



HAL
open science

Filtres, Ultrafiltres, théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Tychonov

Jérôme Lapuyade-Lahorgue

► **To cite this version:**

Jérôme Lapuyade-Lahorgue. Filtres, Ultrafiltres, théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Tychonov. Master. France. 2014. cel-01255811

HAL Id: cel-01255811

<https://hal.science/cel-01255811>

Submitted on 14 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Filtres, Ultrafiltres, théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Tychonov

Jérôme Lapuyade-Lahorgue

11 Mars 2014

1 Filtres, ultrafiltres et espaces topologiques compacts

Definition 1 (Filtres). *Soit E un ensemble, un filtre est un sous-ensemble non vide \mathcal{F} de 2^E tel que:*

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$, alors pour tout $B \in 2^E$ tel que $A \subset B$, $B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Soit $\Omega(E)$ l'ensemble des filtres de E (il existe du fait que c'est un sous-ensemble de l'ensemble des parties qui existe). $\Omega(E)$ est ordonné par la relation d'ordre $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ si et seulement si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. $\Omega(E) \neq \emptyset$ car $\{E\} \in \Omega(E)$, on vérifie que $\Omega(E)$ est inductif ainsi $\Omega(E)$ possède un élément maximal. Ceci nous amène à la définition suivante:

Definition 2 (Ultra-filtres). *Un filtre \mathcal{F} est un ultrafiltre si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

La proposition suivante nous donne l'exemple le plus important de filtres:

Proposition 1. *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique et soit $a \in E$, alors l'ensemble $\mathcal{V}(a)$ des voisinages de a est un filtre.*

On peut alors définir la notion de convergence et de valeur d'adhérence d'un filtre:

Definition 3. *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique et soit \mathcal{F} un filtre sur E . On dit que:*

- \mathcal{F} converge vers a si $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{F}$.
- a est une valeur d'adhérence de \mathcal{F} si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et tout $A \in \mathcal{F}$, $V \cap A \neq \emptyset$.

La proposition suivante donne les propriétés des filtres et ultrafiltres:

Proposition 2. *Soit E un ensemble non vide.*

1. *Si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de filtres alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est un filtre.*
2. *Soit \mathcal{A} une partie non vide de 2^E stable par intersection, il existe un filtre contenant \mathcal{A} si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$.*
3. *Soit \mathcal{A} une partie non vide de 2^E stable par intersection telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$, alors le plus petit filtre contenant \mathcal{A} est $\mathcal{F} = \{B \in 2^E : \exists A \in \mathcal{A}, A \subset B\}$.*
4. *Un filtre \mathcal{F} est un ultrafiltre si et seulement si $A \in \mathcal{F}$ ou $E \setminus A \in \mathcal{F}$ pour tout $A \in 2^E$.*

Proof. $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ du fait que tout filtre contient au moins E , on déduit facilement que c'est un filtre.

S'il existe un filtre contenant \mathcal{A} , alors c'est trivial que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$ car aucun filtre ne contient l'ensemble vide. Si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{F} = \{B \in 2^E : \exists A \in \mathcal{A}, A \subset B\}$. \mathcal{F} est un filtre, en effet, il n'est pas vide car contient les éléments de \mathcal{A} , ne contient pas l'ensemble vide car sinon \mathcal{A} contiendrait l'ensemble vide, on vérifie aisément que l'intersection d'éléments de \mathcal{F} est encore dans \mathcal{F} et que si $C \in 2^E$ inclut un élément de \mathcal{F} , alors $C \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F} = \{B \in 2^E : \exists A \in \mathcal{A}, A \subset B\}$ est bien sûr un filtre contenant \mathcal{A} , montrons que c'est le plus petit filtre. Soit \mathcal{G} un filtre contenant \mathcal{A} , si $B \in \mathcal{F}$, alors il existe un élément $A \in \mathcal{A}$ contenu dans B , mais comme en particulier $A \in \mathcal{G}$ et \mathcal{G} est un filtre, alors $A \in \mathcal{G}$.

