



HAL
open science

Equations aux dérivées partielles

Thierry Gallouët, Raphaelae Herbin

► **To cite this version:**

Thierry Gallouët, Raphaelae Herbin. Equations aux dérivées partielles. Master. France. 2015. cel-01196782v1

HAL Id: cel-01196782

<https://hal.science/cel-01196782v1>

Submitted on 10 Sep 2015 (v1), last revised 9 Mar 2024 (v7)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Aix Marseille

Master 2 de mathématiques

Equations aux dérivées partielles

Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin

10 septembre 2015

Table des matières

1	Sobolev spaces	4
1.1	Weak derivatives	4
1.2	Definition and properties	6
1.3	Functional Analysis tools	8
1.4	Density theorems	9
1.5	Théorèmes de trace	10
1.6	Théorèmes de compacité	11
1.7	Sobolev embeddings	11
1.8	Exercices	12
1.9	Corrigés d'exercices	22
2	Problèmes elliptiques linéaires	32
2.1	Formulation faible	32
2.2	Analyse spectrale	37
2.2.1	Quelques rappels	37
2.2.2	Le Laplacien	37
2.3	Régularité des solutions	39
2.4	Positivité de la solution faible	42
2.5	Condition de Dirichlet non homogène	44
2.6	Exercices	46
2.7	Corrigés d'exercices	65
3	Problèmes elliptiques non linéaires	89
3.1	Méthodes de compacité	89
3.1.1	Degré topologique et théorème de Schauder	89
3.1.2	Existence avec le théorème de Schauder	92
3.1.3	Existence avec le degré topologique	93
3.2	Méthodes de monotonie	102
3.2.1	Introduction	102
3.2.2	Opérateur de Leray-Lions	103
3.3	Exercices	112
3.4	Corrigés d'exercices	118

4 Problèmes paraboliques	137
4.1 Aperçu des méthodes	137
4.2 Intégration à valeur vectorielle	146
4.3 Existence Par Faedo-Galerkin	153
4.4 problèmes paraboliques non linéaires	166
4.5 Compacité en temps	170
4.6 Exercices	183
4.7 Corrigés d'exercices	188
5 Problèmes hyperboliques	203
5.1 Le cas unidimensionnel	203
5.2 Cas multidimensionnel	213
5.3 Exercices	219
5.4 Corrigés d'exercices	223
Bibliography	

Introduction

This course gives some tools for the study of partial differential equations. These tools are used to obtain existence results (and also often uniqueness results) for some examples of linear or nonlinear PDEs of various nature (elliptic, parabolic or hyperbolic).

Chapitre 1

Sobolev spaces

Sobolev¹ spaces are functional spaces, that is spaces containing functions, and these functions are such that their powers and the powers of their derivatives (in the sense of transposition, or in a weak sense which we shall give later) are Lebesgue-integrable. Similarly to the Lebesgue spaces, these spaces are Banach spaces². The fact that the Sobolev spaces are complete is very important to prove the existence of solutions to some partial differential equations.

1.1 Weak derivatives

The notion of weak derivative is already in a famous article by Jean Leray³ published in 1934, on the Navier-Stokes equations ; in this article, it is named “quasi-derivative” ([7] page 205). This notion is crucial for the study of the existence of solutions to many partial differential equations.

Throughout the sequel, Ω is an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, and $C_c^\infty(\Omega)$ denotes the set of functions of class C^∞ and with compact support on Ω , that is :

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega, K \text{ compact}; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Moreover, the open subset Ω will always be equipped with the Borel σ -algebra, denoted by $\mathcal{B}(\Omega)$, and with the Lebesgue measure, denoted by λ if $N = 1$ and λ_N si $N > 1$. Integration will always be with respect to the Lebesgue measure, unless otherwise mentioned.

The following lemma is absolutely fundamental, because it allows to merge the (class of) function(s) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ with the linear mapping $T_f : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$.

Recall that $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ means that for any compact subset K of Ω , the restriction $f|_K$ of f to K belongs to $L^1(K)$.

Lemme 1.1 (Almost everywhere equality in L^1) *Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, and let f and $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Then :*

$$\left[\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx \right] \iff [f = g \text{ a.e.}].$$

1. Sergueï Lvovitch Sobolev, 1908-1989) is a Russian mathematician and physicist.

2. A Banach space is a complete normed vector space.

3. Jean Leray, 1906 -1998, is a French mathematician who worked on partial differential equations and on algebraic topology.

Proof : The proof of this lemma uses the regularization of an integrable function by the convolution with a sequence of mollifiers : see [3, Problem 8.7 page 480]. \square

Let $\mathcal{D}(\Omega)$ denote the space $C_c^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}^*(\Omega)$ denote the set of linear forms on $\mathcal{D}(\Omega)$, which is called the algebraic dual space of $\mathcal{D}(\Omega)$ (to distinguish it from the continuous dual space of $\mathcal{D}(\Omega)$, which is denoted $\mathcal{D}'(\Omega)$, and which is the set of all continuous linear forms on $\mathcal{D}(\Omega)$, once a topology is defined on this space, which will be unuseful for this course). Let $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ and $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, then the real number $T(\varphi)$ is called the action of T on φ and is denoted by $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ or $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$.

Lemma 1.1 Almost everywhere equality in L^1 theorem.1.1 allows the definition the derivative by transposition of a L^1_{loc} function in the following way :

Définition 1.2 (Derivate by transposition) Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, and let $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

- Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, and let $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. The derivate by transposition of f with respect to its i -th variable is the linear form $D_i f$ on $C_c^\infty(\Omega)$, defined by :

$$\langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} f \partial_i \varphi \, dx$$

where $\partial_i \varphi$ is the classical partial derivative of φ with respect to its i -th variable. Therefore $D_i f$ belongs to $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Note that if $f \in C^1(\Omega)$, then $D_i f$ is nothing but $\partial_i f$, merging $\partial_i f$ and $T_{\partial_i f}$ (which is the element of $\mathcal{D}^*(\Omega)$ induced by $\partial_i f$). It is therefore a generalisation of the notion of derivative.

If the linear form $D_i f$ can be merged with a locally integrable function in the sense of Lemma 1.1 Almost everywhere equality in L^1 theorem.1.1, then f is said to admit a weak derivative.

- Let $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$; then its derivative by transposition $D_i T$ is defined by :

$$\langle D_i T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \langle T, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

The notion of derivative in the sense of distribution is somewhat more tricky to define since it requires the definition of a topology on $C_c^\infty(\Omega)$. We shall not need it in the framework of this course.

Let us give an example of derivate by transposition. The Heaviside⁴ function is defined by

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

is locally integrable. Thus it admits a derivate by transposition. To find this derivative DH , one note that for any $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, the following equality holds :

$$- \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \, dx = \varphi(0),$$

and therefore DH is the linear form which maps any function φ to its value at 0 ; this linear form is also called the “ Dirac measure at 0 ” : $DH = \delta_0$. But this derivative is not a weak derivative, because δ_0 may not be associated with an L^1_{loc} function : there does not exist any function $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ such that $\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g \varphi \, dx$ for any $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (see exercise 1.1 Example if derivativeexo.1.1).

Definition 1.2 Derivate by transposition theorem.1.2 allows to define the derivate by transposition of an L^1_{loc} function (or of an element of $\mathcal{D}^*(\Omega)$) of higher order. By identifying an L^1_{loc} function with the element of $\mathcal{D}^*(\Omega)$ that it represents, one may also define the notion of weak derivative of higher order. More precisely, for $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, the weak derivative $D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, if it exists, is defined by :

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u(x) \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

4. Oliver Heaviside (1850 - 1925) physicien britannique autodidacte.

where $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ et $\partial_i^{\alpha_i} \varphi$ is the (classical) partial derivative of order α_i with respect to the i -th variable.

Remarque 1.3 (Convergence in \mathcal{D}^*) Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequence of elements of $\mathcal{D}^*(\Omega)$ and $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Then T_n is said to converge to T in $\mathcal{D}^*(\Omega)$ as $n \rightarrow +\infty$, if

$$\langle T_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \rightarrow \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \text{ for any } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

It is therefore a pointwise convergence in the set of mappings from $C_c^\infty(\Omega)$ to \mathbb{R} .

When looking at distributions, a topological structure must be added to the space $C_c^\infty(\Omega)$ (which will not be described in this course, because it is not needed) and instead of working with $\mathcal{D}^*(\Omega)$, one works with the smaller space of linear continuous mappings from $C_c^\infty(\Omega)$ to \mathbb{R} , which is denoted by $\mathcal{D}'(\Omega)$. However, the notion of convergence remains the same in the space $\mathcal{D}'(\Omega)$: it is still given by (1.2) Convergence in \mathcal{D}^* equation.1.2).

1.2 Definition and properties

Définition 1.4 (Sobolev spaces) Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

1. The space $H^1(\Omega)$ is defined by :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

In this definition, when writing $D_i u \in L^2(\Omega)$, we mean in fact

$$\exists g \in L^2(\Omega); \langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} g \varphi \, dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2. The space $H^m(\Omega)$: For $m \in \mathbb{N}$, we define :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

3. The space $W^{m,p}(\Omega)$ is defined for $1 \leq p \leq \infty$ and $m \in \mathbb{N}$, by

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

4. Note that for $m = 0$, the space $W^{m,p}(\Omega)$ is the Lebesgue space $L^p(\Omega)$.

Let $(\cdot | \cdot)_{L^2}$ denote the inner product in $L^2(\Omega)$, that is :

$$(u | v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

and $\|\cdot\|_{L^p}$ the norm in $L^p(\Omega)$, that is :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.5 (Vector space structure) When equipped with the following inner product,

$$(u | v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2},$$

the spaces $H^m(\Omega)$ are Hilbert spaces. Note that $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

A natural norm on $W^{m,p}(\Omega)$ is defined by :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{if } p = +\infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Equipped with this norm, $W^{m,p}(\Omega)$ is a **Banach space**. One may show that the following norm :

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

is equivalent to the norm defined by (1.3) : this follows from the equivalence between the norms on \mathbb{R}^q where $q = \text{card}(\{\alpha \in \mathbb{N}^N \mid |\alpha| \leq m\})$. The two norms are denoted indifferently by $\|\cdot\|_{m,p}$ or $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$. The main interest of the norm (1.3) is that in the case $p = 2$, it gives H^m a Hilbertian structure, and this is not the case with the norm (1.4).

Remarque 1.6 (Sobolev spaces and continuity) In one space dimension ($N = 1$), with $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $1 \leq p \leq +\infty$, any element of $W^{1,p}(]a, b[)$ (which is a class of functions) can be seen as a continuous function, in the sense that there exists a continuous representative of the class (this continuous representative is unique, see Exercise 1.3). This follows from the fact that any (class of) function(s) of $W^{1,p}(]a, b[)$ can be written as the integral of its derivative.

$$u \in W^{1,p}(]a, b[) \iff \left\{ \exists \tilde{u} \in C([a, b]) \text{ and } v \in L^p(]a, b[); u = \tilde{u} \text{ a.e. and } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s) ds \right\}.$$

If the space dimension is greater than 1, then this is no longer true. In particular $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$, as shown by the following example : let $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, and u the function defined from Ω to \mathbb{R} by $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$, with $\gamma \in]0, 1/2[$. Then $u \in H^1(\Omega)$ whereas $u \notin L^\infty(\Omega)$ (see Problem 1.5). and so, in particular, $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Proposition 1.7 (Separability) Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p < +\infty$; the space $W^{m,p}(\Omega)$ is a **separable space** (that is to say a normed vector space which contains a dense countable subset).

The proof of this proposition is the object of Problem 1.9, where it is also shown by a counter example that the result is not true for $p = +\infty$.

The notion of separability is important because it allows to get as close as need of an vector of the space with an element of a countable family; in the case of a Hilbert space, separability is equivalent to the 'existence of a Hilbert basis (see e.g. [3, Proposition 6.62]) .

Let us now recall the important notion of reflexive space.

Définition 1.8 (Reflexive space) Let E be a real normed vector space. Let E' be its topological dual, that is to say the set of continuous linear forms continues from E to \mathbb{R} equipped with its natural norm (E' is a Banach space). For all $x \in E$, let us define the mapping J_x from E' to \mathbb{R} by $J_x(T) = T(x)$ for any $T \in E'$. Then

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E$$

and therefore J_x is a continuous linear form over E' , which is denoted by $J_x \in E''$ where E'' est le bidual space of E , that is to say the topological dual space of E' . Thanks to the Hahn-Banach theorem which is recalled in the next section, it can be shown that : $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$.

The mapping J , defined from E to E'' by $J(x) = J_x$ for any $x \in E$, is therefore a linear isometry from E to its image $\text{Im}(J)$, and of course, we have $\text{Im}(J) \subset E''$.

The space E is said to be **reflexive** if $\text{Im}(J) = E''$, which amounts to saying that J is surjective.

Note that a reflexive space E is complete, since the dual space of any normed vector space is complete.

Proposition 1.9 (Reflexivity) Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, and $m \in \mathbb{N}$. For any $p \in]1, +\infty[$, the space $W^{m,p}(\Omega)$ is a **reflexive space**.

The proof of this result is the object of Problem 1.10 Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$ exo.1.10.

1.3 Functional Analysis tools

Let us start with a fundamental theorem :

Théorème 1.10 (Hahn Banach) Let E be a vector space over \mathbb{R} and p a convex function defined from E to \mathbb{R} . Let F be a sub-space of E , and T a linear form on F which satisfies $T(x) \leq p(x)$ for any $x \in F$. Then there exists a linear form from E to \mathbb{R} , equal to T on F , which prolonges T to the whole space E and which still satisfies the condition : $T(x) \leq p(x)$ for any $x \in E$.

The following corollary is essential :

Corollaire 1.11 Let E be a normed space, F un sub-space of E and T a continuous linear form over F . One may then prolonge T into a continuous mapping defined over E , with same norm as T .

A well-known characterization of finite dimensional spaces is given in the following theorem :

Théorème 1.12 (Finite dimensional spaces) A Banach space E is finite dimensional if and only if its closed unit ball is compact.

The notions de weak and weak- \star convergence will be fundamental in the sequel of this course.

Définition 1.13 (Weak and weak- \star convergence) Let E be a Banach space.

1. **Weak convergence** Let $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ and $u \in E$. We say that $u_n \rightarrow u$ weakly in E as $n \rightarrow \infty$ if $T(u_n) \rightarrow T(u)$ for any $T \in E'$.
2. **Weak- \star convergence** Let $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ and $u \in E'$. We say that $T_n \rightarrow T$ in E' weakly- \star if $T_n(x) \rightarrow T(x)$ for any $x \in E$.

Théorème 1.14 (Weak- \star compactness of the bounded subsets of the dual of a separable space)

Let E be a separable Banach space, and let $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence of E' (that is to say there exists $C \in \mathbb{R}_+$ such that $\|T_n\|_{E'} \leq C$ for any $n \in \mathbb{N}$). Then there exists a subsequence, still denoted by $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, and $T \in E'$ such that $T_n \rightarrow T$ in E' weak- \star .

An important application of this theorem is the following : let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N and $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a bounded sequence of $L^\infty(\Omega)$, then there exists a subsequence, still denoted by $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $u \in L^\infty(\Omega)$ such that $\int_\Omega u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_\Omega u \varphi \, dx$ for any $\varphi \in L^1(\Omega)$. This is a consequence of the existence of a natural isometry between $L^\infty(\Omega)$ and the dual space of $L^1(\Omega)$ and of the separability of $L^1(\Omega)$.

Théorème 1.15 (Weak compactness of the bounded subsets of a reflexive space) *Let E be a reflexive Banach space, and let $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence of E (that is to say such that there exists $C \in \mathbb{R}_+$ such that $\|u_n\|_E \leq C$ for any $n \in \mathbb{N}$). Then there exists a subsequence, still denoted by $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $u \in E$ such that $u_n \rightarrow u$ weakly in E .*

Note that a Hilbert is always a reflexive Banach space.

1.4 Density theorems

Définition 1.16 (Lipschitz boundary) *A bounded open subset Ω de \mathbb{R}^N has a Lipschitz boundary if there exists a family $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ of open subsets of \mathbb{R}^N and an associated family of mappings $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ such that :*

1. $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$.
2. $\phi_0 : \Omega_0 \rightarrow B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ such that } \|x\| < 1\}$ is bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} are Lipschitz-continuous,
3. For any $i \geq 1$, $\phi_i : \Omega_i \rightarrow B_{1,N}$ is bijective, ϕ_i and ϕ_i^{-1} are Lipschitz-continuous, and $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N$ et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$ (with $\mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.)

Remarque 1.17 (Ouvert à frontière fortement lipschitzienne) Un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N est dit à frontière fortement lipschitzienne si le bord de Ω est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne et que Ω est (localement) d'un seul côté de ce graphe. Un ouvert (borné) à frontière fortement lipschitzienne est un ouvert à frontière lipschitzienne mais la réciproque est fautive comme le montre l'exercice 1.13. Exemple d'ouvert lipschitzien non fortement lipschitzien exo.1.13.

Théorème 1.18 *Soit Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p \leq +\infty$ alors :*

1. Si $p < +\infty$, l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des restrictions à Ω des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Il existe une application linéaire continue $P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Des résultats analogues sont vrais avec $W^{m,p}(\Omega)$ ($m > 1$) au lieu de $W^{1,p}(\Omega)$ mais demandent plus de régularité sur Ω (voir [1]). La démonstration se fait par troncature et régularisation. Un cas particulier fait l'objet de l'exercice 1.18. Prolongement H^2 exo.1.18.

On peut montrer aussi que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. Mais, ceci est faux si on remplace \mathbb{R}^N par Ω avec Ω ouvert borné et $m > 0$. Par exemple, si Ω est un ouvert borné, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$. Son adhérence est un sous espace strict de $H^1(\Omega)$, qu'on note $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.19 (Espace $H_0^1(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.*

1. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
2. Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Comme cela a été dit précédemment, si $\Omega = \mathbb{R}^N$ on a $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

Remarque 1.20 (Espace $C^k(\bar{\Omega})$) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soit φ une fonction de Ω dans \mathbb{R} . On dit que $\varphi \in C^k(\bar{\Omega})$ si il existe une fonction ψ de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , de classe C^k telle que $\psi = \varphi$ dans Ω . Si Ω est borné, il est bien sûr possible de demander que la fonction ψ soit à support compact dans \mathbb{R}^N , comme cela a été fait dans le théorème 1.18 Density theorem theorem.1.18. Il est intéressant de noter qu'il est possible de prendre la même définition pour $k = 0$. En effet, si φ est continue de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} , il existe alors ψ continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} telle que $\psi = \varphi$ dans $\bar{\Omega}$, voir l'exercice 1.14 Prolongement d'une fonction continue exo.1.14.

1.5 Théorèmes de trace

Théorème 1.21 (Trace) Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une unique application linéaire continue γ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ telle que $\gamma u = u(0, \cdot)$ p.p sur \mathbb{R}^{N-1} (au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle) si $u \in C_c^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^N)$.

Remarque 1.22 (Lien avec la trace classique.) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Alors :

1. Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, on a alors $\gamma u = u$ p.p sur $\partial\Omega$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle).
2. $\text{Ker } \gamma = W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.

Voir à ce propos l'exercice 1.17 Noyau de l'opérateur "trace" exo.1.17.

Théorème 1.23 Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une unique application γ (linéaire continue) définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et tel que

$$\gamma u = u \text{ p.p. sur } \partial\Omega \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Ici encore, p, p est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

De plus $\text{Ker } \gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarquons que si $p > N$, on peut montrer (voir théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28) que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ et γu est alors la valeur de u au bord au sens classique.

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 1.24 (Intégration par parties)

- Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N (= \{x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\})$, alors

$$\begin{cases} \text{Si } 2 \leq i \leq N, \int_{\Omega} u D_i v \, dx = - \int_{\Omega} D_i u v \, dx, \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \\ \text{Si } i = 1, \int_{\Omega} u D_1 v \, dx = - \int_{\Omega} D_1 u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y) \gamma v(y) \, d\gamma(y), \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \end{cases}$$

- si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne, alors, pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\int_{\Omega} u D_i v \, dx = - \int_{\Omega} D_i u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y) \gamma v(y) n_i(y) \, d\gamma(y), \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2,$$

où γu désigne la trace de u sur la frontière $\partial\Omega$ et $d\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure adéquate sur $\partial\Omega$ (that is to say la mesure de Hausdorff sur $\partial\Omega$ qu'on peut voir comme une mesure de Lebesgue ($N - 1$) dimensionnelle), et $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^t$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω .

1.6 Théorèmes de compacité

Les théorèmes suivants sont une conséquence du théorème de Kolmogorov (voir [4, Théorème 8.5]).

Théorème 1.25 (Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.26 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne, et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Nous aurons aussi besoin d'une version du théorème 1.25 Rellich theorem.1.25 dans les espaces duaux de L^p et $W_0^{1,p}$. Comme, pour $p < +\infty$, le dual de L^p est identifié à l'espace L^q avec $q = p/(p-1)$, et que le dual de $W_0^{1,p}$ est noté $W^{-1,q}$, on obtient le théorème 1.27 Théorèmes de compacité theorem.1.27.

Théorème 1.27 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 < q < +\infty$. Toute partie bornée de $L^q(\Omega)$ est relativement compacte dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

En particulier, pour $q = 2$, l'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H^{-1}(\Omega)$. Toute partie bornée de $L^2(\Omega)$ est donc relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

1.7 Sobolev embeddings

The following theorem states the Sobolev embeddings; these embeddings that a function which is such that a power of itself and its derivative are integrable (that is to say $u \in W^{1,p}$) is in fact in a "better" espace (in terms of integration or regularity). There are three different cases, whether the power is lower than, equal to, or larger than the space dimension N .

Théorème 1.28 (Sobolev embeddings) *Let Ω be an open subset of \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, which is either bounded with Lipschitz boundary, or equal to \mathbb{R}^N .*

1. *If $1 \leq p < N$, then $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, with $p^* = \frac{Np}{N-p}$, and the embedding is continuous, that is to say there exists $C \in \mathbb{R}_+$ (only depending on p, N and Ω) such that*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \text{ which is denoted by } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega);$$

in particular we have

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

For $N = 1$, the case $p = N$ is allowed. We thus have

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ if } N = 1.$$

2. *If $p > N$, then*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$

where, for $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ is the set of α -Hölder functions, defined by

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k \|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2\}. \quad (1.5)$$

The proof of this result is the object of Problem 1.15 Inégalités de Sobolev pour $p > N$ exo.1.15.

3. In the case where Ω is a bounded domain with Lipschitz boundary, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ for any q such that $1 \leq q < +\infty$ (and the case $q = \infty$ is authorized if $N = 1$). This result is wrong in the case $\Omega = \mathbb{R}^N$, see Problem 1.5 Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en Idexo.1.3exo.1.5 for a counter-example.

If Ω is an open bounded subset with no regularity assumption on the boundary, the three preceding assertions are still valid for the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ instead of $W^{1,p}(\Omega)$;.

Remarque 1.29 Let Ω be an open bounded subset of \mathbb{R}^N . A simple consequence of the Sobolev injection theorem (theorem 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28) and of the Rellich compactness theorem (theorem 1.25 Rellich theorem.1.25) is that the mapping $u \mapsto u$ is compact from $W_0^{1,p}(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$ if $1 \leq p \leq N$ and $q < p^* = \frac{pN}{N-p}$.

If $p > N$, a simple consequence of the Sobolev injection theorem (theorem 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28) and of the (classical) Ascoli theorem is that the mapping $u \mapsto u$ is compact from $W_0^{1,p}(\Omega)$ to $C(\bar{\Omega})$.

References

1. Mesure, intégration, probabilités, T. Gallouët et R Herbin, Ellipses, 2013
<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/integ.pdf>
2. Analyse fonctionnelle et résultats principaux sur les Sobolev : [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983
3. Exposé complet sur les espaces de Sobolev : [1] R. A. Adams, Sobolev spaces, 1975

1.8 Exercises

Exercise 1.1 (Example if derivative) *Solution 1.1 Exemple de dérivée cor.1.1*

Let $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \dots, N\}$ and $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $u(x) = 1$ if $x \in \Omega$ and $u(x) = 0$ if $x \notin \Omega$.

1. For $i = \{1, \dots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, show that $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ only depends on the values taken by φ on $\partial\Omega$.

Indication – Start with the case $N = 1$ and use an integration by parts.

2. Show that $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Indication – For $N = 1$, the question amounts to showing that the Dirac measure cannot be associated to an L^1 function. To show this fact, one may use the following integration result : if $g \in L^1(\mathbb{R})$, et si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of measurable sets, the measure of which tends to 0 as $n \rightarrow +\infty$, then $\int_{A_n} g(x) dx \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$.

Exercise 1.2 (A function with null derivative is constant) *Solution 1.2 Une fonction de dérivée nulle est constante cor.1.2*

Let $u \in L_{loc}^1(]0, 1[)$ such that $Du = 0$. Show that

$$\exists a \in \mathbb{R}; u = a \text{ a.e..}$$

Indication – On pourra considérer d'abord le cas $u \in L^1(]0, 1[)$ et procéder, par exemple, par densité. La fonction u peut être approchée par convolution par des noyaux régularisants ρ_n qu'on prend à support dans $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. En prolongeant u par 0 en dehors de $[0, 1]$, on pose $u_n = u \star \rho_n$. On a alors $u'_n = u \star \rho'_n$. Montrer alors que $u'_n(x) = - < Du, \rho_n(x - \cdot) >$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$, et en conclure que $u'_n(x) = 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$. Terminer le raisonnement en utilisant le fait que $u_n 1_{] \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[}$ tend vers u dans L^1 .

Dans le cas $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ considérer $u_\varepsilon = u 1_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$ et refaire le raisonnement précédent de manière habile. . .

Le raisonnement donné ici se généralise au cas multidimensionnel (voir l'exercice 1.4 Généralisation de l'exercice 1.2A fonction with null derivative is constant exo.1.2 exo.1.4 et son corrigé). Une autre méthode, plus spécifiquement liée au cas unidimensionnel, est donnée dans le corrigé 1.2 Une fonction de dérivée nulle est constante cor.1.2.

Exercice 1.3 (Espace de Sobolev en 1d) Solution 1.3 Espace de Sobolev en 1d cor.1.3

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

- (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t) dt$, pour presque tout $x \in]0, 1[$. En déduire que $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0, 1[$, en identifiant u et v , on peut donc dire que $W^{1,p}(]0, 1[) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$).

Indication – Introduire la fonction $F(x) = \int_0^x Du(t) dt$ (qui est dans L^p), calculer sa dérivée faible et montrer qu'elle est égale à Du . Pour cela, appliquer Fubini en introduisant la fonction caractéristique $1_{[0,x]}$ et en notant que pour $x, t \in [0, 1]$, $1_{[0,x]}(t) = 1_{[t,1]}(x)$.

Montrer alors que F est continue et conclure grâce à l'exercice 1.2A fonction with null derivative is constant exo.1.2.

- (b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

Indication – Ecrire $u(x) = u(s) + \int_s^x Du(t) dt$, et intégrer par rapport à s .

- (c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

Indication – Majorer $u(x) - u(y)$ par l'inégalité de Hölder.

2. Soit $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0, 1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t) dt$, pour tout $x \in]0, 1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ et $Du = w$.

Indication – Encore Fubini. . .

Exercice 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2A fonction with null derivative is constant exo.1.2) Solution 1.4 Généralisation de l'exercice 1.2A fonction with null derivative is constant exo.1.2 cor.1.4

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p. (u est donc la fonction constante égale à a .) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de noyaux régularisants, that is to say :

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1, \rho \geq 0, \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1, \quad (1.6)$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$.

On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure. . .]

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u_{\varepsilon, n}(y) - u_{\varepsilon, n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon, n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt,$$

et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1 - 2\varepsilon$ et $i \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$(\partial u_{\varepsilon, n} / \partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\bar{z}) \rho_n(z - \bar{z}) d\bar{z}.$$

En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \dots, D_N u\}^t$,

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt.$$

Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N . Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B . (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Exercice 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en 1dexo.1.3) Solution 1.5 Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en 1dexo.1.3 cor.1.5

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\bar{\Omega})$.

Indication – Montrer que la dérivée par transposition de u est une dérivée faible et que cette dérivée faible est égale (presque partout) à sa dérivée classique.

Exercice 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$) Solution 1.6 Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$ cor.1.6

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int u(x) \Delta \varphi(x) dx = - \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Déduire de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (that is to say que l'élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$, noté Δu , se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Exercice 1.7 (Petits pièges...) Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose $G(x) = \ln(|x|)$.

1. Montrer que $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et $\Delta G = 0$ (au sens classique) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En déduire que $\Delta G = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Que vaut ΔG dans $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^2)$?
2. Montrer que $G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < +\infty$ et $\nabla G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour $p < 2$.
3. On prend dans cette question $\Omega =]0, 1[$. Montrer que

$$u \in L^2(\Omega), \Delta u \in H^{-1}(\Omega) \not\Rightarrow u \in H^1(\Omega).$$

Montrer que

$$v \in (H^{-1}(\Omega))^2, \operatorname{div}(v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^*(\Omega) \text{ et } \operatorname{rot}(v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^*(\Omega) \not\Rightarrow v \in (L^2(\Omega))^2.$$

4. (Singularité éliminable) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0. On suppose ici que $u \in H^1(\Omega)$ et que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega \setminus \{0\})$. Montrer que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$. [On pourra utiliser astucieusement la fonction $G \dots$].

Exercice 1.8 (Trois applications de Hahn-Banach) Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E, x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.

Indication – Définir T sur la droite engendrée par x et prolonger T par Hahn Banach.

2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.

Indication – Sens \Rightarrow : Sens facile.

Sens \Leftarrow : construire l'application linéaire T sur $\mathbb{R}x \oplus F$ par $T(x) = 1$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$; montrer que T est continue et conclure par Hahn Banach. La continuité de T est le point le plus technique : on peut par exemple remarquer que si $x \notin \bar{F}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \cap F = \emptyset$, et montrer ensuite que $T(z) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|z\|$ pour tout $z \in G = \mathbb{R}x \oplus F$, ce qui montre la continuité de T sur G .

3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans \mathbb{R} par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E''$ pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E''$. (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.)

Indication – La linéarité et la continuité de J sont faciles. Il reste à montrer le caractère isométrique. Soit $x \in E$. Il est facile de voir que $|J(x)| \leq \|x\|_E$. Pour montrer l'égalité, considérer l'application T de la première question.

Exercice 1.9 (Séparabilité de L^p) On désigne par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que L^p est séparable.

Indication – On pourra construire une famille dénombrable dense de $C_c(\mathbb{R})$ en considérant pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n des fonctions qui sont nulles sur $[-n, n]^c$ et qui sont constantes par morceaux et à valeur rationnelles sur tous les intervalles de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \mathbb{Z}$. Vérifier que les ensembles A_n sont dénombrables, et montrer ensuite que $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dense dans L^p .

2. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Indication – Soit B l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$ et qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. Vérifier que B est une partie non dénombrable de L^∞ et que si A est une partie dense de $L^\infty(\mathbb{R})$ il existe une injection de A dans B .

Exercice 1.10 (Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$)

Soient (X, T, m) un espace mesuré σ -fini et $1 < p < \infty$, montrer que $L^p(X, T, m)$ est un espace de Banach réflexif.

Exercice 1.11 (Séparabilité et réflexivité d'un s.e.v. fermé)

Soient E un espace de Banach (réel) et F un s.e.v. fermé de E . Montrer que :

1. E séparable $\Rightarrow F$ séparable.
2. E réflexif $\Rightarrow F$ réflexif.

Exercice 1.12 (Fonctions lipschitziennes) Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

N.B. : Réciproquement, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, alors u est lipschitzienne (au sens : il existe $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne t.q. $u = v$ p.p.).

Exercice 1.13 (Exemple d'ouvert lipschitzien non fortement lipschitzien)

On appelle "ouvert lipschitzien" un ouvert à frontière lipschitzienne (définition 1.16 Lipschitz boundary theorem.1.16) et "ouvert fortement lipschitzien" un ouvert à frontière fortement lipschitzienne (remarque 1.17 Ouvert à frontière fortement lipschitzienne theorem.1.17).

L'idée (due, semble-t-il à Zerner) est de prendre pour ouvert une route allant vers le point $(0, 0)$ avec une infinité de virages, sans changer le rayon de courbure des virages (ce qui donne que l'ouvert est lipschitzien) mais (bien sûr) dont la largeur tend vers 0 quand on se rapproche de $(0, 0)$. A cause des virages, l'ouvert ne vérifie pas la propriété du segment et donc n'est pas fortement lipschitzien.

Soit $\bar{\varphi}$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , nulle en 0 et 1. On suppose que

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{4}\right) \geq 1. \quad (1.7)$$

La fonction $\bar{\varphi}$ peut être, par exemple, une fonction "chapeau" ou une fonction de classe C^∞ à support compact dans $]0, 1[$.

Construction de φ

On pose $a_n = 1/2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on définit φ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} en posant

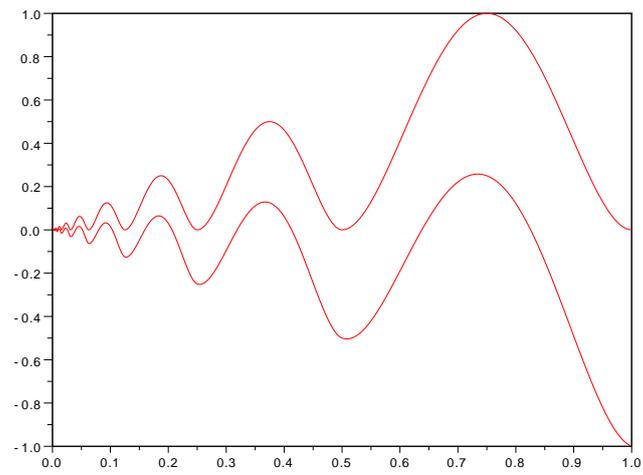
$$\varphi(x) = a_{n-1} \bar{\varphi}\left(\frac{x - a_n}{a_{n-1}}\right) \text{ si } x \in]a_n, a_{n-1}] \text{ et } n \geq 1.$$

La fonction φ est donc lipschitzienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} (en ajoutant $\varphi(0) = 0$). On remarque aussi que $\varphi(a_n) = 0$. On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in]0, 1[, \varphi(x) - x < y < \varphi(x)\}$.

L'ouvert Ω n'est pas fortement lipschitzien

Un ouvert fortement lipschitzien vérifie la propriété du segment, that is to say que pour tout $z \in \partial\Omega$, il existe $d \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\{z + sd, s \in]0, t]\} \subset \Omega$.

1. Montrer que cette propriété n'est pas vérifiée pour Ω et $z = 0$.

FIGURE 1.1 – L^1 ouvert Ω

Corrigé – Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On va montrer que le segment $\{sd, s \in]0, t]\}$ rencontre le complémentaire de Ω . On pose $S = \{sd, s \in]0, t]\}$. Comme $\Omega \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a, bien sûr, $S \subset \Omega^c$ si $d_1 \leq 0$. On suppose donc $d_1 > 0$ et (comme t est arbitraire) il suffit de considérer le cas $d_1 = 1$.

Si $d_2 \geq 0$, on a $a_n d \in S$ pour n t.q. $a_n \leq t$ et $a_n d \notin \Omega$ car $a_n d_2 \geq \varphi(a_n) = 0$. Donc, S rencontre Ω^c .

Si $d_2 < 0$, on a $(a_n + \frac{a_n}{2})d \in S$ pour n t.q. $a_n + \frac{a_n}{2} \leq t$. Mais, en utilisant (1.7 Exemple d'ouvert lipschitzien non fortement lipschitzien equation.1.7), on a

$$\varphi(a_n + \frac{a_n}{2}) = a_{n-1} \bar{\varphi}(\frac{1}{4}) \geq a_{n-1} \geq a_n + \frac{a_n}{2}.$$

On a donc $\varphi(a_n + \frac{a_n}{2}) - (a_n + \frac{a_n}{2}) \geq 0$ et, comme $(a_n + \frac{a_n}{2})d_2 < 0$, ceci montre que $(a_n + \frac{a_n}{2})d \notin \Omega$. On a ainsi montré que S rencontre Ω^c .

Finalement, on a bien montré que Ω n'est pas fortement lipschitzien.

L'ouvert Ω est faiblement lipschitzien

On pose $T = \{(x, y), x \in]0, 1[, -x < y < x\}$. On définit une bijection ψ de Ω dans le triangle T en posant

$$\psi(x, y) = (x, x + 2(y - \varphi(x))).$$

2. Montrer que ψ est lipschitzienne ainsi que son inverse. En déduire que Ω est un ouvert lipschitzien.

Corrigé – La fonction ψ est lipschitzienne (car φ l'est) et son inverse aussi car son inverse est l'application $\bar{\psi}$ définie par

$$\bar{\psi}(x, y) = (x, \varphi(x) + \frac{1}{2}(y - \varphi(x))).$$

Comme le triangle T est fortement lipschitzien, on en déduit (assez facilement) que Ω est lipschitzien.

Exercice 1.14 (Prolongement d'une fonction continue) Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et f une fonction continue de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe g continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} telle que $g = f$ dans Ω .

Si $x \in \bar{\Omega}$, on pose $g(x) = f(x)$.

Si $x \notin \bar{\Omega}$, on pose $d_x = \inf\{|x - y|, y \in \Omega\}$ (on a donc $d_x > 0$), $B_x = \{z \in \mathbb{R}^N, |x - z| < 2d_x\}$ et

$$g(x) = \frac{\int_{\Omega \cap B_x} f(z) dz}{\int_{\Omega \cap B_x} dz}.$$

Montrer que g est bien définie et est continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} .

Exercice 1.15 (Inégalités de Sobolev pour $p > N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $p > N$.

Si $x \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), on note $x = (x_1, \bar{x})$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$. On note $H = \{(t, (1 - |t|)a), t \in]-1, 1[, a \in B_{N-1}\}$, où $B_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{N-1}, |x| < 1\}$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne toujours la norme euclidienne.)

Soit $N < p < \infty$.

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p , t.q.

$$|u(1, 0) - u(-1, 0)| \leq C_1 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(H)}. \quad (1.8)$$

[On pourra commencer par écrire $u(1, 0) - u(0, a)$ comme une intégrale utilisant convenablement $\nabla u(t, (1-t)a)$ pour $t \in]0, 1[$, et intégrer pour $a \in B_{N-1}$ pour comparer $u(1, 0)$ et sa moyenne sur B_{N-1} . On pourra se limiter au cas $N = 2$, pour éviter des complications inutiles.]

2. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p , t.q.

$$|u(x) - u(y)| \leq C_2 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^{1 - \frac{N}{p}}. \quad (1.9)$$

[Après, éventuellement, une rotation et une translation, on peut supposer que $x = (b, 0)$ et $y = (-b, 0)$. Se ramener alors à (1.8 Exercices equation.1.8).]

Pour $\alpha \in]0, 1[$ et K sous ensemble fermé de \mathbb{R}^N , on note

$$C^{0,\alpha}(K) = \{u \in C(K, \mathbb{R}), \|u\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ et } \sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty\},$$

et, si $u \in C^{0,\alpha}(K)$,

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(K)} + \sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Noter que $C^{0,\alpha}(K)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

3. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p , t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.10)$$

[Cette question est plus délicate... Il faut utiliser (1.9 Exercices equation.1.9) et le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.]

4. (Injection de Sobolev dans \mathbb{R}^N .) Montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p , t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.11)$$

5. (Injection de Sobolev dans Ω .) Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne.

Montrer que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_5 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de Ω , N et p , t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_5 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.12)$$

Exercice 1.16 (Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$) Solution 1.7 Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$ cor.1.7

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \leq p \leq N$.

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

(b) Par récurrence sur N , montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \dots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.

(c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\nabla u\|_1$.

- (d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p$, avec $p^* = (Np)/(N-p)$.
2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et p^* sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*]$.
3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).
4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*]$ ($p^* = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Exercice 1.17 (Noyau de l'opérateur "trace")

Soient $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq p < \infty$ et $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ l'opérateur "trace" (vu en cours).

1. Montrer que $\text{Ker}\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\gamma u = u$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $N-1$ -dimensionnelle sur $\partial\Omega$).

Exercice 1.18 (Prolongement H^2)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra s'inspirer de la démonstration de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$].
2. Montrer qu'il existe un opérateur P linéaire continu de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω , pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra chercher P sous la forme $Pu(x_1, y) = \alpha u(-x_1, y) + \beta u(-2x_1, y)$, pour $x_1 \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$].
3. On prend maintenant $p = \infty$. A-t-on $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,\infty}(\Omega)$? Existe-t-il un opérateur P linéaire continu de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω , pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$? (justifier vos réponses...).

Exercice 1.19 (Convergence faible et opérateur continu) Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E . On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $T(u_n) \rightarrow T(u)$ faiblement dans F . On donne maintenant deux applications de ce résultat.

1. Soit E et F deux espaces de Banach. On suppose que E s'injecte continûment dans F , that is to say que $E \subset F$ et que l'application $u \mapsto u$ est continue de E dans F . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E . On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans F .
2. Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ et u dans $H_0^1(\Omega)$. On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $D_i u_n \rightarrow D_i u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 1.20 (Fonction non continue appartenant à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$) Dans cet exercice, on construit v t.q. $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $v \notin C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (that is to say qu'il n'existe pas $w \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ t.q. $v = w$ p.p.).

Pour cela, on reprend la fonction de l'exercice 1.5 Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en 1dexo.1.3exo.1.5.

Soit $\gamma \in]0, 1/2[$ et u définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$ si $|x| < 1$ et $u(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit u_n en posant $u_n(x) = u(x) - n$ si $n \leq u(x) < n+1$ et $u_n(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < +\infty.$$

[Utiliser l'exercice 1.5 Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en 1d exo.1.3 exo.1.5.]

2. Montrer que u_n prend ses valeurs entre 0 et 1 et que le support de u_n est une boule dont le diamètre tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = (1/n, 0) \in \mathbb{R}^2$ et on choisit m_n t.q. le support de u_n soit une boule de diamètre plus petit que $(1/2)(1/n - 1/(n+1))$ et t.q. la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit strictement croissante. Puis on pose, pour $x \in \mathbb{R}^2$, $v_n(x) = u_{m_n}(x - x_n)$.

3. Montrer que toutes les fonctions v_n ont des supports disjoints.

4. On pose $v = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$. Montrer que la fonction v appartient à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que v est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas continue en 0.

Exercice 1.21 (Sur l'injection de $W^{1,1}$ dans L^{1^*}) Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. Soit ω une partie borélienne de Ω de mesure de Lebesgue strictement positive, that is to say $\lambda_N(\omega) > 0$ en désignant par λ_N la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^N .

On définit l'ensemble W_ω par

$$W_\omega = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ p.p. dans } \omega\}.$$

le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, qu'il existe C , dépendant seulement de Ω et ω , tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega \text{ et pour tout } 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}. \quad (1.13)$$

I- Première méthode (méthode directe)

1. On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de W_ω t.q. $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \geq n \|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant un théorème de compacité du cours (chapitre 1), montrer qu'on peut supposer, après extraction d'une sous suite, que $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer alors que $u = 0$ p.p. et que $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$ (ce qui est impossible...).

2. Dédire de la question précédente qu'il existe C_1 , dépendant seulement de Ω et ω , tel que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega. \quad (1.14)$$

3. On rappelle (théorème 1.28 Sobolev embeddings theorem.1.28) qu'il existe C_2 , dépendant seulement de Ω , tel que, en posant $1^* = N/(N-1)$, $\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Avec la question précédente, en déduire qu'il existe C , dépendant seulement de Ω et ω , vérifiant (1.13) Sur l'injection de $W^{1,1}$ dans L^{1^*} equation.1.13).

II- Deuxième méthode (en passant par la moyenne de u)

1. Soit $H = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u(x) dx = 0\}$. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω t.q. $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_3 \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$.

En utilisant le rappel de la question 3 de la première partie, en déduire qu'il existe C_4 ne dépendant que de Ω t.q.

$$\|u - m\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C_4 \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W^{1,1}(\Omega),$$

avec $m \lambda_N(\Omega) = \int_\Omega u(x) dx$. [On pourra remarquer que $u - m \in H$.]

2. Soit $u \in W_\omega$ et m tel que $m\lambda_N(\Omega) = \int_\Omega u(x)dx$. Montrer que

$$|m| \leq \frac{C_4}{\lambda_N(\omega)^{1/1^*}} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

et en déduire que

$$\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C_4 \left(1 + \left(\frac{\lambda_N(\Omega)}{\lambda_N(\omega)}\right)^{1/1^*}\right) \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

1.9 Corrigés d'exercices

Corrigé 1.1 (Exemple de dérivée)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \dots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \dots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω .

Corrigé – On prend, par exemple, $i = 1$ (les autres valeurs de i se traitent de manière similaire). Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1 \right) dy$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, y) dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, y) dy.$$

Ceci montre bien que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω .

2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Corrigé – On raisonne par l'absurde. On suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Il existe alors (en particulier) $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q.

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi(x) dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\times]-1, 1[^{N-1}$.

On choisit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin A_1$ et $\varphi(x) = 1$ si $x = (1, y)$ avec $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{N-1}$ (une telle fonction φ existe). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors φ_n par $\varphi_n(1 + x_1, y) = \varphi(1 + nx_1, y)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ (de sorte que $\varphi_n = 0$ hors de A_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le choix de φ_n donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(1, y) dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(-1, y) dy \geq 1$$

et

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{A_n} |g(x)| dx.$$

On a donc $\int_{A_n} |g(x)| dx \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible car la mesure de Lebesgue (N -dimensionnelle) de A_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé 1.2 (Une fonction de dérivée nulle est constante)

Soit $u \in L^1_{loc}([0, 1])$ t.q. $Du = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p. (u est donc la fonction constante égale à a .)

Corrigé – On se donne $\varphi_0 \in C_c^\infty([0, 1])$ t.q. $\int_0^1 \varphi_0(x) dx = 1$.

Pour $\psi \in C_c^\infty([0, 1])$, on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(t) dt - \left(\int_0^1 \psi(t) dt \right) \int_0^x \varphi_0(t) dt. \text{ pour } x \in]0, 1[.$$

Avec ce choix de φ on a $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$ et donc, comme $Du = 0$,

$$0 = \langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = - \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx.$$

Comme $\varphi' = \psi - (\int_0^1 \psi(t) dt) \varphi_0$, on a donc

$$\int_0^1 u(x) \psi(x) dx - \left(\int_0^1 \psi(t) dt \right) \left(\int_0^1 u(x) \varphi_0(x) dx \right) = 0.$$

On pose $a = \int_0^1 u(x) \varphi_0(x) dx$, on a ainsi

$$\int_0^1 u(x) \psi(x) dx = \int_0^1 a \psi(x) dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty([0, 1]).$$

Le lemme 1.1 Almost everywhere equality in L^1 theorem. 1.1 donne alors $u = a$ p.p..

Corrigé 1.3 (Espace de Sobolev en 1d)

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}([0, 1])$.

1. Soit $u \in W^{1,p}([0, 1])$.

- (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t) dt$, pour presque tout $x \in]0, 1[$. En déduire que $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0, 1[$, en identifiant u et v , on peut donc dire que $W^{1,p}([0, 1]) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$).

Corrigé – Pour $x \in [0, 1]$, on pose $F(x) = \int_0^x Du(t) dt$. Comme $Du \in L^1([0, 1])$, on a $F \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On peut aussi montrer que F est dérivable p.p. et que $F' = Du$ p.p. mais cela est inutile ici. On s'intéresse plutôt à la dérivée par transposition de F , that is to say à DF et on va montrer que $DF = Du$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$. On a

$$\langle DF, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = - \int_0^1 F(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{]0, x[}(t) Du(t) dt \right) \varphi'(x) dx.$$

En remarquant que $1_{]0, x[}(t) = 1_{]t, 1[}(x)$ pour tout $t, x \in]0, 1[$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a donc

$$\langle DF, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = - \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{]t, 1[}(x) \varphi'(x) dx \right) Du(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) Du(t) dt,$$

ce qui prouve que $DF = Du$.

On a donc $D(u - F) = 0$ et l'exercice 1.2A function with null derivative is constant exo. 1.2 donne alors l'existence de $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u - F = C$ p.p. that is to say

$$u(x) = C + \int_0^x Du(t) dt \text{ pour presque tout } x \in]0, 1[.$$

- (b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}([0,1])}$.

Corrigé – On choisit maintenant pour u (qui est une classe de fonctions) son représentant continu. On a alors pour tout $x \in [0, 1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt.$$

On a alors aussi pour tout $x, y \in [0, 1]$, $u(x) = u(y) + \int_y^x Du(t)dt$, on en déduit

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_0^1 |Du(t)|dt.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$ (par rapport à y), on obtient pour tout $x \in [0, 1]$

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} = \|u\|_{W^{1,1}},$$

et donc, en prenant le max sur x et en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

Corrigé – On choisit toujours pour u son représentant continu. Soit $x, y \in [0, 1]$, $y > x$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_x^y Du(t)dt$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(y) - u(x)| \leq \left(\int_x^y |Du(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} |y - x|^{1 - \frac{1}{p}} \leq \|u\|_{W^{1,p}} |y - x|^{1 - \frac{1}{p}}.$$

2. Soit $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0, 1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0, 1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ et $Du = w$.

Corrigé – Il est clair que $u \in L^p(]0, 1[)$. Pour montrer que $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ il suffit de montrer que $Du = w$ that is to say que $\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = \int_0^1 w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$. On a

$$\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = - \int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 \left(\int_0^t w(x)dx \right) \varphi'(t)dt = - \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{]0,t[}(x)w(x)dx \right) \varphi'(t)dt.$$

On utilise une nouvelle fois le théorème de Fubini et le fait que $1_{]0,t[}(x) = 1_{]x,1[}(t)$ (pour tout $x, t \in]0, 1[$). On obtient

$$\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, C_c^\infty} = - \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{]x,1[}(t)\varphi'(t)dt \right) w(x)dx = - \int_0^1 \left(\int_x^1 \varphi'(t)dt \right) w(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)w(x)dx.$$

Ce qui donne bien $Du = w$.

Corrigé 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2A function with null derivative is constant exo.1.2)

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a .) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de noyaux régularisants, that is to say :

$$\begin{aligned} \rho &\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1, \rho \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1, \\ \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^N, \rho_n(x) &= n^N \rho(nx). \end{aligned} \quad (1.15)$$

On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure...

Corrigé – On a $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est donc bien définie sur tout \mathbb{R}^N . Le fait que $u_{\varepsilon,n}$ soit de classe C^∞ est classique et les dérivées de $u_{\varepsilon,n}$ sont égales à la convolution de u_ε avec les dérivées de ρ_n . Il est facile aussi de voir que $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction à support compact car u_ε et ρ_n sont des fonctions à support compact.

On note B_r la boule de centre 0 et de rayon r . On montre maintenant que pour tout i la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$ si $1/n < \varepsilon$.

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \left(u_\varepsilon \star \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} \right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-y) dy.$$

Si $1/n < \varepsilon$ et $x \in B_{1-2\varepsilon}$, la fonction $\rho_n(x-\cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$. On remarque aussi que

$$\frac{\partial \rho_n(x-\cdot)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-\cdot).$$

(La notation $\partial/\partial x_i$ désigne la dérivée par rapport à la i -ème variable, à ne pas confondre avec la i -ème composante de x dans la formule précédente. ...) On obtient ainsi

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \int_B u(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x-y) dy = \langle D_i u, \rho_n(x-\cdot) \rangle_{\mathcal{D}'(B), C_c^\infty(B)} = 0.$$

On a ainsi montré que pour $1/n < \varepsilon$, la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est, pour tout i , nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$. On en déduit que la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $x \in B_{1-2\varepsilon}$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(x) - u_{\varepsilon,n}(0) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(tx) \cdot x dt = 0.$$

Comme $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε . En considérant les restrictions de ces fonctions à la boule $B_{1-2\varepsilon}$ (sur laquelle $u_\varepsilon = u$), la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B_{1-2\varepsilon})$ vers u . Comme $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction constante sur $B_{1-2\varepsilon}$ (pour $1/n < \varepsilon$) sa limite (dans L^1) est donc aussi une fonction constante. Ceci montre que la fonction u est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$, that is to say qu'il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a_\varepsilon$ p.p. sur $B_{1-2\varepsilon}$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que a_ε ne dépend pas de ε et que u est constante sur B .

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt,$$

et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1-2\varepsilon$ et $i \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$(\partial u_{\varepsilon,n} / \partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\bar{z}) \rho_n(z-\bar{z}) d\bar{z}.$$

En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \dots, D_N u\}^t$,

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt.$$

Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

Corrigé – Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $u_{\varepsilon,n}$ est de classe C^∞ . On a donc bien, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt. \quad (1.16)$$

Dans cette formule $\nabla u_{\varepsilon,n}$ désigne la fonction vectorielle définie par les dérivées classiques de $u_{\varepsilon,n}$.

Pour $z \in \mathbb{R}^N$ et $i \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon}(\bar{z}) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(z - \bar{z}) d\bar{z}.$$

Si $z \in B_{1-2\varepsilon}$ et $1/n < \varepsilon$, la fonction $\rho_n(z - \cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$ (et sur $B_{1-\varepsilon}$ on a $u_{\varepsilon} = u$). On en déduit

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \langle D_i u, \rho_n(z - \cdot) \rangle_{\mathcal{D}'(B), C_c^\infty(B)} = \int_B D_i u(\bar{z}) \rho_n(z - \bar{z}) d\bar{z}.$$

Comme $D_i(u)$ est uniformément continue sur $B_{1-\varepsilon}$, on déduit de la formule précédente que $\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i$ converge vers $D_i u$ uniformément sur $B_{1-2\varepsilon}$. On a donc, pour tout $x, y \in B_{1-2\varepsilon}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt.$$

La suite $(u_{\varepsilon,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_{ε} . Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut donc supposer que cette suite converge p.p. vers u_{ε} et donc p.p. vers u sur la boule $B_{1-\varepsilon}$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité (1.16) corrigés d'exercice equation.1.16, on obtient pour presque tout x, y dans $B_{1-2\varepsilon}$

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt. \quad (1.17)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la formule (1.17) corrigés d'exercice equation.1.17 est valable pour presque tout $x, y \in B$.

Pour conclure, on fixe un point $x \in B$ pour lequel (1.17) corrigés d'exercice equation.1.17 est vraie pour presque tout $y \in B$ et on pose

$$v(y) = u(x) + \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt \text{ pour tout } y \in B.$$

La fonction v est de classe C^1 (car Du est une fonction continue et donc v est dérivable sur tout B et $\nabla v = Du$). Comme $u = v$ p.p., ceci termine la question.

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N . Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B . (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Corrigé – On note Ω l'ouvert remplaçant B . Le raisonnement précédent montre que sur toute boule incluse dans Ω , u est p.p. égale à une constante. Pour que l'égalité soit vraie sur toute la boule (et non seulement p.p.), il suffit de définir v sur Ω par

$$v(x) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,h))} \int_{B(x,h)} u(y) dy \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

où $B(x, h)$ désigne la boule de centre x et de rayon h et $\lambda_d(B(x, h))$ la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle de cette boule. On a alors $u = v$ p.p. (v est donc un représentant de la classe u) et sur toute boule incluse dans Ω , v est égale à une constante.

La fonction v est donc localement constante. On en déduit que v est constante sur chaque composante connexe de Ω . En effet, soit $x \in \Omega$ et U la composante connexe de Ω contenant x . On pose $a = v(x)$. L'ensemble $\{y \in U; v(y) = a\}$ est un ouvert non vide de U et l'ensemble $\{y \in U; v(y) \neq a\}$ est aussi un ouvert de U disjoint du précédent. Par connexité de U ce dernier ensemble est donc vide, ce qui prouve que $v = a$ sur tout U .

Corrigé 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3) Espace de Sobolev en 1d exo.1.3)

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Corrigé – La fonction u est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ (en remarquant que $|x| \leq \sqrt{2}/2 < 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$). Les dérivées classiques de u sont pour $x = (x_1, x_2)^t \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\gamma(-\ln(|x|))^{\gamma-1} \frac{x_i}{|x|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ (et même $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$). Comme $\gamma < 1/2$, on peut aussi montrer que les dérivées classiques de u sont dans $L^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de remarquer que, pour $a > 0$,

$$\int_0^a \frac{1}{r|\ln(r)|^{2(1-\gamma)}} dr < +\infty.$$

Pour montrer que $u \in H^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques, that is to say que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour $i = 1, 2$, on a

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx. \quad (1.18)$$

On montre maintenant (1.18) corrigés d'exercice equation.1.18) pour $i = 1$ (bien sûr, $i = 2$ se traite de manière semblable). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. On pose $L_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1/2, 1/2]$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = - \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi(x) dx - \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2) (\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2)) dx_2. \quad (1.19)$$

(On a utilisé ici le fait que $u(\varepsilon, x_2) = u(-\varepsilon, x_2)$.)

Par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi(x) dx$$

Il reste à montrer que le deuxième terme du membre de droite de (1.19) corrigés d'exercice equation.1.19) tend vers 0. Ceci se fait en remarquant que la fonction φ est régulière, il existe donc C ne dépendant que de φ t.q.

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2) (\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2)) dx_2 \right| \leq |\ln(\varepsilon)|^\gamma C \varepsilon.$$

On en déduit bien que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2) (\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2)) dx_2 = 0,$$

ce qui termine la démonstration de (1.18) corrigés d'exercice equation.1.18) pour $i = 1$. Finalement, on a bien ainsi montré que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques et que $u \in H^1(\Omega)$.

Devoir 1, exercice 1.6

Corrigé 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Corrigé – Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \langle D_i D_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u(x) \partial_i^2 \varphi(x) dx.$$

Puis, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, la forme linéaire (sur $C_c^\infty(\Omega)$) $D_i u$ est représentée par un élément de $L^2(\Omega)$ encore noté $D_i u$ et on a, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_i^2 \varphi(x) dx = - \langle D_i u, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} D_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx.$$

Comme ∇u est l'élément de $L^2(\Omega)^N$ dont les composantes sont les $D_i u$, on obtient bien

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Dédurre de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (that is to say que l'élément de $\mathcal{D}^*(\Omega)$, noté Δu , se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Corrigé – Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}| \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |\nabla \varphi(x)| dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ est linéaire continue de $C_c^\infty(\Omega)$, muni de la norme $H^1(\Omega)$, dans \mathbb{R} . Comme $\mathcal{D}^*(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ cette application se prolonge donc, par densité, de manière unique en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} (that is to say en un élément de $H^{-1}(\Omega)$). Cet élément de $H^{-1}(\Omega)$ est encore noté Δu et le prolongement par densité donne, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |\nabla v(x)| dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.20)$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $H^1(\Omega)$, ce qui donne

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

on déduit alors de (1.20) l'équation d'un élément de $H_0^1(\Omega)$ equation.1.20) que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Corrigé 1.7 (Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \leq p \leq N$.

La démonstration proposée ici est due à L. Nirenberg. Elle consiste à faire d'abord le cas $p = 1$, puis à en déduire le cas $1 < p < N$. Historiquement, le cas $1 < p < N$ a été démontré avant le cas $p = 1$ (et le cas $p = 1$ est longtemps resté un problème ouvert).

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

Corrigé – Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t) dt$ et donc

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'(t)| dt \leq \|u'\|_1.$$

On en déduit bien $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

(b) Par récurrence sur N , montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.

Corrigé – la question précédente permet d'initialiser la récurrence, on a pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

Soit maintenant $N \geq 1$. On suppose que pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}.$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ on note $x = (x_1, y)^t$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^N$. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N+1}{N}} dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| |u(x_1, y)|^{\frac{1}{N}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N+1}{N-1}} dy \right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| dy \right)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $y \mapsto u(x_1, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R}^N)$), on obtient

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N}.$$

D'autre part, en appliquant le cas $N = 1$ (démontré à la question (a)) à la fonction $z \mapsto u(z, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R})$), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$|u(x_1, y)| \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot, y)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

et donc, en intégrant par rapport à y ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En reportant ces majorations dans (1.21) Corrigés d'exercices equation.1.21) on obtient pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N+1}{N}} dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}^{\frac{1}{N}}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à x_1 et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (avec le produit de N fonctions dans L^N , on obtient bien l'inégalité désirée, that is to say

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{1/N},$$

ou encore

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N+1}} \cdots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{\frac{1}{N+1}}.$$

Ce qui termine la récurrence.

(c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\nabla u\|_1$.

Corrigé – La moyenne géométrique de N nombres positifs est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. (Ceci peut se démontrer en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle.)

On en déduit que

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{1/N} \cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_1^{1/N} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1.$$

Comme $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1 \leq \|\nabla u\|_1$ pour tout i , on a bien

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\nabla u\|_1.$$

(d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p$, avec $p^* = (Np)/(N-p)$.

Corrigé – Pour $p = 1$, on a vu que $C_{N,p} = 1$ convient. On suppose maintenant $1 < p < N$.

On pose $\alpha = \frac{p(N-1)}{N-p}$ (de sorte que $\alpha \frac{N}{N-1} = p^*$) et $v = |u|^{\alpha-1}u$.

Comme $\alpha > 1$ et $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a aussi $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc appliquer le résultat de la question (c) à la fonction v . On obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} \right)^{\frac{N-1}{N}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha \frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \|\nabla v\|_1.$$

Comme $|\nabla v| = \alpha |u|^{\alpha-1} |\nabla u|$, l'inégalité de Hölder (avec p et $q = p/(p-1)$) donne

$$\|\nabla v\|_1 = \alpha \| |u|^{\alpha-1} |\nabla u| \|_1 \leq \alpha \| |u|^{\alpha-1} \|_q \|\nabla u\|_p.$$

Comme $(\alpha-1)q = (\alpha-1)p/(p-1) = p^*$, on a donc

$$\|u\|_{p^*}^{\frac{p^*(N-1)}{N}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \alpha \|u\|_{p^*}^{\frac{p^*(p-1)}{p}} \|\nabla u\|_p.$$

Ce qui donne, avec $C_{N,p} = \alpha = \frac{p(N-1)}{N-p}$,

$$\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p.$$

2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et p^* sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*]$.

Corrigé – Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par la question précédente, cette suite est de Cauchy dans L^{p^*} . Par unicité de la limite (par exemple dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$) cette limite est nécessairement égale à u . On peut alors passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité $\|u_n\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u_n\|_p$ et on obtient ainsi

$$\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ceci donne l'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

L'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ est immédiate car $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Soit maintenant $q \in]p, p^*[$. Pour montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ il suffit d'utiliser l'inégalité classique suivante (qui se démontre avec l'inégalité de Hölder) avec $p < q < r = p^*$.

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}, \quad (1.22)$$

avec $\theta = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in]0, 1[$.

3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Corrigé – Le cas $N = 1$ est facile. La question 2 donne l'injection continue de $W^{1,1}(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Comme $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte aussi continûment dans $L^1(\mathbb{R})$, on obtient aussi une injection continue de $W^{1,1}(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in]1, +\infty[$ (en utilisant (1.22) Corrigés d'exercices equation.1.22) avec $r = +\infty$, $p = 1$ et $\theta = 1/q$.

On suppose maintenant $N > 1$. On a bien une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^N(\mathbb{R}^N)$. Le seul cas à considérer est donc $N < q < +\infty$. Plusieurs démonstrations sont possibles. Une première démonstration consiste à utiliser pour $|u|^\alpha$, avec $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité démontrée à la question 1 (c), puis à utiliser l'inégalité de Hölder (pour faire apparaître $|\nabla u|^N$) et l'inégalité (1.22) Corrigés d'exercices equation.1.22). Enfin, on conclut avec la densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. On donne ci dessous une démonstration probablement plus longue mais qui utilise de manière intéressante le caractère homogène de la norme. de la norme.

Soit $N < q < +\infty$. Il existe alors $p \in]1, N[$ t.q. $p^* = Np/(N-p) = q$. On va utiliser la question 1 avec cette valeur de p .

