



HAL
open science

Théorie de repère mobile

Azdoud Abdellah, Aitlamine Abdelhakim

► **To cite this version:**

Azdoud Abdellah, Aitlamine Abdelhakim. Théorie de repère mobile. Master. Maroc. 2016. cel-01321530

HAL Id: cel-01321530

<https://hal.science/cel-01321530v1>

Submitted on 25 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorie de repère mobile

AZDOUD ABDELLAH
AITLAMINE ABDELHAKIM

Université Hassan II Ben M'Sik
CASABLANCA

17 Mai 2016

Table des matières

1	Cadre Mathématique	2
2	Notion de repère mobile à K paramètres	4
2.0.1	Bijections affines associées à un repère mobile	5
2.0.2	Repères mobiles indéformables	5
2.0.3	Repère liée	5
3	Repères mobiles à un paramètre	6
3.0.1	Fonctions liées à un repère mobile indéformable	7
3.0.2	Détermination d'un repère mobile par la donnée du champ de ses vitesses	7
4	repères mobiles indéformables en dimension 2 ou 3	9
4.1	Rotation instantanée d'un repère mobile indéformable de E de dimension 3	9
4.1.1	cas d'un repère orthonormal	10
4.1.2	Fonctions liées à un repère indéformable	10
4.1.3	Détermination d'un repère orthonormal de E de dimension 3 par la donnée des fonctions $\alpha; \beta; \delta; p; q; r$	11
4.1.4	Repère mobile orthonormal de E de dimension 2	11
4.2	Repères mobiles indéformables à k paramètres de E de dimension 3	12
4.2.1	Repère défini par des angles d'Euler	13
4.3	Retour aux repères mobiles à un paramètres de E avec $\dim E = 3$.principe d'addition des vecteurs rotations	13

Chapitre 1

Cadre Mathématique

Définitions 1.1 Soit \vec{E} un espace vectoriel sur un corps K . Un espace affine de direction \vec{E} est un ensemble non vide E muni d'une application $(M, N) \rightarrow \overrightarrow{MN}$ de $E \times E \rightarrow \vec{E}$ vérifiant :

1- pour tout triplet (M, N, P) de points de E : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

2- pour tout point $O \in E$ l'application $M \in E \rightarrow \overrightarrow{OM} \in \vec{E}$ est bijective. Les éléments de E s'appellent des points, ceux de \vec{E} des vecteurs. On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel \vec{E} .

Définitions 1.2 On dira qu'un espace affine E est Euclidien lorsque sa direction \vec{E} est munie d'une structure euclidienne donnée. Si cette direction est de plus orientée, on dit que E est affine Euclidien orienté.

Remarque 1.3 on considérons dans ce cours E espace affine euclidien orienté de dimension $n \geq 2$.

Définitions 1.4 Soit E un espace affine. On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans lui-même. Les transformations affines de E constituent un sous-groupe (pour la composition) du groupe des permutations de E . Le groupe des transformations affines de E est appelé groupe affine de E , et noté $GA(E)$

Remarque 1.5 Noton $B(E_n)$ l'ensemble des base Ordonnée de l'espace Vectoriel Euclidien E_n .

Remarque et Définition 1.6 Une base de E_n est système (e_1, \dots, e_n) de n vecteur linéairement indépendants de E_n , et peut donc être identifier à un point de l'espace produit $(E_n)^n$ que nous noterons $B(E_n)$; il est d'ailleurs facile de prouver que $B(E_n)$ est Ouvert de $(E_n)^n$.

Définition 1.7 On appelle Repère affine de E est un n -uple $(A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ formé d'un point A de E et d'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E_n : en d'autre terme c'est un point de $E \times B(E_n)$

Propriétés 1.8 soit l'application φ définit sur E et f sa partie linéaire. Si $R = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère de E alors $\varphi(R) = (\varphi(A); f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) = R'$ est le repère image de R par φ

Inversement, si $R = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $R' = (\varphi(A); f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ deux repère de E , il existe une bijection affine φ de E tel que $\varphi(R) = R'$. En particulier φ envoie R sur R' . cette bijection est définit par la condition suivant : $\varphi(A + \sum_{i=1}^n x_i e_i) = \varphi(A) + \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ (*) avec $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Propriétés 1.9 si φ un bijection affine qui envoie $R = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sur $R' = (A'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ soit un isométrie $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j$

Démonstration.

Soit $M = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $P = (y_j)_{1 \leq j \leq n} \in E$ dans le repère R et M', P' leurs image par φ

donc d'après (*) on a $\overrightarrow{M'P'} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \vec{e}_i$

$$\text{Alors } \|\overrightarrow{M'P'}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \vec{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - x_i)(y_j - x_j) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (1)$$

$$\text{Alors } \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - x_i)(y_j - x_j) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2)$$

Or φ est un isométrie donc (1) = (2) En effet : on utilise le Lemme suivant . ■

Lemme 1.10 *pour un endomorphisme $f \in l(E)$ soit **antisymétrie** ,il suffit qu'il existe une base $(\vec{e}_i) \subset E$ tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} ; f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j + f(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = 0$*

Inversement si $f \in l(E)$ antisymétrie cette propriété est vrai pour tout $B(E)$

Démonstration.

