k} \right] &= \overline{\alpha_k \rho_k F_k \cdot v_k} + \operatorname{div} \left(\alpha_k \overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k} \right) \\ &- \operatorname{div} \left(\alpha_k \overline{q_k} \right) - \sum_{\text{disc.}} \frac{\dot{m}_k \left(e_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) - (n_k \cdot \mathbb{T}_k) \cdot v_k + q_k \cdot n_k}{T |v_i \cdot n_k|} \end{aligned}$$

où le terme de somme discrète représente l'apport d'énergie totale au travers de l'interface lié au changement de phase, la contribution du flux de chaleur à l'interface et la puissance des contraintes appliquées à l'interface.

III.2 Les différents modèles

Différentes classes de modèles sont présents dans la littérature en fonction du nombre de lois de conservations traitées (de 3 à 7 équations) et des hypothèses effectuées sur la thermodynamique et le glissement entre les phases : modèle équilibré/modèle relaxé, modèle homogène/modèle à deux vitesses, modèle 2-fluide/modèle 1-fluide... On distingue :

- Les modèles 2-fluides à 6 ou 7 équations

Ils sont composés de trois lois de conservation pour chaque phase et éventuellement d'une équation topologique. Ils peuvent prendre explicitement en compte les effets de déséquilibres thermodynamiques entre les phases (déséquilibre de la pression, de la température, de l'enthalpie de Gibbs) ainsi que le glissement entre les phases. Cependant, ils restent difficile à utiliser en écoulements industriels (turbomachines). On citera par exemple le modèle à 7 équations développé par Saurel [60] et le modèle à 6 équations développé par EDF dans le code Neptune [61].

- Les modèles réduits à 5 équations

Ce sont des modèles obtenus par réduction d'un modèle 2-fluide en supposant l'équilibre des pressions et des vitesses entre les phases. Le modèle le plus connu est celui de Kapila [50]. Il est composé de 4 lois de conservations (2 masses, qdm du mélange et énergie du mélange) complétées par une équation topologique (non conservative) pour la fraction volumique de gaz. Ce type de modèle implique deux températures, ce qui permet de restituer des effets de déséquilibre thermique (voir par exemple [73]).

- Les modèles relaxés à 4 équations

Avec hypothèse d'équilibre thermique entre les phases, des modèles à 4 équations sont développés. Pour des applications en ébullition et évaporation flash, un modèle dit relaxé a été développé : le modèle HRM (Homogeneous Relaxation Model). Il est composé de trois lois de conservation pour le mélange plus une équation pour le taux de vide. Cette dernière contient un terme source de relaxation. Un temps de relaxation est introduit : il quantifie le temps pour que le système regagne l'état d'équilibre. Ce temps est difficile à déterminer et est estimé à partir de données expérimentales [10, 32]. Une autre formulation du terme de relaxation a été proposée par Helluy [47], basé sur un problème d'optimisation de l'entropie

du mélange.

Une autre famille de modèles est massivement utilisée en cavitation appelée modèle de transport de taux de vide (TTV). L'équation pour le taux de vide inclut un terme source qui modélise la condensation et l'évaporation. Il est déterminé par ajustements successifs pour retrouver des formes de poches observées expérimentalement. Ce terme source introduit des constantes ajustables, on trouvera différents jeux de valeurs dans [79]. La cohérence thermodynamique de ces modèles est franchement bancal [45] et la dépendance aux constantes est très forte.

- Les modèles de mélange homogène ou 1-fluide

Ils sont composés de trois lois de conservation écrites pour le mélange et reposent sur une hypothèse de non glissement entre les phases. Avec l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, ils constituent les modèles HEM (Homogeneous Equilibrium Model). Une équation d'état est nécessaire pour fermer le système (gaz raide, polynôme, barotrope, sinusoidale,...).

Le tableau suivant synthétise les différentes classes de modèles :

modèles	7 équations	5 équations	4 équations	3 équations
équations	2 masses 2 QdM 2 énergies + α	2 masses 1 QdM 1 énergie + α	1 masse 1 QdM 1 énergie + α	1 masse 1 QdM 1 énergie
caractéristique	2 pressions 2 vitesses 2 températures	1 pression 1 vitesse 2 températures	1 pression 1 vitesse 1 température	1 pression 1 vitesse 1 température
dénomination	2-fluide	réduit	HRM ou TTV	1-fluide HEM

III.3 Modèle 1-fluide ou modèle de mélange homogène

A partir des équations de bilan moyennées en temps, on peut établir des équations de bilan pour le mélange en additionnant membre à membre les équations écrites pour chacune des phases. On introduit des variables de mélange : énergie interne de mélange, vitesse de mélange, pression de mélange, tenseur des contraintes de mélange...

III.3.1 Variables thermodynamiques de mélange

$$\text{masse volumique de mélange} : \rho_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{pression de mélange} : P_m = \alpha_1 \overline{P_1} + \alpha_2 \overline{P_2} \quad (\text{III.11})$$

$$\text{énergie interne de mélange} : \rho_m e_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} \widetilde{e_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2} \widetilde{e_2} \quad (\text{III.12})$$

$$\text{enthalpie de mélange} : \rho_m h_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} \widetilde{h_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2} \widetilde{h_2} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{entropie de mélange} : \rho_m s_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} \widetilde{s_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2} \widetilde{s_2} \quad (\text{III.14})$$

On peut montrer la relation suivante : $h_m = e_m + \frac{P_m}{\rho_m}$.

III.3.2 Vitesses de mélange, vitesse relative, vitesse de diffusion

Différents vitesses sont introduites. On définit une vitesse du centre de masse du mélange v_m et une vitesse du centre de volume du mélange j :

$$\rho_m v_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} \tilde{v}_1 + \alpha_2 \overline{\rho_2} \tilde{v}_2 = \alpha_1 \overline{\rho_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2} \quad (\text{III.15})$$

$$j = \alpha_1 \tilde{v}_1 + \alpha_2 \tilde{v}_2 \quad (\text{III.16})$$

La vitesse relative v_r entre les phases se définit à partir des vitesses moyennes des phases :

$$v_r = \tilde{v}_2 - \tilde{v}_1 \quad (\text{III.17})$$

On introduit des écarts de vitesse des phases par rapport aux vitesses de mélange. La vitesse de diffusion pour chaque phase V_{km} est la vitesse relative par rapport à la vitesse du centre de masse du mélange. La vitesse de dérive ou "drift" pour chaque phase est la vitesse relative par rapport à la vitesse du centre de volume du mélange. Leurs expressions :

$$V_{km} = \tilde{v}_k - v_m \quad (\text{III.18})$$

$$V_{kj} = \tilde{v}_k - j \quad (\text{III.19})$$

La relation suivante lie les vitesses de mélange :

$$j = v_m + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{\overline{\rho_1} - \overline{\rho_2}}{\rho_m} \right) v_r \quad (\text{III.20})$$

Si la vitesse relative est négligée alors on a : $V_{1m} = V_{2m} = V_{1j} = V_{2j} = v_r = 0$ et $v_m = j = \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$. On parle de champ de vitesse homogène.

III.3.3 Tenseur des contraintes du mélange

La bilan de qdm du mélange fait apparaître la somme pondérée des tenseurs des contraintes phasiques moyens :

$$\alpha_1 \overline{\mathbb{T}}_1 + \alpha_2 \overline{\mathbb{T}}_2 = \alpha_1 \overline{\tau}_1 + \alpha_2 \overline{\tau}_2 - \left(\alpha_1 \overline{P}_1 + \alpha_2 \overline{P}_2 \right) Id \quad (\text{III.21})$$

Le fluide est supposé newtonien et les fluctuations de viscosité dynamique phasique μ'_k sont négligées. Une expression pour les tenseurs $\overline{\tau}_k$ en supposant les phases incompressibles est :

$$\overline{\tau}_k = \overline{\mu}_k \left[\text{grad } \tilde{v}_k + (\text{grad } \tilde{v}_k)^t - \frac{2}{3} \text{div } \tilde{v}_k Id + \frac{1}{\alpha_k} \sum_j a_{ij} (n_k v'_k + v'_k n_k) \right] \quad (\text{III.22})$$

où a_{ij} est l'aire interfaciale pour la j ème interface. Le premier terme est le tenseur des déformations moyen S_k pour la phase k . Le terme supplémentaire s'appelle le tenseur des déformations interfaciales S_{ki} pour la phase k . Il devient important quand la différence de vitesse entre la vitesse interfaciale et la vitesse moyenne est grande.

En négligeant S_{ki} et avec l'hypothèse de champ de vitesse homogène, il vient :

$$\mathbb{T}_m = \alpha_1 \overline{\mathbb{T}_1} + \alpha_2 \overline{\mathbb{T}_2} = \tau_m - P_m Id \quad (\text{III.23})$$

$$\tau_m = 2\mu_m \left(S_m - \frac{1}{3} \text{div}(v_m) Id \right) \quad (\text{III.24})$$

$$\mu_m = \alpha_1 \overline{\mu_1} + \alpha_2 \overline{\mu_2} \quad (\text{III.25})$$

$$S_m = \frac{1}{2} \left[\vec{\text{grad}} v_m + (\vec{\text{grad}} v_m)^t \right] \quad (\text{III.26})$$

où μ_m désigne la viscosité dynamique de mélange, τ_m le tenseur des contraintes visqueuses de mélange et S_m le tenseur des déformations de mélange.

III.3.4 Flux de chaleur de mélange

Le bilan d'énergie totale du mélange fait apparaître la somme pondérée des flux de chaleur phasiques moyens : $\alpha_1 \overline{q_1} + \alpha_2 \overline{q_2}$.

On suppose que les flux de chaleur phasiques moyens obéissent à la loi de Fourier. De plus, les fluctuations de conductivité thermique phasique λ'_k sont négligées. On peut alors écrire une expression pour le vecteur flux de chaleur $\overline{q_k}$:

$$\overline{q_k} = -\overline{\lambda_k} \left[\vec{\text{grad}} \overline{T_k} + \frac{1}{\alpha_k} \sum_j a_{ij} n_{kj} (T_k - \overline{T_k})_j \right] \quad (\text{III.27})$$

Avec l'hypothèse d'équilibre thermique local à l'interface, i.e. $T_{ki} = T_i$ et en négligeant les fluctuations de températures de l'interface, soit $T_i = \overline{T_i}$, il vient :

$$\overline{q_k} = -\overline{\lambda_k} \left[\vec{\text{grad}} \overline{T_k} - \frac{\vec{\text{grad}} \alpha_k}{\alpha_k} (\overline{T_i} - \overline{T_k}) \right] \quad (\text{III.28})$$

En supposant l'équilibre thermique entre les phases et avec l'interface, on introduit la température de mélange $T_m = \overline{T_i} = \overline{T_1} = \overline{T_2}$. La somme des flux de chaleur phasique s'écrit alors :

$$\alpha_1 \overline{q_1} + \alpha_2 \overline{q_2} = - \left(\alpha_1 \overline{\lambda_1} + \alpha_2 \overline{\lambda_2} \right) \vec{\text{grad}} T_m \quad (\text{III.29})$$

On introduit une conductivité thermique de mélange λ_m définie par $\lambda_m = \alpha_1 \overline{\lambda_1} + \alpha_2 \overline{\lambda_2}$. L'expression du flux de chaleur de mélange est alors :

$$q_m = \alpha_1 \overline{q_1} + \alpha_2 \overline{q_2} = -\lambda_m \vec{\text{grad}} T_m \quad (\text{III.30})$$

III.3.5 Bilan de masse du mélange

La somme des équations de bilan de masse pour les phases s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \overline{\rho_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2}) + \text{div} (\alpha_1 \overline{\rho_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2}) = 0 \quad (\text{III.31})$$

Soit en introduisant les variables de mélange :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div} (\rho_m v_m) = 0 \quad (\text{III.32})$$

III.3.6 Bilan de quantité de mouvement du mélange

La somme des équations de bilan de quantité de mouvement pour les phases s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \overline{\rho_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2}) + \operatorname{div} (\alpha_1 \overline{\rho_1 v_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2 v_2}) = \operatorname{div} (\alpha_1 \overline{T_1} + \alpha_2 \overline{T_2}) + \alpha_1 \overline{\rho_1 F_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 F_2} + M_m \quad (\text{III.33})$$

Soit en introduisant les variables de mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \operatorname{div} (\alpha_1 \overline{\rho_1 v_1 v_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 v_2 v_2}) = \operatorname{div} (\tau_m - P_m Id) + \rho_m F_m + M_m \quad (\text{III.34})$$

où la force volumique de mélange F_m est définie par $\rho_m F_m = \alpha_1 \overline{\rho_1 F_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 F_2}$.

$M_m = \sum_k M_k$ représente le transfert de qdm à travers l'interface (effet de tension de surface, forces de portance et de traînée dues aux sauts de pression et de contraintes visqueuses à l'interface...). La somme des transferts phasiques M_k n'est pas forcément nulle à cause de la variation de la courbure moyenne de l'interface [49]. En présence d'un transfert de masse entre les phases la différence des vitesses est nécessairement perpendiculaire au plan tangent à l'interface. Ceci se traduit par une force par unité de surface qui est normale au plan tangent à l'interface. Si l'on néglige la tension superficielle, la différence entre les phases des résultantes normales du frottement visqueux et de la pression permet d'équilibrer la force induite par le transfert de masse au travers de l'interface. De plus, le terme lié au saut de pression interfaciale devient négligeable quand le champ de vitesse est homogène.

Ainsi, les hypothèses de vitesse homogène et tension de surface négligée entraînent $M_m = 0$.

Reste à expliciter les termes de moyenne de produit $\sum_k \alpha_k \overline{\rho_k v_k v_k}$.

III.3.6.1 Décomposition d'un terme $\overline{\rho \phi v}$

En utilisant la décomposition des variables pondérées par la masse. On peut écrire :

$$\overline{\rho \phi v} = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k \phi_k v_k} = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k \widetilde{\phi}_k \widetilde{v}_k} + \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k \phi_k'' v_k''} \quad (\text{III.35})$$

En introduisant les variables de mélange et les vitesses de diffusion des phases, il vient :

$$\overline{\rho \phi v} = \rho_m \phi_m v_m + \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k \widetilde{\phi}_k V_{km}} + \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k \phi_k'' v_k''} \quad (\text{III.36})$$

Trois termes apparaissent associés à différents mécanismes de transport : un terme de transport du mélange, un terme de transport de $\widetilde{\phi}_k$ dû à la différence de vitesse des phases et un terme de transport dû aux fluctuations diphasiques et turbulentes.

En supposant le champ de vitesse homogène ($V_{km} = 0$) et en faisant $\phi = v$, on aboutit à :

$$\sum_k \alpha_k \overline{\rho_k v_k v_k} = \rho_m v_m^2 + \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k v_k'' v_k''} \quad (\text{III.37})$$

L'expression du bilan de qdm du mélange devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \operatorname{div} (\rho_m v_m v_m + P_m Id) = \operatorname{div} \left(\tau_m - \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k v_k'' v_k''}} \right) + \rho_m F_m \quad (\text{III.38})$$

III.3.7 Bilan d'énergie totale du mélange

La somme des équations de bilan de l'énergie totale pour les phases s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right)}} + \overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right)}} \right] + \operatorname{div} \left[\overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) v_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) v_2}} \right] \\ = \overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 F_1 \cdot v_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 F_2 \cdot v_2}} + \operatorname{div} \left(\overline{\overline{\alpha_1 \mathbb{T}_1 \cdot v_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \mathbb{T}_2 \cdot v_2}} \right) - \operatorname{div} \left(\overline{\overline{\alpha_1 \bar{q}_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \bar{q}_2}} \right) + Q_m \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

$Q_m = \sum_k Q_k$ représente le transfert d'énergie à travers l'interface (transfert d'énergie dû au changement de phase, effet du frottement interfacial, transfert de chaleur interfacial de la forme $h_{ki}(\bar{T}_k - \bar{T}_i) \dots$). Ce terme, comme pour la qdm, peut ne pas être nul à cause de la variation de la courbure moyenne de l'interface [49].

Les hypothèses de champ de vitesse homogène, tension de surface négligée et équilibre thermique des phases entraînent $Q_m = 0$.

Le terme de travail des forces volumiques, supposées constantes ($\widetilde{F}_k = F_k = F_m$), s'écrit :

$$\overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 F_1 \cdot v_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 F_2 \cdot v_2}} = \rho_m F_m \cdot v_m + \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k F \cdot V_{km}}} = \rho_m F_m \cdot v_m \quad (\text{III.40})$$

En utilisant la décomposition de la vitesse ainsi que les vitesses de diffusion phasiques, le terme de travail des contraintes peut s'écrire :

$$\sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k}} = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot (\tilde{v}_k + v_k'')}} = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot (v_m - V_{km})}} + \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k''}} \quad (\text{III.41})$$

Avec l'hypothèse de champ de vitesse homogène, on aboutit à :

$$\sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k}} = \mathbb{T}_m \cdot v_m + \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k''}} \quad (\text{III.42})$$

III.3.7.1 Energie interne apparente

On définit l'énergie interne apparente moyenne $\widetilde{\mathcal{E}}_k$ de la phase k comme la somme de l'énergie interne moyenne et de l'énergie cinétique turbulente moyenne. On définit alors l'énergie interne apparente du mélange \mathcal{E}_m et l'énergie totale apparente du mélange E_m :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_k = \tilde{e}_k + \frac{\widetilde{v_k''^2}}{2} \quad \text{avec } k_k = \frac{\widetilde{v_k''^2}}{2} \quad (\text{III.43})$$

$$\overline{\overline{\rho_k \widetilde{\mathcal{E}}_k}} = \overline{\overline{\rho_k e_k}} + \frac{\overline{\overline{\rho_k v_k'' v_k''}}}{2} \quad (\text{III.44})$$

$$\rho_m \mathcal{E}_m = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k \widetilde{\mathcal{E}}_k}} = \rho_m e_m + \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k v_k'' v_k''}} \quad (\text{III.45})$$

$$\rho_m E_m = \rho_m \left(\mathcal{E}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \quad (\text{III.46})$$

En faisant intervenir les variables de mélange et en supposant un champ de vitesse homogène, le premier terme de l'équation de bilan s'écrit :

$$\overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)}} + \overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right)}} = \rho_m \left(e_m + \frac{v_m^2}{2} \right) + \sum_k \alpha_k \frac{\overline{\overline{\rho_k v_k'' v_k''}}}{2} = \rho_m E_m \quad (\text{III.47})$$

Reste à expliciter le terme $\sum_k \overline{\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) v_k}}$.