On définit φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 , par :

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= 0 \text{ si } |s| \leq 1, \\ \varphi(s) &= \frac{1}{2}(|s| - 1)^2 \text{ si } 1 < |s| \leq 2, \\ \varphi(s) &= |s| - \frac{3}{2} \text{ si } 2 < |s|.\end{aligned}$$

On a $|\varphi(u)| \leq 1$ et $|\varphi'(s)| \leq 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$. On a $\varphi(u) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Par question 1 (et la définition φ) on obtient

$$\|\varphi(u)\|_q^p \leq C_{N,p} \|\nabla \varphi(u)\|_p \leq C_{N,p} \int_{\{|u| \geq 1\}} |\nabla u(x)|^p dx \leq C_{N,p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \right)^{\frac{p}{N}} \lambda_d(\{|u| \geq 1\})^{1 - \frac{p}{N}}.$$

On a $\lambda_d(\{|u| \geq 1\}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \leq 1$. On en déduit

$$\|\varphi(u)\|_q^p \leq C_{N,p}.$$

Comme $|u|^q \leq 2^q \varphi(u)^q + 2^q$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx &= \int_{\{|u| \leq 1\}} |u(x)|^q dx + \int_{\{|u| > 1\}} |u(x)|^q dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx + 2^q \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(u(x))|^q dx + 2^q \lambda_d(\{|u| > 1\}) \leq 1 + 2^q C_{N,p}^{\frac{q}{p}} + 2^q.\end{aligned}$$

Il existe donc $D_{N,q}$ ne dépendant que N et q t.q. $\|u\|_q \leq D_{N,q}$ si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$. Grâce au caractère homogène de la norme, on a en déduit que $\|u\|_q \leq D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Enfin, par densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ on obtient que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_q \leq D_{N,q} \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \text{ pour tout } u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui montre bien qu'il y a une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.

4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*]$ ($p^* = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Corrigé – Cette question consiste seulement à utiliser l'existence d'un opérateur P linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $Pu = u$ p.p. dans Ω (opérateur dit de "prolongement" dont l'existence est donnée par le théorème 1.18 Density theorem theorem.1.18). En effet, grâce à cette opérateur, la question 4 est une conséquence des questions précédentes (et de l'inégalité (1.22) Corrigés d'exercices equation.1.22).

Chapitre 2

Problèmes elliptiques linéaires

2.1 Formulation faible

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, that is to say :

$$\exists \alpha > 0; \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (2.1)$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i(a_{i,j}(x) \partial_j u)(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.2a)$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.2b)$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa i -ème variable.

Exemple 2.1 (Le Laplacien) Si on prend $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (that is to say 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), alors le problème (2.2) devient

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Définition 2.2 (Solution classique) On suppose que $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On appelle alors solution classique de (2.2) une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (2.2).

On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions appartenant à $C^k(\mathbb{R}^N)$.

Il n'existe pas forcément de solution classique à (2.2). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$,

avec $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Par définition, celle ci vérifie :

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x), \forall x \in \Omega.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$; multiplions l'équation précédente par $\varphi(x)$ et intégrons sur Ω :

$$-\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) \right) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i \varphi(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $\partial_j u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_j u = \partial_j u$ p.p (come cela a été vu au Chapitre 1 Sobolev spaces chapter.1). De plus $u \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$ (voir l'exercice 1.17 Noyau de l'opérateur "trace"exo.1.17).

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$, that is to say $\varphi_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i \varphi_n \rightarrow D_i v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \dots, N$. En écrivant (2.3) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i \varphi_n(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi_n(x) dx,$$

et en passant à la limite, on obtient que u satisfait le problème suivant, qu'on appelle formulation faible du problème (2.2) (on rappelle que l'on considère ici le cas $g = 0$)

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x)D_j u(x)D_i v(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.4)$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème** (2.2) (**lorsque $g = 0$**) **est solution faible, that is to say vérifie** (2.4).

Remarque 2.3 (Cas symétrique, formulation variationnelle) Dans le cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$ p.p. pour $i \neq j$, u est solution de (2.4) si et seulement si u est solution du problème suivant, qu'on appelle formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(\Omega), \\ &J(u) \leq J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.5)$$

où la fonctionnelle J est définie par : $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j} D_i v D_j v \right) dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$.

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (2.4 Formulation faible equation.2.4) et (2.5 Cas symétrique, formulation variationnelle equation.2.5) utilise le lemme de Lax-Milgram, que nous rappelons ici :

Lemme 2.4 (Lax-Milgram) Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté (\cdot, \cdot) , de norme associée notée $\|\cdot\|$, et $a(\cdot, \cdot)$ une application bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} qui est

- continue, ce qui équivaut à dire qu'il existe $c > 0$ t.q., pour tout $(u, v) \in H^2$, on a $|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$,
- coercive sur H (certains auteurs disent plutôt H -elliptique), that is to say qu'il existe $\alpha > 0$, t.q., pour tout $u \in H$, $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$,

et soit T une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique u de H tel que l'équation $a(u, v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de H :

$$\exists! u \in H, \forall v \in H, \quad a(u, v) = T(v).$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - T(v)$ pour tout v de H , that is to say :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \quad \text{et} \quad J(u) < J(v) \quad \text{si} \quad u \neq v.$$

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un produit scalaire sur H équivalent au produit scalaire initial. Dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (2.4 Formulation faible equation.2.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré :

Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

N.B. On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N . On a donc

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x)^2 dx.$$

Démonstration Par hypothèse sur Ω , il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset]-a, a[\times \mathbb{R}^{N-1}$. Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on prolonge u par 0 en dehors de Ω , on a donc :

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$, avec $x_1 \in]-a, a[$ et $y = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, y) dt,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(x_1, y)|^2 \leq \left(\int_{-a}^a |\partial_1 u(t, y)| dt \right)^2 \leq 2a \int_{-a}^a (\partial_1 u(t, y))^2 dt.$$

En intégrant entre $-a$ et a , on obtient :

$$\int_{-a}^a |u(x_1, y)|^2 dx_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^a (\partial_1 u(t, y))^2 dt,$$

et donc, en intégrant par rapport à y ,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 4a^2 \int_{\Omega} (\partial_1 u(x))^2 dx, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \quad (2.7)$$

On procède ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u$ dans $L^2(\Omega)$. On écrit alors (2.7) pour u_n et en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

Théorème 2.6 (Existence et unicité de la solution de (2.4)) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1) soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de (2.4).

Démonstration Pour appliquer le lemme de Lax-Milgram on écrit le problème (2.4) sous la forme : $u \in H$; $a(u, v) = T(v)$ pour tout $v \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$), et avec a et T définies par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx \quad \text{et} \quad T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est bien continue. En effet,

$$|T(v)| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quant à la forme a , elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.

Voyons si a est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$. Par hypothèse sur a , on a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \right) dx \geq \alpha \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \right) dx = \alpha \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.6 Inégalité de Poincaré equation.2.6) :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_\Omega^2 + 1) \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc

$$a(u, u) \geq \alpha \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ce qui démontre la coercivité de a . Par le lemme de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (2.4 Formulation faible equation.2.4). ■

Remarque 2.7 Le lemme 2.5 Inégalité de Poincaré theorem.2.5 est encore vrai avec $1 \leq p \leq +\infty$ au lieu de $p = 2$. Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et $1 \leq p \leq +\infty$, il existe $C_{p,\Omega}$ ne dépendant que de p et Ω tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ceci permet de définir une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $W^{1,p}(\Omega)$, voir la définition 2.8 Formulation faible theorem.2.8. (Pour $p = 2$, cette équivalence de norme est en fait démontrée dans la démonstration du théorème 2.6 Existence et unicité de la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4) theorem.2.6.)

Définition 2.8 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $u \in W_0^{1,p}$, on pose

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Selon la remarque 2.7 Formulation faible theorem.2.7, c'est donc, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H_0^1(\Omega)$ et la norme $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Par le lemme de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre de (2.4 Formulation faible equation.2.4) est donné par un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$, that is to say l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

Théorème 2.9 (Existence et unicité, $T \in H^{-1}$) Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1 Formulation faible equation.2.1) soit vérifiée. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$, il existe alors une unique solution u de :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx &= T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$ (définie, par exemple, pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \geq 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = 2N/(N+2)$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante. Un résultat plus précis (pour $N = 2$) est donné dans l'exercice 2.10A la limite de H^{-1} exo.2.10.

Nous n'avons traité ici que le cas de la condition aux limites de Dirichlet homogène (that is to say $g = 0$ dans le problème 2.2 Formulation faible equation.2.2). Le cas de la condition aux limites de Dirichlet non homogène est traité dans la section 2.5 Condition de Dirichlet non homogène section.2.5.

L'existence et l'unicité de solutions faibles est possible avec d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.5 Problème de Neumann exo.2.5 traite le cas des conditions de Neuman et l'exercice 2.8 De Fourier à Dirichlet... exo.2.8 les conditions dites de Fourier (ou de Robin, selon les auteurs). La résolution du problème de Neuman permet d'ailleurs de montrer une décomposition utile d'un élément de $L^2(\Omega)^N$, appelée décomposition de Hodge, exercice 2.11 Décomposition de Hodge exo.2.11. L'exercice 2.7 Modélisation d'un problème de contact exo.2.7 s'intéresse à des conditions aux limites apparaissant en mécanique du solide. Il est possible aussi de coupler un problème elliptique sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 avec un problème elliptique unidimensionnel sur le frontière de Ω , ceci est l'objet de l'exercice 2.13 Conditions aux limites de Vence exo.2.13.

Les exercices 2.12 Problème de Stokes, vitesse exo.2.12, 2.14 problème de Stokes, vitesse et pression exo.2.14 et 2.9 Equation de Schrödinger exo.2.9 montrent l'existence (et l'unicité ou une "unicité partielle") pour des systèmes elliptiques (problème des Stokes et équation de Schrödinger).

Enfin, il est possible de traiter des problèmes elliptiques avec des coefficients $a_{i,j}$ non bornés. On introduit alors des espaces de Sobolev dit "à poids", exercice 2.3 Problème elliptique à coefficients non bornés exo.2.3.

2.2 Analyse spectrale

2.2.1 Quelques rappels

Soit E un espace de Banach réel, et T une application linéaire continue de E dans E . On note :

- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est non bijective}\}$ l'ensemble des valeurs singulières de T ,
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est bijective}\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de T ,
- $\mathcal{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ est non injective}\}$ l'ensemble des valeurs propres de T ,

Lorsque $\dim E < +\infty$, on a $\mathcal{VP}(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension infinie, à condition que l'opérateur T soit linéaire continu et compact. Plus précisément, dans ce cas on a : $\mathcal{VP}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Le théorème suivant donne ce résultat dans les espaces de Hilbert séparables et pour un opérateur autoadjoint.

Proposition 2.10 (Opérateur linéaire continu compact autoadjoint) *Soit E un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$, et soit T un opérateur linéaire continu compact autoadjoint dont le noyau $N(T) = \{u \in E; T(u) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne de E formée de vecteurs propres de T , that is to say d'éléments de E , notés e_n , $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $(e_n, e_m)_E = \delta_{n,m}$ et tels que si $u \in E$, alors u peut s'écrire $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u, e_n)_E e_n$ (cette série étant convergente dans E), et les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$ associées, i.e. telles que $T e_n = \lambda_n e_n$, sont telles que $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

2.2.2 Le Laplacien

On va considérer dans cette section, pour simplifier, le cas du Laplacien. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . On rappelle que $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$ si u est une fonction régulière. Pour étendre cette définition aux fonctions seulement

localement intégrables, on pose, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N D_i^2 u$. On définit maintenant un opérateur A d'une partie de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en définissant d'abord son **domaine** $D(A)$:

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) ; \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

Puis on pose $Au = -\Delta u$ si $u \in D(A)$. On a ainsi défini un opérateur linéaire $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

On a vu dans les paragraphes précédents que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution au problème (2.4Formulation faibleequation.2.9) qui s'écrit, pour le Laplacien, that is to say avec les valeurs $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Grâce à la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, la fonction u est solution de (2.9Le Laplacienequation.2.9) si et seulement si $u \in D(A)$ et $-\Delta u = f$ p.p. (that is to say $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$). L'opérateur A est donc inversible. Son inverse, l'opérateur A^{-1} , est défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $A^{-1}f = u$ où u est solution de (2.9Le Laplacienequation.2.9). Cet opérateur est injectif mais non surjectif. Les deux opérateurs sont linéaires. Pour montrer qu'il existe une base hilbertienne formée des vecteurs propres de A^{-1} , on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.11 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note Tf l'unique solution de (2.9Le Laplacienequation.2.9). L'opérateur T est linéaire continu compact et autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $N(T) = \{f \in L^2(\Omega), Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$.*

Démonstration Il est immédiat de voir que T est linéaire. On remarque tout d'abord que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $Tf = 0$ p.p.. On a donc, d'après (2.9Le Laplacienequation.2.9),

$$\int_{\Omega} f v \, dx = 0 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (on a même $C_c^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$), on en déduit $f = 0$ p.p..

On montre maintenant la continuité de T . Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u = Tf$. En prenant $v = u$ dans (2.9Le Laplacienequation.2.9), on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, et donc :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et donc :

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_\Omega^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui démontre la continuité de T .

Montrons maintenant que l'opérateur T est compact, that is to say que l'image $T(B)$ d'un ensemble B borné de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On peut écrire T sous la forme $T = I \circ T_0$ où I est l'injection

canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et T_0 est l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$. L'application T_0 est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$) et l'injection I est compacte par le théorème de Rellich (théorème 1.25 Rellichtheorem.1.25 page 11 Rellichtheorem.1.25), et donc l'opérateur T est compact.

Montrons maintenant que l'opérateur T est auto-adjoint, that is to say que

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}, \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Soient donc f et $g \in L^2(\Omega)$, u l'unique solution de (2.9 Le Laplacien equation.2.9), et v l'unique solution de (2.9 Le Laplacien equation.2.9) où on a remplacé f par g dans le second membre. On a, comme v est solution de (2.9 Le Laplacien equation.2.9) où on a remplacé f par g :

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tf g \, dx = \int_\Omega u g \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

On montre de même que $(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, ce qui démontre (2.10 Le Laplacien equation.2.10). ■

Voici maintenant la conséquence du théorème ?? et de la proposition ?? pour l'opérateur "Laplacien" avec condition de Dirichlet homogène.

Théorème 2.12 (Base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de $-\Delta$)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. il existe alors une base hilbertienne (dénombrable) de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, formée de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On peut ordonner les μ_n dans l'ordre croissant (that is to say $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et l'on a $\mu_1 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$.

Démonstration Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note Tf l'unique solution de (2.9 Le Laplacien equation.2.9). D'après le théorème ?? et la proposition ??, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ formées de fonctions propres de T . Les valeurs propres associées sont toutes strictement positives. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$ et $f \neq 0$, alors $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 > 0.$$

Si λ_n est une valeur propre de T est associée au vecteur propre $e_n \neq 0$, on a $Te_n = \lambda_n e_n$, et donc, comme $e_n \neq 0$,

$$\lambda_n (e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} > 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc formée de nombres strictement positifs. Quitte à changer l'ordre des λ_n , on peut supposer que cette suite est décroissance. Enfin, la proposition ?? donne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

Remarquons que les valeurs propres de A sont donc les valeurs $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\mu_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. ■

En reprenant les notations du théorème ??, on peut alors caractériser le domaine de l'opérateur Laplacien (avec condition de Dirichlet homogène) $D(A)$ de la façon suivante :

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega), [u \in D(A)] \iff \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^2 (u, e_n)_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty. \right]$$

De plus si $u \in D(A)$, alors $Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$. On peut ainsi définir les puissances de l'opérateur A :

Définition 2.13 (Puissance de l'opérateur) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $s \geq 0$. On définit

$$D(A^s) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{2s} (u, e_n)_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty \right\}.$$

Et pour $u \in D(A^s)$, on peut alors définir $A^s u$ par :

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^s (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n.$$

Cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$.

Pour $s = 0$, on a $D(A^0) = L^2(\Omega)$ et $A^0 u = u$: A^0 est l'opérateur identité.

Pour $s = 1$, on retrouve l'opérateur A .

Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty\}$. On peut montrer que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, et on a $A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\mu_n} (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$.

Pour le cas $N = 1$, $\Omega =]0, 1[$, Le théorème de décomposition spectrale est détaillé dans l'exercice 2.2 Décomposition spectrale en dimension 1 exo.2.2.

2.3 Régularité des solutions faibles

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1 Formulation faible equation.2.1), on sait par les résultats précédents qu'il existe une unique solution au problème (2.4 Formulation faible equation.2.4), et on se demande quelle est la régularité de cette solution en fonction des données du problème. Le problème est assez simple en dimension $N = 1$, voir l'exercice 2.1 Régularité en dimension 1 exo.2.1, mais beaucoup plus difficile en dimension $N > 1$. La réponse dépend de la régularité des coefficients de l'opérateur et de la régularité de la frontière de l'ouvert (on dit que la frontière de Ω est de classe C^k si elle est localement le graphe d'une fonction de classe C^k).

Théorème 2.14 (Régularité de la solution du problème de Dirichlet)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (2.1 Formulation faible equation.2.1), soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4).

1. Si $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \dots, N$ et Ω est à frontière C^2 , alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.
2. Si $a_{i,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \dots, N$, si Ω est à frontière C^∞ , et si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m \geq 0$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

En conséquence, si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc u est solution classique. De même, si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc u est encore solution classique.

Remarque 2.15 (Optimalité des hypothèses) Notons que la partie 1. du théorème précédent est fautive sans les hypothèses $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et Ω est à frontière C^2 .

Par contre dans le cas du Laplacien, that is to say $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, si Ω est convexe, alors $u \in H^2(\Omega)$ dès que $f \in L^2(\Omega)$.

Idee de démonstration du théorème 2.13 Régularité de la solution du problème de Dirichlet theorem.2.13, première partie

On se ramène par la technique dite des “cartes locales” au cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$, et au problème suivant :

$$u \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

et on applique ensuite le théorème 2.17 Nirenberg theorem.2.17. Ce théorème montre que la solution de ce problème appartient à $H^2(\mathbb{R}_+^N)$. ■

La démonstration du théorème 2.17 Nirenberg theorem.2.17, due à L. Nirenberg¹ que nous énonçons un peu plus loin nécessite les lemmes techniques suivants, que nous énonçons pour $N = 2$, pour simplifier :

Lemme 2.16 Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, y), x_1 > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ et, pour $h > 0$, $\Psi_h g$ défini par $\Psi_h g = \frac{1}{h}(g_h - g)$, où $g_h \in H_0^1(\Omega)$ est définie par $g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$. Alors $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$.

Démonstration Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} \Psi_h g v \, dx, v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

et donc, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} \Psi_h g v \, dx, v \in C_c^\infty(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi_h g v \, dx &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2)) v(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) \, dx_1 \, d\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) \frac{v(x_1, x_2 - h) - v(x_1, x_2)}{-h} \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned}$$

Donc, par l’inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{\Omega} \Psi_h g v \, dx \right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(\cdot, \cdot - h) - v(\cdot, \cdot)}{-h} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$. ■

Lemme 2.17 Sous les hypothèses du lemme 2.15 Régularité des solution theorem.2.15, soit $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, alors $\Psi_h u \rightarrow D_2 u$ dans \mathcal{D}^* lorsque $h \rightarrow 0$.

1. Louis Nirenberg (né en 1925) est un mathématicien Canadien qui a beaucoup contribué à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Démonstration On pose $\mathcal{D} = C_c^\infty(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$; on veut montrer que

$$\int_{\Omega} \Psi_h u \varphi \, dx \rightarrow - \int_{\Omega} u \partial_2 \varphi \, dx = \langle D_2 u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, \mathcal{D}} \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi_h u \varphi \, dx &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x_1, x_2 + h) - u(x_1, x_2)}{h} \varphi(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2) \frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned}$$

Mais $\frac{\varphi(x_1, x_2 - h) - \varphi(x_1, x_2)}{-h} \rightarrow \partial_2 \varphi$ uniformément lorsque $h \rightarrow 0$, et le support de cette fonction est inclus dans un compact K de Ω , indépendant de h si $|h| < 1$. Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi_h u \varphi \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_2 \varphi \, dx$. ■

Théorème 2.18 (Nirenberg) Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$ et $f \in L^2(\Omega)$, et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Alors $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$.

Démonstration On va effectuer la démonstration dans le cas $N = 2$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (2.11) Nirenbergequation.2.11), u vérifie donc :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ où } g = u + f \in L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}_+^2} g v \, dx \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.12)$$

puisque, par définition, $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_{\mathbb{R}_+^2} g v \, dx, v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}$, où, comme d'habitude, on confond l'application T_g qui à $v \in H_0^1(\Omega)$ associe $\int g v \, dx$, qui est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$. On prend $v = u$ dans (2.12) Régularité des solutionsequation.2.12). On obtient $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Pour montrer la régularité sur $D_2 u$, on introduit la fonction $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ où $u_h \in H_0^1(\Omega)$ est définie par $u_h(x) = u(x_1, x_2 + h)$. Comme u vérifie (2.11) Nirenbergequation.2.11), u_h vérifie $\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f_h v \, dx$ où $f_h(x) = f(x_1, x_2 + h)$, et donc $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_h u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \Psi_h f v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On en déduit que $(\Psi_h u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \Psi_h g v \, dx$, et donc que $\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Par le lemme 2.15 Régularité des solutionstheorem.2.15, comme $g \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et faisons $n \rightarrow +\infty$. Par ce qui précède, la suite $(\Psi_{\frac{1}{n}}u)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il existe donc une sous-suite encore notée $(\Psi_{\frac{1}{n}}u)_{n \in \mathbb{N}}$, et $w \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\Psi_{\frac{1}{n}}u \rightarrow w$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible (that is to say $S(\Psi_{\frac{1}{n}}u) \rightarrow S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$). Donc $\Psi_{\frac{1}{n}}u \rightarrow w$ dans \mathcal{D}^* . Mais par le lemme 2.16 Régularité des solutions theorem.2.16, $\Psi_{\frac{1}{n}}u \rightarrow D_2u$ dans \mathcal{D}^* . Donc $D_2u = w \in H_0^1(\Omega)$, et par conséquent, $D_1D_2u \in L^2(\Omega)$ et $D_2D_2u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $D_1D_1u \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on utilise l'équation satisfaite par u . En effet, comme u est solution faible de (2.4 Formulation faible equation.2.4), on a $-\Delta u = f$ dans \mathcal{D}^* , et donc $D_1D_1u = -f - D_2D_2u$ ce qui prouve que $D_1D_1u \in L^2(\Omega)$. Ceci termine la preuve. ■

Remarque 2.19 (Plus de régularité...)

1. Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ et que Ω est à frontière C^2 . On a déjà vu que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$. On peut montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ($2 \leq p < +\infty$).
2. Supposons maintenant qu'on ait seulement $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$. On peut montrer (c'est un résultat de Meyers) qu'il existe $p^* > 2$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \leq p \leq p^*$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.
3. Toujours dans le cas $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, on peut montrer (ce résultat est dû à Stampacchia²) que si $f \in L^p(\Omega)$, avec $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.
4. Il est possible aussi de démontrer des résultats de régularité pour d'autres conditions aux limites. L'exercice 2.5 Problème de Neumann exo.2.5 donne un exemple avec les conditions de Neuman, l'exercice 2.8 De Fourier à Dirichlet... exo.2.8 un exemple avec conditions de Fourier et l'exercice 2.9 Equation de Schrödinger exo.2.9 traite l'exemple du système elliptique induit par l'équation de Schrödinger (qui est généralement présenté comme une équation dont l'inconnue prend ses valeurs dans \mathbb{C}).

2.4 Positivité de la solution faible

Question. (Positivité de la solution faible.) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1 Formulation faible equation.2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4). On suppose que $f \geq 0$ p.p.. A-t-on $u \geq 0$ p.p. ?

Remarque 2.20 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. On suppose que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur le bord de Ω (la fonction u est donc une solution classique avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$). On suppose aussi que $f > 0$ dans Ω . On va montrer que $u \geq 0$ dans Ω . Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ t.q. $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ t.q. $u(x) = \min\{u(y), y \in \bar{\Omega}\}$ (un tel x existe car $\bar{\Omega}$ est compact, u continue et $u = 0$ sur le bord de Ω). On a alors

$$\partial_i u(x) = 0 \text{ et } \partial_i^2 u(x) \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ceci donne $\Delta u(x) \geq 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. On obtient donc finalement que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Un argument supplémentaire permet de remplacer l'hypothèse $f > 0$ par $f \geq 0$. En effet, supposons seulement $f \geq 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x_1^2$ de sorte que $-\Delta u_\varepsilon = f + 2\varepsilon > 0$ dans Ω . Soit $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $u_\varepsilon(x) = \min\{u_\varepsilon(y), y \in \bar{\Omega}\}$. Si $x \in \Omega$, le raisonnement précédent montre que $\Delta u_\varepsilon(x) \geq 0$ en contradiction avec $-\Delta u_\varepsilon(x) = f(x) + 2\varepsilon > 0$. On a donc $x \in \partial\Omega$. On en déduit que

$$u_\varepsilon(y) \geq u_\varepsilon(x) \geq -\varepsilon \max_{x \in \partial\Omega} x_1^2 \text{ pour tout } y \in \bar{\Omega}.$$

2. Mathématicien italien né à Naples en 1922, mort en 1978, spécialiste de calcul des variations et des équations aux dérivées partielles, entre autres.

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient le résultat désiré, that is to say $u \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$.

La question posée au début de ce paragraphe consiste donc à étendre cette propriété de positivité aux solutions faibles.

Nous donnons maintenant deux petits lemmes, dûs à G. Stampacchia.

Lemme 2.21 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ' est bornée et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$). (La notation $\varphi(u)$ désigne la fonction $\varphi \circ u$.)

Démonstration Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$), that is to say

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ D_i u_n &\rightarrow D_i u \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut même supposer qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $F_i \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ p.p. et } |u_n| \leq F \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ D_i u_n &\rightarrow D_i u \text{ p.p. et } |D_i u_n| \leq F_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

On a alors $\varphi(u_n) \in C_c^1(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$D_i\varphi(u_n) = \partial_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n.$$

On pose $M = \sup\{|\varphi'(s)|, s \in \mathbb{R}\}$, de sorte que $|\varphi(s)| \leq M|s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u) \text{ p.p. et } |\varphi(u_n)| \leq MF \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $MF \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc aussi $D_i\varphi(u_n) \rightarrow D_i\varphi(u)$ dans $D^*(\Omega)$. On rappelle maintenant que $D_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n$. Comme

$$\begin{aligned} \varphi'(u_n) &\rightarrow \varphi'(u) \text{ p.p.}, \\ \partial_i u_n &\rightarrow \partial_i u \text{ p.p.}, \\ |\varphi'(u_n)\partial_i u_n| &\leq MF_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée donne $\varphi'(u_n)\partial_i u_n \rightarrow \varphi'(u)\partial_i u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi dans $D^*(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $D^*(\Omega)$ on a donc $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)\partial_i u$ p.p. (et pour tout i). Finalement, on obtient donc que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ (comme limite, pour la norme de $H^1(\Omega)$, de fonctions de $H_0^1(\Omega)$) et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)\partial_i u$ p.p., pour tout i . ■

Lemme 2.22 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On définit u^+ par $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ Pour $x \in \Omega$. Alors, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{u \geq 0} D_i u = 1_{u > 0} D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$). En particulier on a $D_i u = 0$ p.p. (pour tout i) sur l'ensemble $\{u = 0\}$.

Démonstration Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \varphi_n(s) &= 0 \text{ si } s \leq 0, \\ \varphi_n(s) &= \frac{n}{2}s^2 \text{ si } 0 < s < \frac{1}{n}, \\ \varphi_n(s) &= s - \frac{1}{2n} \text{ si } \frac{1}{n} \leq s. \end{aligned}$$

On a donc $\varphi_n(s) \rightarrow s^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et $|\varphi'_n(s)| \leq 1$ pour tout s et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le lemme 2.20 Positivité de la solution faible theorem.2.20 donne $\varphi_n(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi'_n(u)D_i u$ p.p. (et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$). D'autre part, on a

$$\varphi_n(u) \rightarrow u^+ \text{ p.p.}, |\varphi_n(u)| \leq |u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_n(u) \rightarrow u^+$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $D_i \varphi_n(u) \rightarrow D_i u^+$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$). Puis, on remarque que $\varphi'_n(u) \rightarrow 1_{\{u>0\}}$ p.p. et donc

$$\varphi'_n(u)D_i u \rightarrow 1_{\{u>0\}}D_i u \text{ p.p.}, |\varphi'_n(u)D_i u| \leq |D_i u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui (toujours par le théorème de convergence dominée) donne $\varphi'_n(u)D_i u \rightarrow 1_{\{u>0\}}D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$). Comme $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi'_n(u)D_i u$ on en déduit (par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$) que $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p.. La suite $(\varphi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de $H_0^1(\Omega)$, elle converge dans $H^1(\Omega)$ vers u^+ . On a bien montré, finalement, que $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p. (et pour tout i).

En considérant la suite $(\psi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ avec ψ_n définie par $\psi_n(s) = \varphi(s + 1/n) - 1/(2n)$, un raisonnement analogue montre que $D_i u^+ = 1_{\{u \geq 0\}}D_i u$ (la différence essentielle entre φ_n et ψ_n est que $\varphi'_n(0) = 0$ alors que $\psi'_n(0) = 1$). ■

Remarque 2.23 Le lemme 2.21 Positivité de la solution faible theorem.2.21 peut se généraliser à toute fonction lipschitzienne s'annulant en 0, on obtient ainsi le résultat suivant : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et φ une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , s'annulant en 0. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i \varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$). Un exemple important consiste à prendre $\varphi(s) = (s - k)^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, avec k donné dans \mathbb{R}_+ . On obtient ainsi, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $(u - k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i \varphi(u) = 1_{\{u>k\}}D_i u = 1_{\{u \geq k\}}D_i u$ p.p..

On peut maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe.

Théorème 2.24 (Positivité de la solution faible) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que les $a_{i,j}$ vérifient (2.1 Formulation faible equation.2.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4). On suppose que $f \geq 0$ p.p.. On a alors $u \geq 0$ p.p..

Démonstration On suppose que $f \leq 0$ p.p. et on va montrer que $u \leq 0$ p.p. (en changeant f en $-f$ et u et $-u$ on obtient le résultat désiré). Comme u est solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4), on a

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit, dans cette égalité, $v = u^+$ et on obtient

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 1_{\{u \geq 0\}}(x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u^+(x) dx = \int_{\Omega} f(x) u^+(x) dx \leq 0.$$

On en déduit que $\alpha \|u^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \alpha \int_{\Omega} |\nabla u^+(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} f(x) u^+(x) dx \leq 0$, et donc $u^+ = 0$ p.p., that is to say $u \leq 0$ p.p.. ■

2.5 Condition de Dirichlet non homogène

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les problèmes elliptiques (linéaires) avec condition aux limites homogène (that is to say solution nulle au bord du domaine). On souhaite maintenant remplacer la condition “ $u = 0$ ” sur le bord de Ω par “ $u = g$ ” sur le bord de Ω . Ceci va être possible en se ramenant au problème de Dirichlet avec une condition aux limites homogène (that is to say en se ramenant aux théorèmes 2.6 Existence et unicité de la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4) theorem.2.6 et 2.9 Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9) à condition que Ω est assez régulier pour que l'opérateur “trace”, noté γ et introduit au chapitre 1 Sobolev spaces chapter.1, soit bien défini et que g soit dans l'image de γ (that is to say $g = \gamma(G)$ avec $G \in H^1(\Omega)$).

Plus précisément, soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $\partial\Omega$ cette frontière. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité uniforme (2.1 Formulation faible equation.2.1). Soit f une fonction de Ω dans \mathbb{R} et g une fonction de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R} . On cherche une solution au problème (2.2 Formulation faible equation.2.2). Le théorème 2.6 Existence et unicité de la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4) theorem.2.6 permet de démontrer le théorème suivant, où (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13) est la formulation faible du problème (2.2 Formulation faible equation.2.2).

Théorème 2.25 (Condition de Dirichlet non homogène (1)) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \text{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.23 Théorèmes de trace theorem.1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1 Formulation faible equation.2.1) soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13).*

$$u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.13)$$

La démonstration fait partie de l'exercice 2.20 Condition de Dirichlet non homogène exo.2.20. Elle consiste à chercher $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $L^2(\Omega)$ et $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$. Il est possible aussi de remplacer le second membre de (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13) par $T(v)$ où $T \in H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors le théorème 2.25 Condition de Dirichlet non homogène (2) theorem.2.25 qui se démontre aussi en cherchant $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $H^{-1}(\Omega)$ (voir l'exercice 2.20 Condition de Dirichlet non homogène exo.2.20).

Théorème 2.26 (Condition de Dirichlet non homogène (2)) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne, $T \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \text{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vu au théorème 1.23 Théorèmes de trace theorem.1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1 Formulation faible equation.2.1) soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de (2.14 Condition de Dirichlet non homogène (2) equation.2.14).*

$$u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = g, \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.14)$$

Remarque 2.27 *Sous les hypothèses du théorème 2.24 Condition de Dirichlet non homogène (1) theorem.2.24, on peut aussi montrer, par une méthode voisine de celle donnée dans le théorème 2.23 Positivité de la solution faible theorem.2.23, que, si $f = 0$ et $A \leq g \leq B$ p.p., avec $A, B \in \mathbb{R}$ (p.p. est à prendre ici au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$), on a alors $A \leq u \leq B$ p.p., où u est la solution de (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13). C'est ce résultat que l'on appelle “principe du maximum”.*

La suite de cette section donne quelques compléments sur l'image de l'opérateur trace (noté γ) défini sur $H^1(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière lipschitzienne.

Définition 2.28 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note $H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'ensemble des traces des fonctions $H^1(\Omega)$, that is to say $H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Im}\gamma$ où γ est l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ vu au théorème 1.23 Théorèmes de trace theorem.1.23. On définit sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$ une norme en posant

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \gamma(\bar{u}) = u\}.$$

La proposition 2.29 Condition de Dirichlet non homogène theorem.2.29 montre que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est alors un espace de Hilbert et que l'application $u \mapsto u$ est continue de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. (On dit alors que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.) On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (c'est donc aussi un espace de Hilbert).

Remarque 2.29 Dans le cadre de la définition 2.27 Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ theorem.2.27, on peut montrer (mais ceci n'est pas fait dans ce cours) la compacité de l'application $u \mapsto u$ de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Proposition 2.30 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note γ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.

1. Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où \bar{u} est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans Ω avec $\gamma(\bar{u}) = u$, that is to say l'unique solution de

$$\begin{aligned} \bar{u} &\in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u, \\ \int_{\Omega} \nabla\bar{u}(x) \nabla v(x) \, dx &= 0, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

2. L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.
3. L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.21 Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ exo.2.21.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. Avec la définition 2.27 Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ theorem.2.27 (et la proposition 2.29 Condition de Dirichlet non homogène theorem.2.29), on voit que l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (et sa norme est égale à 1). Si maintenant $u \in H^1(\Omega)^N$, on peut définir la trace de u encore notée $\gamma(u)$ en prenant la trace de chacune des composantes de u . On a donc $\gamma(u) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N \subset L^2(\partial\Omega)^N$. On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω . Comme Ω est à frontière lipschitzienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(u) \cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(u) \cdot n$ est appelée "trace normale de u sur $\partial\Omega$ ".

L'exercice 2.22 trace normale d'un élément de H_{div} exo.2.22 montre qu'on peut définir $\gamma(u) \cdot n$ comme un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ sous l'hypothèse $u \in L^2(\Omega)^N$ avec $\text{div}(u) \in L^2(\Omega)$ (cette hypothèse est donc plus faible que $u \in H^1(\Omega)^N$). Il est toutefois intéressant de noter que, sous cette hypothèse, $\gamma(u) \cdot n$ n'est pas toujours représenté par une fonction sur $\partial\Omega$ et ceci induit une difficulté lorsque l'on souhaite considérer la restriction de $\gamma(u) \cdot n$ à une partie du bord de Ω , voir à ce propos l'exercice 2.23 Pas de trace normale sur une partie du bord exo.2.23.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (Régularité en dimension 1) *Solution 2.1* Régularité en dimension 1 cor.2.1

$f \in L^2(]0, 1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned} \quad (2.15)$$

On suppose maintenant que $f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^2(]0, 1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0, 1]$. Soit u la solution de (2.15). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).

En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0, 1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1) *Solution 2.2* Décomposition spectrale en dimension 1 cor.2.2

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0, 1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.15). Montrer que

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.15)), noter que $H_0^1(]0, 1[) \subset E$. On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E .

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^2(]0, 1[, \mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0, 1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier. . . .)

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned}$$

Exercice 2.3 (1ere valeur propre de $-\Delta$)

On reprend les notations du théorème ???. Soit donc Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $Au = -\Delta u$ avec $D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Les μ_n sont ordonnées dans l'ordre croissant (that is to say $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et l'on a $\mu_1 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$.

Pour $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on pose

$$Q(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2(x) dx}.$$

1. Montrer que

$$\mu_1 = \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} Q(v).$$

2. Soit $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que $Q(u) = \mu_1$, montrer que $u \in D(A)$ et $Au = \mu_1 u$ p.p..

3. On suppose maintenant que Ω est connexe. Montrer que μ_1 est une valeur propre simple et que les fonctions propres associées à μ_1 ont un signe constant (that is to say que $Au = \mu_1 u$ implique $u \geq 0$ p.p. ou $u \leq 0$ p.p.). [On rappelle que si $u \in H_0^1(\Omega)$ on a aussi $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$, lemme 2.21 Positivité de la solution faible theorem.2.21. On pourra alors comparer $Q(u)$ avec $Q(u^+)$ et $Q(u^-)$ si u^+ et u^- sont des fonctions non nulles p.p..]

Exercice 2.4 (Problème elliptique à coefficients non bornés)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L_{loc}^1(\Omega) \text{ et } p D_i u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}\}$.

On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des dérivées par transposition, de u dans la direction x_i , la variable de \mathbb{R}^N étant notée $x = (x_1, \dots, x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p, \Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \|p D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)

(a) Montrer que $H^1(p, \Omega) \subset H^1(\Omega)$.

(b) Montrer que $H^1(p, \Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p, \Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

On pose $H_0^1(p, \Omega) = H^1(p, \Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H_0^1(p, \Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p, \Omega)$.

3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul u t.q.

$$u \in H_0^1(p, \Omega), \tag{2.16}$$

$$\int_{\Omega} p^2(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} h(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(p, \Omega). \tag{2.17}$$

4. (Précisions...)

(a) On suppose ici que $p^2 \in L_{loc}^1(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(p, \Omega)$.

(b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Donner un exemple de fonction p (avec $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p, \Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

Exercice 2.5 (Deux problèmes elliptiques emboîtés) Solution 2.3 Deux problèmes elliptiques emboîtés cor.2.3

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, et M et N deux matrices de taille $d \times d$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u t.q.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} N(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} (M(x) + N(x)) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.18)$$

avec w solution de

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} M(x) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.19)$$

pour les questions suivantes, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.18) avec w solution de (2.19). Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.18) avec w solution de (2.19) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.19).

- Montrer que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (that is to say que T est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).
- On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice A , ne dépendant que de M et λ , tel que, si $u = T(f)$,

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Donner l'expression de A en fonction de M et λ .

- On suppose dans cette question que $d = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.18) avec w solution de (2.19). Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.18) avec w solution de (2.19) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.19).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.18) avec w solution de (2.19)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$

- On suppose dans cette question que $d = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.18) avec w solution de (2.19). Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.18) avec w solution de (2.19) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.19).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.18) avec w solution de (2.19)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

Exercice 2.6 (Problème de Neumann) Solution 2.4

Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L_{loc}^1 dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante (that is to say qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p.).

- (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H , la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
[On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C , ne dépendant que Ω , t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a \int_{\Omega} u(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x) dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (2.20)$$

[On pourra considérer $T|_H$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx &= a \int_{\Omega} v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.21)$$

3. (Existence et unicité.)

(a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.21) n'a pas de solution.

(b) Si $a = 0$, montrer que (2.21) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H .

(c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$, $F \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.21) est aussi dans $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, montrer que $-\operatorname{div}(A\nabla u) = -\operatorname{div}F$, dans Ω , et que $A\nabla u \cdot \mathbf{n} = F \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où \mathbf{n} est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω .

4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note u la solution (appartenant à H) de (2.21) avec A_n au lieu de A et F_n au lieu de F (et $a = 0$). On suppose que

- $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\dots,N}$ vérifie, pour tout n , les mêmes hypothèses que A avec un α indépendant de n ,
- $(a_{i,j}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i, j = 1, \dots, N$,
- $a_{i,j}^{(n)} \rightarrow a_{i,j}$ p.p., quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i, j = 1, \dots, N$,
- $F_n \rightarrow F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \rightarrow \infty$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H , puis que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow \infty$) et enfin que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

5. (Régularité H^2 par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.) On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note u la solution (appartenant à H) de (2.21). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On pose $\Omega_s =]-1, 1[\times]0, 1[$. On définit A, f et u sur Ω_s en posant $a_{i,j}(x_1, x_2) = a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $i = j$, $a_{i,j}(x_1, x_2) = -a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $i \neq j$, $f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$. Montrer que u est solution de (2.21), avec Ω_s au lieu de Ω .

En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice 2.7 (Norme H^2 sur \mathbb{R}^N)

Soit $N \geq 1$. Cet exercice montre que dans \mathbb{R}^N la norme H^2 est équivalente à la somme de la norme L^2 de la fonction et de la norme L^2 de son laplacien. Cette équivalence est utilisée pour étudier un problème avec le bilaplacien.

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$

(a) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $\Delta u - u = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si u vérifie

$$\int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int u(x)v(x) dx = \int f(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \text{ pour tout } v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.22)$$

(b) Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solution de (2.22) et que $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$.

2. Soit $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer qu'il existe C_1 et C_2 strictement positifs, ne dépendant (éventuellement) que de N , tels que

$$C_1(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}) \leq \|u\|_{H^2} \leq C_2(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}).$$

3. On note $H^{-2}(\mathbb{R}^N)$ le dual (topologique) de $H^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in H^{-2}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda > 0$.

(a) Soit $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\Delta(\Delta u) + \lambda u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si u est vérifiée

$$\int \Delta u(x) \Delta v(x) dx + \lambda \int u(x)v(x) dx = \langle f, v \rangle_{H^{-2}, H^2}. \quad (2.23)$$

(b) Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ solution de (2.23)

Exercice 2.8 (Modélisation d'un problème de contact)

On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\}$, $I =]-1, 1[\subset \mathbb{R}$, et $\Omega = B \setminus [-1, 1] \times \{0\}$ (Ω est donc un ouvert de \mathbb{R}^2). On note $\partial B = \bar{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de x et $y \in \mathbb{R}^2$.

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ a.e. (sur I). On s'intéresse au problème suivant.

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.24)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial B, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^-), \quad x \in I, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) = g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-)), \quad x \in I. \quad (2.27)$$

1. (Recherche d'une formulation faible)

On suppose, dans cette question, que f est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et g une fonction continue sur I . On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x, y), y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x, y), y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u|_{\Omega_+} \in C^2(\bar{\Omega}_+)$ et $u|_{\Omega_-} \in C^2(\bar{\Omega}_-)$. Noter alors que toutes les expressions dans (2.24)-(2.27) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x, 0^+) = \lim_{y \rightarrow 0, y > 0} u(x, y)$.

Montrer que u est solution "classique" de (2.24)-(2.27) (c'est-à-dire vérifie (2.24) pour tout $x \in \Omega$, (2.25) pour tout $x \in \partial B$ et (2.26), (2.27) pour tout $x \in I$) si et seulement si u vérifie :

$$\begin{aligned}
 &u(x) = 0, \forall x \in \partial B, \\
 &\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \\
 &\int_I g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-))(v(x, 0^+) - v(x, 0^-)) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v|_{\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v|_{\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).

2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur \mathbb{R}^2). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n^2 \rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) (Trace sur ∂B , sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_{\Omega} u(y) \rho_n(x(1 - \frac{1}{n}) - y) dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B, \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \rightarrow u|_D$, dans $H^1(D)$, quand $n \rightarrow \infty$.

En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu γ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ a.e. en $\theta \in]0, 2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et u est continue sur $\overline{B} \setminus [-1, 1] \times \{0\}$.

(b) Montrer qu'il existe γ_+ [resp. γ_-] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x, 0^+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x, 0^-)$] a.e. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u|_{\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u|_{\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].

3. (Coerci(tivité)

On pose $H = \text{Ker} \gamma$ (où γ est défini à la question précédente).

Montrer qu'il existe C t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u|_{\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u|_{\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]

4. (Existence et unicité de solutions faibles)

On rappelle que $H = \text{Ker} \gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de (2.29) Exercise equation.2.29).

$$\begin{cases} u \in H, \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_I g(x)(\gamma_+ u(x) - \gamma_- u(x))(\gamma_+ v(x) - \gamma_- v(x)) dx \\ = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \forall v \in H. \end{cases} \tag{2.29}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.29) Exercise equation.2.29) avec g t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$.

Montrer que $u_n \rightarrow u$ (en un sens à préciser), quand $n \rightarrow \infty$, où u est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans B , $u = 0$ sur ∂B .

Exercice 2.9 (De Fourier à Dirichlet...)

Soient $\sigma \geq 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{aligned}
 &-\Delta u(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \\
 &-\partial_1 u(0, y) + \sigma u(0, y) = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

1. Donner une définition de solution "classique" de (2.30) Exercise equation.2.30) et de solution "faible" de (2.30) Exercise equation.2.30).

2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.30) Exercise equation.2.30).

3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (2.30) Exercise equation.2.30) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(\mathbb{R}_+^N)$.

4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note u_n la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ vers u solution faible de :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \\ u(0, y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Exercice 2.10 (Equation de Schrödinger)

Soit $N \geq 1$. On note Ω la boule unité de \mathbb{R}^N (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si Ω un ouvert borné “assez régulier” de \mathbb{R}^N).

Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on s’intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.33)$$

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que (u_1, u_2) est solution faible du problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.33Exercicesequation.2.33) si

$$\begin{aligned} u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad u_2 \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} u_2(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f_1(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_{\Omega} u_1(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f_2(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.34)$$

- (a) Montrer que le problème (2.34Exercicesequation.2.34) admet une et une seule solution. [Utiliser l’espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]
 (b) Montrer que le problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.33Exercicesequation.2.33) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (2.32Exercicesequation.2.32) sont satisfaites *p.p.* sur Ω . [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l’unicité.]

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

- (c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (2.34Exercicesequation.2.34), on note $u = T(f)$. Montrer que l’opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.35)$$

où n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à Ω .

Pour résoudre le problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.35Exercicesequation.2.35), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^*$, destiné à tendre vers l’infini.

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n}u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n}u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec la condition aux limites (2.35Exercicesequation.2.35).

On dit que (u_1, u_2) est solution faible du problème (2.36Exercicesequation.2.36)-(2.35Exercicesequation.2.35) si

$$\begin{aligned} u_1 \in H^1(\Omega), u_2 \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} (u_2(x) + \frac{1}{n}u_1(x))\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f_1(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} (\frac{1}{n}u_2(x) - u_1(x))\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f_2(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Noter aussi que (u_1, u_2) est solution faible du problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.35Exercicesequation.2.35) si (u_1, u_2) est solution de (2.37Exercicesequation.2.37) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que le problème (2.37Exercicesequation.2.37) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.

(b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(u_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (2.37Exercicesequation.2.37) obtenu en remplaçant $1/n$ par 0, c'est à dire une et une solution faible au problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.35Exercicesequation.2.35). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(u_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la question précédente et faire tendre n vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

(d) Montrer que le problème (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.35Exercicesequation.2.35) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (2.32Exercicesequation.2.32) sont satisfaites *p.p.* sur Ω et les équations (2.35Exercicesequation.2.35) sont satisfaites *p.p.* (pour la mesure de Lebesgue $N-1$ -dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur "trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (2.32Exercicesequation.2.32)-(2.35Exercicesequation.2.35), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (2.32Exercicesequation.2.32) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice 2.11 (A la limite de H^{-1})**Partie I, décomposition dans $H_0^1(\Omega)$**

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de Ω dans \mathbb{R}) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i \varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$ p.p. pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

On définit maintenant φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s, \text{ pour } 0 \leq s \leq 1, \\ \varphi(s) &= -\frac{s^2}{2} + 2s - \frac{1}{2}, \text{ pour } 1 < s \leq 2, \\ \varphi(s) &= \frac{3}{2}, \text{ pour } 2 < s, \\ \varphi(s) &= -\varphi(-s), \text{ pour } s < 0. \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, On définit φ_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \rightarrow s$ et $\varphi'_k(s) \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \leq |s|$, $\varphi'_k(s) \leq 1$.
3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et que $\varphi_k(u) \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \rightarrow \infty$.
4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \leq \varepsilon$.

Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω , t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \forall q \in [1, \infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec q au lieu de \sqrt{q} .)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de C (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \leq a$. [Développer e^s en puissances de $s \dots$]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

Partie III, sur la résolution du problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Preliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, ne dépendant que de σ , t.q.

$$st \leq e^{\sigma s^2} + \beta t \sqrt{|\ln t|} + \gamma t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+^*.$$

[On pourra, par exemple, remarquer que $st \leq \max\{\beta t \sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ pour tout $\beta > 0$ (et tous $s, t > 0$). Puis, choisir β (en fonction de σ) et conclure.]

2. Montrer que $f u \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T : u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Partie IV, contre-exemple

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^\gamma$ p.p. sur B_δ . [On pose $v(x) = (\ln(|x|))^\gamma$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]
2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Exercice 2.12 (Décomposition de Hodge) Solution 2.5 *Décomposition de Hodge cor.2.5*

Soient Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.

Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_{\Omega} g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega =]0, 1]^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où \mathbf{n} est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Exercice 2.13 (Problème de Stokes, vitesse)

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $f = (f_1, \dots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On rappelle que u est solution du problème de Stokes si :

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v = (v_1, \dots, v_N)^t \in H. \quad (2.38)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.38) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème suivant :

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad \int_{\Omega} (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_{\Omega} f_i(x) v(x) dx, \quad \forall v = H_0^1(\Omega), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.39)$$

1. Montrer que (2.38) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (2.39). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n} \operatorname{div} u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \rightarrow u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \rightarrow \infty$, où u est solution de (2.38). En déduire (avec la question 1) que (2.38) admet une unique solution, notée u , et que $u^{(n)} \rightarrow u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \rightarrow \infty$ (sans extraction de sous suite).

Exercice 2.14 (Conditions aux limites de Vencel)**Notations et Rappels du cours**

On note $H_p^1(0, 2\pi) = \{u \in H^1(]0, 2\pi[); u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1(]0, 2\pi[)$, u admet toujours un représentant continu sur $[0, 2\pi]$ et on identifie u avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur ∂B si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2(]0, 2\pi[)$ par $j(w)(\theta) = w(\cos \theta, \sin \theta)$, pour $\theta \in [0, 2\pi[$. L'application j est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2(]0, 2\pi[)$, de sorte que $\bar{g} = j \circ \gamma$ est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$.

On pose $H = \{u \in H^1(\Omega); \bar{g}(u) \in H_p^1(0, 2\pi)\}$. On munit H du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(\Omega)} + (\bar{g}(u)/\bar{g}(v))_{H_p^1(0, 2\pi)}$.

Partie I (Préliminaire d'analyse fonctionnelle)

1. Montrer que $H_p^1(0, 2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que H est une espace de Hilbert.

Partie II (Conditions aux limites de Vencel)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on définit r et θ par $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus (0, 0), \mathbb{R})$, on pose $u_r(x, y) = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ et $u_\theta(x, y) = -y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. (Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$.)

Pour f et g données, on s'intéresse au problème :

$$-\Delta u(x, y) + u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in B, \quad (2.40)$$

$$u_r(x, y) - u_{\theta\theta}(x, y) + u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \partial B. \quad (2.41)$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle "solution faible" de (2.40Exercicesequation.2.40)-(2.41Exercicesequation.2.40) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \int_B \left(\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z)v(z) \right) dz + \int_0^{2\pi} (D\bar{g}(u)(\theta) D\bar{g}(v)(\theta) + \bar{g}(u)(\theta)\bar{g}(v)(\theta)) d\theta \\ = \int_B f(z)v(z) dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta) j(\gamma(v))(\theta) d\theta, \forall v \in H. \end{aligned} \quad (2.43)$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.42Exercicesequation.2.42)-(2.43Exercicesequation.2.43).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, "uv" dans la 1ère intégrale de (2.43Exercicesequation.2.43). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (2.42Exercicesequation.2.42)-(2.43Exercicesequation.2.43).
3. Soient $f \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B, \mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$. Montrer que u est solution au sens "classique" de (2.40Exercicesequation.2.40)-(2.41Exercicesequation.2.40) (c.a.d. vérifie (2.40Exercicesequation.2.40) pour tout $(x, y) \in \overline{B}$ et (2.41Exercicesequation.2.40) pour tout $(x, y) \in \partial B$) si et seulement si u est solution faible de (2.40Exercicesequation.2.40)-(2.41Exercicesequation.2.40).

4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f, g) = (u, \gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (2.40Exercicesequation.2.40)-(2.41Exercicesequation.2.40). Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.

Exercice 2.15 (problème de Stokes, vitesse et pression) *Solution 2.6* problème de Stokes, vitesse et pression cor.2.6

Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \dots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, that is to say à trouver $u = (u_1, \dots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Noter que la première équation de (2.44Exercicesequation.2.44) est vectorielle.

On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.44Exercicesequation.2.44) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} u &= (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad p \in L^2(\Omega), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int_{\Omega} p(x) \operatorname{div} v(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \\ &\text{pour tout } v = (v_1, \dots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \quad (2.45)$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (2.44Exercicesequation.2.44) est solution de (2.45Exercicesequation.2.45).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (2.44Exercicesequation.2.44), u est alors solution de

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v = (v_1, \dots, v_N)^t \in H. \quad (2.46)$$

On montre dans cette première partie que (2.46Exercicesequation.2.46) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.45Exercicesequation.2.45), u est alors l'unique solution de (2.46Exercicesequation.2.46).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.

2. Montrer que (2.46Exercicesequation.2.46) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]

3. Soit (u, p) une solution de (2.45Exercicesequation.2.45). Montrer que u est l'unique solution de (2.46Exercicesequation.2.46).

Soit u la solution de (2.46Exercicesequation.2.46). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.45Exercicesequation.2.45).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F . On note A^* l'opérateur adjoint de A . L'opérateur A^* est un opérateur linéaire continu de F dans E . Pour tout $g \in F$, A^*g est l'unique élément de E défini par

$$(A^*g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de A^*g est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\text{Ker}A = (\text{Im}A^*)^\perp$.

(On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)

2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \overline{\text{Im}A^*}$.

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.31 Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω .

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \text{div} u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F .

1. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^*p_n \rightarrow v$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω .

(a) Montrer que $A^*p_n = A^*q_n$.

(b) Montrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans F . [Utiliser le lemme 2.30 Exercisetheorem.2.30.]

(c) Montrer que $v \in \text{Im}A^*$.

2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}A^*$ et que $\text{Ker}A = H$.

3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.46 Exercisesequation.2.46).

(a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \text{Im}A^*$.

(b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.45 Exercisesequation.2.45).

4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.45 Exercisesequation.2.45). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.46 Exercisesequation.2.46)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

Exercice 2.16 (Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1) Solution 2.7 Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1 cor.2.7

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.47)$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (2.47 Exercisesequation.2.47) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.47 Exercisesequation.2.47) avec f_n au lieu de f . On suppose que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$).
3. Montrer que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$

[Utiliser le fait que $\int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x) u_n(x) dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]

4. Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_{\Omega} A(x) \nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla(u_n - u)(x) dx$.]

Exercice 2.17 (Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17) *Solution 2.8 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 cor.2.8*

Soit φ une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.

$$0 \leq x < y \Rightarrow \varphi(y) \leq C \frac{\varphi(x)^\beta}{y - x}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ t.q. $\varphi(a_k) \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe a_0 t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$ puis, par récurrence, définir a_{k+1} par $\frac{C}{a_{k+1} - a_k} \frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

Exercice 2.18 (Solutions bornées d'un problème elliptique) *Solution 2.9 Solutions bornées d'un problème elliptique cor.2.9*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si B est une partie borélienne de \mathbb{R}^N , on note $\text{mes}(B)$ le mesure de Lebesgue N -dimensionnelle de A (that is to say la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.48)$$

Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ car $p > 2$) et on note u l'unique solution de (2.48 Exercice equation.2.48).

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction S_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 & \text{si } -k \leq s \leq k, \\ S_k(s) = s - k & \text{si } s > k, \\ S_k(s) = s + k & \text{si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k} \nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \|\nabla S_k(u)\|_{L^2(\Omega)} = \alpha \left(\int_{A_k} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|F\|_{L^p(\Omega)}.$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.48 Exercice equation.2.48) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

3. On pose $1^* = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe C_1 ne dépendant que de N t.q.

$$\|w\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \|\nabla w\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h - k) \text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{A_h} |S_k(u(x))|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe C_2 ne dépendant que de C_1, α, F et p t.q.

$$(h - k) \text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ (that is to say qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.16 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 exo.2.16.]

5. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω, α et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \|F\|_{L^p(\Omega)}.$$

Exercice 2.19 (Solutions bornées d'un problème elliptique, suite)

On reprend les premières hypothèses de l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

1. Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$ si $N = 2$ et $p = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.49)$$

2. Soit $p > N/2$ et $f \in L^p(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u solution de (2.49) Exercice equation.2.49). [Se ramener à la question précédente.]

Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe C ne dépendant que de Ω, α et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

[Se ramener à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17.]

Exercice 2.20 (Diffusion évanescence et convection) Solution 2.10 Diffusion évanescence et convection cor.2.10

Partie I Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $w = (w_1, \dots, w_N)^t \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (On rappelle que $\text{div}(w) = \sum_{i=1}^N D_i w_i$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que $D_i(u^2) = 2u D_i u$, pour tout $i \in 1, \dots, N$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.]

2. Montrer que $\int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$, pour tout $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.]

3. Montrer que $\int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla(u^2)(x) dx = 2 \int_{\Omega} u(x) w(x) \cdot \nabla u(x) dx = 0$ (on rappelle que $w \cdot \nabla(u^2) = \sum_{i=1}^N w_i D_i(u^2)$).

Partie II Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , à frontière lipschitzienne (cette hypothèse donne l'existence de l'opérateur "trace", noté γ , linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et t.q. $\gamma(u) = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ et $\text{Ker}(\gamma) = H_0^1(\Omega)$). Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $w \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \text{Im } \gamma$. On cherche u solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega), \quad \gamma(u) = g \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)), \\ \int_{\Omega} a \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.50)$$

1. Soit $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Montrer que u est solution de (2.50) si et seulement si $u = G + \bar{u}$ avec \bar{u} solution de (2.51).

$$\begin{aligned} \bar{u} \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \\ \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \int_{\Omega} a \nabla G(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} G(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.51)$$

2. Montrer que (2.50) admet une et une seule solution.

On note u cette solution dans la suite de cette partie.

3. On suppose, dans cette question, que $g = 0$ (de sorte que $u \in H_0^1(\Omega)$). Montrer que $a \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$.

4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $f \leq 0$ p.p. dans Ω et que $g \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $N-1$ -dimensionnelle sur $\partial\Omega$). Montrer que $u \leq b$ p.p. dans Ω . [On pourra admettre que $(u-b)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla(u-b)^+ = 1_{u>b} \nabla u$ p.p. (ce résultat est semblable à celui du lemme 2.21 Positivité de la solution faible theorem.2.21), utiliser (2.50) et la partie I.]

Partie III Dans cette partie on prend $N = 2$, $\Omega =]0, 1[^2$, $w = (-1, 0)$ et $g = 0$. On suppose aussi que $f \in L^\infty(\Omega)$ et que $f \geq 0$ p.p. sur Ω . On note u_n la solution de (2.50) pour $a = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et on s'intéresse à la limite de u_n quand $n \rightarrow \infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n \geq 0$ p.p. [Utiliser la Partie II, question 4.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe C_1 , ne dépendant que de f , t.q. $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. [On pourra, par exemple, chercher de quel problème de type (2.50) est solution la fonction $u_n + \beta\psi$, avec $\psi(x) = x_1$ et β convenablement choisi, et utiliser la Partie II, question 4.]

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe C_2 , ne dépendant que de f , t.q. $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \sqrt{n}$.

4. En utilisant la remarque 2.14 Optimalité des hypothèses theorem.2.14, montrer que $u_n \in H^2(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, déduire de la question 1 de la partie III que $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) \geq 0$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(1, x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$ (de même, $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 0) \geq 0$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 1) \leq 0$ pour tout $x_1 \in]0, 1[$). On admettra, dans la suite, que ce résultat est encore vrai, avec seulement $u_n \in H^2(\Omega)$, au sens $\gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \geq 0$ et $\gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \leq 0$ p.p. en $x_2 \in]0, 1[$ (de même $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \geq 0$ et $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \leq 0$ p.p. en $x_1 \in]0, 1[$).

6. En utilisant la question 2 de la partie III, montrer qu'on peut supposer (à une sous suite près) que $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$, c'est à dire :

$$\int_{\Omega} u_n(x)\varphi(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Montrer que $u \geq 0$ p.p..

On cherche, dans la suite, l'équation et les conditions aux limites satisfaites par u .

7. Montrer que $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla u_n(x) \nabla \varphi(x) dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \varphi(0, x_2) dx_2 - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \varphi(1, x_2) dx_2 \\ + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \varphi(x_1, 0) dx_1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \varphi(x_1, 1) dx_1 \\ - \int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

9. Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que

$$- \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.52)$$

10. On suppose, dans cette question, que $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $f \in C(\bar{\Omega})$. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f$ partout dans Ω et que $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$.

La fonction u est-elle alors entièrement déterminée par f ?

11. On remplace $w = (-1, 0)$ par $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ De quel problème, dépendant de w , u est elle solution ? [distinguer les signes des 2 composantes de w .]

Exercice 2.21 (Condition de Dirichlet non homogène) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière lipschitzienne et $g \in \text{Im}(\gamma)$ (où γ désigne l'opérateur trace vu au théorème 1.23 Théorèmes de tracetheorem.1.23). Soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (2.1 Formulation faible equation.2.1) soit vérifiée.

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13) admet une unique solution.
2. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$. Montrer que (2.14 Condition de Dirichlet non homogène (2) equation.2.14) admet une unique solution.
3. On suppose dans cette question que $N = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13).
4. On suppose dans cette question que $N \geq 3$ et $p = 2N/(N+2)$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une unique solution au problème (2.13 Condition de Dirichlet non homogène (1) equation.2.13).

Exercice 2.22 (Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne. On note γ l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$.

On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Im}\gamma$ et que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\{\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \gamma(\bar{u}) = u\}$.

1. Soit $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Montrer que $\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}$ où \bar{u} est l'unique solution faible de $-\Delta\bar{u} = 0$ dans Ω avec $\gamma(\bar{u}) = u$, that is to say l'unique solution de

$$\begin{aligned}\bar{u} &\in H^1(\Omega), \gamma(\bar{u}) = u, \\ \int_{\Omega} \nabla\bar{u}(x) \nabla v(x) \, dx &= 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

2. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.

3. Montrer que l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^2(\partial\Omega)$.

Exercice 2.23 (trace normale d'un élément de H_{div}) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière lipschitzienne. On pose $H_{\text{div}}(\Omega) = \{v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 \text{ t.q. } \text{div}(v) \in L^2(\Omega)\}$ et, pour $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$,

$$\|v\|_{H_{\text{div}}(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div}(v)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.53)$$

1. Montrer que $H_{\text{div}}(\Omega)$, muni de la norme définie par (2.53 trace normale d'un élément de H_{div} equation.2.53), est un espace de Hilbert.

2. Soit $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$.

(a) Montrer que

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \varphi \text{div}(v) \, dx = 0,$$

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, puis pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Soit $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$ (où γ est l'opérateur trace défini sur $H^1(\Omega)$). Montrer que

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot v \, dx + \int_{\Omega} u_1 \text{div}(v) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot v \, dx + \int_{\Omega} u_2 \text{div}(v) \, dx.$$

On rappelle que $H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Im}\gamma$ et que $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert avec la norme définie dans l'exercice 2.21 Espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ exo.2.21. On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (that is to say l'ensemble des applications linéaires continues de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans \mathbb{R}).