Soit une base $(\vec{e}_i) \subset E$ et $f \in l(E)$ alors $\forall \vec{V} \in E$ On a : $f(\vec{V}) \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \cdot \lambda_i \lambda_j$

or f antisymétrie si et seulement si $\forall \vec{V} \in E, f(\vec{V}) \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \cdot \lambda_i \lambda_j = 0$

d'où le résultat. ■

Chapitre 2

Notion de repère mobile à K paramètres

Définition 2.1 Une **repère mobile** de E à K -paramètre est une application de la forme $\rho : \Delta \rightarrow E \times (E_n)^n$, $u \rightarrow (A(u); \overrightarrow{e_1}(u), \dots, \overrightarrow{e_n}(u))$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine

telle que : $\forall u \in \Delta$, $(\overrightarrow{e_1}(u), \dots, \overrightarrow{e_n}(u))$ base de E_n et les deux fonction $A : \Delta \rightarrow E$ et $\overrightarrow{e_i} : \Delta \rightarrow E_n$ sont Continue sur Δ

Remarque 2.2 1– Le repère mobile ρ continue sur Δ .

2– Si les deux application A et $\overrightarrow{e_i}$ de C^p (resp. p -fois différentiable) Alors le repère mobile est de C^p (resp. p -fois différentiable)

Définition 2.3 On appelle **base mobile** de E définie sur Δ tout application $\Delta \rightarrow B(E_n)$ continue

En particulier est une application $\beta : \Delta \rightarrow (E_n)^n$, $u \rightarrow (\overrightarrow{e_1}(u), \dots, \overrightarrow{e_n}(u))$ avec $\overrightarrow{e_i} : \Delta \rightarrow E_n$ sont Continue sur Δ et $\forall u \in \Delta$, $(\overrightarrow{e_1}(u), \dots, \overrightarrow{e_n}(u))$ base de E_n

Remarque 2.4 β de C^p si $\overrightarrow{e_i} : \Delta \rightarrow E_n$ de C^p

Théorème 2.5 soit E orienté .

si $\rho : \Delta \rightarrow E \times B(E_n)$ Un repère Mobile avec $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine Alors $\forall u, v \in \Delta$, $\rho(u)$ et $\rho(v)$ ont la même orientation

Démonstration.

soit $u \in \Delta$ fixé . les composition $\overrightarrow{e_1}(v), \dots, \overrightarrow{e_n}(v)$ dans la base fixé $H = (\overrightarrow{e_1}(u), \dots, \overrightarrow{e_n}(u))$ sont continue $\forall v \in \Delta$. on a les determinant des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}(v), \dots, \overrightarrow{e_n}(v))$ soit $\delta_u(v)$ avec $v \in \Delta \rightarrow \delta_u(v)$ définie et continue sur Δ

on a $\delta_u(u) = 1$, Or $(\overrightarrow{e_1}(v), \dots, \overrightarrow{e_n}(v))$ forment une base alors δ_u ne prend jamais la valeur 0

Alors δ_u prend des valeur > 0 . d'ou le résultat ■

Définition 2.6 Un repère mobile ρ de E est dit **direct** (resp. **indirect**) si $\forall u \in \Delta$ le repère $\rho(u)$ est **direct** (resp. **indirect**).

Exemple 2.7 soit $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $\dim E = 3$

on considère $f : \Delta \rightarrow E$, $(u, v) \rightarrow M(u, v) \in C^1$, f définissant une nappe régulière Σ de E

si $\overrightarrow{N}(u, v) = \frac{\partial M(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial M(u, v)}{\partial v}$ désigne le vecteur normale associé à la paramitrisation f

Alors $\forall (u, v) \in \Delta$, $\rho(u, v) = (M(u, v); \frac{\partial M(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial M(u, v)}{\partial v}, \overrightarrow{N}(u, v))$

ce repère joue un role dans la théorie des surface .

2.0.1 Bijections affines associées à un repère mobile

Définition 2.8 soit $\rho : \Delta \rightarrow E \times B(E_n)$ Un repère Mobile de E .pour tout $(u, v) \in \Delta$, on définit la bijection affine $\Psi_{u,v}$ de E qui envoier $\rho(u)$ sur $\rho(v)$ tel que $\Psi_{u,v}(\rho(u)) = \rho(v)$

Propriétés 2.9 1–les bijections affines $\Psi_{u,v}$ sont tout **direct** en effet : d'après théorème précédent

2–on a : $\forall u, v, w \in \Delta, \Psi_{u,w} = \Psi_{v,w} \circ \Psi_{u,v}, \Psi_{v,u} = (\Psi_{u,v})^{-1}$ et $\Psi_{u,u} = Id_E$

2.0.2 Repères mobiles indéformables

Définition 2.10 Un repère mobile ρ de E est dit **indéformable** si les bijections affines associées sont des **isométries**

Remarque et Définition 2.11 une isométrie du plan est un déplacement si elle conserve les angles orientés. Les déplacements sont exactement les translations et les rotation

Pour que un repère $\rho : \Delta \rightarrow E \times B(E_n), u \rightarrow (A(u); \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$ soit **indéformable** $\Leftrightarrow M(u, v) = (\vec{e}_i(u), \vec{e}_j(v))_{1 \leq i, j \leq n}$ **indépendant** de $u \in \Delta$

Définition 2.12 Un repère $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est dit **orthonormal** si $\forall u \in \Delta, \rho(u) = (A(u); \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$ est orthonormale. En particulier est indéformable.