On utilise la relation (III.36) en faisant $\phi = e + v^2/2$ et en supposant un champ de vitesse homogène :

$$\sum_k \overline{\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) v_k}} = \rho_m \left(e_m + \frac{v_m^2}{2} \right) v_m + \sum_k \overline{\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)'' v_k''}} \quad (\text{III.48})$$

L'expression du bilan d'énergie totale apparente de mélange est alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m E_m) + \text{div} (\rho_m E_m v_m) &= \rho_m F_m \cdot v_m + \text{div} (v_m \tau_m - q_m) - \text{div} (P_m v_m) \\ &- \text{div} \left(\sum_k \overline{\overline{\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)'' v_k''}} - \sum_k \overline{\overline{\alpha_k \mathbb{T}_k \cdot v_k''}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

III.3.8 Termes de turbulence

Dans les bilans de qdm et d'énergie apparaissent des termes de fluctuations turbulentes. On introduit un tenseur turbulent moyen τ^T et un flux de chaleur turbulent moyen q^T :

$$q^T = \sum_k \alpha_k q_k^T = \sum_k \alpha_k \left[\overline{\overline{\rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)'' v_k''}} - \overline{\overline{\mathbb{T}_k \cdot v_k''}} \right] \quad (\text{III.50})$$

$$\tau^T = \sum_k \alpha_k \tau_k^T = - \sum_k \overline{\overline{\alpha_k \rho_k v_k'' v_k''}} \quad (\text{III.51})$$

On utilise l'hypothèse de Boussinesq pour évaluer les tenseurs turbulents phasiques τ_k^T en introduisant une viscosité turbulente phasique μ_k^T . En sommant les contributions pour chaque phase, une viscosité turbulente de mélange apparaît : $\mu_m^T = \alpha_1 \mu_1^T + \alpha_2 \mu_2^T$.

De même pour les flux de chaleur turbulents phasiques, on introduit une conductivité thermique turbulente phasique λ_k^T . La somme des contributions pour chaque phase fait apparaître une conductivité turbulente de mélange : $\lambda_m^T = \alpha_1 \lambda_1^T + \alpha_2 \lambda_2^T$.

Une hypothèse de nombre de Prandtl turbulent phasique constant (le même pour les deux phases) permet de relier ces deux scalaires :

$$\lambda_m^T = \sum_k \alpha_k \lambda_k^T = \sum_k \alpha_k \frac{\mu_k^T C_{pk}}{P_r^T} \quad \text{approximé par} \quad \lambda_m^T \simeq \frac{\mu_m^T C_{pm}}{P_r^T} \quad (\text{III.52})$$

Ainsi les termes $\tau_m + \tau^T$ dans le bilan de quantité de mouvement et $q_m + q^T$ s'écrivent en fonction des gradients de vitesse de mélange et de température de mélange :

$$\tau_m + \tau^T = 2(\mu_m + \mu_m^T) S_m \quad \text{en incompressible} \quad (\text{III.53})$$

$$q_m + q^T = -(\lambda_m + \lambda_m^T) \text{grad } T_m \quad (\text{III.54})$$

Le calcul de μ_m^T peut se faire, comme en monophasique, par le biais d'équations de transport de quantité turbulente. On peut écrire une équation de transport phasique pour l'énergie cinétique turbulente phasique k_k ainsi que pour le taux de dissipation ε_k . Une expression de ces équations est proposée par différents auteurs [13, 34, 51, 54, 62, 63], le plus souvent avec l'hypothèse de phases pures incompressibles. Les équations pour l'énergie cinétique moyenne k_m et son taux de dissipation ε_m sont présentées au chapitre suivant.

III.4 Les équations de bilan du modèle de mélange homogène

Les trois équations de bilan de mélange homogène sans effets de tension de surface sont :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div}(\rho_m v_m) = 0 \quad (\text{III.55})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_m) + \text{div}(\rho_m v_m v_m + P_m Id) = \text{div}(\tau_m + \tau^T) + \rho_m F_m \quad (\text{III.56})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m E_m) + \text{div}[(\rho_m E_m + P_m)v_m] = \rho_m F_m \cdot v_m + \text{div}(v_m \tau_m - q_m - q^T) \quad (\text{III.57})$$

III.4.1 Hypothèses effectuées

On rappelle les hypothèses effectuées pour obtenir ces bilans :

1. Equilibre cinématique ou champ de vitesse homogène

On suppose que les phases sont suffisamment bien mélangées et que la taille des structures dispersées est suffisamment petite de façon à négliger la vitesse relative entre les phases et à assurer l'équilibre cinématique $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = v_m$.

2. Equilibre thermique

L'échelle de temps du transfert de chaleur entre les phases est suffisamment petite de façon à maintenir le système en équilibre thermique. Les phases partagent la même température moyenne : $\overline{\overline{T}}_1 = \overline{\overline{T}}_2 = T_m$.

3. Effets de tension de surface négligée (nombre de Weber grand).

4. Fluctuations de viscosité dynamique et de conductivité thermique négligées.

III.4.2 Hypothèse supplémentaire

Le nombre d'inconnues est supérieur au nombre de relations qui les relie. Il faut donc, pour fermer le système, une hypothèse supplémentaire.

Les inconnues du système précédent (hors termes de turbulence) sont :

- les deux masses volumiques phasiques moyennes $\overline{\rho_1}$ et $\overline{\rho_2}$.
- les deux pressions phasiques moyennes $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$.
- les deux énergies internes phasiques moyennes \tilde{e}_1 et \tilde{e}_2 .
- la température de mélange T_m .
- la vitesse de centre de masse du mélange v_m .

Les relations pour fermer le système :

- les trois équations de bilan pour ρ_m , v_m et e_m .
- deux lois d'état phasique pour les pressions : $\overline{P_k} = f(\overline{\rho_k}, \tilde{e}_k)$.
- deux relations thermiques liant la température aux énergies phasiques : $T_m = f(\overline{\rho_k}, \tilde{e}_k)$.

Soit 8 inconnues pour 7 équations. Pour éliminer une inconnue on ajoute l'hypothèse supplémentaire d'équilibre mécanique entre les phase. La réponse de la phase dispersée (des bulles dans un liquide) à un changement de pression est supposé localement instantanée, assurant l'équilibre mécanique entre les phases. Les phases partagent la même pression moyenne : $\overline{P_1} = \overline{P_2} = P_m$.

III.4.3 Modèle de mélange homogène équilibré

Si l'on ajoute au système précédent l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, i.e. l'équilibre des potentiels chimiques, on parle de modèle homogène équilibré ou HEM (Homogeneous Equilibrium Model). En variable (P, T) , le potentiel est la fonction de Gibbs ou enthalpie libre définie par : $g = h - Ts$. L'équilibre des potentiels moyens s'écrit :

$$\tilde{g}_1 = \tilde{h}_1 - T_m \tilde{s}_1 = \tilde{g}_2 = \tilde{h}_2 - T_m \tilde{s}_2 \quad \text{ou} \quad \tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = T_m (\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1) \quad (\text{III.58})$$

L'égalité des potentiels chimiques d'un corps (supposé pur) présent sous deux phases impose une relation implicite entre la température et la pression, lorsque l'équilibre est réalisé (relation $P = P^*(T)$ ou relation réciproque $T = T^*(P)$). Soulignons que l'état d'équilibre thermodynamique correspond à l'état de saturation. On a $P_m = P_{sat}(T)$ ou $T_m = T_{ebul}(P)$.

On peut introduit une enthalpie libre de mélange g_m vérifiant : $\rho_m g_m = \alpha_1 \overline{\rho_1} \tilde{g}_1 + \alpha_2 \overline{\rho_2} \tilde{g}_2$. A l'équilibre $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = g_m$.

III.4.4 Modèle de mélange homogène relaxé

Les modèles relaxés ou HRM (Homogeneous Relaxation Model) s'affranchissent de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique en introduisant un déséquilibre thermodynamique. La formulation originale de Bilicki [32] développée pour la thermohydraulique nucléaire suppose que la phase liquide n'est pas à saturation (possibilité de liquide surchauffé). Les auteurs introduisent une équation supplémentaire de transport pour le titre massique x . Cette dernière contient un terme source de relaxation. Un temps de relaxation est introduit, il quantifie le temps pour que le système regagne l'état d'équilibre. Ce temps est difficile à déterminer et est estimé à partir de données expérimentales. La formulation 1D verticale en variable (z, t) est :

$$\frac{\partial x}{\partial t} + w \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{x - x_{eq}}{\theta(\alpha, P)} \quad \text{avec} \quad x_{eq} = \frac{h - h_L^{sat}(P)}{h_V^{sat}(P) - h_L^{sat}(P)} \quad (\text{III.59})$$

Le temps de relaxation $\theta(\alpha, P)$ s'exprime selon :

$$P \leq 10 \text{ bar}, \quad \theta = 6.51 \cdot 10^{-4} \alpha^{-0.257} \left| \frac{P_{sat} - P}{P_{sat}} \right|^{-2.24} \quad (\text{III.60})$$

$$P > 10 \text{ bar}, \quad \theta = 3.84 \cdot 10^{-7} \alpha^{-0.540} \left| \frac{P_{sat} - P}{P_C - P_{sat}} \right|^{-1.76} \quad (\text{III.61})$$

D'autres approches ont été développés. Helluy [47] propose d'évaluer le terme de relaxation au moyen d'un problème d'optimisation de l'entropie du mélange. En cavitation, une famille de modèles fait intervenir une équation pour le taux de vide. Cette dernière inclut un terme source empirique qui modélise la condensation et l'évaporation. Il est déterminé par ajustements successifs pour retrouver des formes de poches observées expérimentalement.

Citons par exemple le modèle de Kunz [52] pour lequel l'expression de l'équation supplémentaire pour la fraction liquide est :

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \text{div}(\alpha_L u) = \dot{m}^+ + \dot{m}^- \quad (\text{III.62})$$

Les termes de condensation et de vaporisation ont pour expression :

$$\dot{m}^- = \frac{C_{dest} \rho_V \alpha_L \text{Min}(0, P - P_{vap})}{\rho_L (\rho_L U_{ref}^2 / 2) t_\infty} \quad \text{et} \quad \dot{m}^+ = \frac{C_{prod} \rho_V \alpha_L^2 (1 - \alpha_L)}{\rho_L t_\infty} \quad (\text{III.63})$$

où t_∞ est un temps de relaxation, et les constantes C_{dest} et C_{prod} , des paramètres à caler.

Une autre formulation a été proposée récemment en supposant que la phase liquide évolue à saturation ($\rho_l = \rho_l^{sat}$). A partir d'un modèle à 5 équations, on aboutit au modèle TTV suivant [38, 41] en écoulement non visqueux :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad (\text{III.64})$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \otimes u) + \text{grad} P = 0 \quad (\text{III.65})$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(u(\rho E + P)) = 0 \quad (\text{III.66})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_L c_l^2 - \rho_V c_v^2)}{\alpha \rho_l c_l^2 + (1-\alpha) \rho_v c_v^2} \text{div}(u) + \frac{\frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} + \frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha}}{\frac{c_v^2}{\alpha} + \frac{c_l^2}{1-\alpha}} \dot{m}$$

où \dot{m} est le terme de transfert de masse entre les phases. Ce dernier est fermé en supposant sa proportionnalité à la divergence du champ de vitesse. L'égalité suivante en découle où intervient la vitesse du son sans transfert c_{wallis} :

$$\dot{m} = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_l - \rho_v} \left(1 - \frac{c^2}{c_{wallis}^2} \right) \text{div} u \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho c_{wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l c_l^2} \quad (\text{III.67})$$

Le choix de la loi d'état permet de fixer la vitesse du son du mélange c .

III.5 Modèle à 5 équations

Ce modèle est constitué de 4 lois de conservation (pour les masses des phases liquide et vapeur, la quantité de mouvement du mélange, l'énergie totale du mélange) auxquelles s'ajoute une équation pour le taux de vide. La formulation non visqueuse est [73] :

$$\frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha \rho_v u) = \dot{m} \quad (\text{III.68})$$

$$\frac{\partial (1 - \alpha) \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div} ((1 - \alpha) \rho_l u) = -\dot{m} \quad (\text{III.69})$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u \otimes u) + \operatorname{grad} P = 0 \quad (\text{III.70})$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} (u(\rho E + P)) = 0 \quad (\text{III.71})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha &= \frac{\alpha(1 - \alpha)(\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2)}{\alpha \rho_l c_l^2 + (1 - \alpha) \rho_v c_v^2} \operatorname{div} (u) \\ &+ \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\alpha \rho_l c_l^2 + (1 - \alpha) \rho_v c_v^2} \left(\frac{\Gamma_v}{\alpha} + \frac{\Gamma_l}{1 - \alpha} \right) Q + \frac{\frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} + \frac{\rho_l c_l^2}{1 - \alpha}}{\frac{c_v^2}{\alpha} + \frac{c_l^2}{1 - \alpha}} \dot{m} \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Les transferts de masse et de chaleur entre les phases \dot{m} et Q s'écrivent en fonction des enthalpies libres et des températures des phases pures :

$$\dot{m} = \nu \rho (g_l - g_v) \quad \text{et} \quad Q = H(T_l - T_v) \quad (\text{III.73})$$

Où ν et H sont les coefficients de relaxation. La quantité $\Gamma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_{\rho}$ est le coefficient de Grüneisen des phases pures, régies par la loi des gaz raides.

Une hypothèse d'équilibre mécanique permet de calculer la pression du mélange :

$$p(\rho, e, \alpha, \rho_v, \rho_l) = \frac{(\rho e - \alpha \rho_v q_v - (1 - \alpha) \rho_l q_l) - \left[\alpha \frac{\gamma_v P_{\infty}^v}{\gamma_v - 1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma_l P_{\infty}^l}{\gamma_l - 1} \right]}{\frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1}} \quad (\text{III.74})$$

La résolution s'effectue en deux étapes :

1. Résolution du système sans transfert. On obtient un champ hydrodynamique à l'équilibre mécanique.
2. Résolution du système complet avec relaxation de T et g aux interfaces seulement. Les coefficients de relaxation sont pris infinis. Les termes d'échange de masse et de chaleur sont déterminés à partir des équations sur les différences de températures $\Delta T = T_l - T_v$ et d'enthalpies libres $\Delta g = g_l - g_v$.

III.6 Les modèles bi-fluide à 6 ou 7 équations

On écrit les lois de conservation pour chaque phase k , $k=1, 2$. On obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k) = \Gamma_k \quad (\text{III.75})$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k \otimes u_k) = -\nabla (\alpha_k p_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\tau}_k) + \alpha_k \rho_k F_k + M_k \quad (\text{III.76})$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k E_k u_k) = -\nabla \cdot [\alpha_k q_k] - \nabla \cdot [p u_k] + \nabla \cdot [\bar{\tau}_k \cdot u_k] + \alpha_k \rho_k F_k \cdot u_k + Q_k$$

$E = e + \frac{1}{2}u^2$ est l'énergie totale massique.

Γ_k , M_k , Q_k sont les termes sources relatifs aux transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les phases. Ils représentent les effets interfaciaux et doivent être modélisés.

$$M_k = M_k^\Gamma + P_{kI} \nabla \alpha_k + F_k^d \quad (\text{III.77})$$

Le terme M_k^Γ représente le transfert de quantité de mouvement dû au transfert de masse. F_k^d correspond à la force de frottement interfaciale s'exerçant sur la phase k . P_{kI} est la pression dans la phase k à l'interface.

$$Q_k = H_k^\Gamma - p_{kI} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + F_k^d \cdot u_{kI} + Q_{kI} \quad (\text{III.78})$$

$H_k^\Gamma = L_{vap} \Gamma_k$ représente le transfert d'énergie dû au transfert de masse, où L_{vap} est la chaleur latente de changement de phase. Q_{kI} correspond au transfert de chaleur interfacial. u_{kI} est le vecteur vitesse dans la phase k à l'interface.

III.6.1 Modèle à 7 équations de Saurel et Le Métayer

Ce modèle est basé sur le modèle à sept équations de Baer-Nunziato [7], qui utilise l'équation de transport de la fraction volumique α_1 pour fermer le modèle bi-fluide à six équations. Il a été initialement proposé sans transfert de masse. Les travaux de thèse de Le Métayer [58] ont consisté à introduire par la suite un terme de changement de phase.

Les sept équations de Baer-Nunziato sans changement de phase s'écrivent ($k=1,2$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k \otimes u_k) &= -\nabla (\alpha_k P_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\tau}_k) + \alpha_k \rho_k F_k + F_k^d + P_I \nabla \alpha_k \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k E_k u_k) &= -\nabla \cdot [\alpha_k q_k] - \nabla \cdot [p_k u_k] + \nabla \cdot [\bar{\tau}_k \cdot u_k] + P_I u_I \cdot \nabla \alpha_k \\ &\quad + \mu P_I (P_k - P_{k'}) + \alpha_k \rho_k F_k \cdot u_k + F_k^d \cdot u_I + Q_{kI} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_I \cdot \nabla \alpha_1 &= -\mu (P_1 - P_2) \end{aligned}$$

L'indice I représente l'interface. Le terme $\mu (P_1 - P_2)$ qui représente la production de fraction volumique α_1 , est égal à la différence des pressions phasiques multiplié par un coefficient μ qui

contrôle la vitesse à laquelle les deux phases atteignent l'équilibre des pressions. Cette expression entraîne des termes $\mu P_I (P_k - P_{k'})$ dus au travail de la pression interfaciale dans les équations de conservation de l'énergie.

Pour fermer le système, le modèle original propose de représenter la pression de l'interface P_I par la pression de la phase la plus compressible, et la vitesse de l'interface u_I par la vitesse de la phase la moins compressible. Par la suite, Saurel et Abgrall [72] modélisent la pression d'interface par une pression de mélange : $P_I = \sum_{k=1}^2 \alpha_k P_k$

L'étude réalisée par Le Métayer consiste, après résolution d'un problème de Riemannn inerte i.e. sans changement de phase, à prendre en compte un terme de transfert de masse par les relations de Rankine-Hugoniot à travers le front d'évaporation.

III.6.2 Modèle à 6 équations du code Neptune de EDF

Mimouni et al. [61] présentent des calculs de cavitation réalisés avec le code NEPTUNE développé originellement par EDF et le CEA pour l'étude des écoulements diphasiques en ébullition. Le terme de transfert de masse est obtenu à partir des relations de saut à l'interface :

$$\Gamma_l = -\Gamma_v = \frac{q_{lI} + q_{vI}}{h_{vI} - h_{lI}} A_I \quad (\text{III.79})$$

où q_{kI} représente le flux de chaleur interfacial dans la phase k , h_{kI} l'enthalpie de la phase k à l'interface et $A_I = \frac{6\alpha}{d}$ la surface caractéristique des échanges où aire interfaciale (α est le taux de vide et d le diamètre moyen des bulles pris égal à 0.1 mm).