3. Soit $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$. Montrer que l'on peut définir un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, noté $T(v)$, en posant, pour $u \in H^{1/2}(\Omega)$,

$$\langle T(v), u \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla\bar{u} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \bar{u} \text{div}(v) \, dx, \quad (2.54)$$

avec $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(\bar{u}) = u$. (En particulier, le terme de droite de (2.54 trace normale d'un élément de H_{div} equation.2.54) est bien défini et ne dépend pas de \bar{u} si $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ et $\gamma(\bar{u}) = u$.)

On a ainsi défini une application T de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

4. Montrer que l'application T est linéaire continue de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

5. On suppose dans cette question que $v \in H^1(\Omega)^2$ (on a donc aussi $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$). On note $\gamma(v)$ la fonction obtenue sur $\partial\Omega$ en prenant la trace de chacune des composantes de v . (On a donc $\gamma(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)^2 \subset L^2(\partial\Omega)^2$.) On note $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω . Comme Ω est à frontière lipschitzienne, le vecteur $n(x)$ est défini p.p. en $x \in \partial\Omega$ (p.p. signifie ici, comme d'habitude, p.p. pour la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur $\partial\Omega$) et la fonction $x \mapsto n(x)$ définit un élément de $L^\infty(\partial\Omega)$. On obtient ainsi $\gamma(v) \cdot n \in L^2(\partial\Omega)$. Cette (classe de) fonction(s) $\gamma(v) \cdot n$ est appelée "trace normale de v sur $\partial\Omega$ ". Montrer que

$$\langle T(v), u \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u \gamma(v) \cdot n \, d\lambda(x). \quad (2.55)$$

N.B. Cette question explique pourquoi l'application $T(v)$ est souvent notée $v \cdot n$ même si $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$ (et non à $H^1(\Omega)^2$). On peut aussi montrer que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ceci permet de montrer que, lorsque $v \in H^1(\Omega)$, $\gamma(v) \cdot n$ est l'unique élément de $L^2(\partial\Omega)$ vérifiant (2.55) trace normale d'un élément de H_{div} (equation.2.55).

Exercice 2.24 (Pas de trace normale sur une partie du bord) On reprend ici les notations de l'exercice 2.22 trace normale d'un élément de H_{div} (exo.2.22). Soit maintenant I une partie du bord de Ω . Il semble naturel de poser

$$H^{1/2}(I) = \{u \text{ t.q. } u = \gamma(\bar{u}) \text{ p.p. sur } I \text{ avec } \bar{u} \in H^1(\Omega)\}. \quad (2.56)$$

(où p.p. signifie p.p. pour λ .) La norme sur $H^{1/2}(I)$ est alors

$$\|u\|_{H^{1/2}(I)} = \inf\{\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \gamma(\bar{u}) = u \text{ p.p. sur } I\}. \quad (2.57)$$

$H^{1/2}(I)$ est alors un espace de Hilbert et on note $H^{-1/2}(I)$ son dual. L'objectif de cet exercice est de remarquer qu'en général il n'existe pas d'opérateur T linéaire continu de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u \rangle_{H^{-1/2}(I), H^{1/2}(I)} = \int_I u v \cdot n d\lambda(x),$$

pour tout $u \in H^{1/2}(I)$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Autrement dit on ne peut pas prolonger continûment l'opérateur naturel $v \mapsto v \cdot n$ (bien défini si v est régulière) à l'espace $H_{\text{div}}(\Omega)$. Nous donnons dans cet exercice un exemple pour lequel ce prolongement est effectivement impossible.

Noter aussi que la définition de $H^{1/2}(I)$ (donnée par (2.56) Pas de trace normale sur une partie du bord (equation.2.56)) et de sa norme (donnée par (2.57) Pas de trace normale sur une partie du bord (equation.2.57)) dépend de Ω (et pas seulement de I). Cette dépendance est sans importance. Plus précisément, soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de \mathbb{R}^2 à frontières lipschitziennes. On suppose que I est une partie de $\partial\Omega_1$ et une partie de $\partial\Omega_2$. Par un argument de cartes locales, permettant de ramener l'étude des traces de $H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, à celles de $H^1(\mathbb{R}_+^2)$, on peut montrer que l'espace $H^{1/2}(I)$ ne dépend pas du fait que l'on considère I comme une partie de $\partial\Omega_1$ ou une partie de $\partial\Omega_2$. De plus, les deux normes obtenues alors pour l'espace $H^{1/2}(I)$ sont équivalentes.

Pour construire notre exemple, on prend $\Omega =]0, a[^2$, avec $a > 0$ t.q. $a\sqrt{2} < 1$, et $I =]0, a[\times \{0\}$. L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas d'opérateur T linéaire continu de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ t.q.

$$\langle T(v), u \rangle_{H^{-1/2}(I), H^{1/2}(I)} = \int_I u v \cdot n d\lambda(x), \text{ pour tout } u \in H^{1/2}(I) \text{ et } v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.58)$$

Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe T linéaire continu de $H_{\text{div}}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(I)$ vérifiant (2.58) Pas de trace normale sur une partie du bord (equation.2.58).

Soit $0 < \beta < 1/2$. Pour $x \in \Omega$, on pose ($|\cdot|$ désignant la norme euclidienne classique de \mathbb{R}^2)

$$u(x) = (-\ln(|x|))^\beta.$$

On a $u \in C^\infty(\Omega)$ et on sait que $u \in H^1(\Omega)$ (exercice 1.5 Non généralisation de l'exercice 1.3 Espace de Sobolev en 1d (exo.1.3 (exo.1.5)). La trace de u sur I est égale (p.p. pour λ) à la trace classique. On note x_1, x_2 les composantes de $x \in \mathbb{R}^2$. On prend maintenant $v = (v_1, v_2)$ avec

$$v_1 = -\frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

1. Montrer que $\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$ et donc que $v \in H_{\operatorname{div}}(\Omega)$.

On définit $v^{(n)}$, pour n t.q. $(a + 1/n)\sqrt{2} < 1$, par

$$v^{(n)}(x_1, x_2) = v(x_1 + \frac{1}{n}, x_2).$$

2. Montrer que $v^{(n)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $v^{(n)} \rightarrow v$ dans $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On note χ la fonction indentiquement égale à 1 sur $\partial\Omega$ (cette fonction est bien dans $H^{1/2}(I)$ car c'est la trace de la fonction qui vaut 1 sur tout Ω).

3. Comme $v^{(n)} \cdot n = -v_2^{(n)}$ sur I , montrer que

$$\langle T(v^{(n)}), \chi \rangle_{H^{-1/2}(I), H^{1/2}(I)} = \int_I \chi v^{(n)} \cdot n \, d\lambda(x) = \int_0^a \beta \frac{(-\ln(x_1 + \frac{1}{n}))^{\beta-1}}{x_1 + \frac{1}{n}} dx_1.$$

Montrer que le terme de gauche de cette égalité tend vers $\langle T(v), \chi \rangle_{H^{-1/2}(I), H^{1/2}(I)}$ (utiliser la continuité de T) et que le terme de droite tend vers $+\infty$ (car $\beta > 0$). En déduire la contradiction souhaitée.

4. Avec $v \cdot n$ pris au sens de l'exercice 2.22 trace normale d'un élément de H_{div} exo.2.22, montrer que

$$\langle v \cdot n, \chi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0,$$

et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} \chi v^{(n)} \cdot n \, d\lambda(x) = 0$.

2.7 Corrigés d'exercices

Corrigé 2.1 (Régularité en dimension 1)

$f \in L^2(]0, 1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned} \quad (2.59)$$

On suppose maintenant que $f \in C([0, 1], \mathbb{R}) (\subset L^2(]0, 1[))$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0, 1]$. Soit u la solution de (2.59) Corrigés d'exercices equation.2.59). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).

En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0, 1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Corrigé – Soit $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - x \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

On a donc $\psi \in C^1([0, 1])$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérivée faible de ψ est égale p.p. à sa dérivée classique (voir la Définition 1.2 Derivate by transposition theorem.1.2), that is to say

$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(s)ds \text{ pour presque tout } x \in]0, 1[.$$

On a donc $\psi \in L^2(\Omega)$ et $D\psi \in L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $\psi \in H^1(]0, 1[)$. Comme $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on a même $\psi \in H_0^1(\Omega)$ (voir la section 1.5 Théorèmes de traces section.1.5). On peut donc prendre $v = \psi$ dans (2.59 Corrigés d'exercices equation.2.59), on obtient

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 Du(t)dt = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

Comme F est de classe C^1 et $F' = f$, on a (en utilisant aussi $\psi(0) = \psi(1) = 0$)

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx = \int_0^1 F'(x)\psi(x)dx = - \int_0^1 F(x)\psi'(x)dx = - \int_0^1 F(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 F(x)dx \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

En posant $c = \int_0^1 Du(t)dt + \int_0^1 F(t)dt$, on a donc

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = c \int_0^1 \varphi(t)dt \text{ pour tout } \varphi \in C([0, 1]).$$

Comme $Du + F - c \in L^2(]0, 1[)$ et que $C([0, 1])$ est dense dans $L^2(]0, 1[)$, on en déduit

$$Du = -F + c \text{ p.p. dans }]0, 1[.$$

On pose maintenant

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)dt \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Comme w est de classe C^1 (la fonction w est même de classe C^2) la dérivée par transposition de w est une dérivée faible et est égale p.p. à la dérivée classique de w . On a donc $Dw = w' = -F + c$ p.p.. On a donc $Dw = Du$ p.p. et on en déduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante (voir l'exercice 1.2A fonction with null derivative is constant exo.1.2). En identifiant la (classe de) fonction(s) u à son représentant continu, on a donc u de classe C^2 , $u' = -F + c$ et $u'' = -F' = f$. On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0, 1[)$ et donc le représentant continu de u vérifie $u(0) = u(1) = 0$).

Corrigé 2.2 (Décomposition spectrale en dimension 1)

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0, 1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.59 Corrigés d'exercices equation.2.59).

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.59 Corrigés d'exercices equation.2.59), noter que $H_0^1(]0, 1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E .

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^2(]0, 1[, \mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0, 1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.

Corrigé – On a vu à la section 2.2.2 Le Laplaciens subsection.2.2.2 que $N(T) = \{f \in E, Tf = 0 \text{ p.p.}\} = \{0\}$, que les valeurs propres de T sont toutes strictement positives et qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$ formée de fonctions propres de T . On cherche ici une telle base hilbertienne. Pour cela, on trouve tout d'abord les valeurs propres de T .

On rappelle que, pour $f \in E$, On a $Tf \in H_0^1(]0, 1[$ et, en posant $u = Tf$,

$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Soit λ une valeur propre de T . On sait déjà que $\lambda > 0$. Il existe $f \in E$, $f \neq 0$ t.q. $Tf = \lambda f$. En posant $u = Tf$, on a donc $u \in H_0^1(]0, 1[)$, $u \neq 0$ et $f = u/\lambda$, ce qui donne

$$\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 u(t)v(t)dt \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Comme $u \in H_0^1(]0, 1[)$, on a u continu sur $[0, 1]$ (plus précisément, u admet un représentant continu et on identifie u à ce représentant) et $u(0) = u(1) = 0$. L'exercice 2.1 Régularité en dimension 1 exo.2.1 montre alors que u est de classe C^2 et que

$$-\lambda u''(x) = u(x) \text{ pour tout } x \in]0, 1[. \quad (2.60)$$

2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.

Corrigé – Pour chercher les valeurs propres, la question précédente nous a ramené à la résolution d'une équation différentielle linéaire classique. Il est bien connu (c'est, par exemple, une conséquence du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz) que l'ensemble de solutions de (2.60) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $x \mapsto \sin(x/\sqrt{\lambda})$ et $x \mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$.

Si λ est valeur propre de T , il existe donc (par la question précédente) $u \neq 0$ t.q. $Tu = \lambda u$, u de classe C^2 , u continu sur $[0, 1]$, $u(0) = u(1) = 0$ et u solution de (2.60). Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ t.q.

$$u(x) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Comme $u(0) = 0$, on a nécessairement $B = 0$. Puis, comme $u \neq 0$, on a nécessairement $A \neq 0$. Enfin, comme $u(1) = 0$, on a nécessairement $\sin(1/\sqrt{\lambda}) = 0$, ce qui donne l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $1/\sqrt{\lambda} = k\pi$. Comme $\lambda > 0$, on a donc $k \in \mathbb{N}^$, $1/\lambda = k^2\pi^2$ et $u(x) = A \sin(k\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ avec $A \neq 0$ (la fonction u vérifie bien $Tu = \lambda u$, ce qu'on peut vérifier facilement en remarquant qu'il suffit d'écrire la formulation faible en prenant des fonctions v dans $C_c^\infty(]0, 1[)$, car $C_c^\infty(]0, 1[)$ est dense dans $H_0^1(]0, 1[)$).*

On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de T , $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^\}$. La section 2.2 Analyse spectrale section.2.2 donne alors que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathcal{VP}(T) \setminus \{0\}$. Enfin comme T n'est pas surjectif (ce qui est toujours le cas pour un opérateur linéaire compact en dimension infinie), on a $0 \in \sigma(T)$ et donc $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.*

3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier. . .)

Corrigé – La question précédente nous a donné les valeurs propres de T mais aussi les sous espaces propres correspondants. Cette question est alors une application immédiate de la section 2.2.2 Le Laplacien subsection.2.2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^$, on pose $e_n(x) = \sqrt{2} \sin(p\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. La famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$. On a donc, pour tout $f \in L^2(]0, 1[)$,*

$$\|f - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

that is to say $f = \sum_{p=1}^\infty c_p \sin(p\pi \cdot)$, la convergence de la série étant à prendre dans l'espace $L^2(]0, 1[)$.

Cette série n'est pas la série de Fourier de f . En effet, la série de Fourier de f est obtenue avec les fonctions $\sin(2p\pi \cdot)$ et $\cos(2p\pi \cdot)$ ($p \in \mathbb{Z}$). La décomposition de f en série de Fourier correspond aussi à l'opérateur $u \mapsto u''$, mais avec des conditions périodiques ($u(0) = u(1)$ et $u'(0) = u'(1)$) au lieu des conditions de Dirichlet ($u(0) = u(1) = 0$).

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$u \in H_0^1(]0, 1[), \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (2.61)$$

Corrigé – Soit $f \in E$. La fonction u est solution du problème (2.61) si et seulement si $T(f - \mu u) = u$, that is to say

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \frac{T(f)}{\mu}. \quad (2.62)$$

D'après l'alternative de Fredholm, ce problème à une solution si et seulement si f est orthogonal (dans E) au sous espace propre de T associé à $(-1/\mu)$.

Ceci peut se redémontrer à partir des questions précédentes. En effet, on pose $b_n = (f/e_n)_E$ (la famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ étant la base hilbertienne de E donnée à la question 3), de sorte que $f = \sum_{p=1}^{\infty} b_p e_p$ (cette série étant convergente dans E). On a alors aussi

$$T(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2 \pi^2} e_n,$$

Cette série étant aussi convergente dans E .

Soit $u \in E$. On pose $a_n = (u/e_n)_E$, on a ainsi

$$T(u) + \frac{1}{\mu}u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\mu + n^2 \pi^2}{\mu n^2 \pi^2} e_n,$$

Cette série étant convergente dans E . La fonction u est donc solution de (2.62) si et seulement si

$$a_n(\mu + n^2 \pi^2) = \mu b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $\mu \neq -n^2 \pi^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une et une seule solution à (2.62).

Si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\mu = -p^2 \pi^2$, l'équation (2.62) a une solution si et seulement si $b_p = 0$, that is to say si et seulement si f est orthogonal (dans E) à e_p . Ce qui est équivalent à dire que f est orthogonal au sous espace propre de T associé à la valeur propre $(-1/\mu)$.

Devoir 1, exercice 2.4**Corrigé 2.3 (Deux problèmes elliptiques emboîtés)**

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, et M et N deux matrices de taille $d \times d$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } N(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique u t.q.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} N(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} (M(x) + N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.63)$$

avec w solution de

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.64)$$

pour les questions suivantes, on note $T(f)$ cette unique solution de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) avec w solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64).

Corrigé – Le théorème 2.6 Existence et unicité de la solution de (2.4) Formulation faible equation.2.4) theorem.2.6 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose alors

$$S(v) = \int_{\Omega} (M(x) + N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

L'application S est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} , c'est donc un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.9 Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63). Ce qui est bien le résultat demandé.

2. Montrer que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (that is to say que T est linéaire, continue et transforme les parties bornées de $L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(\Omega)$).

Corrigé – La solution w de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64) dépend linéairement de f . Puis, la solution u de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) dépend linéairement de w . On en déduit que u dépend linéairement de f et donc que l'application T est linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et donc aussi linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Si w est la solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64), on a, en prenant $v = w$ dans (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64),

$$\alpha\|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (Lemme 2.5 Inégalité de Poincaré theorem.2.5), il existe C_Ω , ne dépendant que Ω , tel que $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc, avec $C_1 = C_\Omega/\alpha$,

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.65)$$

Comme M et N sont à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de M et N) tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|(M + N)\xi| \leq \beta|\xi| \text{ p.p.}$$

On a donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et S définie dans la première question,

$$|S(v)| \leq \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Si $u = T(f)$, on en déduit, en prenant $v = u$ dans (2.63Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63),

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \beta \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc, avec (2.65Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.65) et $C_2 = \beta C_1 / \alpha$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci prouve que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (théorème 1.25Rellichtheorem.1.25), on en déduit que T est une application linéaire compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $M = \lambda N$. Montrer qu'il existe une matrice A , ne dépendant que de M et λ , tel que, si $u = T(f)$,

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.66)$$

Donner l'expression de A en fonction de M et λ .

Corrigé – On commence par remarquer que les hypothèses sur M et N imposent $\lambda > 0$. Puis, si $u = T(f)$, (2.63Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) et (2.64Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64) donnent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} (\lambda + 1) M(x) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = (\lambda + 1) \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Ce qui donne bien que u est solution de (2.66Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.66) avec $A = M/(\lambda + 1)$.

4. On suppose dans cette question que $d = 2$ et $1 < p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.63Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) avec w solution de (2.64Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.63Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) avec w solution de (2.64Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64)) est compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$

Corrigé – Soit $f \in L^p(\Omega)$. On note p' l'exposant conjugué de p , that is to say $p' = p/(p - 1)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.28Sobolev embedding theorem.1.28) donne l'existence de C_p (ne dépendant en fait que de p) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^{p'}(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_p \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On peut alors reprendre (en les adaptant légèrement) les démonstrations des deux premières questions.

Le théorème 2.9Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.64Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64) et on a $\alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.63Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C_p}{\alpha^2} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$ (voir la remarque 1.29Sobolev embedding theorem.1.29), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une application linéaire compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$.

5. On suppose dans cette question que $d = 3$ et $p = 6/5$. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique u solution de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) avec w solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64).

Montrer que l'application qui à f associe u (solution de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) avec w solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64)) est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et compacte de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

Corrigé – La démonstration est ici très voisine de la précédente. On a ici $p = 6/5$ et donc le conjugué de p est $p' = 6 = 2^*$. Soit $f \in L^{6/5}(\Omega)$. Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28) donne l'existence de C (ne dépendant de rien) tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v \in L^6(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on en déduit que l'application $v \mapsto \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ est un élément $H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \leq C \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Le théorème 2.9 Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9 donne l'existence et l'unicité de w solution de (2.64) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.64) et on a $\alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}$. Puis, le théorème 2.9 Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9 donne alors l'existence et l'unicité de u solution de (2.63) Deux problèmes elliptiques emboîtés equation.2.63) et, avec β défini à la question 2, on obtient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta C}{\alpha^2} \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)}.$$

Ceci donne que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puis, comme l'application $u \mapsto u$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ (théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28) et est compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6 = 2^*$ (voir la remarque 1.29 Sobolev embedding theorem.1.29), on en déduit que l'application $f \mapsto u$ est une application linéaire continue de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et linéaire compacte de $L^{6/5}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < 6$.

Corrigé 2.4 (Problème de Neumann)

Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x)dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L^1_{loc} dont les dérivées (au sens des dérivées par transposition) sont nulles est nécessairement constante, that is to say qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p..

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H , la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.

[On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C , ne dépendant que Ω , t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

Corrigé – Pour $u \in H^1(\Omega)$, on pose $S(u) = \int_{\Omega} u(x)dx$. L'application S est bien définie sur $H^1(\Omega)$ (car $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$). Elle est linéaire. Enfin, elle est continue car

$$S(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}},$$

où $\text{mes}(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue (N -dimensionnelle) de Ω . Comme $H = \text{Ker}(S)$, on en déduit que H est s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$.

Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$. On a donc $\|u\|_m \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. Pour montrer que $\|\cdot\|_m$ est équivalente dans H à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de Ω) t.q.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m \text{ pour tout } u \in H. \quad (2.67)$$

(On aura alors $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C^2 + 1)\|u\|_m^2$ pour tout $u \in H$.)

Pour montrer (2.67) corrigés d'exercices equation.2.67), on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite déléments de H , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q.

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|u_n\|_m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En remplaçant u_n par $\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$, on peut supposer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On a alors aussi $\|u_n\|_m \leq 1/n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Par les théorèmes de compacité vu au chapitre 1 Sobolev spaces chapter.1 (section 1.6 Théorèmes de compacité section.1.6), on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut supposer (après extraction d'une sous suite) qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On remarque aussi que les dérivées (par transposition) de u_n convergent vers les dérivées de u dans \mathcal{D}' . Or, de $\|u_n\|_m \leq 1/n$ on déduit $\nabla u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)^N$. Comme la convergence L^2 entraîne la convergence dans \mathcal{D}' , on a donc $\nabla u = 0$. Ceci montre que u est constante sur Ω . Comme $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ et que $u_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $u \in H$ et donc $\int_{\Omega} u(x)dx = 0$. On en déduit que $u = 0$ p.p., ce qui est impossible car $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a \int_{\Omega} u(x)dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x)dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (2.68)$$

[On pourra considérer $T|_H$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

Corrigé – Pour $v = (v_1, \dots, v_N)^t \in L^2(\Omega)^N$, on pose $\|v\|_{L^2(\Omega)^N} = \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx$, de sorte que $L^2(\Omega)^N$ muni de cette norme est un espace de Hilbert. Pour $u \in H$, on pose $J(u) = \nabla u = (D_1 u, \dots, D_N u)^t$. L'application J est alors une isométrie de H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) dans une partie de $L^2(\Omega)^N$, notée $\text{Im}(J)$.

Soit $v \in \text{Im}(J)$, il existe un unique $u \in H$ t.q. $v = J(u)$. On pose $S(v) = \langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}$. Comme J est une isométrie et que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente dans H à la norme $\|\cdot\|_m$, l'application S est linéaire continue de $\text{Im}(J)$, s.e.v. de $L^2(\Omega)^N$, dans \mathbb{R} . Par le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger S en \tilde{S} , élément du

dual topologique de $L^2(\Omega)^N$. Par le théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert, il existe alors $F \in L^2(\Omega)^N$ t.q.

$$\tilde{S}(v) = \int_{\Omega} F(x) \cdot v(x) dx.$$

On a donc, pour tout $u \in H$,

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$

On pose maintenant

$$a = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \langle T, 1_{\Omega} \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)},$$

(où 1_{Ω} désigne la fonction constante égale à 1 dans Ω).

Pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u = u - m + m$ (ou, plus rigoureusement, $u = u - m1_{\Omega} + m1_{\Omega}$ p.p.) avec

$$m = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Comme $u - m \in H$ et $\nabla(u - m) = \nabla u$ p.p. on a $\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x) dx$ et donc

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \langle T, u - m \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + m \langle T, 1_{\Omega} \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx = a \int_{\Omega} v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.69)$$

3. (Existence et unicité.)

(a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.69) n'a pas de solution.

Corrigé – On suppose que u est solution de (2.69). En prenant $v = 1_{\Omega}$ dans (2.69), on a alors

$$0 = a \text{mes}(\Omega) + 0.$$

Ce qui prouve que $a = 0$.

(b) Si $a = 0$, montrer que (2.69) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H .

Corrigé – On applique le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) dans l'espace de Hilbert H (muni de la norme $\|\cdot\|_m$) avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx,$$

et

$$T(v) = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

La continuité de a vient du fait que $a_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega)$ pour tout i, j . La coercivité de a vient de l'existence de $\alpha > 0$ donnée dans les hypothèses sur A . Enfin, la continuité de T vient du fait que $F \in (L^2(\Omega))^N$.

On obtient ainsi un unique $u \in H$ t.q. (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69) soit vrai pour tout $v \in H$. Comme (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69) est aussi vrai si v est une fonction constante, on obtient aussi l'existence et l'unicité de $u \in H$ t.q. (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69) soit vrai pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

- (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$, $F \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69) est aussi dans $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, montrer que $-\operatorname{div}(A\nabla u) = -\operatorname{div}F$, dans Ω , et que $A\nabla u \cdot \mathbf{n} = F \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où \mathbf{n} est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω .

Corrigé – On prend tout d'abord $v \in C_c^\infty(\Omega)$ dans (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69) (avec $a = 0$). La régularité de A, F, u et v nous permet d'intégrer par parties (la régularité de Ω ne sert à rien pour cette étape). On obtient

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + \operatorname{div}(F(x)))v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

On en déduit que $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + \operatorname{div}(F(x)) = 0$ p.p. (par le lemme fondamental 1.1Almost everywhere equality in L^1 theorem.1.1) puis, par continuité de la fonction $-\operatorname{div}(A\nabla u) + \operatorname{div}(F)$, que $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + \operatorname{div}(F(x)) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On prend maintenant des fonctions $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ dans (2.69Corrigés d'exercicesequation.2.69). On peut ici aussi intégrer par parties (on utilise ici la régularité de Ω). On obtient

$$\int_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u(x) - F(x)) \cdot \mathbf{n}(x)v(x)d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } v \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω et $d\gamma(x)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure $(N-1)$ -dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Par une technique de "cartes locales", on peut se ramener au cas du lemme fondamental (lemme 1.1Almost everywhere equality in L^1 theorem.1.1) pour en déduire que $(A\nabla u - F) \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ puis partout sur $\partial\Omega$. Mais, il est plus rapide de voir qu'il est possible de choisir v t.q. $v = (A\nabla u - F) \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$. On obtient ainsi directement $(A\nabla u - F) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Corrigé 2.5 (Décomposition de Hodge)

Soient Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.

Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_{\Omega} g(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega =]0, 1]^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où \mathbf{n} est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Corrigé – L'exercice 2.5Problème de Neumannexo.2.5 (corrigé 2.4Problème de Neumanncor.2.4) donne l'existence de $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

On peut aussi ajouter la condition $\int_{\Omega} u(x)dx = 0$ et on a alors existence et unicité de u (corrigé 2.4Problème de Neumanncor.2.4).

On pose alors $g = f - \nabla u$. Les fonctions u et g vérifient les conditions demandées.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega =]0, 1]^N$. On a

$$\int_{\Omega} g(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H^1(\Omega).$$

On raisonne comme pour la fin du corrigé 2.4 Problème de Neumann cor.2.4. En prenant $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le lemme fondamental (lemme 1.1 Almost everywhere equality in L^1 theorem.1.1) nous permet de montrer que $\operatorname{div}(g) = 0$ partout dans Ω . Puis, en prenant $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, une intégration par parties (plutôt plus facile que dans le corrigé 2.4 Problème de Neumann cor.2.4) donne

$$\int_{\partial\Omega} g(x) \cdot n(x) \varphi(x) d\gamma(x) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

De cette égalité, on déduit que $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.

Ceci peut se démontrer si $N = 2$ de la manière suivante : $d\gamma(x) = dx_1$ ou dx_2 , selon les parties de $\partial\Omega$ (avec $x = (x_1, x_2)^t$). Avec $g = (g_1, g_2)^t$, on en déduit que $g_1(x) = 0$ partout sur $\{0\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1]$ et $g_2(x) = 0$ partout sur $[0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\}$. (Ce qui donne bien $g \cdot n = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.)

La généralisation au cas $N \geq 1$ ne pose pas de difficulté.

Corrigé 2.6 (problème de Stokes, vitesse et pression)

Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \dots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, that is to say à trouver $u = (u_1, \dots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Noter que la première équation de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70) est vectorielle.

On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} u &= (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad p \in L^2(\Omega), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int_{\Omega} p(x) \operatorname{div} v(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \\ &\text{pour tout } v = (v_1, \dots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \quad (2.71)$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70) est solution de (2.71 Corrigés d'exercices equation.2.71).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70), u est alors solution de

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v = (v_1, \dots, v_N)^t \in H. \quad (2.72)$$

Corrigé – Soit (u, p) est une solution classique de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70). On remarque tout d'abord que $u \in H$. Puis, pour $v \in H$, on multiplie la première équation de (2.70 Corrigés d'exercices equation.2.70) par v et on intègre sur Ω . Les fonctions u et v sont suffisamment régulières pour intégrer par parties et obtient ainsi l'équation (2.72 Corrigés d'exercices equation.2.72). Ceci montre que u est alors solution de (2.72 Corrigés d'exercices equation.2.72).

On montre dans cette première partie que (2.72 Corrigés d'exercices equation.2.72) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.71 Corrigés d'exercices equation.2.71), u est alors l'unique solution de (2.72 Corrigés d'exercices equation.2.72).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^N$.

Corrigé – Pour $u \in H_0^1(\Omega)^N$, on pose $d(u) = \operatorname{div}(u)$. L'application d est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)^N$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $H = \operatorname{Ker} d$, on en déduit que H est un s.e.v. fermé de $H_0^1(\Omega)^N$.

2. Montrer que (2.72) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]

Corrigé – Il suffit ici d'appliquer le lemme de Lax-Milgram, lemme 2.4 (ou le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert) en remarquant que H est un espace de Hilbert (H est muni de la norme naturelle de $H_0^1(\Omega)^N$), avec a et T définis ainsi :

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx,$$

et

$$T(v) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx.$$

3. Soit (u, p) une solution de (2.71). Montrer que u est l'unique solution de (2.72).

Corrigé – Pour $v \in H$, on a $\operatorname{div}(v) = 0$ p.p. dans Ω et donc $\int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) dx = 0$. On en déduit que u est solution de (2.72). Par la question précédente, la fonction (vectorielle) u est donc l'unique solution de (2.72).

Soit u la solution de (2.72). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.71).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F . On note A^* l'opérateur adjoint de A . L'opérateur A^* est un opérateur linéaire continu de F dans E . Pour tout $g \in F$, A^*g est l'unique élément de E défini par

$$(A^*g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de A^*g est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.

(On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)

Corrigé – Soit $u \in \operatorname{Ker} A$ (on a donc $Au = 0$). Pour $v \in \operatorname{Im} A^*$, il existe $g \in F$ t.q. $v = A^*g$, on a donc

$$(v/u)_E = (A^*g/u)_E = (g/Au)_F = 0.$$

Ce qui montre que $u \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. On a donc $\operatorname{Ker} A \subset (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.

Réciproquement, soit $u \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. On a alors, en posant $f = Au$,

$$(Au/Au)_F = (f/Au)_F = (A^*f/u)_E = 0,$$

car $A^*f \in \operatorname{Im} A^*$. Donc, $Au = 0$, that is to say $u \in \operatorname{Ker} A$. Ceci donne $(\operatorname{Im} A^*)^\perp \subset \operatorname{Ker} A$.

Finalement, on a bien montré que $(\operatorname{Im} A^*)^\perp = \operatorname{Ker} A$.

2. Montrer que $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^*}$.

Corrigé – Si F est un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H , on a toujours $H = F \oplus F^\perp$. D'autre part, si $G \subset H$, on a $G^\perp = \overline{G}^\perp$.

Si F est un s.e.v. d'un espace de Hilbert H , on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$

Ceci permet de prouver que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

On applique ici ce résultat avec $F = \text{Im}A^*$, on obtient (avec la question précédente)

$$\overline{\text{Im}A^*} = ((\text{Im}A^*)^\perp)^\perp = (\text{Ker}A)^\perp.$$

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.32 Soient Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω .

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \text{div} u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F .

1. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^*p_n \rightarrow v$ dans E quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω .

(a) Montrer que $A^*p_n = A^*q_n$.

Corrigé – Soit $v \in E$. On a

$$(A^*p_n/v)_E = (p_n/Av)_F = \int_\Omega p_n \text{div}(v) dx,$$

et

$$(A^*q_n/v)_E = (q_n/Av)_F = \int_\Omega q_n \text{div}(v) dx = \int_\Omega p_n \text{div}(v) dx - a_n \int_\Omega \text{div}(v) dx.$$

Comme $v \in H_0^1(\Omega)^N$, on a (en intégrant par parties) $\int_\Omega \text{div}(v) dx = 0$ et donc

$$(A^*p_n/v)_E = (A^*q_n/v)_E \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Ceci montre bien que $A^*p_n = A^*q_n$.

(b) Montrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans F . [Utiliser le lemme 2.31 Corrigés d'exercice theorem.2.31.]

Corrigé – Par le lemme 2.31 Corrigés d'exercice theorem.2.31, il existe $v_n \in H_0^1(\Omega)^N$ t.q. $\text{div}(v_n) = q_n$ p.p. dans Ω et $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q_n\|_{L^2(\Omega)}$. On obtient alors

$$(A^*q_n/v_n)_E = \int_\Omega q_n \text{div}(v_n) dx = \int_\Omega q_n^2 dx = \|q_n\|_F^2.$$

La question précédente donne $A^*p_n = A^*q_n$. On a donc

$$\|q_n\|_F^2 = (A^*p_n/v_n)_E \leq \|A^*p_n\|_E \|v_n\|_E \leq C\|A^*p_n\|_E \|q_n\|_F,$$

et donc

$$\|q_n\|_F \leq C\|A^*p_n\|_E.$$

L'hypothèse de convergence de A^*p_n donne que la suite $(A^*p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (dans E). On en déduit que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans F .

(c) Montrer que $v \in \text{Im}A^*$.

Corrigé – Comme la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans (l'espace de Hilbert) F , on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que cette suite converge faiblement dans F . Il existe donc $q \in F$ t.q. $q_n \rightarrow q$ faiblement dans F , quand $n \rightarrow +\infty$. On va montrer que $v = A^*q$.

Soit $w \in E$, On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n/Aw)_F = (q/Aw)_F$. Mais,

$$(q_n/Aw)_F = (A^*q_n/w)_E = (A^*p_n/w)_E.$$

Comme $A^*p_n \rightarrow v$ dans E , on a donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n/Aw)_F = (v/w)_E$. On obtient donc

$$(q/Aw)_F = (v/w)_E \text{ pour tout } w \in E.$$

Ceci donne $(A^*q/w)_E = (v/w)_E$ pour tout $w \in E$, et donc $v = A^*q$. On a bien montré que $v \in \text{Im}A^*$.

2. Montrer que $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}A^*$ et que $\text{Ker}A = H$.

Corrigé – La question précédente montre que $\text{Im}A^*$ est fermé (dans E). Avec la partie II, on a donc $(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}(A^*)$. On a déjà vu que $\text{Ker}A = H$. On a donc $H^\perp = \text{Im}(A^*)$.

3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx.$$

On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.72) d'exercice equation.2.72).

(a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \text{Im}A^*$.

Corrigé – On a $(u/v)_E = \int_{\Omega} f v dx = (T_f/v)_E$ pour tout $v \in H$. Ceci signifie bien que $u - T_f \in H^\perp$ et donc que $u - T_f \in \text{Im}A^*$.

(b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.71) d'exercice equation.2.71).

Corrigé – Comme $u - T_f \in \text{Im}A^*$, il existe $p \in F = L^2(\Omega)$ t.q. $u - T_f = A^*p$. On a donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,

$$(u/v)_E - \int_{\Omega} f v dx = (u - T_f/v)_E = (A^*p/v)_E = (p/Av)_F = \int_{\Omega} p \text{div}(v) dx.$$

Ce qui signifie bien que (u, p) est solution de (2.71) d'exercice equation.2.71).

4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.71) d'exercice equation.2.71). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.72) d'exercice equation.2.72)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..

Corrigé – On a déjà montré à la question 3 de la partie I que $u_1 = u_2 = u$ où u est l'unique solution de (2.72) d'exercice equation.2.72).

On obtient alors que $\int_{\Omega} p_1 \text{div}(v) dx = \int_{\Omega} p_2 \text{div}(v) dx$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. En prenant $v = (v_1, \dots, v_N)^t$ avec $v_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ et $v_i = 0$ pour $i \geq 2$, on en déduit que $D_1(p_1 - p_2) = 0$ (dans \mathcal{D}^*). De manière analogue on a $D_i(p_1 - p_2) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Ceci permet d'affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p. (voir l'exercice 1.4 Généralisation de l'exercice 1.2A function with null derivative is constant exo.1.2 exo.1.4).

Corrigé 2.7 (Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.73)$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (2.73) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.73) avec f_n au lieu de f . On suppose que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Corrigé – En prenant $v = u_n$ dans (2.73) (avec f_n et u_n au lieu de f et u), on obtient

$$\alpha \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où C_{Ω} est donné par l'inégalité de Poincaré. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{\Omega}}{\alpha} \sup_{p \in \mathbb{N}} (\|f_p\|_{L^2(\Omega)}) = M < +\infty,$$

la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(\Omega)$.

2. Montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$).

Corrigé – Si $u_n \not\rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle \psi, u_n - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (2.74)$$

Après une nouvelle extraction éventuelle, on peut supposer que $u_n \rightarrow \bar{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$\int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f_n v dx,$$

et donc, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{\Omega} A \nabla \bar{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

On en déduit que $\bar{u} = u$, ce qui est en contradiction avec (2.74).

On a donc bien montré que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et, par le théorème de Rellich, que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$.

3. Montrer que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$

[Utiliser le fait que $\int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x)u_n(x) dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]

Corrigé –

$$\int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx = \int_{\Omega} f_n u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u dx,$$

car $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \rightarrow f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

4. Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_{\Omega} A(x) \nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla(u_n - u)(x) dx$.]

Corrigé –

$$\int_{\Omega} A(\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx - \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla u - \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u_n + \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u dx.$$

Les quatre terme de droite de cette égalité tendent vers $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. Le terme de gauche (qui est positif) tend donc vers 0. Ceci donne $\alpha \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et donc, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Remarque sur la topologie faible : L'application $f \mapsto u$ (où u est solution de (2.73) corrigés d'exercices equation.2.73)) est donc séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ -faible dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), that is to say qu'elle transforme les suites faiblement convergentes de $L^2(\Omega)$ en suites (fortement) convergentes de $H_0^1(\Omega)$. Elle est donc aussi séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ -faible dans $L^2(\Omega)$ (fort). Après avoir définie la topologie faible de $L^2(\Omega)$ (ce que nous ne faisons dans ce polycopié), on peut toutefois remarquer que cette application n'est pas continue de $L^2(\Omega)$ -faible (that is to say $L^2(\Omega)$ muni de la topologie faible) dans $L^2(\Omega)$ (that is to say $L^2(\Omega)$ muni de la topologie associée à sa norme).

Corrigé 2.8 (Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17)

Soit φ une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.

$$0 \leq x < y \Rightarrow \varphi(y) \leq C \frac{\varphi(x)^\beta}{y-x}. \quad (2.75)$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ t.q. $\varphi(a_k) \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe a_0 t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$ puis, par récurrence, définir a_{k+1} par $\frac{C}{a_{k+1} - a_k} \frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

Corrigé – En prenant $x = 0$ dans (2.75) corrigés d'exercices equation.2.75), on obtient $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = 0$. Il existe donc a_0 t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$.

On définit maintenant, par récurrence, une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\frac{C}{a_{k+1} - a_k} \left(\frac{1}{2^k} \right)^\beta = \frac{1}{2^{k+1}}$$

on a alors, par récurrence, $\varphi(a_k) \leq \frac{1}{2^k}$.

En effet pour $k = 0$ on a bien $\varphi(a_0) \leq 1$.

Puis, pour $k \geq 0$, si $\varphi(a_k) \leq \frac{1}{2^k}$, on a

$$\varphi(a_{k+1}) \leq \frac{C}{a_{k+1} - a_k} \varphi(a_k)^\beta \leq \frac{C}{a_{k+1} - a_k} \frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On montre maintenant que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k < \infty$. Pour cela, on remarque que

$$a_{k+1} - a_k = 2C \frac{2^k}{2^{k\beta}} = 2C \frac{1}{2^{k(\beta-1)}} = 2Cb^k \text{ avec } b = \frac{1}{2^{\beta-1}}.$$

On a donc

$$a_k = a_0 + \sum_{p=0}^{k-1} 2Cb^p \leq a_0 + 2C \sum_{p=0}^{\infty} b^p = a_0 + \frac{2C}{1-b},$$

car $b = \frac{1}{2^{\beta-1}} < 1$ car $\beta > 1$. On prend donc $a = a_0 + \frac{2C}{1-b}$ et on a, comme φ est décroissante,

$$0 \leq \varphi(a) \leq \varphi(a_k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

et donc

$$0 \leq \varphi(a) \leq \frac{1}{2^k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Ce qui donne $\varphi(a) = 0$.

Corrigé 2.9 (Solutions bornées d'un problème elliptique)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si B est une partie borélienne de \mathbb{R}^N , on note $\text{mes}(B)$ le mesure de Lebesgue N -dimensionnelle de B (that is to say la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.76)$$

Corrigé – Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx \text{ et } T(v) = \int_{\Omega} F \cdot \nabla v dx.$$

Comme cela a été vu dans ce chapitre, la forme a est une forme bilinéaire continue coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Puis, pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$T(v) \leq \int_{\Omega} |F \cdot \nabla v| dx \leq \| \|F\| \|_{L^2(\Omega)} \| \|\nabla v\| \|_{L^2(\Omega)} = \| \|F\| \|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $T \in (H_0^1(\Omega))'$ et donc qu'il existe un et un seul u solution de (2.76) Corrigés d'exercices equation.2.76).

Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ si $p \geq 2$) et on note u l'unique solution de (2.76) Corrigés d'exercices equation.2.76).

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction S_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$\begin{cases} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \leq s \leq k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{cases}$$

On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k} \nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$ (voir la remarque 2.22 Positivité de la solution faible theorem.2.22).

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \| \|\nabla S_k(u)\| \|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \left(\int_{A_k} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \| \|F\| \|_{L^p(\Omega)}.$$

[On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (2.76) Corrigés d'exercices equation.2.76) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

Corrigé – En prenant $v = S_k(u)$ dans (2.76) on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla(S_k(u))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \alpha \int_{A_k} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{A_k} F \cdot \nabla u \, dx \\ &\leq \|F\|_{L^2(A_k)} \|\nabla(S_k(u))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|F\|_{L^p(\Omega)} (\text{mes}(A_k))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|\nabla(S_k(u))\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

car $\int_{A_k} |F|^2 \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |F|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \text{mes}(A_k)^{1 - \frac{2}{p}}$. On obtient ainsi

$$\alpha \|\nabla(S_k(u))\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F\|_{L^p(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

3. On pose $1^* = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe C_1 ne dépendant que de N t.q.

$$\|w\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1 \|\nabla w\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k) \text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{A_h} |S_k(u(x))|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe C_2 ne dépendant que de C_1, α, F et p t.q.

$$(h-k) \text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Corrigé – Pour $h > k$, on a $|S_k(u)| \geq (h-k)$ sur A_h . On a donc

$$\begin{aligned} (h-k) \text{mes}(A_h)^{\frac{1}{1^*}} &\leq \left(\int_{\Omega} |S_k(u)|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \\ &\leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \int_{A_k} |\nabla S_k(u)| \, dx \leq C_1 \|\nabla S_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Avec la question 2, on obtient

$$(h-k) \text{mes}(A_h)^{\frac{1}{1^*}} \leq \frac{C_1}{\alpha} \|F\|_{L^p(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{1 - \frac{1}{p}},$$

et donc, avec $C_2 = \frac{C_1}{\alpha} \|F\|_{L^p(\Omega)}$,

$$(h-k) \text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ (that is to say qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 2.16 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 exo.2.16.]

Corrigé – Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$. On a alors, pour $h \geq k \geq 0$,

$$(h-k)\varphi(h) \leq C_2 \varphi(k)^{\frac{N}{N-1} - \frac{p-1}{p}}.$$

On pose $\beta = \frac{N}{N-1} - \frac{p-1}{p}$.

On remarque que $\beta > 1$ car $p > N$ (en effet, on a $\frac{N}{N-1} \frac{p-1}{p} > 1 \Leftrightarrow Np - N > Np - p$).

On peut alors appliquer l'exercice 2.16 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 exo.2.16, il donne l'existence de $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$ et donc $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a$.

5. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω , α et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \|F\|_{L^p(\Omega)}.$$

Corrigé – On suppose tout d'abord que $\|F\|_{L^p(\Omega)} = 1$, ce qui donne, avec les notations des questions précédentes, $C_2 = \frac{C_1}{\alpha}$.

On reprend alors le corrigé de l'exercice 2.16 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 exo.2.16 (that is to say le corrigé 2.8 Exercice liminaire à l'exercice 2.17 Solutions bornées d'un problème elliptique exo.2.17 cor.2.8). Le choix de a_0 est t.q. $\varphi(a_0) \leq 1$. Comme

$$\varphi(0) \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{N-1}{N}}, \beta \frac{N-1}{N} = \frac{p-1}{p} \text{ et } C_2 = C_1/\alpha,$$

il suffit donc de prendre a_0 t.q.

$$\frac{C_1 \text{mes}(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha a_0} \leq 1.$$

On peut donc choisir $a_0 = \frac{C_1 \text{mes}(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha}$. On a alors $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a$ avec

$$a = a_0 + \frac{2C_2}{1-b} = a_0 + \frac{C_1}{\alpha} \frac{2}{1 - \frac{1}{2^{\beta-1}}}.$$

On a donc $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3$, avec $C_3 = a_0 + \frac{C_1}{\alpha} \frac{2}{1 - \frac{1}{2^{\beta-1}}}$.

On remarque bien que C_3 ne dépend que de Ω , α et p (noter que N est implicitement dans Ω).

On peut maintenant supposer que F est quelconque dans $L^p(\Omega)^N$ (la fonction u est toujours la solution de (2.76 Corrigés d'exercices equation.2.76)). Pour $\gamma > 0$ la fonction u/γ est solution de (2.76 Corrigés d'exercices equation.2.76) avec F/γ au lieu de F . Si $\|F\|_{L^p(\Omega)} > 0$, en choisissant $\gamma = \|F\|_{L^p(\Omega)}$ (de sorte que $\|F/\gamma\|_{L^p(\Omega)} = 1$) on a donc $\|u/\gamma\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3$ ce qui donne

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \|F\|_{L^p(\Omega)}.$$

(Noter aussi que l'inégalité est évidente si $\|F\|_{L^p(\Omega)} = 0$.)

Corrigé 2.10 (Diffusion évanescence et convection)

Partie I Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $w = (w_1, \dots, w_N)^t \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\text{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (On rappelle que $\text{div}(w) = \sum_{i=1}^N D_i w_i$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que $D_i(u^2) = 2u D_i u$, pour tout $i \in 1, \dots, N$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.]

Corrigé – Soit $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc, quand $n \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \rightarrow D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. (On rappelle que $\partial_i u_n$ désigne la dérivée partielle classique de u_n par rapport à sa i -ème variable.) On peut aussi supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u_n \rightarrow u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ t.q. $|u_n| \leq F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, par convergence dominée, que $u_n^2 \rightarrow u^2$ dans $L^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$).

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on a alors

$$\langle D_i(u^2), \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} u^2 \partial_i \varphi \, dx = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n^2 \partial_i \varphi \, dx. \quad (2.77)$$

Comme u_n et φ appartiennent à $C_c^\infty(\Omega)$, on a, en intégrant par parties

$$\int_{\Omega} u_n^2 \partial_i \varphi \, dx = -2 \int_{\Omega} \varphi u_n \partial_i u_n \, dx.$$

Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_i u_n \rightarrow D_i u$ dans $L^2(\Omega)$, on a $u_n \partial_i u_n \rightarrow u D_i u$ dans $L^1(\Omega)$ et donc (comme $\varphi \in L^\infty(\Omega)$),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi u_n \partial_i u_n \, dx = \int_{\Omega} \varphi u D_i u \, dx.$$

En revenant à (2.77) corrigés d'exercice equation.2.77), on en déduit que

$$\langle D_i(u^2), \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} u^2 \partial_i \varphi \, dx = 2 \int_{\Omega} \varphi u D_i u \, dx.$$

Ce qui prouve bien que $D_i(u^2) = 2u D_i u$ p.p. (les dérivées par transposition de u et u^2 sont en fait des dérivées faibles et donc identifiées à des fonctions).

La démonstration précédente donne aussi que $u_n^2 \rightarrow u^2$ dans $L^1(\Omega)$ et $\partial_i(u_n^2) = 2u_n \partial_i u_n \rightarrow 2u D_i u = D_i(u^2)$ dans $L^1(\Omega)$. On a donc $u_n^2 \rightarrow u^2$ dans $W^{1,1}(\Omega)$, ce qui donne, comme $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, que $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

2. Montrer que $\int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx = 0$, pour tout $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. [Utiliser la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.]

Corrigé – Soit $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. Comme $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \langle \operatorname{div}(w), \varphi_n \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} w_i \partial_i \varphi_n \, dx.$$

Comme $\partial_i \varphi_n \rightarrow D_i \varphi$ dans $L^1(\Omega)$ (et que $w \in L^\infty(\Omega)^N$), on en déduit, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} w_i D_i \varphi \, dx = 0,$$

that is to say $\int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx = 0$.

3. Montrer que $\int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla(u^2)(x) \, dx = 2 \int_{\Omega} u(x) w(x) \cdot \nabla u(x) \, dx = 0$ (on rappelle que $w \cdot \nabla(u^2) = \sum_{i=1}^N w_i D_i(u^2)$).

Corrigé – On utilise le résultat de la question précédente avec $\varphi = u^2$ et le fait que $D_i(u^2) = 2u D_i u$, on obtient

$$0 = \int_{\Omega} w \cdot \nabla(u^2) \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} 2w_i u D_i u \, dx = 2 \int_{\Omega} w w \cdot \nabla u \, dx.$$

Partie II Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , à frontière lipschitzienne (cette hypothèse donne l'existence de l'opérateur "trace", noté γ , linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et t.q. $\gamma(u) = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ et $\operatorname{Ker}(\gamma) = H_0^1(\Omega)$). Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $w \in (L^\infty(\Omega))^N$ t.q. $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \operatorname{Im} \gamma$. On cherche u solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega), \quad \gamma(u) = g \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)), \\ \int_{\Omega} a \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x) w(x) \cdot \nabla v(x) \, dx &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.78)$$

1. Soit $G \in H^1(\Omega)$ t.q. $\gamma(G) = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Montrer que u est solution de (2.78) si et seulement si $u = G + \bar{u}$ avec \bar{u} solution de (2.79).

$$\begin{aligned} \bar{u} &\in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx &= \\ \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \int_{\Omega} a \nabla G(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} G(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx, &\forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Corrigé – On suppose que u est solution de (2.78) et on pose $\bar{u} = u - G$. On a alors $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ et, comme γ est un opérateur linéaire, $\gamma(\bar{u}) = \gamma(u) - \gamma(G) = g - g = 0$ (dans $L^2(\partial\Omega)$), ce qui prouve que $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. Puis, si $v \in H_0^1(\Omega)$, en remplaçant u par $\bar{u} + G$ dans (2.78), on montre bien que \bar{u} est solution de (2.79).

Réciproquement, on suppose que \bar{u} est solution de (2.79). On pose alors $u = \bar{u} + G$, on a bien $u \in H^1(\Omega)$ et $\gamma(u) = \gamma(\bar{u}) + \gamma(G) = 0 + g = g$ (dans $L^2(\partial\Omega)$). Puis, si $v \in H_0^1(\Omega)$, en remplaçant \bar{u} par $u - G$ dans (2.79), on montre bien que u est solution de (2.78).

On a bien ainsi montré l'équivalence désirée.

2. Montrer que (2.78) admet une et une seule solution.

Corrigé – En utilisant le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.4) on va montrer que (2.79) admet une et une seule solution (grâce à la question précédente, on en déduit que (2.78) admet une et une seule solution).

Le problème (2.79) peut s'écrire

$$\bar{u} \in H, \quad (2.80a)$$

$$\bar{a}(\bar{u}, v) = T(v) \text{ pour tout } v \in H, \quad (2.80b)$$

avec $H = H_0^1(\Omega)$,

$$\bar{a}(\bar{u}, v) = \int_{\Omega} a \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \int_{\Omega} a \nabla G(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} G(x) w(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

L'espace H est bien un espace de Hilbert (avec sa norme naturelle). L'application T est bien linéaire de H dans \mathbb{R} et, en utilisant l'inégalité de Hölder, on voit que T est continue (on utilise ici le fait que $f \in L^2(\Omega)$, $G \in H^1(\Omega)$ et $w \in L^\infty(\Omega)^d$). L'application \bar{a} est bien bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} et continue (grâce encore au fait que $w \in L^\infty(\Omega)^d$).

Pour montrer la coercivité de \bar{a} , on utilise la question 3 de la partie I, elle donne, pour tout $u \in H$,

$$\bar{a}(u, u) = \int_{\Omega} a \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} u(x) w(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} a \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx = a \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Comme $a > 0$, on en déduit bien que \bar{a} est coercive. On peut donc appliquer le lemme 2.4. On donne l'existence et l'unicité de \bar{u} solution de (2.79). Grâce à la question précédente, on en déduit l'existence et l'unicité de u solution de (2.78).

On note u cette solution dans la suite de cette partie.

3. On suppose, dans cette question, que $g = 0$ (de sorte que $u \in H_0^1(\Omega)$). Montrer que $a \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$.

Corrigé – Il suffit de prendre $v = u$ dans (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78). Avec la question 3 de la partie I on obtient

$$a\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx.$$

4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $f \leq 0$ p.p. dans Ω et que $g \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $N - 1$ -dimensionnelle sur $\partial\Omega$). Montrer que $u \leq b$ p.p. dans Ω . [On pourra admettre que $(u - b)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla(u - b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. (ce résultat est semblable à celui du lemme 2.21Positivité de la solution faibletheorem.2.21), utiliser (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78) et la partie I.]

Corrigé – Comme $(u - b)^+ \in H_0^1(\Omega)$, on peut prendre $v = (u - b)^+$ dans (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78), on obtient, en utilisant $\nabla(u - b)^+ = 1_{u>b}\nabla u$ p.p. et $f \leq 0$ p.p.,

$$\int_{u>b} a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_{\Omega} u(x)w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx = \int_{\Omega} f(x)(u - b)^+(x)dx \leq 0. \quad (2.81)$$

On remarque maintenant que $\int_{u>b} a\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx = \int_{\Omega} a\nabla(u - b)^+ \cdot \nabla(u - b)^+ = a\|(u - b)^+\|_{H_0^1(\Omega)}$ et que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x)w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx &= \int_{\Omega} (u(x) - b)w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx + b \int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx \\ &= \int_{\Omega} (u(x) - b)^+w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx + b \int_{\Omega} w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx. \end{aligned}$$

La question 3 de la partie I donne $\int_{\Omega} (u(x) - b)^+w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx = 0$. D'autre part, comme $\operatorname{div}(w) = 0$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$, on a $\int_{\Omega} w \cdot \nabla\varphi dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on a aussi (on utilise ici seulement le fait que $w \in L^2(\Omega)^N$) $\int_{\Omega} w \cdot \nabla\varphi dx = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et donc, en particulier pour $\varphi = (u - b)^+$. On en déduit que

$$\int_{\Omega} u(x)w(x) \cdot \nabla(u - b)^+(x)dx = 0.$$

Revenant à (2.81Corrigés d'exercicesequation.2.81), on obtient finalement $a\|(u - b)^+\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 0$ et donc $(u - b)^+ = 0$ p.p., that is to say $u \leq b$ p.p. dans Ω .

Remarque : On suppose maintenant $g = 0$ et on note u la solution de (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78). La démonstration précédente montre donc que $u \leq 0$ p.p. dans Ω si $f \leq 0$ p.p. dans Ω . Si maintenant on suppose $f \geq 0$ On remarque que $(-u)$ est la solution de (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78) avec $(-f)$ au lieu de f . On a donc $(-u) \leq 0$ p.p., that is to say $u \geq 0$ p.p..

Partie III Dans cette partie on prend $N = 2$, $\Omega =]0, 1[^2$, $w = (-1, 0)$ et $g = 0$. On suppose aussi que $f \in L^\infty(\Omega)$ et que $f \geq 0$ p.p. sur Ω . On note u_n la solution de (2.50Exercicesequation.2.50) pour $a = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et on s'intéresse à la limite de u_n quand $n \rightarrow \infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n \geq 0$ p.p. [Utiliser la Partie II, question 4.]

Corrigé – Le fait que $u_n \geq 0$ p.p. dans Ω est une conséquence directe de la remarque à la fin de la démonstration de la question 4 de la partie II.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe C_1 , ne dépendant que de f , t.q. $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. [On pourra, par exemple, chercher de quel problème de type (2.78Corrigés d'exercicesequation.2.78) est solution la fonction $u_n + \beta\psi$, avec $\psi(x) = x_1$ et β convenablement choisi, et utiliser la Partie II, question 4.]

Corrigé – La fonction u_n vérifie

$$\begin{aligned} u_n &\in H_0^1(\Omega), \\ \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\Omega} u_n(x)D_1v(x)dx &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On pose $\bar{u}_n = u_n + \beta\psi$ (de sorte que $\nabla\bar{u}_n = \nabla u_n + \beta(1,0)^t$). Les formules d'intégration par parties dans $H^1(\Omega)$ (théorème 1.24 Intégration par parties theorem.1.24) donnent que, pour une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} D_1 v \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} \psi D_1 v \, dx = - \int_{\Omega} v \partial_1 \psi \, dx = - \int_{\Omega} v \, dx.$$

On en déduit que la fonction \bar{u}_n est solution de

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &\in H^1(\Omega), \quad \gamma(u_n) = \beta x_1 \text{ (dans } L^2(\partial\Omega)), \\ \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_n(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\Omega} \bar{u}_n(x) D_1 v(x) \, dx &= \int_{\Omega} (f(x) + \beta)v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On choisit $\beta = -\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. On a alors $f + \beta \leq 0$ p.p. dans Ω et $\beta x_1 \leq 0$ sur $\partial\Omega$. On peut donc appliquer la question 4 de la partie 2, elle donne $\bar{u}_n \leq 0$ p.p. dans Ω et donc $u_n \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. dans Ω . Avec la question précédente, ceci donne $0 \leq u_n \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. dans Ω . On peut donc choisir $C_1 = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe C_2 , ne dépendant que de f , t.q. $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \sqrt{n}$.

Corrigé – La question 3 de la partie II donne

$$\frac{1}{n} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} f u_n \, dx.$$

Comme (avec C_1 donné à la question précédente) $\int_{\Omega} f u_n \, dx \leq \lambda_N(\Omega) \|u_n\|_{\infty} \|f\|_{\infty} \leq \lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_{\infty}$, on a donc

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq n \lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_{\infty}.$$

On peut donc prendre $C_2 = \sqrt{\lambda_N(\Omega) C_1 \|f\|_{\infty}}$.

4. En utilisant la remarque 2.14 Optimalité des hypothèses theorem.2.14, montrer que $u_n \in H^2(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est la solution faible de $-\Delta u_n = f - D_1 u_n$. Comme Ω est convexe et que $f - D_1 u_n \in L^2(\Omega)$ (car $u_n \in H_0^1(\Omega)$), la remarque 2.14 Optimalité des hypothèses theorem.2.14 donne que $u_n \in H^2(\Omega)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, déduire de la question 1 de la partie III que $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) \geq 0$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(1, x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$ (de même, $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 0) \geq 0$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}(x_1, 1) \leq 0$ pour tout $x_1 \in]0, 1[$). On admettra, dans la suite, que ce résultat est encore vrai, avec seulement $u_n \in H^2(\Omega)$, au sens $\gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \geq 0$ et $\gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \leq 0$ p.p. en $x_2 \in]0, 1[$ (de même $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \geq 0$ et $\gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \leq 0$ p.p. en $x_1 \in]0, 1[$).

Corrigé – Comme $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $u_n = 0$ sur $\partial\Omega$, on a, pour tout $x_2 \in]0, 1[$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{u_n(x_1, x_2)}{x_1}.$$

La question 1 de la partie III donne que $u_n(x_1, x_2) \geq 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$ (comme u_n est continue, le fait que $u_n \geq 0$ p.p. dans Ω implique que $u_n \geq 0$ partout dans Ω). On en déduit que $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(0, x_2) \geq 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$.

Les trois autres propriétés demandées se montrent de manière analogue.

6. En utilisant la question 2 de la partie III, montrer qu'on peut supposer (à une sous suite près) que $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$, c'est à dire :

$$\int_{\Omega} u_n(x) \varphi(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Montrer que $u \geq 0$ p.p..

Corrigé – La question 2 de la partie III donne que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En prenant $\varphi = 1_{u < 0}$, on remarque que $\int_\Omega u_n \varphi dx \geq 0$ (car $u_n \geq 0$ p.p.) et donc $\int_\Omega u \varphi dx \geq 0$, that is to say

$$\int_{u < 0} u(x) dx \geq 0.$$

Ceci donne bien $u \geq 0$ p.p..

On cherche, dans la suite, l'équation et les conditions aux limites satisfaites par u .

7. Montrer que $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Corrigé – Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{n} \int_\Omega \nabla u_n(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_\Omega u_n(x) \partial_1 \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.82)$$

Comme $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \sqrt{n}$, on a

$$\left| \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla u_n(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla u_n(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$.

D'autre part, on a $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega u_n(x) \partial_1 \varphi(x) dx = \int_\Omega u(x) \partial_1 \varphi(x) dx.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ dans (2.82) Corrigés d'exercices equation.2.82), on obtient donc

$$-\int_\Omega u(x) \partial_1 \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui donne bien $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla u_n(x) \nabla \varphi(x) dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \varphi(0, x_2) dx_2 - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \varphi(1, x_2) dx_2 \\ + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \varphi(x_1, 0) dx_1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \varphi(x_1, 1) dx_1 \\ - \int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Corrigé – Comme $u_n \in H^2(\Omega)$, la dérivée par transposition $-\Delta u_n$ est un élément de $L^2(\Omega)$ et (2.82) Corrigés d'exercices equation.2.82) donne

$$-\frac{1}{n} \Delta u_n + D_1 u_n = f \text{ p.p..}$$

En multipliant cette équation par φ (on utilise ici uniquement le fait que $\varphi \in L^2(\Omega)$) on a donc

$$-\frac{1}{n} \int_\Omega \Delta u_n \varphi dx + \int_\Omega \varphi D_1 u_n dx = \int_\Omega f \varphi dx. \quad (2.83)$$

Comme les fonctions $D_1 u_n$ et $D_2 u_n$ sont dans $H^1(\Omega)$, on peut maintenant utiliser les formules d'intégration par parties (théorème 1.24 Intégration par parties theorem.1.24). On obtient (comme $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \int_\Omega (D_1 D_1 u_n) \varphi dx = \frac{1}{n} \int_\Omega D_1 u_n \partial_1 \varphi dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(0, x_2) \varphi(0, x_2) dx_2 \\ - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_1 u_n)(1, x_2) \varphi(1, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

et

$$-\frac{1}{n} \int_{\Omega} (D_2 D_2 u_n) \varphi \, dx = \frac{1}{n} \int_{\Omega} D_2 u_n \partial_2 \varphi \, dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 0) \varphi(x_1, 0) \, dx_1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \gamma(D_2 u_n)(x_1, 1) \varphi(x_1, 1) \, dx_1.$$

Une intégration par parties donne aussi (comme $u_n \in H_0^1(\Omega)$)

$$\int_{\Omega} \varphi D_1 u_n \, dx = - \int_{\Omega} u_n \partial_1 \varphi \, dx.$$

En utilisant ces trois intégrations par parties dans (2.83) corrigés d'exercice equation.2.83, on obtient l'égalité demandée.

9. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que

$$- \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, dx \leq \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx. \quad (2.84)$$

Corrigé – Comme $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$, la question 5 et l'égalité de la question 8 donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla u_n(x) \nabla \varphi(x) \, dx - \int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, dx \leq \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

On peut alors passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, comme à la question 7, et on obtient bien (2.84) corrigés d'exercice equation.2.84.

10. On suppose, dans cette question, que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f \in C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f$ partout dans Ω et que $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$.

La fonction u est-elle alors entièrement déterminée par f ?

Corrigé – La question 7 donne $D_1 u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Comme u est de classe C^1 , $D_1 u$ est représenté par la dérivée classique de u . Puis, comme $\partial_1 u$ et f sont continues sur Ω , on en déduit que $\partial_1 u = f$ partout dans Ω . Comme $\partial_1 u$ et f sont continues sur $\overline{\Omega}$, on a même $\partial_1 u = f$ partout dans $\overline{\Omega}$.

On prend maintenant $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.q. $\varphi \geq 0$ sur $\partial\Omega$, $\varphi(x) = 0$ si $x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $x_1 \neq 0$. Une intégration par parties dans (2.84) corrigés d'exercice equation.2.84 donne alors

$$\int_0^1 u(0, x_2) \varphi(0, x_2) \, dx_2 \leq 0.$$

Dans cette inégalité, la fonction $\varphi(0, \cdot)$ peut être égale (par exemple) à n'importe quelle fonction appartenant à $C_c^\infty(]0, 1[)$ et prenant ses valeurs dans \mathbb{R}_+ . Comme $u(0, \cdot)$ est une fonction continue sur $]0, 1[$, on déduit donc de cette inégalité que $u(0, x_2) \leq 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$.

La question 6 donne $u \geq 0$ p.p. sur Ω . Comme u est continue sur $\overline{\Omega}$, on a donc $u \geq 0$ partout sur $\overline{\Omega}$. On obtient donc finalement $u(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in]0, 1[$ (et même $[0, 1]$).

La fonction u est bien entièrement déterminée par f , on a

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f(t, x_2) \, dt.$$

11. On remplace $w = (-1, 0)$ par $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ De quel problème, dépendant de w , u est elle solution ? [distinguer les signes des 2 composantes de w .]

Corrigé – On pose $w = (\alpha, \beta)$, avec $\alpha, \beta \neq 0$. En reprenant la même méthode que celle développée ci dessus pour le cas $w = (-1, 0)$, la question équivalente à la question 10 donnera que u est solution du problème suivant :

$$-w \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega,$$

$$u(0, x_2) = 0 \text{ pour tout } x_2 \in]0, 1[\text{ si } \alpha < 0 \text{ et } u(1, x_2) = 0 \text{ pour tout } x_2 \in]0, 1[\text{ si } \alpha > 0.$$

$$u(x_1, 0) = 0 \text{ pour tout } x_1 \in]0, 1[\text{ si } \beta < 0 \text{ et } u(x_1, 1) = 0 \text{ pour tout } x_1 \in]0, 1[\text{ si } \beta > 0.$$

Chapitre 3

Problèmes elliptiques non linéaires

Dans ce chapitre, on va présenter deux types de méthodes pour obtenir des résultats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires : une méthode de compacité et une méthode de monotonie. On donnera également une méthode pour obtenir un résultat d'unicité.

3.1 Méthodes de compacité

3.1.1 Degré topologique et théorème de Schauder

Objectif. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, ou un ouvert borné d'un espace de Banach E . Soit $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ (ou $f \in C(\bar{\Omega}, E)$) et $y \in \mathbb{R}^N$ (ou $y \in E$). On cherche à montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ t.q. $f(x) = y$.

On commence par donner l'existence (et l'unicité) d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis en dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir le théorème d'existence de solution recherché.

Définition 3.1 Soit $N \geq 1$. On note \mathcal{A} l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.

Théorème 3.2 (Brouwer, 1933) Soit $N \geq 1$ et \mathcal{A} donné par la définition 3.1 Degré topologique et théorème de Schaudertheorem.3.1. Il existe alors une application d de \mathcal{A} dans \mathbb{Z} , appelée "degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :

(d1) (Normalisation) $d(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.

(d2) (Degré d'une union) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si $h \in C([0, 1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^N)$ et $y(t) \notin \{h(t, x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0, 1]$), on a alors $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) = d(h(0, \cdot), \Omega, y(0))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 3.3 Des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.2 Brouwer, 1933 theorem.3.2), on déduit 2 conséquences très intéressantes :

1. $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.

2. Soit A une matrice $N \times N$ inversible, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q. $A^{-1}y \in \Omega$. On pose $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^N$. On a alors $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $d(f, \Omega, y)$ est égal au signe du déterminant de A , on a donc $d(f, \Omega, y) \neq 0$.

La remarque 3.3 Degré topologique et théorème de Schauder theorem.3.3 nous donne une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit $N \geq 1$, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$. Pour cela, on construit une application h de $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^N t.q.

1. $h(1, \cdot) = f$,
2. $h(0, \cdot) = g$ avec g linéaire inversible et t.q. $y \in \{g(x), x \in \Omega\}$.
3. $h(t, x) \neq y$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.

On peut remarquer que dans le cas $N = 1$, cette méthode dite de "degré topologique" que l'on vient de décrire n'apporte rien de plus que le théorème des valeurs intermédiaires. Elle est donc sans intérêt si $N = 1$.

Un première conséquence de cette méthode de "degré topologique" est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 3.4 (Point fixe de Brouwer) Soit $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$. (On a muni \mathbb{R}^N d'une norme notée $\|\cdot\|$.) Alors f admet un point fixe, that is to say qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.

Démonstration Si il existe $x \in \partial B_R$ (that is to say t.q. $\|x\| = R$) t.q. $f(x) = x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B_R$. On pose alors $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < R\}$ (ce qui donne $B_R = \bar{\Omega}$) et, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in B_R$, $h(t, x) = x - tf(x)$. Il est facile de voir que $h(t, x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = R\}$. On en déduit que $d(h(1, \cdot), \Omega, 0) = d(h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = x$ ■

Le théorème 3.2 Brouwer, 1933 theorem.3.2 a été généralisé (dès 1934) en dimension infinie par Leray et Schauder sous une hypothèse de compacité que nous donnons maintenant

Définition 3.5 Soit E un espace de Banach (réel), B une partie de E et f une application de B dans E . On dit que f est compacte (la terminologie de Leray-Schauder est différente, ils utilisent l'expression "complètement continue") si f vérifie les deux propriétés suivantes :

1. f est continue,
2. $\{f(x), x \in C\}$ est relativement compacte (dans E) pour tout partie C bornée de B .

On peut remarquer, dans la définition précédente, que si f est linéaire (et $B = E$) la deuxième condition entraîne la première. Mais ceci est faux pour des applications non linéaires.

Définition 3.6 Soit E un espace de Banach (réel). On note \mathcal{A} l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E , f est une application compacte de $\bar{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que f est continue et $\{f(x), x \in \bar{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte de E) et $y \in E$ t.q. $y \notin \{x - f(x), x \in \partial\Omega\}$.

Théorème 3.7 (Leray, Schauder, 1934) Soit E un espace de Banach (réel) et \mathcal{A} donné par la définition 3.6 Degré topologique et théorème de Schauder theorem.3.6. Il existe alors une application d de \mathcal{A} dans \mathbb{Z} , appelée "degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (d1) (Normalisation) $d(I - f, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$.
- (d2) (Degré d'une union) $d(I - f, \Omega, y) = d(I - f, \Omega_1, y) + d(I - f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{x - f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

(d3) (Invariance par homotopie) Si h est une application compacte de $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que h est continue et $\{h(t, x), t \in [0, 1], x \in \bar{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte de E), $y \in C([0, 1], E)$ et $y(t) \notin \{x - h(t, x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0, 1]$), on a alors $d(I - h(t, \cdot), \Omega, y(t)) = d(I - h(0, \cdot), \Omega, y(0))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Comme dans le cas de la dimension finie (voir la remarque 3.3 Degré topologique et théorème de Schauder theorem.3.3), des propriétés du degré topologique (données dans le théorème 3.7 Leray, Schauder, 1934 theorem.3.7), on déduit que $d(I - f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = y$. Pour donner l'analogue de la seconde propriété de la remarque 3.3 Degré topologique et théorème de Schauder theorem.3.3, nous avons besoin d'un deuxième théorème dû à Leray et Schauder que nous donnons maintenant.

Théorème 3.8 (Application linéaire compacte) Soit E un espace de Banach (réel), L une application linéaire compacte de E dans E et Ω un ouvert borné contenant 0 . On suppose que

$$x \in E, Lx = x \Rightarrow x \notin \partial\Omega. \quad (3.1)$$

Alors $(I - L, \Omega, 0) \in \mathcal{A}$ (\mathcal{A} est donné par la définition 3.6 Degré topologique et théorème de Schauder theorem.3.6) et $d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$.

Noter que, comme L est linéaire, l'hypothèse (3.1 Application linéaire compacte equation.3.1) est équivalente à dire $(x \in E, Lx = x) \Rightarrow x = 0$, ce qui est équivalent à dire que 1 n'est pas valeur propre de L .

On peut maintenant, comme en dimension finie, donner une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E contenant 0 , f une application de $\bar{\Omega}$ dans E . On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = 0$ (quitte à changer f , on peut toujours se ramener à cette forme). Pour cela, on construit une application h de $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ dans E , compacte et t.q.

1. $h(1, \cdot) = f$,
2. $h(0, \cdot) = L$ avec L linéaire de E de E ,
3. $x - h(t, x) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(I - f, \Omega, 0) = d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $x - f(x) = 0$.

Comme en dimension finie, une première conséquence de l'existence du degré topologique est l'obtention d'un théorème de point fixe que nous donnons maintenant.

Théorème 3.9 (Point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, $R > 0$, $B_R = \{x \in E, \|x\| \leq R\}$ et f une application compacte de B_R dans B_R (that is to say f continue et $\{f(x), x \in B_R\}$ relativement compacte dans E). Alors f admet un point fixe, that is to say qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.

Démonstration La démonstration est très voisine de celle du théorème 3.4 Point fixe de Brouwer theorem.3.4. Si il existe $x \in \partial B_R$ (that is to say t.q. $\|x\| = R$) t.q. $f(x) = x$, il n'y a plus rien à démontrer. On suppose donc maintenant $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B_R$. On pose alors $\Omega = \{x \in E, \|x\| < R\}$ (ce qui donne $B_R = \bar{\Omega}$) et, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in B_R$, $h(t, x) = tf(x)$. Il est facile de voir que $x - h(t, x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = R\}$. La compacité de h se déduit de celle de f . On en déduit alors que $d(I - h(1, \cdot), \Omega, 0) = d(I - h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = x$. ■

Le théorème de Schauder est faux si on remplace l'hypothèse de compacité de f par la simple hypothèse de continuité. Toutefois, la difficulté principale dans l'utilisation du théorème de Schauder (ou, plus généralement, dans l'utilisation du degré topologique) est souvent de montrer la continuité de f (ou, dans l'utilisation du degré topologique, la continuité de l'application notée h ci avant).

3.1.2 Existence avec le théorème de Schauder

On rappelle tout d'abord la définition de fonction de Carathéodory.

Définition 3.10 Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q . On dit que a est fonction de Carathéodory si $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

Remarque 3.11 Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et a une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q . La fonction a est alors borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q (ce qui pourrait être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments). Si v est une fonction borélienne de Ω dans \mathbb{R}^p , la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans \mathbb{R}^q . Cette propriété sera plusieurs fois utilisée dans la suite (sans la rappeler) lorsque v sera dans $L^r(\Omega)$ (pour un $r \in [1, +\infty]$) en choisissant un représentant (borélien) de v (la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ ne dépend pas du représentant choisi pour v , modulo la relation d'équivalence “= p.p.”).

On travaille dans cette section avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} N &\geq 1, \quad \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\ a &: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction de Carathéodory,} \\ \text{il existe } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ t.q. } &\alpha \leq a(\cdot, s) \leq \beta \text{ p.p. et pour tout } s \in \mathbb{R}, \\ &f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sous les hypothèses 3.2, on cherche à montrer l'existence de u , solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.3)$$

Théorème 3.12 Sous les hypothèses (3.2), il existe u solution de (3.3).

Démonstration

Pour $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, le chapitre sur les équations elliptiques linéaires nous donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, \bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, \bar{u}(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.4)$$

Plus précisément, pour montrer l'existence et l'unicité de u solution de (3.4), on applique le théorème 2.6 sur l'existence et l'unicité de la solution de (2.4) en posant $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $a_{i,i} = a(\cdot, \bar{u})$ et $f = f(\cdot, \bar{u})$ (dans cette dernière égalité, la fonction f du terme de gauche est celle de (2.4) et la fonction f du terme de droite est celle de (3.4)). Le théorème 2.6 donne bien l'existence et l'unicité de u solution de (3.4).

On pose $T(\bar{u}) = u$. L'application T est donc une application de E dans E avec $E = L^2(\Omega)$. Un point fixe de T est une solution de (3.3). Pour démontrer l'existence d'un tel point fixe, on va utiliser le théorème 3.9 sur le point fixe de Schauder.

Tout d'abord, en utilisant α , l'inégalité de Poincaré et la borne L^∞ de f , on montre facilement que l'image de T est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ et donc (par le théorème de Rellich) dans un compact de $L^2(\Omega)$. En prenant R assez grand, l'application T envoie donc $B_R = \{v \in L^2(\Omega), \|v\|_2 \leq R\}$ dans B_R et $\{T(\bar{u}), \bar{u} \in B_R\}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Pour utiliser le théorème 3.9 Point fixe de Schaudertheorem.3.9, il reste à montrer la continuité de T .

Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ dans E , quand $n \rightarrow +\infty$. On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$. Après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ p.p. et qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (et donc aussi $u_n \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$). On va montrer que w est solution de (3.4) Existence avec le théorème de Schauder equation.3.4). En effet, Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n(x)) \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, \bar{u}_n(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ (en utilisant la convergence dominée et le passage à la limite sur le produit d'une convergence faible et d'une convergence forte dans L^2), on obtient

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}(x)) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, \bar{u}(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci prouve que $w = T(\bar{u})$. On a donc prouvé, après extraction d'une sous suite, que $T(\bar{u}_n) \rightarrow T(\bar{u})$ dans $L^2(\Omega)$. Par un raisonnement classique par l'absurde on peut montrer que cette convergence reste vraie sans extraction de sous suite (voir l'exercice 3.1 Continuité d'une application de L^p dans L^q exo.3.1 pour un exemple de ce type de raisonnement). On a ainsi démontré la continuité de T . On peut donc appliquer le théorème 3.9 Point fixe de Schaudertheorem.3.9 et conclure à l'existence d'un point fixe de T , ce qui termine cette démonstration. ■

3.1.3 Existence avec le degré topologique

On donne maintenant une application du degré topologique, (cette application pourrait d'ailleurs aussi se faire par le théorème de Schauder).

On reprend le même problème que dans le paragraphe 3.1.2 Existence avec le théorème de Schauder subsection.3.1.2 en supprimant l'hypothèse f bornée qui permettait une application simple du théorème de Schauder.

On considère l'équation de diffusion-convection-réaction suivante :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} a(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \int_{\Omega} G(x) \varphi(u(x)) \cdot \nabla v(x) dx = \\ \int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.5)$$

qui est la formulation faible du problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u) \nabla u) - \operatorname{div}(G(x) \varphi(u)) = f(x, u), \quad x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons que cette équation est non linéaire pour trois raisons : les termes de diffusion, convection et réaction sont non linéaires. Le premier terme du membre de gauche est le terme de diffusion, le second terme du membre de gauche est le terme de convection et le membre de droite est le terme de réaction.

On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1, \\ (ii) a \text{ est une fonction de Carathéodory (voir la définition 3.10 Existence avec le théorème de Schauder theorem.3.10),} \\ (iii) \exists \alpha, \beta > 0; \alpha \leq a(x, s) \leq \beta \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \\ (iv) G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N), \quad \operatorname{div} G = 0, \\ (v) \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et il existe } C_1 \geq 0 \text{ t.q. } |\varphi(s)| \leq C_1 |s| \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ (vi) f \text{ est une fonction de Carathéodory, et } \exists C_2 \geq 0 \text{ et } d \in L^2(\Omega); |f(x, s)| \leq d(x) + C_2 |s|, \\ (vii) \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} = 0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Remarque 3.13 (Sur l'existence et l'unicité des solutions de (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5))

Dans le cas où $a \equiv 1$, $\varphi = 0$ et f est de la forme $f(x, s) = d(x) + \lambda s$ où λ est une valeur propre du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet (that is to say qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ t.q. $-\Delta w = \lambda w$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$) et d un élément de $L^2(\Omega)$, le problème (3.6) Existence avec le degré topologique equation.3.6) devient $-\Delta u = \lambda u + d$, avec condition de Dirichlet. Ce problème n'a une solution que si d est orthogonal à l'espace propre associé à λ (et dans ce cas on n'a pas unicité). Ceci s'appelle l'alternative de Fredholm, voir l'exercice 2.2 Décomposition spectrale en dimension 1 exo.2.2. C'est pour assurer l'existence pour tout d dans $L^2(\Omega)$ qu'on ajoute l'hypothèse de sous-linéarité sur f (hypothèse (vii)).

Remarque 3.14 (Coercivité) Lorsque $\operatorname{div} G \neq 0$, le problème peut se traiter de manière similaire à celle donnée dans la démonstration de théorème 3.15 Existence theorem.3.15 à condition que $\operatorname{div} G \leq \lambda_1$ p.p. où λ_1 est la première valeur propre de $u \mapsto -\operatorname{div}(\alpha \nabla u)$ avec condition de Dirichlet (cette valeur propre est strictement positive). Sans cette condition, le problème devient plus difficile (voir l'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5), même dans le cas linéaire, that is to say le cas où a et f ne dépendent pas de u et où $\varphi(u) = u$. La difficulté principale est due à l'absence de coercivité de l'opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) - \operatorname{div}(Gu)$.

Théorème 3.15 (Existence) *Sous les hypothèses (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7), il existe une solution de (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5).*

Démonstration Essayons d'abord d'appliquer le théorème de Schauder. On considère le problème linéaire suivant :

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} G \varphi(\bar{u}) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(\bar{u}) v \, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Dans (3.8) Existence avec le degré topologique equation.3.8), on a noté, de manière abrégée, $a(\bar{u})$ et $f(\bar{u})$ les fonctions $x \mapsto a(x, \bar{u}(x))$ et $x \mapsto f(x, \bar{u}(x))$. Cette notation abrégée sera souvent utilisée par la suite.

Soit T l'opérateur défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est solution de (3.8) Existence avec le degré topologique equation.3.8). Il est assez facile de montrer que T est continu et même compact. Par contre il est difficile de montrer que T envoie une boule de $L^2(\Omega)$ dans elle-même. Pour cela, il faut obtenir une estimation sur u en fonction de \bar{u} , et ce n'est pas gagné. Prenons $v = u$ dans (3.8) Existence avec le degré topologique equation.3.8), comme on a fait dans le paragraphe 3.1.2 Existence avec le théorème de Schauder subsection.3.1.2. On obtient, grâce aux hypothèses (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7),

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \| |G| \|_{\infty} C_1 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Montrons que le dernier terme à lui tout seul empêche d'avoir facilement des estimations. Supposons $G = 0$ et $d = 0$, on a alors avec l'inégalité de Poincaré :

$$\frac{\alpha}{C_\Omega^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est à dire $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 \|\bar{u}\|_{L^2} \leq \frac{C_\Omega^2}{\alpha} C_2 R$ si \bar{u} est dans la boule de centre 0 et de rayon R de $L^2(\Omega)$, that is to say si $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

On ne peut pas en conclure que $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$ (sauf si $C_\Omega^2 C_2 < \alpha$ et dans ce cas la seule solution de (3.5) Existence avec le degré topologique est $u = 0$...). Donc, la méthode ne marche pas de manière directe. Toutefois, elle fonctionne avec un peu de travail supplémentaire en utilisant la dernière hypothèse de (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7). Une solution est, par exemple, de considérer un problème tronqué et de passer à la limite. On va maintenant donner une preuve par degré topologique.

Cette méthode demande des estimations *a priori* c'est à dire des estimations sur u , sans connaître son existence. Supposons donc u solution de (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5), on peut (et on va) montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\|u\|_{L^2} \leq R$. Le gros avantage de considérer (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5) plutôt que (3.8) Existence avec le degré topologique equation.3.8) est d'avoir uniquement u , et non pas u et \bar{u} , et ceci simplifie considérablement les estimations. Par exemple dans le terme de convection non linéaire, on peut écrire (formellement)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G \varphi(u) \cdot \nabla u \, dx &= \int_{\Omega} G \cdot \nabla \phi(u) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} G \, \phi(u) \, dx \\ &= 0 \quad \text{car} \quad \operatorname{div} G = 0, \end{aligned}$$

où ϕ est la primitive de φ s'annulant en 0. Notons que l'estimation $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ revient à montrer que toutes les solutions sont dans la boule B_R (boule fermée de centre 0 et de rayon R), ce qui est une estimation uniforme sur toutes les solutions.

On réécrit le problème sous la forme :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où $F(u)$ est, pour $u \in L^2(\Omega)$, l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \int_{\Omega} G \varphi(u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f(u) v \, dx.$$

Comme $G \in L^\infty(\Omega)^N$, $|\varphi(s)| \leq C_1 |s|$ et $|f(\cdot, s)| \leq d + C_2 |s|$, il est facile de voir que l'application F qui à u associe $F(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Pour $S \in H^{-1}(\Omega)$, le problème linéaire

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(u) \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle S, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{cases} \quad (3.9)$$

admet une unique solution $w \in H_0^1(\Omega)$. On note B_u l'opérateur qui à S dans $H^{-1}(\Omega)$ associe w solution de (3.9) Existence avec le degré topologique equation.3.9). L'opérateur B_u est linéaire continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$

et $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que l'opérateur B_u est compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Le problème (3.5) Existence avec le degré topologique (equation.3.5) est équivalent à résoudre le problème de point fixe $u = B_u(F(u))$. On va donc montrer, par degré topologique, que le problème suivant admet une solution

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega), \\ u = B_u(F(u)). \end{cases}$$

Pour $t \in [0, 1]$, on pose $h(t, u) = B_u(t F(u)) \in L^2(\Omega)$. L'application h est ainsi définie de $[0, 1] \times L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \|u\|_{L^2(\Omega)} < R\}$. On va montrer que

$$(1) \exists R > 0; \left\{ \begin{array}{l} u - h(t, u) = 0 \\ t \in [0, 1], u \in L^2(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$$

(c'est l'estimation *a priori*, qui est le point le plus difficile à montrer);

(2) h est continue de $[0, 1] \times \bar{B}_R$ dans \bar{B}_R ;

(3) $\{h(t, u), t \in [0, 1], u \in \bar{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Si on suppose qu'on a démontré (1) (2) (3), on n'a pas de solution à l'équation $u - h(t, u) = 0$ sur le bord de la boule B_R , et on peut donc définir le degré $d(Id - h(t, \cdot), B_R, 0)$. Ce degré ne dépend pas de t , on a donc :

$$\begin{aligned} d(Id - h(t, \cdot), B_R, 0) &= d(Id - h(0, \cdot), B_R, 0) \\ &= d(Id, B_R, 0) = 1. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $u \in B_R$ tel que $u - h(1, u) = 0$, c'est à dire

$$u = B_u(F(u)).$$

Donc u est solution de (3.5) Existence avec le degré topologique (equation.3.5) (et le théorème 3.15 Existence theorem.3.15 est démontré).

Il reste donc à montrer (1), (2) et (3). Commençons par démontrer (3) (pour tout $R > 0$). Soit $R > 0$. On suppose que $\|u\|_{L^2} \leq R$. On a :

$$F(u) \in H^{-1}(\Omega), \text{ et } \langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \int_{\Omega} G \varphi(u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f(u) v \, dx$$

On veut estimer $\langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &\leq \| |G| \|_{\infty} \|\varphi(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \| |G| \|_{\infty} C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\| |G| \|_{\infty} C_1 R + C_{\Omega} \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2 C_{\Omega} R) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_{Ω} ne dépend que de Ω (et est donnée par l'inégalité de Poincaré). Donc

$$t \|F(u)\|_{H^{-1}} \leq \| |G| \|_{\infty} C_1 R + C_{\Omega} \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2 C_{\Omega} R, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Posons $h(t, u) = B_u(t F(u)) = w$ et montrons qu'il existe \bar{R} dépendant que de $R, G, C_{\Omega}, C_1, C_2, \alpha$ tel que

$$\|h(t, u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \bar{R};$$

Par définition, w est solution de

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(u) \nabla w \cdot \nabla v = \langle t F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.10)$$

En prenant $v = w$ dans (3.10) Existence avec le degré topologique equation.3.10), on obtient :

$$\alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|tF(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{R} \|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec $\tilde{R} = \| |G| \|_{\infty} C_1 R + C_2 \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2 C_{\Omega} R$. On a donc $\|h(t, u)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\tilde{R}}{\alpha} = \bar{R}$.

On en déduit par le théorème de Rellich (théorème 1.25 Rellich theorem.1.25) que l'ensemble $\{h(t, u), t \in [0, 1], u \in \bar{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Ce qui montre bien (3).

Montrons maintenant le point (2). Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ telle que $t_n \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$. On veut montrer que $h(t_n, u_n) \rightarrow h(t, u)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $w_n = h(t_n, u_n)$ et $w = h(t, u)$. Pour montrer que $w_n \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$, on cherche à passer à la limite sur l'équation suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(u_n) \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx = -t_n \int_{\Omega} G\varphi(u_n) \cdot \nabla v \, dx + t_n \int_{\Omega} f(u_n) v \, dx \\ w_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.11)$$

On sait déjà que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (c'est ce qu'on a montré à l'étape précédente : si $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ alors $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \bar{R}$).

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et à une sous suite près, (on ne renumérote pas) on a donc

$$\begin{aligned} w_n &\rightharpoonup \bar{w} \text{ dans } H_0^1 \text{ faible et } w_n \rightarrow \bar{w} \text{ dans } L^2(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ p.p. et } \exists H \in L^2(\Omega) ; |u_n| \leq H \text{ p.p..} \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$; comme $a(u_n) \rightarrow a(u)$ p.p. donc $a(u_n) \nabla v \rightarrow a(u) \nabla v$ p.p., et $|a(u_n) \nabla v| \leq \beta |\nabla v|$, on a donc donc $a(u_n) \nabla v \rightarrow a(u) \nabla v$ dans $L^2(\Omega)$. Mais $\nabla w_n \rightarrow \nabla \bar{w}$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible. On a donc

$$\int_{\Omega} a(u_n) \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} a(u) \nabla \bar{w} \cdot \nabla v \, dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On remarque ensuite que $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ p.p. et que $|\varphi(u_n)| \leq C_1 |u_n| \leq C_1 H$; donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$ et $\int_{\Omega} G\varphi(u_n) \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} G\varphi(u) \cdot \nabla v \, dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Enfin pour le dernier terme, $f(u_n) \rightarrow f(u)$ p.p.. Par convergence dominée (car $|f(u_n)| \leq |d| + C_2 H$ p.p.) on a donc $f(u_n) \rightarrow f(u)$ dans L^2 et donc $\int_{\Omega} f(u_n) v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(u) v \, dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite dans (3.11) Existence avec le degré topologique equation.3.11), on obtient donc :

$$\int_{\Omega} a(u) \nabla \bar{w} \cdot \nabla v \, dx = -t \int_{\Omega} G\varphi(u) \cdot \nabla v \, dx + t \int_{\Omega} f(u) v \, dx.$$

et donc $\bar{w} = h(t, u) = w$.

En raisonnant par l'absurde, on montre ensuite que (sans sous-suite) $w_n \rightarrow w$ dans H_0^1 faible et $w_n \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ où $w_n = h(t_n, u_n)$ et $w = h(t, u)$; l'application h est donc continue. Ce qui montre bien (2).

Il reste maintenant à démontrer (1). On veut montrer que $\exists R > 0$ t.q. :

$$\exists R > 0; \left\{ \begin{array}{l} t \in [0, 1] \\ u = h(t, u) \end{array} \right\} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R.$$

Soit $t \in [0, 1]$, et $u = h(t, u) = t B_u(F(u))$, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -t \int_{\Omega} G\varphi(u) \cdot \nabla v \, dx + t \int_{\Omega} f(u)v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(s) = \int_0^s \varphi(\xi) d\xi$ (Φ est donc une primitive de φ). Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, il n'est pas difficile de montrer que $\Phi(u) \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et que

$$\int_{\Omega} G\varphi(u) \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} G \cdot \nabla \Phi(u) \, dx.$$

(Ceci est laissé en exercice, il suffit d'approcher u , dans $H_0^1(\Omega)$, par une suite de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$.) Comme $\operatorname{div}(G) = 0$, on a alors

$$\int_{\Omega} G\varphi(u) \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} G \cdot \nabla \Phi(u) \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} G \Phi(u) \, dx = 0.$$

On choisit alors $v = u$ dans (3.12) Existence avec le degré topologique equation 3.12). Par les hypothèses (3.7) Existence avec le degré topologique, on a donc :

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |f(u)u| \, dx.$$

On va déduire de cette inégalité qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. C'est ici qu'on utilise l'hypothèse (vii), i.e. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(x, s)/s = 0$.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'un tel R n'existe pas. Alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \geq n \text{ et } \alpha \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |f(u_n)u_n| \, dx.$$

Montrons que ceci est impossible. Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. On a donc $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\alpha \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n \right| \, dx.$$

Or $|f(s)| \leq |d| + C_2|s|$, on a donc

$$\begin{aligned} \alpha \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}} |v_n| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|d||v_n|}{\|u_n\|_{L^2}} \, dx + C_2 \int_{\Omega} |v_n|^2 \, dx \\ &\leq \|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2. \end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et donc, à une sous-suite près, $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc $\|v\|_{L^2} = 1$ (ce qui donne $v \neq 0$). On a aussi (toujours à une sous-suite près) :

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow v \quad \text{p.p.}, \\ |v_n| &\leq H \quad \text{avec} \quad H \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Poincaré, il existe C_Ω , ne dépendant que de Ω t.q.

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} = \frac{\alpha}{C_\Omega} \|v_n\|_{L^2}^2 \leq \alpha \|v_n\|_{H_0^1}^2 \leq \int_\Omega \frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |v_n| \, dx.$$

On pose

$$X_n = \int_\Omega \frac{|f(u_n)||v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \, dx$$

et on montre maintenant que $X_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible puisque X_n est minoré par la constante α/C_Ω qui est strictement positive.

Montrons que $\frac{|f(u_n)||v_n|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \rightarrow 0$ p.p. avec domination (dans $L^1(\Omega)$), on aura alors par le théorème de convergence dominée que $X_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On montre tout d'abord la domination. On a

$$\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{|d| + C_2|u_n|}{\|u_n\|_{L^2}} \leq |d| + C_2|v_n| \leq |d| + C_2H,$$

donc $\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |v_n| \leq (|d| + C_2H)H \in L^1(\Omega)$.

On montre maintenant la convergence p.p.. On a $v_n \rightarrow v$ p.p. donc $\exists A$; $\text{mes}(A^c) = 0$ et $v_n(x) \rightarrow v(x) \forall x \in A$.

Soit $x \in A$,

1er cas : si $v(x) > 0$; $v_n(x) \rightarrow v(x)$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$ donc $u_n(x) = v_n(x)\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$.

$$\frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x))u_n(x)}{u_n(x)\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} (v_n(x))^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On a utilisé ici $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)/s = 0$.

2ème cas : si $v(x) < 0$; on a de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) = 0$, car $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$.

3ème cas : si $v(x) = 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n(x) \right| &\leq \frac{|d(x)| + C_2|u_n(x)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |v_n(x)| \\ &\leq (|d(x)| + C_2|v_n(x)|) |v_n(x)| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{car} \quad v(x) = 0. \end{aligned}$$

En résumé on a $\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n \rightarrow 0$ p.p..

On a ainsi montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 0$, en contradiction avec $X_n \geq \alpha/C_\Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a donc montré qu'il existe $R > 0$ t.q. $(u = h(t, u)) \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$. Ce qui montre (1). On a ainsi montré l'existence de solution à (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5). Ceci termine la démonstration du théorème 3.15 Existence theorem.3.15. ■

Sous les hypothèses (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7) (hypothèses du théorème 3.15 Existence theorem.3.15). Peut-on montrer l'unicité de la solution ? Dans le cas où f ne dépend pas de u et où l'équation est linéaire (that is to say que a ne dépend pas de u et φ est linéaire), il suffit de prendre la différence de deux solutions comme fonction test dans les deux formulations faibles associées à ces deux solutions et de faire la différences des deux équations obtenues. On montre ainsi que les deux solutions sont égales (p.p.). Dans le cas général, la situation est plus compliquée.

Pour avoir l'unicité, on va supposer a lipschitzienne. Par contre il est inutile de supposer f lipschitzienne, ça ne suffira pas pour l'unicité. En effet, prenons par exemple $a = 1$, $\varphi = 0$ et $f(u) = \lambda u$, où λ est une valeur propre de $(-\Delta)$ avec condition de Dirichlet. Le problème est alors

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} uv \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce problème admet deux solutions $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ une fonction propre associée à λ . Evidemment $f(u) = \lambda u$ ne satisfait pas la condition (vii) mais on peut modifier légèrement f pour vérifier (vii) et garder u_1 et u_2 comme solutions dès que $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ (le fait que $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ est toujours vrai si $N < 6$, ceci peut se démontrer, par exemple, à partir de l'exercice 2.18 Solutions bornées d'un problème elliptique, suite exo.2.18). En effet, en prenant \tilde{f} qui est égale à f sur $]-\gamma, \gamma[$ où $\gamma = \|u_2\|_{L^\infty}$ et qui est raccordée à 0 ensuite, de telle sorte que $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a les mêmes solutions pour $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, that is to say pour le problème :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f}(u)v \, dx \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

on a ainsi 2 solutions avec $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(s)/s = 0$. Cette hypothèse est donc inutile pour l'unicité.

On va montrer l'unicité dans le cas où f ne dépend pas de s , i.e. $f(x, s) = d(x)$, sous les hypothèses d'existence (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7) et en supposant de plus que a et φ sont lipschitziennes, c'est-à-dire :

$$\exists C_3 > 0 ; \forall s, s_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} |a(x, s_1) - a(x, s_2)| \leq C_3 |s_1 - s_2| \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, \\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_3 |s_1 - s_2|. \end{cases} \quad (3.13)$$

Théorème 3.16 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses (3.7) Existence avec le degré topologique equation.3.7) et (3.13) Existence avec le degré topologique equation.3.13), il existe une et une seule solution à (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5).*

Démonstration : La technique utilisée apparaît pour la première fois dans un article d'Artola en 1985. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.5) Existence avec le degré topologique equation.3.5). On a donc :

$$\int_{\Omega} a(u_1) \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} G\varphi(u_1) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad (3.14)$$

et

$$\int_{\Omega} a(u_2) \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} G\varphi(u_2) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.15)$$

L'idée est de prendre $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$ dans (3.14) et (3.15), où $\varepsilon > 0$ et T_ε est la troncature au niveau ε , that is to say $T_\varepsilon(s) =$

$$\begin{cases} -\varepsilon & \text{si } s < -\varepsilon, \\ s & \text{si } -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon, \\ \varepsilon & \text{si } s > \varepsilon. \end{cases}$$

Si u_1 et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, alors $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2)1_{\{0 < |u_1 - u_2| < \varepsilon\}}$ (ceci est une généralisation simple du lemme 2.21). En prenant $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$, et en faisant la différence de (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a(u_1)\nabla u_1 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)) - a(u_2)\nabla u_2 \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))) \, dx \\ & = \int_{\Omega} G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)) \, dx, \end{aligned}$$

soit encore, en posant $A_\varepsilon = \{0 < |u_1 - u_2| < \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} a(u_1)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx & = \int_{A_\varepsilon} (a(u_2) - a(u_1))\nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx \\ & + \int_{A_\varepsilon} G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $a(u_1) \geq \alpha$ p.p., et donc :

$$\alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \leq \int_{A_\varepsilon} C_3 |u_2 - u_1| |\nabla u_2| |\nabla(u_2 - u_1)| \, dx + \int_{A_\varepsilon} C_3 |u_1 - u_2| |G| |\nabla(u_1 - u_2)| \, dx.$$

On a $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ p.p. dans A_ε . En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans les deux dernières intégrales, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \alpha \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx & \leq C_3 \varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_2 - u_1)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + C_3 \varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq C_3 \varepsilon a_\varepsilon, \text{ avec } a_\varepsilon = \left(\int_{A_\varepsilon} |G|^2 \, dx \right)^{1/2} + \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

ou encore

$$\alpha \left(\int_{\Omega} |\nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))|^2 \, dx \right)^{1/2} = \alpha \|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon a_\varepsilon$$

donc, en désignant par m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N ,

$$\frac{\alpha}{m(\Omega)^{1/2}} \|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq \alpha \|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon a_\varepsilon.$$

Comme $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, on a $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ et l'inégalité de Sobolev donne

$$\|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^*}} \leq \|\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^1(\Omega)}, \text{ avec } 1^* = \frac{N}{N-1}$$

et donc

$$\frac{\alpha}{(mes \Omega)^{1/2}} \|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^*}} \leq C_3 \varepsilon a_\varepsilon.$$

Si $N = 1$, on a $N/(N-1) = +\infty$ et conclut facilement que $u_1 = u_2$ p.p.. Le cas $N \geq 2$ demande un léger développement supplémentaire. On remarque que

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^{1^*}} &= \left(\int_{\Omega} |T_\varepsilon(u_1 - u_2)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \\ &\geq \left(\int_{B_\varepsilon} \varepsilon^{1^*} dx \right)^{1/1^*} \\ &\geq \varepsilon (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}}, \end{aligned}$$

où $B_\varepsilon = \{x; |u_1(x) - u_2(x)| \geq \varepsilon\}$. On a donc

$$\varepsilon (m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{(m(\Omega))^{1/2}}{\alpha} C_3 \varepsilon a_\varepsilon$$

et on en déduit que $(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 a_\varepsilon$. Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = 1/n$, on a $A_{1/(n+1)} \subset A_{1/n}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n} = \emptyset$, donc $m(A_{1/n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (par continuité décroissante d'une mesure). On rappelle que

$$a_{1/n} = \left(\int_{A_{1/n}} |G|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{A_{1/n}} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Comme $G, |\nabla u_2| \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{1/n} = 0$.

On a aussi $B_{1/(n+1)} \supset B_{1/n}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n} = \{|u_1 - u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(B_{1/n}) = m\{|u_1 - u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). Comme

$$(m(B_{1/n}))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 a_{1/n},$$

en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $m\{|u_1 - u_2| > 0\} \leq 0$, et donc $u_1 = u_2$ p.p., ce qui termine la démonstration. ■

3.2 Méthodes de monotonie

3.2.1 Introduction

Pour le problème (3.3) Existence avec le théorème de Schauder (equation.3.3), dans le cas où f (le second membre) dépend de ∇u , on sait encore prouver l'existence d'une solution avec le théorème de Schauder, voir exercice

3.3 Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2 exo.3.3. La question est plus difficile dans le cas où a dépend de ∇u . On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \\ a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \\ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*; \alpha \leq a(\xi) \leq \beta, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ f \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

On cherche à montrer l'existence d'une solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(\nabla u) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Peut-on appliquer le théorème de Schauder ? Pour l'appliquer, il faut l'utiliser dans $H_0^1(\Omega)$ pour que $a(\nabla u)$ ait un sens. Soit $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, par le lemme de Lax Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(\nabla \tilde{u}) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.16)$$

Soit T l'opérateur de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ défini par $T(\tilde{u}) = u$ solution de (3.16 Introduction equation.3.16). L'opérateur T est bien de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et

- (1) il existe $R > 0$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ pour tout $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$,
- (2) l'application T est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\nabla \tilde{u}_n \rightarrow \nabla \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)^N$ et il n'est pas très difficile de montrer que $T(\tilde{u}_n) \rightarrow T(\tilde{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Mais, l'application T n'est (en général) pas compacte (de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). Si on était en dimension finie, les points (1) et (2) suffiraient à montrer l'existence d'une solution. L'idée est donc de considérer des problèmes approchés en dimension finie et de passer à la limite en utilisant la monotonie de l'opérateur (qui est vraie sous des hypothèses données sur a ci-après).

3.2.2 Opérateur de Leray-Lions

On considère ici un cas un peu simplifié des opérateurs de Leray-Lions. On considère les hypothèses suivantes :

- 1) Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $1 < p < +\infty$,
- 2) $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue,
- 3) (coercivité) $\exists \alpha > 0$ t.q. $a(\xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$,
- 4) (croissance) $\exists C \in \mathbb{R}$; $|a(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1})$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, (3.17)
- 5) (monotonie) $(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$,
- 6) $\sigma \in L^\infty(\Omega)$; $\exists \sigma_0 > 0$; $\sigma \geq \sigma_0$ p.p. ,
- 6) $f \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Ces hypothèses permettent en particulier de traiter certains modèles dits “LES” (Large Eddy Simulations) utilisés en mécanique des fluides. On s’intéresse alors au problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(x)a(\nabla u(x))) = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

Exemple 3.17 Pour $\sigma \equiv 1$ et $a(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ ($1 < p < +\infty$), l’équation s’écrit $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f$.

L’opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ s’appelle le p -laplacien. Pour $p = 2$, on retrouve le Laplacien classique. Le cas $p = 3$ donne l’opérateur de Smagoriskii qui apparaît dans un modèle de LES.

Remarque 3.18 Le cadre général des opérateurs dits “de Leray-Lions”, contient des fonctions $a(x, u, \nabla u)$ au lieu de $a(x, \nabla u)$.

Cherchons une forme faible adéquate de (3.18) Opérateur de Leray-Lions equation.3.18). Remarquons que si $w \in L^p(\Omega)^N$, alors, l’hypothèse de croissance sur a donne

$$\begin{aligned} |a(w)| &\leq C(1 + |w|^{p-1}) \\ &\leq C + C|w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \end{aligned}$$

car $C \in L^\infty$ et $|w|^{p-1} \in L^{p/p-1}(\Omega) = L^{p'}(\Omega)$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$ (ou encore $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Donc si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$ et $a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$.

Prenons alors $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\nabla v \in L^p(\Omega)^N$. On a donc

$$a(\nabla u) \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^N a_i(\nabla u) D_i v \in L^1(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et de prendre les fonctions test dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On rappelle aussi que si $f \in L^{p'}(\Omega)$, l’application $v \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est linéaire continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans \mathbb{R} . C’est donc un élément du dual (topologique) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ce dual est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$). Par abus de langage, on note encore f cet élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$, that is to say que pour $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La forme faible de (3.18) Opérateur de Leray-Lions equation.3.18) que l’on considère est donc :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \int_\Omega \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (3.19)$$

Remarque 3.19 Le cadre “naturel” du problème (3.19) Opérateur de Leray-Lions equation.3.19) n’est donc pas limité au cas $f \in L^{p'}(\Omega)$. On peut remplacer dans (3.19) Opérateur de Leray-Lions equation.3.19) f par n’importe quel élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Par exemple, si $F \in L^{p'}(\Omega)^N$, on peut remplacer, dans (3.19) Opérateur de Leray-Lions equation.3.19), $\langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}$ par $\int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx$. Sous cette hypothèse, le théorème d’existence et d’unicité donné ci après (théorème 3.20) Existence et unicité theorem.3.20) reste vrai.

Théorème 3.20 (Existence et unicité) *Sous les hypothèses (3.17) Opérateur de Leray-Lion equation.3.17), il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de (3.19) Opérateur de Leray-Lion equation.3.19). Si de plus a est strictement monotone, c'est à dire $(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ pour tout $(\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $\xi \neq \eta$, alors il existe une unique solution u de (3.19) Opérateur de Leray-Lion equation.3.19).*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin des lemmes (classiques) d'intégration suivants :

Lemme 3.21 (Cv forte contre cv faible) *Soit $1 < p < +\infty$. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$. On suppose que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \rightarrow g$ faiblement dans $L^{p'}(\Omega)$. Alors*

$$\int_{\Omega} f_n g_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f g dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Par contre, on rappelle que si $f_n \rightarrow f$ dans L^p faible et $g_n \rightarrow g$ dans $L^{p'}$ faible, on n'a pas en général convergence de $\int_{\Omega} f_n g_n dx$ vers $\int_{\Omega} f g dx$.

Lemme 3.22 *Si $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $a(\xi) \leq C(1 + |\xi|^{p-1})$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et si $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $a(\nabla u_n) \rightarrow a(\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)^N$.*

Le lemme 3.22 Opérateur de Leray-Lion theorem.3.22 se démontre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On rappelle aussi que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < +\infty$, et donc pour toute suite bornée d'un de ces espaces, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans cet espace. On rappelle enfin que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont séparables, i.e. ils contiennent une partie dénombrable dense, ce qui va nous permettre l'approximation par des problèmes de dimension finie. On aura également besoin pour la démonstration du lemme suivant :

Lemme 3.23 (Opérateur coercif dans \mathbb{R}^N) *Soit $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue. On suppose que T est coercif, c'est à dire que*

$$\frac{T(v) \cdot v}{|v|} \rightarrow +\infty \text{ quand } |v| \rightarrow +\infty.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^N$. Alors, il existe $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $T(v) = b$. L'opérateur T est donc surjectif.

Démonstration On utilise le degré topologique de Brouwer (ce qui possible car on est en dimension finie). On pose $h(t, v) = tT(v) + (1-t)v$. Pour $t = 0$, on a $h(0, v) = v$ (donc $h(0, v) = I$, où I est l'opérateur $v \mapsto v$). Pour $t = 1$ on a $h(1, v) = T(v)$. Pour appliquer le degré, on remarque d'abord que l'application $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue (car T est continue).

On veut ensuite montrer qu'il existe $R > 0$ t.q.

$$t \in [0, 1], v \in \mathbb{R}^N \text{ et } h(t, v) = b \Rightarrow |v| < R. \quad (3.20)$$

On suppose qu'on a démontré (3.20) Opérateur de Leray-Lion equation.3.20). Quitte à augmenter R , on peut aussi supposer que $|b| < R$. On pose $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } |x| < R\}$. Par invariance par homotopie du degré, on a donc que $d(h(t, \cdot), B_R, b)$ ne dépend pas de t , et donc :

$$d(T, B_R, b) = d(I, B_R, b).$$

Comme $b \in B_R$, on a $d(I, B_R, b) = 1$ et donc $d(T, B_R, b) = 1$. On en déduit l'existence de $v \in B_R$ tel que $T(v) = b$.

Il reste à démontrer qu'il existe $R > 0$ vérifiant (3.20) Opérateur de Leray-Lions equation.3.20).

Soit $t \in [0, 1]$ et $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $h(t, v) = b$, c'est-à-dire $tT(v) + (1-t)v = b$.

On a donc $tT(v) \cdot v + (1-t)v \cdot v = b \cdot v \leq |b||v|$ et donc, si $v \neq 0$,

$$t \frac{T(v) \cdot v}{|v|} + (1-t)|v| = t \frac{T(v) \cdot v}{|v|} + (1-t) \frac{v \cdot v}{|v|} \leq |b|.$$

Comme $\frac{T(w) \cdot w}{|w|} \rightarrow +\infty$ lorsque $|w| \rightarrow +\infty$, il existe $R > 0$ t.q.

$$|w| \geq R \Rightarrow \min\left(\frac{T(w) \cdot w}{|w|}, |w|\right) > |b|.$$

On en déduit que $|v| < R$. Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Lemme 3.24 (Opérateur coercif en dimension finie) Soit E un espace de dimension finie, et $T : E \rightarrow E'$ continue (noter que $\dim E' = \dim E < +\infty$). On suppose que T est coercif, that is to say :

$$\frac{\langle T(v), v \rangle_{E', E}}{\|v\|_E} \rightarrow +\infty \text{ quand } \|v\|_E \rightarrow +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in E'$ il existe $v \in E$ t.q. $T(v) = b$.

Démonstration On se ramène à \mathbb{R}^N . Soit $N = \dim E$. On choisit une base de E , notée (e_1, \dots, e_N) , et on note (e_1^*, \dots, e_N^*) la base duale de E' (that is to say t.q. $\langle e_i^*, e_j \rangle_{E', E} = \delta_{ij}$). On définit une application I de \mathbb{R}^N dans E et une application J de \mathbb{R}^N dans E' par

$$I(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \text{ et } J(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i e_i^* \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N.$$

L'opérateur I est une bijection linéaire de \mathbb{R}^N dans E et l'opérateur J est une bijection linéaire de \mathbb{R}^N dans E' . Soit $\tilde{T} = J^{-1} \circ T \circ I$. L'opérateur \tilde{T} est continu de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N .

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$. On pose $v = I(\alpha)$ et $\beta = \tilde{T}(\alpha)$ (donc $\beta = J^{-1}(T(v))$). On a donc

$$\tilde{T}(\alpha) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha = \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i = \left\langle \sum_{j=1}^N \beta_j e_j^*, \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \right\rangle_{E', E} = \langle J(\beta), I(\alpha) \rangle_{E', E} = J(\beta) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \right) = \langle T(v), v \rangle_{E', E}.$$

En prenant comme norme sur \mathbb{R}^N , $\|\alpha\| = \|I(\alpha)\|_E$, l'hypothèse de coercivité sur T donne alors

$$\lim_{\|\alpha\| \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha) \cdot \alpha}{\|\alpha\|} = +\infty.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, on a donc aussi

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha) \cdot \alpha}{|\alpha|} = +\infty.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.23 Opérateur coercif dans \mathbb{R}^N theorem.3.23 à \tilde{T} .

Soit $b \in E'$. On pose $\beta = J^{-1}(b)$. Le lemme 3.23 Opérateur coercif dans \mathbb{R}^N theorem.3.23 donne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^N$ t.q. $\tilde{T}(\alpha) = \beta$. On pose $v = I(\alpha)$ et on a alors $T(v) = T \circ I(\alpha) = J \circ \tilde{T}(\alpha) = J(\beta) = b$. On a ainsi montré l'existence de v dans E t.q. $T(v) = b$. ■

Démonstration du théorème 3.20 Existence et unicité theorem.3.20

Étape 1 Existence de la solution à un problème en dimension finie

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable. Il existe donc une famille dénombrable $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $E_n = \text{Vect}\{f_1 \dots f_n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette famille. On a donc $\dim E_n \leq n$ et $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = W_0^{1,p}$. On en déduit que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n \rightarrow v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Dans cette première étape, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on cherche u_n solution du problème suivant, posé en dimension finie :

$$\begin{cases} u_n \in E_n, \\ \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} \quad \forall v \in E_n. \end{cases} \quad (3.21)$$

L'application $v \mapsto \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}}$ est une application linéaire E_n dans \mathbb{R} (elle est donc aussi continue car $\dim E_n < +\infty$). On note b_n cette application. On a donc $b_n \in E'_n$ et

$$\langle b_n, v \rangle_{E'_n, E_n} = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}}.$$

Soit $u \in E_n$. On note $T_n(u)$ l'application de E_n dans \mathbb{R} qui a $v \in E_n$ associe $\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx$. Cette application est linéaire, c'est donc aussi un élément de E'_n et on a

$$\langle T_n(u), v \rangle_{E'_n, E_n} = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx.$$

On a ainsi défini une application T de E_n dans E'_n . On va montrer que T est continue et coercive. On pourra ainsi en déduire, par le lemme 3.24 Opérateur coercif en dimension finie theorem.3.24, que T est surjectif, et donc qu'il existe $u_n \in E_n$ vérifiant $T(u_n) = b_n$, that is to say u_n solution du problème (3.21) Opérateur de Leray-Lions equation.3.21).

(a) Continuité de T_n On rappelle que n est fixé. Pour simplifier les notations, on oublie ici l'indice n , that is to say que l'on pose $E = E_n$ et $T = T_n$. On munit E de la norme définie par $\| \cdot \|_E = \| \cdot \|_{W_0^{1,p}}$. Soit $u, \bar{u} \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &= \max_{v \in E, \|v\|_E=1} \langle T(u) - T(\bar{u}), v \rangle_{E', E} \\ &= \max_{v \in E, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \int_{\Omega} \sigma (a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})) \cdot \nabla v \, dx \\ &\leq \max_{v \in W_0^{1,p}, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \int_{\Omega} \sigma (a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

On pose $\beta = \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\bar{u})\|_{E'} &\leq \max_{v \in W_0^{1,p}, \|v\|_{W_0^{1,p}}=1} \beta \| |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})| \|_{L^{p'}(\Omega)} \| |\nabla v| \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \beta \| |a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})| \|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $u_n \rightarrow \bar{u}$ dans E , on a

$$\|T(u_n) - T(\bar{u})\|_{E'} \leq \beta \| |a(\nabla u_n) - a(\nabla \bar{u})| \|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Par le lemme 3.22 Opérateur de Leray-Lion theorem.3.22, on a $a(\nabla u_n) \rightarrow a(\nabla \bar{u})$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. On a ainsi montré que $T(u_n) \rightarrow T(\bar{u})$ dans E' , et donc que T est continue (de E dans E').

(b) **Coercivité de T_n** On rappelle qu'on a posé $E = E_n$ et $T = T_n$. On veut montrer que

$$\frac{\langle T(u), u \rangle_{E', E}}{\|u\|_E} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \rightarrow +\infty.$$

Par définition, et grâce aux hypothèses (3.17 Opérateur de Leray-Lion equation.3.17),

$$\langle T(u), u \rangle_{E', E} = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq \sigma_0 \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx.$$

On a donc

$$\langle T(u), u \rangle_{E', E} \geq C \|u\|_{W_0^{1,p}}^p = C \|u\|_E^p \quad \text{avec } C = \sigma_0 \alpha.$$

Finalement,

$$\frac{\langle T(u), u \rangle_{E', E}}{\|u\|_E} \geq C \|u\|_E^{p-1} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \rightarrow +\infty,$$

car on a supposé $p > 1$ (le cas $p = 1$ est plus difficile et demande des outils supplémentaires, mais il est intéressant en géométrie pour le problème des surfaces minimales par exemple).

On a ainsi montré que T est coercive. On peut donc appliquer le lemme 3.24 Opérateur coercif en dimension finie theorem.3.24. Il donne l'existence d'une solution au problème en dimension finie (3.21 Opérateur de Leray-Lion equation.3.21) (cette technique permet aussi par exemple de démontrer l'existence de solution pour le problème (3.19 Opérateur de Leray-Lion equation.3.19) approché par éléments finis $P1$).

Étape 2 Existence de la solution à un problème en dimension infinie On a montré l'existence d'une solution au problème (3.21 Opérateur de Leray-Lion equation.3.21). On va maintenant tenter (et réussir !) un passage à la limite sur ce problème lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.19 Opérateur de Leray-Lion equation.3.19) Pour cela nous allons :

- (a) obtenir une *estimation* sur u_n , qui nous permettra d'obtenir de la *compacité*, et donc d'effectuer
- (b) un *passage à la limite* sur les problèmes (3.21 Opérateur de Leray-Lion equation.3.21) de manière à avoir l'existence d'une solution u du problème (3.19 Opérateur de Leray-Lion equation.3.19) comme limite des solutions u_n des problèmes (3.21 Opérateur de Leray-Lion equation.3.21) ; pour cela, il nous faudra une
- (c) astuce pour montrer que la *limite du terme non linéaire* est bien le terme qu'on veut. ...

(a) **Estimation sur u_n**

On prend $v = u_n$ dans (3.21 Opérateur de Leray-Lion equation.3.21). On obtient :

$$\sigma_0 \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \, dx \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$$

par coercivité de a . On a donc : $\sigma_0 \alpha \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$, d'où

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \leq \frac{1}{\sigma_0 \alpha} \|f\|_{W^{-1,p'}}.$$

(b) **Passage à la limite**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, qui est réflexif. On en déduit qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Par hypothèse, $|a(\nabla u_n)| \leq C(1 + |\nabla u_n|^{p-1})$, donc la suite $(a(\nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$, qui est réflexif. Donc il existe $\zeta \in (L^{p'}(\Omega))^N$ telle que, à une sous-suite près,

$$a(\nabla u_n) \rightarrow \zeta \quad \text{faiblement dans} \quad (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on sait que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, donc il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow v \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ \nabla v_n &\rightarrow \nabla v \text{ dans } (L^p(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On utilise alors (3.21) Opérateur de Leray-Lionsequation.3.21 avec $v = v_n$ on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v_n dx = \langle f, v_n \rangle.$$

Mais $\langle f, v_n \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle$, car v_n converge faiblement vers v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De plus $a(\nabla u_n) \rightarrow \zeta$ faiblement dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et $\nabla v_n \rightarrow \nabla v$ (fortement) dans $(L^p(\Omega))^N$. Donc par le lemme 3.21 Cv forte contre cv faibletheorem.3.21, on a

$$\int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.22)$$

On a ainsi prouvé l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.q. u est la limite faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et t.q. la limite faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ de la suite $(a(\nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, notée ζ , vérifie (3.22) Opérateur de Leray-Lionsequation.3.22). Si ζ était égal à $a(\nabla u)$, on aurait terminé. Malheureusement, ceci n'est pas évident car a peut être non linéaire...

(c) Limite du terme non linéaire Pour terminer, il reste à démontrer que

$$\int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla v dx \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.23)$$

On peut le démontrer par deux manières différentes, selon les hypothèses :

1. Par l'astuce de Minty, qui utilise uniquement la monotonie de a , that is to say $(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0$. On a dans ce cas uniquement $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Par la méthode de Leray-Lions, qui utilise la stricte monotonie de a , that is to say $(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ pour tout $\xi, \eta, \xi \neq \eta$. On a alors en plus $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (that is to say une convergence forte et non seulement faible).

(A) Etape commune à Minty et Leray-Lions.

Pour montrer (3.23) Opérateur de Leray-Lionsequation.3.23), on commence par étudier la limite de $\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx$. L'astuce consiste à utiliser l'équation ! En effet $\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$ car $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible. Mais on sait (étape précédente) que u satisfait (3.22) Opérateur de Leray-Lionsequation.3.22), et donc : $\langle f, u \rangle_{E', E} = \int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla u dx$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx &= \langle f, u \rangle_{E', E} \\ &= \int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla u dx. \end{aligned}$$

On distingue maintenant les méthodes “Minty” et “Leray-Lions” (qui sont toutefois très voisines).

(B) Démonstration de (3.23) Opérateur de Leray-Lions equation.3.23)

• **1ère méthode : Astuce de Minty**

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$; il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \rightarrow v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On va passer à la limite dans le terme $\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v_n \, dx$ grâce à l’hypothèse de monotonie. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \sigma (a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) \, dx = \\ &\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, dx - \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla v_n \, dx - \int_{\Omega} \sigma a(\nabla v_n) \cdot \nabla u_n \, dx + \int_{\Omega} \sigma a(\nabla v_n) \cdot \nabla v_n \, dx \\ &= T_{1,n} - T_{2,n} - T_{3,n} + T_{4,n} . \end{aligned}$$

On a vu que en (A) que $T_{1,n} \rightarrow \int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla u \, dx$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2,n} = \int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla v \, dx$$

par produit d’une convergence forte dans $(L^p)^N$ et d’une convergence faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ (lemme 3.21Cv forte contre cv faible theorem.3.21). De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{3,n} = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla v) \cdot \nabla u \, dx$$

par produit d’une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et d’une convergence faible dans $(L^p(\Omega))^N$. Enfin, on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{4,n} = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla v) \cdot \nabla v \, dx$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$ et ce dernier terme est le plus simple car on a le produit d’une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et d’une convergence forte dans $(L^p(\Omega))^N$.

Le passage à la limite dans l’inégalité donne donc :

$$\int_{\Omega} \sigma (\zeta - a(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx \geq 0 \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement la fonction test v . On prend $v = u + \frac{1}{n}w$, avec $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n} \int_{\Omega} \sigma \left(\zeta - a\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right) \right) \cdot \nabla w \, dx \geq 0$$

et donc

$$\int_{\Omega} \sigma \left(\zeta - a\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right) \right) \cdot \nabla w \, dx \leq 0.$$

Mais $u + \frac{1}{n} w \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc par le lemme 3.22 Opérateur de Leray-Lion theorem.3.22, $a\left(\nabla u + \frac{1}{n} \nabla w\right) \rightarrow a(\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient alors

$$\int_{\Omega} \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \, dx \leq 0 \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer w en $-w$), on a donc : $\int_{\Omega} \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \nabla w \, dx = 0$, $\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On en déduit que

$$\int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla w \, dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On a donc bien démontré que u est solution de (3.19) Opérateur de Leray-Lion equation.3.19).

Notons que l'on a montré ce résultat par approximation, c'est à dire en montrant d'abord l'existence de solution à un problème approché qui se pose en dimension finie, puis en passant à la limite. Ceci est également possible en utilisant un problème approché obtenu avec des schémas numériques. Par exemple, avec un schéma numérique utilisant des éléments finis $P1$.

- **2ère méthode : Astuce de Leray-Lions** On suppose maintenant la stricte monotonie de a , that is to say :

$$(a(\xi) - a(\eta)) \cdot (\zeta - \eta) > 0 \quad \text{si } \xi \neq \eta.$$

On va montrer que u est solution de (3.19) Opérateur de Leray-Lion equation.3.19) (on le sait déjà, grâce à la première méthode) mais aussi que $a(\nabla u) = \zeta$ et surtout que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme $\overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}$, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q $v_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par hypothèse de monotonie, on a :

$$\int_{\Omega} \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) \geq 0.$$

Avec le même raisonnement que pour Minty (mais maintenant $v_n \rightarrow u$ au lieu de $v_n \rightarrow v$), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n) \, dx = \int_{\Omega} \sigma(\zeta - a(\nabla u)) \cdot \underbrace{(\nabla u - \nabla u)}_{=0} \, dx,$$

donc si on pose $F_n(x) = \sigma(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n)) \cdot (\nabla u_n - \nabla v_n)$, on a $F_n \geq 0$ p.p. et $\int_{\Omega} F_n \, dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $F_n \rightarrow 0$ dans L^1 , et donc, après extraction d'une sous-suite, $F_n \rightarrow 0$ p.p.. On peut aussi supposer, après extraction d'une sous-suite, que $\nabla v_n \rightarrow \nabla u$ p.p..

Soit $x \in \Omega$ t.q. $\sigma(x) \geq \sigma_0$, $F_n(x) \rightarrow 0$ (on a donc $a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x)) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x)) \rightarrow 0$) et $\nabla v_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Étape A : La suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R}^N . En effet, grâce aux hypothèses de croissance et coercivité sur a , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0} F_n(x) &\geq (a(\nabla u_n(x)) - a(\nabla v_n(x))) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla v_n(x)) \\ &\geq \alpha |\nabla u_n(x)|^p - C(1 + |\nabla u_n(x)|^{p-1}) |\nabla v_n(x)| - C(1 + |\nabla v_n(x)|^{p-1}) |\nabla u_n(x)| + \alpha |\nabla v_n(x)|^p. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée si la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée. Or $F_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc il faut que la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Etape B : Soit $\zeta \in \mathbb{R}^N$ limite d'une sous suite de la suite $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. On a donc pour cette sous suite (encore notée $(\nabla u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(\nabla u_n(x)) = a(\zeta)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$, on en déduit

$$(a(\zeta) - a(\nabla u(x))) \cdot (\zeta - \nabla u(x)) = 0.$$

Or, le 1er terme de cette égalité est strictement positif si $\zeta \neq \nabla u(x)$. On a donc $\zeta = \nabla u(x)$. On a donc (sans extraction de sous suite pour cette étape) $\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En résumé, on a ainsi montré que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p. (à une sous suite près, car on extrait une sous suite pour avoir $F_n \rightarrow 0$ p.p. et $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p.). On en déduit que $a(\nabla u_n) \rightarrow a(\nabla u)$ p.p.. Ceci est suffisant pour montrer que $\zeta = a(\nabla u)$. En effet, on sait déjà que $a(\nabla u_n) \rightarrow \zeta$ dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ faible. On en déduit alors que $\zeta = a(\nabla u)$ par le lemme d'intégration (voir poly d'intégration) suivant :

Lemme 3.25 (Compacité $L^p - L^q$) Soit Ω un ouvert borné. On suppose que $f_n \rightarrow f$ p.p. et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans L^q , $q > 1$. alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r t.q. $1 \leq r < q$.