2.0.3 Repère liée

Définition 2.13 soit $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\sigma = (B; \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ deux repère de E définit sur le même $\Delta \subset \mathbb{R}^k$.

On dit que le repère " σ liée à ρ " si les coordonnées $B(u)$ et les composantes $(\vec{f}_i(u))_{1 \leq i \leq n}$ dans le repère $\rho(u)$ sont **indépendant** de $u \in \Delta$.

Propriétés 2.14 1–la relation " σ liée à ρ " est relation d'équivalence.

2– σ liée à $\rho \Leftrightarrow \sigma$ et ρ admettent la même famille de bijection affine $(\Psi_{u,v})_{u,v \in \Delta}$. En conséquences tout repère mobile lié à un repère indéformable est indéformable.

Remarque 2.15 Dans le langage de cinématique deux repère mobile indéformables liés sont dit **fixes** l'un par rapport à l'autre.

Chapitre 3

Repères mobiles à un paramètre

Soit $\Delta \subset I \subset \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, et de $n+1$ fonction continue $A : I \rightarrow E$ et $\vec{e}_i : I \rightarrow E_n$ tel que $\forall t \in I, (\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ forment une base de E_n .

Définition 3.1

- 1- le repère est dit de C^k si A et \vec{e}_i de C^k .
- 2- le repère est indéformable \Leftrightarrow la matrice $E(t) = (\vec{e}_i(t), \vec{e}_j(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ est constante.
- 3- soit $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère mobile dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, $\forall t \in I, \exists ! D_t \in l(E_n)$, telle que : $D_t(\vec{e}_i(t)) = \frac{d\vec{e}_i}{dt}$

Proposition 3.2 un repère mobile ρ indéformable il faut et il suffit $\forall D_t \in l(E_n)$ antisymétrie.

Démonstration.

$\forall D_t \in l(E_n)$ antisymétrie il faut et il suffit que l'on ait $\frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_j(t) + \frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_i(t) = 0$
 ie : $\frac{d}{dt}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$. d'où le résultat ■

Corollaire 3.3 si le repère mobile ρ est orthonormale donc indéformable alors il résulte que la matrice de $[D_t]_{(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))}$ est antisymétrie.

Remarque et Définition 3.4 considérant $W(t) = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \cdot \vec{e}_j(t)$

Théorème 3.5 soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\beta : I \rightarrow B(E_n), t \rightarrow (\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ une **base mobile** dérivable sur I .
 pour que cette base soit **orthonormale** il faut et il suffit $\exists t_0 \in I, \beta(t_0)$ orthonormale et $\forall t \in I, W(t)$ définit par $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \cdot \vec{e}_j(t)$ soit antisymétrie.

Démonstration.

il suffit de montrer la condition suffisante, pour cela on désigne $\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale fixe de E_n .

Notons $\forall t \in I, B(t) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base α à la base $\beta(t)$.

on a $B(t)$ définit par $\vec{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot \vec{e}_j$ avec $1 \leq i \leq n$.

d'après définition des w_{ij} on a : $\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_{ji}(t) \cdot b_{kj}(t) \cdot \vec{e}_k$

d'où $\frac{db_{ki}}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ji}(t) \cdot b_{kj}(t)$ sous forme d'interprétation matriciel on a : $\frac{dB}{dt} = B(t) \cdot W(t)$

alors $\frac{dB^T}{dt} = \left(\frac{dB}{dt}\right)^T = (B(t) \cdot W(t))^T = W(t)^T \cdot B(t)^T$ or $W(t)$ antisymétrie

Alors $W(t)^T + W(t) = 0$

on a donc $B(t) \cdot \frac{dB^T}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot B(t)^T = B(t) \cdot \{W(t)^T + W(t)\} \cdot B(t)^T = 0$

d'où $\frac{d}{dt}(B(t) \cdot B(t)^T) = 0$ alors $B(t) \cdot B(t)^T = cte$

or la matrice $B(t_0)$ est orthogonal donc $B(t_0).B(t_0)^T = I_{E_n}$
donc $\forall t \in I, B(t).B(t)^T = I_{E_n}$
d'ou la base $(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ orthonormale pour tout $t \in I$. d'ou le resultat ■

3.0.1 Fonctions liées à un repère mobile indéformable

Désignons $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère mobile indéformable définit sur I

Définition 3.6 Une fonction vectoriel $\vec{V} : I \rightarrow E_n$ est dit liée au repère ρ si il s'écrit sous la forme $\vec{V}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i(t)$ où les λ_i désignent des constantes.

on a alors si ρ est dérivable : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot D_t(\vec{e}_i) = D_t(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i(t)) = D_t(\vec{V}(t))$