Supposons que \mathcal{F} soit un ultrafiltre. Soit $A \in 2^E$ tel que $A \notin \mathcal{F}$. Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a $(E \setminus A) \cap B \neq \emptyset$, en effet, s'il existait $B \in \mathcal{F}$ tel que $(E \setminus A) \cap B = \emptyset$, alors $B \subset A$ et alors $A \in \mathcal{F}$, ce qui est contradictoire. Ainsi, on peut définir le filtre engendré par la partie $\mathcal{F} \cup \{E \setminus A\}$, mais comme \mathcal{F} est un ultrafiltre, alors $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F} \cup \{E \setminus A\})$ et donc $E \setminus A \in \mathcal{F}$. Supposons que \mathcal{F} ne soit pas un ultrafiltre, alors il existe un filtre \mathcal{G} contenant strictement \mathcal{F} . Soit alors $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, si $E \setminus A$ appartenait à \mathcal{F} , il appartiendrait aussi à \mathcal{G} , mais alors \emptyset appartiendrait à \mathcal{G} qui est un filtre, ce qui est contradictoire. \square

En terme de convergence et de valeurs d'adhérence, nous avons:

Proposition 3. *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique.*

1. *Si un filtre \mathcal{F} converge vers a , alors a est valeur d'adhérence de \mathcal{F} .*
2. *Si un ultrafiltre \mathcal{F} a pour valeur d'adhérence a , alors \mathcal{F} converge vers a .*

Proof. Le premier point est trivial.

Si un ultrafiltre \mathcal{F} a pour valeur d'adhérence a , on a pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et tout $A \in \mathcal{F}$, $V \cap A \neq \emptyset$, \mathcal{F} étant un ultrafiltre on en déduit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{V}(a))$, d'où $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{F}$. \square

Exemple de filtre: Filtre engendré par une suite.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite prenant ses valeurs dans un espace topologique (E, \mathcal{T}) . Soit \mathcal{F} le filtre engendré par la réunion des $X_n = \{(x_k)_{k \geq n}\}$. On a:

Proposition 4. 1. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si \mathcal{F} converge également vers a .

2. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour valeur d'adhérence a si et seulement si \mathcal{F} a pour valeur d'adhérence a .

Proof. 1. Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a , alors pour tout voisinage V de a , il existe un N tel que $X_N \subset V$. En particulier, X_N est un élément de \mathcal{F} qui est un filtre, d'où $V \in \mathcal{F}$, ainsi \mathcal{F} converge vers a . Réciproquement, si \mathcal{F} converge vers a . Comme $\mathcal{F} = \{A \in 2^E : \exists X_n, X_n \subset A\}$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ il existe un N tel que $X_N \subset V$, on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

2. Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour valeur d'adhérence a , alors pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et pour tout n , $V \cap X_n \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathcal{F}$, alors par définition de \mathcal{F} , il existe N tel que $X_N \subset A$, on en déduit $X_N \cap V \subset A \cap V$ donc $A \cap V \neq \emptyset$ ainsi \mathcal{F} a pour valeur d'adhérence a . Réciproquement si \mathcal{F} a pour valeur d'adhérence a , alors pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et $A \in \mathcal{F}$, $V \cap A \neq \emptyset$, en particulier $X_n \cap V \neq \emptyset$ pour tout n , d'où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour valeur d'adhérence a . \square

On rappelle la définition suivante:

Définition 4 (Espace topologique compact). *Un espace topologique séparé (E, \mathcal{T}) est compact si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:*

1. De toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ telle que $E = \bigcup_{i \in I} O_i$, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$.
2. De toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.
3. Si une famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ est telle que pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, on a $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Finalement le théorème le plus important est le suivant:

Théorème 1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass général). *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. (E, \mathcal{T}) est compact.
2. Tout filtre de E admet une valeur d'adhérence.

3. *Tout ultrafiltre de E converge.*

Preuve du théorème. Les points 2. et 3. sont clairement équivalents du fait qu'un filtre contenu dans un filtre ayant une valeur d'adhérence a la même valeur d'adhérence et du fait qu'un ultrafiltre ayant une valeur d'adhérence converge.