Du lemme 3.25 Compacité $L^p - L^q$ theorem.3.25, on déduit que la suite $(a(\nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^r(\Omega)^N$, pour $1 \leq r < p'$, vers $a(\nabla u)$. Comme cette même suite converge faiblement dans $(L^{p'})^N(\Omega)$ vers ζ , on peut conclure (par exemple en utilisant l'unicité de la limite faible dans $L^r(\Omega)^N$) que les limites sont égales, that is to say

$$\zeta = a(\nabla u) \text{ p.p..}$$

Il reste à montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On sait déjà que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc (fortement) dans $L^p(\Omega)$. Comme, après extraction d'une sous suite, on a $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p., le lemme 3.25 Compacité $L^p - L^q$ theorem.3.25 nous donne $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ dans $L^r(\Omega)^N$ pour tout $1 \leq r < p$ et donc $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$. En raisonnant par contradiction on a même $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < p$ sans extraction de sous suite. Mais ceci ne donne pas la convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour démontrer cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on réutilise l'étape (A) commune à Minty et Leray-Lions. Cette étape a donné

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_{\Omega} \sigma \zeta \cdot \nabla u dx.$$

Mais, on sait maintenant que $\zeta = a(\nabla u)$ p.p., on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n dx = \int_{\Omega} \sigma a(\nabla u) \cdot \nabla u dx.$$

On rappelle maintenant un lemme classique d'intégration (encore...), valable dans tout espace mesuré mais que l'on donne ici dans le cas qui nous intéresse.

Lemme 3.26 (Convergence L^1 pour une suite de fonctions positives)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Soit $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\Omega)$ vérifie :

1. $f_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $f_n \rightarrow f$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$.

Alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$.

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p.. On applique alors le lemme 3.26 Convergence L^1 pour une suite de fonctions positives theorem.3.26 à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n = \sigma a(\nabla u_n) \cdot \nabla u_n$. Le lemme 3.26 Convergence L^1 pour une suite de fonctions positives theorem.3.26 donne la convergence $L^1(\Omega)$ de cette suite et donc l'équitégrabilité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Avec l'hypothèse de coercivité sur a et l'hypothèse sur σ , on obtient l'équitégrabilité de la suite $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste à appliquer le théorème de Vitali (voir le poly d'intégration) pour conclure que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ dans $L^p(\Omega)^N$ et donc que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme d'habitude, un argument par contradiction montre que cette convergence dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ a lieu sans extraction sous suite dès que u_n converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (et pour avoir cette convergence, on a dû extraire une sous suite). Dans l'étape 3 ci dessous, on va démontrer l'unicité de la solution de (3.19) Opérateur de Leray-Lions equation.3.19 si a est strictement monotone. Ceci permet de conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (sans extraction de sous suite) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers l'unique solution de (3.19) Opérateur de Leray-Lions equation.3.19).

On a ainsi terminé la partie "existence" du théorème 3.20 Existence et unicité theorem.3.20

Etape 3 : Unicité On suppose que a est strictement monotone. Soient u_1 et u_2 deux solutions.

$$\int_{\Omega} \sigma a(\nabla u_i) \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \quad i = 1, 2 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On fait la différence des deux équations, et on prend $v = u_1 - u_2$. On obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma (a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)) \cdot \nabla (u_1 - u_2) \, dx = 0.$$

Or $Y = \sigma (a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)) \cdot \nabla (u_1 - u_2) \geq 0$, et $Y > 0$ si $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$; on a donc $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. et donc $u_1 = u_2$ car u_1 et $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 3.27 Dans le cas des opérateurs de Leray - Lions, lorsque a dépend de x , ∇u mais aussi de u , on arrive encore à montrer des résultats d'unicité si $p \leq 2$. ■

3.3 Exercices

Exercice 3.1 (Continuité d'une application de L^p dans L^q) Solution 3.1 Continuité d'une application de L^p dans L^q cor.3.1

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* ; |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$.

On pose $L^r = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^r(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\}$, avec $v \in u$ (de sorte que $G(u) \in L^q$).

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u .

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \rightarrow u$ p.p., quand $n \rightarrow +\infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \rightarrow G(u)$ dans L^q .

4. Montrer que G est continue de L^p dans L^q .

5. On considère ici $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (3.24Exercicesequation.3.24). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2} = 1.$$

(c) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n]}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Exercice 3.2 (Existence par Schauder) Solution 3.2 Existence par Schauder cor.3.2

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $g \in L^2(\Omega)$, a une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et h une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} . On suppose que

— $0 < \alpha = \inf_{s \in \mathbb{R}} a(s) \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} a(s) = \beta < +\infty$,

— il existe $\delta \in [0, 1[$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $|h(s, \xi)| \leq C_1(1 + |s|^\delta + |\xi|^\delta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

1. Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $h(\bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(\bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} h(\bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.25)$$

Dans la suite, on note T l'application qui à \bar{u} associe u , unique solution de (3.25Exercicesequation.3.25). L'application T est donc de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. (Estimation sur u) Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\bar{u})$. Montrer qu'il existe C_2 ne dépendant que Ω , α , g et C_1 t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta).$$

[On pourra prendre $v = u$ dans (3.25Exercicesequation.3.25).]

En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R.$$

3. (Continuité de T) Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$). On pose $f_n = h(\bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$, $f = h(\bar{u}, \nabla \bar{u})$, $u_n = T(\bar{u}_n)$ et $u = T(\bar{u})$.

(a) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$.

(b) Montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

(c) Montrer que $\int_{\Omega} a(\bar{u}_n(x)) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a(\bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx$.

En déduire que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra s'inspirer de l'exercice 2.15Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1 exo.2.15.]

4. (Compacité de T) Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $f_n = h(\bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$ et $u_n = T(\bar{u}_n)$. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ t.q.

$f_n \rightarrow f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$,

$a(\bar{u}_n) \rightarrow b$ p.p.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra raisonner comme dans l'exercice 2.15 Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1 exo.2.15.]

5. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = T(u)$ (et donc u solution de (3.25) Exercices equation.3.25) avec $\bar{u} = u$.

Exercice 3.3 (Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2) *Solution 3.3 Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2* *Exercices exo.3.2 cor.3.3*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} vérifiant :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\alpha \leq a(x, s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s, p)| \leq C(d + |s|^\delta + |p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.26)$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Exercice 3.4 (Degré d'une application affine) *Solution 3.4 Degré d'une application affine cor.3.4*

Soit E un espace de Banach (réel). Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E \text{ t.q. } \|v\|_E < R\}$.

1. Soit f une application constante de E dans E . Il existe donc $a \in E$ t.q. $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ t.q. $\|a\|_E \neq R$. Montrer que $d(I - f, B_R, 0)$ est bien défini et que $d(I - f, B_R, a) = 1$ si $R > \|a\|_E$ et $d(I - f, B_R, a) = 0$ si $R < \|a\|_E$.
2. Soit L une application linéaire compact de E dans E . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L . Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.
 - (a) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.
 - (b) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrer que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si $R > \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < \|b\|_E$.

Exercice 3.5 (Convection-diffusion, Dirichlet, existence) *Solution 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence cor.3.5*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 , $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

On s'intéresse ici au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(W\varphi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de solution faible au problème (3.27) Exercices equation.3.27). L'unicité (et la positivité si $f \geq 0$ p.p.) de la solution faible est montré dans l'exercice 3.6 Convection-diffusion, Dirichlet, unicité exo.3.6.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^N$. [Utiliser le théorème d'injection de Sobolev, théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28.]

Cette première question permet de définir la formulation faible du problème (3.27 Exercise equation.3.27). Elle consiste à chercher u solution de (3.28 Exercise equation.3.28).

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(u(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.28)$$

Pour montrer l'existence d'une solution à (3.28 Exercise equation.3.28) on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application h de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q = 2p/(p-2)$ (de sorte que $1/p + 1/q = 1/2$). On pose donc pour la suite $q = 2p/(p-2)$. Si $N = 3$, on pose $2^* = 6$ et si $N = 2$, on choisit pour 2^* un nombre strictement supérieur à q (de sorte que, pour $N = 2$ ou 3 , $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2^*}(\Omega)$ et compactement dans $L^q(\Omega)$).

2. (Construction des opérateurs B et h) Soit $\tilde{u} \in L^q$. Montrer qu'il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(\tilde{u}(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.29)$$

On note B l'opérateur qui à \tilde{u} dans $L^q(\Omega)$ associe u solution de (3.29 Exercise equation.3.29). Puis, pour $t \in [0, 1]$ et $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$, on pose $h(t, \tilde{u}) = B(t\tilde{u})$.

3. Montrer que h est continu et compact de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.
4. (Estimations *a priori*) Soit $u \in L^q(\Omega)$ t.q. $u = h(t, u)$. On a donc

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(tu(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.30)$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(s) = \int_0^s \frac{1}{(1+|\xi|)^2} d\xi$.

- (a) Montrer que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$. En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.30 Exercise equation.3.30), montrer qu'il existe C_l ne dépendant que Ω, W, φ et f t.q.

$$\|\ln(1 + |u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_l.$$

- (b) Pour $v \in L^{2^*}(\Omega)$, montrer que pour tout $A \geq 0$ on a

$$\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \lambda_N(\{|v| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^*}} + A^q \lambda_N(\Omega).$$

On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^N .

- (c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, W, φ et f t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < C$.

5. (Degré topologique) Montrer l'existence d'une solution à (3.28 Exercise equation.3.28).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.28 Exercise equation.3.28) avec $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$.

Exercice 3.6 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité) Solution 3.6 Convection-diffusion, Dirichlet, unicité cor.3.6

On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5, that is to say :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 , $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

L'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.27 Exercise equation.3.27) that is to say u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(u(x))W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.31)$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.31 Exercise equation.3.31) et de montrer que $u \geq 0$ p.p. si $f \geq 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.31 Exercise equation.3.31).
2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.28 Exercise equation.3.28) avec $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5).
3. On suppose $f \leq 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.31 Exercise equation.3.31). Montrer que $u \leq 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.31 Exercise equation.3.31) avec $S_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Exercice 3.7 (Existence par minimisation)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), a une fonction de Ω dans \mathbb{R} et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} vérifiant :

- $a \in L^\infty(\Omega)$.
- Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\alpha \leq a$ p.p..
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s)| \leq C|s|^\delta + d$ p.p., pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$, on pose $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$.
Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$.
2. Montrer que $E(u) \rightarrow +\infty$ quand $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.
4. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.32)$$

Exercice 3.8 (Minimisation avec contrainte)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) et $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$. On cherche une solution non nulle au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.33)$$

1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$ et $F(v) = \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx$. On pose aussi $A = \{v \in H_0^1(\Omega), F(v) = 1\}$. Montrer qu'il existe $u \in A$ t.q. $u \geq 0$ p.p. et $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in A$.
2. Montrer qu'il existe u non nulle, $u \geq 0$ p.p., solution faible de (3.33). Exercice equation.3.33).

Exercice 3.9 (Convergence faible et non linéarité) Solution 3.7 *Convergence faible et non linéarité cor.3.7*

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Lorsque qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q , il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n \varphi(u_n)$ converge vers $\int u f$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (that is to say $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v . On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n w \, dm = \int u w \, dm \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int v_n w \, dm = \int v w \, dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans L^2 (quand $n \rightarrow +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 \, dm \rightarrow \int u^2 \, dm$ (quand $n \rightarrow +\infty$).

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \rightarrow \int u v \, dm$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q.

- φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|\varphi(s)| \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
- $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm \rightarrow \int (v - \varphi(w))(u - w) \, dm. \quad (3.34)$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} \, dm \leq 0.$$

[Utiliser (3.34). Exercice equation.3.34.] En déduire que $\int (v - \varphi(u))\bar{w} \, dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \rightarrow 0$ dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$ (utiliser (3.34). Exercice equation.3.34).

(b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) t.q. $G_{\psi(n)} \rightarrow 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \rightarrow u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

(c) Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Exercice 3.10 (Opérateur de Leray-Lions)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R}^N et $p \in]1, +\infty[$ vérifiant (avec $p' = p/(p-1)$) :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- (Coercivité) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\alpha(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- (Croissance) Il existe $d \in L^{p'}(\Omega)$ et $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|a(\cdot, s, \xi)| \leq C(d + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ p.p., pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.
- (Monotonie) $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ pour tout $(s, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$, et p.p. en $x \in \Omega$.

Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (3.35)$$

[Reprendre la démonstration du cours.]

3.4 Corrigés d'exercices

Corrigé 3.1 (Continuité d'une application de L^p dans L^q)

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* ; |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$.

Corrigé – La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans \mathbb{R} (muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et g est borélienne (that is to say mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans \mathbb{R}).

Pour $s \in [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m)$.

On pose $L^r = L_{\mathbb{R}}^r(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\}$, avec $v \in u$ (de sorte que $G(u) \in L^q$).

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u .

Corrigé – Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c . On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(E, T, m); h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.

$G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u .

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \rightarrow u$ p.p., quand $n \rightarrow +\infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \rightarrow G(u)$ dans L^q .

Corrigé – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n , encore notée u_n . On choisit aussi des représentants de u et F , notés toujours u et F . Comme $u_n \rightarrow u$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \rightarrow g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \rightarrow G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \leq C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \leq C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \leq C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $F \in L^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q , il donne que $G(u_n) \rightarrow G(u)$ dans L^q quand $n \rightarrow +\infty$.

4. Montrer que G est continue de L^p dans L^q .

Corrigé – On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q . Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans L^p et $G(u_n) \not\rightarrow G(u)$ dans L^q quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme $G(u_n) \not\rightarrow G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ dans L^p , on peut appliquer la "réciproque partielle de la convergence dominée dans L^p ". On obtient l'existence de $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, $u_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow u$ p.p. et $|u_{\varphi \circ \psi(n)}| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.)

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow G(u)$ dans L^q quand $n \rightarrow +\infty$. Ce qui est en contradiction avec (3.37) *Corrigés d'exercices equation.3.37*.

5. On considère ici $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (3.36) *Corrigés d'exercices equation.3.36*. On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

Corrigé – On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \geq n$. On pose $M = \max\{|g(s)|, s \in [-n, n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :

$$|g(s)| \leq C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (3.36) *Corrigés d'exercices equation.3.36*.

Il existe donc s , t.q. $|s| \geq n$ et $|g(s)| \geq n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n .

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2} = 1.$$

Corrigé – Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :

$$0 < \beta = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|\alpha_n|n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Corrigé – Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.

Grâce au choix de α , on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u| d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Corrigé 3.2 (Existence par Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $g \in L^2(\Omega)$, a une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et h une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} . On suppose que

- $0 < \alpha = \inf_{s \in \mathbb{R}} a(s) \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} a(s) = \beta < +\infty$,
- il existe $\delta \in [0, 1[$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $|h(s, \xi)| \leq C_1(1 + |s|^\delta + |\xi|^\delta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

1. Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $h(\bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(\bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} h(\bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.38)$$

Corrigé – On remarque que $|h(\bar{u}, \nabla \bar{u})| \leq C_1(1 + |\bar{u}|^\delta + |\nabla \bar{u}|^\delta) \in L^{\frac{2}{\delta}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ car $\delta \leq 1$.

Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on pose

$$A(u, v) = \int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Comme $0 < \alpha \leq a(\bar{u}) \leq \beta$, il est facile de montrer de A est bilinéaire continue et coercive sur $(H_0^1(\Omega))^2$.

On conclut alors qu'il existe bien une unique solution à (3.38) Corrigés d'exercices equation.3.38.

Dans la suite, on note T l'application qui à \bar{u} associe u , unique solution de (3.38) corrigés d'exercice equation.3.38). L'application T est donc de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. (Estimation sur u) Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\bar{u})$. Montrer qu'il existe C_2 ne dépendant que Ω , α , g et C_1 t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta).$$

[On pourra prendre $v = u$ dans (3.38) corrigés d'exercice equation.3.38).]

En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R.$$

Corrigé – En prenant $v = u$ dans (3.38) corrigés d'exercice equation.3.38), on obtient

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_1 |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(C_1 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta + C_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré, on en déduit

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \left(|\Omega|^{1/2} + \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta + \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \right). \quad (3.39)$$

Mais, en utilisant l'inégalité de Hölder (ou l'inégalité de Jensen pour la fonction (concave) de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ définie par $s \mapsto s^\delta$) on obtient

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta = \int_\Omega |\bar{u}|^{2\delta} dx \leq \left(\int_\Omega \bar{u}^2 dx \right)^\delta |\Omega|^{1-\delta}.$$

et

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta = \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{2\delta} dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 dx \right)^\delta |\Omega|^{1-\delta}.$$

(Si $\delta \in [1/2, 1[$, ces deux inégalités correspondent à l'injection classique de $L^2(\Omega)$ dans $L^{2\delta}(\Omega)$.)

De ces deux majorations (et avec l'inégalité de Poincaré), on déduit l'existence de \bar{C} ne dépendant que de Ω et δ t.q.

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \bar{C} \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta \text{ et } \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \bar{C} \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta.$$

En revenant à (3.39) corrigés d'exercice equation.3.39), on obtient l'existence de C_2 ne dépend que α , g , Ω et C_1 t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta \right).$$

Pour conclure, on remarque qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $R > C_2(1 + R^\delta)$. En effet, on a

$$R - C_2 - C_2 R^\delta = R \left(1 - \frac{C_2}{R} - C_2 R^{\delta-1} \right).$$

il suffit donc de prendre $R > 2C_2$ et $R > (2C_2)^{\frac{1}{1-\delta}}$. (c'est ici que l'hypothèse $\delta < 1$ est utilisée.)

On a alors

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + R^\delta) \leq R.$$

3. (Continuité de T) Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$). On pose $f_n = h(\bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$, $f = h(\bar{u}, \nabla \bar{u})$, $u_n = T(\bar{u}_n)$ et $u = T(\bar{u})$.

(a) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$.

Corrigé – Si $f_n \not\rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q.

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.40)$$

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer que

$$\bar{u}_n \rightarrow \bar{u} \text{ p.p., avec un domination par une fonction } G \text{ appartenant à } L^2(\Omega).$$

et

$$\nabla \bar{u}_n \rightarrow \nabla \bar{u} \text{ p.p., avec un domination par une fonction } H \text{ appartenant à } L^2(\Omega).$$

On a alors $f_n \rightarrow f$ p.p. et $|f_n| \leq C_1(1 + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. (et pour tout $n \in \mathbb{N}$). Comme $0 \leq \delta \leq 1$, on a $|G|^\delta + |H|^\delta \in L^2(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$, en contradiction avec (3.40) Corrigés d'exercices equation.3.40).

(b) Montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Corrigé – La question 2 donne que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \not\rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore noté $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle \psi, u_n - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.41)$$

Puis, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ \bar{u}_n &\rightarrow \bar{u} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u_n = T(\bar{u}_n)$, on a

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f_n v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx.$$

Comme $a(\bar{u}_n) \rightarrow a(\bar{u})$ p.p. et $|a(\bar{u}_n)| \leq \beta$ p.p., on a, par convergence dominée, $a(\bar{u}_n) \nabla v \rightarrow a(\bar{u}) \nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx.$$

Ce qui prouve que $w = u$, en contradiction avec (3.41) Corrigés d'exercices equation.3.41). On a bien ainsi montré que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

(c) Montrer que $\int_{\Omega} a(\bar{u}_n(x)) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} a(\bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) \, dx$.

En déduire que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra s'inspirer de l'exercice 2.15 Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1 exo.2.15.]

Corrigé – Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} g u_n \, dx - \int_{\Omega} f_n u_n \, dx.$$

Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} g u \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

et donc, comme $u = T(\bar{u})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

On remarque maintenant que

$$\alpha \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) (\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx.$$

Pour montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) (\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx = 0. \quad (3.42)$$

Pour montrer (3.42) Corrigés d'exercices equation.3.42), on utilise le fait (facile à montrer en raisonnant par l'absurde) que

$$a(\bar{u}_n) \nabla u \rightarrow a(\bar{u}) \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^N, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que (en utilisant le fait que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla u \, dx$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} a(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

Ceci permet de montrer (3.42) et donc de conclure que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ce qui prouve la continuité de l'opérateur T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

4. (Compacité de T) Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $f_n = h(\bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$ et $u_n = T(\bar{u}_n)$. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ t.q.

$$f_n \rightarrow f \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

$$a(\bar{u}_n) \rightarrow b \text{ p.p.}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra raisonner comme dans l'exercice 2.15] Continuité séquentielle de L^2 -faible dans H_0^1 [exo.2.15.]

Corrigé – La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et la suite $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction d'une sous suite, qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $\zeta \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \bar{u}_n &\rightarrow \zeta \text{ p.p.} \end{aligned} \quad (3.43)$$

En posant $b = a(\zeta)$, on a donc $b \in L^\infty(\Omega)$ et $a(\bar{u}_n) \rightarrow b$ p.p..

(On peut montrer que $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ mais il est faux de dire que $f = h(\zeta, \nabla \zeta)$ p.p..)

Comme $\alpha \leq b \leq \beta$ p.p., il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} b \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (g - f)v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.44)$$

On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u , solution de (3.44) (on travaille ici avec la suite extraite qui vérifie (3.43)).

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En raisonnant par l'absurde, il est alors assez facile de montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, supposons que (après extraction de sous suite) $u_n \rightarrow w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (g - f_n)v \, dx.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans cette équation, grâce aux convergences données dans (3.43), on obtient

$$\int_{\Omega} b \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (g - f)v \, dx.$$

Ceci prouve que $w = u$. On en déduit bien que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc aussi $u_n \rightarrow u$ (fortement) dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence (forte) de u_n vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela on remarque tout d'abord que

$$\int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} (g - f_n)u_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} (g - f)u \, dx \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Comme u est solution de (3.44) on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} b \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

En utilisant cette convergence et (3.43) on montre alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx = 0.$$

Comme $\alpha \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} a(\bar{u}_n) \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx$ on conclut bien que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

5. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = T(u)$ (et donc u solution de (3.38) avec $\bar{u} = u$).

Corrigé – Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder. L'opérateur T est continu et compact de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe $R > 0$ t.q. T envoie la boule de centre 0 et de rayon R (de $H_0^1(\Omega)$) dans elle-même. Le théorème de Schauder permet alors de dire qu'il existe u dans cette boule (et donc dans $H_0^1(\Omega)$) t.q. $u = T(u)$. La fonction u ainsi trouvée est solution de (3.38) avec $\bar{u} = u$.

Devoir 2, exercice 3.3**Corrigé 3.3 (Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2)**

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} vérifiant :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\alpha \leq a(x, s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, 1[$ t.q. $|f(\cdot, s, p)| \leq C(d + |s|^\delta + |p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.45)$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Corrigé – On suit la même démarche que pour l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2 (les modifications sont mineures). On construit un opérateur, noté T , de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On montre que, si R est bien choisi, T envoie la boule de centre 0 et de rayon R dans elle-même. Enfin, on montre la continuité et la compacité de T et on conclut alors par le théorème de Schauder.

Construction de T

Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. En choisissant un représentant de la classe de fonctions \bar{u} , la fonction $x \mapsto a(x, \bar{u}(x))$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change le représentant de \bar{u} , ceci est dû au fait que a est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur a). Avec la seconde hypothèse sur a , on a donc $a(\cdot, \bar{u}) \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \leq a(\cdot, \bar{u}) \leq \beta$ p.p..

De même, en choisissant des représentants de \bar{u} et $\nabla \bar{u}$, la fonction $x \mapsto f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u})$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change les représentants de \bar{u} et $\nabla \bar{u}$, ceci est aussi dû au fait que f est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur f). Avec la seconde hypothèse sur f , on a

$$|f(\cdot, \bar{u}, \nabla \bar{u})| \leq C(d + |\bar{u}|^\delta + |\nabla \bar{u}|^\delta) \text{ p.p.}$$

et donc $f(\cdot, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^2(\Omega)$ car $d, \bar{u}, |\nabla \bar{u}| \in L^2(\Omega)$ et $\delta \leq 1$.

On peut maintenant appliquer le théorème 2.6 Existence et unicité de la solution de (2.4 Formulation faible equation.2.4) theorem.2.6, il donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x, \bar{u}(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) v(x) dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.46)$$

On pose $u = T(\bar{u})$. On a ainsi construit une application T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que T admet un point fixe.

Estimations sur T

Soit $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\bar{u})$. En prenant $v = u$ dans (3.46) Corrigés d'exercices equation.3.46), on obtient

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \| |\bar{u}|^\delta \|_{L^2(\Omega)} + C_1 \| |\nabla \bar{u}|^\delta \|_{L^2(\Omega)}) \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré, on en déduit

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \| |\bar{u}|^\delta \|_{L^2(\Omega)} + \| |\nabla \bar{u}|^\delta \|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.47)$$

Mais, comme dans l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder)

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \left(\int_{\Omega} \bar{u}^2 \right)^\delta |\Omega|^{1-\delta} \quad \text{et} \quad \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 \right)^\delta |\Omega|^{1-\delta}.$$

On en déduit (avec l'inégalité de Poincaré) l'existence de \bar{C} ne dépendant que de Ω et δ t.q.

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \bar{C} \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta \quad \text{et} \quad \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^\delta \leq \bar{C} \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta.$$

Avec (3.39) Corrigés d'exercices equation.3.39), on obtient l'existence de C_2 ne dépend que α , Ω et C t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^\delta \right). \quad (3.48)$$

Pour conclure cette étape, on remarque qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $R > C_2(1 + R^\delta)$ (car $\delta < 1$) et donc

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + R^\delta) \leq R.$$

Ce qui montre que T envoie B_R dans B_R où B_R est la boule (fermée) de centre 0 et de rayon R .

Continuité de T

Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$). On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$ et $u = T(\bar{u})$. On veut montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On pose aussi $g_n = f(\cdot, \bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$, $g = f(\cdot, \bar{u}, \nabla \bar{u})$, $A_n = a(\cdot, \bar{u}_n)$ et $A = a(\cdot, \bar{u})$.

On commence par remarquer que $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \rightarrow +\infty$). La démonstration est ici identique à celle de $f_n \rightarrow f$ dans l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2. la seule modification est dans la domination de g_n qui ici est $|g_n| \leq C(d + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. (au lieu de $|f_n| \leq C_1(1 + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. dans l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2).

On montre maintenant que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On suit encore le même raisonnement que dans l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2. L'inégalité (3.48) Corrigés d'exercices equation.3.48) donne que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Si $u_n \not\rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore noté $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle \psi, u_n - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.49)$$

Puis, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ \bar{u}_n &\rightarrow \bar{u} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u_n = T(\bar{u}_n)$, on a

$$\int_{\Omega} A_n \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g_n v \, dx. \quad (3.50)$$

Comme $A_n \rightarrow A$ p.p. (puisque a est p.p. continue par rapport à son deuxième argument) et $|A_n| \leq \beta$ p.p., on a, par convergence dominée, $A_n \nabla v \rightarrow A \nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$\int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx.$$

Ce qui prouve que $w = u$ (grâce à l'unicité de la solution de (3.46) Corrigés d'exercices equation.3.46)) et donc $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, en contradiction avec (3.49) Corrigés d'exercices equation.3.49). On a bien ainsi montré que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (sans extraction de sous-suite).

on veut montrer maintenant que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (et pas seulement faiblement). En prenant $v = u_n$ dans (3.50) Corrigés d'exercices equation.3.50), on a

$$\int_{\Omega} A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} g_n u_n \, dx.$$

Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} g u \, dx.$$

et donc, comme $u = T(\bar{u})$, (3.46) Corrigés d'exercices equation.3.46) donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A_n \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx. \quad (3.51)$$

On remarque maintenant que

$$\alpha \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} A_n (\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx. \quad (3.52)$$

Comme dans l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2, on utilise le fait que

$$A_n \nabla u \rightarrow A \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^N, \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

et que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. Ceci donne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A_n \nabla u \cdot \nabla u_n \, dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A_n \nabla u \cdot \nabla u \, dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx, \end{aligned}$$

et donc, avec (3.51) Corrigés d'exercices equation.3.51),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} A_n (\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx = 0.$$

On conclut bien, avec (3.52) Corrigés d'exercices equation.3.52), que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ce qui prouve la continuité de l'opérateur T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Compacité de T

On suit toujours le raisonnement fait pour l'exercice 3.2 Existence par Schauder exo.3.2. Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $g_n = f(\cdot, \bar{u}_n, \nabla \bar{u}_n)$ et $u_n = T(\bar{u}_n)$.

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et la suite $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction d'une sous suite, qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ et $\zeta \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} g_n &\rightarrow g \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \bar{u}_n &\rightarrow \zeta \text{ p.p.} \end{aligned} \quad (3.53)$$

En posant $b = a(\cdot, \zeta)$, on a donc $b \in L^\infty(\Omega)$ et $a(\cdot, \bar{u}_n) \rightarrow b$ p.p..

Comme $\alpha \leq b \leq \beta$ p.p., il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} b \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.54)$$

On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u , solution de (3.54) Corrigés d'exercices equation.3.54) (on travaille ici avec la suite extraite qui vérifie (3.53) Corrigés d'exercices equation.3.53)).

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En raisonnant par l'absurde, il est alors assez facile de montrer que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, supposons que (après extraction de sous suite) $u_n \rightarrow w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g_n v \, dx.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans cette équation, grâce aux convergences données dans (3.53) Corrigés d'exercices equation.3.53), on obtient

$$\int_{\Omega} b \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx.$$

Ceci prouve que $w = u$. On en déduit bien que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc aussi $u_n \rightarrow u$ (fortement) dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence (forte) de u_n vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela on remarque tout d'abord que

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} g_n u_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} g u \, dx \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Comme u est solution de (3.54) on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} b \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

En utilisant cette convergence et (3.53) on montre alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx = 0.$$

Comme $\alpha \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx$ on conclut bien que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. (On notera que la convergence est obtenue seulement pour la suite extraite qui vérifie (3.53).)

On a bien montré la compacité de T .

Conclusion

Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder. L'opérateur T est continu et compact de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe $R > 0$ t.q. T envoie la boule de centre 0 et de rayon R (de $H_0^1(\Omega)$) dans elle-même. Le théorème de Schauder permet alors de dire qu'il existe u dans cette boule (et donc dans $H_0^1(\Omega)$) t.q. $u = T(u)$. La fonction u ainsi trouvée est solution de (3.45).

Corrigé 3.4 (Degré d'une application affine)

Soit E un espace de Banach (réel). Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E \text{ t.q. } \|v\|_E < R\}$.

1. Soit f une application constante de E dans E . Il existe donc $a \in E$ t.q. $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ t.q. $\|a\|_E \neq R$. Montrer que $d(I - f, B_R, a)$ est bien défini et que $d(I - f, B_R, a) = 1$ si $R < \|a\|_E$ et $d(I - f, B_R, a) = 0$ si $R > \|a\|_E$.

Corrigé – Il est clair que f est continue et compacte et que $u - f(u) = 0$ si et seulement si $u = a$. Si $\|a\|_E \neq R$, $d(I - f, B_R, a)$ est donc bien défini.

Si $R < \|a\|_E$, l'équation $u - f(u) = 0$ n'a pas de solution dans B_R et donc $d(I - f, B_R, 0) = 0$.

Si $R > \|a\|_E$, on pose $h(t, v) = tf(v)$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E et l'équation $u = tf(u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R pour $t \in [0, 1]$ (car l'unique solution de $u = tf(u)$ est ta). On a donc $d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, \cdot), B_R, 0) = d(I - h(0, \cdot), B_R, 0) = d(I, B_R, 0) = 1$.

2. Soit L une application linéaire compact de E dans E . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L . Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.

(a) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.

Corrigé – Soit $u_1, u_2 \in E$ t.q. $u_1 - f(u_1) = 0$ et $u_2 - f(u_2) = 0$. En posant $u = u_1 - u_2$ on a donc $u - Lu = 0$. Comme 1 n'est pas valeur propre de L , on a donc $u = 0$. Ce qui prouve bien que $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.

(b) Montrer que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrer que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si $R > \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < \|b\|_E$.

Corrigé – On pose $h(t, u) = Lu + ta$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \times E$ dans E . Soit $R > 0$. L'équation $u = h(0, u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R (car 1 n'est pas valeur propre de L).

Si l'équation $u = h(t, u)$ n'a pas de solution pour $t \in]0, 1]$ sur ∂B_R , on a

$$d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1, 0), B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0,$$

d'après le théorème 3.8 Application linéaire compacte theorem.3.8. Il existe donc $u \in B_R$ t.q. $u - f(u) = 0$.

D'autre part, si l'équation $u = h(t, u)$ a une solution sur ∂B_R pour un t dans $]0, 1]$. On note c cette solution et on remarque $(c/t) - f(c/t) = 0$.

Dans tous les cas, on a donc montré qu'il existe $u \in E$ t.q. $u - f(u) = 0$.

Enfin, il est facile de voir que $d(I - f, B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0$ si $R > \|b\|_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < \|b\|_E$.

Corrigé 3.5 (Convection-diffusion, Dirichlet, existence)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 , $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

On s'intéresse ici au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(W\varphi(u)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.55)$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de solution faible au problème (3.55) Corrigés d'exercices equation.3.55). L'unicité (et la positivité si $f \geq 0$ p.p.) de la solution faible est montré dans l'exercice 3.6 Convection-diffusion, Dirichlet, unicité exo.3.6.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^N$. [Utiliser le théorème d'injection de Sobolev, théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28.]

Corrigé – Le théorème 1.28 Sobolev embedding theorem.1.28 donne que $u \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et que $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$. Comme φ est lipschitzienne et $\varphi(0) = 0$, il existe C_1 t.q. $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc aussi $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$ si $N = 3$ et $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$ si $N = 2$.

Pour $N = 3$, on a $W \in L^3(\Omega)^3$ et $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^3$ car $1/6 + 1/3 = 1/2$.

Pour $N = 2$, on a $W \in L^p(\Omega)^2$ et $\varphi(u) \in L^{2p/(p-2)}(\Omega)$, ce qui donne $W\varphi(u) \in L^2(\Omega)^2$ car $1/p + (p-2)/2p = 1/2$.

Cette première question permet de définir la formulation faible du problème (3.55) Corrigés d'exercice equation.3.55). Elle consiste à chercher u solution de (3.56) Corrigés d'exercice equation.3.56).

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(u(x))W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.56)$$

Pour montrer l'existence d'une solution à (3.56) Corrigés d'exercice equation.3.56) on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application h de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q = 2p/(p-2)$ (de sorte que $1/p + 1/q = 1/2$). On pose donc pour la suite $q = 2p/(p-2)$. Si $N = 3$, on pose $2^* = 6$ et si $N = 2$, on choisit pour 2^* un nombre strictement supérieur à q (de sorte que, pour $N = 2$ ou 3 , $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2^*}(\Omega)$ et compactement dans $L^q(\Omega)$).

2. (Construction des opérateurs B et h) Soit $\tilde{u} \in L^q$. Montrer qu'il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(\tilde{u}(x))W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.57)$$

Corrigé – L'application $v \mapsto \int_{\Omega} \varphi(\tilde{u}(x))W(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$ est linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} . L'existence et l'unicité de u solution de (3.57) Corrigés d'exercice equation.3.57) est donc une conséquence du théorème 2.9 Existence et unicité, $T \in H^{-1}$ theorem.2.9.

On note B l'opérateur qui à \tilde{u} dans $L^q(\Omega)$ associe u solution de (3.57) Corrigés d'exercice equation.3.57). Puis, pour $t \in [0, 1]$ et $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$, on pose $h(t, \tilde{u}) = B(t\tilde{u})$.

3. Montrer que h est continu et compact de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Corrigé – On montre tout d'abord la continuité de h . Soit $(t_n, \tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ t.q. $t_n \rightarrow t$ et $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ dans $L^q(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On pose $u_n = h(t_n, \tilde{u}_n)$ et $u = h(t, \tilde{u})$. On veut montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$. On raisonne par l'absurde. Si $u_n \not\rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$\|u_n - u\|_{L^q(\Omega)} \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.58)$$

Après une éventuelle extraction de sous suite (ce qui ne change pas (3.58) Corrigés d'exercice equation.3.58)), on peut aussi supposer que

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} \text{ p.p. et } |\tilde{u}_n| \leq H \text{ p.p. pour tout } n \in \mathbb{N},$$

avec $H \in L^q(\Omega)$. On en déduit (par convergence dominée dans $L^q(\Omega)$ car φ est continue et $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$) que $\varphi(t_n \tilde{u}_n) \rightarrow \varphi(t\tilde{u})$ dans $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(t_n \tilde{u}_n)W \rightarrow \varphi(t\tilde{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$ (en remarquant que $|HW| \in L^2(\Omega)$, car $|W| \in L^p(\Omega)$ et $1/p + 1/q = 1/2$).

Comme la suite $(\varphi(t_n \tilde{u}_n)W)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)^N$ et que u_n est solution de (3.57) corrigés d'exercice equation.3.57) avec $t_n \tilde{u}_n$ au lieu de \tilde{u} , on montre (en prenant $v = u_n$ dans 3.57) corrigés d'exercice equation.3.57) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer (toujours après extraction de sous suite) qu'il existe \bar{u} t.q. $u_n \rightarrow \bar{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc aussi (par compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$) $u_n \rightarrow \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$. On montre alors que \bar{u} est solution de (3.57) corrigés d'exercice equation.3.57) avec $t\bar{u}$ au lieu de \tilde{u} (et donc que $\bar{u} = u$). Il suffit pour cela de passer à limite, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, dans l'équation suivante

$$\int_{\Omega} \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(t_n \tilde{u}_n(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Ce passage à limite découle facilement du fait que $\nabla u_n \rightarrow \nabla \bar{u}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$ et $\varphi(t_n \tilde{u}_n)W \rightarrow \varphi(t\bar{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$.

On obtient ainsi que $\bar{u} = B(t\bar{u}) = u$, en contradiction avec (3.58) corrigés d'exercice equation.3.58) (car $u_n \rightarrow \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$). On a ainsi montré que $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$. En fait, un raisonnement semblable par contradiction montrerait même que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ mais ceci est inutile pour la suite.

On montre maintenant la compacité de h (ce qui est un peu plus facile). On suppose que t est quelconque dans $[0, 1]$ et que \tilde{u} reste dans un borné de $L^q(\Omega)$. On pose $u = h(t, \tilde{u})$. La fonction u est donc solution de (3.57) corrigés d'exercice equation.3.57) avec $t\tilde{u}$ au lieu de \tilde{u} . Grâce $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$, la fonction $\varphi(\tilde{u})$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(\tilde{u})W$ reste dans un borné de $L^2(\Omega)^N$. En prenant maintenant $v = u$ dans (3.57) corrigés d'exercice equation.3.57) (avec $t\tilde{u}$ au lieu de \tilde{u}), on en déduit que u reste dans un borné de $H_0^1(\Omega)$. Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^q(\Omega)$, on en déduit que u reste dans un compact de $L^q(\Omega)$. Ce qui prouve bien la compacité de h .

Remarque : un moyen probablement un peu plus rapide pour montrer la continuité et la compacité de h est de remarquer que h est la composée de B , qui est un opérateur continu et compact et $L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, avec l'application $(t, u) \mapsto tu$ qui est continue de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

4. (Estimations a priori) Soit $u \in L^q(\Omega)$ t.q. $u = h(t, u)$. On a donc

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \varphi(tu(x)) W(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.59)$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(s) = \int_0^s \frac{1}{(1+|\xi|)^2} d\xi$.

(a) Montrer que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$. En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.59) corrigés d'exercice equation.3.59), montrer qu'il existe C_l ne dépendant que Ω, W, φ et f t.q.

$$\|\ln(1 + |u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_l.$$

Corrigé – La fonction ψ (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) est de classe C^1 sur \mathbb{R} et est lipschitzienne (car $|\psi'(s)| \leq 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Lemme 2.20 Positivité de la solution faible theorem.2.20 donne alors que $\psi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla \psi(u) = (\nabla u)/(1 + |u|)^2$. On remarque aussi $|\psi(s)| \leq 1$ pour tout s .

En prenant $v = \psi(u)$ dans (3.59) corrigés d'exercice equation.3.59) et en utilisant $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$ et $|\psi(s)| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1 + |u(x)|)^2} dx &\leq C_1 \int_{\Omega} \frac{|tu(x)|}{(1 + |u(x)|)^2} |W(x)| |\nabla u(x)| dx + \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |W(x)| \frac{|\nabla u(x)|}{1 + |u(x)|} dx + \|f\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant $ab \leq \frac{a^2}{2C_1} + 2C_1b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2} dx \leq 2C_1^2 \|W\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On remarque maintenant que (toujours par le lemme 2.20 Positivité de la solution faible theorem.2.20) $\ln(1+|u|) \in H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité précédente donne

$$\|\ln(1+|u|)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2(2C_1^2 \|W\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)}).$$

Ce qui donne la majoration désirée avec $C_l^2 = 2(2C_1^2 \|W\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(\Omega)})$.

(b) Pour $v \in L^{2^*}(\Omega)$, montrer que pour tout $A \geq 0$ on a

$$\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \lambda_N(\{|v| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^*}} + A^q \lambda_N(\Omega).$$

On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^N .

Corrigé – On a

$$\int_{\Omega} |v(x)|^q dx = \int_{\{|v| \geq A\}} |v(x)|^q dx + \int_{\{|v| < A\}} |v(x)|^q dx \leq \int_{\{|v| \geq A\}} |v(x)|^q dx + A^q \lambda_N(\Omega).$$

Puis, l'inégalité de Hölder (avec $2^*/q$ et son conjugué) donne

$$\int_{\{|v| \geq A\}} |v(x)|^q dx = \int_{\Omega} |v(x)|^q \mathbf{1}_{\{|v| \geq A\}} dx \leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \lambda_N(\{|v| \geq A\})^{1-\frac{q}{2^*}}.$$

Ce qui donne bien l'inégalité désirée.

(c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω , W , φ et f t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < C$.

Corrigé – On prend $v = u$ dans (3.59) Corrigés d'exercices equation.3.59, on obtient, avec l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \|u\|_{L^q(\Omega)} \|W\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (3.60)$$

où C_{Ω} ne dépend que de Ω et est donné par l'inégalité de Poincaré.

On commence par utiliser l'inégalité donnée dans 4(b) (élevée à la puissance $1/q$). Pour tout $A > 0$ on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}} + 2A \lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ est continue, il existe \bar{C}_{Ω} ne dépendant que de Ω t.q. $\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \bar{C}_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. On a donc

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq 2\bar{C}_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}} + 2A \lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

On utilise maintenant 4(a) (et l'inégalité de Poincaré). Pour tout $A \geq 0$ on a

$$\ln(1+A) \lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{2}} \leq \|\ln(1+|u|)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\ln(1+|u|)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\Omega} C_l.$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(1+A) = +\infty$, il existe donc A ne dépendant (comme C_l , noter aussi que p et q sont donnés par W) que de Ω , W , φ et f t.q.

$$\lambda_N(\{|u| \geq A\})^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}} \leq \frac{1}{4\bar{C}_{\Omega} C_1 \|W\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Avec ce choix de A , (3.60) Corrigés d'exercices equation.3.60) donne

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + (2AC_1 \|W\|_{L^p(\Omega)} \lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega}) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2(2AC_1 \|W\|_{L^p(\Omega)} \lambda_N(\Omega)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega}).$$

Ce qui est une estimation sur $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ ne dépendant que de Ω , W , φ et f .

5. (Degré topologique) Montrer l'existence d'une solution à (3.56) Corrigés d'exercices equation.3.56).

Corrigé – Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^q(\Omega)$, la question 4(c) $R > 0$ t.q.

$$t \in [0, 1], u \in L^q(\Omega), u = h(t, u) \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega)} < R.$$

La question 3 donne la continuité et la compacité de h de $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. On peut donc appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique sur la boule (ouverte) de $L^q(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R avec comme point cible 0. On obtient

$$d(I - h(1, \cdot), B_R, 0) = d(I - h(0, \cdot), B_R, 0).$$

L'application $\tilde{u} \mapsto h(0, \tilde{u})$ est constante ($h(0, \tilde{u})$ est, pour tout \tilde{u} , la solution faible de $-\Delta u = f$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$). La solution de $v = h(0, v)$ est unique et appartient à B_R . Ceci suffit pour dire que $d(I - h(0, \cdot), B_R, 0) \neq 0$ (on peut ramener la constante à 0 par homotopie en remarquant, par exemple, que $d(I - th(0, \cdot), B_R, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$, voir l'exercice 3.4 Degré d'une application affine exo.3.4).

6. On retire dans cette question l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution de (3.56) Corrigés d'exercices equation.3.56 avec $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$.

Corrigé – On commence par remplacer $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ dans (3.56) Corrigés d'exercices equation.3.56).

La démonstration est alors très semblable à la précédente. Les seuls points demandant une petite modification sont dans les questions 4(a) et 4(c). Dans la question 4(a), On a majoré $\int_{\Omega} |f\psi(u)|dx$ par $\|f\|_{L^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, \psi(v) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}|.$$

Cette majoration se fait en remarquant que

$$\begin{aligned} |\langle T, \psi(v) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\psi(v)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \frac{|\nabla u|}{(1+|u|)^2} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \frac{|\nabla u|}{1+|u|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 4\|T\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \left\| \frac{|\nabla u|}{1+|u|} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dans la question 4(c), on a majoré $\int_{\Omega} |fu|dx$ par $C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Il faut maintenant majorer

$$|\langle T, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}|.$$

Ce qui est facile car

$$|\langle T, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \leq \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il reste maintenant à retirer l'hypothèse $\varphi(0) = 0$. Ceci est assez facile car il suffit de se ramener au cas précédent en remplaçant φ par $\varphi - \varphi(0)$ et en ajoutant au second membre de (3.56) Corrigés d'exercices equation.3.56 $-\int_{\Omega} \varphi(0)W(x) \cdot \nabla v(x)dx$. On se ramène bien au cas précédent car l'application $v \mapsto \int_{\Omega} \varphi(0)W(x) \cdot \nabla v(x)dx$ est bien un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (car $W \in L^2(\Omega)^N$).

Corrigé 3.6 (Convection-diffusion, Dirichlet, unicité)

On reprend ici les mêmes hypothèses que dans l'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5, that is to say :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 , $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$, φ une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. $\varphi(0) = 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

L'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5 a montré qu'il existait u solution faible de (3.27) Exercices equation.3.27 that is to say u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\Omega} \varphi(u(x))W(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.61)$$

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la solution de (3.61) Corrigés d'exercices equation.3.61 et de montrer que $u \geq 0$ p.p. si $f \geq 0$ p.p..

1. Montrer l'unicité de la solution de (3.61) Corrigés d'exercices equation.3.61).

Corrigé – La démonstration d'unicité faite pour le théorème 3.16 Existence et unicité theorem.3.16 n'a pas utilisée complètement les hypothèses sur G (qui étaient $G \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{div} G = 0$). Elle a utilisé seulement le fait que $G \in L^2(\Omega)^N$. Ici nous avons $W \in L^p(\Omega)^N$. Comme $p > N$, ceci donne bien $W \in L^2(\Omega)^N$ et la démonstration faite pour le théorème 3.16 Existence et unicité theorem.3.16 est donc aussi valable ici. Nous la rappelons rapidement.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.61) Corrigés d'exercices equation.3.61). On a donc :

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \varphi(u_1) W \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad (3.62)$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \varphi(u_2) W \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.63)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $T_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $T_n(s) = \max(-1/n, \min(s, 1/n))$. Le lemme 2.21 Positivité de la solution faible theorem.2.21 (ou plutôt sa généralisation, voir la remarque 2.22 Positivité de la solution faible theorem.2.22) donne $T_n(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T_n(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2) 1_{A_n}$ avec $A_n = \{0 < |u_1 - u_2| < 1/n\}$.

On prend $v = T_n(u_1 - u_2)$ dans (3.62) Corrigés d'exercices equation.3.62) et (3.63) Corrigés d'exercices equation.3.63), on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla T_n(u_1 - u_2) \, dx = \int_{\Omega} (\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) W \cdot \nabla(T_n(u_1 - u_2)) \, dx.$$

Avec C_1 t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \leq \int_{A_n} C_1 |u_1 - u_2| |W| |\nabla(u_1 - u_2)| \, dx.$$

On a $|u_1 - u_2| \leq 1/n$ p.p. dans A_n . En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale, on obtient donc :

$$\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \leq \frac{C_1}{n} \left(\int_{A_n} |W|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

On a donc

$$\|\nabla T_n(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{A_n} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C_1}{n} a_n, \text{ avec } a_n = \left(\int_{A_n} |W|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^* = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N ,

$$\|T_n(u_1 - u_2)\|_{L^{1^*}} \leq \|\nabla T_n(u_1 - u_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \|\nabla T_n(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} a_n.$$

On pose $B_n = \{|u_1 - u_2| \geq 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n} (m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{B_n} |T_n(u_1 - u_2)|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq \|T_n(u_1 - u_2)\|_{L^{1^*}}.$$

On a donc

$$(m(B_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1 m(\Omega)^{1/2} a_n. \quad (3.64)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{n+1} \subset A_n$. Comme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et donc, grâce à (3.64) Corrigés d'exercices equation.3.64), que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(B_n) = 0$.

On remarque enfin que $B_{n+1} \supset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \{|u_1 - u_2| > 0\}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(B_n) = m\{|u_1 - u_2| > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{|u_1 - u_2| > 0\} = 0$ et donc $u_1 = u_2$ p.p..

2. On retire dans cette question (et seulement dans cette question) l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ et on se donne un élément T de $H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème (3.28 Exercices equation.3.28) avec $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ remplacé par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ a une unique solution (l'existence a été montrée dans l'exercice 3.5 Convection-diffusion, Dirichlet, existence exo.3.5).

Corrigé – La démonstration est identique à la précédente. Il suffit de remplacer, dans (3.62 Corrigés d'exercices equation.3.62) et (3.63 Corrigés d'exercices equation.3.63), $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ par $\langle T, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$.

3. On suppose $f \leq 0$ p.p.. Soit u la solution de (3.61 Corrigés d'exercices equation.3.61). Montrer que $u \leq 0$ p.p.. [Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra prendre $v = S_n(u)$ dans (3.61 Corrigés d'exercices equation.3.61) avec $S_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – La démonstration est voisine de celle de la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $v = S_n(u)$ dans (3.61 Corrigés d'exercices equation.3.61) avec $S_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $S_n(s) = \max(0, \min(s, 1/n))$. Ceci est possible car $S_n(u) \in H_0^1(\Omega)$. On sait aussi que $\nabla S_n(u) = 1_{E_n} \nabla u$ avec $E_n = \{0 < u < 1/n\}$ (voir la remarque 2.22 Positivité de la solution faible theorem.2.22). Comme $S_n(u) \geq 0$ p.p. et $f \leq 0$ p.p., on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla S_n(u) dx - \int_{\Omega} \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u) dx \leq 0. \quad (3.65)$$

On a donc

$$\int_{\Omega} |\nabla S_n(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla S_n(u) dx \leq \int_{\Omega} \varphi(u) W \cdot \nabla S_n(u) dx.$$

Il existe $C_1 > 0$ t.q. $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_1 |s_1 - s_2|$ pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, ceci donne, avec l'inégalité de Cauchy Schwarz dans la dernière intégrale

$$\|\nabla S_n(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{n} \left(\int_{E_n} |W(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $\gamma_n = \left(\int_{E_n} |W(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

On utilise maintenant l'inégalité de Sobolev et Hölder pour obtenir, avec $1^* = \frac{N}{N-1}$ et en désignant par m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N ,

$$\|S_n(u)\|_{L^{1^*}} \leq \|\nabla S_n(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \|\nabla S_n(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1 m(\Omega)^{1/2}}{n} \gamma_n.$$

On pose $D_n = \{u \geq 1/n\}$, de sorte que

$$\frac{1}{n} (m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{D_n} |S_n(u)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq \|S_n(u)\|_{L^{1^*}}.$$

On a donc

$$(m(D_n))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_1 m(\Omega)^{1/2} \gamma_n. \quad (3.66)$$

On conclut comme à la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E_{n+1} \subset E_n$. Comme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = \emptyset$, la continuité décroissante de m donne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(E_n) = 0$. Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0$ et donc, grâce à (3.66 Corrigés d'exercices equation.3.66), que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(D_n) = 0$.

On remarque enfin que $D_{n+1} \supset D_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = \{u > 0\}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(D_n) = m\{u > 0\}$ (par continuité croissante d'une mesure). On obtient donc $m\{u > 0\} = 0$ et donc $u \leq 0$ p.p..

Corrigé 3.7 (Convergence faible et non linéarité)

Remarque liminaire : Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Lorsque qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans un espace L^p et que la suite $\varphi(u_n)$ tend faiblement vers f dans un espace L^q , il est en général faux que $f = \varphi(u)$ p.p.. On ajoute l'hypothèse que $\int u_n \varphi(u_n)$ converge vers $\int u \varphi(u)$. Si φ est croissante, l'"astuce de Minty" permet alors de

montrer que $f = \varphi(u)$ p.p.. Si φ est strictement croissante, on obtient même une convergence forte de u_n vers u (c'est l'"astuce de Leray-Lions"). Cet exercice détaille ces idées dans le cadre $p = q = 2$ avec une mesure finie.

Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (that is to say $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v . On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n w \, dm = \int u w \, dm \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int v_n w \, dm = \int v w \, dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans L^2 (quand $n \rightarrow +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 \, dm \rightarrow \int u^2 \, dm$ (quand $n \rightarrow +\infty$).

Corrigé – On remarque que

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 \, dm + \int u^2 \, dm - 2 \int u_n u \, dm. \quad (3.67)$$

Comme $u_n \rightarrow u$ faiblement dans L^2 , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n u \, dm = \int u^2 \, dm$. On déduit alors facilement de (3.67) corrigés d'exercices equation.3.67) que $u_n \rightarrow u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n^2 \, dm = \int u^2 \, dm$.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n \, dm \rightarrow \int u v \, dm$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q.

— φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|\varphi(s)| \leq C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

— $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm \rightarrow \int (v - \varphi(w))(u - w) \, dm. \quad (3.68)$$

Corrigé – On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm = \int (v_n u_n - v_n w - \varphi(w) u_n + \varphi(w) w) \, dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n \varphi(w) \, dm = \int u \varphi(w) \, dm \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int v_n w \, dm = \int v w \, dm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int u_n v_n \, dm = \int u v \, dm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) \, dm = \int (v - \varphi(w))(u - w) \, dm.$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int (v - \varphi(u + t\bar{w})) t \bar{w} \, dm \leq 0.$$

[Utiliser (3.68) corrigés d'exercices equation.3.68).] En déduire que $\int (v - \varphi(u)) \bar{w} \, dm = 0$.

Corrigé – On utilise ici (3.68) corrigés d'exercices equation.3.68) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \, dm \rightarrow - \int (v - \varphi(u + t\bar{w})) t \bar{w} \, dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) dm \geq 0$. On en déduit, quand $n \rightarrow +\infty$, $\int (v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w} dm \leq 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$), on a donc $\int (v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \leq 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \leq F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \rightarrow \infty$,

$$\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \leq 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w} dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

Corrigé – On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)| dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \rightarrow 0$ dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$ (utiliser (3.68) Corrigés d'exercices equation.3.68)).

Corrigé – En prenant $w = u$ dans (3.68) Corrigés d'exercices equation.3.68), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \rightarrow 0$ dans L^1 .

(b) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) t.q. $G_{\psi(n)} \rightarrow 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \rightarrow u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

Corrigé – Comme $G_n \rightarrow 0$ dans L^1 , il existe une sous suite de la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) t.q. $G_{\psi(n)} \rightarrow 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in \mathcal{T}$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow +\infty$) si $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(x)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g , qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x))| = G_{\psi(n)}(x) \rightarrow 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \rightarrow 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x))) \rightarrow g(0) = a$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$. Ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \rightarrow u$ p.p..

(c) Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Corrigé – On montre que $u_n \rightarrow u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1, 2[$ t.q. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers u dans L^p . Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε . Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous suite, on peut extraire une sous suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u . Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 , on peut alors montrer que cette sous suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε . On a ainsi montré que $u_n \rightarrow u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Chapitre 4

Problèmes paraboliques

4.1 Aperçu des méthodes

Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques

Soit $N \geq 1$ et $u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On s'intéresse ici à chercher des solutions classiques au problème suivant

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Par "solution classique", on entend une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1 au sens classique de la dérivation et de la condition initiale. La notation u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps $\partial u / \partial t$ et Δu désigne la somme des dérivées secondes par rapport aux composantes de x .

On commence par un petit calcul formel (le terme "formel" signifiant souvent en mathématiques "non nécessairement justifié"). On suppose qu'on peut utiliser pour la condition initiale et pour la solution la transformée de Fourier (en espace). On retient comme formule pour la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur \mathbb{R}^N la formule suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Si u est solution de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1, on obtient ainsi (si on est autorisé à utiliser la transformée de Fourier)

$$\hat{u}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \text{ et } \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui donne

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi), \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \geq 0.$$

En choisissant $g(t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$, on a donc $\hat{u}(\cdot, t) = \widehat{g(t)} \hat{u}_0$ pour tout $t \geq 0$ et donc (en utilisant le fait que la transformée de Fourier transforme la convolution en produit),

$$\hat{u}(\cdot, t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \widehat{g(t)} \star u_0 \quad \text{pour } t \geq 0.$$

ou encore

$$u(\cdot, t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} g(t) \star u_0 \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Il reste à calculer $g(t)$. Comme $\widehat{g(t)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$, le théorème d'inversion de Fourier nous donne $g(t) = \widehat{\widehat{g(t)}}(-\cdot)$, that is to say

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix \cdot \xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Le changement de variable $\xi = \eta/\sqrt{2t}$ donne alors

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix \cdot \frac{\eta}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d\eta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Finalement, on obtient

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-|\frac{x}{\sqrt{2t}}|^2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0,$$

Ce qui donne

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0. \quad (4.2)$$

Il est maintenant possible de donner des conditions sur u_0 pour lesquelles (4.2) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques donne une solution classique de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1). Voici deux exemples de conditions suffisantes pour lesquelles la fonction u donnée par (4.2) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques est une solution classique de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1) :

Exemple 1 :

$$u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Exemple 2 :

$$u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ et il existe } \exists C \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |u_0(x)| \leq C(1 + |x|^p) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.3)$$

On a ainsi obtenu des résultats d'existence d'une solution classique pour (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1). A-t-on alors unicité de la solution ? On n'a pas de résultat d'unicité si on ne met des hypothèses que sur u_0 . Plus précisément, on peut construire une solution classique non nulle de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1) avec $u_0 = 0$. Il n'y a donc jamais unicité de la solution classique de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1). Par contre, si on rajoute une hypothèse convenable de croissance sur la solution, on a un résultat d'unicité.

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse (4.3) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques Item.401), il existe une et une seule fonction u vérifiant :*

1. u est solution classique de (4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques equation.4.1).
2. $\forall T > 0, \exists C_T \in \mathbb{R}, P_T \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |u(x, t)| \leq C_T(1 + |x|^{P_T}), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in [0, T]$.

Comme nous l'avons déjà dit, sans la deuxième condition sur u donnée dans le théorème 4.1) Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques Item.403, il n'y a pas unicité de la solution puisque l'on peut trouver $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[), u \neq 0$ et t.q.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Un exemple est donné dans le livre de Smoller¹. La démonstration de l'unicité dans le théorème 4.1 Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques Item.403 peut se faire en utilisant la transformée Fourier dans l'espace S' (où S' est le dual de l'ensemble \mathcal{S} des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, muni de sa topologie naturelle). Pour cela, on remarque que, sous l'hypothèse de croissance donnée dans le théorème 4.1 Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , solutions classiques Item.403, on a $u \in S'$. Notons que ce raisonnement par analyse de Fourier est limité à \mathbb{R}^N et essentiellement au cas du laplacien.

Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Pour u_0 donné, on s'intéresse maintenant au problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Pour cela on définit un opérateur \mathcal{A} d'une partie de $L^2(\Omega)$, notée $D(\mathcal{A})$, dans $L^2(\Omega)$ en posant

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

et, pour $u \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}u = -\Delta u$. Dans la définition de $D(\mathcal{A})$, Δu est une dérivée faible de u . Le fait que $u \in D(\mathcal{A})$ signifie donc simplement que $u \in H_0^1(\Omega)$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$ pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (ou, de manière équivalente, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$).

On suppose maintenant que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et va chercher une solution de (4.4 Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné equation.4.4) au sens suivant :

$$\begin{cases} u \in C^1([0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0, +\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = u_0 \text{ p.p..} \end{cases} \quad (4.5)$$

On rappelle (voir le chapitre 2 Problèmes elliptiques linéaires chapter.2) qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (c'est à dire une famille orthonormale dense dans $L^2(\Omega)$), notée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, formée de fonctions propres de l'opérateur \mathcal{A} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction e_n est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $e_n \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$.

Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. En notant $(u|v)_2$ le produit scalaire de u et v dans $L^2(\Omega)$, on a

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2 e_n$$

(cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$).

On a aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_0|e_n)_2^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$.

1. J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 258. Springer-Verlag, New York, 1994. xxiv+632 pp. ISBN : 0-387-94259-9

On pose, pour $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} (u_0 | e_n)_2 e_n,$$

qui est une série convergente dans $L^2(\Omega)$. On a donc ainsi $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \geq 0$ et on a même (comme la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée inférieurement par λ_1 avec $\lambda_1 > 0$) $u \in C([0, +\infty[, L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$ p.p.. D'autre part, comme $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, il est facile de montrer que la fonction u est dérivable de $]0, +\infty[$ dans $L^2(\Omega)$ et que la dérivée de u est obtenue en dérivant la série terme à terme (ceci est une conséquence du fait que la série dérivée terme à terme est, sur $]0, +\infty[$, localement uniformément convergente dans $L^2(\Omega)$). On a donc, pour tout $t > 0$,

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda_n) e^{-\lambda_n t} (u_0 | e_n)_2 e_n.$$

(La série écrite dans le terme de droite est convergente dans $L^2(\Omega)$).

On rappelle que (selon le chapitre 2 Problèmes elliptiques linéaires chapter.2) $u(t) \in D(\mathcal{A})$ pour tout $t > 0$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t} (u_0 | e_n)_2 e_n$ est convergente dans $L^2(\Omega)$. Le chapitre 2 Problèmes elliptiques linéaires chapter.2 donne aussi, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{A}u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t} (u_0 | e_n)_2 e_n.$$

On a donc $u \in C^1(]0, +\infty[, L^2(\Omega))$ et $u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0$ p.p. pour tout $t \in]0, +\infty[$. On a ainsi trouvé une solution au problème (4.5 Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert bornée equation.4.5).

On veut montrer maintenant que cette solution est unique. Pour cela, nous allons montrer que si u est solution du problème avec donnée initiale nulle, that is to say

$$\begin{cases} u \in C^1(]0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0, +\infty[, L^2(\Omega)), \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0, \\ u(0) = 0 \text{ p.p.,} \end{cases}$$

alors u reste nulle pour tout temps, that is to say $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.

Soit $t > 0$. Comme $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ p.p., en prenant le produit scalaire avec $u(t) \in L^2(\Omega)$, on obtient $(u'(t) | u(t))_2 + (\mathcal{A}u(t) | u(t))_2 = 0$. Comme $(\mathcal{A}u(t) | u(t))_2 = \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx$, on a donc

$$(u'(t) | u(t))_2 = - \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \leq 0.$$

Soit ψ l'application définie par $t \mapsto \psi(t) = \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$. L'application ψ est continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\psi'(t) = 2(u'(t) | u(t))_2$ pour tout $t > 0$. On a donc $\psi'(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. L'application ψ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+ et, comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc $\psi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. On a bien finalement $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.