Définition 3.7 (Définition intrinsèque de l'opérateur D_t)

On considère $\Psi_{t,u}$ la bijection affine de E qui envoie $\rho(t)$ sur $\rho(u)$ et par $\vec{\Psi}_{t,u} \in l(E_n)$ sa partie linéaire

$t \in I$ fixé, $\forall \vec{W} \in E_n$ s'écrit $\vec{w}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i(t)$ où les λ_i désignent des constantes.

on a évidemment $\vec{\Psi}_{t,u}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i(u)$

si le repère ρ est dérivable on a $\frac{\partial \vec{\Psi}_{t,u}(\vec{W})}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{d\vec{e}_i(t)}{du} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot D_u(\vec{e}_i) = D_u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i(t)) = D_u(\vec{W}(t))$

Alors $[\frac{\partial \vec{\Psi}_{t,u}(\vec{W})}{\partial u}]_{t=u} = D_t(\vec{W}(t))$

le vecteur $\vec{W} \in E_n$ est arbitraire donc on conclut d'après ce qui précède $I \rightarrow l(E_n), u \rightarrow \vec{\Psi}_{t,u}$ est dérivable et aussi $[\frac{\partial \vec{\Psi}_{t,u}}{\partial u}]_{t=u} = D_t$

Alors D_t ne dépend que de t et de la famille $(\vec{\Psi}_{t,u})$ des bijection affine associé au repère ρ .

3.0.2 Détermination d'un repère mobile par la donnée du champ de ses vitesses

Théorème 3.8 Soit $(\xi_i, w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ un système de $n+n^2$ fonction numérique continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit R_0 un repère fixé quelconque de E_n

pour chaque $t_0 \in I, \exists!$ $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère mobile définit sur I tel que $\rho(t_0) = R_0$ et vérifiant $\{ \forall t \in I : \frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \cdot \vec{e}_i(t) \text{ et}$

$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ji}(t) \cdot \vec{e}_j(t) \text{ avec } 1 \leq i \leq n \}^{(*)}$

De plus si $(\xi_i, w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de classe C^p alors ρ de classe C^{p+1}

Démonstration.

soit $A(t) = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_0$ et $\forall 1 \leq i \leq n, \vec{e}_i(t) = (b_{ji})_{1 \leq j \leq n} \in \rho$

On a $\{ \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \xi_j(t) \cdot b_{ij} \text{ et } \frac{db_{ji}}{dt} = \sum_{k=1}^n w_{ki}(t) \cdot b_{jk} \text{ avec } 1 \leq i, j \leq n \}^{(**)}$ puisque $(*)$

on a $(**)$ est un système différentiel linéaire à coefficient continue sur I , il admet donc une solution unique, définie sur I et prenant un système de valeur

donnée au point t_0 tel que $x_i(t_0) = 0$ et $b_{ji}(t_0) = \delta_{i,j}$ d'où la première assertion.

la solution est bien définit En effet : on pose $\Delta(t) = \det([b_{ij}(t)])_{1 \leq i, j \leq n}$

$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \det([b_{ij}(t)])_{1 \leq i, j \leq n} \} = (\sum_{i=1}^n w_{ii}(t)) \cdot \Delta(t)$

or $\Delta(t_0) \neq 0$ alors $\Delta(t) = \Delta(t_0) \cdot \exp(\int_{t_0}^t (\sum_{i=1}^n w_{ii}(\tau)) d\tau)$

si $(\xi_i, w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de classe C^p alors la 2^{ème} assertion résulte de la proposition précédent.

Remarque 3.9 (important)

1—Si R_0 est orthonormal et $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ est antisymétrie alors le repère mobile ρ obtenu est orthonormal et de même orientation que R_0

2—Si ρ indéformable alors $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée **la matrice de rotation** à l'instant t du repère mobile ρ .

3—Si $n = 3$ nous aurons une interprétation cinématique de la matrice $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ et la donnée des fonctions $(\xi_i, w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ équivaudra à la donnée du champ des vitesses de ρ à chaque instant t par rapport au repère $\rho(t)$.

■

Chapitre 4

repères mobiles indéformables en dimension 2 ou 3

nous commencerons par l'étude des repères de E de dimension 3; le cas des repères mobiles de E de dimension 2 sera étudié à la fin du chapitre

4.1 Rotation instantanée d'un repère mobile indéformable de E de dimension 3

Soit $\rho : I \rightarrow E \times B(E_3); t \mapsto (A(t); \vec{e}_1(t); \vec{e}_2(t); \vec{e}_3(t))$ un repère mobile (à un paramètre) de E_3 ; défini et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} ; et; pour chaque $t \in I$; soit D_t l'endomorphisme de E_3 défini par :

$$D_t(\vec{e}_i(t)) = \frac{d\vec{e}_i}{dt}(i = 1; 2; 3)$$

nous savons que le repère mobile ρ est indéformable si pour tout $t \in I$ l'endomorphisme D_t est antisymétrique. Or les endomorphisme antisymétrique de E_3 (supposé orienté) sont de la forme : $\vec{X} \rightarrow \vec{K} \wedge \vec{X}$; où \vec{K} désigne un vecteur fixé de E_3

si le repère mobile ρ est indéformable; il existe une fonction vectorielle

$$\vec{\Omega} : I \rightarrow E_3; t \mapsto \vec{\Omega}(t)$$

vérifiant pour tout $t \in I$; la relation suivante (2)

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t) \quad (i = 1; 2; 3)$$

les vecteurs $\vec{e}_1(t); \vec{e}_2(t); \vec{e}_3(t)$ étant indépendants. on notera que le vecteur $\vec{\Omega}(t)$ est défini par la relation précédente.