Montrons que 1. implique 2. Supposons (E, \mathcal{T}) compact et soit $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ un filtre indexé sur un ensemble I . Soit J un sous-ensemble fini de I , comme \mathcal{F} est un filtre, alors $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, et donc $\bigcap_{i \in J} \bar{A}_i \neq \emptyset$, où \bar{A}_i est l'adhérence de

A_i . Comme (E, \mathcal{T}) est compact, alors $\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \neq \emptyset$. Soit $a \in \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$, on en déduit facilement que a est valeur d'adhérence de \mathcal{F} .

Supposons que tout filtre a une valeur d'adhérence. Soit alors $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés telle que pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, on a $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$. Cette

famille est alors une base d'un filtre $\mathcal{F} = \sigma((F_i)_{i \in I})$. Ce filtre admet une valeur d'adhérence, on en déduit que $\bigcap_{A_n \in \mathcal{F}} \bar{A}_n \neq \emptyset$ et comme $\bigcap_{A_n \in \mathcal{F}} \bar{A}_n \subset \bigcap_{i \in I} F_i$, d'où

$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, ainsi (E, \mathcal{T}) est compact. \square

Remarque: Si E est compact, on en déduit que toute suite a une valeur d'adhérence. Cependant, ce théorème est plus général que le théorème de Bolzano-Weierstrass métrique, en général dans un espace compact non métrique, il existe des suites qui n'admettent pas de sous-suite convergente. De même, un espace topologique dans lequel toute suite a une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement compact. Cependant, on a:

Proposition 5. *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique, si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers a , alors a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

On rappelle le théorème de Bolzano-Weierstrass métrique:

Théorème 2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass métrique). *Soit (E, d) un espace métrique, alors on a équivalence:*

1. (E, d) est compact.
2. Toute suite de E admet une valeur d'adhérence.
3. Toute suite de E admet une sous-suite convergente.

Proof. Le point 1. implique clairement le point 2. en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass général. D'après la proposition précédente, le point 3. implique le point 2.

Montrons d'abord que 2. implique 1. Montrons plus particulièrement qu'une suite ayant une valeur d'adhérence possède une sous-suite convergeant vers cette valeur d'adhérence. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ayant pour valeur d'adhérence a . On choisit alors $x_{n_k} \in B(a, \frac{1}{2^k})$ puisque tout voisinage de a contient au moins un

x_n . Puisque $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2^k}$, on en déduit que la suite extraite $(x_{n_k})_k$ converge vers a .

Pour démontrer que 3. implique 1. nous avons besoin de différents lemmes.

Lemme 1 (Lemme 1). *Un espace métrique (E, d) dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente est complet.*

Preuve du lemme 1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Elle admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers a . Soit $\epsilon > 0$, comme (x_n) est de Cauchy, alors il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ et k tel que $n_k \geq N_1$, $d(x_{n_k}, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. De plus, (x_{n_k}) converge vers a , ainsi il existe N_2 tel que pour tout $n_k \geq N_2$, $d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$, on en déduit que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < \epsilon$, d'où (x_n) converge, ainsi (E, d) est complet. \square

Lemme 2 (Lemme 2). *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset O_i$*

Preuve du lemme 2. Supposons que pour tout $r > 0$, on peut trouver $x_r \in E$ tel que $B(x_r, r)$ ne soit incluse dans aucun des O_i . En particulier, on peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit incluse dans aucun des O_i . Cette suite admet une sous-suite convergente (x_{n_k}) vers a . $(O_i)_{i \in I}$ étant un recouvrement de E , alors il existe i_0 tel que $a \in O_{i_0}$, et comme O_{i_0} est ouvert, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset O_{i_0}$. Comme (x_{n_k}) converge vers a , il existe K tel que pour tout $k \geq K$, $x_{n_k} \in B(a, \frac{\epsilon}{2})$. De plus, n_k tend vers l'infini, ainsi on peut choisir K tel que $\frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}$ et ceci implique $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(a, \epsilon) \subset O_{i_0}$, qui est contradictoire. \square

Lemme 3 (Lemme 3). *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ϵ , on dit alors que l'espace (E, d) est précompact.*

Preuve du lemme 3. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ne peut recouvrir E avec un nombre fini de boules de rayon ϵ . Alors prenant $x_1 \in E$, $B(x_1, \epsilon)$ ne recouvre pas E , ainsi il existe $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$. $B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$ ne recouvre pas E , ainsi on peut choisir $x_3 \notin B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$. On construit ainsi par récurrence une suite x_n tel que pour tout n et m , $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$, cette suite ne peut alors admettre de sous-suite convergente. \square