Nous avons ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de (4.5 Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert bornée equation.4.5). Cette solution est dite "presque classique" car la dérivation en temps est prise au sens classique (puisque u est de classe C^1 à valeurs dans $L^2(\Omega)$), la condition initiale est prise au sens classique dans $L^2(\Omega)$. Par contre le laplacien de $u(t)$ est pris au sens des dérivées faibles. Il faut un travail supplémentaire (sur la régularité des fonctions e_n) pour montrer que l'équation $u_t - \Delta u$ est vérifiée au sens classique sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^*$. Ceci est fait pour $N = 1$ dans l'exercice 4.1 Solution classique en dimension 1 exo.4.1.

Remarque 4.2 (Généralisation) On peut aussi montrer l'existence et l'unicité (pour $u_0 \in L^2(\Omega)$) de la solution de (4.5) Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné équation (4.5) en remplaçant, dans la définition de \mathcal{A} , Δu par $\sum_{i,j=1}^N D_j(a_{ij}D_i u)$, avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, sous une hypothèse de coercivité, that is to say si il existe $\alpha > 0$ t.q. $\alpha|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}\xi_i \xi_j$ p.p. dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On peut aussi remplacer $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ par $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t)$ si $f \in C([0, \infty[, L^2(\Omega))$.

Solutions presque classiques par semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est donc le s.e.v. de E sur lequel \mathcal{A} est défini. On dit que \mathcal{A} est m -accréatif si \mathcal{A} vérifie :

- (i) $D(\mathcal{A})$ est dense dans E ,
- (ii) $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda\mathcal{A})$ est inversible, d'inverse continue et $\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq 1$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E, E)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans E , et que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_E}{\|u\|_E}, \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}(E, E).$$

Remarque 4.3 (Opérateur maximal monotone) Soit E est un espace de Hilbert réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. L'opérateur \mathcal{A} est m -accréatif si et seulement si il vérifie :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}u|u)_E \geq 0 & \forall u \in D(\mathcal{A}), \\ (Id + \mathcal{A}) \text{ surjectif.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que \mathcal{A} est maximal monotone.

Exemple : Le laplacien Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $E = L^2(\Omega)$ et \mathcal{A} défini par $D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ et $\mathcal{A}u = -\Delta u$ si $u \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur \mathcal{A} est alors un opérateur m -accréatif (ou maximal monotone puisqu'on est dans le cas d'un Hilbert).

Remarque 4.4 (Graphe d'un opérateur m -accréatif) Le graphe d'un opérateur m -accréatif est fermé. En ce sens, il est maximal, d'où le " m " dans m -accréatif.

On admettra le théorème suivant :

Théorème 4.5 (Hille-Yosida) Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire m -accréatif et $u_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors il existe un unique $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ tel que

$$u \in C^1([0, +\infty[, E), \quad (4.6a)$$

$$u(t) \in D(\mathcal{A}), \forall t \geq 0, \quad (4.6b)$$

$$u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \quad (4.6c)$$

$$u(0) = u_0. \quad (4.6d)$$

La démonstration de ce théorème peut s'effectuer par une discrétisation en temps : on considère le problème elliptique $\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} + \mathcal{A}u_{n+1} = 0$, qui s'écrit encore $u_{n+1} = (I + \delta t \mathcal{A})^{-1} u_n$, où $\delta t > 0$ est le pas de la discrétisation. On effectue ensuite un passage à la limite $\delta t \rightarrow 0$.

Définition 4.6 (Semi-groupe) Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire m -accréatif. Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$ et $t \geq 0$, on pose $S(t)u_0 = u(t)$, où u est l'unique fonction vérifiant (4.6Hille-Yosidaéquation.4.4). Alors l'opérateur $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $D(\mathcal{A}) \subset E$ dans E qui vérifie

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t) \circ S(s) \text{ pour } t, s \geq 0; \\ S(0) = Id \\ \|S(t)u_0\|_E \leq \|u_0\|_E, \end{cases}$$

On dit que $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe de contraction.

Soit $t \geq 0$. Comme $\overline{D(\mathcal{A})} = E$, l'opérateur $S(t)$ se prolonge de manière unique à tout E en un opérateur $\overline{S(t)}$ et $\overline{S(t)} \in \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 4.7 (Solution "mild") Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire m -accréatif. Soit $u_0 \in E$, la fonction $u(t) = \overline{S(t)}u_0$, définie de manière unique, s'appelle solution mild du problème

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans le cas du laplacien, on peut se demander en quel sens la solution mild satisfait (4.4Solutions presque classiques, équation de diff. On peut montrer que la solution mild est solution en un sens faible que nous verrons dans la section 4.3Existence Par Faedo-Galerkinsection.4.3. De plus, cette solution mild est, dans ce cas particulier, l'unique solution faible. Cependant, cette situation n'est pas complètement générale. La solution mild, obtenue par densité, est toujours unique (dès que $u_0 \in E$, quelque soit l'espace de Banach E et l'opérateur m -accréatif \mathcal{A}). Pour les problèmes issus d'équations aux dérivées partielles, cette solution mild est en général une solution faible du problème que l'on veut résoudre ; toutefois le problème de l'unicité de la solution faible est beaucoup plus difficile. On peut avoir non unicité de la solution faible quand on prend une "solution faible" dans un sens qui semble pourtant raisonnable. Il n'y a pas alors d'équivalence entre la notion de solution mild et de solution faible, car la solution mild est unique et, malheureusement, il n'y a pas unicité de la solution faible.

Pour essayer d'éclairer cette difficulté, nous nous intéressons, dans le paragraphe qui suit, à un problème un peu plus simple. Nous nous intéressons à un problème elliptique pour lequel nous montrons que la solution obtenue par densité, à la manière de la solution mild introduite ci-dessus, est unique alors qu'on n'a pas unicité des solutions faibles en prenant une définition "naturelle" de solution faible. Ceci montre en particulier que dans le cas parabolique, il n'y a pas non plus d'équivalence entre solution mild et solution faible (par exemple en considérant les solutions stationnaires).

Le Laplacien avec donnée L^1 On considère un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, des fonctions a_{ij} , pour $i, j = 1, \dots, N$, appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et satisfaisant l'hypothèse de coercivité habituelle :

$$\exists \alpha > 0; \quad \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On note A la fonction à valeurs matricielle donnée par les fonctions a_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$. On sait (par le lemme de Lax-Milgram) que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.7)$$

On considère le même problème avec une donnée moins régulière $f \in L^1(\Omega)$.

Etape 1 - Estimation, cas régulier. Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, on montre qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}$ tel que si u est (l'unique) solution de (4.7) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.7) avec $f \in L^2(\Omega)$ alors $\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f\|_{L^1(\Omega)}$. On pose alors $T_q(f) = u$.

Etape 2 - Solution mild Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, l'application T_q de $L^2(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ est continue de $L^2(\Omega)$ muni de la norme de $L^1(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (muni de sa norme naturelle). On peut donc prolonger T_q de manière unique par densité sur tout $L^1(\Omega)$ (car $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$). On appelle \overline{T}_q ce prolongement. On remarque alors que $\overline{T}_{q_1} f = \overline{T}_{q_2} f$ pour tout q_1, q_2 t.q. $1 \leq q_1 < q_2 < \frac{N}{N-1}$. On peut ainsi définir un opérateur (linéaire) T de L^1 dans $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ par $T(f) = \overline{T}_q(f)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Définition 4.8 (Solution mild pour un problème elliptique à donnée L^1) *Sous les hypothèses précédentes sur Ω et A , soit $f \in L^1(\Omega)$. La fonction Tf est la solution mild de*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

Etape 3 - Quel sens donner à la solution mild ? Il est naturel de se demander quel rapport il y a entre la solution mild $u = Tf$ et une solution faible du problème de Dirichlet homogène. Il est assez facile de montrer que u est solution faible dans le sens (naturel) suivant :

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \leq q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in \bigcup_{r > N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \quad (4.9)$$

Remarque : un résultat analogue d'existence de solution mild et donc d'existence de solution faible est encore vrai si f est une mesure sur Ω (dans (4.9) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9), on remplace alors $f v dx$ par $v df$). Pour montrer ce résultat, on utilise la densité de $L^2(\Omega)$ dans l'ensemble des mesures sur Ω au sens de la convergence faible- \star dans $C(\overline{\Omega})'$ (car l'ensemble des mesures sur Ω peut être vu comme une partie du dual de $C(\overline{\Omega})$). Il faut aussi utiliser le fait que les éléments de $W_0^{1,r}(\Omega)$ sont des fonctions continues pour $r > N$.

Etape 4 - Unicité mild, non unicité faible La solution mild est unique. La solution de (4.9) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9) est-elle unique ? pas toujours. . . Montrons d'abord que si $N = 2$, la solution faible est unique. Ceci se montre par régularité sur le problème dual, qui entraîne l'unicité sur le problème primal. Soit u solution de

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \leq q < 2} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in \bigcup_{r > 2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \quad (4.10)$$

On veut montrer que $u = 0$. On ne peut pas prendre comme fonction test $v = u$ dans (4.9) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9) ou (4.10) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.10), en raison du manque de régularité de u . Pour contourner ce problème, on va raisonner en utilisant la régularité des solutions du problème dual. On remarque d'abord que u est solution de (4.10) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.10) et que (4.10) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.10) peut se ré-écrire ainsi :

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \leq q < 2} W_0^{1,q}, \\ \int_{\Omega} A^t \nabla v \cdot \nabla u dx = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{r > 2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \quad (4.11)$$

Or on sait (par le lemme de Lax-Milgram) que si $g \in L^2(\Omega)$ il existe un unique v solution de

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega), \\ \int A^t \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int gw \, dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.12)$$

((4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12) est le problème dual de (4.7Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.7).)

On aimerait pouvoir prendre $w = u$ dans (4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12), car on aurait alors, grâce à (4.11Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.11), $\int_{\Omega} gu \, dx = 0$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$, ce qui permettrait de conclure que $u = 0$. Mais pour l'instant, on ne peut pas car u et v ne sont pas dans les bons espaces. L'astuce consiste à considérer un second membre g plus régulier dans (4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12) et d'utiliser le résultat de régularité dû à Meyers suivant.

Théorème 4.9 (Meyers) *Il existe $p^* > 2$, ne dépendant que de A et Ω , t.q. si $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de (4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12) alors $v \in W_0^{1,p^*}(\Omega)$.*

Soit donc $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de (4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12). On a alors $v \in W_0^{1,p^*}(\Omega)$ grâce au théorème de Meyers. On note $(p^*)'$ l'exposant conjugué de p^* , de sorte que $(p^*)' = \frac{p^*}{p^*-1} < 2$. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,(p^*)}'(\Omega)$, on déduit de (4.12Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.12) que

$$\int A^t \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int gw \, dx, \quad \forall w \in W_0^{1,(p^*)}'(\Omega). \quad (4.13)$$

Or, comme $(p^*)' = \frac{p^*}{p^*-1} < 2$, toute solution u solution de (4.11Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.11) appartient à $W_0^{1,(p^*)}'(\Omega)$. On peut donc prendre $w = u$ dans (4.13Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.13). Mais comme $v \in W_0^{1,p^*}(\Omega)$ avec $p^* > 2$, on a également, par (4.11Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.11), $\int_{\Omega} A^t \nabla v \cdot \nabla u \, dx = 0$. On a donc $\int_{\Omega} gu \, dx = 0$, pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$. On en déduit que $u = 0$ en prenant successivement $g = 1_{\{u>0\}}$ puis $g = 1_{\{u<0\}}$.

Pour $N = 3$, le théorème de régularité de Meyers est encore vrai, la démonstration d'unicité est donc encore juste si A est telle que $p^* > N = 3$ (afin de pouvoir prendre v comme fonction test dans (4.9Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9)). Mais il existe des fonctions matricielle $A = (a_{ij})_{i,j=1,N}$ (à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et coercive) pour lesquelles $p^* < 3$. L'unicité n'est plus assuré et on peut effectivement construire des cas pour lesquels la solution de (4.9Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9) n'est pas unique (voir l'article de Prignet sus-mentionné).

Etape 5 Que peut-on rajouter à solution faible pour avoir l'unicité? Pour $f \in L^1(\Omega)$, on montre qu'il existe une et une solution à une nouvelle formulation, due à Ph. Bénilan². Cette nouvelle formulation (aussi appelée formulation entropique), est la suivante :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \text{ pour tout } 1 \leq q < \frac{N}{N-1}, & T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \forall k > 0, \\ \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla T_k(u - \varphi) \, dx = \int f T_k(u - \varphi) \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall k \geq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

où T_k est la fonction troncature, définie par : $T_k(s) = \max(\min(k, s), -k)$. L'article de Bénilan *et al.* démontre qu'il existe une unique solution au problème (4.14Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.14) (qui est donc la solution mild de (4.8Solution mild pour un problème elliptique à donnée L^1 equation.4.8)). Ph. Bénilan conjecturait

2. Ph. Bénilan, Philippe, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariépy, M. Pierre, J.-L. Vazquez, An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2, 241–273.

que le fait d'ajouter la condition $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ (pour tout $k > 0$) à la formulation (4.9) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9) devait suffire à assurer l'unicité. De fait, dans le contre exemple de Serrin-Prignet³, le contre exemple consiste à construire une solution non nulle de (4.9) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.9) avec $f = 0$. Mais, cette solution ne vérifie pas $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour $k > 0$. Toutefois, la conjecture de Bénilan reste une conjecture...

Une autre question ouverte consiste à trouver une formulation semblable à (4.14) Le Laplacien avec donnée L^1 equation.4.14) donnant l'unicité lorsque f est une mesure sur Ω .

Remarque 4.10 (Limitation de la méthode semi-groupe) Une difficulté importante de cette méthode par semi-groupe est sa généralisation au cas où A dépend de t .

Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$, u_0 une fonction de Ω dans \mathbb{R} et f une fonction de $\Omega \times]0, T[$ dans \mathbb{R} . On considère le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et f dans un espace convenablement choisi, on va chercher $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ solution faible de ce problème.

Comme $H_0^1(\Omega)$ est séparable, il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espaces inclus dans $H_0^1(\Omega)$, de dimension finie, par exemple $\dim E_n = n$, et tels que $E_n \subset E_{n+1}$ et

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = H_0^1(\Omega).$$

Soit $\{e_1 \dots e_n\}$ une base de E_n . On cherche $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$ t.q.

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha_i'(t) e_i e_k \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha_i(t) \nabla e_i \cdot \nabla e_k \, dx = \int_{\Omega} f(t) e_k \, dx, \text{ pour tout } k = \{1 \dots n\} \text{ et } t > 0,$$

et les $\alpha_i(0)$ sont choisis pour que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) e_i \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un système de n équations différentielles avec condition initiale pour lequel on montre l'existence d'une solution. On cherche alors des estimations sur la solution u_n qui permettent de passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$. Cette technique, qu'on va développer plus loin, permet de montrer que pour $f \in L^2(]0, T[, H^{-1})$ la limite u des u_n satisfait :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), u \in C([0, T], L^2(\Omega)), u(0) = u_0 \text{ p.p.}, \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt + \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right) \, dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt, \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (4.16)$$

3. **J. Serrin**, Pathological solutions of elliptic differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 1964 385–387.

A. Prignet, Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures. Rend. Mat. Appl. (7) 15 (1995), no. 3, 321–337.

Discrétisation en espace et en temps

On discrétise le problème (4.15 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace) equation.4.15) par un schéma numérique, par exemple par éléments finis $P1$ en espace et par un schéma d'Euler implicite en temps. On obtient une solution approchée notée u_n . On obtient alors des estimations sur u_n . On passe ensuite à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, on obtient ainsi pour le problème de la chaleur (4.15 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace) equation.4.15) que la limite u du schéma numérique satisfait :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ - \int_0^T \int_{\Omega} u \varphi_t \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f \varphi \, dx \, dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(]0, T[\times \Omega). \end{cases} \quad (4.17)$$

On montrera plus loin que les problèmes (4.16 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace) equation.4.16) et (4.17 Discrétisation en espace et en temps equation.4.17) sont équivalents. Ceci est donné dans le lemme suivant.

Lemme 4.11 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Alors, la fonction u est solution de (4.16 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace) equation.4.16) si et seulement si u est solution de (4.17 Discrétisation en espace et en temps equation.4.17).*

Existence par degré topologique

Dans le cas de problèmes non linéaires, plutôt que d'approcher ou de discrétiser, on peut se ramener à un problème linéaire et appliquer un argument de type degré topologique, en utilisant les résultats connus dans le cas linéaire. C'est ce qu'on fera par exemple sur le problème (voir le problème (4.33 problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33))

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(v(t, x) f(u)) - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

4.2 Intégration de fonctions à valeurs vectorielles

On a utilisé dans les formulations faible de la section 4.1 Aperçu des méthodes section.4.1 les espaces $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Ce sont des espaces pour lesquels on utilise l'intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie (comme, par exemple, $L^2(\Omega)$). Il nous faut donc préciser comment on définit une telle intégrale. Rappelons d'abord comment on définit l'intégrale sur \mathbb{R} . On commence par définir la notion de mesurabilité. On rappelle que si (X, T, m) est un espace mesuré, une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Une généralisation facile de cette notion de mesurabilité aux espaces de Banach est donc la suivante : une fonction f de X dans E est mesurable si $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ (où $\mathcal{B}(E)$ est la tribu engendrée par les ouverts de E). En fait cette notion n'a aucun intérêt du point de vue de l'intégrale si E n'est pas séparable. Par ailleurs, une fonction réelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si f est une limite simple de fonctions étagées, i.e. si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \rightarrow f$ simplement (cette équivalence n'est plus vraie si f est à valeurs dans E où est E un espace de Banach non séparable). C'est cette dernière notion (limite simple de fonctions étagées) qui est intéressante pour définir l'intégrale. Plus précisément, comme l'intégrale ne voit pas les changements d'une fonction sur un ensemble de mesure nulle, nous allons définir la notion de " m -mesurabilité" de la manière suivante :

Définition 4.12 (Fonction m -mesurable) Soit (X, T, m) un espace mesuré. On dit qu'une fonction f , définie de X à valeurs dans \mathbb{R} ou à valeurs dans un Banach E est m -mesurable si elle est limite presque partout de fonctions étagées.

Proposition 4.13 (Mesurabilité et m -mesurabilité) Soit (X, T, m) un espace mesuré.

1. Une fonction f de X à valeurs dans \mathbb{R} est m -mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..
2. Soit E est un espace de Banach séparable et f une fonction de X dans E . Alors,
 - (a) f est mesurable au sens " $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ " si et seulement si f est limite simple de fonctions étagées.
 - (b) Comme dans le cas réel, la fonction f de X dans E est m -mesurable si et seulement si il existe g mesurable t.q. $f = g$ p.p..

Soit (X, T, m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m -mesurable de X dans E . Il est facile de voir que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|_E$ est m -mesurable de X dans \mathbb{R}_+ . la quantité $\int \|f(x)\|_E dm(x)$ est donc parfaitement définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Ceci permet de définir l'espace $\mathcal{L}_E^1(X, T, m)$.

Définition 4.14 (L'espace $\mathcal{L}_E^1(X, T, m)$) Soit (X, T, m) un ensemble mesuré, E un espace de Banach et f une fonction m -mesurable de X dans E . La fonction f appartient à $\mathcal{L}_E^1(X, T, m)$ si

$$\int \|f(x)\|_E dm(x) < +\infty.$$

On veut maintenant définir l'intégrale d'un élément de $\mathcal{L}_E^1(X, T, m)$ où (X, T, m) est un espace mesuré et E un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}_E^1(X, T, m)$. On ne peut pas utiliser la même technique que pour $E = \mathbb{R}$ (that is to say décomposer f en f^+ et f^- et commencer par intégrer des fonctions mesurables positives). Par contre, comme f est m -mesurable, on sait qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées t.q. $f_n \rightarrow f$ p.p.. Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose alors

$$A_n = \{x \in A; \|f_n(x)\|_E \leq 2\|f(x)\|_E\} \text{ et } g_n = f_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

(le nombre 2 pourrait être remplacé ici par n'importe quel nombre > 1 et A pourrait être remplacé par un autre ensemble vérifiant les mêmes propriétés. Cela ne changerait pas la définition de l'intégrale donnée dans la définition 4.15 Intégrale à valeurs dans E theorem.4.15.) La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} &g_n \text{ étagée pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &g_n \rightarrow f \text{ p.p.}, \\ &\int \|g_n - f\|_E dm \rightarrow 0 \text{ par convergence dominée.} \end{aligned}$$

La définition de l'intégrale d'une fonction étagée est immédiate. On pose

$$I_n = \int g_n dm.$$

On peut alors montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E . Cette suite converge donc dans E . On peut aussi montrer que la limite de cette suite ne dépend que de f (et non du choix de f_n et de A). Il est donc naturel de définir l'intégrale de f comme la limite de cette suite. C'est ce qui est fait dans la définition 4.15 Intégrale à valeurs dans E theorem.4.15.

Définition 4.15 (Intégrale à valeurs dans E) Soit $f : X \rightarrow E$ où (X, T, m) est un espace mesuré et E un espace de Banach.

1. (Rappel) $f \in \mathcal{L}_E^1(X, T, m)$ si f est m -mesurable et $\int \|f\|_E dm < +\infty$.

2. (Intégrale) Soit $f \in \mathcal{L}_E^1(X, T, m)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions étagées t.q. $f_n \rightarrow f$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $A_n = \{x \in A \text{ t.q. } \|f_n(x)\|_E \leq 2\|f(x)\|\}$ et $g_n = f_n \mathbb{1}_{A_n}$. On définit l'intégrale de f par :

$$\int f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dm \in E.$$

Avec la relation d'équivalence $=$ p.p., on définit alors $L_E^1(X, T, m)$. Il est alors facile aussi de deviner les définitions de $\mathcal{L}_E^p(X, T, m)$ et $L_E^p(X, T, m)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. Un élément de $L_E^p(X, T, m)$ est donc un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}_E^p(X, T, m)$ (et deux fonctions appartenant à cet ensemble sont égales p.p.). Comme d'habitude en intégration, si $F \in L_E^p(X, T, m)$, on confond F et f si $f \in F$ (de sorte que l'on raisonne comme si $F \in \mathcal{L}_E^p(X, T, m)$).

Proposition 4.16 Soit $1 \leq p \leq +\infty$, (X, T, m) un espace mesuré σ -fini et E un espace de Banach. Alors

1. $L_E^p(X, T, m)$ (avec sa norme naturelle) est complet. C'est donc un espace de Banach.

2. Si $p < +\infty$ et E est séparable, $L_E^p(X, T, m)$ est séparable.

3. Si $p = 2$ et E est un Hilbert, alors $L_E^2(X, T, m)$ est aussi un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est défini par :

$$(u|v)_{L_E^2(X, T, m)} = \int_X (u(x)|v(x))_E dm(x).$$

Par conséquent, de toute suite bornée de $L_E^2(X, T, m)$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L_E^2(X, T, m)$.

4. Si $1 < p < +\infty$ et si E est un espace de Banach réflexif séparable, l'espace $L_E^p(X, T, m)$ est alors un espace de Banach réflexif séparable.

5. (Dualité dans $L_E^p(X, T, m)$) Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $p' = p/(p-1)$ et $v \in L_{E'}^{p'}(X, T, m)$. Pour $u \in L_E^p(X, T, m)$, l'application $T_v : u \mapsto \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L_E^p(X, T, m)$ dans \mathbb{R} . (On a donc $T_v \in (L_E^p(X, T, m))'$).

De plus, l'application $T : v \mapsto T_v$ est une isométrie de $L_{E'}^{p'}(X, T, m)$ sur son image (qui est donc une partie de $L_E^p(X, T, m)'$).

Si E' est séparable et $p < \infty$, l'image de T est $(L_E^p(X, T, m))'$ en entier.

6. (Convergence dominée) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L_E^p(X, T, m)$. Si

(a) $u_n \rightarrow u$ p.p.,

(b) $\|u_n\|_E \leq G$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $G \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(X, T, m)$,

alors $u_n \rightarrow u$ dans $L_E^p(X, T, m)$.

Démonstration de la proposition 4.16 Intégration à valeur vectorielle Item.417

Les propriétés 1-4 ne sont démontrées pas ici. La propriété 5 est partiellement démontrée dans l'exercice 4.2 Dual de L_E^p exo.4.2. La propriété 6 est plus facile. Il suffit de remarquer que

$$\|u_n - u\|_E \leq \|u_n\|_E + \|u\|_E \leq 2G.$$

On a donc $\|u_n - u\|_E^p \leq 2^p |G|^p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$. Par le théorème de convergence dominée pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , on en déduit que $\int \|u_n - u\|_E^p dm \rightarrow 0$ et donc que $u_n \rightarrow u$ dans $L_E^p(X, T, m)$. ■

Remarque 4.17 Soit E une espace de Banach. On dit que E est uniformément convexe si

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (\|x\|_E = 1, \|y\|_E = 1, \|x - y\| \geq \eta) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \varepsilon.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω ouvert de \mathbb{R}^N sont uniformément convexes. Une conséquence importante du fait que E soit un Banach uniformément convexe est que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E et $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$, alors $x_n \rightarrow x$ dans E . Cette propriété permet éventuellement de simplifier certaines démonstrations de la proposition 4.16 Intégration à valeur vectorielle Item.417 (mais n'est pas nécessaire).

Différentes notions de dérivée pour une fonction à valeurs vectorielles.

Plaçons nous maintenant dans le cadre qui va nous intéresser pour les équations paraboliques, c'est à dire :

$$(X, T, m) = (]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \lambda).$$

On va d'abord définir "proprement" la dérivée par rapport au temps, $u_t = du/dt$, pour une fonction de $]0, T[$ dans E qui n'est pas dérivable au sens classique (that is to say au sens de l'existence de la limite, dans E , du quotient différentiel habituel).

On note maintenant $L^p_E(]0, T[)$ l'espace $L^p(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \lambda)$ et $L^1_{E,loc}(]0, T[)$ l'ensembles des (classes de) fonctions à valeurs dans E localement intégrables sur $]0, T[$ (avec la mesure de Lebesgue).

Lemme 4.18 Soit $u \in L^1_{loc}(]0, T[, E)$ on suppose que $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$. Alors $u = 0$ p.p.

Démonstration : Semblable au cas $E = \mathbb{R}$.

On peut ainsi définir la dérivée par transposition de u .

Définition 4.19 (Dérivée par transposition) Soit E un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p_E(]0, T[)$. On note \mathcal{D} l'espace $C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ et \mathcal{D}_E^* l'ensemble des applications linéaires de \mathcal{D} dans E . On définit $u_t \in \mathcal{D}_E^*$ par :

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \in E.$$

Remarque 4.20 Si $u \in C^1(]0, T[, E)$ on a

$$- \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T u'(t)\varphi(t)dt = \langle u_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}}.$$

On confond alors u' (dérivée classique) avec u_t (dérivée par transposition), c'est à dire la fonction u' qui appartient à $C(]0, T[, E)$ avec l'application linéaire de \mathcal{D} dans E notée u_t . (Grâce au lemme 4.18 Intégration à valeur vectorielle theorem.4.18, la fonction u' est entièrement déterminée par u_t , ce qui justifie la confusion entre u' et u_t .)

Définition 4.21 (Dérivée faible) Soit E et F deux espaces de Banach et $1 \leq p, q \leq +\infty$. On suppose qu'il existe un espace vectoriel G t.q. $E \subset G$ et $F \subset G$. Soit $u \in L^p_E(]0, T[)$ (on a donc $u_t \in \mathcal{D}_E^*$). On dit que $u_t \in L^q_F(]0, T[)$ si il existe une fonction $v \in L^q_F(]0, T[)$ telle que

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \underbrace{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt}_{\in E} = \underbrace{\int_0^T v(t)\varphi(t)dt}_{\in F}.$$

Cette égalité n'a de sens que s'il existe un espace vectoriel G tel que $E \subset G$ et $F \subset G$. Dans ce cas, on confond $u_t \in \mathcal{D}_E^*$ et $v \in L_F^q(]0, T[)$. (Ici aussi le lemme 4.18 Intégration à valeur vectorielle theorem.4.18 est utile pour faire cette confusion car, grâce au lemme 4.18 Intégration à valeur vectorielle theorem.4.18, si la fonction v existe elle est alors unique.)

En résumé, on a donc trois notions de dérivée d'une fonction u de $]0, T[$ à valeurs dans E (espace de Banach).

- (1) Dérivée classique : $u' :]0, T[\rightarrow E$ (existe rarement...).
- (2) Dérivée par transposition : $u_t \in \mathcal{D}_E^*$ (existe dès que $u \in L_E^p(]0, T[)$).
- (3) Dérivée faible : $u_t \in L_F^q(]0, T[)$ où F est un Banach tel que $E \subset G$ et $F \subset G$ avec G espace vectoriel.

Exemples Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

1. $E = H_0^1(\Omega)$, $F = H^{-1}(\Omega)$. On a alors $E, F \subset G = \mathcal{D}^*(\Omega)$.
2. $1 \leq p < +\infty$, $q = p/(p-1)$, $E = W_0^{1,p}(\Omega)$, $F = W^{-1,q}(\Omega)$. On a aussi $E, F \subset G = \mathcal{D}^*(\Omega)$.
3. $E = H^1(\Omega)$, $F = (H^1(\Omega))'$. Pour cet exemple, on a $F \not\subset \mathcal{D}^*(\Omega)$. En effet, on prend par exemple T définie, pour $v \in H^1(\Omega)$, par

$$T(v) = \int_{\partial\Omega} v d\gamma(x).$$

L'application T est bien une application linéaire continue sur $H^1(\Omega)$, donc $T \in (H^1(\Omega))'$. Mais $T = 0$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et donc, comme T n'est pas l'application nulle, F ne s'injecte pas dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Dans cet exemple, pour injecter E et F dans le même espace G , on commence par identifier $(L^2(\Omega))'$ (dual topologique de $L^2(\Omega)$) avec $L^2(\Omega)$. Ceci est possible car si $T \in (L^2(\Omega))'$, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un et un seul $u \in L^2(\Omega)$ t.q. $T(v) = (v|u)_2$ pour tout $v \in L^2(\Omega)$. On confond alors u et T . Par cette identification, on a donc $(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$. On remarque maintenant que, si E, H sont deux espaces de Banach avec $E \subset H$, injection continue de E dans H et densité de E dans H , on a alors $H' \subset E'$. On prend ici $E = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$ et on a donc (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))'$) $H' = L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$. Finalement, on a donc $E, F \subset G$ en prenant $G = (H^1(\Omega))'$. On a ainsi mis E et F dans le même espace $G = (H^1(\Omega))'$ grâce à l'identification de $L^2(\Omega)$ avec $(L^2(\Omega))'$.

4. Dans l'exemple précédent, on a deux espaces de Banach E et H avec injection continue de $E \subset H$ et densité de E dans H . On a alors $H' \subset E'$. L'espace H est une espace de Hilbert. En identifiant H avec H' on a donc $E \subset E'$. Mais, si l'objectif est seulement d'avoir $E \subset E'$, il n'est pas nécessaire d'avoir $H' \subset E'$ et on peut retirer l'hypothèse de densité de E dans H . Plus précisément, soit E un espace de Banach et H un espace de Hilbert avec $E \subset H$ et injection continue de E dans H . On identifie H avec H' . Soit maintenant $u \in E$. Comme $u \in H$, on a donc identification entre u et T_u qui est l'application $v \mapsto (v|u)_H$ de H dans \mathbb{R} . On peut alors aussi identifier u (qui est dans E) avec la restriction de T_u à E (qui est un élément de E'). Cette identification est légitime car si u_1 et u_2 sont deux éléments différents de E les restrictions de T_{u_1} et T_{u_2} à E sont des applications différentes. On a ainsi $E \subset E'$. Dans cet exemple, il faut toutefois noter que (en l'absence de densité de E dans H) des éléments différents de H' ont la même restriction à E (et peuvent donc correspondre au même élément de E).

Un exemple intéressant de cette situation est obtenu en prenant $H = L^2(\Omega)^N$ (avec Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N > 1$) et $E = \{u \in H \text{ t.q. } \operatorname{div}(u) = 0\}$.

Remarque 4.22 (Comparaison de $L^p(]0, T[, L^p(\Omega))$ et $L^p(\Omega \times]0, T[)$)

Soient $T > 0$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $1 \leq p < +\infty$.

Soit $u \in L^p(]0, T[, L^p(\Omega))$. Il existe alors $v \in L^p(\Omega \times]0, T[)$ tel que $u(t) = v(\cdot, t)$ p.p. (dans Ω) et pour presque tout $t \in]0, T[$. (Noter que cette égalité est vraie quelquefois les représentants choisis pour u et v .)

Réciproquement, si $v \in L^p(\Omega \times]0, T[)$, il existe $u \in L^p(]0, T[, L^p(\Omega))$ tel que $u(t) = v(\cdot, t)$ p.p. (dans Ω) et pour presque tout $t \in]0, T[$.

En conservant ces notations, on peut alors comparer du/dt (qui s'applique à un élément de $C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$) et $\partial v/\partial t$ (qui s'applique à un élément de $C_c^\infty(\Omega \times]0, T[, \mathbb{R})$). La réponse est que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}}(x) \psi(x) dx &= - \int_{\Omega} \left(\int_0^T u(t) \varphi'(t) dt \right) (x) \psi(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^T v(x, t) \varphi'(t) \psi(x) dx dt = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \varphi \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega \times]0, T[), \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)}. \end{aligned}$$

Proposition 4.23 (Commuter action et intégrale) Soit E un espace de Banach, $u \in L^1_E(]0, T[)$, $\psi \in E'$ et $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[)$. Alors,

$$\langle \psi, \int_0^T u(t) \varphi(t) dt \rangle_{E', E} = \int_0^T \langle \psi, u(t) \rangle_{E', E} \varphi(t) dt.$$

La preuve de la proposition ?? est laissée en exercice.

Lemme 4.24 Soit E un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p_E(]0, T[)$. On suppose que $u_t \in L^p_E(]0, T[)$ (on a alors $u \in W^{1,p}_E(]0, T[)$). Alors, $u \in C([0, T], E)$, et même $u \in C^{0,1-1/p}([0, T], E)$. Plus précisément, il existe $a \in E$ t.q. $u(t) = a + \int_0^t u_t(s) ds$ pour presque tout $t \in]0, T[$ et u est alors identifié à la fonction (continue sur $[0, T])$ $t \mapsto a + \int_0^t u_t(s) ds$.

Démonstration La démonstration est semblable au cas $E = \mathbb{R}$. On pose $u_t = v \in L^p_E(]0, T[)$ et on définit w par $w(t) = \int_0^t v(s) ds$, de sorte que $w \in C([0, T], E)$. On montre assez facilement que $w_t = v = u_t$ et donc $(w - u)_t = 0$. On a donc

$$\int_0^T (w - u) \varphi_t dt = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R}). \quad (4.18)$$

On choisit maintenant une fonction $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ t.q. $\int_0^T \varphi_0(s) ds = 1$. Pour $\psi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ on définit φ par

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(s) ds - \int_0^t \varphi_0(s) ds \int_0^T \psi(s) ds,$$

de sorte que $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ et on peut prendre φ dans (4.18) Intégration à valeur vectorielle equation.4.18). On en déduit (la preuve est laissée en exercice) qu'il existe $a \in E$ t.q. $w - u = a$ p.p. Donc $u \in C([0, T], E)$. Avec l'inégalité de Hölder, on montre ensuite que $u \in C^{0,1-1/p}$. ■

Nous allons maintenant montrer un lemme plus difficile donnant aussi la continuité de u . On suppose que E est un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F . On a donc aussi $F' \subset E'$. Comme F est un espace de Hilbert, on peut identifier F avec son dual par le théorème de représentation de Riesz, that is to say que l'on identifie $v \in F$ avec l'application $T_v : u \mapsto (v|u)_F$ (qui est un élément de F'). L'application $v \mapsto T_v$ est une isométrie (bijective) de F dans F' . Avec cette identification, on a donc $E \subset F = F' \subset E'$. Donc, tout élément de E est alors un élément de E' . Pour $u, v \in E$, on a

$$\langle v, u \rangle_{E', E} = (v|u)_F,$$

that is to say $\langle T_v, u \rangle_{E', E} = (v|u)_F$, où T_v est l'élément de F' identifié à $v \in F$. Avec cette identification de F avec F' , on va maintenant donner un résultat de continuité de u dans F si $u \in L^2(]0, T[, E)$ et $u_t \in L^2(]0, T[, E')$. Il faut faire très attention que cette dernière hypothèse n'a de sens que par l'identification de F avec F' (si on change d'espace F , on change le sens de $u_t \in L^2(]0, T[, E')$, alors que E' n'est pas changé...).

Lemme 4.25 Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F . On identifie F avec F' (de sorte que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2_E(]0, T[)$. On suppose que $u_t \in L^2_{E'}(]0, T[)$. Alors $u \in C([0, T], F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$ on a

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2 \int_{t_2}^{t_1} \langle u_t, u \rangle_{E', E} dt.$$

Démonstration On va montrer que $u \in C([0, T], F)$.

Soit $\rho \in C_c^\infty(]-2, -1[)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1$ et $\rho \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\rho_n = n\rho(n\cdot)$ de sorte que le support de ρ_n est inclus dans $]-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}[$ et que $\int \rho_n dx = 1$. On définit u_n par convolution avec ρ_n , that is to say $u_n = \tilde{u} \star \rho_n$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \text{ sur }]0, T[\\ u &= 0 \text{ sur }]0, T[^c. \end{aligned}$$

On a donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^2_E(]0, T[)$, $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, E)$ et $u'_n = \tilde{u} \star \rho'_n$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u'_n(t) = \int_0^T u(s) \rho'_n(t-s) ds.$$

On remarque maintenant que $\rho_n(t-s) = 0$ si $t-s \notin \left] \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n} \right[$ c'est à dire $s \notin \left] t + \frac{1}{n}, t + \frac{2}{n} \right[$. Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T - \varepsilon[$. Pour $n \geq n_0$ avec n_0 t.q. $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ on a $t + \frac{2}{n} < T$ et donc

$$\rho_n(t - \cdot) \in C_c^\infty(]0, T[).$$

On a alors

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= \langle u_t, \rho_n(t - \cdot) \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} \\ &= \int_0^T u_t(s) \rho_n(t-s) ds \in E', \text{ car } u_t \in L^2_{E'}(]0, T[). \end{aligned}$$

Donc, $u'_n = \tilde{u}_t \star \rho_n$ sur $[0, T - \varepsilon[$, avec

$$\tilde{u}_t = \begin{cases} u_t \text{ sur }]0, T[\\ 0 \text{ sur }]0, T[^c. \end{cases}$$

Mais $\tilde{u}_t \star \rho_n \rightarrow \tilde{u}_t$ dans $L^2(\mathbb{R}, E')$. Donc $u'_n = \tilde{u}_t \star \rho_n \rightarrow u_t$ dans $L^2_{E'}(]0, T - \varepsilon[)$.

En résumé, $\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2_E(]0, T[) \\ u'_n \rightarrow u_t \text{ dans } L^2_{E'}(]0, T - \varepsilon[) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$

On va maintenant montrer que $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $t \in [0, T[$, et même, pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément si $t \in [0, T - \varepsilon[$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2$. On a donc, pour $t \in]0, T[$,

$$\varphi'(t) = 2 \left(\underbrace{(u'_n - u'_m)(t)}_{\in E} \mid \underbrace{(u_n - u_m)(t)}_{\in E} \right)_F.$$

Soient $t_1, t_2 \in [0, T - \varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} 2(u'_n(s) - u'_m(s)|u_n(s) - u_m(s))_F ds \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} \langle (u_n)_t(s) - (u_m)_t(s), u_n(s) - u_m(s) \rangle_{E', E} ds.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &\leq 2 \left(\int_0^{T-\varepsilon} \|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{E'}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u_n - u_m\|_E^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|(u_n)_t - (u_m)_t\|_{L^2_{E'}} \|u_n - u_m\|_{L^2_E}.\end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$, comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2_E(]0, T[)$ et que la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2_{E'}(]0, T - \varepsilon[)$, il existe n_0 t.q.

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \eta \text{ pour } m, n \geq n_0.$$

On a donc

$$\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1) + \eta \text{ pour } n, m \geq n_0.$$

On intègre cette inégalité pour $t_1 \in]0, T - \varepsilon[$. On obtient

$$\begin{aligned}(T - \varepsilon)\varphi(t_2) &\leq \int_0^{T-\varepsilon} \|u_n - u_m\|_F^2 dt_1 + T\eta \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{L^2_F}^2 + T\eta\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2_E(]0, T[)$, il existe n_1 t.q.

$$(T - \varepsilon)\varphi(t_2) \leq (T + 1)\eta \text{ pour } n, m \geq n_1.$$

On a donc $\varphi(t) \leq \frac{(T+1)\eta}{T-\varepsilon}$ pour $n, m \geq n_1$ et $t \in [0, T - \varepsilon]$. On a ainsi montré que, pour tout $t \in [0, T - \varepsilon]$,

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\|_F^2 \leq \frac{(T + 1)\eta}{T - \varepsilon}.$$

Ceci montre bien que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F uniformément par rapport à t , si $t \in [0, T - \varepsilon]$. Il existe donc une fonction w de $[0, T[$ dans F t.q. $u_n(t) \rightarrow w(t)$ dans F pour tout $t \in [0, T[$. Comme cette convergence est uniforme sur $[0, T - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction w est continue sur $[0, T - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc $w \in C([0, T[, F)$.

Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2_E(]0, T[)$ (et donc p.p. sur $]0, T[$ après extraction éventuelle d'une sous suite), on a donc $u = w$ p.p., et donc $u \in C([0, T[, F)$ (car on identifie, comme d'habitude, la classe de fonctions u avec son représentant continu qui est justement w).

De manière analogue, en décentrant les noyaux régularisants de l'autre côté, on montre que $u \in C(]0, T], F)$. On a donc $u \in C([0, T], F)$.

Enfin, on a aussi pour $t_1, t_2 \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1)\|_F^2 - \|u_n(t_2)\|_F^2 &= 2 \int_{t_2}^{t_1} (u'_n(s)|u_n(s))_F ds \\ &= 2 \int_{t_2}^{t_1} \langle (u_n)_t(s), u_n(s) \rangle_{E', E} ds\end{aligned}$$

en passant à la limite sur n , on obtient

$$\|u(t_1)\|_F^2 - \|u(t_2)\|_F^2 = 2 \int_{t_2}^{t_1} \langle u_t(s), u(s) \rangle_{E',E} ds.$$

4.3 Existence par la méthode de Faedo-Galerkin

Notation : Si E est un espace de Banach et $T > 0$, on notera souvent $L^2(]0, T[, E)$ (au lieu de $L^2_E(]0, T[)$) l'espace $L^2_E(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[, \lambda))$.

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème suivant :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T \in \mathbb{R}^*_+$, f une fonction de $\Omega \times]0, T[$ dans \mathbb{R} et u_0 une fonction de Ω dans \mathbb{R} .

On cherche u tel que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence et d'unicité de solution faible.

Théorème 4.26 (Faedo-Galerkin) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe un et un seul u tel que*

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla u(s) \cdot \nabla v(s) dx \right) ds = \int_0^T \langle f(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds \\ \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Démonstration du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19

On rappelle que l'on a identifié $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$, de sorte que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$. Comme on cherche u t.q. $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a nécessairement $u \in C(]0, T[, L^2(\Omega))$ (d'après le lemme 4.24 Intégration à valeur vectorielle theorem.4.24). La fonction u est donc définie en tout $t \in]0, T[$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(0) = u_0$ p.p..

L'idée, pour démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie ; on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'éléments finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formée de fonctions propres du Laplacien ; that is to say une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Étape 1, remarques liminaires. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla v dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n v dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a, pour tout $w \in L^2(\Omega)$, $w = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (w|e_n)e_n$ au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (that is to say que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)e_i \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$).

On va montrer maintenant que la famille $(\lambda_n^{-1/2}e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ et donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donné par $(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla e_m \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n e_m \, dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n|e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et

$$\left\| \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{\nabla e_n \cdot \nabla e_n}{\lambda_n} \, dx = 1.$$

Puis, on remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, noté $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = (v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n v \, dx.$$

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (et $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que $v = 0$ p.p.. Ceci montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2}e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Etape 2, solution approchée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = ev\{e_p, p = 1, \dots, n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$ avec $\alpha_i \in C([0, T], \mathbb{R})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u_n'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]0, T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$),

$$\langle u_n'(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t) \int_{\Omega} e_i \varphi \, dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$-\Delta u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \Delta e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) e_i \text{ dans } \mathcal{D}^*(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

that is to say, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u_n(t) \cdot \nabla \varphi \, dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) \int_{\Omega} e_i \varphi \, dx.$$

Enfin, comme $f \in L^2(]0, T[, H^{-1})$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(\cdot), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1_{\mathbb{R}}(]0, T[)$. La quantité $\langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (\alpha'_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t)) \int_{\Omega} e_i \varphi dx - \langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n , une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha'_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = f_i(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0|e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds. \quad (4.20)$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0, T], \mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C([0, T], E_n) \subset C([0, T], H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$.

Étape 3, précision sur la dérivée en temps. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. Les fonctions α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n . On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de \mathcal{D}_E^* avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \int_0^T u_n(t) \varphi'(t) dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t) e_i \varphi'(t) dt = - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt \right) e_i.$$

On utilise maintenant (4.20) Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.20),

$$\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} \varphi'(t) dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi(t) dt.$$

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} S_i &= \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt = \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds = \int_0^T \left(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi(t) dt \right) f_i(s) ds - \int_0^T \varphi(s) f_i(s) ds. \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, \mathcal{D}} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t) dt.$$

Since this equality holds for all $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, one has finally

$$(u_n)_t = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0, T[, E_n).$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0, T[, E_n) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0, T[)$ et

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \left(\int_\Omega e_i v dx \right) dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), \sum_{i=1}^n (v | e_i)_2 e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n . L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v. de $H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$)

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, P_n v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = \int_0^T \langle P_n^t f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \quad (4.21)$$

On a aussi $u_n \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Étape 4, estimations sur la solution approchée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. D'après la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2} \|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.21) Existence Par Faedo-Galerkin equation 4.21), on en déduit

$$\frac{1}{2} \|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dt = \int_0^T \langle f, P_n u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt,$$

et donc

$$\|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, P_n u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Ce qui donne aussi

$$\|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + P_n^t f$ (égalité (4.21) Existence Par Faedo-Galerkin equation 4.21)) et que $\|P_n w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}$$

et donc

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Etape 5, passage à la limite. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)),$$

$$(u_n)_t \rightarrow w \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$$

et les estimations sur u_n et $(u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et u_t :

$$\|u\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}$$

$$\|(u)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = u_t$ (puis nous montrerons que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19)).

Par définition de u_t , on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$,

$$\int_0^T u_t(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$

Pour démontrer que $u_t = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \quad (4.22)$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (4.22) Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.22) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$. Nous allons montrer (4.22) Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.22). Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ dans \mathbb{R} définie par

$$S(v) = \int_{\Omega} \left(- \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \right) \psi(x) dx \text{ pour } v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ dans \mathbb{R} . Comme $u_n \rightarrow u$ faiblement $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n) \rightarrow S(u)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Or, pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v) = - \left\langle \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = - \left\langle \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On a donc, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$- \left\langle \int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \rightarrow - \left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $(u_n)_t$). On a donc

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \rightarrow - \left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On considère maintenant l'application \bar{S} de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans \mathbb{R} définie par

$$\bar{S}(v) = \left\langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ pour } v \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

L'application \bar{S} est linéaire continue de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans \mathbb{R} . Comme $(u_n)_t \rightarrow w$ faiblement $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\bar{S}((u_n)_t) \rightarrow \bar{S}(w)$ quand $n \rightarrow +\infty$, that is to say

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \rightarrow \left\langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$- \left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \left\langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, that is to say que $u_t = w$.

Nous savons donc que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que $(u_n)_t \rightarrow u_t$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (4.19) Faedo-Galerkinequation.4.19), il suffit maintenant de passer à la limite dans (4.21) Existence Par Faedo-Galerkinequation.4.21). Soit $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, selon (4.21) Existence Par Faedo-Galerkinequation.4.21),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T (u_n | v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, P_n v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent à limite quand $n \rightarrow +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite, on utilise l'étape liminaire. On remarque que $P_n v(t) \rightarrow v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t . Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T (u | v)_{H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (4.19) Faedo-Galerkinequation.4.19).

Etape 6, condition initiale. Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ (voir la section 4.2) Intégration à valeur vectorielle section.4.2). Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.19) Faedo-Galerkinequation.4.19), il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (that is to say $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$).

On sait que $u(t) \rightarrow u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \rightarrow 0$. On sait aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C([0, T], H^{-1}(\Omega))$. En effet, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C([0, T], H^{-1}(\Omega))$, il existe $w \in C([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q. $u_n(t) \rightarrow w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais, on sait déjà que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur $]0, T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ car u et w sont continues sur $[0, T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$.

Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C([0, T], H^{-1}(\Omega))$. Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que

1. Pour tout $t \in [0, T]$, $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.
2. $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$, quand $s \rightarrow t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0, T]$).

Par démontrer le deuxième item, on utilise le fait que $(u_n)_t \in L^1([0, T], H^{-1}(\Omega))$. La section 4.2) Intégration à valeur vectorielle section.4.2 nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s) ds,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}} &\leq \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}} ds \leq \left(\int_0^T \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2} \\ &\leq \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1})} \sqrt{t_1 - t_2}. \end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit bien que $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$, quand $s \rightarrow t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0, T]$).

Pour démontrer de premier item, on utilise encore la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section.4.2. Comme $u_n \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, pour tout $t, s \in [0, T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \int_s^t \langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\xi,$$

et donc

$$\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| d\xi \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1)}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0, T]$, on en déduit

$$T \|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + 2T \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1)}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, comme cela est indiqué au début de cette étape, que $u(0) = u_0$ p.p.. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19) et donc la démonstration de la partie "existence" du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19).

Étape 7, unicité. On montre maintenant la partie "unicité" du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19). Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19). On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0, T]$, $v = u|_{]0, t]}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section.4.2,

$$\frac{1}{2} (\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω , pour tout $t \in [0, T]$. Ce qui montre la partie "unicité" du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19). ■

Nous allons maintenant donner quelques propriétés complémentaires sur la solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19)

Proposition 4.27 (Dépendance continue)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $T > 0$. Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on note $T(u_0, f)$ la solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19). L'opérateur T est linéaire continu de $L^2(\Omega) \times L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et dans $C([0, T], L^2(\Omega))$.

Démonstration On note u la solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19). Il suffit de remarquer que

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \leq \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u_0\|_2,$$

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|u_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}^2 + \|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}^2 \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

et enfin que

$$\|u_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}.$$

On en déduit bien la continuité de T dans les espaces annoncés. ■

Proposition 4.28 (Positivité et principe du maximum)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19) avec $f = 0$.

1. On suppose $u_0 \geq 0$ p.p.. On a alors $u(t) \geq 0$ p.p. et pour tout $t \in [0, T]$.
2. On suppose que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \leq 0 \leq B$ et $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. On a alors $A \leq u(t) \leq B$ p.p. et pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration Pour démontrer le premier item, on montre plutôt (ce qui est équivalent) que $u_0 \leq 0$ p.p. implique $u(t) \leq 0$ p.p. pour tout $t \in [0, T]$. On suppose donc que $u_0 \leq 0$ p.p.. On utilise alors le lemme 4.28 Existence Par Faedo-Galerkin theorem.4.28 avec $\varphi(s) = s^+$. Il donne que $u^+ \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Pour $t \in [0, T]$, on peut donc prendre $v = u^+ 1_{]0,t[}$ dans l'équation de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19) et on obtient

$$\int_0^t \langle u_t(s), u^+(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u^+(s) dx ds = 0.$$

En utilisant encore le lemme 4.28 Existence Par Faedo-Galerkin theorem.4.28, on a donc

$$\frac{1}{2} \|u^+(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u^+(0)\|_2^2 + \int_0^t \|u^+(s)\|_{H_0^1}^2 ds = 0.$$

Comme $u^+(0) = u_0^+ = 0$ p.p., on en déduit bien que $\|u^+(t)\|_2 = 0$ et donc $u(t) \leq 0$ p.p..

La démonstration du deuxième item est semblable en utilisant le lemme 4.28 Existence Par Faedo-Galerkin theorem.4.28 avec $\varphi(s) = (s - B)^+$ et $\varphi(s) = (s - A)^-$. ■

Lemme 4.29 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $T > 0$. Soit φ une fonction lipchitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} t.q. $\varphi(0) = 0$. On définit Φ par

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Soit $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ t.q. $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. On a alors $\varphi(u) \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, $\Phi(u) \in C([0, T], L^1(\Omega))$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$,

$$\int_\Omega \Phi(u(t_2)) dx - \int_\Omega \Phi(u(t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} \langle u_t(s), \varphi(u(s)) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds.$$

On a aussi pour presque tout $t \in]0, T[, \varphi(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla \varphi(u(t)) = \varphi'(u(t)) \nabla u$ p.p., that is to say, en étant plus précis, $\nabla \varphi(u)(x, t) = \varphi'(u(x, t)) \nabla u(x, t)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Dans cette égalité, on peut prendre pour $\varphi'(u(x, t))$ n'importe quelle valeur si φ n'est pas dérivable au point $u(x, t)$. En particulier ceci montre que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ p.p. sur l'ensemble $\{u = a\}$.

Démonstration Ce lemme est la version “parabolique” des lemmes 2.20 Positivité de la solution faible theorem.2.20 et 2.21 Positivité de la solution faible theorem.2.21 vus précédemment. La démonstration consiste à considérer d’abord (comme dans le lemme 2.20 Positivité de la solution faible theorem.2.20) que φ est de classe C^1 et à régulariser u . Puis à approcher φ par des fonctions de classe C^1 (au moins lorsque φ est dérivable sauf en un nombre fini de points, le cas général étant plus difficile). Cette preuve n’est pas détaillée ici. ■

On donne maintenant l’équivalence entre la formulation faible (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19) et une autre formulation faible, la formulation (4.23 Equivalence entre deux formulations faible equation.4.23). Cette deuxième formulation est, en particulier, intéressante lorsque l’on cherche à prouver la convergence des solutions approchées obtenues par une discrétisation en espace et en temps.

Proposition 4.30 (Equivalence entre deux formulations faibles) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ (on identifie, comme d’habitude $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$). Alors u est solution de (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19) si et seulement si u vérifie :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ - \int_0^T \int_{\Omega} u \varphi_t dx dt - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt \\ = \int_0^T \langle f(s), \varphi(\cdot, s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(]0, T[\times \Omega, \mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.23)$$

Démonstration On montre tout d’abord que “ u solution de (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19) $\Rightarrow u$ est solution de (4.23 Equivalence entre deux formulations faible equation.4.23)”. On suppose donc que u est solution de (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t) \varphi(x, t_i), \quad (4.24)$$

où $t_i = (i/n)T$. Comme φ est une fonction régulière, il est clair que $\varphi_n \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $\varphi_n \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que u est solution de (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19), on a

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n dx dt = \int_0^T \langle f, \varphi_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

On pose $T_n = \int_0^T \langle u_t, \varphi_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt$. Comme $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ quand $n \rightarrow +\infty$, l’égalité précédente donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^T \langle u_t, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \quad (4.25)$$

On va maintenant calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ en utilisant (4.24 Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.24). On a

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^T \langle u_t(t), \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t) \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle u_t(t), \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t) dt, \varphi(\cdot, t_i) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Comme $u, u_t \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega))$ (on rappelle que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ par l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual), on a (d'après la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section.4.2) $u \in C([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t) dt = u(t_{i+1}) - u(t_i) \in H^{-1}(\Omega).$$

On a donc

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \langle u(t_{i+1}) - u(t_i), \varphi(\cdot, t_i) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega} (u(x, t_{i+1}) - u(x, t_i)) \varphi(x, t_i) dx.$$

La dernière égalité venant de la manière avec laquelle un élément de $H_0^1(\Omega)$ est considéré comme un élément de $H^{-1}(\Omega)$. Une intégration par parties discrète donne alors (en remarquant que $\varphi(\cdot, t_n) = 0$)

$$T_n = - \int_{\Omega} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\varphi(x, t_{i-1}) - \varphi(x, t_i)) u(x, t_i) dx.$$

Puis, comme φ est une fonction régulière,

$$\begin{aligned} T_n &= - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_t(x, t) dt \right) u(x, t_i) dx \\ &= - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_t(x, t) \left(\sum_{i=1}^n 1_{]t_{i-1}, t_i]} u(x, t_i) \right) dx dt \\ &= - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_t(x, t) (u(x, t) + R_n(x, t)) dx dt, \end{aligned}$$

avec $R_n(x, t) = \sum_{i=1}^n 1_{]t_{i-1}, t_i]} [u(x, t_i) - u(x, t)]$. Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\|R_n(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max\{\|u(s_1) - u(s_2)\|_{L^2(\Omega)}, s_1, s_2 \in [0, T], |s_1 - s_2| \leq \frac{T}{n}\}.$$

Comme $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_t(x, t) R_n(x, t) dx dt = 0.$$

En résumé, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_t(x, t) u(x, t) dx dt.$$

Avec (4.25 Existence Par Faedo-Galerkinequation.4.25) on a donc, pour tout $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbb{R})$,

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_t(x, t) u(x, t) dx dt - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Ceci montre que u est bien solution de (4.23 Equivalence entre deux formulations faiblesequation.4.23).

On montre maintenant que “ u solution de (4.23 Equivalence entre deux formulations faiblesequation.4.23) $\Rightarrow u$ est solution de (4.19 Faedo-Galerkinequation.4.19)”. On suppose donc que u est solution de (4.23 Equivalence entre deux formulations fa

On veut montrer que u est solution de (4.19) Faedo-Galerkinequation.4.19). On va raisonner en deux étapes. On va d'abord montrer que $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$ (remarquer que $\Delta u, f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$) puis que $u(0) = u_0$.

Étape 1 On montre ici que $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$. On utilise la définition de u_t . On a $u_t \in \mathcal{D}_E^*$, avec $E = H_0^1(\Omega)$, et pour tout $\phi \in C^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$

$$\langle u_t, \phi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \int_0^T u(t) \phi'(t) dt \in H_0^1(\Omega).$$

Pour montrer que $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$, il s'agit donc de montrer que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$,

$$- \int_0^T u(t) \phi'(t) dt = \int_0^T (\Delta u(t) + f(t)) \phi(t) dt.$$

Noter que le membre de gauche de cette égalité est dans $H_0^1(\Omega)$ et donc dans $H^{-1}(\Omega)$ (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et son dual) et que le membre de droite est dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour montrer l'égalité de ces deux termes, il suffit de montrer que

$$\left\langle - \int_0^T u(t) \phi'(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \left\langle \int_0^T (\Delta u(t) + f(t)) \phi(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega),$$

that is to say que

$$- \int_0^T \langle u(t) \phi'(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = \int_0^T \langle (\Delta u(t) + f(t)) \phi(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Par densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit de considérer $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. En utilisant la manière donc $H_0^1(\Omega)$ est inclus dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$- \int_0^T \langle u(t) \phi'(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = - \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \phi'(t) \psi(x) dx dt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (\Delta u(t) + f(t)) \phi(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt &= \int_0^T \phi(t) \langle \Delta u(t) + f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \\ &= - \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \psi(x) dx dt + \int_0^T \phi(t) \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \end{aligned}$$

En résumé, pour terminer l'étape 1, il suffit donc de montrer que

$$- \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \phi'(t) \psi(x) dx dt = \int_0^T \phi(t) \left(- \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \psi(x) dx dt + \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right) dt \quad (4.26)$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Comme cela a été déjà dit, ceci donnera $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$.

Pour montrer (4.26) Existence Par Faedo-Galerkinequation.4.26), on utilise (4.23) Equivalence entre deux formulations faiblesequation.4.23). Soit $\phi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ et $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On choisit dans (4.23) Equivalence entre deux formulations faiblesequation.4.23), $\varphi(x, t) = \phi(t) \psi(x)$ (ce qui est possible car on a bien $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[\times \Omega, \mathbb{R})$). On obtient

$$- \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \phi'(t) \psi(x) dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(x, t) \cdot \nabla \psi(x)) \phi(t) dx dt = \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Ceci donne (4.26 Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.26) et termine donc l'étape 1, that is to say $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$ (ce qui l'équation demandée dans (4.19 Faedo-Galerkin equation.4.19)).

Etape 2 Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a (d'après la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section.4.2), $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$. On montre dans cette deuxième étape que $u(0) = u_0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une fonction r_n de $C_c^\infty([0, T], \mathbb{R})$ décroissante et t.q. $|r_n'(t)| \leq 2n$ pour tout t , $r_n(0) = 1$ et $r_n(t) = 0$ si $t \geq 1/n$.

Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $1/n < T$. On prend $\varphi(x, t) = r_n(t)\psi(x)$ dans (4.23 Equivalence entre deux formulations faible section.4.23) et on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x, t) r_n'(t) \psi(x) dx dt - \int_\Omega u_0(x) \psi(x) dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \psi(x) r_n(t) dx dt \\ = \int_0^{\frac{1}{n}} \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} r_n(t) dt, \end{aligned}$$

that is to say

$$T_n = \int_\Omega u_0(x) \psi(x) dx - R_n + S_n, \quad (4.27)$$

avec

$$\begin{aligned} T_n &= - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x, t) r_n'(t) \psi(x) dx dt, \\ R_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \psi(x) r_n(t) dx dt \text{ et } S_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} r_n(t) dt. \end{aligned}$$

On montre tout d'abord que R_n et S_n tendent vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x, t)| |\nabla \psi(x)| dx dt \\ &\leq \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla \psi(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{L^2(]0, T[, H_0^1)} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\psi\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ car

$$|S_n| \leq \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1})} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\psi\|_{H_0^1}.$$

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned} T_n &= - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x, 0) r_n'(t) \psi(x) dx dt - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x, t) - u(x, 0)) r_n'(t) \psi(x) dx dt \\ &= \int_\Omega u(x, 0) \psi(x) dx - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x, t) - u(x, 0)) r_n'(t) \psi(x) dx dt \end{aligned}$$

(On a utilisé ici $r_n(0) = 1$ et $r_n(1/n) = 0$.) On majore de dernier terme de cette égalité :

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x, t) - u(x, 0)) r_n'(t) \psi(x) dx dt \right| \leq \frac{1}{n} 2n \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \max_{t \in [0, \frac{1}{n}]} \|u(\cdot, t) - u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ ce dernier terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ et on a donc, finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_{\Omega} u(x, 0) \psi(x) dx.$$

Avec (4.27) Existence Par Faedo-Galerkin equation.4.27), comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$, on en déduit

$$\int_{\Omega} u(x, 0) \psi(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) \psi(x) dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ceci permet de conclure que $u(0) = u_0$ et termine la démonstration de la proposition 4.29 Equivalence entre deux formulations faible equation.4.23. ■

Nous donnons maintenant un théorème de compacité qui sera très utile pour la résolution de problèmes non linéaires comme ceux de la section 4.4 problèmes paraboliques non linéaires section.4.4. C'est l'équivalent parabolique des théorèmes de compacité vus pour les problèmes elliptiques. Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, on note $T(f)$ la solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$. On a déjà montré que l'opérateur T était compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La proposition 4.30 Compacité theorem.4.30 donne l'équivalent parabolique de ce résultat.

Proposition 4.31 (Compacité)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$.

Pour $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on note $S(f)$ la solution de (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19).