Définition 4.1 1 : si $\rho = (A; \vec{e}_1(t); \vec{e}_2(t); \vec{e}_3(t))$ est un repère mobile indéformable de l'espace affine euclidien orienté E ; le vecteur $\vec{\Omega}(t)$ défini par (2) est appelé la **rotation instantanée** de ce repère pour la valeur t du paramètre

4.1.1 cas d'un repère orthonormal

soit $\rho = (A; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ un repère mobile **orthonormal** de E ; si on désigne par $(p(t); q(t); r(t))$ les composantes du vecteur $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $(e_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$; on a par application de (2) :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3; \frac{d\vec{e}_2}{dt} = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1; \frac{d\vec{e}_3}{dt} = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2$$

d'où :

$$p = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt}; q = \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt}; r = \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} = -\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt} \quad (4)$$

les relations (4) permettent de déterminer les fonctions $p; q; r$ par dérivation des fonctions $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$.

Remarque 4.2 On aurait pu définir a priori trois fonctions $p; q; r$ par les relations (4) et vérifier que la fonction $\vec{\Omega}(t) = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$ satisfait (2) : c'est un procédé élémentaire pour prouver l'existence de la fonction $\vec{\Omega}$

Exemple 4.3 : Repères de Frenet et de Darboux

L'introduction du vecteur rotation va nous permettre de donner une interprétation simple des formules de Frenet et de Darboux

a) soit γ un arc orienté de classe C^3 de E ; régulier et sans point d'inflexion; défini par une paramétrisation normale : $I \rightarrow E; s \rightarrow M(s)$; et soit $F : s \rightarrow (M(s); \vec{\tau}(s); \vec{\nu}(s); \vec{\beta}(s))$ ($s \in I$)

la fonction **repère de Frenet** associée à cette paramétrisation c'est un repère mobile de classe C^1 sur I ; vérifiant les formules de **Frenet** $\frac{dM}{ds} = \vec{\tau}$; et $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho\vec{\nu}$; $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\rho\vec{\tau} + \theta\vec{\beta}$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta\vec{\nu}; \text{ où } \rho \text{ et } \theta \text{ désignent les fonctions courbure et torsion de } \gamma$$

Par comparaison avec (3); on voit que la rotation instantanée de ce repère mobile est la fonction : $I \rightarrow E_3; s \rightarrow \vec{\omega}(s) = -\theta(s)\vec{\tau}(s) + \rho(s)\vec{\beta}(s)$ donc (5)

$$\vec{\omega} = -\theta\vec{\tau} + \rho\vec{\beta}$$

b) soit Σ une nappe géométrique de classe C^2 de E ; et soit γ un arc régulier de classe C^2 tracé sur Σ ; défini par une paramétrisation normale $I \rightarrow SE; s \rightarrow P(s)$

A cet arc est attaché un repère mobile; appelé **repère de Darboux** soit :

$s \rightarrow (P(s); \vec{\tau}(s); \vec{g}(s); \vec{h}(s))$ ($s \in I$) vérifiant les relations :

$$\frac{dP}{ds} = \vec{\tau}; \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_g\vec{g} + \rho_n\vec{h}; \frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho_g\vec{\tau} - \theta_g\vec{h}; \frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho_n\vec{\tau} + \theta_g\vec{g}$$

$\rho_n; \rho_g; \theta_g$ désignent respectivement la courbure normale; la courbure géodésique et la torsion géodésique de γ . par comparaison avec (3); on voit que la rotation instantanée de ce repère mobile est donnée par :

$$\vec{\Omega}(s) = -\theta_g\vec{\tau} - \rho_n\vec{g} + \rho_g\vec{h}$$

4.1.2 Fonctions liées à un repère indéformable

Revenons au cas général d'un repère mobile dérivable et indéformable $\rho = (A; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ de E ; défini sur un intervalle I de \mathbb{R} ; et soit $\vec{\Omega}$ sa rotation instantanée .