Fin de la preuve du théorème: Supposons que toute suite de E admette une sous-suite convergente. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . D'après le lemme 2, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $B(x, \epsilon)$ soit inclus dans un des ouverts. De plus d'après le lemme 3. on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ϵ , soit $(B_j)_{j \in J}$ le recouvrement fini de boules tel que $B_j \subset O_j$, alors $(O_j)_{j \in J}$ est un recouvrement fini ouvert de (E, d) . \square

Finallement, on a également cette caractérisation des compacts lorsque l'espace est métrique:

Proposition 6. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si il est complet et précompact.*

Proof. Si (E, d) est compact, d'après le lemme 1 et le lemme 3, il est complet et précompact.

Supposons que (E, d) soit complet et précompact, on va montrer que toute suite possède une valeur d'adhérence. Soit $(x_n)_\mathbb{N}$ une suite. Soit $\epsilon > 0$, il existe par précompacité un recouvrement de E par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\epsilon}{2}$. Comme ce recouvrement est fini, une des boules contient un nombre infini de x_n , qui constitue alors une sous-suite x_{n_k} . De plus, on a $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, a) + d(x_{n_l}, a) < \epsilon$, où a est le centre de la boule. La sous-suite est donc de Cauchy et comme E est complet, elle converge. Ainsi (E, d) est compact. \square

Si G est un sous-ensemble d'un espace topologique (E, \mathcal{T}) , on rappelle qu'il hérite de la topologie induite, la plus petite topologie rendant l'injection continue. C'est aussi l'ensemble des $G \cap O$, où O est un ouvert de E . On a:

Proposition 7. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Proof. Preuve facile. \square

Proposition 8. *Si G est compact et (E, \mathcal{T}) est un espace topologique séparé, alors G est un fermé de E .*

Proof. On se sert du lemme:

Lemme 4. *Si A et B sont deux compacts disjoints d'un espace topologique séparé, alors il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $A \subset O_1$ et $B \subset O_2$.*

Preuve du lemme. Supposons $B = \{b\}$, comme E est séparé, alors pour tout $a \in A$, il existe deux ouverts disjoints O_a et O'_a tel que $a \in O_a$ et $b \in O'_a$ et $O_a \cap O'_a = \emptyset$. On a $A \subset \bigcup_{a \in A} O_a$ et A étant compact, il existe une suite finie

$(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que $A \subset \bigcup_{k=1}^n O_{a_k}$. On a de même $\{b\} \subset \bigcap_{k=1}^n O'_{a_k}$ et on montre

facilement que $\bigcup_{k=1}^n O_{a_k}$ et $\bigcap_{k=1}^n O'_{a_k}$ sont deux ouverts disjoints.

Dans le cas général. D'après précédemment, pour tout $b \in B$, il existe deux ouverts disjoints U_b et U'_b tels que $A \subset U_b$ et $b \in U'_b$. On a $B \subset \bigcup_{b \in B} U'_b$ et

comme B est compact, il existe b_1, \dots, b_m tels que $B \subset \bigcup_{k=1}^m U'_{b_k}$. On a également

$A \subset \bigcap_{k=1}^m U_{b_k}$ et on montre que $\bigcup_{k=1}^m U'_{b_k}$ et $\bigcap_{k=1}^m U_{b_k}$ sont deux ouverts disjoints, d'où le résultat. \square

Pour montrer que le compact G est fermé, il suffit de montrer que $E \setminus G$ est un ouvert. Soit alors $b \in E \setminus G$, il existe alors deux ouverts disjoints O et O' tels que $G \subset O$ et $b \in O'$. On a alors $O' \subset E \setminus G$, ainsi $E \setminus G$ est voisinage de b , donc de chacun de ses points, donc est ouvert. \square

On a également:

Proposition 9. *Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact, si F est un fermé de E , alors F est également compact.*

Proof. F est évidemment séparé. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermé de F telle que pour tout $J \subset I$ finie, on ait $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$. On a $F_i = F'_i \cap F$, où F'_i est un fermé de E . Comme F est fermé, alors les F_i sont fermés dans E . E étant compact, on en déduit $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, ainsi F est compact. \square

On a le corollaire:

Corollaire 1. *Si (E, d) est un espace métrique, alors un sous-ensemble compact est fermé et borné.*

2 Espaces vectoriels réels normés de dimension finie

Soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la droite réelle munie de la topologie de l'ordre définie par la valeur absolue.