L'opérateur S est compact de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Démonstration La proposition 4.26 Dépendance continue theorem.4.26 donne déjà la continuité de S . Il reste donc à montrer que S transforme les parties bornées de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ en parties relativement compactes de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$. Soit donc A une partie bornée de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. On pose $B = \{S(f), f \in A\}$. Les estimations vues dans le théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19 montrent que B est une partie bornée de $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\{u_t, u \in B\}$ est une partie bornée de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ (en effet, si $u \in B$, il existe $f \in A$ t.q. $u = S(f)$, on a donc $u_t = \Delta u + f$ au sens donné par (4.19) Faedo-Galerkin equation.4.19), ce qui donne l'estimation voulue sur u . Le lemme de compacité donné ci-après (lemme 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31), dû à J. L. Lions, donne alors la relative compacité de A dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$. ■

Lemme 4.32 (Compacité espace-temps, cadre L^2) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)'$. On suppose que

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$,
2. la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Démonstration Ce lemme sera démontré plus loin dans un cadre plus général, voir théorème 4.35 Compacité en temps, cadre L^p , $p > 1$ theorem.4.35. ■

Remarque 4.33 (Opérateurs elliptiques généraux) Les résultats de ce paragraphe, that is to say le théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19 et les propositions 4.26 Dépendance continue theorem.4.26, 4.27 Positivité et principe du maximum Item.4.25, 4.29 Equivalence entre deux formulations faible equation.4.23 et 4.30 Compacité theorem.4.30, sont encore vrais en remplaçant l'opérateur Δu par $\operatorname{div}(A \nabla u)$ si la matrice A est à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ p.p. et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ (exercice 4.3 Diffusion non homogène et non

isotrope exo.4.3). Il est aussi possible de considérer le cas où les coefficients de la matrice A dépendent aussi de t . Une possibilité est alors de faire une discrétisation en temps et de remplacer sur chaque intervalle de temps la matrice A par sa moyenne sur l'intervalle considéré. On résout alors le problème sur chacun de ces intervalles temporels. Il suffit ensuite d'obtenir des estimations sur la solution approchée et de passer à la limite sur le pas de discrétisation.

4.4 Existence et unicité pour des problèmes paraboliques non linéaires

Comme dans le cas elliptique, l'existence de la solution d'un problème parabolique non linéaire peut se prouver par point fixe de Schauder ou par degré topologique.

Considérons le premier exemple suivant : soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $A : \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $N \times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (4.29)$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.30)$$

$$f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \quad (4.31)$$

Alors on peut montrer par le théorème de Schauder qu'il existe u solution de (toujours avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ (et donc } u \in C([0, T], L^2(\Omega))), \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega A(u) \nabla u \cdot \nabla v dx dt \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Pour utiliser le théorème de Schauder, on utilise la résolution de problèmes linéaires : soit $\bar{u} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est la solution du problème (4.32) où on a remplacé $A(u)$ par $A(\bar{u})$, that is to say :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v dx dt \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

On montre ensuite qu'il existe $R > 0$ tel que l'image de T est incluse dans B_R où B_R est la boule (de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$) de rayon R et de centre 0. On montre que T est continu et que T est compact (par le lemme de compacité espace-temps 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31). On conclut avec le théorème de Schauder. Ceci est laissé à titre d'exercice (exercice 4.4 Existence par le théorème de Schauder exo.4.4).

Notons qu'on peut aussi montrer l'unicité si A est lipschitzienne.

Considérons maintenant l'équation de convection-diffusion suivante (avec une convection éventuellement non linéaire) : $u_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}f(u)) - \Delta u = 0$, avec $\mathbf{b} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^N)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$. On suppose de plus

que f est lipschitzienne et bornée. Une formulation faible du problème s'écrit (avec $L^2(\Omega)$ identifié à $L^2(\Omega)'$) :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ (et donc } u \in C(]0, T[, L^2(\Omega))), \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b}f(u) \cdot \nabla v dx dt \\ \quad + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dt = 0, \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Montrons l'existence d'une solution au problème (4.33) par degré topologique. Pour cela on va montrer que le problème (4.33) peut s'écrire sous la forme $u - h(1, u) = 0$, où l'application h , définie de $[0, 1] \times E$ dans E , avec $E = L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, vérifie :

1. h est compacte,
2. il existe $R \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$u - h(s, u) = 0, s \in [0, 1], u \in E \Rightarrow u \notin \partial B_R,$$

3. l'application définie de E dans E par $u \mapsto u - h(0, u)$ est linéaire.

(Ceci est suffisant pour obtenir l'existence d'une solution au problème (4.33).)

Soit $s \in [0, 1]$ et $u \in E$. On note $h(s, u)$ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), w_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle w_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt - \int_0^T \int_{\Omega} s \mathbf{b}f(u) \cdot \nabla v dx dt \\ \quad + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx dt = 0, \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ w(\cdot, 0) = s u_0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Notons que $h(s, u) = w$ est bien définie car $\mathbf{b}f(u) \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^N)$.

De plus, il est facile de voir que le point 3. ci-dessus est vérifié, car $h(0, u) = 0$ et donc $u - h(0, u) = u$. Il reste à montrer les points 1 et 2, that is to say que h est continue, que $\{h(s, u), s \in [0, 1], u \in B\}$ est une partie relativement compacte de E , si B est une partie bornée de E , et qu'il existe $R > 0$ t.q. $u - h(s, u) = 0$ n'a pas de solution avec $s \in [0, 1]$ et $u \in \partial B_R$.

Montrons d'abord que h est continue. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[0, 1]$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E t.q. $s_n \rightarrow s$ dans \mathbb{R} et $u_n \rightarrow u$ dans E lorsque $n \rightarrow +\infty$. On pose $w_n = h(s_n, u_n)$, $w = h(s, u)$ et on veut montrer que $w_n \rightarrow w$ dans E . Les fonctions w_n vérifient :

$$\begin{cases} w_n \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), (w_n)_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle (w_n)_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt - \int_0^T \int_{\Omega} s_n \mathbf{b}f(u_n) \cdot \nabla v dx dt \\ \quad + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla v dx dt = 0, \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ w_n(\cdot, 0) = s_n u_0. \end{cases} \quad (4.35)$$

En prenant $v = w_n$ dans (4.35), on montre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que la suite $((w_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. On en déduit par le lemme 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 que $w_n \rightarrow \tilde{w}$ dans E , après extraction éventuelle d'une sous suite. Mais les bornes sur w_n et $(w_n)_t$ donnent aussi $w_n \rightarrow \tilde{w}$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$

et $(w_n)_t \rightarrow \tilde{w}_t$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Enfin, on peut supposer, toujours après extraction éventuelle d'une sous suite que $u_n \rightarrow u$ p.p.. En passant à la limite dans l'équation satisfaite par w_n et en passant à la limite sur la condition initiale, on montre alors que $\tilde{w} = w$ (comme cela a été fait dans la démonstration du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19). Ceci permet de conclure (sans extraction de sous suite) que $w_n \rightarrow w$ dans E et donne donc la continuité de h .

On pose maintenant $A = \{h(s, u), u \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)), s \in [0, 1]\}$. Il est facile de voir que A est borné dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\{w_t, w \in A\}$ est borné dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Le lemme 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 donne alors la relative compacité de A dans E . Enfin l'existence de $R > 0$ t.q. $u - h(s, u) = 0$ n'ait pas de solution avec $s \in [0, 1]$ et $u \in \partial B_R$ vient du fait que A est borné dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi dans E .

En conclusion, on peut utiliser l'invariance par homotopie du degré. On obtient $d(Id - h(1, \cdot), B_R, 0) = d(Id - h(0, \cdot), B_R, 0) = d(Id, B_R, 0) = 1$. Donc, il existe $u \in B_R$ t.q. $u - h(1, u) = 0$, that is to say u solution de (4.33 problèmes paraboliques non linéaire equation.4.33).

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.33 problèmes paraboliques non linéaire equation.4.33). On va montrer cette unicité dans un cadre un peu plus général (pour lequel on aurait aussi pu montrer l'existence) en remplaçant Δu par $\operatorname{div}(a(u)\nabla u)$, that is to say en considérant l'équation

$$u_t + \operatorname{div}(bf(u)) - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = 0,$$

avec une fonction a lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifiant $\alpha \leq a(s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et deux nombres strictement positifs α, β .

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.33 problèmes paraboliques non linéaire equation.4.33) (avec $\operatorname{div}(a(u)\nabla u)$ au lieu de Δu). On pose $u = u_1 - u_2$ et on va montrer que $u = 0$ p.p..

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction T_ε de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $T_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s, \varepsilon\}\}$. On note aussi ϕ_ε la primitive de T_ε s'annulant en 0. En prenant $v = T_\varepsilon(u)$ dans les formulations faibles satisfaites par u_1 et u_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_t, T_\varepsilon(u) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt - \int_0^T \int_\Omega b(f(u_1) - f(u_2)) \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega a(u_1) \nabla u \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt = \int_0^T \int_\Omega (a(u_2) - a(u_1)) \nabla u_2 \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\nabla T_\varepsilon(u) = \nabla u 1_{0 < |u| < \varepsilon}$ p.p., on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x, T)) dx - \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x, 0)) dx + \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u 1_{0 < |u| < \varepsilon} dx dt \\ \leq \int_0^T \int_\Omega |b| |f(u_1) - f(u_2)| |\nabla u| 1_{0 < |u| < \varepsilon} dx dt + \int_0^T \int_\Omega |a(u_1) - a(u_2)| |\nabla u_2| |\nabla u| 1_{0 < |u| < \varepsilon} dx dt. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Comme a et f sont des fonctions lipschitziennes, il existe L t.q.

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \quad \text{et} \quad |a(s_1) - a(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad \text{pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

On utilise alors le fait que $u_0 = 0$ p.p. et $\phi_\varepsilon \geq 0$ pour déduire de (4.36 problèmes paraboliques non linéaire equation.4.36),

avec $A_\varepsilon = \{0 < |u| < \varepsilon\}$ et $y = (x, t)$,

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt &\leq L\varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + L\varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On a donc $\alpha \|\nabla T_\varepsilon(u)\|_{L^2(Q)} \leq a_\varepsilon \varepsilon$, avec $Q =]0, T[\times \Omega$ et

$$a_\varepsilon = L \left(\int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + L \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\cap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \emptyset$ la continuité décroissante d'une mesure donne que la mesure de Lebesgue ($N + 1$ dimensionnelle) de A_ε tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et on a donc, comme $b, \nabla u_2 \in L^2(Q)^N$, (noter que $L^2(Q)$ peut être identifié à $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} |b|^2 dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy = 0,$$

ce qui donne $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon = 0$. Il nous reste maintenant à utiliser, par exemple, l'injection de $W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{1^*}(\Omega)$. elle donne pour $t \in]0, T[$,

$$\|T_\varepsilon(u(t))\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq \|\nabla T_\varepsilon(u(t))\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.37)$$

On désigne par "mes" le mesure de le Lebesgue dans \mathbb{R}^N . On remarque maintenant que pour $t \in]0, T[$

$$\varepsilon \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^*}} \leq \left(\int_\Omega |T_\varepsilon(u)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}}.$$

On a donc, avec (4.37) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.37),

$$\varepsilon \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^*}} \leq \|\nabla T_\varepsilon(u(t))\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x, t))| dx,$$

et, en intégrant par rapport à t , sachant que $1/1^* = (N - 1)/N$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt &\leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u(x, t))| dx dt \leq \|\nabla T_\varepsilon(u)\|_{L^2(Q)} (T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \frac{(T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon.$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, par convergence dominée, on en déduit (comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon = 0$)

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| > 0\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq 0.$$

On en déduit que $\text{mes}\{|u(t)| > 0\} = 0$ p.p. en $t \in]0, T[$ et donc $u = 0$ p.p., ce qui termine cette preuve d'unicité.

Remarque 4.34 Voici un complément et quelques généralisations possibles (laissées en exercice) du résultat d'existence et unicité de solution que nous venons de donner dans cette section.

1. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe donc $A \leq 0$ et $B \geq 0$ t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit u la solution de (4.33) problèmes paraboliques non linéaires. On a alors $A \leq u \leq B$ p.p.. Pour démontrer ce résultat, il suffit de prendre $v = (u - B)^+$ (pour montrer $u \leq B$ p.p.) et $v = (A - u)^+$ (pour montrer $u \geq A$ p.p.) dans (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33).
2. On a supposé f lipschitzienne et bornée. En fait si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, et donc $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. avec $A \leq 0 \leq B$, on peut remplacer cette hypothèse sur f par “ f localement lipschitzienne” (exemple : $f(s) = s^2$). La démonstration consiste à remplacer dans (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33) f par \bar{f} où \bar{f} est définie par $\bar{f}(s) = \max\{A, \min\{s, B\}\}$. La solution obtenue, u , vérifie alors $A \leq u \leq B$ p.p. (d'après l'item précédent) et est donc solution de (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33) (avec f).
3. Pour montrer l'existence et l'unicité de solution à (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33), on a supposé $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$. Cette hypothèse peut être remplacée par $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$ (mais en conservant l'hypothèse f lipschitzienne et bornée). On peut toujours montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33).
4. Enfin si $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$, $\|\operatorname{div} \mathbf{b}\|_\infty = C$, f lipschitzienne de constante de Lipschitz L (mais f non nécessairement bornée) et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\|u_0\|_\infty = M$, on peut aussi montrer un résultat d'existence et d'unicité de solution à (4.33) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.33). La solution u vérifie alors $\|u(t)\|_\infty \leq M \exp(CLt)$ pour tout $t \in [0, T]$.

4.5 Compacité en temps

Dans cette section, on démontre le lemme de compacité dans L^2 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 comme conséquence du théorème 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39, énoncé dans un cadre plus général, et utile pour la résolution de nombreux problèmes paraboliques.

Commençons par la version abstraite du lemme 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 de compacité dans L^2 , qu'on obtient en remplaçant l'espace L^2 par un espace de Hilbert quelconque.

Lemme 4.35 (Compacité en temps, cadre hilbertien) *On suppose que X et H sont des espaces de Hilbert, que X s'injecte compactement dans H , et que X est dense dans H . On identifie H avec H' (par le théorème de représentation de Riesz). On suppose maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0, T[, X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^2(]0, T[, X')$. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2(]0, T[, H)$.*

Notons dans le lemme 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 on a $X = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. Ce résultat de compacité dans le cadre hilbertien (attribué à J.L. Lions) a ensuite été généralisé par Aubin dans le cadre d'espaces de Banach :

Théorème 4.36 (Compacité en temps, cadre L^p , $p > 1$) *Soit X, B, Y 3 espaces de Banach et $1 < p < +\infty$. On suppose que X s'injecte compactement dans B et que B s'injecte continûment dans Y . On suppose maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^p(]0, T[, X)$ ($T > 0$ est donné) et que $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^p(]0, T[, Y)$. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^p(]0, T[, B)$.*

Ce résultat a ensuite été généralisé par J. Simon (en 1985) pour avoir aussi le cas $p = 1$. C'est ce dernier résultat que nous donnons dans ce paragraphe ainsi que sa démonstration (qui contient donc les démonstrations des lemmes 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31, 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 et du théorème 4.35 Compacité en temps, cadre L^p , $p > 1$ theorem.4.35).

Nous donnons enfin quelques généralisations du résultat de Simon utiles en particulier lors de l'étude mathématique de schémas numériques.

Nous donnons d'abord le théorème fondamental de compacité de Kolmogorov (sous deux formes légèrement différentes) dont nous déduisons ensuite les théorèmes 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39 et 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48. En anglais, parce que vous le valez bien.

Théorème 4.37 (Kolmogorov (1)) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0, T), B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0, T), B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *For all $f \in A$, there exists $Pf \in L^p(\mathbb{R}, B)$ such that $Pf = f$ a.e. in $(0, T)$ and $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}, B)} \leq C$, where C depends only on A .*

2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the family $\{\int_{\mathbb{R}} (Pf)\varphi dt, f \in A\}$ is relatively compact in B .*

3. *$\|Pf(\cdot + h) - Pf\|_{L^p(\mathbb{R}, B)} \rightarrow 0$, as $h \rightarrow 0$, uniformly with respect to $f \in A$.*

(Indeed, the conditions 1, 2 and 3 are also necessary in order to have relative compactness of A but this is not the interesting part of this theorem.)

Proof of Theorem 4.36 Kolmogorov (1) theorem.4.36

Let $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ be a sequence of mollifiers, that is :

$$\begin{aligned} \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1, \rho \geq 0, \rho(-\cdot) = \rho \\ \text{and, for } n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, \rho_n(x) = n\rho(nx). \end{aligned} \quad (4.38)$$

We set $K = [0, T]$ and, for $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{(Pf \star \rho_n)|_K, f \in A\}$. The proof is divided in two steps. In Step 1 we prove, using Ascoli's theorem and Assumption 2 of Theorem 4.36 Kolmogorov (1) theorem.4.36, that, for $n \in \mathbb{N}^*$, the set A_n is relatively compact in $C(K, B)$ endowed with its usual topology. Then, we deduce that A_n is also relatively compact in $L^p((0, T), B)$. In Step 2, we show that the first and third hypotheses of Theorem 4.36 Kolmogorov (1) theorem.4.36 give that $Pf \star \rho_n \rightarrow Pf$ in $L^p(\mathbb{R}, B)$, as $n \rightarrow +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. This allows to conclude that the family A is relatively compact in $L^p((0, T), B)$.

Step 1. Let $n \in \mathbb{N}^*$. In order to prove that A_n is relatively compact in $C(K, B)$, we use Ascoli's theorem ; hence we need to prove the following properties :

1. for all $t \in K$, the set $\{Pf \star \rho_n(t), f \in A\}$ is relatively compact in B ,

2. the sequence $\{Pf \star \rho_n, f \in A\}$ is equicontinuous from K to B (that is to say that the continuity is uniform with respect to $f \in A$).

We first prove Property 1. Let $t \in K$.

$$Pf \star \rho_n(t) = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\rho_n(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\varphi(s)ds.$$

Then, the second hypothesis of Theorem 4.36 Kolmogorov (1) theorem.4.36 gives Property 1, that is $\{Pf \star \rho_n(t), f \in A\}$ is relatively compact in B .

We now prove Property 2. Let $t_1, t_2 \in K$ and let $q = p/(p-1)$ by Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned} \|Pf \star \rho_n(t_2) - Pf \star \rho_n(t_1)\|_B &\leq \int_{\mathbb{R}} \|Pf(s)\|_B |\rho_n(t_2-s) - \rho_n(t_1-s)| ds \\ &\leq \|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}, B)} \|\rho_n(t_2-\cdot) - \rho_n(t_1-\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Since ρ_n is uniformly continuous with compact support, we easily deduce from this inequality (and with Hypothesis 1 of Theorem 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36) and that the family A_n is uniformly equicontinuous from K to B . This gives the Property 2 and concludes the proof that A_n is relatively compact in $C(K, B)$. This relative compactness is equivalent to say that for all $\varepsilon > 0$, there exists a finite number of ball of radius ε (for the natural norm of $C(K, B)$) covering the whole set A_n . Then, since $\|\cdot\|_{L^p((0,T),B)} \leq T^{1/p} \|\cdot\|_{C(K,B)}$, we also obtain the relative compactness of A_n in $L^p((0, T), B)$.

Step 2.

Let $t \in \mathbb{R}$, we have, using $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(s) ds = 1$ and $\bar{s} = ns$,

$$Pf \star \rho_n(t) - Pf(t) = \int_{\mathbb{R}} (Pf(t-s) - Pf(t)) \rho_n(s) ds = \int_{-1}^1 (Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t)) \rho(\bar{s}) d\bar{s}.$$

Then, by Hölder's inequality and with $q = p/(p-1)$,

$$\|Pf \star \rho_n(t) - Pf(t)\|_B^p \leq \left(\int_{-1}^1 \|Pf(t - \frac{s}{n}) - Pf(t)\|_B^p ds \right) \|\rho\|_{L^q}^p.$$

Integrating with respect to $t \in \mathbb{R}$ and using the Fubini-Tonelli theorem leads to

$$\|Pf \star \rho_n - Pf\|_{L^p((0,T),B)}^p \leq 2 \sup\{\|Pf(\cdot + h) - Pf\|_{L^p(\mathbb{R},B)}^p, |h| \leq 1\} \|\rho\|_{L^q}^p.$$

Finally, the third hypothesis of Theorem 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36 gives the fact that $\|Pf \star \rho_n - Pf\|_{L^p((0,T),B)} \rightarrow 0$, as $n \rightarrow +\infty$, uniformly with respect to $f \in A$. As a consequence, the relative compactness of A_n in $L^p((0, T), B)$ for all $n \in \mathbb{N}$ (proven in Step 1) gives the relative compactness of A in $L^p((0, T), B)$. This concludes the proof of Theorem 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36. ■

We now give a second form of the previous theorem which does not require the prolongment of f outside $[0, T]$.

Théorème 4.38 (Kolmogorov (2)) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0, T), B)$. The subset A is relatively compact in $L^p((0, T), B)$ if A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0, T), B)$.*
2. *For all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f \varphi dt, f \in A\}$ is relatively compact in B .*
3. *There exists a nondecreasing function from $(0, T)$ to \mathbb{R}_+ such that $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0, T)$ and $f \in A$,*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Proof of Theorem 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37

The proof uses Theorem 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36 with $Pf = 0$ on $[0, T]^c$. The first and second item of the hypotheses of Theorem 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36 are clearly satisfied. The only difficulty is to prove the third item. We prove this third item in two steps.

Step 1. In this step, we prove that $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$.

Let $\delta, h \in (0, T)$ such that $\delta + h \leq T$. For all $t \in (0, \delta)$ one has $\|f(t)\|_B \leq \|f(t+h)\|_B + \|f(t+h) - f(t)\|_B$ and then

$$\|f(t)\|_B^p \leq 2^p \|f(t+h)\|_B^p + 2^p \|f(t+h) - f(t)\|_B^p$$

Integrating this inequality for $t \in (0, \delta)$ gives

$$\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt + 2^p \int_0^\delta \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt. \quad (4.39)$$

Now let $h_0 \in (0, T)$ et $\delta \in (0, T - h_0)$. For all $h \in (0, h_0)$, Inequality (4.39) gives, using $\eta(h) \leq \eta(h_0)$,

$$\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt + 2^p \eta(h_0).$$

Integrating this inequality for $h \in (0, h_0)$ leads to

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2^p \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt \right) dh + 2^p h_0 \eta(h_0).$$

Then, using the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta \|f(t+h)\|_B^p dt \right) dh &= \int_0^\delta \left(\int_0^{h_0} \|f(t+h)\|_B^p dh \right) dt \\ &\leq \int_0^\delta \left(\int_0^T \|f(s)\|_B^p ds \right) dt \leq \delta \|f\|_{L^p((0,T),B)}^p, \end{aligned}$$

from which one deduces

$$h_0 \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq \delta 2^p \|f\|_{L^p((0,T),B)}^p + 2^p h_0 \eta(h_0). \quad (4.40)$$

In order to conclude this step, let $\varepsilon > 0$. First, we choose $h_0 \in (0, T)$ such that $2^p \eta(h_0) \leq \varepsilon$. Then, with $C = \sup_{f \in A} \|f\|_{L^p((0,T),B)}^p$, we take $\bar{\delta} = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0 / (2^p C)\}$. We obtain, for all $f \in A$,

$$0 \leq \delta \leq \bar{\delta} \Rightarrow \int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \leq 2\varepsilon.$$

This gives that $\int_0^\delta \|f(t)\|_B^p dt \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$, and concludes Step 1.

A similar proof gives $\int_{T-\delta}^T \|f(t)\|_B^p dt \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0^+$, uniformly with respect to $f \in A$ (this can be proven using g instead of f with $g(t) = f(T-t)$).

Step 2. We now prove that the third item of the hypotheses of Theorem 4.36 Kolmogorov (1)theorem.4.36 is satisfied (and this concludes the proof of Theorem 4.37 Kolmogorov (2)theorem.4.37).

Recall that $Pf(t) = 0$ if $t \in [0, T]^c$ so that, for all $h \in (0, T)$ et $f \in A$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt &\leq \int_{-h}^0 \|f(t+h)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt \\ &\leq \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt. \end{aligned}$$

Let $\varepsilon > 0$. There exists $h_1 > 0$ such $\eta(h_1) \leq \varepsilon$. With Step 1, there exists $h_2 > 0$ such that, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_2 \Rightarrow \int_0^h \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p dt \leq \varepsilon.$$

with $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, one has, for all $f \in A$,

$$0 \leq h \leq h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|Pf(t+h) - Pf(t)\|_B^p dt \leq 3\varepsilon.$$

This concludes Step 2 and the proof of Theorem 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37. \blacksquare

We now deduce from Theorem 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37 a corollary which will be useful for Theorem 4.39Aubin-Simontheorem.4.39.

Corollaire 4.39 (Time compactness) *Let B be a Banach space, $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$ and $A \subset L^p((0, T), B)$. Let X be a Banach space compactly embedded in B . One assumes that A verifies the following conditions :*

1. *The subset A is bounded in $L^p((0, T), B)$.*
2. *The subset A is bounded in $L^1((0, T), X)$.*

Note these two assumptions are true if A is bounded in $L^p((0, T), X)$.

3. *There exists a nondecreasing function from $(0, T)$ to \mathbb{R}_+ such that $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0, T)$ and $f \in A$,*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Then, the subset A is relatively compact in $L^p((0, T), B)$.

Proof In order to apply Theorem 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the family $\{\int_0^T f \varphi dt, f \in A\}$ is relatively compact in B .

Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. For $f \in A$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$,

$$\left\| \int_0^T f \varphi dt \right\|_X \leq \|\varphi\|_u \|f\|_{L^1((0, T), X)}.$$

Then, since A is bounded in $L^1((0, T), X)$, the family $\{\int_0^T f \varphi dt, f \in A\}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B . \blacksquare

We now give a Theorem, essentially due to J. P. Aubin (for $p > 1$) and J. Simon (for $p = 1$), which we used in a previous section to prove the existence of a solution for some parabolic equations.

Théorème 4.40 (Aubin-Simon) *Let $1 \leq p < +\infty$, X, B, Y be three Banach spaces such that*

- (i) *$X \subset B$ with compact embedding,*
- (ii) *$X \subset Y$ and if $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence in X such that $(\|f_n\|_X)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, $f_n \rightarrow f$ in B and $f_n \rightarrow 0$ in Y (as $n \rightarrow +\infty$), then $f = 0$ (in B).*

Let $T > 0$ and $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0, T), X)$ such that

1. *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0, T), X)$,*
2. *$(\frac{du_n}{dt})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^1((0, T), Y)$.*

Then there exists $u \in L^p((0, T), B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \rightarrow u$ in $L^p((0, T), B)$.

Remarque 4.41 Note that the hypothesis (ii) of Theorem 4.39Aubin-Simontheorem.4.39 is weaker than the hypothesis of the original works of Aubin and Simon, which reads :

- (ii)' *$B \subset Y$ with continuous embedding.*

Let $X \subset B$. It is also interesting to notice that the hypothesis (i) may also be written :

(i)' If $(\|w_n\|_X)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, then, up to a subsequence, there exists $w \in B$ such that $w_n \rightarrow w$ in B .

This reformulation leads to an easy generalization which is used to prove the convergence of numerical approximations of the solution of parabolic equations : in this generalization, X is replaced by a sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, see Theorem 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48 below.

Proof of Theorem 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39 The proof uses Corollary 4.38 Time compactness theorem.4.38 with $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. The subset A is bounded in $L^p((0, T), B)$ (since X is continuously embedded in B) and then in $L^1((0, T), X)$, so that we only have to prove the third item of the hypotheses of Corollary 4.38 Time compactness theorem.4.38, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot + h) - u_n\|_B^p dt \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0, \text{ uniformly w.r.t. } n \in \mathbb{N}. \quad (4.41)$$

Let $0 < h < T$ and $\varepsilon > 0$. For $t \in (0, T - h)$, one has, using the Lions lemma given below (lemma 4.41 Compacité en temps theorem.4.41),

$$\begin{aligned} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B &\leq \varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_X + C_\varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y \\ &\leq \varepsilon \|u_n(t+h)\|_X + \varepsilon \|u_n(t)\|_X + C_\varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y, \end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p \leq (3\varepsilon)^p \|u_n(t+h)\|_X^p + (3\varepsilon)^p \|u_n(t)\|_X^p + (3C_\varepsilon)^p \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p.$$

Integrating this inequality with respect to t (between 0 and $T - h$) leads to

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X)}^p + (3C_\varepsilon)^p \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt. \quad (4.42)$$

We now use the second item of Remark 4.43 On the weak derivative on u theorem.4.43 (also given in Section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section.4.2). It gives that $u_n \in C([0, T], Y)$ and $u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_n}{dt}(s) ds$ for all $t_1, t_2 \in [0, T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.42) Compacité en temps equation.4.42) :

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt &\leq \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \left\| \frac{du_n}{dt}(s) \right\|_Y ds \right)^p dt \\ &\leq M^{p-1} \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \left\| \frac{du_n}{dt}(s) \right\|_Y ds \right) dt \\ &\leq M^{p-1} \int_0^{T-h} \left(\int_0^T 1_{[t, t+h]}(s) \left\| \frac{du_n}{dt}(s) \right\|_Y ds \right) dt, \end{aligned}$$

where M is a bound of the $L^1((0, T), Y)$ -norm of $\frac{du_n}{dt}$ (that is $\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^1((0,T),Y)} \leq M$ for all n). Then, using $1_{[t, t+h]}(s) = 1_{[s-h, s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_Y^p dt \leq hM^p. \quad (4.43)$$

Then, with (4.43) and (4.42) gives

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X)}^p + (3C_\varepsilon)^p h M^p. \quad (4.44)$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.44) (independently of $n \in \mathbb{N}$). Now, since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term of the RHS of (4.44) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.39. ■

Lemma 4.42 *Let X, B, Y be three Banach spaces such that*

(i) $X \subset B$ with compact embedding,

(ii) $X \subset Y$ and if $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence in X such that the sequence $(\|u_n\|_X)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, $u_n \rightarrow u$ in B and $u_n \rightarrow 0$ in Y (as $n \rightarrow +\infty$), then $u = 0$ (in B).

Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists C_ε such that, for $w \in X$,

$$\|w\|_B \leq \varepsilon \|w\|_X + C_\varepsilon \|w\|_Y.$$

Remarque 4.43 In Lemma 4.41, as for Theorem 4.39, the hypothesis (ii) can be replaced by the stronger hypothesis

(ii)' $B \subset Y$ with continuous embedding.

Proof of Lemma 4.41 We perform the proof by contradiction. We assume that there exists $\varepsilon > 0$ and a sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $u_n \in X$ and $1 = \|u_n\|_B > \varepsilon \|u_n\|_X + n \|u_n\|_Y$, for all $n \in \mathbb{N}$.

Then, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in X and therefore relatively compact in B . Thus, we can assume (up to a subsequence) that $u_n \rightarrow u$ in B and $\|u\|_B = 1$. Furthermore $u_n \rightarrow 0$ in Y (since $\|u_n\|_Y \leq 1/n$). Then the second hypothesis of Lemma 4.41 gives $u = 0$. In contradiction with $\|u\|_B = 1$. ■

Remarque 4.44 (On the weak derivative on u) We recall here (items 1 and 2) some results essentially given in Section 4.2 (with a different proof for the second item). Let X, Y be two Banach spaces and Z be a vectorial space such that $X, Y \subset Z$ (of course, a simple case is $Z = Y$). Let $p, q \in [1, \infty]$.

1. Assuming that $u \in L^p((0, T), X)$, the weak derivative of u , denoted as du/dt , is defined by its action on test functions, that is its action on φ for all $\varphi \in C_c^\infty((0, T))$ (note that φ takes its values in \mathbb{R}). Actually, if $\varphi \in C_c^\infty((0, T))$ (and φ' is the classical derivative of φ), the function $\varphi' u$ belongs to $L^p((0, T), X)$ and therefore to $L^1((0, T), X)$ and the action of du/dt on φ is defined as

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = - \int_0^T \varphi'(t) u(t) dt.$$

Note that $\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle \in X$.

Then $du/dt \in L^q((0, T), Y)$ means that there exists $v \in L^q((0, T), Y)$ (and then v is unique) such that

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt \text{ for all } \varphi \in C_c^\infty((0, T)). \quad (4.45)$$

Note that $\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt \in X \subset Z$ and $\int_0^T \varphi(t)v(t)dt \in Y \subset Z$, so the equality in (4.45) holds in Z . Finally we identify the weak derivative of u (which is a linear form on $C_c^\infty((0, T))$) with the function v (which belongs to $L^q((0, T), Y)$).

2. If $u \in L^p((0, T), X)$ and $du/dt \in L^q((0, T), Y)$, it is quite easy to prove that $u \in C([0, T], Y)$ and that

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{du}{dt}(s)ds, \text{ for all } t \in [0, T].$$

Indeed, let $v = du/dt$ and define $w \in C([0, T], Y)$ by

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds \text{ for all } t \in [0, T].$$

For $n \in \mathbb{N}^*$, let $u_n = u \star \rho_n$ with ρ_n defined by (4.38) and setting $u = 0$ outside $[0, T]$. Since $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$, one has $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}, X)$ and then, up to a subsequence, $u_n(t) \rightarrow u(t)$ in X (as $n \rightarrow +\infty$) for a.e. $t \in (0, T)$.

Let $t_1, t_2 \in (0, T)$ such that $0 < t_1 < t_2 < T$ and $u_n(t_i) \rightarrow u(t_i)$ in X (as $n \rightarrow +\infty$) for $i = 1, 2$. For $n \in \mathbb{N}^*$ such that $1/n < t_1$ and $1/n < T - t_2$, one defines φ_n by

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(t_2 - s)ds - \int_{t_1}^t \rho_n(t_1 - s)ds.$$

One has $\varphi_n \in C_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$ and $\varphi_n'(t) = \rho_n(t_2 - t) - \rho_n(t_1 - t)$ for $t \in (0, T)$. Then, we have

$$u_n(t_2) - u_n(t_1) = \int_0^T u(s)\varphi_n'(s)ds = - \int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds.$$

We now remark that (using $\rho(\cdot) = \rho$ and changing variables)

$$\varphi_n(t) = \int_{t_2}^t \rho_n(s - t_2)ds - \int_{t_1}^t \rho_n(s - t_1)ds = - \int_{t_1}^{t_2} \rho_n(t - s)ds = -1_{(t_1, t_2)} \star \rho_n(t).$$

Then, $\varphi_n \rightarrow -1_{(t_1, t_2)}$ a.e. and since $|\varphi_n| \leq 1$ a.e. (for all n), the Dominated Convergence Theorem gives

$$- \int_0^T v(s)\varphi_n(s)ds \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds \text{ in } Y.$$

We then obtain, as $n \rightarrow +\infty$,

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds = w(t_2) - w(t_1).$$

This proves that there exists $c \in \mathbb{R}$ such that $u = w + c$ a.e. on $(0, T)$ and then that $u \in C((0, T), Y)$ (since, as usual, we identify u with the continuous function $w + c$).

3. In Theorem 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39, thanks to the previous item of the present remark, one has $u_n \in C([0, T], Y)$ for all $n \in \mathbb{N}$. However the limit u is not necessarily continuous. A simple counter example is obtain with $p = 1$, $X = B = Y$ and, for instance, $T = 2$. Then, it is quite easy to construct a sequence $(u_n)_n$ bounded in $W^{1,1}((0, T))$ whose the limit is the characteristic function of $[1, 2]$.

Remarque 4.45 There is a classical case where Lemma 4.41 Compacité en temps theorem.4.41 is simpler. Let B be a Hilbert space and X be a Banach space $X \subset B$. We define on X the dual norm of $\|\cdot\|_X$, with the scalar product of B , namely

$$\|u\|_Y = \sup\{(u|v)_B, v \in X, \|v\|_X \leq 1\}.$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ and $u \in X$,

$$\|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_Y.$$

The proof is simple since

$$\|u\|_B = (u|u)_B^{\frac{1}{2}} \leq (\|u\|_Y \|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \|u\|_X + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_Y.$$

Note that the compactness of X in B is not needed here (but, even in this simple case of Lemma 4.41 Compacité en temps theorem.4.41, the compactness of X in B is needed for Theorem 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39.)

We now give an improvement of Corollary 4.38 Time compactness theorem.4.38 and Theorem 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39, using a sequence of subspaces of B instead of X and Y .

Définition 4.46 (Compactly embedded sequence) Let B be a Banach space and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B . We say that the sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compactly embedded in B if any sequence satisfying

- $u_n \in X_n$ for all $n \in \mathbb{N}$,
- the sequence $(\|u_n\|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded

is relatively compact in B .

Proposition 4.47 (Time compactness with a sequence of subspaces) $1 \leq p < +\infty$, $T > 0$. Let B be a Banach space and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces compactly embedded in B (see Definition 4.45 Compactly embedded sequence theorem.4.45). Let $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0, T), B)$ satisfying the following conditions

1. The sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0, T), B)$.
2. The sequence $(\|f_n\|_{L^1((0, T), X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded.
3. There exists a nondecreasing function from $(0, T)$ to \mathbb{R}_+ such that $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta(h) = 0$ and, for all $h \in (0, T)$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \leq \eta(h).$$

Then, the sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is relatively compact in $L^p((0, T), B)$.

Proof of Proposition 4.46 Time compactness with a sequence of subspaces theorem.4.46 As in Corollary 4.38 Time compactness theorem.4.38, in order to apply Theorem 4.37 Kolmogorov (2) theorem.4.37, we only have to prove that, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the sequence $\{\int_0^T f_n \varphi dt, n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact in B .

Let $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. For $n \in \mathbb{N}$, one has, with $\|\varphi\|_u = \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$,

$$\left\| \int_0^T f_n \varphi dt \right\|_{X_n} \leq \|\varphi\|_u \|f_n\|_{L^1((0, T), X_n)}.$$

Then, since the sequence $(\|f_n\|_{L^1((0,T),X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, the sequence $\{\|\int_0^T f_n \varphi dt\|_{X_n}, n \in \mathbb{N}\}$ is also bounded. Therefore the sequence $\{\int_0^T f_n \varphi dt, n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact in B . ■

We now give a generalization of Theorem 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39 using a sequence of subspaces of B .

Définition 4.48 Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We say that the sequence $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact-continuous in B if the following conditions are satisfied

1. The sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compactly embedded in B (see Definition 4.45 Compactly embedded sequence theorem.4.45).
2. $X_n \subset Y_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and if the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$), $(\|u_n\|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bounded and $\|u_n\|_{Y_n} \rightarrow 0$ (as $n \rightarrow +\infty$), then any subsequence converging in B converge (in B) to 0.

Théorème 4.49 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces) Let $1 \leq p < +\infty$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.47 Compacité en temp theorem.4.47). Let $T > 0$ and $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0, T), B)$ satisfying the following conditions

1. The sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0, T), B)$.
2. $f_n \in L^p((0, T), X_n)$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and the sequence $(\|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded.
3. $\frac{df_n}{dt} \in L^1((0, T), Y_n)$ (for all $n \in \mathbb{N}$) and the sequence $(\|\frac{df_n}{dt}\|_{L^1((0,T),Y_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded.

Then there exists $f \in L^p((0, T), B)$ such that, up to a subsequence, $f_n \rightarrow f$ in $L^p((0, T), B)$.

Proof of Theorem 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48 The proof uses Proposition 4.46 Time compactness with a sequence of subspaces theorem.4.46. We only have to prove the third item of the hypotheses on $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of Proposition 4.46 Time compactness with a sequence of subspaces theorem.4.46, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|f_n(\cdot + h) - f_n\|_B^p dt \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0, \text{ uniformly w.r.t. } n \in \mathbb{N}.$$

Indeed, for all $n \in \mathbb{N}$, since $f_n \in L^p((0, T), B)$, one has $\int_0^{T-h} \|f_n(\cdot + h) - f_n\|_B^p dt \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n \in \mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta > 0$ there exist $n_0 \in \mathbb{N}$ and $0 < h_0 < T$ such that

$$n \geq n_0, 0 < h \leq h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|f_n(\cdot + h) - f_n\|_B^p dt \leq \eta. \quad (4.46)$$

Let $\varepsilon > 0$. Lemma 4.49 Compacité en temp theorem.4.49 gives the existence of $n_0 \in \mathbb{N}$ and $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ such that

$$n \geq n_0, u \in X_n \Rightarrow \|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{X_n} + C_\varepsilon \|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n \geq n_0, 0 < h < T$ and $t \in (0, T - h)$, one has

$$\begin{aligned} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B &\leq \varepsilon \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n} \\ &\leq \varepsilon \|f_n(t+h)\|_{X_n} + \varepsilon \|f_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n}, \end{aligned}$$

and then

$$\|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p \leq (3\varepsilon)^p \|f_n(t+h)\|_{X_n}^p + (3\varepsilon)^p \|f_n(t)\|_{X_n}^p + (3C_\varepsilon)^p \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p \int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \quad (4.47)$$

We now recall (see Remark 4.43 On the weak derivative on u theorem.4.43) that $f_n \in C([0, T], Y_n)$ and $f_n(t_1) - f_n(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{df_n}{dt}(s) ds$ for all $t_1, t_2 \in [0, T]$. This allows us to bound the second term of the RHS of (4.47) Compacité en tempse equation.4.47) :

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n}^p dt &\leq \int_0^{T-h} \left(\int_t^{t+h} \left\| \frac{df_n}{dt}(s) \right\|_{Y_n} ds \right)^p dt \\ &\leq \int_0^{T-h} M^{p-1} \left(\int_t^{t+h} \left\| \frac{df_n}{dt}(s) \right\|_{Y_n} ds \right) dt \\ &\leq M^{p-1} \int_0^{T-h} \left(\int_0^T 1_{[t,t+h]}(s) \left\| \frac{df_n}{dt}(s) \right\|_{Y_n} ds \right) dt, \end{aligned}$$

where M is a bound of the $L^1((0, T), Y_n)$ -norm of $\frac{df_n}{dt}$.

Then, using $1_{[t,t+h]}(s) = 1_{[s-h,s]}(t)$ and the Fubini-Tonelli Theorem, we obtain

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_{Y_n}^p dt \leq hM^p. \quad (4.48)$$

Then, with (4.48) Compacité en tempse equation.4.48), (4.47) Compacité en tempse equation.4.47) gives

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|f_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p hM^p. \quad (4.49)$$

We can now conclude. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.49) Compacité en tempse equation.4.49) (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε . Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term of the RHS of (4.49) Compacité en tempse equation.4.49) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \geq n_0, 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48. \blacksquare

Lemme 4.50 *Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.47 Compacité en tempse theorem.4.47).*

Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ and C_ε such that, for $n \geq n_0$ and $w \in X_n$, one has

$$\|w\|_B \leq \varepsilon \|w\|_{X_n} + C_\varepsilon \|w\|_{Y_n}.$$

Proof of Lemma 4.49 **Compacité en temps** **theorem.4.49** We perform the proof by contradiction. The contradiction gives that there exists $\varepsilon > 0$, an increasing function φ from \mathbb{N} to \mathbb{N} and, for all $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in X_{\varphi(n)}$ such that

$$1 = \|u_{\varphi(n)}\|_B > \varepsilon \|u_{\varphi(n)}\|_{X_n} + n \|u_{\varphi(n)}\|_{Y_n}.$$

In order to define u_n for all n , we can set $u_n = 0$ for $n \notin \text{Im}(\varphi)$. The sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is such that $u_n \in X_n$ (for all $n \in \mathbb{N}$), $(\|u_n\|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bounded and $\|u_n\|_{Y_n} \rightarrow 0$ (as $n \rightarrow +\infty$), then the second assumption of Definition 4.47 **Compacité en temps** **theorem.4.47** gives that any subsequence (of the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) converging in B converge (in B) to 0. But, since $(\|u_n\|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, the first assumption of Definition 4.47 **Compacité en temps** **theorem.4.47** gives that the subsequence $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admits a subsequence converging in B . Then, the limit of this subsequence must be 0 and its norm in B must be equal to 1, which is impossible. This concludes the proof of Lemma 4.49 **Compacité en temps** **theorem.4.49**. ■

It is also possible to replace in Theorem 4.48 **Aubin-Simon** with a sequence of subspaces **theorem.4.48** the time derivative by a discrete derivative. This is interesting for proving the convergence of the approximate solution of a parabolic problem using a numerical scheme. It is the purpose of Theorem 4.50 **Aubin-Simon** with a sequence of subspaces and a discrete derivative **theorem.4.50**

Théorème 4.51 (Aubin-Simon with a sequence of subspaces and a discrete derivative) *Let $1 \leq p < +\infty$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces. We assume that the sequence $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact-continuous in B (see Definition 4.47 **Compacité en temps** **theorem.4.47**).*

Let $T > 0$ and $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0, T), B)$ satisfying the following conditions

1. *For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $N \in \mathbb{N}^*$ and k_1, \dots, k_N in \mathbb{R}_+^* such that $\sum_{i=1}^N k_i = T$ and $u_n(t) = v_i$ for $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + k_i$, $v_i \in X_n$. (Of course, the values N , k_i and v_i are depending on n .)*

Furthermore, we define a.e. the function $\tilde{\partial}_t u_n$ by setting

$$\tilde{\partial}_t u_n(t) = \frac{v_i - v_{i-1}}{k_i} \text{ for } t \in (t_{i-1}, t_i).$$

2. *The sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^p((0, T), B)$.*

3. *The sequence $(\|u_n\|_{L^p((0, T), X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded.*

4. *The sequence $(\|\tilde{\partial}_t u_n\|_{L^1((0, T), Y_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded.*

Then there exists $u \in L^p((0, T), B)$ such that, up to a subsequence, $u_n \rightarrow u$ in $L^p((0, T), B)$.

Proof of Theorem 4.50 **Aubin-Simon with a sequence of subspaces and a discrete derivative** **theorem.4.50**

We follow closely the proof of Theorem 4.48 **Aubin-Simon** with a sequence of subspaces **theorem.4.48**. The proof uses also Proposition 4.46 **Time compactness** with a sequence of subspaces **theorem.4.46** and we only have to prove the third item of the hypotheses on $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of Proposition 4.46 **Time compactness** with a sequence of subspaces **theorem.4.46**, which is equivalent to say

$$\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot + h) - u_n\|_B^p dt \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0, \text{ uniformly w.r.t. } n \in \mathbb{N}.$$

Here also, for all $n \in \mathbb{N}$, since $u_n \in L^p((0, T), B)$, one has $\int_0^{T-h} \|u_n(\cdot + h) - u_n\|_B^p dt \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. The only difficulty is to prove the uniformity of this convergence with respect to $n \in \mathbb{N}$. So, we only have to prove that for all $\eta > 0$ there exist $n_0 \in \mathbb{N}$ and $0 < h_0 < T$ such that

$$n \geq n_0, 0 < h \leq h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(\cdot + h) - u_n\|_B^p dt \leq \eta. \quad (4.50)$$

Let $\varepsilon > 0$. Lemma 4.49 Compacité en temps theorem.4.49 gives the existence of $n_0 \in \mathbb{N}$ and $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ such that

$$n \geq n_0, u \in X_n \Rightarrow \|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{X_n} + C_\varepsilon \|u\|_{Y_n}.$$

Then, for $n \geq n_0$, $0 < h < T$ and $t \in (0, T - h)$, one has

$$\begin{aligned} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B &\leq \varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n} \\ &\leq \varepsilon \|u_n(t+h)\|_{X_n} + \varepsilon \|u_n(t)\|_{X_n} + C_\varepsilon \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}, \end{aligned}$$

and then

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p \leq (3\varepsilon)^p \|u_n(t+h)\|_{X_n}^p + (3\varepsilon)^p \|u_n(t)\|_{X_n}^p + (3C_\varepsilon)^p \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p.$$

Integrating this inequality with respect to t leads to

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p dt. \quad (4.51)$$

The proof now differs from the proof of Theorem 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48. We have to use the discrete derivative of u_n instead of the derivative of u_n . We remark that for a.e. $t \in (0, T - h)$ (n and h are fixed)

$$u_n(t+h) - u_n(t) = \sum_{i; t_i \in (t, t+h)} (v_{i+1} - v_i) = \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i) 1_{(t, t+h)}(t_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{v_{i+1} - v_i}{k_{i+1}} k_{i+1} 1_{(t, t+h)}(t_i),$$

where $1_{(t, t+h)}(t_i) = 1$ if $t_i \in (t, t+h)$ and 0 if $t_i \notin (t, t+h)$.

Let M be a bound of the $L^1((0, T), Y_n)$ -norm of $\partial_t u_n$ (then, $M \geq \sum_{i=1}^{N-1} \|\frac{v_{i+1} - v_i}{k_{i+1}}\|_{Y_n} k_{i+1}$ for all n). We then obtain

$$\begin{aligned} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left\| \frac{v_{i+1} - v_i}{k_{i+1}} \right\|_{Y_n} k_{i+1} 1_{(t, t+h)}(t_i) \right)^p \\ &\leq M^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left\| \frac{v_{i+1} - v_i}{k_{i+1}} \right\|_{Y_n} k_{i+1} 1_{(t, t+h)}(t_i) \right) \end{aligned}$$

Integrating this inequality with respect to $t \in (0, T - h)$ gives, since $1_{(t, t+h)}(t_i) = 1_{(t_i - h, t_i)}(t)$,

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{Y_n}^p dt \leq h M^p.$$

Using this inequality in (4.51) Compacité en temps equation.4.51 we obtain

$$\int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2(3\varepsilon)^p \|u_n\|_{L^p((0,T),X_n)}^p + (3C_\varepsilon)^p M^p h. \quad (4.52)$$

We can now conclude as in Theorem 4.48 Aubin-Simon with a sequence of subspaces theorem.4.48. Let $\eta > 0$. we choose $\varepsilon > 0$ in order to bound by η this first term of (4.52) Compacité en temps equation.4.52 (independently of $n \in \mathbb{N}$). This choice of ε gives also n_0 and C_ε . Since C_ε is given, there exists $h_0 \in (0, T)$ such that the second term

of the RHS of (4.52) is bounded by η (independently of $n \in \mathbb{N}$) if $0 < h < h_0$. Finally, we obtain

$$n \geq n_0, 0 < h < h_0 \Rightarrow \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_B^p dt \leq 2\eta.$$

This concludes the proof of Theorem 4.50 with a sequence of subspaces and a discrete derivative theorem. 4.50. ■

With the hypotheses of Theorem 4.48 or Theorem 4.50, another interesting question is to prove an additional regularity for u , namely that $u \in L^p((0, T), X)$ where X is some space closely related to the X_n (and included in B). In definition 4.51 we precise the meaning of the sentence “ X closely related to the X_n ” and we give in Theorem 4.52 a regularity result.

Définition 4.52 Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and X be a Banach space included in B . We say that the sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is B -limit-included in X if there exist $C \in \mathbb{R}$ such that if u is the limit in B of a subsequence of a sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifying $u_n \in X_n$ and $\|u_n\|_{X_n} \leq 1$, then $u \in X$ and $\|u\|_X \leq C$.

Théorème 4.53 (Regularity of the limit) Let $1 \leq p < +\infty$ and $T > 0$. Let B be a Banach space, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B and B -limit-included in X (where X is a Banach space included in B) in the sense of Definition 4.51. Let $T > 0$ and, for $n \in \mathbb{N}$, let $u_n \in L^p((0, T), X_n)$. We assume that the sequence $(\|u_n\|_{L^p((0, T), X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded and that $u_n \rightarrow u$ in $L^p((0, T), B)$ as $n \rightarrow +\infty$. Then $u \in L^p((0, T), X)$.

Proof of Theorem 4.52

Since $u_n \rightarrow u$ in $L^p((0, T), B)$ as $n \rightarrow +\infty$, we can assume, up to subsequence, that $u_n \rightarrow u$ in B a.e.. Then, since the sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is B -limit-included in X , we obtain, with C given by Definition 4.51,

$$\|u\|_X \leq C \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{X_n} \text{ a.e..}$$

Using now Fatou lemma, we have

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \leq C^p \int_0^T \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt \leq C^p \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_{X_n}^p dt.$$

Then, since $(\|u_n\|_{L^p((0, T), X_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded, we conclude that $u \in L^p((0, T), X)$. ■

4.6 Exercices

Exercice 4.1 (Solution classique en dimension 1) Solution 4.1

Soit $u_0 \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.53)$$

La notation u_t désigne la dérivée de u par rapport à t et u_{xx} désigne la dérivée seconde de u par rapport à x . On dit que u est une solution classique de (4.53) si u vérifie les trois conditions suivantes

- (c1) u est de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$ et vérifie au sens classique $u_t - u_{xx} = 0$ en tout point de $]0, 1[\times]0, +\infty[$,
 (c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u , u_x et u_{xx} sont continues sur $[0, 1] \times [t, +\infty[$ et $u(0, t) = u(1, t) = 0$,
 (c3) $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ dans $L^2(]0, 1[)$ quand $t \rightarrow 0$ ($t > 0$).

1. Montrer que le problème (4.53 Exercice equation.4.53) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 Aperçu des méthodes section.4.1.]
2. Montrer que le problème (4.53 Exercice equation.4.53) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1 Aperçu des méthodes section.4.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0, 1[)$, voir l'exercice 2.2 Décomposition spectrale en dimension 1 exo.2.2.]

Exercice 4.2 (Dual de L_E^p) Solution 4.2 Dual de L_E^p cor.4.2

Soit (X, T, m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L_{E'}^{p'}(X, T, m)$ et $u \in L_E^p(X, T, m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x) \rangle_{E', E}$ est m -mesurable de X dans \mathbb{R} puis que $\langle v, u \rangle_{E', E} \in L_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$ et

$$\int |\langle v, u \rangle_{E', E}| dm \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}} \|u\|_{L_E^p}.$$

2. Soit $v \in L_{E'}^{p'}(X, T, m)$.

(a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L_E^p(X, T, m)$ dans \mathbb{R} .

On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L_E^p(X, T, m)'$).

(b) Montrer que $\|T_v\|_{L_E^p(X, T, m)'} \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}(X, T, m)}$.

(c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L_E^p(X, T, m)'} = \|v\|_{L_{E'}^{p'}(X, T, m)}$.

Exercice 4.3 (Dérivée faible pour une union de domaines)

On suppose que Ω_1 et Ω_2 sont deux disjoints de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et on note Ω l'intérieur de l'adhérence de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (l'ouvert Ω peut donc être différent de $\Omega_1 \cup \Omega_2$).

Soit $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$. Pour $i = 1, 2$, on note f_i la fonction obtenue en restreignant f à Ω_i , on a donc $f_i \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega_i))$.

On identifie (comme d'habitude) $L^2(\Omega)$ avec son dual et $L^2(\Omega_i)$ avec son dual (pour $i = 1, 2$).

On suppose $df_i/dt \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega_i)')$ (pour $i = 1, 2$). Montrer que $df/dt \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)')$.

Corrigé – Il s'agit de montrer qu'il existe $u \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)')$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$,

$$-\int_0^T f(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt.$$

Le terme de gauche de cette égalité est dans $L^2(\Omega)$ et le terme de droite est dans $H^1(\Omega)'$. Comme on a identifié $L^2(\Omega)$ avec son dual et que $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on a $L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$ et montrer cette égalité consiste donc à montrer que pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \left(-\int_0^T f(t)\varphi(t)dt \right) (x)\psi(x)dx = \left\langle \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}. \quad (4.54)$$

On cherche donc $u \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)')$ vérifiant (??) pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in H^1(\Omega)$.

Pour $i = 1, 2$, on sait que $df_i/dt \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega_i)')$, il existe donc $u_i \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega_i)')$ (que peut confondre avec df_i/dt) tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et tout $\psi \in H^1(\Omega_i)$ on a

$$\int_{\Omega_i} \left(-\int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt \right) (x)\psi(x)dx = \left\langle \int_0^T u_i(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)}. \quad (4.55)$$

Soient $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. On note ψ_i la restriction de ψ à Ω_i . On a donc $\psi_i \in H^1(\Omega_i)$ et $\|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^2 \|\psi_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$. En utilisant (??) (et la proposition ??) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(- \int_0^T f(t)\varphi(t)dt \right) (x)\psi(x)dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \left(- \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt \right) (x)\psi_i(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle \int_0^T u_i(t)\varphi(t)dt, \psi_i \right\rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)} = \int_0^T \sum_{i=1}^2 \langle u_i(t)\varphi(t), \psi_i \rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)} dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^2 \langle u_i(t), \psi_i \rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)} \varphi(t)dt = \int_0^T \langle u(t), \psi \rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)} \varphi(t)dt \\ &= \left\langle \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $u(t)$ est défini (pour presque tout t) par

$$\langle u(t), \psi \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \langle u_i(t), \psi_i \rangle_{H^1(\Omega_i)', H^1(\Omega_i)}.$$

Comme $u_i \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega_i)')$ et $\|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^2 \|\psi_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$, on a bien $u \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)')$ et cela termine la démonstration.

Exercice 4.4 (Diffusion non homogène et non isotrope) Solution 4.3 Diffusion non homogène et non isotrope cor.4.3

On reprend les hypothèses du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19. Soit donc Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A , de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans \mathbb{R}). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^T \left(\int_{\Omega} A \nabla u(s) \cdot \nabla v(s) dx \right) ds = \\ \int_0^T \langle f(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} \end{cases} \quad (4.56)$$

Exercice 4.5 (Existence par le théorème de Schauder) Solution 4.4 Existence par le théorème de Schauder cor.4.4

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $A : \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N \times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (4.57)$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.58)$$

$$f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \quad (4.59)$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)'$, comme d'habitude. On veut, dans cet exercice, montrer l'existence d'une solution au problème (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32).

Soit $\bar{u} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est la solution (donnée par l'exercice 4.3 Diffusion non homogène et non isotrope exo.4.3) du problème

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} A(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v dx dt \\ = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

1. Montrer que T est continu de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.
2. Montrer que T est compact de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.
3. Montrer qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|T(\bar{u})\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))} \leq R$ pour tout $u \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.
4. Montrer qu'il existe u solution de (4.32) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.32).
5. On suppose maintenant de plus que $a_{i,j}$ est, pour tout i, j , une fonction lipschitzienne. Montrer que (4.32) problèmes paraboliques non linéaires equation.4.32) admet une unique solution.

Exercice 4.6 (Existence par schéma numérique) *Solution 4.5 Existence par schéma numérique cor.4.5*

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (4.58 Exercices equation.4.58) - (4.60 Exercices equation.4.60) en passant à la limite sur un solution approchée donnée par un schéma numérique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x, t) = v(x, t), \quad x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (4.61)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (4.62)$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0, v \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
3. $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0, \varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans \mathbb{R}_+^* . Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.

Les ensembles $]0, 1[$ et $]0, 1[\times]0, T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu.

On appelle "solution faible" de (4.58 Exercices equation.4.58), (4.59 Exercices equation.4.59), (4.60 Exercices equation.4.60) une solution de

$$u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[), \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (u(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) + \varphi(u(x, t)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t) \psi(x, t)) dx dt \\ + \int_0^1 u_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2), \end{aligned} \quad (4.64)$$

où $C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, 2 \text{ fois continûment dérivable par rapport à } x \text{ et une fois continûment dérivable par rapport à } t, \text{ t.q. } \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et } \psi(x, T) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1]\}$.

1. (Question indépendante des questions suivantes.) On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2 , v est continue sur $[0, 1] \times [0, T]$ et u_0 est continue sur $[0, 1]$. Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et u la restriction de w à $]0, 1[\times]0, T[$. Montrer que u est solution de (4.61 Exercice equation.4.61), (4.62 Exercice equation.4.62) si et seulement si u vérifie (4.58 Exercice equation.4.58), (4.59 Exercice equation.4.59) et (4.60 Exercice equation.4.60) au sens classique (that is to say pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$).
2. (Un résultat de compacité.) Soit $A \subset C([0, T], L^2(]0, 1[))$. On munit $C([0, T], L^2(]0, 1[))$ de la norme usuelle, that is to say

$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_{L^2(]0, 1[)}, t \in [0, T]\}.$$

On suppose que A vérifie les 2 hypothèses suivantes

- (a) Pour tout $t \in [0, T]$, $\{u(t), u \in A\}$ est un borné de $L^\infty(]0, 1[)$ et il existe C t.q.

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(x + \eta) - u(t)(x)|^2 dx \leq C\eta,$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $u \in A$, avec $u(t)$ prolongée par 0 hors de $[0, 1]$.

- (b) Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|u(t) - u(s)\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C|t - s|$, pour tout $t, s \in [0, T]$ et tout $u \in A$.

Montrer que A est relativement compacte dans $C([0, T], L^2(]0, 1[))$.

3. (Passage à la limite sur une non linéarité, cette question est indépendante de la question précédente.) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$. Soient $u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ et $f \in L^1(]0, 1[\times]0, T[)$. On suppose que, quand $n \rightarrow \infty$,

- (a) $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
 (b) $\varphi(u_n) \rightarrow f$ dans $L^1(]0, 1[\times]0, T[)$ et p.p..

Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p. sur $]0, 1[\times]0, T[$.

[Indication : Utiliser l'astuce de Minty...]

On cherche maintenant une solution approchée de (4.58 Exercice equation.4.58), (4.59 Exercice equation.4.59), (4.60 Exercice equation.4.60)

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (4.58 Exercice equation.4.58), (4.59 Exercice equation.4.59) à partir de la famille $\{u_i^n, i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M\}$ vérifiant les équations suivantes

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.65)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (4.66)$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$ et $v_i^n = \frac{1}{kh} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{(i-1)h}^{ih} v(x, t) dx dt$, pour tout $i = 1, \dots, N$, pour tout $n = 0, \dots, M$.

4. (Existence et unicité de la solution approchée.)

Soit $n \in \{0, \dots, M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n, i = 1, \dots, N\}$.

- (a) On suppose que φ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$. On pose $r_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Montrer que $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (4.64Exercicesequation.4.64) si et seulement si $(r_i)_{i=1, \dots, N}$ est un point fixe de l'application (bien définie...) qui à $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$ associe $r = (r_i)_{i=1, \dots, N}$ défini (avec $w_0 = w_1$ et $w_{N+1} = w_N$) par

$$\varphi^{-1}(r_i) + \frac{2k}{h^2} r_i = \frac{k}{h^2} (w_{i-1} + w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n, \quad i = 1, \dots, N.$$

Montrer que cette application est strictement contractante (de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N) pour la norme dite "du sup". En déduire qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.64Exercicesequation.4.64).

- (b) (plus difficile) On ne suppose plus que φ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.64Exercicesequation.4.64).

Les trois questions suivantes donnent des estimations sur la solution approchée dont on vient de montrer l'existence et l'unicité.

5. (Estimation L^∞ ($]0, 1[\times]0, T[$) sur la solution approchée.)

On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty(]0, 1])}$ et $B = \|v\|_{L^\infty(]0, 1[\times]0, T])}$.

Montrer, par récurrence sur n , que $u_i^n \in [-A - nkB, A + nkB]$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $n = 0, \dots, M$. [On pourra, par exemple, considérer (4.64Exercicesequation.4.64) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1}, j = 1, \dots, N\}$.]

6. (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q., pour tout $n = 0, \dots, M - 1$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq C_1 \frac{h}{k}.$$

[indication : multiplier (4.64Exercicesequation.4.64) par u_i^{n+1} et sommer sur i .]

7. (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T, φ, v et u_0) t.q.

$$\sum_{n=0}^{M-1} h \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \leq C_2 k.$$

[indication : multiplier (4.64Exercicesequation.4.64) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

L'objectif est maintenant de passer à la limite sur les paramètres de discrétisation. Pour $M \in \mathbb{N}^*$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit, avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes, une fonction, u_h , sur $[0, 1] \times [0, T]$ en posant

$$u_h(x, t) = \frac{t - nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k - t}{k} u_h^{(n)}(x), \quad \text{si } t \in [nk, (n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \quad \text{si } x \in [(i-1)h, ih], \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M.$$

8. Soient $A_1 = \{u_h, M \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_2 = \{\varphi(u_h), M \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que A_1 est relativement séquentiellement compacte dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$, pour la topologie faible- \star , et que A_2 est relativement (séquentiellement) compacte dans $C(]0, T[, L^2(]0, 1[))$.

En déduire que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ t.q., en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), on ait, quand $n \rightarrow \infty$,

- (a) $h_n \rightarrow 0$ et $k_n \rightarrow 0$,
- (b) $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
- (c) $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^p(]0, 1[\times]0, T[)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.

9. Montrer que la fonction u trouvée à la question précédente est solution de (4.61Exercicesequation.4.61),(4.62Exercicesequation.4.62).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (4.61Exercicesequation.4.61),(4.62Exercicesequation.4.62).

Exercice 4.7 (Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$) Solution 4.6Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$.cor.4.6

Le but de cet exercice est de refaire la démonstration du théorème 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37 dans le cas (plus simple) $B = \mathbb{R}$ et $p = 1$.

Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1(]0, T[, \mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).

On suppose que pour tout $h \in]0, T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \leq \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0, T[$ dans \mathbb{R}_+ t.q. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta(h) = 0$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1 .