Par définition; une fonction vectorielle liée à ρ est une fonction de la forme :

$$\vec{V} : I \rightarrow E_3; t \rightarrow X_1\vec{e}_1(t) + X_2\vec{e}_2(t) + X_3\vec{e}_3(t)$$

où $X_1; X_2; X_3$ désignent des constantes arbitraires; une telle fonction est dérivable sur I

et vérifie : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^3 X_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}(t)$

De même; une application de I dans E ; sera dite liée à ρ si elle est de la forme

$$t \longrightarrow M(t) = A(t) + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i(t)$$

où $x_1; x_2; x_3$ désignent des constantes arbitraires. Dans le langage de la cinématique; une telle fonction est appelée **un mouvement ponctuel** lié à ρ . Une telle fonction est dérivable sur I et vérifie; pour tout $t \in I$: $\frac{dM}{dt} = \frac{dA}{dt} + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{A}(t) \vec{M}(t)$

Pour connaître les dérivées au point t de toutes les fonctions de cette forme; il suffit donc de connaître les vecteurs $\frac{dA}{dt}$ et $\vec{\Omega}(t)$. En général ces vecteurs sont définis par leurs composantes dans la base $(\vec{e}_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$; et on pose :

$$\frac{dA}{dt} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \delta \vec{e}_3; \vec{\Omega}(t) = p \vec{e}_1 + q \vec{e}_2 + r \vec{e}_3$$

4.1.3 Détermination d'un repère orthonormal de E de dimension 3 par la donnée des fonctions $\alpha; \beta; \delta; p; q; r$

Théorème 4.4 Soit $(\alpha; \beta; \delta; p; q; r)$ un système de 6 fonctions numériques continues sur un intervalle I de \mathbb{R} ; et soit R_0 un repère orthonormal direct de E Pour chaque $t_0 \in I$;

il existe un repère mobile unique $\rho = (A; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ de E ; de classe C^1 sur I ; vérifiant $\rho(t_0) = R_0$ et $:(t \in I) \frac{dA}{dt} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \delta \vec{e}_3; \frac{d\vec{e}_1}{dt} = r \vec{e}_2 - q \vec{e}_3; \frac{d\vec{e}_2}{dt} = p \vec{e}_3 - r \vec{e}_1$
 $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = q \vec{e}_1 - p \vec{e}_2$

de plus; ce repère est **orthonormal et direct**

cela résulte immédiatement du théorème X.3.3 et du fait que la matrice $W(t)$ est donnée ici par

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & -r(t) & q(t) \\ r(t) & 0 & -p(t) \\ -q(t) & p(t) & 0 \end{pmatrix} \text{ elle est dans antisymétrique.}$$

4.1.4 Repère mobile orthonormal de E de dimension 2

E de dimension 2.

Dans le plan orienté E ; choisissons un repère orthonormal direct (fixé) $(o; \vec{i}; \vec{j})$

la donnée d'une fonction vectorielle $I \longrightarrow E_2; t \longrightarrow \vec{e}(t)$ de norme constante r et de classe C^p sur l'intervalle I ; équivaut à la donnée d'une fonction numérique θ ; de classe C^p sur I vérifiant : $(\forall t \in I) \vec{e}(t) = r(\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j})$

cette fonction θ est une détermination continue de l'angle orienté $(\vec{i}; \vec{e}(t))$

on voit alors que la donnée d'un repère mobile orthonormal direct $(A; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ de E ; équivaut à la donnée d'une fonction $A : I \longrightarrow t \longrightarrow A(t)$ (définissant l'origine du repère) et d'une fonction numérique $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$; vérifiant :

$$(*) \quad \vec{e}_1 = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}; \vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

le repère est de classe C^p si; et seulement si; les fonctions A et θ sont de classe C^p

Par dérivation de $(*)$ on obtient :

$$(**) \quad \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_2; \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_1$$

Pour interpréter les relations $(**)$; identifions E avec un plan affine P de l'espace orienté

E ; et choisissons un vecteur unitaire \vec{k} orthogonal à P tel que le repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ soit direct. posant $\vec{\Omega}(t) = \theta'(t) \vec{k}$; les relations $(**)$ équivaut à :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_1; \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_2$$

4.2 Repères mobiles indéformables à k paramètres de E de dimension 3

E de dimension 3

N'ayant en vue que des applications cinématiques ; nous nous bornerons à l'étude des repères mobiles à k paramètres de E

L'espace E sera supposé orienté.

soit donc Δ un domaine de $\mathbb{R}^k (k \geq 2)$; et soit

$$\rho : \Delta \longrightarrow E \times B(E_3); u \longrightarrow (A(u); \vec{e}_1(u); \vec{e}_2(u); \vec{e}_3(u))$$

un repère mobile indéformable et différentiable défini sur Δ .

Notons $(u_1; \dots; u_k)$ les coordonnées d'un point quelconque $u \in \Delta$ et $\frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$ la λ -ième dérivée partielle d'une fonction quelconque f différentiable sur Δ

Pour chaque $\lambda = 1; 2; \dots; k$ et chaque $u \in \Delta$; nous définissons un endomorphisme $D_{\lambda;u}$ de E_3 par les conditions :

$$D_{\lambda;u}(\vec{e}_i(u)) = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) \quad (i = 1; 2; 3)$$

et ; du fait que le repère ρ est indéformable on déduit que cet endomorphisme est antisymétrique : les calculs sont les mêmes qu'au X.3. il existe donc un vecteur $\vec{\Omega}_\lambda(u)$; vérifiant : (1) $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{e}_i$ ($i = 1; 2; 3$)

Ce vecteur $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ est appelé **la rotation** (instantanée) **virtuelle** du repère ρ au point u par rapport à la variable u_λ ; nous dirons aussi que c'est la λ -ième rotation instantanée partielle .