Les enthalpies de chaque phase à l'interface sont supposées à saturation. Le flux de chaleur interfacial est modélisé de la façon suivante :

$$q_{kI} = c_{kI} (T_{sat}(P) - T_k) \quad (\text{III.80})$$

Avec les capacités calorifiques suivantes : $c_{lI} = \frac{Nu_l \lambda_l}{d}$ et $c_{vI} = \frac{\alpha \rho_v C_{p_v}}{\Delta t}$

Le nombre de Nusselt du liquide est modélisé par : $Nu_l = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr_l^{1/3}$

avec Re le nombre de Reynolds basé sur le diamètre d : $Re = \frac{|U_v - U_l| d}{\nu_l}$

et Pr_l le nombre de Prandtl du liquide.

Chapitre IV

Equations moyennées de la turbulence

IV.1 Equations pour les fluctuations

IV.1.1 Equation pour les fluctuations de la masse

On prend pour point de départ l'équation instantanée de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,l}}{\partial x_l} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

et l'équation moyennée sur le temps T_k de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,l}}}{\partial x_l} = \Gamma_k = \rho_k (u_I - u_k) \cdot n_k \delta_I \quad (\text{IV.2})$$

A partir de ces deux équations et en décomposant $\rho_k = \overline{\rho_k} + \rho'_k$ et $u_k = \tilde{u}_k + u''_k$, on obtient l'équation pour les fluctuations de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho'_k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho_k} u''_{k,l}}{\partial x_l} + \frac{\partial \rho'_k \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} + \frac{\partial \rho'_k u''_{k,l}}{\partial x_l} = \frac{1}{\alpha_k} \left[\overline{\rho_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \overline{\rho_k u_{k,l}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_l} - \Gamma_k \right] \quad (\text{IV.3})$$

Si les phases sont supposées incompressibles, alors $\rho_k = \overline{\rho_k}$ et $\rho'_k = 0$. De plus, $\tilde{u}_k = \overline{u_k}$ et $u''_k = u'_k$. L'équation précédente devient dans ce cas :

$$\frac{\partial u''_{k,i}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_i} = \frac{1}{\alpha_k} u''_{k,i} \cdot n_k \delta_I \quad (\text{IV.4})$$

La divergence des fluctuations de vitesse n'est pas nulle même si les phases sont incompressibles. Ceci induit l'apparition de termes supplémentaires dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k .

IV.1.2 Equation pour les fluctuations de la quantité de mouvement

Le point de départ est l'équation instantanée de la conservation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,i} u_{k,l}}{\partial x_l} = \rho_k F_k + \frac{\partial \mathbb{T}_{k,il}}{\partial x_l} \quad (\text{IV.5})$$

et l'équation moyennée sur le temps T_k de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i} u_{k,l}}}{\partial x_l} = \overline{\alpha_k \rho_k F_k} + \frac{\partial \alpha_k \mathbb{T}_{k,il}}{\partial x_l} + M_k \quad (\text{IV.6})$$

avec $\mathbb{T}_{k,il} = -P_k \delta_{il} + \sigma_{k,il}$.

A partir de ces deux équations et en décomposant la vitesse $u_k = \tilde{u}_k + u_k''$, on obtient l'équation pour les fluctuations de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial u_{k,i}''}{\partial t} &+ \rho_k \widetilde{u_{k,l}} \frac{\partial u_{k,i}''}{\partial x_l} + \rho_k u_{k,l}'' \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_l} + \rho_k u_{k,l}'' \frac{\partial u_{k,i}''}{\partial t} \\ &= \rho_k F_k' + \frac{\partial \mathbb{T}_{k,il}}{\partial x_l} + \rho_k \widetilde{u_{k,i}} \frac{\partial \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} \\ &+ \frac{\rho_k}{\overline{\rho_k \alpha_k}} \left[-\frac{\partial \alpha_k \overline{\mathbb{T}_{k,il}}}{\partial x_l} - M_k + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\alpha_k \overline{\rho_k} \widetilde{u_{k,i}} \widetilde{u_{k,l}} \right) \right] \\ &+ \frac{\rho_k}{\overline{\rho_k \alpha_k}} \left[\widetilde{u_{k,i}} \left(\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}}{\partial t} + \widetilde{u_{k,l}} \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}}{\partial x_l} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

avec $F_k' = F_k - \overline{F_k}$.

IV.2 Equation pour les tensions de Reynolds

On cherche à écrire les équations de transport pour les contraintes turbulentes par phase. Pour cela, on prend pour point de départ l'équation de transport pour les fluctuations de la quantité de mouvement par phase notée E_{k_i} . On forme ensuite l'équation $u_{k,j}'' E_{k,i} + u_{k,i}'' E_{k,j}$ que l'on moyenne sur le temps T_k de présence de la phase k. C'est-à-dire que l'on souhaite calculer :

$$\int_{T_k} \left(u_{k,j}'' E_{k,i} + u_{k,i}'' E_{k,j} \right) d\tau \quad (\text{IV.8})$$

On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i}'' u_{k,j}''}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i}'' u_{k,j}'' \widetilde{u_{k,l}}}}{\partial x_l} &= -\frac{\overline{\alpha_k \rho_k u_{k,j}'' u_{k,l}''}}{\partial x_l} \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_l} - \frac{\overline{\alpha_k \rho_k u_{k,i}'' u_{k,l}''}}{\partial x_l} \frac{\partial \widetilde{u_{k,j}}}{\partial x_l} \\ &- \frac{\overline{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i}'' u_{k,j}'' u_{k,l}''}}{\partial x_l} \\ &+ \alpha_k \overline{u_{k,j}''} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,il}}}{\partial x_l} \right] \\ &+ \alpha_k \overline{u_{k,i}''} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,jl}}}{\partial x_l} \right] \\ &+ \alpha_k \overline{u_{k,j}''} \frac{\partial \sigma'_{k,il}}{\partial x_l} + \alpha_k \overline{u_{k,i}''} \frac{\partial \sigma'_{k,jl}}{\partial x_l} \\ &- \alpha_k \overline{u_{k,j}''} \frac{\partial p'_k}{\partial x_i} - \alpha_k \overline{u_{k,i}''} \frac{\partial p'_k}{\partial x_j} \\ &- \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \overline{u_{k,i}'' u_{k,j}''} \dot{m}_k \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

En réarrangeant les termes de cette équation pour effectuer un parallèle avec le cas monophasique, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial \alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,j}}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial \alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,j} \widetilde{u_{k,l}}}}{\partial x_l} &= \overline{\rho_k} \alpha_k P_{k,ij} + \overline{\rho_k} \alpha_k \Pi_{k,ij} - \overline{\rho_k} \alpha_k \epsilon_{k,ij} \\ &+ \overline{\rho_k} \alpha_k \mathbb{M}_{k,ij} + \overline{\rho_k} \alpha_k D_{k,ij} + \Gamma_k R_{k,ij}^\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{\rho_k} \alpha_k P_{k,ij} &= -\overline{\alpha_k \rho_k u''_{k,j} u''_{k,l} \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_l}} - \overline{\alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,l} \frac{\partial \widetilde{u_{k,j}}}{\partial x_l}} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \Pi_{k,ij} &= \overline{\alpha_k p'_k \left(\frac{\partial u''_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_{k,j}}{\partial x_i} \right)} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \epsilon_{k,ij} &= \overline{\alpha_k \sigma'_{k,il} \frac{\partial u''_{k,j}}{\partial x_l}} + \overline{\alpha_k \sigma'_{k,jl} \frac{\partial u''_{k,i}}{\partial x_l}} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \mathbb{M}_{k,ij} &= \overline{\alpha_k u''_{k,j} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,il}}}{\partial x_l} \right]} + \overline{\alpha_k u''_{k,i} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,jl}}}{\partial x_l} \right]} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k D_{k,ij} &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{\alpha_k \left(p'_k u''_{k,j} \delta_{il} + p'_k u''_{k,i} \delta_{jl} \right)} \right] - \overline{\alpha_k \left(\sigma'_{k,il} u''_{k,j} + \sigma'_{k,jl} u''_{k,i} \right)} \\ &\quad - \frac{\overline{\partial \alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,j} u''_{k,l}}}{\partial x_l} \\ \Gamma_k R_{k,ij}^\Gamma &= -\sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} p'_k u''_{k,j} \delta_{il} n_{k,l} - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} p'_k u''_{k,i} \delta_{jl} n_{k,l} \\ &\quad + \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \sigma'_{k,il} u''_{k,j} n_{k,l} + \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \sigma'_{k,jl} u''_{k,i} n_{k,l} \\ &\quad - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} u''_{k,i} u''_{k,j} \dot{m}_k \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

On remarque donc que le seul terme supplémentaire par rapport au cas monophasique est le terme lié au changement de phase $\Gamma_k R_{k,ij}^\Gamma$. Le terme $\mathbb{M}_{k,ij}$ est un terme spécifique au cas compressible.

IV.3 Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

On pose $k_k = \frac{1}{2} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i}}$. En appliquant la convention d'Einstein sur les indices répétés, on obtient l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k} k_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k} k_k \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} &= -\overline{\alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,l} \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_l}} + \overline{\alpha_k u''_{k,i} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,il}}}{\partial x_l} \right]} \\ &\quad - \frac{\overline{\partial \alpha_k \rho_k \frac{u''_{k,i} u''_{k,i}}{2} u''_{k,l}}}{\partial x_l} + \overline{\alpha_k u''_{k,i} \frac{\partial \sigma'_{k,il}}{\partial x_l}} - \overline{\alpha_k u''_{k,i} \frac{\partial p'_k}{\partial x_i}} \\ &\quad - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \frac{u''_{k,i} u''_{k,i}}{2} \dot{m}_k \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

soit en réarrangeant les termes :

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k} k_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k} k_k \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} = \overline{\rho_k} \alpha_k P_k + \overline{\rho_k} \alpha_k \Pi_k - \overline{\rho_k} \alpha_k \epsilon_k + \overline{\rho_k} \alpha_k \mathbb{M}_k + \overline{\rho_k} \alpha_k D_k + \Gamma_k K^\Gamma \quad (\text{IV.13})$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{\rho_k} \alpha_k P_k &= -\alpha_k \overline{\rho_k} \widetilde{u_{k,i}'' u_{k,l}''} \frac{\partial \widetilde{u_{k,i}}}{\partial x_l} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \Pi_k &= \overline{\alpha_k p_k'} \frac{\partial u_{k,i}''}{\partial x_i} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \epsilon_k &= \alpha_k \overline{\sigma_{k,il}'} \frac{\partial u_{k,i}''}{\partial x_l} \\ \overline{\rho_k} \alpha_k \mathbb{M}_k &= \alpha_k \overline{u_{k,i}''} \left[-\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{k,il}}}{\partial x_l} \right] \\ \overline{\rho_k} \alpha_k D_k &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{\alpha_k p_k' u_{k,i}''} \delta_{il} - \overline{\alpha_k \sigma_{k,il}'} u_{k,i}'' \right] - \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k} \frac{u_{k,i}'' u_{k,i}''}{2} u_{k,l}''}{\partial x_l} \\ \Gamma_k K^\Gamma &= -\sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} p_k' u_{k,i}'' \delta_{il} n_{k,l} + \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \sigma_{k,il}' u_{k,i}'' n_{k,l} \\ &\quad - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_k|} \frac{u_{k,i}'' u_{k,i}''}{2} \dot{m}_k \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Le terme $\Gamma_k K^\Gamma$ est le terme lié au changement de phase. Le terme \mathbb{M}_k est un terme spécifique au compressible monophasique et multiphasique. Le terme Π_k est présent en monophasique uniquement dans le cas compressible. Dans le cas multiphasique, ce terme est présent si les phases sont compressibles. Si les phases sont supposées incompressibles, ce terme existe instantanément puisque le champ de vitesse fluctuant n'est pas à divergence nulle mais est nul en moyenne. En effet, si les phases sont incompressibles alors on a :

$$\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} = -\frac{\partial u_{k,l}'}{\partial x_l} \quad (\text{IV.15})$$

et en conséquence :

$$\overline{\rho_k} \alpha_k \Pi_k = -\overline{\alpha_k p_k'} \frac{\partial \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} = -\overline{\alpha_k p_k'} \frac{\partial \widetilde{u_{k,l}}}{\partial x_l} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

L'énergie cinétique turbulente du mélange k_m est définie comme la somme des énergies phasiques :

$$\rho_m k_m = \sum_k \overline{\rho_k} \alpha_k k_k = \rho_m \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2} \quad (\text{IV.17})$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique pour le mélange s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho_m k_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m k_m u_{m,l}}{\partial x_l} = \rho_m P_m + \rho_m \Pi_m - \rho_m \epsilon_m + \rho_m \mathbb{M}_m + \rho_m D_m + \Gamma_m K_m^\Gamma \quad (\text{IV.18})$$

avec :

$$\begin{aligned}\rho_m P_m &= \sum_k \bar{\rho}_k \alpha_k P_k \quad ; \quad \rho_m \Pi_m = \sum_k \bar{\rho}_k \alpha_k \Pi_k \quad ; \quad \rho_m \epsilon_m = \sum_k \bar{\rho}_k \alpha_k \epsilon_k \\ \rho_m \mathbb{M}_m &= \sum_k \bar{\rho}_k \alpha_k \mathbb{M}_k \quad ; \quad \rho_m D_m = \sum_k \bar{\rho}_k \alpha_k D_k \quad ; \quad \Gamma_m K_m^\Gamma = \sum_k \Gamma_k K_k^\Gamma\end{aligned}\quad (\text{IV.19})$$

On détaille chacun des termes précédents pour un mélange de deux composants 1 et 2 en appliquant l'hypothèse de champ de vitesse homogène. De plus, on suppose que les termes de fluctuations qui apparaissent sont égaux entre les phases.

Le terme de production $\rho_m P_m$

$$\begin{aligned}\rho_m P_m &= \bar{\rho}_1 \alpha_1 P_1 + \bar{\rho}_2 \alpha_2 P_2 \\ &= -\alpha_1 \overline{\bar{\rho}_1 u''_{1,i} u''_{1,l}} \frac{\partial \tilde{u}_{1,i}}{\partial x_l} - \alpha_2 \overline{\bar{\rho}_2 u''_{2,i} u''_{2,l}} \frac{\partial \tilde{u}_{2,i}}{\partial x_l} \\ &= (\alpha_2 \bar{\rho}_2 - \rho_m) \overline{u''_{1,i} u''_{1,l}} \frac{\partial \tilde{u}_{1,i}}{\partial x_l} - \alpha_2 \overline{\bar{\rho}_2 u''_{2,i} u''_{2,l}} \frac{\partial \tilde{u}_{2,i}}{\partial x_l}\end{aligned}\quad (\text{IV.20})$$

si on suppose $\overline{u''_{1,i} u''_{1,l}} = \overline{u''_{2,i} u''_{2,l}} = \overline{u''_i u''_l}$ alors :

$$\rho_m P_m = -\rho_m \overline{u''_i u''_l} \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_l} = \tau_{m,il}^T \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_l}\quad (\text{IV.21})$$

Le terme de corrélation pression/dilatation $\rho_m \Pi_m$

$$\begin{aligned}\rho_m \Pi_m &= \bar{\rho}_1 \alpha_1 \Pi_1 + \bar{\rho}_2 \alpha_2 \Pi_2 \\ &= \alpha_1 p'_1 \overline{\frac{\partial u''_{1,i}}{\partial x_i}} + \alpha_2 p'_2 \overline{\frac{\partial u''_{2,i}}{\partial x_i}}\end{aligned}\quad (\text{IV.22})$$

Si on suppose qu'à tout instant $p'_1 = p'_2 = p'$ et $u''_{1,i} = u''_{2,i} = u''_i$ alors

$$\rho_m \Pi_m = p' \overline{\frac{\partial u''_i}{\partial x_i}}\quad (\text{IV.23})$$

Le terme de dissipation $\rho_m \epsilon_m$

$$\begin{aligned}\rho_m \epsilon_m &= \bar{\rho}_1 \alpha_1 \epsilon_1 + \bar{\rho}_2 \alpha_2 \epsilon_2 \\ &= \alpha_1 \sigma'_{1,il} \overline{\frac{\partial u''_{1,i}}{\partial x_l}} + \alpha_2 \sigma'_{2,il} \overline{\frac{\partial u''_{2,i}}{\partial x_l}}\end{aligned}\quad (\text{IV.24})$$

Si on suppose à tout instant $\sigma'_{1,il} = \sigma'_{2,il} = \sigma'_{il}$ et $u''_{1,i} = u''_{2,i} = u''_i$ alors :

$$\rho_m \epsilon_m = \sigma'_{il} \overline{\frac{\partial u''_i}{\partial x_l}}\quad (\text{IV.25})$$

Le terme de flux de masse $\rho_m \mathbb{M}_m$

$$\begin{aligned}\rho_m \mathbb{M}_m &= \overline{\rho_1} \alpha_1 \mathbb{M}_1 + \overline{\rho_2} \alpha_2 \mathbb{M}_2 \\ &= \alpha_1 \overline{u''_{1,i}} \left[-\frac{\partial \overline{p_1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{1,il}}}{\partial x_l} \right] + \alpha_2 \overline{u''_{2,i}} \left[-\frac{\partial \overline{p_2}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{2,il}}}{\partial x_l} \right]\end{aligned}\quad (\text{IV.26})$$

Si on suppose l'équilibre de pression $\overline{p_1} = \overline{p_2} = p_m$ alors :

$$\rho_m \mathbb{M}_m = \alpha_1 \overline{u''_{1,i}} \left[-\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{1,il}}}{\partial x_l} \right] + (1 - \alpha_1) \overline{u''_{2,i}} \left[-\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{2,il}}}{\partial x_l} \right] \quad (\text{IV.27})$$

Le terme de diffusion $\rho_m D_m$

$$\begin{aligned}\rho_m D_m &= \overline{\rho_1} \alpha_1 D_1 + \overline{\rho_2} \alpha_2 D_2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{\alpha_1 p'_1 u''_{1,i}} \delta_{il} - \overline{\alpha_1 \sigma'_{1,il} u''_{1,i}} \right] - \frac{\overline{\overline{\alpha_1 \rho_1 \frac{u''_{1,i} u''_{1,i}}{2} u''_{1,l}}}}{\partial x_l} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{\alpha_2 p'_2 u''_{2,i}} \delta_{il} - \overline{\alpha_2 \sigma'_{2,il} u''_{2,i}} \right] - \frac{\overline{\overline{\alpha_2 \rho_2 \frac{u''_{2,i} u''_{2,i}}{2} u''_{2,l}}}}{\partial x_l}\end{aligned}\quad (\text{IV.28})$$

Si on suppose que $\sigma'_{1,il} = \sigma'_{2,il} = \sigma'_{il}$; $u''_{1,i} = u''_{2,i} = u''_i$ et $p'_1 = p'_2 = p'$ alors :

$$\rho_m D_m = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{p' u''_i} \delta_{il} - \overline{\sigma'_{il} u''_i} \right] - \frac{\partial \rho_m \overline{\overline{\frac{u''_i u''_i}{2} u''_l}}}{\partial x_l} \quad (\text{IV.29})$$

Le terme de changement de phase $\Gamma_m K_m^\Gamma$

$$\begin{aligned}\Gamma_m K_m^\Gamma &= \Gamma_1 K_1^\Gamma + \Gamma_2 K_2^\Gamma \\ &= -\sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_1|} p'_1 u''_{1,i} \delta_{il} n_{1,l} - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_2|} p'_2 u''_{2,i} \delta_{il} n_{2,l} \\ &\quad + \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_1|} \sigma'_{1,il} u''_{1,i} n_{1,l} + \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_2|} \sigma'_{2,il} u''_{2,i} n_{2,l} \\ &\quad - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_1|} u''_{1,i} u''_{1,i} \dot{m}_1 - \sum_{disc} \frac{1}{T|v_i \cdot n_2|} u''_{2,i} u''_{2,i} \dot{m}_2\end{aligned}\quad (\text{IV.30})$$

On a par définition $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$. Donc si on suppose $u''_{1,i} = u''_{2,i} = u''_i$; $p'_1 = p'_2 = p'$ et $\sigma'_{1,il} = \sigma'_{2,il} = \sigma'_{il}$ et comme $n_1 = -n_2$, on a :

$$\Gamma_m K_m^\Gamma = 0 \quad (\text{IV.31})$$

IV.4 Equation de transport du taux de dissipation

Kataoka et Serizawa [51] ont proposé une équation de transport pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique moyenne avec l'hypothèse de phases pures incompressibles. Cette équation met en évidence que la dissipation turbulente est affectée par les termes interfaciaux. Cependant, la fermeture de ces termes est très difficile due à l'absence de mesures expérimentales dans les écoulements avec changement de phase. En pratique, on utilise une équation simplifiée similaire au cas monophasique.