Théorème 3. *Les compacts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont exactement les ensembles fermés et bornés.*

Proof. L'ensemble $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ étant un espace métrique, un compact est nécessairement fermé et borné.

Soit A un ensemble fermé et borné de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors il existe un intervalle $[a, b]$ tel que $A \subset [a, b]$. Il suffit de montrer que $[a, b]$ est compact, dans ce cas A est un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact, il sera alors compact.

Soit Ω un recouvrement ouvert de $[a, b]$ et soit M l'ensemble des $m \in [a, b]$ tels que $[a, m]$ admette un sous-recouvrement ouvert fini extrait de Ω , nous allons montrer que $M = [a, b]$.

- $a \in M$: en effet, a appartient à un des ouverts de Ω , donc $[a, a] = \{a\}$ admet un sous-recouvrement ouvert extrait de Ω .
- M est un intervalle: en effet soit $m \in M$ et $a \leq m' \leq m$, un recouvrement fini de $[a, m]$ est également recouvrement fini de $[a, m']$. Ainsi M est de la forme

$[a, c[$, $[a, c]$ avec $c < b$ ou $[a, b]$.

Supposons $M = [a, c[$ avec $c < b$. Soit O un ouvert extrait de Ω contenant c (il existe car $c \in [a, b]$). Il existe alors $a < m < c$ tel que $[m, c] \subset O$. Le fait que $a < m < c$ implique que $m \in M$, donc il existe un sous-recouvrement fini Ω' de $[a, m]$ extrait de Ω . $\Omega' \cup O$ est alors un sous-recouvrement fini de $[a, c]$ extrait de Ω , ainsi $c \in M$, ce qui est contradictoire avec $M = [a, c[$.

Supposons $M = [a, c]$ avec $c < b$, soit alors Ω' un sous-recouvrement fini de $[a, c]$ extrait de Ω . Il existe alors un ouvert O extrait de Ω' contenant c . Ainsi, il existe $c < m < b$ tel que $[c, m] \subset O$, ainsi Ω' est également sous-recouvrement fini de $[a, m]$ et donc $m \in M$, ce qui est contradictoire. \square

Avant de prouver dans le cas où E est un evn de dimension finie, on va montrer le théorème de Tychonov dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces compacts métriques et dans le cas de produit fini d'espaces topologiques compacts.

Théorème 4 (Théorème de Tychonov, cas fini). *Soit $(E_k, \mathcal{T}_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'espaces topologiques compacts, alors $(\prod_{k=1}^n E_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{T}_k)$ est un espace topologique compact.*

Proof. Preuve facile. \square

Théorème 5 (Théorème de Tychonov, cas dénombrable et métrique). *Soit $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Soit:*

$$d : \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \min(1, d_n(x_n, y_n)),$$

est une distance sur $E = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ dont la topologie est exactement la topologie produit.

Si de plus les $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont compacts, alors (E, d) est compact.

Proof. On vérifie facilement que d est une distance. Montrons qu'elle définit les mêmes ouverts que la topologie produit. Soit $x \in B_d(a, r)$, montrons que $B_d(a, r)$ est également voisinage de x pour la topologie produit. $B_d(a, r)$ est voisinage de x pour la topologie induite par d , ainsi il existe $\rho > 0$ tel que $B_d(x, \rho) \subset B_d(a, r)$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}}$ étant convergente, ainsi il existe N tel

que $\sum_{n > N} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\rho}{2}$. Soit alors $U = \prod_{n=0}^N B_{d_n}(x_n, \frac{\rho}{2}) \times \prod_{n > N} E_n$. Pour tout $y \in U$,

on a:

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \min(1, d_n(x_n, y_n)) \\
&\leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \\
&\quad + \sum_{n > N} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&< \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,
\end{aligned}$$

ainsi $U \subset B_d(x, \rho)$, et $x \in U$, donc $B_d(a, r)$ est voisinage de x pour la topologie produit.