En langage intuitif : le vecteur $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ est la rotation instantanée du repère mobile à un paramètre obtenu en faisant varier seulement u_λ ; cette interprétation permet très souvent de déterminer sans calcul les vecteurs $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ ($\lambda = 1; 2; \dots; k$) en s'appuyant sur le principe suivant.

Si ; pour tout réel α assez voisin de 0 ; le déplacement qui envoie le repère $\rho(u_1; \dots; u_k)$ sur le repère $\rho(u_1; \dots; u_\lambda + \alpha; \dots; u_k)$ est **une rotation d'angle** α autour d'un axe $\vec{\Delta}$; alors la λ -ième rotation instantanée partielle $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ du repère ρ au point $u = (u_1; \dots; u_k)$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe $\vec{\Delta}$.

Remarque 4.5 Soit : $\vec{V} : \Delta \longrightarrow E_n; u \longrightarrow \sum_{i=1}^3 X_i \vec{e}_i(u)$

(où $X_1; X_2; X_3$ désignent des constantes) une fonction vectorielle liée au repère mobile ρ . cette fonction est différentiable ; et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{e}_i(u)$$

soit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{V}(u)$$

sa différentielle au point u est définie par :

$$d\vec{V} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) du_\lambda = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda \wedge \vec{V}(u)$$

le symbole $\sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda$ (qui représente une forme différentielle à valeurs dans E_n) sera appelé **la rotation infinitésimale** du repère mobile ρ . l'exemple qui suit est fondamental.

4.2.1 Repère défini par des angles d'Euler

Supposons donné un repère orthonormal direct $R = (o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de E

A chaque point $(\psi; \theta; \varphi)$ de \mathbb{R}^3 nous associons les vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{I}; \vec{J}; \vec{K}$ (dépendant de ce point) définis par :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j}; \vec{v} = -\sin \psi \vec{i} + \cos \psi \vec{j}; \vec{K} = \cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{v}; \vec{w} = \vec{K} \wedge \vec{u} \\ \vec{I} &= \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w}; \vec{J} = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{w} \end{aligned}$$

Alors le repère $\rho_1(\psi) = (o; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ est celui qui se déduit de φ par la rotation d'angle ψ autour de l'axe $(o; \vec{k})$; le repère $\rho_2(\psi; \theta) = (o; \vec{u}; \vec{w}; \vec{k})$ se déduit de $\rho_1(\psi)$ autour de l'axe $(o; \vec{u})$

et le repère $\rho(\psi; \theta; \varphi) = (o; \vec{I}; \vec{J}; \vec{K})$ se déduit de $\rho_2(\psi; \theta)$ par rotation d'angle φ autour de l'axe $(o; \vec{K})$: tous ces repères sont orthonormaux et directs.

L'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow E \times B(E_3); (\psi; \theta; \varphi) \rightarrow \rho(\psi; \theta; \varphi)$ définit un repère mobile à trois paramètres de E . nous allons calculer ses rotations virtuelles par application des principes

ci - dessus

a) si $(\theta; \varphi)$ restant fixes); ψ augmente de $\Delta\psi$; le repère $\rho(\psi; \theta; \varphi)$ subit une rotation d'angle $\Delta\psi$ autour de l'axe $(o; \vec{k})$; sa première rotation partielle est donc le vecteur $\vec{\Omega}_1 = \vec{k}$

b) si $(\psi$ et φ restant fixe); θ augmente de $\Delta\theta$; le repère $\rho(\psi; \theta; \varphi)$ subit une rotation d'angle $\Delta\theta$ autour de l'axe $(o; \vec{u})$; sa seconde rotation partielle est donc le vecteur $\vec{\Omega}_2 = \vec{u}$.

c) si $(\psi$ et θ restant fixes); φ augmente de $\Delta\varphi$; le repère $\rho(\psi; \theta; \varphi)$ subit une rotation d'angle $\Delta\varphi$ autour de l'axe $(o; \vec{K})$; sa troisième rotation partielle est donc le vecteur $\vec{\Omega}_3 = \vec{K}$

nous résumerons ces résultats en disant que la rotation infinitésimale du repère mobile ρ au point $(\psi; \theta; \varphi)$ est :

$$\vec{k} d\psi + \vec{u} d\theta + \vec{K} d\varphi$$

On voit immédiatement que la rotation infinitésimale du repère $\rho_1(\psi)$ est $\vec{k} d\psi$; et que la rotation infinitésimale du repère $\rho_2(\psi; \theta)$ est $\vec{k} d\psi + \vec{u} d\theta$.