On peut également souligner qu'en écoulement diphasique, la dissipation dilatationnelle ϵ_d n'est pas nulle même lorsque les phases sont incompressibles. En effet :

$$\epsilon_d = \frac{4}{3} \bar{\mu} \overline{s'_{kk} s'_{ll}} \quad (\text{IV.32})$$

avec :

$$s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{IV.33})$$

donc dans le cas de l'hypothèse de mélange homogène :

$$\epsilon_d = \frac{4}{3} \bar{\mu} \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_l}} \quad (\text{IV.34})$$

Chapitre V

Simulation numérique d'écoulements cavitants

V.1 Introduction

La modélisation et la simulation de la cavitation se heurtent à de nombreuses difficultés liés au caractère diphasique, turbulent, compressible, instationnaire de ces écoulements. La modélisation des phénomènes physiques mis en jeu comme le chemin thermodynamique lors du changement de phase, les effets de déséquilibre (métastabilité), les effets de compressibilité et l'interaction avec la turbulence n'est pas pleinement établie. Des questions propres aux techniques numériques dans ce type d'écoulement persistent également. Il n'existe à ce jour AUCUN code prédictif et fiable capable de simuler les situations de cavitation que l'on rencontre dans des configurations académiques ou industrielles.

La mise en place d'outils de simulation numérique dédiés à l'étude de la cavitation couvre trois grands axes d'étude :

- la modélisation diphasique et la thermodynamique des transitions de phase
- la modélisation de la turbulence en milieu diphasique
- la mise en place de schémas numériques adaptés

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons uniquement aux modèles diphasiques moyennés, de type mélange homogène 1-fluide, avec un traitement statistique de la turbulence (RANS), formulé dans un cadre compressible.

V.2 Lois d'état et contraintes thermodynamiques

La modélisation du mélange comporte des difficultés liées à l'existence d'état thermodynamique métastable pour l'une ou les deux phases. Un liquide initialement en équilibre thermodynamique peut atteindre un état métastable lorsque la température est plus grande que la valeur à saturation (liquide surchauffé) ou alors lorsque la pression est plus faible que la valeur à saturation (liquide sous tension). La vapeur étant convectée dans l'écoulement, l'équilibre des

pressions entre l'intérieure et l'extérieure d'une bulle n'est pas instantané. Des processus thermodynamiques hors équilibres peut apparaître. Un certain nombre de contraintes sur la loi d'état peut être formulé ainsi que sur la modélisation des termes de transfert interfaciaux.

Le calcul de la pression et de la température nécessite une loi d'état et une relation thermique pour fermer le système d'équations. Les principales relations utilisées dans la littérature sont :

- Loi de Tait
- Loi de van der Waals
- Loi des gaz raides ou stiffened gas
- Loi de Tammann
- Loi de type Mie-Grüneisen

Loi de Tait

Il est possible dans le cas d'un écoulement faiblement compressible de prendre en compte la compressibilité d'un fluide par la relation : $\Delta P = c^2 \Delta \rho$

Loi de Tait : $\frac{\rho}{\rho_{ref}} = \sqrt[n]{\frac{P + P_0}{P_{ref} + P_0}}$ où ρ_{ref} et P_{ref} sont une masse volumique et une pression de référence. Dans le cas de l'eau, $P_0 = 3 \cdot 10^8$ et $n = 7$.

La vitesse du son c est une donnée pour chacune des phases.

Loi de van der Waals

Proposée en 1873, elle contient deux constantes a et b calées sur le comportement du fluide au point critique. Elle représente l'une des premières lois d'état pour les gaz réels.

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = rT \quad \text{où } v \text{ est le volumique massique} \quad (\text{V.1})$$

Cette loi produit une vitesse du son négative ($dP/d\rho < 0$) dans la zone de transition de phase (équilibre thermodynamique instable).

Loi des gaz raides

Elle est utilisée pour représenter des liquides, des gaz et même des solides. Un descriptif détaillé de la loi est donnée dans [58]. La pression est liée à la masse volumique et l'énergie interne par :

$$P(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho(e - q) - \gamma p_\infty$$

Le terme $(\gamma - 1)\rho(e - q)$ représente l'effet répulsif intermoléculaire. Le terme $-\gamma p_\infty$ représente l'attraction moléculaire, responsable de la cohésion des liquides ou des solides. Ce terme est nul pour la loi d'état des gaz parfaits.

Elle est calée pour chaque fluide par les constantes γ et p_∞ ($q=0$). En présence de changement de phase, le paramètre q est non nul, et est appelé "énergie de formation". Les capacités calorifiques sont constantes dans l'approximation des gaz raides.

Plusieurs jeux de paramètres pour l'eau ont été proposés :

auteurs	γ	P_∞ (Pa)	q (J/kg)	C_p (J/K.kg)	c (m/s)
Saurel et Abgrall [72]	4.4	$6 \cdot 10^8$	0	-	1625
Barberon et Helluy [8]	3	$8.533 \cdot 10^8$	$-0.1148 \cdot 10^7$	4200	1569
Paillere et al. [67]	2.8	$8.5 \cdot 10^8$	0	4186	1486
Le Metayer et al. [59]	2.35	10^9	$-0.1167 \cdot 10^7$	4268	1300
Chang et Liou [19]	1.932	$1.1645 \cdot 10^9$	0	8095	1487

TABLE V.1 – Paramètres des gaz raides pour de l'eau froide

Loi de Tamman

Cette loi est équivalente à celle des gaz raides : $P + P_c = \rho_L K (T + T_c)$

L'utilisation des paramètres P_c , K , T_c , est une autre formulation de la loi des gaz raides paramétrée par q , P_∞ et γ .

Loi de type Mie-Grüneisen

La loi s'écrit : $P(\rho, e) = P_\infty(\rho) + \Gamma(\rho)\rho \left[e - e_{ref}(\rho) \right]$

où $\Gamma = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_\rho$ est le coefficient de Grüneisen et $P_\infty(\rho)$ est donné en fonction du fluide.

A partir de la loi de Mie-Grüneisen, en supposant les variations de masse volumique faibles, on obtient la loi d'état des gaz raides. Pour des évolutions isentropiques, cela devient la loi de Tait.

Autre cas particulier : si P_∞ est nul, alors on obtient la loi des gaz parfaits.

Loi de Benedict-Webb-Rubin

Pour s'approcher le plus possible de la représentation des gaz réels, il existe des lois d'état de forme encore plus complexe comme l'équation de Redlich-Kwong-Soave ou aussi l'équation de Benedict-Webb-Rubin [11].

La loi de Benedict-Webb-Rubin s'écrit :

$$P = RTd + d^2 (RT(B + bd) - (A + ad - a\alpha d^4)) - \frac{1}{T^2} (C - cd(1 + \gamma d^2) \exp(-\gamma d^2))$$

Avec, P la pression, R la constante des gaz parfaits, T la température, d la densité molaire, et a , b , c , A , B , C , α , γ des paramètres empiriques. Cette loi est par exemple utilisée pour représenter des fluides réfrigérants.

V.2.1 Condition sur l'entropie

Considérons un mélange diphasique avec une entropie, un état thermodynamique est dit stable s'il correspond à un maximum absolu de l'entropie et métastable si c'est un maximum relatif. L'entropie d'un état donné doit toujours vérifier le critère de concavité : $d^2 s < 0$ (la matrice hessienne de $s(\rho, e)$ doit être définie négative) afin de respecter le deuxième principe de la thermodynamique. Comme la concavité de s est équivalente à la convexité de l'énergie interne e [68],

cette dernière condition doit être vérifiée pour le système non visqueux.

Avec l'introduction de ces paramètres adimensionnés :

$$\lambda = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad ; \quad g = \frac{P}{\rho T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\rho \quad ; \quad \Gamma = \frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s \quad (\text{V.2})$$

des conditions de convexité ont été formulées [57, 68] pour des écoulements avec changement de phase :

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad g \geq 0 \quad ; \quad \lambda g - \Gamma^2 \geq 0 \quad (\text{V.3})$$

On montre que pour un mélange liquide-gaz régit par la loi des gaz raides les paramètres de convexité s'écrivent :

$$\lambda = \frac{\rho c^2}{P} > 0 \quad ; \quad g = \frac{\gamma P}{\rho C_p T} > 0 \quad ; \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{c^2}{C_p T} \quad (\text{V.4})$$

Les deux premières conditions de convexité sont toujours respectées. La troisième s'écrit $c^2 \geq \frac{(\gamma - 1)^2 C_p T}{\gamma}$. Le respect de la condition dépend du choix des paramètres de la loi des gaz raides [43].

V.2.2 Conditions sur la vitesse du son

Une première condition est liée au respect de l'hyperbolicité du système non visqueux.

D'autre part, la vitesse du son du mélange évolue entre deux bornes. Sans transfert de masse et de chaleur, la vitesse des ondes suit celle de Wood ou Wallis [80]. Elle s'exprime comme la moyenne harmonique des vitesses du son des phases pures :

$$\frac{1}{\rho c_{wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v c_v^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_l c_l^2} \quad (\text{V.5})$$

Lorsque des échanges de masse et chaleur sont présents, la vitesse du son diminue. Il existe une vitesse minimale qui correspond à l'équilibre thermodynamique local (équilibre des pressions, des températures et des enthalpies libres entre les phases [69]). La formulation du modèle à l'équilibre est donnée dans [73]. L'expression de la vitesse du son c_{eq} est [45] :

$$\begin{aligned} c_{eq}^2 &= \frac{h - \left(\frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_P}{\left(\frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho} \\ \left(\frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_P &= \frac{\rho_l h_l - \rho_v h_v}{\rho_l - \rho_v} \\ \left(\frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho &= \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{\rho_l h_l - \rho_v h_v}{\rho_l - \rho_v} \frac{1}{T} \left[\alpha \left(\frac{1}{C_{v_v}(\gamma_v - 1)} - \rho_v \frac{dT}{dP} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{1}{C_{v_l}(\gamma_l - 1)} - \rho_l \frac{dT}{dP} \right) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité suivante est à respecter : $c_{eq} \leq c < c_{wallis}$

Par exemple, pour un mélange d'eau et sa vapeur à 20 ° régité par la loi des gaz raides (en supposant l'équilibre des pressions et températures), l'évolution de la vitesse du son en fonction du taux de vide est donnée sur la figure V.1.

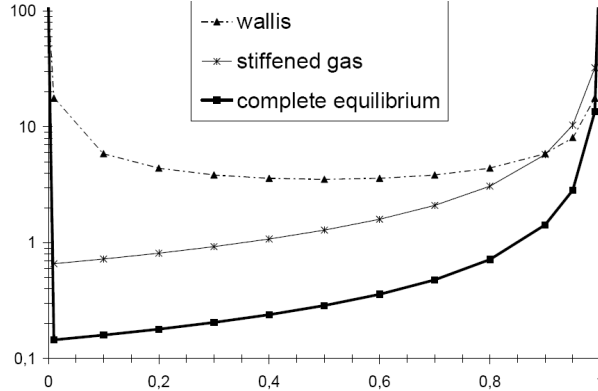


FIGURE V.1 – Vitesses du son dans un mélange d'eau froide en fonction de α

On constate que la vitesse du son de Wallis est symétrique par rapport à un taux de vide $\alpha = 50\%$. Au contraire, la vitesse c_{eq} est dissymétrique et est très faible dès qu'apparaît un peu de vapeur au sein du liquide. Sa valeur minimum est inférieure à 0.2 m/s, à comparer avec la vitesse dans l'eau liquide proche de 1500 m/s. Enfin, la loi mélange de gaz raides vérifie la contrainte sur la vitesse du son tant que le taux de vide $\alpha < 90\%$.

V.3 Modélisation de la turbulence et modèle de paroi

La modélisation de la turbulence doit tenir compte de l'interaction entre les deux phases et du caractère compressible du mélange. La présence de bulles de vapeur dans l'écoulement se traduit par une turbulence induite à la fois par le sillage des bulles dans l'écoulement ainsi que par les fluctuations de pression provenant de la création et de l'implosion des bulles. Dans le cadre de l'étude expérimentale d'une couche de mélange cavitante [5], il a été mis en évidence une modification de l'intensité et de l'anisotropie de la turbulence. En revanche, cette même étude conclut que le terme de production d'énergie cinétique par l'écoulement moyen \mathbf{P}_m n'est pas modifié par la cavitation. D'autre part, le transfert de masse entre les deux phases (même si celles-ci sont supposées incompressibles à saturation) rend le champ fluctuant de vitesse non nul. Les termes habituellement liés à la turbulence compressible $\mathbf{\Pi}_m$, \mathbf{M}_m et ϵ_{d_m} qui interviennent dans l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente ne sont donc plus nuls. Cependant, l'absence de connaissances sur le comportement de ces termes ne permet pas de trancher sur leur importance relative par rapport aux autres termes de l'équation ni de développer des modèles pertinents (voir [23, 24]).

Un élément important pour la simulation est lié au modèle de paroi et au maillage de la zone proche des parois. Les lois de paroi sont massivement utilisées dans les applications turbulentes à grands nombres de Reynolds (notamment en turbomachines) pour relaxer la contrainte $y^+ \simeq 1$ lors de l'élaboration des maillages. L'existence d'un profil de vitesse "universel" dans une couche

limite cavitante n'est pas attestée. De plus, en écoulement instationnaire, l'existence d'un profil de vitesse instantané n'est pas vérifié.

V.3.1 Etude de lois de paroi

Considérons une loi de paroi à deux couches (sous-couche et loi log) :

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ && \text{si } y^+ < 11.13 \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.25 && \text{si } y^+ > 11.13 \\ u^+ &= \frac{u}{U_\tau} \quad ; \quad y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu_w} \quad ; \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

avec $\kappa = 0.41$ la constante de von Karman.

On suppose que ces lois de paroi sont valides en écoulement diphasique et qu'il existe un profil de vitesse à chaque pas de temps d'intégration. Pour évaluer la validité de ces hypothèses, des comparaisons ont été effectuées avec un modèle TBLE (Thin Boundary Layer Equation). Ce modèle est basé sur l'intégration d'un jeu d'équations simplifiées dérivé des équations de Navier-Stokes moyennées :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial u_i}{\partial y} \right] \quad (\text{V.7})$$

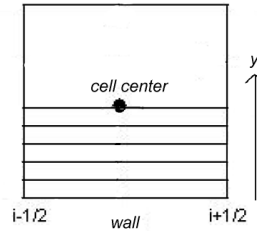


FIGURE V.2 – Sous-maillage dans une cellule adjacente à la paroi.

Un sous-maillage 1D est construit entre la paroi et le centre de la première maille adjacente à la paroi (dans un cadre volumes finis cell-centered) comme indiqué sur la figure V.8). Les équations TBLE sont discrétisées et résolues sur ce sous-maillage imbriqué dans la première maille. L'intégration est effectuée au moyen d'un algorithme de Newton pour le cisaillement pariétal τ_w . Le nombre de noeuds du sous-maillage a été fixé à 30 (voir [42] pour plus de détails).

On s'intéresse à deux géométries de Venturi pour lesquelles se développent une poche de cavitation instationnaire en aval du col (due à la diminution de pression dans le divergent). Le premier Venturi est caractérisé par un angle du divergent de 4° . Au condition de l'expérience, une poche instationnaire d'environ 80 mm de longueur moyenne se forme, dont la moitié est attachée au col et la 2nde partie, fluctuante, est liée à une recirculation (voir figure V.3). On observe un écoulement de retour composé d'un mélange liquide-vapeur : le jet rentrant. La dynamique de la

poche est apériodique. Des mesures de profils de vitesse longitudinale et de taux de vide moyens ont été effectuées à 5 stations illustrées sur la figure V.3 [9].