Réciproquement, montrons qu'un $\prod_{n=1}^N B_{d_n}(x_n, r_n) \times \prod_{n > N} E_n$ est voisinage de x pour la topologie induite par d . Soit $r = \min(\frac{r_n}{2^{n+1}})$. Si $d(x, y) < r$, alors pour tout $0 \leq n \leq N$, $\frac{\min(d_n(x_n, y_n), 1)}{2^{n+1}} < r \leq \frac{r_n}{2^{n+1}}$, donc $\min(d_n(x_n, y_n), 1) < r_n$, on montre que la métrique $\min(d_n(x_n, y_n), 1)$ est équivalente à d_n d'où le résultat.

Montrons maintenant que si les E_n sont compact, alors E est compact. Soit $(x^{(n)})_{\mathbb{N}}$ une suite de E . La suite $(x_0^{(n)})_{\mathbb{N}}$ de E_0 compact admet une sous-suite $(x_0^{(\varphi_0(n))})$ convergente vers $x_0 \in E_0$. De même la suite $(x_1^{(\varphi_0(n))})$ admet une sous-suite convergente $(x_1^{(\varphi_1 \circ \varphi_0(n))})$ vers $x_1 \in E_1$, etc..., fin de la preuve laissée en exercice. \square

Avant d'aborder la compacité dans les espaces normés vectoriels de dimension finie:

Lemme 5. Soit $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie dont la topologie est définie par la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, toute norme N est continue de $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Proof. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Pour tout $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned}
N(x) &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| N(e_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^n N(e_k) \|x\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe M tel que pour tout x , $N(x) \leq M|x|$. On a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$, on en déduit le résultat. \square

Proposition 10. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes et définissent donc la même topologie.

Proof. On suppose $E = \mathbb{R}^n$. Soit N une norme, montrons qu'elle est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\mathcal{S} = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$. On a $\mathcal{S} \subset \prod_{k=1}^n [-1, 1]$. Comme $[-1, 1]$ est un compact de \mathbb{R} , ainsi $\prod_{k=1}^n [-1, 1]$ est un compact de \mathbb{R}^n muni de sa topologie produit. On montre facilement que la topologie produit de \mathbb{R}^n est exactement celle définie par $\|\cdot\|_\infty$. $\|\cdot\|_\infty$ étant continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $\{1\}$ étant fermé de \mathbb{R} , ainsi \mathcal{S} est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. \mathcal{S} est contenu dans un compact, donc \mathcal{S} est compact. Soit N une norme, l'image d'un compact par une application continue étant un compact, $N(\mathcal{S})$ est un compact de \mathbb{R} . Il existe donc m et M réels tels que $m \leq N(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{S}$. Il existe d'une part $x_0 \in \mathcal{S}$ tel que $N(x_0) = m$, comme $x_0 \in \mathcal{S}$, alors $m \neq 0$. Utilisant $y = \frac{x}{\|x\|_\infty}$ pour $x \neq 0$, on en déduit $m\|x\|_\infty \leq N(x) \leq M\|x\|_\infty$. CQFD. \square

Enfin:

Proposition 11. *Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque, sont exactement les fermés-bornés.*

3 Théorème de Tychonov général

Théorème 6. *Soit (E_i, \mathcal{T}_i) une famille d'espaces topologiques compacts, alors le produit $(\prod_{i \in I} E_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est compact.*

Proof. On désigne par p_i les projections de $E = \prod_{i \in I} E_i$ sur E_i .

Soit \mathcal{F} un ultrafiltre sur $(\prod_{i \in I} E_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i)$. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, $p_i(A \cap B) \subset p_i(A) \cap p_i(B)$, d'où $p_i(A) \cap p_i(B) \neq \emptyset$. Ainsi, on peut définir sur chaque E_i le filtre $\mathcal{F}_i = \{B_i \in 2^{E_i} : \exists A \in \mathcal{F}, p_i(A) \subset B_i\}$. Montrons que \mathcal{F}_i est un ultrafiltre. \square