Remarque 4.6 Pour tout réel r ; le point M de E défini par $\vec{OM} = r\vec{K}$ est le point de coordonnées sphériques $(r; \psi; \theta)$ dans le repère donné R . si on considère ce point comme une fonction des trois variables réelles $r; \psi; \theta$; on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial r} &= \vec{K}; \frac{\partial M}{\partial \psi} = r \frac{\partial \vec{K}}{\partial \psi} = r \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{K} = r \vec{k} \wedge \vec{K} = -r \vec{u} \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} &= r \frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta} = r \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{K} = r \vec{u} \wedge \vec{K} = -r \vec{w} \end{aligned}$$

d'où :

$$dM = \vec{K} dr - r \vec{u} d\psi - r \vec{w} d\theta$$

si on suppose donnée trois fonctions dérivables $t \rightarrow r(t); t \rightarrow \psi(t); t \rightarrow \theta(t)$ définies sur un même intervalle I de \mathbb{R}^3 ; la fonction composée $t \rightarrow P(t) = M(r(t); \psi(t); \theta(t))$ vérifie

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K} \frac{dr}{dt} - r \vec{u} \frac{d\psi}{dt} - r \vec{w} \frac{d\theta}{dt}$$

Nous obtenons ainsi la vitesse d'un mouvement ponctuel défini en coordonnées sphériques

4.3 Retour aux repères mobiles à un paramètre de E avec $\dim E = 3$. principe d'addition des vecteurs rotations

Un repère mobile à un paramètre de E est souvent défini par la donnée; pour chaque valeur de la variable t ; d'un système $(u_1(t); \dots; u_k(t))$ de paramètres définissant la position de ce repère à l'instant t .

dans ce cas ; la rotation instantanée du repère mobile s'obtient facilement en appliquant la proposition qui suit :

Théorème 4.7 (principe d'addition des vecteurs rotations)

Soit Δ un domaine de \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) et $\rho : \Delta \rightarrow E \times B(E_3)$ un repère mobile **différentiable et indéformable** de E .

Soit d'autre part $u : I \rightarrow \Delta; t \rightarrow (u_1(t); u_2(t); \dots; u_k(t))$ une fonction dérivable; définie sur un intervalle I de \mathbb{R} ; et à valeurs dans Δ ; alors le repère mobile (à un paramètre)

$t \rightarrow \rho(u(t))(t \in I)$ est **indéformable**; et sa **rotation instantanée** à l'instant t est le vecteur (*)

$$\vec{\omega}(t) = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u(t)) u'_\lambda(t)$$

où $\vec{\Omega}_1(u); \dots; \vec{\Omega}_k(u)$ désignent les **rotations partielles** du repère donné au point u .

Démonstration.

Posons $\rho(u) = (A(u); \vec{e}_1(u); \vec{e}_2(u); \vec{e}_3(u));$ et; pour tout $t \in I$; soit $\varepsilon_i(t) = \vec{e}_i(u(t))$ ($i = 1; 2; 3$). le repère mobile donné ρ étant indéformable; il est tout d'abord évident que le repère mobile $\sigma : t \rightarrow (A(u(t)); \vec{\varepsilon}_1(t); \vec{\varepsilon}_2(t); \vec{\varepsilon}_3(t))$ est indéformable.

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées; on a d'autre part; pour $i = 1; 2; 3$: $\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial u_\lambda}(u(t)) \frac{du_\lambda}{dt}$; soit (d'après la définition des rotations partielles) :

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u(t)) \wedge \vec{\varepsilon}_i(u(t)) u'_\lambda(t).$$

le vecteur $\vec{\omega}(t)$ défini par (*) vérifie donc $\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{\varepsilon}_i$ ($i = 1; 2; 3$)

c'est donc la rotation instantanée; à la l'instant t ; du repère mobile $\sigma : t \rightarrow \rho(u(t))$ ■

Exemple 4.8 Supposons données trois fonctions numériques $\psi; \theta; \varphi$ dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} et pour chaque $t \in I$; soit $\sigma(t) = (O; \vec{I}(t); \vec{J}(t); \vec{K}(t))$ le repère orthonormal direct relativement à un repère d'origine O admettant les nombres $\psi(t); \theta(t); \varphi(t)$ pour angles d'Euler relativement à un repère donné $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. on voit immédiatement que la rotation instantanée de ce repère à l'instant t est le vecteur

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(t) &= \psi' \vec{k} + \theta' \vec{i} + \varphi' \vec{K} \\ &= \theta' \vec{i} + \psi' \sin \theta \vec{j} + (\psi' \cos \theta + \varphi') \vec{K} \\ &= (\theta' \cos \varphi + \psi' \sin \theta \sin \varphi) \vec{I} + (\psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi) \vec{J} + (\psi' \cos \theta + \varphi') \vec{K}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi les composantes $p; q; r$ de la rotation instantanée dans le repère mobile;

soit : $p = \psi' \sin \theta \cos \varphi + \theta' \cos \varphi$; $q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi$; $r = \psi' \cos \theta + \varphi'$.

On en déduirait facilement les composantes de la rotation instantanée dans le repère fixe

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; soit :

$$p_1 = \varphi' \sin \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi; q_1 = \varphi' \sin \theta \cos \psi - \theta' \sin \psi; r_1 = \varphi' \cos \theta + \psi'.$$

ces formules sont très importantes pour la dynamique des solides.

Bibliographie

- 1— COURS DE MATHÉMATIQUES. Tome 3, Géométrie et cinématique, 2ème édition Broché, 29 janvier 1993 de Jacqueline Lelong-Ferrand (Auteur), Jean-Marie Arnaudiès (Auteur)
- 2— <http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ga/node3.html>