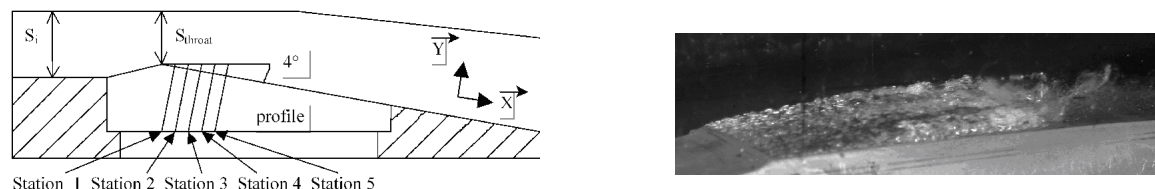


FIGURE V.3 – Schéma du Venturi 4° et visualisation de la poche.

Différents maillages ont été construits pour lesquels la valeur du y^+ de première maille varie. Tous les maillages sont composés de 251 noeuds dans la direction de l'écoulement avec un raffinement en aval du col. Les valeurs de y^+ obtenues à partir d'un calcul non cavitant varient entre 9 et 60 près du col (figure V.4). Tous les calculs ont été réalisés avec le modèle de paroi à deux couches et un modèle à 3 équations.

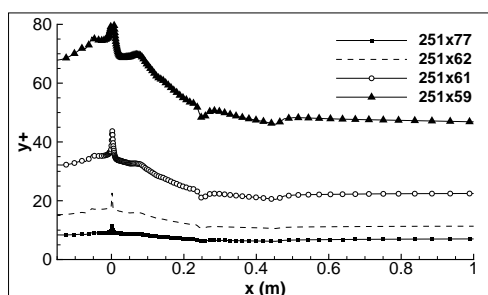


FIGURE V.4 – Evolution du y^+ de première maille près du col du Venturi 4°.

Les comparaisons sont axées sur le profil de vitesse moyenne obtenue à la station 3, qui correspond au développement du jet rentrant. Quatre maillages et quatre modèles de turbulence (couplés avec un limiteur de viscosité turbulente) sont comparés sur la figure V.5. Selon le modèle de turbulence, différents comportements sont illustrés. Pour le modèle $k - \ell$ de Smith, les résultats obtenus avec les 4 maillages sont similaires et en très bon accord avec l'expérience. Pour le modèle $k - \varepsilon$ de Jones-Launder, le jet-rentrant n'est pas calculé avec le maillage le plus grossier 251×59. Les résultats obtenus avec les 3 autres maillages sont similaires et en bon accord avec l'expérience. Pour le modèle de Spalart-Allmaras, on observe des écarts importants entre les solutions. Avec les maillages extrêmes (le plus grossier et le plus fin) le jet rentrant n'est pas calculé. Le maillage intermédiaire 251 × 62 permet d'obtenir un bon résultat. Enfin, avec le modèle $k - \omega$ SST de Menter, le meilleur résultat est aussi obtenu avec le maillage intermédiaire 251 × 62. La solution est dégradée avec le maillage plus fin et les maillages plus grossiers. En conclusion, le maillage de proche paroi a une forte influence sur la simulation du jet rentrant et de la recirculation. De plus, le maillage le plus fin ne permet pas forcément d'obtenir le meilleur résultat (des calculs en maillage fin $y^+ \simeq 1$ ont aussi été effectués).

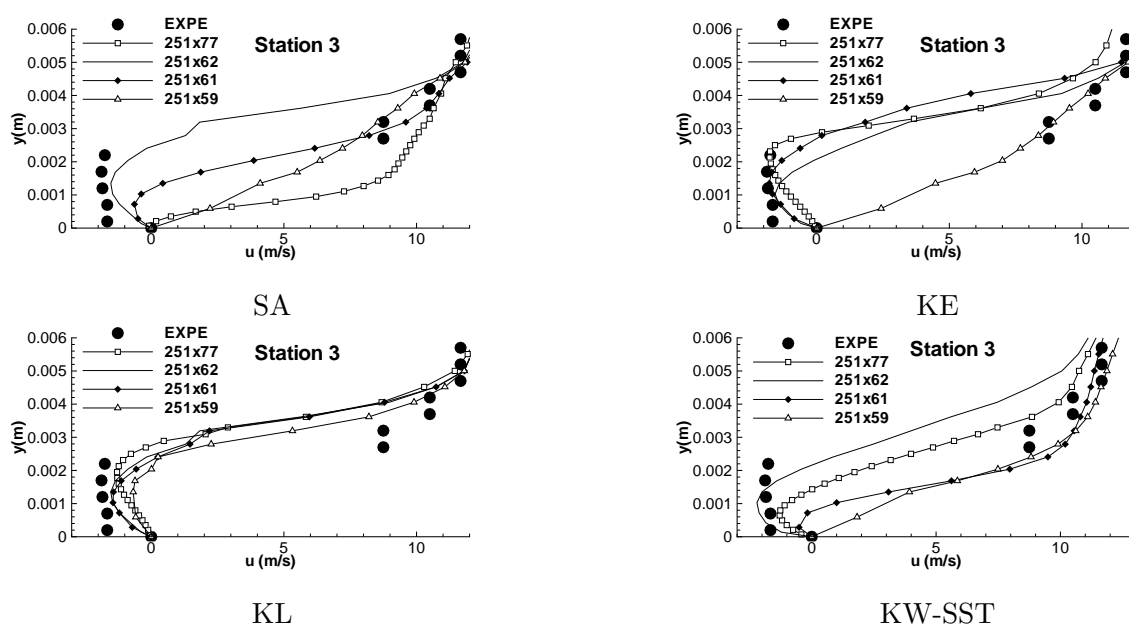


FIGURE V.5 – Profils de vitesse moyenne au puits 3, Venturi 4°.

La comparaison des deux modèles de paroi (deux couches et TBLE) associés au modèle $k-l$ de Smith est effectuée sur le maillage 251×62 . La figure V.6 montre les profils de vitesse moyenne (à droite) et de taux de vide moyen (à gauche) au puits 3. Les résultats obtenus avec les deux approches sont similaires et en très bon accord avec l'expérience.

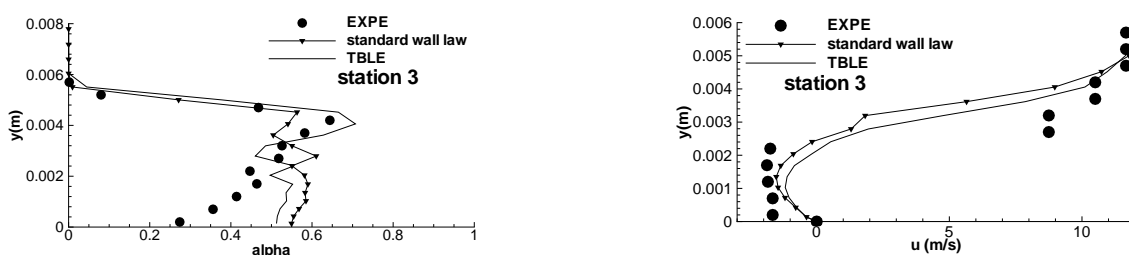


FIGURE V.6 – Profils de taux de vide et vitesse moyens au puits 3, Venturi 4°.

Le second Venturi est caractérisé par un angle du divergent de 8° . Au condition de l'expérience, une poche oscillante périodique auto-entretenu est observée avec une fréquence d'environ 45 Hz. Un cycle comprend le développement du jet rentrant qui remonte vers le col, casse la poche et permet le lâcher de structures diphasiques vers l'aval (voir photo de la poche sur la figure V.7). Des mesures de profils de vitesse longitudinale et de taux de vide moyens ont été effectuées à 3 stations illustrées sur la figure V.7 [6]. Le paramètre de cavitation en entrée est d'environ $\sigma_{entree} \sim 2.15$.

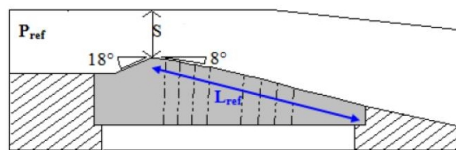


FIGURE V.7 – Schéma du Venturi 8° et visualisation de la poche.

Comme pour le précédent Venturi, une série de maillages pour lesquels le y^+ de première maille varie a été construite. Des simulations instationnaires ont été réalisées avec le modèle de turbulence $k - \ell$ de Smith et le modèle de paroi à deux couches (voir [42]). Le tableau V.2 donne la fréquence calculée, le nombre de cavitation en entrée et le coût CPU par rapport à un calcul en maillage fin.

maillage	y^+	σ_{entree}	fréquence (Hz)	CPU ratio
174 × 77	2	2.13	30	1
		2.18	pas de fréquence	
174 × 62	4	2.13	35	0.817
		2.17	40	
174 × 60	8	2.13	35	0.80
		2.19	43.5	
174 × 59	12	2.14	44	0.776
174 × 57	20	2.145	46	0.747
174 × 56	30	2.14	46	0.736

TABLE V.2 – Fréquence du phénomène, paramètre de cavitation et coût CPU, Venturi 8°.

On constate que le maillage le plus fin (calculé sans lois de paroi) ne permet pas de trouver la bonne fréquence au condition de l'écoulement. Ceci est sans doute dû au mauvais comportement des fonctions d'amortissement de la turbulence des modèles. Le déraffinement de la zone de paroi améliore la simulation. Pour les 3 maillages les plus grossiers, une poche oscillante à la bonne fréquence a été simulée. De plus, les profils de vitesse moyenne obtenus avec ces maillages sont en bon accord avec l'expérience (non présentés ici). Enfin le gain en temps de calcul est de 25% par rapport au maillage fin.

Pour finir, des comparaisons ont été effectuées entre les deux modèles de paroi sur ce deuxième Venturi [42]. Les résultats pour la fréquence et les profils moyens ont été similaires. En conclusion, la loi de paroi à deux-couches semble être une bonne approximation pour le calcul de poches de cavitation.

V.4 Méthodes numériques

La résolution numérique d'un système à 3 ou 4 équations est confrontée à plusieurs difficultés :

- Forte variation de la vitesse du son au sein de l'écoulement conduisant à la présence simultanée de zones compressibles et incompressibles.

La variation importante de la vitesse du son s'illustre à partir du cas de l'eau et de la formule de Wallis pour le calcul de la vitesse du son dans un mélange liquide/vapeur. La vitesse du son dans l'eau liquide est de l'ordre de 1500 m/s tandis que la vitesse du son dans la vapeur est de l'ordre de 450 m/s. En revanche, la vitesse du son de Wallis dans un mélange liquide/vapeur est a minima de l'ordre de 4 m/s. Par conséquent, les effets de compressibilité évalués à partir du nombre de Mach M diffèrent fortement d'une zone à l'autre de l'écoulement en fonction de la composition du mélange. En reprenant les valeurs précédentes des vitesses du son pour un écoulement dont la vitesse moyenne est de 10 m/s, on obtient les valeurs suivantes pour le nombre de Mach : $M_{liq} = 0.007$; $M_{vap} = 0.02$ et $M_{mel} = 2.5$. Le nombre de Mach varie donc sur 3 à 4 décades. La juxtaposition de zones compressibles et incompressibles pose de nombreux problèmes. Les codes de calculs sont séparés en deux catégories : les codes compressibles (density-based) étendus pour traiter les zones à bas nombre de Mach et les codes incompressibles (pressure-based) étendus pour traiter une masse volumique variable.

La proportion de zones incompressibles dans l'écoulement étant largement supérieure à la proportion de zones compressibles, de nombreux codes de calcul utilisent un formalisme incompressible pour la simulation des écoulements cavitants avec une modification de l'algorithme pour traiter les zones à masse volumique variable. Cependant, c'est la zone de mélange dans laquelle les effets de compressibilité sont les plus sensibles qui demande des efforts de modélisation et est le siège des phénomènes associés à la cavitation. De plus, une approche compressible permet naturellement d'introduire de la thermodynamique via les lois d'états et de traiter des aspects propagatifs (ondes de pression qui participent à la physique des problèmes).

D'autre part, les fortes variations et la non monotonie de la vitesse du son raidissent la résolution numérique. Par exemple, considérons le cas de la double raréfaction dans un tube de 1 m de long, initialement rempli d'eau à 1 bar, avec une discontinuité de vitesse placée à mi-tube. Deux ondes de détentes et deux fronts d'évaporation apparaissent et se déplacent vers les extrémités du tube. La forte dépression est à l'origine d'une "poche" de cavitation qui se forme au centre du tube, avec un taux de vide proche de 1. L'évolution de la vitesse du son du mélange (modèle transport de taux de vide, voir [38]) le long du tube est illustrée sur la figure V.8. On peut observer la grande variation de la vitesse du son entre la zone liquide, la zone de mélange et la zone de quasi vapeur pure au centre du tube. Ces fortes variations entraînent la divergence ou l'explosion de nombreux calculs.

Enfin, on observe une perte d'efficacité des phases implicites pour la simulation de poches

de cavitation. Les phases implicite usuelles sont peu efficaces en écoulements cavitant où le nombre de CFL est inférieur à 0.5. Ceci serait lié aux gradients de vitesse de son. Des travaux récents ont montré l'intérêt d'introduire les variations de vitesse du son dans la formulation pour retrouver une meilleure efficacité (voir [14]).

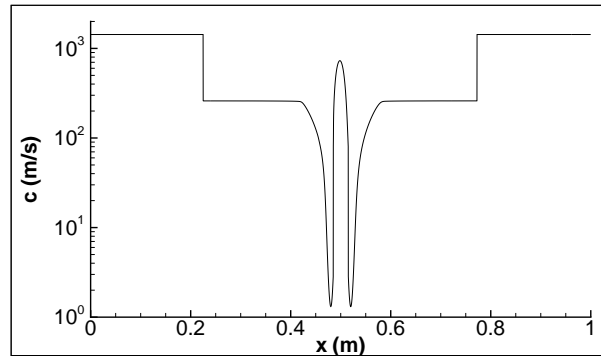


FIGURE V.8 – Vitesse du son du mélange le long du tube à détente.

- Forts gradients de masse volumique entre le liquide et la vapeur.

Le ratio entre les masses volumiques des phases pures ρ_l/ρ_v est extrêmement grand pour l'eau - autour de 50000 - ce qui raidit fortement la résolution numérique. Pour le cas de la double raréfaction dans un tube de 1 m rempli d'eau, avec une fraction initiale de gaz de 10^{-2} et sans transfert de masse, différents schémas à capture de choc ont été comparés : AUSM+up, VF Roe non conservatif, HLLC, Rusanov et Jameson-Schmidt-Turkel. L'évolution de la pression et du taux de vide pour un maillage de 5000 noeuds est présentée sur la figure V.9, à un instant t fixé. Tous les schémas ont permis d'obtenir une solution correcte.

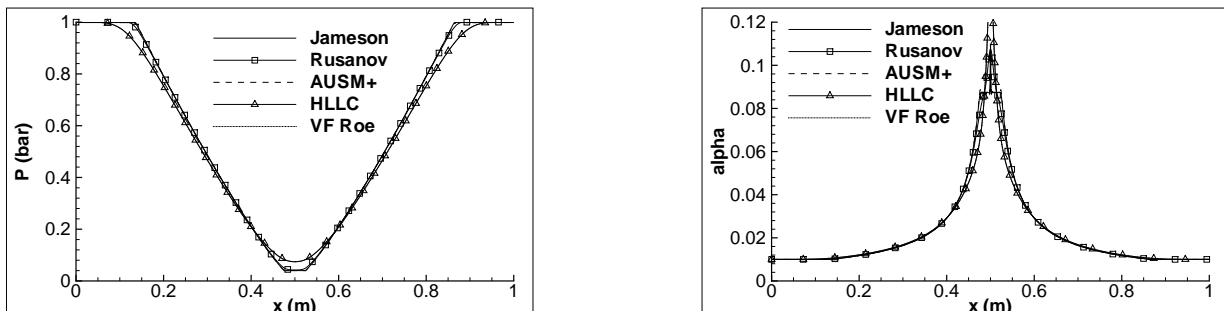


FIGURE V.9 – Double raréfaction en eau sans transfert de masse.

Sur ce même cas, lorsque le transfert de masse est introduit, les gradients de masse volumique sont beaucoup plus forts. Le taux de vide dans la poche de cavitation grimpe jusqu'à 70% lorsque la vitesse de stretch du fluide est de 2 m/s et est proche de 100% lorsque la vitesse est de 100 m/s. Pour tous les cas avec transfert de masse, il a été impossible d'obtenir une solution avec les schémas AUSM+up, VF Roe non conservatif et HLL couplés avec un modèle de transport du taux de vide. Seuls les schémas les plus diffusifs, Rusanov et Jameson, ont permis d'obtenir une solution correcte. La figure V.10 présente l'évolution de la pression et du taux de vide avec transfert de masse pour le cas où la discontinuité

de vitesse initiale est de 2 m/s. Les solutions obtenues avec les schémas de Jameson et Rusanov sont comparées avec la solution 2-fluide de Zein et al. [81].

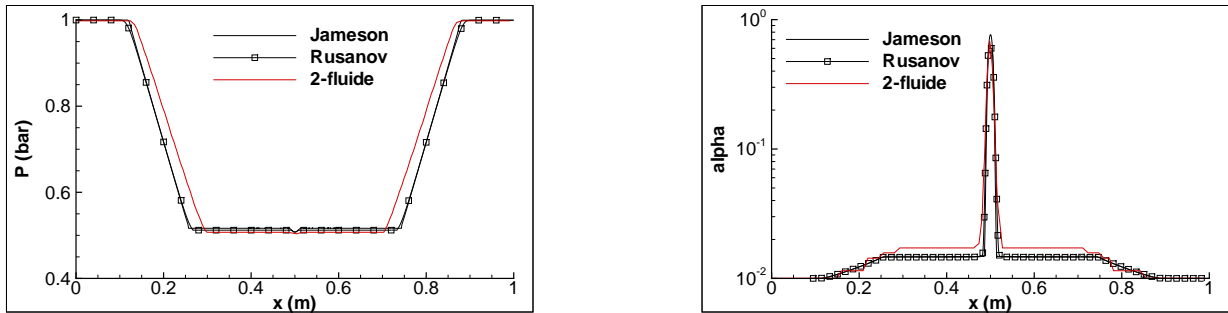


FIGURE V.10 – Double raréfaction en eau avec transfert de masse.

D'autre part, la valeur de ρ_v doit en général être introduite dans les codes de calculs. Il peut être choisi une valeur plus grande que la valeur physique à saturation pour réduire la raideur du système à intégrer. Par exemple, pour l'eau à 20°, $\rho_v^{sat} = 0.02 \text{ kg/m}^3$. Certains calculs sont effectués avec une valeur plus grande, 1 ou 10.

Un test de l'influence de la valeur de ρ_v a été effectué sur le cas du Venturi 4° avec un modèle 1-fluide à 3 équations et le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras sans limiteur de viscosité turbulente. La figure présente le contour de taux de vide en aval du Venturi pour deux calculs : à droite $\rho_v=10 \text{ kg/m}^3$ et à gauche $\rho_v=1 \text{ kg/m}^3$. On constate que la solution est bien différente entre les deux cas. Avec la valeur la plus élevée de la masse volumique de la phase vapeur, la poche est épaisse avec une interface très diffuse et ne présente pas de recirculation en zone de fermeture. Avec l'autre valeur, la poche est plus fine, l'interface plus raide et une recirculation est bien visible avec un lâcher de structure. La diminution de ρ_v à la valeur physique modifie peu la poche simulée. Un facteur ρ_l/ρ_v de 1000 semble être un minimum pour ces simulations.

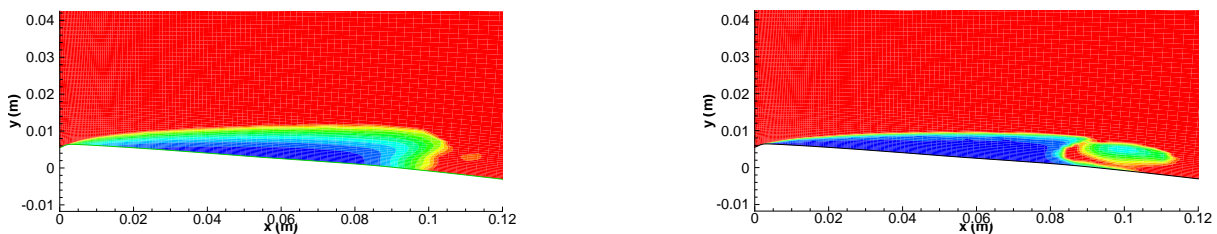


FIGURE V.11 – Champ de taux de vide dans la poche de cavitation du Venturi 4°, $\rho_v=10 \text{ kg/m}^3$ (droite) et $\rho_v=1 \text{ kg/m}^3$ (gauche).

- Propagation d'ondes de pression.

Pour les géométries confinées (Venturi, canaux, turbomachines...), les ondes de pression générées par le collapse des structures transisent dans le domaine de calculs. Il se pose le problème du traitement des conditions aux limites pour éviter un retour d'ondes parasites (conditions non reflectives).

Considérons par exemple la simulation instationnaire du Venturi 8° avec un modèle de transport de taux de vide. La figure V.12 présente le champ de pression obtenu avec deux

conditions de sortie différentes : à droite une condition de pression et à gauche une condition de non réflexion. On observe des perturbations de pressions parasites en sortie qui remontent l'écoulement avec la condition de pression.

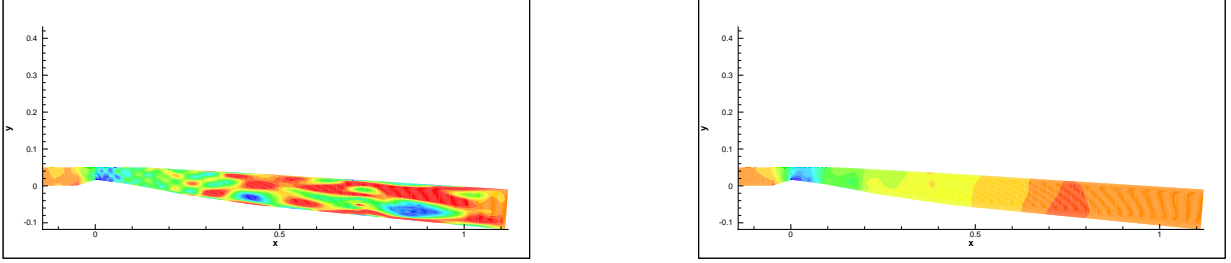


FIGURE V.12 – Champ de pression instantanée, Venturi 8°.

- Equation non conservative avec termes sources raides.

Dans de nombreux modèles diphasiques apparaît une équation non conservative pour la fraction volumique de gaz. Différents travaux se sont intéressés à la résolution d'une équation de transport sous forme conservative ou non associée à un problème multifluide [1, 2, 71, 72]. Il a été montré que la discrétisation du système conservatif ne donnait pas de résultats corrects et que des oscillations de pression autour de l'interface apparaissaient. Ces perturbations sont d'autant plus fortes que les rapports de densité et de pressions entre les fluides considérés sont élevés. Le point de départ est lié à la remarque suivante : l'évolution de la pression au cours du temps dépend uniquement des gradients de vitesse et de pression, or à travers une discontinuité de contact ou interface ces gradients sont nuls, ce qui signifie que la pression doit rester constante. Ainsi si la vitesse u et la pression P sont uniformes dans l'écoulement au temps $n\Delta t$, ils doivent le rester au temps $(n+1)\Delta t$. Ce principe de "préservation" de l'interface permet de mettre en évidence une discrétisation non conservative d'équation de transport du problème.

Considérons un système 1-fluide à 4 équations avec une équation de transport du taux de vide du type (formulée en 1D) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S \quad (\text{V.8})$$

On utilisera une formulation divergence pour l'intégration volumes finis :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u}{\partial x} = S + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{V.9})$$

A comparer avec une formulation conservative basée sur l'intégration de la variable $\rho\alpha$ selon l'équation :

$$\frac{\partial \rho\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho\alpha u}{\partial x} = \rho S \quad (\text{V.10})$$

Nous comparons ces deux formulations sur le cas de la double raréfaction avec une fraction de gaz initiale $\alpha_{init} = 10^{-2}$ et une vitesse de stretch du fluide de 2 m/s. La figure V.13 donne l'évolution de la pression au temps $t = 3.2$ ms obtenue en intégrant l'équation du taux de vide sous forme non conservative. Le schéma de Rusanov est utilisé pour ce calcul. Un zoom du centre du tube est tracé sur la droite où une petite baisse de la pression est

visible (due à un faible refroidissement local car la vaporisation est endothermique). La solution numérique est non oscillante.

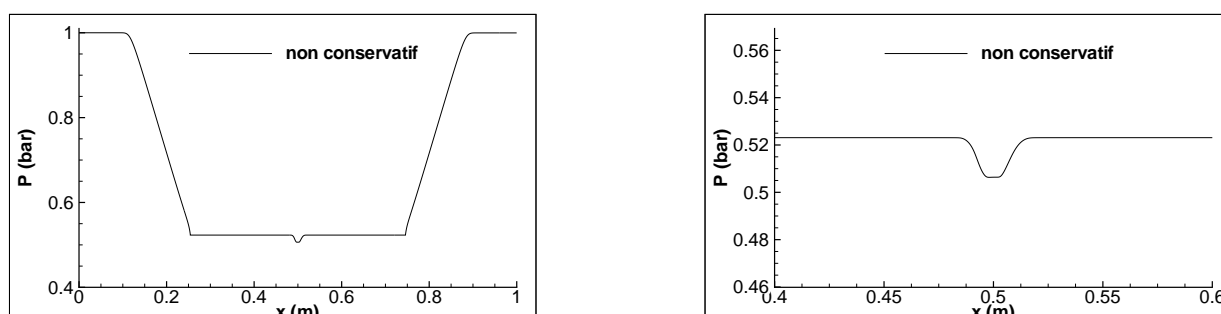


FIGURE V.13 – Double raréfaction en eau avec transfert de masse, forme non conservative.

La forme conservative est intégrée avec le schéma de Rusanov. L'évolution de la pression au même instant est tracée sur la figure V.14. On observe des oscillations de la solution numérique, bien visibles sur la partie droite de la figure.

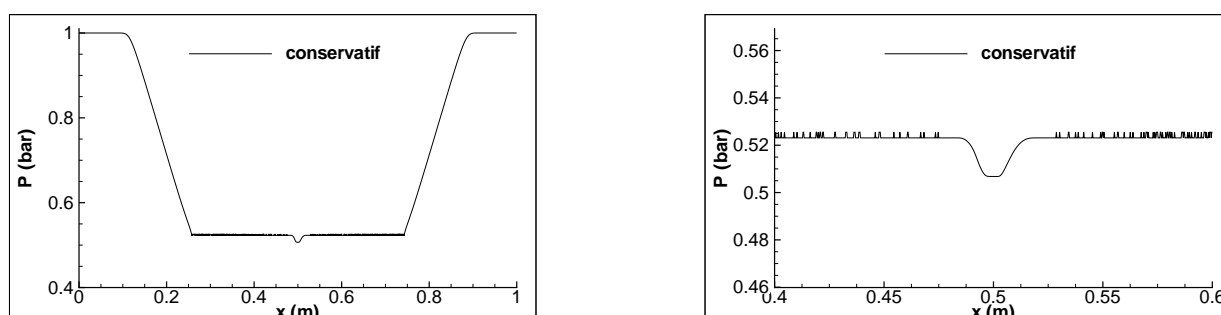


FIGURE V.14 – Double raréfaction en eau avec transfert de masse, forme conservative.

Enfin, la difficulté de résolution de l'équation de transport du taux de vide α est aussi liée à la présence d'un terme source plus ou moins compliqué incluant des gradients des variables primitives. Il se pose le problème de l'implication du terme source (linéarisation, détermination du jacobien, etc.).

V.5 Codes compressible et incompressible

Les écoulements cavitants faisant intervenir à la fois des zones compressibles et incompressibles, aussi bien des codes compressibles (hyperboliques) qu'incompressibles (elliptiques) ont été utilisés pour simuler la cavitation.

Les codes compressibles sont basés sur la résolution couplée des lois de conservation compressibles auxquelles s'ajoutent des lois thermodynamiques permettant d'évaluer la pression et la température du mélange. Pour les écoulements à basse vitesse, la dominance du terme de convection rend le système raide ce qui nuit à la convergence des solveurs compressibles. Un préconditionnement est alors nécessaire. Les ondes acoustiques physiques sont remplacées par des pseudo-ondes qui évoluent à une vitesse plus proche de la vitesse de l'écoulement, réduisant la raideur du système. Les codes incompressibles sont basés sur la résolution ségréguée des lois de conservation incom-

pressibles auxquelles s'ajoute une équation de Poisson pour la pression. Les algorithmes utilisés reposent sur des méthodes de prédiction-corrrection, dans laquelle on estime la solution par des quantités intermédiaires, puis on les corrige afin qu'elles vérifient la divergence de la vitesse nulle, et ainsi de suite jusqu'à ce que les corrections appliquées tendent vers zéro. L'algorithme couramment utilisé pour effectuer l'avance en temps est la méthode SIMPLE ou l'une de ses variantes. Cet algorithme se base sur une prédiction de la pression puis une correction de cette valeur estimée. Dans la simulation d'un écoulement cavitant, la densité peut être déterminée à partir de la pression (via une loi barotrope $\rho(P)$) ou par une équation de transport du taux de vide. Un exemple d'algorithme SIMPLE modifié pour traiter la cavitation est donné sur la figure V.15.

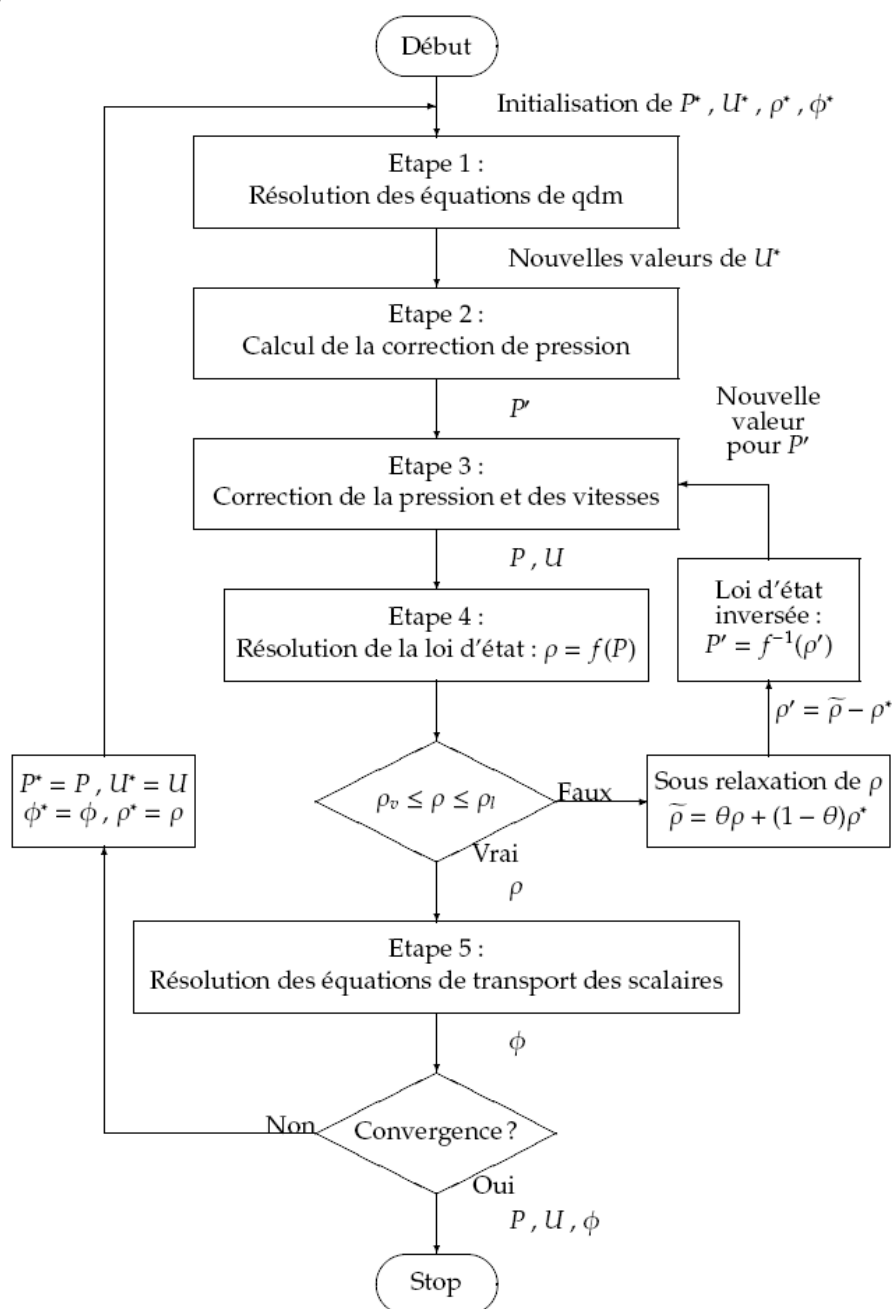


FIGURE V.15 – Algorithme SIMPLE modifié pour la cavitation.

V.5.1 Préconditionnement du système compressible à 3 équations

Le preconditionnement est basé sur la modification du terme de dérivée temporelle par une multiplication avec une matrice P_e , dite matrice de preconditionnement en variable primitive. On choisit le jeu de variables primitives $W = (P, u, s)$ où s désigne l'entropie spécifique. Les équations d'Euler 1-fluide preconditionnées s'écrivent :

$$P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.11})$$

La matrice de Turkel est utilisée [46, 78] :

$$P_e = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_e = \begin{bmatrix} u & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

β est un paramètre d'ordre de grandeur du nombre de Mach local. Nous avons choisi la formulation de Choi et Merkle :

$$\beta^2 = \min [\max (M^2, \theta M_\infty^2), 1] \quad (\text{V.12})$$

Cette forme implique qu'il n'y a pas de preconditionnement en régime transonique et supersonique (dans le mélange liquide/vapeur). Dans ce cas, $\beta^2 = 1$, la matrice P_e devient la matrice identité. De plus, pour une vitesse très faible, β^2 ne dépasse pas un certain pourcentage de la vitesse infinie amont M_∞ , déterminé par le coefficient θ . Pour des calculs non visqueux, θ est usuellement pris égal à 1.

Les valeurs propres du système preconditionné sont :

$$u \quad ; \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[u(1 + \beta^2) \pm \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u^2 + 4\beta^2 c^2} \right] \quad (\text{V.13})$$

En variables conservatives $w = [\rho, \rho u, \rho E]$, la forme correspondante est :

$$P_c^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + A_c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.14})$$

Avec la matrice de preconditionnement $P_c^{-1} = \frac{\partial w}{\partial W} P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial w}$ et A_c désigne la matrice jacobienne des flux convectif.

La matrice P_c peut s'écrire : $P_c^{-1} = I_d + \frac{(1 - \beta^2)}{\beta^2(h - q)} \times M$ où I_d est la matrice identité et la matrice M est définie par [43] :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} & -u & 1 \\ \frac{u^2}{2} u & -u^2 & u \\ \frac{u^2}{2} (H - q) & -u(H - q) & H - q \end{bmatrix}$$

Cette matrice M est idempotente (i.e. $M^2 = M$). L'inverse de P_c peut alors facilement se calculer : $P_c = I_d + \frac{(\beta^2 - 1)}{(h - q)} \times M$.

Caractéristiques préconditionnées pour les conditions aux limites

Le traitement numérique des conditions aux limites repose sur l'utilisation des caractéristiques du système des équations d'Euler préconditionnées. Les relations de compatibilité discrétisées s'écrivent, pour un écoulement bidimensionnel :

$$-c^2(\rho^c - \rho^s) + (P^c - P^s) = 0 \quad (\text{V.15})$$

$$V_t^c - V_t^s = 0 \quad (\text{V.16})$$

$$(\lambda_+ - V_n)(P^c - P^s) + \rho\beta^2 c^2(V_n^c - V_n^s) = 0 \quad (\text{V.17})$$

$$(\lambda_- - V_n)(P^c - P^s) + \rho\beta^2 c^2(V_n^c - V_n^s) = 0 \quad (\text{V.18})$$

Les variables avec l'exposant c sont celles à calculer aux frontières. Les variables avec l'exposant s désigne celles obtenues avec le schéma numérique. V_t et V_n sont respectivement les composantes tangente et normale de la vitesse.

En entrée, quatre variables doivent être imposées : on choisit les pression et température d'arrêt P_i et T_i ainsi que la direction de la vitesse (deux angles). Une méthode de Newton permet d'évaluer la pression à partir de la relation (V.25) et les variables conservatives peuvent être évaluées à la frontière.

En sortie, seulement une variable est imposée : on choisit la pression statique. Les variables conservatives sont calculées à partir des trois relations (V.22)-(V.24).

On suppose qu'à l'entrée et sortie du domaine de calcul, l'écoulement est composé de liquide pur (pas de cavitation, ni de transport de vapeur).

V.5.2 Préconditionnement du système compressible à 4 équations

On considère un modèle avec une équation de transport du taux de vide [41]. En variables primitives $W = (P, u, e, \alpha)$, les équations d'Euler préconditionnées s'écrivent :

$$P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.19})$$

On utilise une forme de matrice de preconditionnement suivant les travaux de Turkel :

$$P_e = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_e = \begin{bmatrix} u & \rho c^2 & 0 & 0 \\ 1/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & P/\rho & u & 0 \\ 0 & -K & 0 & u \end{bmatrix}$$

où β suit la formulation de Choi et Merkle comme précédemment.

Les valeurs propres du système préconditionné sont :

$$u; u \quad ; \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[u(1 + \beta^2) \pm \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u^2 + 4\beta^2 c^2} \right] \quad (\text{V.20})$$

En variables conservatives (sauf pour α) $w = [\rho, \rho u, \rho E, \alpha]$, la forme correspondante est :

$$P_c^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + A_c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.21})$$

Avec la matrice de préconditionnement $P_c^{-1} = \frac{\partial w}{\partial W} P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial w}$ et A_c désigne la matrice jacobienne des flux convectifs.

La matrice P_c peut s'écrire : $P_c^{-1} = I_d + \frac{(1 - \beta^2)}{\beta^2} \times M$ où I_d est la matrice identité et la matrice M est définie par :

$$M = \frac{F}{G} \times \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} - A & -u & 1 & -C \\ (\frac{u^2}{2} - A)u & -u^2 & u & -Cu \\ (\frac{u^2}{2} - A)E & -uE & E & -CE \\ (\frac{u^2}{2} - A)J & -uJ & J & -CJ \end{bmatrix}$$

Avec les quantités A, B, C, F, G, J définis par :

$$\begin{aligned} d(\rho e) &= Ad\rho + BdP + Cd\alpha \\ \frac{1}{\tilde{c}^2} &= \frac{1 - \alpha}{c_l^2} + \frac{\alpha}{c_v^2} \\ A &= \left(\frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_{P, \alpha} = \alpha(q_v - q_l) \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial \rho} \right)_{\alpha} = \alpha(q_v - q_l) \frac{\tilde{c}^2}{c_v^2} \\ B &= \left(\frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_{\rho, \alpha} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \\ C &= \left(\frac{\partial \rho e}{\partial \alpha} \right)_{\rho, P} = \rho_v(e_v - q_v) - \rho_l(e_l - q_l) + \rho_I(q_v - q_l) \\ F &= \frac{\tilde{c}^2}{\gamma - 1} (\rho_l - \rho_v) + C \\ G &= (e - A)(F + C) - C \frac{\tilde{c}^2}{\gamma - 1} \\ J &= \frac{1 - \frac{\gamma - 1}{\tilde{c}^2} (e - A)}{(\rho_l - \rho_v) + C \left(\frac{\gamma - 1}{\tilde{c}^2} \right)} \end{aligned}$$

Cette matrice M est idempotente et l'inverse de P_c est : $P_c = I_d + (\beta^2 - 1) \times M$.

Vecteurs propres et relations caractéristiques du système à 4 équations

Le système en variables primitives $W = (\alpha, P, u, e)$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha \\ P \\ u \\ e \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & -K & 0 \\ 0 & u & \rho c^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & P/\rho & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha \\ P \\ u \\ e \end{pmatrix} = 0$$

Les valeurs propres sont $(u, u, u - c, u + c)$ et les vecteurs propres à droite associés :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} -\frac{K\rho}{\rho^2 c^2} \\ \frac{P}{\rho c} \\ -\frac{P}{P} \\ 1 \end{pmatrix} \quad R_4 = \begin{pmatrix} -\frac{K\rho}{\rho^2 c^2} \\ \frac{P}{\rho c} \\ \frac{P}{P} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres à gauche sont

$${}^tL_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{\rho^2 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}^tL_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho c^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^tL_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2\rho^2 c^2} \\ -\frac{P}{2\rho c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^tL_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2\rho^2 c^2} \\ \frac{P}{2\rho c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les relations caractéristiques sont données par :

$${}^tL_i \left(\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} - \frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{dP}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \\ \frac{dP}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Caractéristiques préconditionnées du système à 4 équations

Le traitement numérique des conditions aux limites repose sur l'utilisation des caractéristiques du système des équations d'Euler preconditionnées. Les relations de compatibilité discrétisées s'écrivent, pour un écoulement bidimensionnel :

$$-c^2(\rho^c - \rho^s) + (P^c - P^s) = 0 \quad (\text{V.22})$$

$$V_t^c - V_t^s = 0 \quad (\text{V.23})$$

$$\rho(\alpha^c - \alpha^s) - K(\rho^c - \rho^s) = 0 \quad (\text{V.24})$$

$$(\lambda_+ - V_n)(P^c - P^s) + \rho\beta^2 c^2 (V_n^c - V_n^s) = 0 \quad (\text{V.25})$$

$$(\lambda_- - V_n)(P^c - P^s) + \rho\beta^2 c^2 (V_n^c - V_n^s) = 0 \quad (\text{V.26})$$

Les variables avec l'exposant c sont celles à calculer aux frontières. Les variables avec l'exposant s désignent celles obtenues avec le schéma numérique. V_t et V_n sont respectivement les composantes tangente et normale de la vitesse.

En entrée, on impose les pression et température génératrices, la direction de la vitesse et la valeur initiale du taux de vide. La pression est évaluée avec la relation (V.26) et toutes les variables peuvent être calculées à la frontière.

En sortie, la pression statique est imposée. Les variables conservatives sont calculées au moyen des 4 relations (V.22)-(V.25).

V.5.3 Comparaison de codes compressible et incompressible

Nous comparons le code compressible préconditionné CaviFlow avec le code incompressible IZ sur le cas du Venturi 4° . Ce dernier résout un système 1-fluide barotrope couplé à un modèle de turbulence à équation de transport. La résolution numérique repose sur une méthode pression-vitesse de type SIMPLE modifiée pour prendre en compte les variations de la masse volumique du mélange. Les calculs sont instationnaires et la masse volumique est calculée via une relation barotrope sinusoidale [26, 27].

Les calculs instationnaires ont été effectués sur le même maillage. Le modèle de cavitation repose sur une loi d'état sinus pour les deux codes (loi barotrope pour le code incompressible et loi d'état isotherme pour le code compressible). Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ couplé avec le limiteur de Reboud a été utilisé (voir [40]). Une visualisation qualitative des poches de cavitation simulées est présentée sur la figure V.16 où le taux de vide instantané est tracé. Les solutions numériques obtenues sont bien différentes : la solution compressible restitue une poche en bon accord avec les visualisations expérimentales (poche attachée au col jusqu'à l'abscisse $x = 0.03$ m suivi d'une recirculation avec des lâchers de structures diphasiques peu étendus) ; au contraire, le code incompressible a fourni une poche oscillante périodique à basse fréquence (autour de 6 Hz) sans jet-retrant.

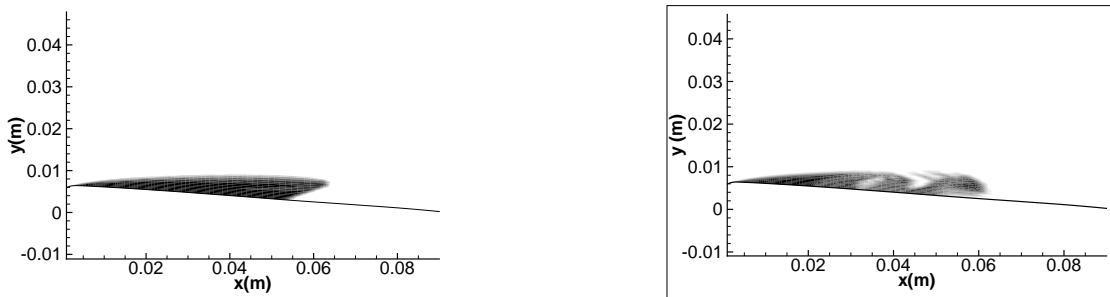


FIGURE V.16 – Contour instantané du taux de vide en aval du col du Venturi 4° , code incompressible (gauche) et code compressible (droite).

La figure V.17 présente les profils de vitesse longitudinale et de taux de vide moyens au puits 3. Pour le taux de vide, les profils moyens donnés par les deux codes sont très proches et en bon accord avec le profil expérimental. Le profil de vitesse moyen obtenu avec le code compressible présente une recirculation en bon accord avec l'expérience. Au contraire, la solution issue du

code incompressible ne fait pas apparaître le jet rentrant.

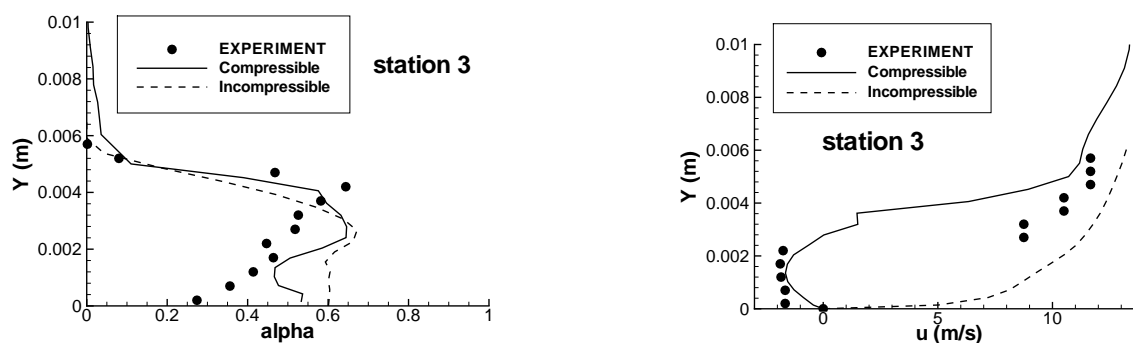


FIGURE V.17 – Profils de taux de vide (gauche) et de vitesse (droite) au puits 3, Venturi 4°.

Une autre comparaison avec le code incompressible openFOAM a été effectuée sur le même cas test. Les simulations ont été réalisées sur un maillage similaire (seules quelques mailles près de la sortie du domaine de calcul différent). Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST de Menter a été choisi. Les modèles de cavitation considérés sont basés sur une équation de transport du taux de vide, notamment le modèle de Kunz pour openFOAM (voir [20]).

La figure V.18 permet d'avoir une allure des poches de cavitation simulées par les deux codes via le tracé du contour instantané du taux de vide en aval du col du Venturi. La solution numérique fournie par le code OpenFOAM fait apparaître une poche attachée étendue avec un taux de vide proche de 1. On visualise près de la paroi autour de l'abscisse $x = 0.05$ m un fin film liquide (en rouge). Pour le code compressible, on peut observer une poche attachée jusqu'à l'abscisse $x = 0.03$ m avec un taux de vide proche de 1. En aval, une zone de lâchers diphasiques est bien visible. Ce résultat est en bon accord avec les visualisations expérimentales.



FIGURE V.18 – Contour instantané du taux de vide en aval du col du Venturi 4°, code incompressible (gauche) et code compressible (droite).

Sur la figure V.19 sont tracés les profils de taux de vide et vitesse moyens à la station de mesure 3. On observe que le taux de vide obtenu avec le code openFOAM est largement sur-estimé et atteint la valeur de 95%. De plus, l'épaisseur de la poche est sous-estimée et un film liquide est simulée près de la paroi. En ce qui concerne la prédiction du jet-retrant, la solution openFOAM reproduit très mal ce phénomène. Au contraire, la solution obtenue avec le code compressible est conforme à la poche expérimentale.

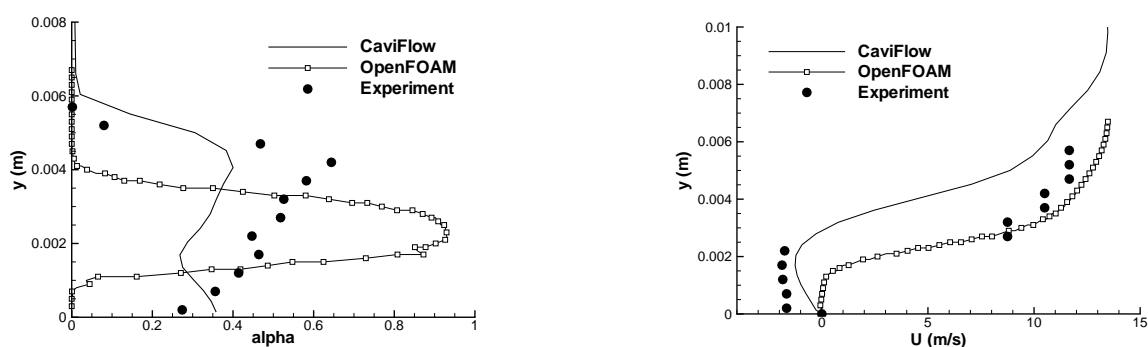


FIGURE V.19 – Profils de taux de vide (gauche) et de vitesse (droite) au puits 3, Venturi 4°.

Pour conclure, la topologie des poches de cavitation simulées par les deux codes incompressibles testés est en mauvais accord avec les résultats expérimentaux, notamment en ce qui concerne la simulation du jet-retrant. La confrontation avec l'expérience montre que le code compressible permet d'obtenir une bien meilleure description de la poche par rapport aux codes incompressibles. Est-ce lié à un aspect compressibilité de l'écoulement ? Ou un aspect propagatif lié aux ondes de pression qui transitent dans l'écoulement ?

V.6 Cavitation non isotherme

La cavitation est un phénomène endothermique. La vaporisation du liquide consomme de l'énergie, créant un refroidissement local dans la poche constituée d'un mélange liquide/vapeur. Dans le cas de la cavitation en eau froide, ce refroidissement est faible et influence peu les grandeurs thermodynamiques du fluide. Par contre, pour un fluide dit thermosensible, ce refroidissement peut être important et les grandeurs thermodynamiques du fluide varient de manière plus significative aux variations de température, en particulier la pression de vapeur saturante (Figure V.20). Pour une température locale plus faible, la pression de vapeur saturante diminue, et les phénomènes de cavitation sont atténués, ce qu'on appelle le retard thermodynamique à la cavitation.

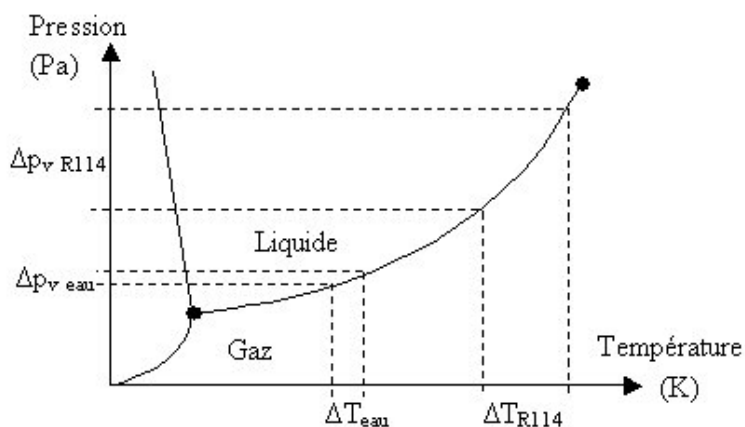


FIGURE V.20 – Diagramme de phase pression-température.

Les fluides thermosensibles (eau chaude, carburants, réfrigérants, fluides cryogéniques...) se caractérisent par une pente de la pression de vapeur dP_{vap}/dT très grande par rapport à l'eau froide. Par exemple, le tableau (V.6) compare les propriétés pour l'eau et le réfrigérant fréon R-114 à 20°.

	T_{ref} (K)	P_{vap} (bar)	ρ_l (kg/m ³)	ρ_v (kg/m ³)	dP_{vap}/dT (Pa/K)
eau	293	0.023	998	0.0173	146
fréon R-114	293	1.811	1471	13.53	6070

TABLE V.3 – Caractéristiques thermodynamiques de l'eau et du fréon R-114 à 20°

Un bilan enthalpique entre les deux phases permet d'évaluer la différence de température ΔT^* causée par l'effet thermodynamique. Le B -facteur est défini comme le rapport entre le refroidissement local effectif et ΔT^* [36] :

$$\Delta T^* = \frac{\rho_v L_{vap}}{\rho_l C_{pl}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\Delta T}{\Delta T^*} \quad (\text{V.27})$$

où L_{vap} est la chaleur latente et C_{pl} est la capacité calorifique à pression constante de la phase liquide. Le B -facteur est identique au nombre de Jakob Ja utilisé pour la description des écoulements bouillants.

V.6.1 Régime inertiel, régime thermique et temps caractéristiques

La modélisation du changement de phase non isotherme (cavitation ou ébullition) met en évidence une modification du phénomène due à l'échange de chaleur autour de la bulle. Une séparation a été proposée entre le régime inertiel où les transferts de chaleur sont peu importants et le régime thermique où les transferts de chaleur pilotent les processus d'évaporation et de condensation [55].

En régime inertiel, la croissance d'une bulle de vapeur sphérique est régie par l'équation de Rayleigh-Plesset. Pour un rayon initial R_0 le temps caractéristique de croissance est :

$$t_{inertiel} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho_l R_0^2}{(P_{vap} - P)}} \quad (\text{V.28})$$

En régime thermique, la croissance de la bulle est limitée par le flux de chaleur à l'interface entre le liquide et la vapeur. Dans ce cas, nous avons la relation suivante [76, 66] :

$$t_{thermique} = \frac{\pi}{16} \frac{R_0^2}{f(Ja) Ja^2 D_l^{th}} \quad (\text{V.29})$$

où $f(Ja)$ est une fonction correctrice et D_l^{th} est la diffusivité thermique de la phase liquide.

Pour un fluide thermosensible, la croissance d'une bulle commence en régime inertiel et le régime thermique apparaît très rapidement. Plus le fluide est thermosensible, plus le régime thermique apparaît rapidement. Pour des valeurs faibles du nombre de Jakob, le temps de transition entre

les deux régimes peut être évalué : il est plus petit que $1 \mu s$ pour l'eau chaude, le fréon R-114 et pour les fluides cryogéniques (LH_2 , LO_x). De même, on montre un résultat similaire pour la condensation de la bulle.

Ce qui veut dire qu'en pratique, pour la cavitation en fluide thermosensible, le régime thermique est dominant. Cependant, la plupart des travaux numériques sur la cavitation avec effets thermodynamiques est basée sur le régime inertiel (par exemple [48]), ce qui est incorrect. D'autres modèles commencent à se développer basés sur les échanges de chaleur interfaciaux et une cinétique de changement de phase [22].

Un point déterminant dans la modélisation des transferts de masse et de chaleur est lié à la fermeture des termes interfaciaux des modèles 2-fluide (modèles à 6 équations) ou la fermeture du terme de transfert de masse par des considérations thermiques dans les modèles 1-fluide à 4 équations. Usuellement, les termes interfaciaux sont reliés à des temps de relaxation ε_P, u, T, g relatifs à l'équilibre des pressions, vitesses, températures et potentiels chimiques. L'estimation de ces temps caractéristiques est très difficile à effectuer, notamment le temps de relaxation des potentiels chimiques. De même, un temps de relaxation apparaît dans la formulation du modèle HRM. Des relations empiriques issues d'expériences en ingénierie nucléaire ont été utilisées pour l'estimer. Cependant, ces temps ne sont pas universels et dépendent fortement de la configuration considérée et des conditions d'écoulements.

Selon les études effectuées en détonation présentées dans [50] et reprises dans [53], les temps de relaxation pour P, T et u ont été estimés :

$$\begin{aligned}\varepsilon_P &= 3.0 \cdot 10^{-8} s \\ \varepsilon_u &= 1.0 \cdot 10^{-7} s \\ \varepsilon_T &= 1.8 \cdot 10^{-2} s\end{aligned}$$

Pour un tel problème, le temps caractéristique de l'écoulement est d'environ 10^{-4} s. Donc les équilibres de pression et de vitesse se produisent rapidement. Cependant, le temps de retour à l'équilibre thermique est élevé en comparaison avec le temps caractéristique de l'écoulement : l'écoulement est donc en déséquilibre thermique.

Des estimations empiriques du temps de relaxation du potentiel chimique ont été proposées par EDF dans le cadre du projet NEPTUNE [16]. Ce temps ε_g pour un changement de phase eau/vapeur varierait entre 0.1 et 1 s.

Ainsi, il semble raisonnable de supposer que les temps de relaxation pour les vitesses et les pressions sont très rapides et à la limite infiniment rapide. Cependant pour les relaxations des températures et des potentiels chimiques, c'est bien plus flou. Vraisemblablement, l'hypothèse de temps de relaxations infinis est forte dans de nombreux cas.

V.6.2 Refroidissement et échauffement dans un Venturi en fréon R-114

Le fréon R-114 est un fluide thermosensible utilisé pour étudier la cavitation avec effets thermodynamiques à température ambiante. Une boucle d'essais a été mise en place au Cremhyg à

Grenoble et un Venturi caractérisé par un angle du divergent à 4° a été testé en régime cavitant [77, 37].

On s'intéresse à la simulation numérique de ce cas pour étudier les variations de température induites par le changement de phase. Des questions demeurent sur l'estimation du refroidissement local dans la poche lié à la vaporisation du liquide et le réchauffement du fluide en aval de la poche lié à la condensation de la vapeur. Un tel phénomène a été décrit dans le cas d'un Venturi en eau chaude [70] par l'utilisation de la thermographie infrarouge. Les auteurs ont mesuré une baisse de température d'environ 0.4 K au voisinage du col et une élévation de température jusqu'à 1.4 K en aval de la poche.

Différentes simulations stationnaires turbulentes ont été réalisées sur le Venturi en fréon R-114 avec un modèle à 3 équations [44] et un modèle à 4 équations [39]. La température de référence de l'écoulement est $T_{ref} = 20^\circ$. Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras a été utilisé pour ces comparaisons.

La figure V.21 présente la différence de température $T - T_{ref}$ dans le divergent du Venturi. Le refroidissement local dû à la vaporisation du liquide est bien visible (valeurs négatives). En aval de la poche, le comportement des modèles diffère. Avec le modèle à 3 équations la température du mélange est retournée à sa valeur de référence. Au contraire, le modèle de transport de taux de vide permet de simuler un réchauffement qui peut atteindre localement 4 K.

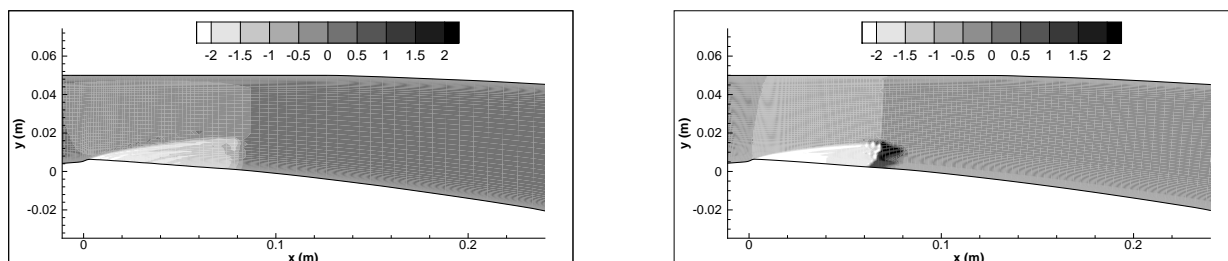


FIGURE V.21 – Différence de température $T - T_{ref}$ (K) en aval du col du Venturi : modèles 3-équation (gauche) versus 4-équation (droite).

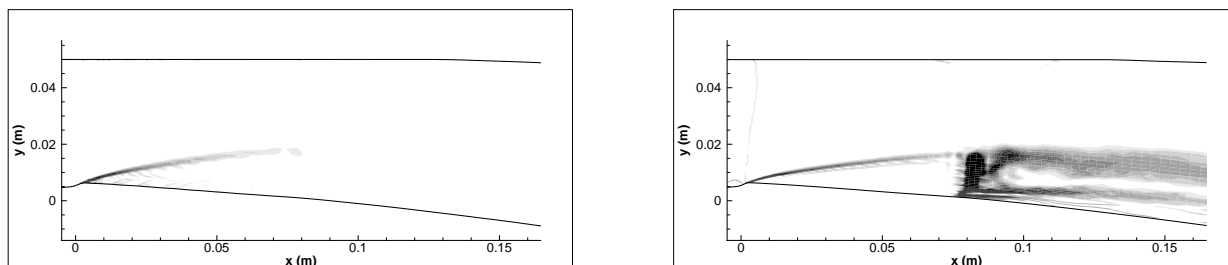


FIGURE V.22 – Gradient de température (K/m) en aval du col du Venturi : modèles 3-équation (gauche) versus 4-équation (droite).

Le gradient de température du mélange est illustré sur la figure V.22 pour les deux modèles (l'échelle de gris est la même pour les deux figures). La différence de comportement des modèles

est flagrante en zone de fermeture de la poche de cavitation. Le modèle à 3 équations ne restitue aucune variations de température à la fin de la poche. Au contraire, de forts gradients sont obtenus en zone de fermeture et en aval de la poche en utilisant le modèle de transport de taux de vide. Cependant, les ordres de grandeurs de ce réchauffement sont inconnus et dépendent fortement de la modélisation de la condensation.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :150–160, 1996.
- [2] R. Abgrall. Multi-component flow calculations by a consistent primitive algorithm. *Journal of Computational Physics*, 112 :31–43, 1996.
- [3] R. Abgrall. Sur l’approximation numérique d’écoulements diphasiques compressibles. In *17^{me} Congrès Français de Mécanique, Troyes, France, 2005*.
- [4] R. Abgrall and R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 186(2) :361–396, 2003.
- [5] V. Aeschlimann. *Une approche expérimentale pour la modélisation des écoulements turbulents cavitants*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2010.
- [6] V. Aeschlimann, S. Barre, and H. Djeridi. Unsteady cavitation analysis using phase averaging and conditional approaches in a 2D Venturi. *Open Journal of Fluid Dynamics*, 3 :171–183, 2013.
- [7] MR. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation (DDT) in reactive granular materials. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 12 :861–889, 1986.
- [8] T. Barberon and P. Helluy. Finite volume simulation of cavitating flows. *Computers & Fluids*, 34(7) :832–858, 2005.
- [9] S. Barre, J. Rolland, G. Boitel, E. Goncalves, and R. Fortes Patella. Experiments and modelling of cavitating flows in Venturi : attached sheet cavitation. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28 :444–464, 2009.
- [10] M. Barret, E. Faucher, and JM. Herard. Schemes to compute unsteady flashing flows. *AIAA Journal*, 40(5) :905–913, 2002.
- [11] M. Benedict, G.B. Webb, and L.C. Rubin. An empirical equation for thermodynamic properties of light hydrocarbons and their mixtures : methane, ethane, propane and n-butane. *Journal of Chem. Phys.*, 8(4) :334–345, 1940.
- [12] G. Berthoud. Equations de bilan pour les écoulements polyphasiques. Ecole thématique du CNRS, 2003.
- [13] D.C. Besnard and F.H. Harlow. Turbulence in multiphase flow. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 14(6) :679–699, 1988.

- [14] M. Bilanceri, F. Beux, and M.V. Salvetti. An implicit low-diffusive hll scheme with complete time linearization : application to cavitating barotropic flows. *Computers & Fluids*, 39 :1990–2006, 2010.
- [15] Z. Bilicki, R. Kwizinski, and SA. Mohammadein. Evaluation of the relaxation time of heat and mass exchange in the liquid-vapour bubble flow. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(4) :753–759, 1996.
- [16] E. Boucker, E. Quémerais, and J. Laviéville. Neptune cfd version 1.0 - verification against numerical and physical test cases. Technical report, CEA-EDF, 2005. Report Nept-2004-1.2/4.
- [17] C.E. Brennen. Cavitation and bubble dynamics. Oxford University Press, New York, 1995.
- [18] A. Cartellier. Ecoulements diphasiques. cours de l'ENSE3, INP Grenoble, 2008.
- [19] CH. Chang and MS. Liou. A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow : stratified flow model and AUSM+-up scheme. *Journal of Computational Physics*, 225(1) :840–873, 2007.
- [20] B. Charriere, J. Decaix, and E. Goncalves. A comparative study of cavitation models in a venturi flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 49 :287–297, 2015.
- [21] YH. Choi and CL. Merkle. The application of preconditioning to viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 105(2) :207–223, 1993.
- [22] D. colombet, E. Goncalves, and RF. Patella. Simulation de la cavitation non isotherme avec un modèle de transport de taux de vide. In *21ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 26-30 août 2013*, 2013.
- [23] J. Decaix. *Modélisation et simulation de la turbulence compressible en milieu diphasique : application aux écoulements cavitants instationnaires*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [24] J. Decaix and E. Goncalves. Compressible effects modelling in turbulent cavitating flows. *European J. of Mechanics B/Fluids*, 39 :11–31, 2013.
- [25] J. Decaix and E. Goncalves. Investigation à of three-dimensional effects on a cavitating venturi flow. *International of Heat and Fluid Flow*, pages 1–20, 2013.
- [26] Y. Delannoy. *Modelisation d'écoulements instationnaires et cavitants*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989.
- [27] Y. Delannoy and JL. Kueny. Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. In *Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME-FED, vol. 98, pp.153-158*, 1990.
- [28] J-M. Delhaye. Basic equation in two-phase modeling in two-phase flow and heat transfer in the power and process industries. Bergles et al., Hemisphere, New York, 1981.
- [29] J-M. Delhaye. Les divers modèles d'écoulements diphasiques gaz-liquide. *La Houille Blanche*, 3-4 :179–190, 1984.
- [30] J-M. Delhaye. Ecoulements diphasiques. cours de l'ENSHMG, INP Grenoble, 2000.
- [31] J-M. Delhaye. Thermohydraulique des réacteurs nucléaires. EDP Science, 2008.

- [32] P. Downar-Zapolski, Z. Bilicki, L. Bolle, and J. Franco. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 22(3) :473–483, 1996.
- [33] D.A. Dreew and S.L. Passman. Theory of multicomponent fluids. Springer, New York, 1998.
- [34] S.E. Elghobashi and T.W. Abou-Arab. A two-equation turbulence model for two-phase flows. *Physics of Fluids*, 26(4) :931–938, 1983.
- [35] J-P. Franc and J-M. Michel. La cavitation : mécanismes physiques et aspects industriels. Presses universitaires de Grenoble, 1995.
- [36] J-P. Franc and J-M. Michel. Fundamentals of cavitation. Springer, 2004.
- [37] DH. Fruman, JL. Reboud, and B. Stutz. Estimation of thermal effects in cavitation of thermosensible liquids. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, (42) :3195–3204, 1999.
- [38] E. Goncalves. Numerical study of expansion tube problems : Toward the simulation of cavitation. *Computers & Fluids*, 72 :1–19, 2013.
- [39] E. Goncalves. Modeling for non isothermal cavitation using 4-equation model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 76 :247–262, 2014.
- [40] E. Goncalves, M. Champagnac, and R. Fortes Patella. Comparison of numerical solvers for cavitating flows. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 24(6) :201–216, 2010.
- [41] E. Goncalves and B. Charriere. Modelling for isothermal cavitation with a four-equation modek. *International Journal of Multiphase Flow*, 59 :54–72, 2014.
- [42] E. Goncalves and J. Decaix. Wall model and mesh influence study for partial cavities. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 31(1) :12–29, 2012.
- [43] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models. *Computers & Fluids*, 38(9) :1682–1696, 2009.
- [44] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Numerical study of cavitating flows with thermodynamic effect. *Computers & Fluids*, 39(1) :99–113, 2010.
- [45] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Constraints on equation of state for cavitating flows with thermodynamic effects. *Applied Math. and Computation*, 217 :5095–5102, 2011.
- [46] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & Fluids*, 28(1) :63–86, 1999.
- [47] P. Helluy and N. Seguin. Relaxation models of phase transition flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(2) :331–352, 2006.
- [48] B. Huang, Q. Wu, and G. Wang. Numerical investigation of cavitating flow in liquid hydrogen. *Int. Journal of Hydrogen Energy*, 39 :1698–1709, 2014.
- [49] CM. Ishii and T. Hibiki. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. Springer, 2006.
- [50] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.S. Stewart. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : reduced equations. *Physics of fluids*, 13(10) :3002–3024, 2001.

- [51] I. Kataoka and A. Serizawa. Basic equations of turbulence in gas-liquid two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 15(5) :843–855, 1989.
- [52] RF. Kunz, DA. Boger, DR. Stinebring, TS. Chyczewski, JW. Lindau, HJ. Gibeling, S. Venkateswaran, and TR. Govindan. A preconditioned navier-stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction. *Computers & Fluids*, 29(8) :849–875, 2000.
- [53] M. Labois. *Modélisation des déséquilibres mécaniques dans les écoulements diphasiques : approches par relaxation et par modèle réduit*. PhD thesis, Université de Provence, 2008.
- [54] M. Lance, J.L. Marie, and J. Bataille. Construction of a model for liquid phase turbulence in bubble flow. *La Houille Blanche*, 3-4 :255–260, 1984.
- [55] D. Legendre, J. Boree, and J. Magnaudet. Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid. *Physics of Fluids*, 10(6) :1256–1272, 1998.
- [56] H. Lemonnier. Une introduction aux écoulements diphasiques. cours de l'ENSHMG, INP Grenoble, 2002.
- [57] R. Menikoff and B.J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Reviews of Modern Physics*, 61(1) :75–130, 1989.
- [58] O. Le Metayer. *Modélisation et résolution de la propagation de fronts perméables. Application aux fronts d'évaporation et de détonation*. PhD thesis, Université de Provence, 2003.
- [59] O. Le Metayer, J. Massoni, and R. Saurel. Elaborating equations of state of a liquid and its vapor for two-phase flow models. *Int. Journal of Thermal Sciences*, 43 :265–276, 2004.
- [60] O. Le Metayer, J. Massoni, and R. Saurel. Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*, 205(2) :567–610, 2005.
- [61] S. Mimouni, A. Archer, J. Laviéville, M. Boucker, and N. Méchitoua. Modelling and computation of unsteady cavitation flows. *La Houille Blanche*, 6 :121–128, 2006.
- [62] C. Morel. *Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 1997.
- [63] C. Morel. Two-phase flow balance equation. cours CEA Grenoble, 2008.
- [64] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flows problems. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :664–698, 2005.
- [65] B. Oesterlé. *Écoulements multiphasiques*. Hermes science, 2006.
- [66] A.D. Okhotsimskii. The thermal regime of vapour bubble collapse at different jakob numbers. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 31(8) :1569–1576, 1988.
- [67] H. Paillere, C. Corre, and JR. Garcia Cascales. On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models. *Computers & Fluids*, 32(6) :891–916, 2003.
- [68] V. Perrier. *Modélisation et simulation d'écoulements multiphasiques compressibles avec ou sans changement de phase. Application à l'interaction laser-plasma*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, France, 2007.

- [69] F. Petitpas, J. Massoni, R. Saurel, E. Lapedie, and L. Munier. Diffuse interface model for high speed cavitating underwater systems. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 35 :747–759, 2009.
- [70] M. Petkovsek and M. Dular. IR measurements of the thermodynamic effects in cavitating flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 44 :756–763, 2013.
- [71] S. Rouy. *Modélisation mathématique et numérique d'écoulements diphasiques compressibles*. PhD thesis, Université de Toulon et du Var, France, 2000.
- [72] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425–467, 1999.
- [73] R. Saurel, F. Petitpas, and R. Abgrall. Modelling phase transition in metastable liquids : application to cavitating and flashing flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 607 :313–350, 2008.
- [74] R. Saurel, F. Petitpas, and R. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 228 :1678–1712, 2009.
- [75] D. Schmidt, C. Rutland, and M.L. Corradini. A fully compressible, two-dimensional model of small, high-speed, cavitating nozzles. *Atomization and Sprays*, 9 :255–276, 1999.
- [76] L.E. Scriven. On the dynamic of phase growth. *Chemical Engineering Science*, 10 :1–13, 1959.
- [77] B. Stutz. *Analyse de la structure diphasique et instationnaire de poches de cavitation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [78] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 172(2) :277–298, 1987.
- [79] Y. Utturkar, J. Wu, G. Wang, and W. Shyy. Recent progress in modelling of cryogenic cavitation for liquid rocket propulsion. *Progress in Aerospace Sciences*, 41 :558–608, 2005.
- [80] G. Wallis. *One-dimensional two-phase flow*. New York : McGraw-Hill, 1967.
- [81] A. Zein, M. Hantke, and G. Warnecke. Modeling phase transition for compressible two-phase flows applied to metastable liquids. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2964–2998, 2010.