1. Soit $\delta, h \in]0, T[$ t.q. $\delta + h \leq T$. Montrer que

$$\int_0^\delta |u_n(t)| dt \leq \int_0^\delta |u_n(t+h)| dt + \int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)| dt. \quad (4.67)$$

2. Soit $h_0 \in]0, T[$ et $\delta \in]0, T - h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^\delta |u_n(t)| dt \leq \delta \|u_n\|_1 + h_0 \eta(h_0). \quad (4.68)$$

3. Montrer que $\int_0^\delta |u_n(t)| dt \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, uniformément par rapport à n .

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1 .

[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 4.36Kolmogorov (1)theorem.4.36, en utilisant le prolongement de u_n par 0.]

4.7 Corrigés d'exercices

Corrigé 4.1 (Solution classique en dimension 1)

Soit $u_0 \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.69)$$

La notation u_t désigne la dérivée de u par rapport à t et u_{xx} désigne la dérivée seconde de u par rapport à x . On dit que u est une solution classique de (4.67) si u vérifie les trois conditions suivantes

- (c1) u est de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$ et vérifie au sens classique $u_t - u_{xx} = 0$ en tout point de $]0, 1[\times]0, +\infty[$,
(c2) pour tout $t > 0$, les fonctions u , u_x et u_{xx} sont continues sur $[0, 1] \times [t, +\infty[$ et $u(0, t) = u(1, t) = 0$,
(c3) $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ dans $L^2(]0, 1[)$ quand $t \rightarrow 0$ ($t > 0$).

1. Montrer que le problème (4.67) admet au plus une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.1.]

Corrigé – Si u et \bar{u} sont deux solutions classiques de (4.67). La fonction $(u - \bar{u})$ est alors une solution classique de (4.67) avec $u_0 = 0$ p.p. (sur $]0, 1[$). Pour montrer que $u = \bar{u}$, il suffit donc de montrer que la fonction nulle est l'unique solution de (4.67) lorsque $u_0 = 0$ p.p..

On suppose donc que u est une solution classique de (4.67) avec $u_0 = 0$ p.p.. On va montrer que $u(x, t) = 0$ pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times]0, +\infty[$.

Soit $t > 0$, les hypothèses (c1) et (c2) permettent de dire que

$$\int_0^1 u_t(x, t)u(x, t)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2)_t(x, t)dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u^2(x, t)dx \right)$$

et

$$\int_0^1 u_{xx}(x, t)u(x, t)dx = - \int_0^1 u_x(x, t)^2 dx.$$

Comme $u_t u - u_{xx} u = 0$ sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u^2(x, t)dx \right) + \int_0^1 u_x(x, t)^2 dx = 0.$$

Soit $0 < \varepsilon < T < +\infty$. En intégrant l'équation précédente entre ε et T , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, T)dx + \int_0^T \int_0^1 u_x^2(x, t)dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u(x, \varepsilon)dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^1 u^2(x, T)dx \leq \int_0^1 u^2(x, \varepsilon)dx.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 (par (c3)), on a donc $\int_0^1 u^2(x, T)dx = 0$, ce qui donne $u(\cdot, T) = 0$ p.p. et donc $u(x, T) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ (car $u(\cdot, T)$ est supposée être continue sur $[0, 1]$). Comme $T > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $u(x, t) = 0$ pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times]0, +\infty[$.

2. Montrer que le problème (4.1) admet une solution classique. [On pourra reprendre la méthode développée à la section 4.1.1 en explicitant une base hilbertienne convenable de $L^2(]0, 1[)$, voir l'exercice 2.2.]

Corrigé –

On utilise un résultat de l'exercice 2.2 Décomposition spectrale en dimension 1 exo.2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2 \int_0^1 u_0(t) \sin(n\pi t) dt$. L'exercice 2.2 Décomposition spectrale en dimension 1 exo.2.2. donne que

$$\|u_0 - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(On rappelle que $\|\cdot\|_2$ désigne $\|\cdot\|_{L^2([0,1])}$. Comme $|c_n| \leq 2\|u_0\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. On en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est convergente (dans \mathbb{R}) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2 \pi^2 \varepsilon} |c_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 \pi^2 \varepsilon} |c_n|$$

sont convergentes. Ceci montre que la fonction

$$x, t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} c_n \sin n\pi x$$

est, pour tout $\varepsilon > 0$, de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times]\varepsilon, +\infty[$ (elle est même de classe C^∞) et que la série peut être dérivée terme à terme, une fois en t et deux fois en x . On pose donc, pour $x \in]0, 1[$ et $t > 0$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} c_n \sin n\pi x.$$

La fonction u ainsi définie vérifie bien les conditions (c1) et (c2).

Il reste à montrer que u vérifie (c3). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t > 0$ et $n_0 > 0$, on a

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{n_0} c_n (1 - e^{-n^2 t^2}) \sin(n\pi \cdot) \right\|_2 + 2 \left\| u_0 - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \sin(n\pi \cdot) \right\|_2.$$

On commence par choisir n_0 pour que le deuxième terme du membre de droite de cette inégalité soit inférieur à ε . Puis, comme n_0 est maintenant fixé, on remarque qu'il existe $t_0 > 0$ t.q. le premier terme du membre de droite de cette inégalité est inférieur à ε dès que $t \in]0, t_0]$. On en déduit bien que u vérifie (c3).

Corrigé 4.2 (Dual de L_E^p)

Soit (X, T, m) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.

1. Soit $v \in L_{E'}^{p'}(X, T, m)$ et $u \in L_E^p(X, T, m)$. Montrer que l'application $x \mapsto \langle v(x), u(x) \rangle_{E', E}$ est m -mesurable de X dans \mathbb{R} puis que $\langle v, u \rangle_{E', E} \in L_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$ et

$$\int |\langle v, u \rangle_{E', E}| dm \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}} \|u\|_{L_E^p}.$$

Corrigé – On choisit pour u et v des représentants, de sorte que $v \in \mathcal{L}_{E'}^{p'}(X, T, m)$ et $u \in \mathcal{L}_E^p(X, T, m)$. La m -mesurabilité de l'application $x \mapsto \langle u(x), v(x) \rangle_{E', E}$ (notée $\langle v, u \rangle_{E', E}$) est assez simple à montrer (et ne dépend pas des représentants choisis pour u et v). Il suffit de remarquer qu'il existe deux suites de fonctions étagées $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (v_n est une fonction de X dans E' et u_n de X dans E) t.q. $v_n \rightarrow v$ p.p. et $u_n \rightarrow u$ p.p. (quand $n \rightarrow +\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\langle v_n, u_n \rangle_{E', E}$ est alors une fonction étagée de X dans \mathbb{R} . Quand $n \rightarrow +\infty$, elle converge p.p. vers la fonction $\langle v, u \rangle_{E', E}$ qui est donc m -mesurable.

On remarque ensuite que $|\langle v(x), u(x) \rangle_{E', E}| \leq \|v(x)\|_{E'} \|u(x)\|_E$ pour tout $x \in X$. En intégrant par rapport à la mesure m (on utilise ici la monotonie de l'intégrale pour les fonctions m -mesurables à valeurs dans \mathbb{R} et l'inégalité de

Hölder), on obtient que $\langle v, u \rangle_{E', E} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$ (et donc $\langle v, u \rangle_{E', E} \in L_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$ avec la confusion habituelle entre \mathcal{L}^1 et L^1) et

$$\int |\langle v, u \rangle_{E', E}| dm \leq \int \|v\|_{E'} \|u\|_E dm \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}} \|u\|_{L_E^p}.$$

2. Soit $v \in L_{E'}^{p'}(X, T, m)$.

(a) Montrer que l'application $u \mapsto \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm$ est bien définie, linéaire et continue de $L_E^p(X, T, m)$ dans \mathbb{R} .

Corrigé – La question précédente donne bien que $\langle v, u \rangle_{E', E} \in L_{\mathbb{R}}^1(X, T, m)$ pour tout $u \in L_E^p(X, T, m)$. L'application $u \mapsto \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm$ est donc bien définie de $L_E^p(X, T, m)$ dans \mathbb{R} . Elle est trivialement linéaire. Sa continuité est une conséquence du fait que

$$\left| \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm \right| \leq \int |\langle v, u \rangle_{E', E}| dm \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}} \|u\|_{L_E^p}.$$

On note T_v cette application (on a donc $T_v \in L_E^p(X, T, m)'$).

(b) Montrer que $\|T_v\|_{L_E^p(X, T, m)'} \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}(X, T, m)}$.

Corrigé – Par définition de la norme dans le dual d'un espace de Banach, on a

$$\|T_v\|_{(L_E^p)'} = \sup\{|T_v(u)|, u \in L_E^p \text{ t.q. } \|u\|_{L_E^p} = 1\}.$$

La question précédente donne que $|T_v(u)| \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}}$ si $\|u\|_{L_E^p} = 1$, on a donc

$$\|T_v\|_{L_E^p(X, T, m)'} \leq \|v\|_{L_{E'}^{p'}(X, T, m)}.$$

(c) (Question plus difficile) Montrer que $\|T_v\|_{L_E^p(X, T, m)'} = \|v\|_{L_{E'}^{p'}(X, T, m)}$.

Corrigé – On pose $q = p'$. On raisonne ici en deux étapes. On commence par montrer l'égalité demandée si v est une fonction étagée. Puis, on traite le cas général.

Étape 1

On suppose, dans cette étape, que v est une fonction étagée non nulle. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$, une famille A_1, \dots, A_n d'éléments de la tribu T et une famille b_1, \dots, b_n d'éléments de E' , non nuls, t.q.

$$v = \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. De la définition de la norme dans E' , on déduit que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\bar{a}_i \in E$ t.q.

$$\|\bar{a}_i\|_E = 1 \text{ et } \langle b_i, \bar{a}_i \rangle_{E', E} \geq (1 - \varepsilon) \|b_i\|_{E'}.$$

On pose $a_i = \|b_i\|_{E'}^{q-1} \bar{a}_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et

$$u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}.$$

La fonction u est une fonction étagée (de X dans E) et on a

$$\int \langle v, u \rangle_{E', E} dm = \sum_{i=1}^n m(A_i) \langle b_i, a_i \rangle_{E', E} \geq (1 - \varepsilon) m(A_i) \|b_i\|_{E'}^q = (1 - \varepsilon) \|v\|_{L_{E'}^q}^q.$$

D'autre part, on a (comme $p(q-1) = q$)

$$\|u\|_{L_E^p}^p = \sum_{i=1}^n m(A_i) \|b_i\|_{E'}^{p(q-1)} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \|b_i\|_{E'}^q = \|v\|_{L_{E'}^q}^q.$$

On a donc

$$\frac{1}{\|u\|_{L_E^p}^p} \int \langle v, u \rangle_{E', E} dm \geq (1 - \varepsilon) \frac{\|v\|_{L_{E'}^q}^q}{\|v\|_{L_{E'}^q}^q} = (1 - \varepsilon) \|v\|_{L_{E'}^q}.$$

En posant $\bar{u} = \frac{u}{\|u\|_{L^p_E}}$, on a donc $\|\bar{u}\|_{L^p_E} = 1$ et $\int \langle v, \bar{u} \rangle_{E', E} dm \geq (1 - \varepsilon) \|v\|_{L^q_{E'}}$. Ceci prouve que

$$\|T_v\|_{(L^p_E)'} \geq (1 - \varepsilon) \|v\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient donc, avec la question 2(b), $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Étape 2

On traite maintenant le cas général. Soit $v \in L^q_{E'}$, non nulle (si $v = 0$ p.p. l'égalité demandée est triviale). Il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagée (de X dans E') t.q. $v_n \rightarrow v$ dans $L^q_{E'}$ (cette suite peut se construire comme cela a été pour la définition de L^1 , that is to say en construisant v_n t.q. $\|v_n(x)\|_{E'} \leq 2\|v(x)\|_{E'}$ pour presque tout $x \in E'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc w fonction étagée t.q. $\|w - v\|_{L^p_E} \leq \varepsilon$. Par l'étape 1, il existe $u \in L^p_E$ t.q. $\|u\|_{L^p_E} = 1$ et

$$\int \langle w, u \rangle_{E', E} dm \geq \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon.$$

On a donc (avec la question 1)

$$\int \langle v, u \rangle_{E', E} dm = \int \langle w, u \rangle_{E', E} dm + \int \langle v - w, u \rangle_{E', E} dm \geq \|w\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon - \|v - w\|_{L^q_{E'}}.$$

Comme $\|v - w\|_{L^q_{E'}} \leq \varepsilon$ et $\|w\|_{L^q_{E'}} \geq \|v\|_{L^q_{E'}} - \varepsilon$, on a donc

$$\int \langle v, u \rangle_{E', E} dm \geq \|v\|_{L^q_{E'}} - 3\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci permet d'affirmer que $\|T_v\|_{(L^p_E)'} \geq \|v\|_{L^q_{E'}}$. Finalement, avec la question 2(b), on a bien $\|T_v\|_{(L^p_E)'} = \|v\|_{L^q_{E'}}$.

Corrigé 4.3 (Diffusion non homogène et non isotrope)

On reprend les hypothèses du théorème 4.25Faedo-Galerkinequation.4.19. Soit donc Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

On se donne aussi une application, notée A , de Ω dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrés à N lignes et N colonnes, à coefficients dans \mathbb{R}). On suppose que les coefficients de A appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$A\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p., pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En suivant la démonstration donnée dans ce chapitre, montrer qu'il existe un et un seul u tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^T \left(\int_\Omega A \nabla u(s) \cdot \nabla v(s) dx \right) ds = \\ \int_0^T \langle f(s), v(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds \text{ pour tout } v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p..} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Corrigé – Si A est symétrique, le plus simple consiste à utiliser une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(A \nabla u)$ (avec condition de Dirichlet, that is to say $u = 0$ sur $\partial\Omega$). On prend donc une famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A \nabla e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$. (On a vu dans la section 2.2Analyse spectralesection.2.2 qu'une telle base existait.) La démonstration de l'existence (et de l'unicité) d'une solution de (4.68Corrigés d'exercicesequation.4.68) est alors très voisine de celle donnée pour le cas où A est la matrice Identité.

Le cas où A est non symétrique est plus difficile car on n'a pas nécessairement une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(A\nabla u)$. Il faut alors modifier légèrement la démonstration. On va faire cette démonstration ici en prenant la base hilbertienne $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ associée au Laplacien (avec condition de Dirichlet). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction e_n est donc solution faible (non nulle) de

$$\begin{aligned} -\Delta e_n &= \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega, \\ e_n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On rappelle que $\|e_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\lambda_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$. On a aussi $\|e_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\lambda_n}$ et la famille $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. C'était l'étape 1 de la démonstration du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19).

Remarque 4.54 Compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$) et de la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ (à partir du produit scalaire dans $H_0^1(\Omega)$), on peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} (e_n/e_m)_{H^{-1}} &= 0 \text{ si } n \neq m, \\ (e_n/e_m)_{H^{-1}} &= \frac{1}{\lambda_n} \text{ si } n = m. \end{aligned} \quad (4.71)$$

La famille $\{\sqrt{\lambda_n}e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est donc une famille orthonormée de $H^{-1}(\Omega)$ (c'est même une base hilbertienne de $H^{-1}(\Omega)$). Pour montrer (4.69) corrigés d'exercices equation.4.69), on rappelle tout d'abord la définition du produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, on définit T_u dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle T_u, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = (u/\varphi)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx.$$

L'application T est bijective de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on définit alors le produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$(T_u/T_v)_{H^{-1}(\Omega)} = (u/v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$), on a, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lambda_n \langle e_n, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \lambda_n \int_{\Omega} e_n \varphi dx = \int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla \varphi dx,$$

ce qui montre que $T_{e_n} = \lambda_n e_n$. On a donc, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_n \lambda_m (e_n/e_m)_{H^{-1}(\Omega)} = (T_{e_n}/T_{e_m})_{H^{-1}(\Omega)} = (e_n/e_m)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla e_m dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit bien (4.69) corrigés d'exercices equation.4.69).

On construit maintenant une solution approchée (étape 2 du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = \operatorname{ev}\{e_p, p = 1, \dots, n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$ avec $\alpha_i \in C([0, T], \mathbb{R})$. Le calcul formel fait dans la démonstration du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19 donne ici (en supposant que les α_i sont dérivables pour tout t), pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} &\langle u_n'(t) - \operatorname{div}(A\nabla u_n(t)) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i'(t) \int_{\Omega} e_i \varphi dx + \alpha_i(t) \int_{\Omega} A\nabla e_i \cdot \nabla \varphi dx \right) - \langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On souhaite alors choisir les fonctions α_i pour que $\langle u_n'(t) - \operatorname{div}(A\nabla u_n(t)) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $\varphi \in E_n$.

On pose $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ et on note $F(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. On définit aussi la matrice $n \times n$ (à coefficients réels) M en posant $M_{i,j} = \int_{\Omega} A\nabla e_j \cdot \nabla e_i dx$ ($M_{i,j}$ est le coefficient de M en ligne i et colonne j). en notant $\alpha(t)$ le vecteur donc les composantes sont les $\alpha_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, on souhaite donc avoir

$$\alpha'(t) + M\alpha(t) = F(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0/e_i)_2$ et $\alpha^{(0)}$ le vecteur donc les composantes sont les $\alpha_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha(t) = e^{-Mt} \alpha^{(0)} + \int_0^t e^{-M(t-s)} F(s) ds. \quad (4.72)$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0, T], \mathbb{R})$ et on a donc $u_n \in C([0, T], E_n) \subset C([0, T], H_0^1(\Omega))$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$.

Nous avons ici raisonné à n fixé. La matrice M et les fonctions F et α dépendent donc de n .

Nous adaptons maintenant l'étape 3 du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape précédente. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n . Cette dérivée est notée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de \mathcal{D}_E^* avec $E = H_0^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ on a

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \int_0^T u_n(t) \varphi'(t) dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_E^*, \mathcal{D}} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \alpha_i(t) e_i \varphi'(t) dt = - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt \right) e_i.$$

On utilise maintenant (4.70) Corrigés d'exercices equation.4.70),

$$\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T (e^{-Mt} \alpha^{(0)})_i \varphi'(t) dt = \int_0^T (M e^{-Mt} \alpha^{(0)})_i \varphi(t) dt.$$

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-M(t-s)} F(s) ds \right)_i \varphi'(t) dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini et on obtient

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t (M e^{-M(t-s)} F(s))_i ds \right) \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt.$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T (M \alpha(t))_i \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt$, et donc

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, \mathcal{D}} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T (M \alpha(t))_i e_i \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t) dt.$$

Comme φ est arbitraire dans $C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, on a donc (p.p. en t)

$$(u_n)_t = - \sum_{i=1}^n (M \alpha)_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0, T[, E_n).$$

Le premier terme du membre de droite de cette égalité est même continu de $[0, T]$ à valeurs dans E_n . En reprenant la définition de M , cette égalité donne (p.p. en t)

$$(u_n)_t = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla e_i dx \right) e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i. \quad (4.73)$$

La situation est légèrement différente de celle du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19. Mais on a toujours

$$(u_n)_t \in L^2(]0, T[, E_n) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Compte tenu de la manière dont $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H^{-1}(\Omega)$ (par l'identification de $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$) on a pour tout $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$,

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (M \alpha(t))_i e_i v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} f_i e_i v dx dt.$$

Ceci est intéressant surtout lorsque $v \in L^2(]0, T[, E_n)$ car en reprenant la définition de M on obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i , toujours pour $v \in L^2(]0, T[, E_n)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle (u_n)_t(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla v dx dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \left(\int_{\Omega} e_i v dx \right) dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (4.74)$$

On rappelle aussi que $u_n \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$ où P_n est l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n .

On cherche maintenant (étape 4) des estimations sur la solution approchée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \text{ et } (u_n)_t \in L^2(]0, T[, E_n) \subset L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

D'après la section 4.2 Intégration à valeur vectorielle section 4.2, on a donc

$$\frac{1}{2} \|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4.72) Corrigés d'exercice equation 4.72), on en déduit

$$\frac{1}{2} \|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt = \int_0^T \langle f, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt,$$

et donc

$$\alpha \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \alpha \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Ce qui donne une borne sur u_n dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$.

Pour obtenir la borne sur $(u_n)_t$, on utilise (4.71) Corrigés d'exercice equation 4.71). Pour presque tout t on a

$$(u_n)_t(t) = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} A \nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx \right) e_i + \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i.$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v = \sum_{i=1}^{\infty} (v/e_i)_{L^2} e_i$ et cette série est convergente dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$. En posant $P_n(v) = \sum_{i=1}^n (v/e_i)_{L^2} e_i$ on a $\|P_n v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Comme

$$\begin{aligned} \langle (u_n)_t(t), P_n v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= \langle (u_n)_t(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} (u_n)_t(t) v dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} A \nabla u_n(t) \cdot \nabla e_i dx \right) (v/e_i)_{L^2} + \sum_{i=1}^n f_i(t) (v/e_i)_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

on en déduit que

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \{ \langle (u_n)_t(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, v \in E_n, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \}.$$

Or, pour $v \in E_n$, on obtient avec (4.73) *Corrigés d'exercices* equation.4.73)

$$\langle (u_n)_t(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} A \nabla u_n(t) \cdot \nabla v dx + \langle f(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

En utilisant le fait que les coefficients de A sont dans $L^\infty(\Omega)$, on en déduit l'existence de β , ne dépendant que de A , t.q. pour presque tout t ,

$$\|(u_n)_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \beta \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Il s'agit maintenant (étape 5) de passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$. Grâce aux estimations obtenues à l'étape précédente, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ (u_n)_t &\rightarrow w \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dans la démonstration du théorème 4.25 *Faedo-Galerkin* equation.4.19, on a $w = u_t$.

Soit $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $v_n(t) = P_n(v(t))$, de sorte que, par convergence dominée, $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. On utilise alors (4.72) *Corrigés d'exercices* equation.4.72) avec v_n au lieu de v . On obtient

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u_n \cdot \nabla v_n dx dt = \int_0^T \langle f, v_n \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Les trois termes de cette égalité passent à limite quand $n \rightarrow +\infty$ grâce aux convergences de u_n , v_n et $(u_n)_t$. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien ce qui était souhaité.

Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$. Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de (4.68) *Corrigés d'exercices* equation.4.68), il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p. (that is to say $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$). La démonstration de ce point est identique à celle donnée dans la démonstration du théorème 4.25 *Faedo-Galerkin* equation.4.19. Cela termine la démonstration de l'existence d'une solution à (4.68) *Corrigés d'exercices* equation.4.68).

On montre maintenant l'unicité de la solution de (4.68) *Corrigés d'exercices* equation.4.68). La démonstration est très proche de celle donnée pour le théorème 4.25 *Faedo-Galerkin* equation.4.19. Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.68) *Corrigés d'exercices* equation.4.68). On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0, T]$, $v = u \mathbf{1}_{]0, t]}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^t \int_{\Omega} A \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a, d'après la section 4.2 *Intégration à valeur vectorielle* section.4.2,

$$\frac{1}{2} (\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} A \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx dt = 0.$$

Enfin, comme $u(0) = 0$ et $A \nabla u \cdot \nabla u \geq 0$ p.p., on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω , pour tout $t \in [0, T]$. Ce qui termine la démonstration de l'unicité de la solution de (4.68) *Corrigés d'exercices* equation.4.68).

Corrigé 4.4 (Existence par le théorème de Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $A : \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{R})$ (où $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N \times N$ à coefficients réels) t.q.

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,N} \text{ où } a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (4.76)$$

$$\exists \alpha > 0; A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.77)$$

$$f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega). \quad (4.78)$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)'$, comme d'habitude. On veut, dans cet exercice, montrer l'existence d'une solution au problème (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32).

Soit $\bar{u} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, on définit l'opérateur T de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ par $T(\bar{u}) = u$ où u est la solution (donnée par l'exercice 4.3 Diffusion non homogène et non isotrope exo.4.3) du problème

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega A(\bar{u}) \nabla u \cdot \nabla v dx dt \\ = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt, \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.79)$$

1. Montrer que T est continu de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – Soit $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ et $\bar{u} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ t.q. $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ quand $n \rightarrow +\infty$. On pose $u_n = T(\bar{u}_n)$ et $u = T(\bar{u})$. Pour montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ quand $n \rightarrow +\infty$, on raisonne par l'absurde. Si $u_n \not\rightarrow u$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$\|u_n - u\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))} \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (4.80)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est la solution de (4.77) Corrigés d'exercices equation.4.77) avec \bar{u}_n au lieu de \bar{u} . En prenant $v = u_n$ comme fonction test, on en déduit, grâce à (4.75) Corrigés d'exercices equation.4.75), que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Puis, comme

$$(u_n)_t = \operatorname{div}(A(\bar{u}_n) \nabla u_n) + f$$

dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit que la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Après extraction éventuelle de sous suite, on peut donc supposer qu'il existe $w \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $\zeta \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ t.q., quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow w \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ (u_n)_t &\rightarrow \zeta \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Par le théorème 4.39 Aubin-Simon theorem.4.39, on a aussi $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Comme cela a été montré dans la démonstration du théorème 4.25 Faedo-Galerkin equation.4.19 on a nécessairement $\zeta = w_t$.

On peut également supposer, toujours après extraction de sous suite, que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ p.p. de sorte que $A(\bar{u}_n) \rightarrow A(\bar{u})$ p.p. (grâce à la continuité des $a_{i,j}$).

Soit $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on peut alors passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (4.77) Corrigés d'exercices equation.4.77) écrit avec \bar{u}_n et u_n (au lieu de \bar{u} et u). On obtient que w est la solution de (4.77) Corrigés d'exercices equation.4.77), that is to say que $w = u = T(\bar{u})$. On a donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, en contradiction avec (4.78) Corrigés d'exercices equation.4.78).

On a bien ainsi montré la continuité de T .

2. Montrer que T est compact de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – Le début du raisonnement de la question précédente montre que $\text{Im}(T)$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et que $\{u_t, u \in \text{Im}(T)\}$ est une partie bornée de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Le lemme de compacité 4.31 Compacité espace-temps, cadre L^2 theorem.4.31 donne alors que $\text{Im}(T)$ est relativement compacte dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, ce qui donne la compacité de T .

3. Montrer qu'il existe $R > 0$ t.q. $\|T(\bar{u})\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))} \leq R$ pour tout $u \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

Corrigé – Ici encore, ceci découle du raisonnement fait à la première question. En effet, on sait que $\text{Im}(T)$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$.

4. Montrer qu'il existe u solution de (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32).

Corrigé – On note B_R la boule de $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ de centre 0 et de rayon R , avec R donné à la question précédente. L'opérateur T est continu et compact de B_R dans B_R . Le théorème de Schauder donne alors l'existence de $u \in B_R$ (et donc $u \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$) t.q. $u = T(u)$, that is to say u solution de (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32).

5. On suppose maintenant de plus que $a_{i,j}$ est, pour tout i, j , une fonction lipschitzienne. Montrer que (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32) admet une unique solution.

Corrigé – La démonstration est ici très proche de celle faite pour montrer l'unicité de la solution de (4.33) problèmes paraboliques non linéaire

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4.32) problèmes paraboliques non linéaire equation.4.32). On pose $v = u_1 - u_2$ et on va montrer que $v = 0$ p.p.

Pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction T_ε de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $T_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s, \varepsilon\}\}$. On note aussi ϕ_ε la primitive de T_ε s'annulant en 0. En prenant $v = T_\varepsilon(u)$ dans les formulations faibles satisfaites par u_1 et u_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_t, T_\varepsilon(u) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega A(u_1) \nabla u \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega (A(u_2) - A(u_1)) \nabla u_2 \cdot \nabla T_\varepsilon(u) dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\nabla T_\varepsilon(u) = \nabla u 1_{0 < |u| < \varepsilon}$ p.p., on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x, T)) dx - \int_\Omega \phi_\varepsilon(u(x, 0)) dx + \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u 1_{0 < |u| < \varepsilon} dx dt \\ \leq \int_0^T \int_\Omega |(A(u_1) - A(u_2)) \nabla u_2| |\nabla u| 1_{0 < |u| < \varepsilon} dx dt. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Comme les $a_{i,j}$ sont des fonctions lipschitziennes, il existe L t.q., pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$|a_{i,j}(s_1) - a_{i,j}(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|,$$

On utilise alors le fait que $u_0 = 0$ p.p. et $\phi_\varepsilon \geq 0$ pour déduire de (4.79) Corrigés d'exercice equation.4.79), avec $A_\varepsilon = \{0 < |u| < \varepsilon\}$ et $y = (x, t)$,

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \leq N^2 L \varepsilon \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc $\alpha \|\nabla T_\varepsilon(u)\|_{L^2(Q)} \leq a_\varepsilon \varepsilon$, avec $Q =]0, T[\times \Omega$ et

$$a_\varepsilon = N^2 L \left(\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \emptyset$ la continuité décroissante d'une mesure donne que la mesure de Lebesgue ($N+1$ dimensionnelle) de A_ε tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et on a donc, comme $\nabla u_2 \in L^2(Q)^N$, (noter que $L^2(Q)$ peut être identifié à $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_2|^2 dy = 0,$$

ce qui donne $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon = 0$. Il nous reste maintenant à utiliser, par exemple, l'injection de $W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{1^*}(\Omega)$. elle donne pour $t \in]0, T[$,

$$\|T_\varepsilon(u(t))\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u(t))| \|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.82)$$

On désigne par "mes" la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N . On remarque maintenant que pour $t \in]0, T[$

$$\varepsilon \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^*}} \leq \left(\int_{\Omega} |T_\varepsilon(u)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}}.$$

On a donc, avec (4.80) corrigés d'exercices equation.4.80),

$$\varepsilon \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{1}{1^*}} \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u(t))| \|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx,$$

et, en intégrant par rapport à t , sachant que $1/1^* = (N-1)/N$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla T_\varepsilon(u(x,t))| dx dt \leq \| |\nabla T_\varepsilon(u)| \|_{L^2(Q)} (T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| \geq \varepsilon\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq \frac{(T \text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha} a_\varepsilon.$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, par convergence dominée, on en déduit (comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon = 0$)

$$\int_0^T \text{mes}\{|u(t)| > 0\}^{\frac{N-1}{N}} dt \leq 0.$$

Ce qui donne $\text{mes}\{|u(t)| > 0\} = 0$ p.p. en $t \in]0, T[$ et donc $u = 0$ p.p., ce qui termine cette preuve d'unicité.

Corrigé 4.5 (Existence par schéma numérique)

On se propose, dans cet exercice, de montrer l'existence d'une solution faible au problème (4.81) corrigés d'exercices equation.4.81)- (4.83) corrigés d'exercices equation.4.83) en passant à la limite sur un solution approchée donnée par un schéma numérique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}(x,t) = v(x,t), \quad x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (4.84)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (4.85)$$

où φ, v, T, u_0 sont donnés et sont t.q.

1. $T > 0, v \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
2. φ croissante, lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
3. $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$ et $\varphi(u_0)$ lipschitzienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Un exemple important est donné par $\varphi(s) = \alpha_1 s$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $0 \leq s \leq L$ et $\varphi(s) = \alpha_2(s - L)$ si $s \geq L$, avec α_1, α_2 et L donnés dans \mathbb{R}_+^* . Noter pour cet exemple que $\varphi' = 0$ sur $]0, L[$.

Les ensembles $]0, 1[$ et $]0, 1[\times]0, T[$ sont munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur cette tribu. On appelle "solution faible" de (4.81) corrigés d'exercices equation.4.81), (4.82) corrigés d'exercices equation.4.82), (4.83) corrigés d'exercices equation.4.83) une solution de

$$u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[), \quad (4.86)$$

$$\int_0^T \int_0^1 (u(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) + \varphi(u(x,t)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + v(x,t) \psi(x,t)) dx dt + \int_0^1 u_0(x) \psi(x,0) dx = 0, \quad \forall \psi \in C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2), \quad (4.87)$$

où $C_T^{2,1}(\mathbb{R}^2) = \{\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, 2 \text{ fois continûment dérivable par rapport à } x \text{ et une fois continûment dérivable par rapport à } t, \text{ t.q. } \frac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(1,t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et } \psi(x, T) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1]\}$.

- (Question indépendante des questions suivantes.) On suppose, dans cette question seulement, que φ est de classe C^2 , v est continue sur $[0, 1] \times [0, T]$ et u_0 est continue sur $[0, 1]$. Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et u la restriction de w à $]0, 1[\times]0, T[$. Montrer que u est solution de (4.84) si et seulement si u vérifie (4.81) et (4.82) au sens classique (that is to say pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$).
- (Un résultat de compacité.) Soit $A \subset C([0, T], L^2(]0, 1[))$. On munit $C([0, T], L^2(]0, 1[))$ de la norme usuelle, that is to say

$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_{L^2(]0, 1[)}, t \in [0, T]\}.$$

On suppose que A vérifie les 2 hypothèses suivantes

- Pour tout $t \in [0, T]$, $\{u(t), u \in A\}$ est un borné de $L^\infty(]0, 1[)$ et il existe C t.q.

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(x+\eta) - u(t)(x)|^2 dx \leq C\eta,$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $u \in A$, avec $u(t)$ prolongée par 0 hors de $[0, 1]$.

- Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|u(t) - u(s)\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C|t - s|$, pour tout $t, s \in [0, T]$ et tout $u \in A$.

Montrer que A est relativement compacte dans $C([0, T], L^2(]0, 1[))$.

- (Passage à la limite sur une non linéarité, cette question est indépendante de la question précédente.) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$. Soient $u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ et $f \in L^1(]0, 1[\times]0, T[)$. On suppose que, quand $n \rightarrow \infty$,

- $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
- $\varphi(u_n) \rightarrow f$ dans $L^1(]0, 1[\times]0, T[)$ et p.p..

Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p. sur $]0, 1[\times]0, T[$.

[Indication : Utiliser l'astuce de Minty...]

On cherche maintenant une solution approchée de (4.81), (4.82) et (4.83).

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$. On va construire une solution approchée de (4.81), (4.82) et (4.83) à partir de la famille $\{u_i^n, i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M\}$ vérifiant les équations suivantes

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} u_0(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.88)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\varphi(u_{i-1}^{n+1}) - 2\varphi(u_i^{n+1}) + \varphi(u_{i+1}^{n+1})}{h^2} = v_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (4.89)$$

avec $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, $u_{N+1}^{n+1} = u_N^{n+1}$, pour tout $n = 0, \dots, M-1$ et $v_i^n = \frac{1}{kh} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{(i-1)h}^{ih} v(x, t) dx dt$, pour tout $i = 1, \dots, N$, pour tout $n = 0, \dots, M$.

4. (Existence et unicité de la solution approchée.)

Soit $n \in \{0, \dots, M-1\}$. On suppose connu $\{u_i^n, i = 1, \dots, N\}$.

- (a) On suppose que φ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$. On pose $r_i = \varphi(u_i^{n+1})$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Montrer que $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ est solution de (4.87) si et seulement si $(r_i)_{i=1, \dots, N}$ est un point fixe de l'application (bien définie...) qui à $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$ associe $r = (r_i)_{i=1, \dots, N}$ défini (avec $w_0 = w_1$ et $w_{N+1} = w_N$) par

$$\varphi^{-1}(r_i) + \frac{2k}{h^2} r_i = \frac{k}{h^2} (w_{i-1} + w_{i+1}) + u_i^n + kv_i^n, \quad i = 1, \dots, N.$$

Montrer que cette application est strictement contractante (de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N) pour la norme dite "du sup". En déduire qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.87).

- (b) (plus difficile) On ne suppose plus que φ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une unique famille $\{u_i^{n+1}, i = 1, \dots, N\}$ solution de (4.87).

Les trois questions suivantes donnent des estimations sur la solution approchée dont on vient de montrer l'existence et l'unicité.

5. (Estimation $L^\infty([0, 1] \times [0, T])$ sur la solution approchée.)

On pose $A = \|u_0\|_{L^\infty([0, 1])}$ et $B = \|v\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])}$.

Montrer, par récurrence sur n , que $u_i^n \in [-A - nkB, A + nkB]$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $n = 0, \dots, M$. [On pourra, par exemple, considérer (4.87) avec i t.q. $u_i^{n+1} = \min\{u_j^{n+1}, j = 1, \dots, N\}$.]

6. (Estimation de la dérivée p.r. à x de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_1 (ne dépendant que de T , φ , v et u_0) t.q., pour tout $n = 0, \dots, M-1$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\varphi(u_{i+1}^{n+1}) - \varphi(u_i^{n+1}))^2 \leq C_1 \frac{h}{k}.$$

[indication : multiplier (4.87) par u_i^{n+1} et sommer sur i .]

7. (Estimation de la dérivée p.r. à t de $\varphi(u)$.) Montrer qu'il existe C_2 (ne dépendant que de T , φ , v et u_0) t.q.

$$\sum_{n=0}^{M-1} h \sum_{i=0}^{N+1} (\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n))^2 \leq C_2 k.$$

[indication : multiplier (4.87) par $\varphi(u_i^{n+1}) - \varphi(u_i^n)$ et sommer sur i et n]

L'objectif est maintenant de passer à la limite sur les paramètres de discrétisation. Pour $M \in \mathbb{N}^*$ donné, on prend $N = M^2$ (et donc h et k sont donnés et $k = T\sqrt{h}$), on définit, avec les u_i^n trouvés dans les questions précédentes, une fonction, u_h , sur $[0, 1] \times [0, T]$ en posant

$$u_h(x, t) = \frac{t - nk}{k} u_h^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)k - t}{k} u_h^{(n)}(x), \text{ si } t \in [nk, (n+1)k]$$

et

$$u_h^{(n)}(x) = u_i^n, \text{ si } x \in [(i-1)h, ih], i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M.$$

8. Soient $A_1 = \{u_h, M \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_2 = \{\varphi(u_h), M \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que A_1 est relativement séquentiellement compacte dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$, pour la topologie faible- \star , et que A_2 est relativement (séquentiellement) compacte dans $C([0, T], L^2(]0, 1[))$.

En déduire que l'on peut trouver une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ t.q., en posant $u_n = u_{h_n}$ (on rappelle que $k_n = T\sqrt{h_n}$), on ait, quand $n \rightarrow \infty$,

- (a) $h_n \rightarrow 0$ et $k_n \rightarrow 0$,
- (b) $u_n \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$,
- (c) $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^p(]0, 1[\times]0, T[)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.

9. Montrer que la fonction u trouvée à la question précédente est solution de (4.84Corrigés d'exercicesequation.4.84),(4.85Corrigés d'exercicesequation.4.85).

Remarque. On peut aussi montrer l'unicité de la solution de (4.84Corrigés d'exercicesequation.4.84),(4.85Corrigés d'exercicesequation.4.85).

Corrigé 4.6 (Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$) Le but de cet exercice est de refaire la démonstration du théorème 4.37Kolmogorov (2)theorem.4.37 dans le cas (plus simple) $B = \mathbb{R}$ et $p = 1$.

Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \lambda)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).

On suppose que pour tout $h \in]0, T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \leq \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0, T[$ dans \mathbb{R}_+ t.q. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta(h) = 0$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1 .

1. Soit $\delta, h \in]0, T[$ t.q. $\delta + h \leq T$. Montrer que

$$\int_0^\delta |u_n(t)| dt \leq \int_0^\delta |u_n(t+h)| dt + \int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)| dt. \quad (4.90)$$

Corrigé – Pour tout $t \in]0, \delta[$ on a $|u_n(t)| \leq |u_n(t+h)| + |u_n(t+h) - u_n(t)|$. En intégrant cette inégalité entre 0 et δ , on obtient bien (4.88Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$ equation.4.88).

2. Soit $h_0 \in]0, T[$ et $\delta \in]0, T - h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^\delta |u_n(t)| dt \leq \delta \|u_n\|_1 + h_0 \eta(h_0). \quad (4.91)$$

Corrigé – Comme d'habitude, on choisit pour u_n l'un de représentants, de sorte que $u_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \lambda)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

L'inégalité (4.88) Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$ (Equation.4.88) est vraie pour tout $h \in]0, h_0[$. En intégrant (4.88) Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$ (Equation.4.88) entre 0 et h_0 et en remarquant que $\int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \leq \eta(h) \leq \eta(h_0)$ (car $h \leq h_0$ et $\delta \leq T - h_0 \leq T - h$) on obtient

$$\begin{aligned} h_0 \int_0^\delta |u_n(t)| dt &\leq \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta |u_n(t+h)| dt \right) dh + \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \right) dh \\ &\leq \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta |u_n(t+h)| dt \right) dh + h_0 \eta(h_0). \end{aligned}$$

La mesure de Lebesgue est σ -finie et l'application $(t, h) \mapsto u_n(t+h)$ est borélienne de $]0, \delta[\times]0, h_0[$ dans \mathbb{R} (car c'est la composée de $(t, h) \mapsto t+h$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto u_n(s)$ qui est borélienne). On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir que

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} \left(\int_0^\delta |u_n(t+h)| dt \right) dh &= \int_0^\delta \left(\int_0^{h_0} |u_n(t+h)| dh \right) dt \\ &\leq \int_0^\delta \left(\int_0^T |u_n(s)| ds \right) dt \leq \delta \|u_n\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit (4.89) Théorème de Kolmogorov, avec $B = \mathbb{R}$ (Equation.4.89).

3. Montrer que $\int_0^\delta |u_n(t)| dt \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, uniformément par rapport à n .

Corrigé – Soit $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $h_0 \in]0, T[$ t.q. $\eta(h_0) \leq \varepsilon$. Puis, avec $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_1$, on pose $\bar{\delta} = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0 / C\}$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \delta \leq \bar{\delta} \Rightarrow \int_0^\delta |u_n(t)| dt \leq 2\varepsilon.$$

On a donc $\int_0^\delta |u_n(t)| dt \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, uniformément par rapport à n .

Une démonstration analogue donne aussi que $\int_{T-\delta}^T |u_n(t)| dt \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, uniformément par rapport à n (il suffit de raisonner avec $v_n(t) = u_n(T-t)$).

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1 .

[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 4.37 Kolmogorov (2) theorem.4.37, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]

Corrigé – On prolonge u_n par 0 hors de $]0, T[$ (et on note toujours u_n la fonction prolongée). Pour appliquer le théorème 4.37 Kolmogorov (2) theorem.4.37, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0^+, \text{ uniformément par rapport à } n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on remarque que pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt &\leq \int_{-h}^0 |u_n(t+h)| dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt + \int_{T-h}^T |u_n(t)| dt \\ &= \int_0^h |u_n(t)| dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt + \int_{T-h}^T |u_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_1 > 0$ t.q. $\eta(h_1) \leq \varepsilon$. Puis, avec la question précédente, il existe $h_2 > 0$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \leq h \leq h_2 \Rightarrow \int_0^h |u_n(t)| dt \leq \varepsilon \text{ et } \int_{T-h}^T |u_n(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Avec $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, on a donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \leq h \leq h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \leq 3\varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Chapitre 5

Problèmes hyperboliques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations hyperboliques scalaires, et nous allons démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique dû à Kruskov. Nous n'aborderons pas le cas des systèmes, pour lesquels la théorie reste pour le moment très incomplète. Nous commençons par le cas unidimensionnel.

5.1 Le cas unidimensionnel

Les équations de type hyperbolique interviennent principalement en mécanique des fluides (aéronautique, écoulements diphasiques, modélisation de rupture de barrage et d'avalanches). Elles sont souvent obtenues en négligeant les phénomènes de diffusion (parce qu'ils sont faibles à l'échelle considérée) dans les équations de conservation de la mécanique. L'exemple le plus classique d'équation hyperbolique linéaire est l'équation de transport (ou d'advection).

$$u_t - u_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

avec condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (5.2)$$

Dans le cas où la condition initiale u_0 est suffisamment régulière, il est facile de voir que la fonction :

$$u(x, t) = u_0(x + t), \quad (5.3)$$

est solution de (5.1) (Le cas unidimensionnel équation.5.1)-(5.2) (Le cas unidimensionnel équation.5.2). Si u_0 est non régulière (par exemple discontinue), nous verrons qu'il y a encore moyen de montrer que la fonction définie par (5.3) (Le cas unidimensionnel équation.5.3) est solution en un sens que nous qualifierons de "faible".

Si l'équation est non linéaire, i.e.

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

avec par exemple $f(u) = u^2$, et condition initiale (5.2) (Le cas unidimensionnel équation.5.2), on peut encore définir des solutions faibles, mais leur calcul est plus difficile.

Remarque 5.1 Sur le plan de la simulation numérique, les équations hyperboliques sont discrétisées de manière usuelle par la méthode des volumes finis. Les discrétisations par éléments finis mènent souvent à des schémas instables (en particulier, les solutions discrètes ne vérifient pas certaines propriétés physiques souvent souhaitées).

On se donne $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et on considère maintenant l'équation hyperbolique non linéaire :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.5)$$

Commençons par donner la définition de solution classique de ce problème même si, comme nous le verrons après, le problème (5.5) n'a pas, en général, de solution classique.

Notations. Soit Q une partie de \mathbb{R}^p ($p \geq 1$) et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in C^k(\bar{Q})$ si u est la restriction à Q d'une fonction de classe C^k sur \mathbb{R}^p . (Ceci est équivalent à la définition usuelle si $k = 0$. Bien sûr, cette définition s'applique aussi si Q est fermé et donc $\bar{Q} = Q$.) On utilisera aussi la notation $u \in C_c^k(Q)$ qui signifie que $u \in C^k(\bar{Q})$ et qu'il existe $K \subset Q$, K compact t.q. $u = 0$ sur K^c . Cette notation sera utilisée par exemple pour $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ou $Q = \mathbb{R} \times]0, T[$.

Définition 5.2 (Solution classique) On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors u est solution classique de (5.5) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie

$$\begin{cases} (u_t + (f(u))_x)(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Avant de donner un résultat de non existence d'une solution classique (proposition 5.5), nous rappelons le résultat classique d'existence et d'unicité locale de solutions pour une équation différentielle non linéaire (théorème de Cauchy-Lipschitz), avec une fonction a localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} et $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), t), & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Pour tout $T > 0$, le problème (5.6) admet au plus une solution (classique) définie sur $[0, T[$. Il existe $T_{\max} > 0$ (éventuellement égal à $+\infty$) et une fonction x continue sur $[0, T_{\max}[$, de classe C^1 sur $]0, T_{\max}[$, solution (classique) de (5.6). De plus, si $T_{\max} < +\infty$ alors $|x(t)| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T_{\max}$.

Soit u une solution classique de (5.5). On pose alors $a(x, t) = f'(u(x, t))$ (de sorte que $a \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$). Il est clair que la fonction u est alors une solution classique du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + a(x, t)u_x(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.7)$$

Nous donnons maintenant la définition des courbes caractéristiques pour l'équation (5.7), qui permet le lien entre les équations hyperboliques linéaires et les équations différentielles ordinaires.

Définition 5.3 (Courbe caractéristique) a localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} et $x_0 \in \mathbb{R}$, On appelle courbe caractéristique du problème (5.7) issue de $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe définie par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Proposition 5.4 (Solutions classiques et courbes caractéristiques) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et u une solution classique de (5.5). Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0)$. Autrement dit, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction u est constante sur la droite $t \mapsto x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$. (Cette droite est la courbe caractéristique du problème (5.7) issue de $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $a(x, t) = f'(u(x, t))$.)

Démonstration On pose $a(x, t) = f'(u(x, t))$. Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, La fonction a est bien localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc pour le problème (5.7Le cas unidimensionnellequation.5.7). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème (5.7Le cas unidimensionnellequation.5.7) a alors une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{\max}[$, et $|x(t)|$ tend vers l'infini lorsque t tend vers T_{\max} si $T_{\max} < +\infty$. Les trois étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. Comme u est solution classique, on a $u(x(t), t) = u_0(x_0)$, $\forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc u (solution de (5.5Le cas unidimensionnellequation.5.5)) est constante sur la droite caractéristique issue de x_0 . En effet, soit φ définie par $\varphi(t) = u(x(t), t)$; en dérivant φ , on obtient : $\varphi'(t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)x'(t)$. Comme x vérifie (5.8Courbe caractéristiqueequation.5.8) ceci entraîne : $\varphi'(t) = u_t(x(t), t) + f'(u(x(t), t))u_x(x(t), t)$, et donc

$$\varphi'(t) = (u_t + (f(u))_x)(x(t), t) = 0.$$

La fonction φ est donc constante, et on a :

$$u(x(t), t) = \varphi(t) = \varphi(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

2. Les courbes caractéristiques sont des droites, car $u(x(t), t) = u_0(x_0)$, $\forall t \in [0, T_{\max}[$, et donc $x'(t) = f'(u_0(x_0))$. En intégrant, on obtient que le système (5.8Courbe caractéristiqueequation.5.8) décrit la droite d'équation :

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0. \quad (5.9)$$

3. $T_{\max} = +\infty$ et donc $u(x, t) = u_0(x_0) \quad \forall t \in [0, +\infty[$.

En effet, puisque x vérifie (5.9Le cas unidimensionnellequation.5.9), on a donc, si $T_{\max} < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| < +\infty. \text{ On en déduit que } T_{\max} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Proposition 5.5 (Non existence d'une solution classique) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que f' n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que (5.5Le cas unidimensionnellequation.5.5) n'admette pas de solution classique.

Démonstration Comme f' est non constante, il existe v_0, v_1 tel que $f'(v_0) > f'(v_1)$, et on peut construire $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où x_0 et x_1 sont donnés et $x_0 < x_1$, voir figure 5.1Droites caractéristiques, cas non linéairefigure.5.1. Supposons que u soit solution classique avec cette donnée initiale.

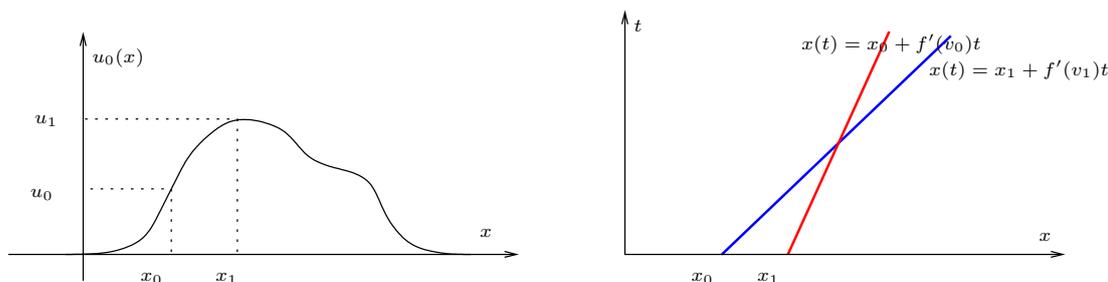


FIGURE 5.1 – Droites caractéristiques, cas non linéaire

Alors, par la proposition 5.4 Solutions classiques et courbes caractéristiques theorem.5.4 :

$$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0 \text{ et } u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1.$$

Soit T tel que $x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$, c'est à dire

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}.$$

On a alors :

$$u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1,$$

ce qui est impossible. On en conclut que (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) n'admet pas de solution classique pour cette donnée initiale. ■

Définition 5.6 (Solution faible) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, On appelle solution faible de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u(x, t)\varphi_t(x, t) + f(u(x, t))\varphi_x(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (5.10)$$

Donnons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

Proposition 5.7 Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

1. Si u est solution classique de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) (et donc $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) alors u est solution faible de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5).
2. Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution faible de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) alors $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (au sens où la classe de fonctions u_0 admet un représentant de classe C^1 et est alors identifiée à ce représentant) et u est solution classique de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5).
3. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$.
 - (a) On suppose que $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, que la première équation de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) est vérifiée pour tout $(x, t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5)) est satisfaite p.p.. Alors u est solution faible de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5).
 - (b) Plus généralement, on suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), que la première équation de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) est vérifiée pour tout $(x, t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5)) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x, t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x, t),$$

$$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$

$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$

Alors u est solution faible de (5.5 Le cas unidimensionnel equation.5.5) si et seulement si

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.11)$$

Cette relation s'appelle "relation de Rankine-Hugoniot".

Démonstration

1. Supposons que u est solution classique de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5), that is to say de :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Multiplions (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5) par φ et intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (f(u))_x(x, t) \varphi(x, t) dt dx = 0.$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par parties donnent alors :

$$- \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt = 0,$$

(car le support de φ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$). On obtient donc bien la relation (5.10Solution faibleequation.5.10), grâce à la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$.

2. Soit u une solution faible de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5), qui vérifie de plus $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$. On a donc suffisamment de régularité pour intégrer par parties dans (5.10Solution faibleequation.5.10).

Commençons par prendre φ à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. On a donc $\varphi(x, 0) = 0$, et une intégration par parties dans (5.10Solution faibleequation.5.10) donne :

$$- \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))_x(x, t) \varphi(x, t) dx dt = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t)) \varphi(x, t) dt dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[).$$

Comme $u_t + (f(u))_x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_t + (f(u))_x = 0$. En effet, on rappelle que si $h \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$ et $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} h(x, t) \varphi(x, t) dt dx = 0$ pour toute fonction φ appartenant à $C_c^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$, alors $h = 0$ p.p.; si de plus h est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, alors $h = 0$ partout sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

On prend alors $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, une intégration par parties dans (5.10Solution faibleequation.5.10) donne

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (u_t(x, t) + (f(u))_x(x, t)) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Mais on vient de montrer que $u_t + (f(u))_x = 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \varphi(x, 0) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

Ceci donne $u_0 = u(\cdot, 0)$ p.p.. Comme u est continue, on a donc u_0 continue (au sens où on identifie u_0 et $u(\cdot, 0)$) et u est solution classique de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5).

3. On montre directement l'item (b) (qui contient l'item (a)). On suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), que la première équation de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5) est vérifiée pour tout $(x, t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5)) est satisfaite p.p. sur \mathbb{R} . Nous allons montrer que u est solution faible de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5) si et seulement si (5.11Le cas unidimensionnelequation.5.11) est vérifiée. Pour cela, on pose

$$X = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt.$$

On a donc $X = X_1 + X_2$, avec

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx \text{ et } X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (f(u))(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt.$$

Calculons X_1 . Comme u n'est de classe C^1 que sur chacun des domaines D_i , on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur D_1 et D_2 ; supposons par exemple $\sigma < 0$, voir figure 5.2Les domaines D_1 et D_2 figure.5.2. (Le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire et le cas $\sigma = 0$ est plutôt plus simple). On a alors $D_1 = \{(x, t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } 0 < t < \frac{x}{\sigma}\}$ et $D_2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \{(x, t); x \in \mathbb{R}_- \text{ et } \frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$.

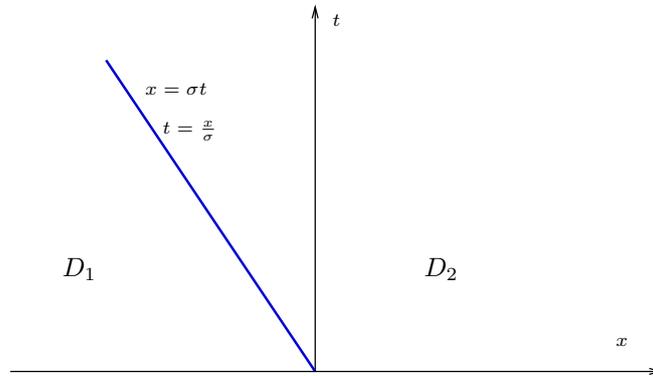


FIGURE 5.2 – Les domaines D_1 et D_2

On a donc :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{x/\sigma} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx.$$

Comme u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_1 = & \int_{\mathbb{R}_-} u_-(x, \frac{x}{\sigma}) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_{\mathbb{R}_-} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx \\ & - \int_{\mathbb{R}_-} u_+(x, \frac{x}{\sigma}) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx \\ & - \int_{\mathbb{R}_+} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx. \quad (5.12) \end{aligned}$$

En regroupant, il vient :

$$X_1 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int \int_{D_1} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx - \int \int_{D_2} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_-} [u](x, \frac{x}{\sigma}) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx.$$

Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = x/\sigma$. On obtient

$$X_1 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int \int_{D_1} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx - \int \int_{D_2} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt dx + \sigma \int_{\mathbb{R}_+} [u](\sigma t, t) \varphi(\sigma t, t) dt.$$

On décompose de même X_2 sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$:

$$X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-\infty}^{\sigma t} f(u)(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt.$$

La fonction u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut là encore intégrer par parties. Comme φ est à support compact sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$X_2 = - \int \int_{D_1} (f(u))_x(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \int \int_{D_2} (f(u))_x(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}_+} [f(u)](\sigma t, t) \varphi(\sigma t, t) dt.$$

Comme $u_t + (f(u))_x = 0$ sur D_1 et D_2 , on a donc :

$$X = X_1 + X_2 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}_+} (\sigma [u](\sigma t, t) - [f(u)](\sigma t, t)) \varphi(\sigma t, t) dt.$$

On en déduit bien que u est solution faible de (5.5) si et seulement si (5.11) est vérifiée. ■

Notons qu'il existe souvent plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons tout d'abord un exemple de non-unicité de la solution faible. Pour cela on va considérer une équation modèle, appelée équation de Burgers, qui s'écrit

$$u_t + (u^2)_x = 0, \tag{5.13}$$

et des données initiales particulières, sous la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec $u_g, u_d \in \mathbb{R}$. Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann.

Nous considérons maintenant l'exemple simple obtenu avec $u_g = -1$ et $u_d = 1$. Le problème considéré est donc le problème suivant, avec $f(u) = u^2$, $u_g = -1$, $u_d = 1$:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (5.14)$$

On cherche tout d'abord une solution faible de la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (5.15)$$

Cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$ dans le plan (x, t) . On remplace $u(x, t)$ par ces valeurs dans (5.10) Solution faible equation.5.10). D'après la proposition 5.7 Le cas unidimensionnel theorem.5.7 on sait que u est solution faible si la condition suivante (condition de Rankine et Hugoniot) est vérifiée :

$$\sigma(u_d - u_g) = (f(u_d) - f(u_g)), \quad (5.16)$$

ce qui avec la condition initiale particulière choisie ici, donne $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$.

Mais on peut trouver d'autres solutions faibles. Si u est solution régulière, on sait que sur les courbes caractéristiques, qui ont pour équation $x(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$, la fonction u est constante. Comme $f'(u) = 2u$, les courbes caractéristiques sont donc des droites de pente -2 si $x_0 < 0$, et de pente 2 si $x_0 > 0$. Construisons ces caractéristiques sur la figure 5.3 Problème de Riemann pour l'équation de Burgers figure.5.3 : Dans la zone du milieu, où l'on

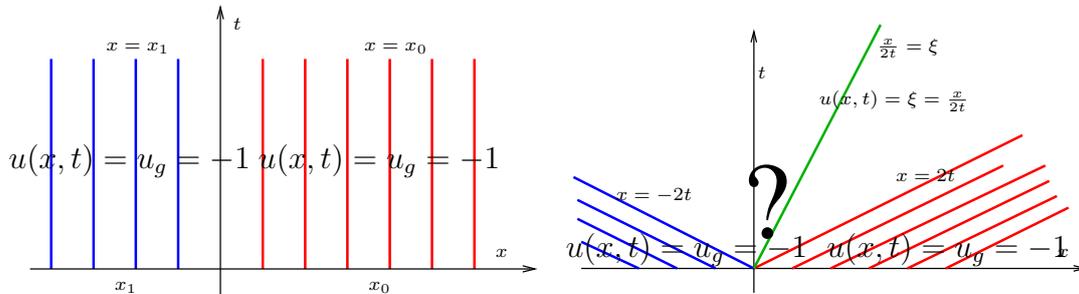


FIGURE 5.3 – Problème de Riemann pour l'équation de Burgers

à représenté un point d'interrogation, on cherche u sous la forme $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ et telle que u soit continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. La fonction u suivante convient :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2t, \\ \frac{x}{2t} & \text{si } -2t < x < 2t, \\ 1 & \text{si } x > 2t. \end{cases} \quad (5.17)$$

Comment choisir la "bonne" solution faible, entre (5.15) Le cas unidimensionnel equation.5.15) et (5.17) Le cas unidimensionnel equation.5.17) ? Comme les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion dans des équations paraboliques, une technique pour choisir la solution est de chercher la limite du problème de diffusion associé qui s'écrit :

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad (5.18)$$

lorsque le terme de diffusion devient négligeable, that is to say lorsque ε tend vers 0. Soit u_ε la solution de (5.18Le cas unidimensionnequation.5.18) avec la condition initiale $u_\varepsilon(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$ (on admet pour l'instant l'existence et l'unicité de u_ε). On peut montrer que u_ε tend vers u (en un sens convenable) lorsque ε tend vers 0, où u est la "solution faible entropique" de (5.18Le cas unidimensionnequation.5.18), définie comme suit.

Définition 5.8 (Solution entropique) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On dit que u est solution faible entropique de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5) si pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe, appelée "entropie", et $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$, appelé "flux d'entropie", on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0) dx \geq 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+). \quad (5.19)$$

Bien sûr, si u est solution faible entropique alors u est solution faible (proposition 5.11Le cas unidimensionneltheorem.5.11).

Remarque 5.9 (Condition initiale) Noter que dans la définition 5.8Solution entropiquetheorem.5.8, on prend une fois de plus $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ de manière à bien prendre en compte la condition initiale ; ceci n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet. Si la condition initiale est prise en compte seulement dans la définition de solution faible (et n'est pas reprise dans la condition d'entropie), le choix de l'espace fonctionnel dans lequel on recherche la solution devient crucial pour ne pas perdre l'unicité de la solution entropique. Un exemple est donné dans l'exercice 5.8Solution non entropiqueexo.5.8. On peut toutefois préciser en quel sens la condition initiale est satisfaite. Si u est solution entropique, alors $u \in C([0, +\infty[, L_{loc}^1(\mathbb{R}))$ et $u(t) \rightarrow u_0$ dans L_{loc}^1 quand $t \rightarrow 0$.

Nous démontrerons plus loin le théorème 5.17Kruskov,1955theorem.5.17 dans le cadre multidimensionnel (mais avec la variable spatiale dans un domaine borné plutôt que dans tout l'espace). Ce théorème affirme que si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors il existe une unique solution entropique de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5) au sens de la définition 5.8Solution entropiquetheorem.5.8. Voyons maintenant les liens entre solution classique, solution faible et solution entropique.

Proposition 5.10 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si u est solution classique de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5) alors u est solution (faible) entropique.

Démonstration Soit u une solution classique de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5). Soit $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ (la convexité de η est inutile ici) et ϕ tel que $\phi' = f'\eta'$ (ϕ est la fonction flux associée à η). Multiplions (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5) par $\eta'(u)$:

$$\eta'(u)u_t + f'(u)u_x\eta'(u) = 0$$

Soit encore, puisque $\phi' = f'\eta'$,

$$(\eta(u))_t + \phi'(u)u_x = 0$$

On a donc finalement :

$$(\eta(u))_t + (\phi(u))_x = 0 \quad (5.20)$$

De plus, comme $u(x, 0) = u_0(x)$, on a aussi : $\eta(u(x, 0)) = \eta(u_0(x))$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on multiplie (5.20Le cas unidimensionnequation.5.20) par φ , on intègre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et on obtient (5.19Solution entropiqueequation.5.19) (avec égalité) en intégrant par parties. Dans le cas d'une solution classique, l'inégalité d'entropie est une égalité. ■

Une solution faible entropique est solution faible :

Proposition 5.11 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si u est solution faible entropique de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5) alors u est solution faible de (5.5Le cas unidimensionnequation.5.5).

Démonstration Il suffit de prendre $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans (5.19) pour se convaincre du résultat. ■

On déduit de la proposition 5.10 et du théorème 5.17 de Kruskov que si on a plusieurs solutions faibles au problème (5.5) et que l'une d'entre elles est régulière, alors cette dernière est forcément la solution entropique. La caractérisation suivante, que l'on admettra, est souvent utilisée en pratique :

Proposition 5.12 (Entropies de Kruskov) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. La fonction u est solution entropique de (5.5) (au sens de la définition 5.8) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$ est vérifiée avec η définie par $\eta(s) = |s - k|$, et ϕ , flux d'entropie associé, défini par :

$$\phi(u) = f(\max(u, k)) - f(\min(u, k)).$$

Notons que la fonction η , dite "entropie de Kruskov", n'est pas de classe C^1 .

Nous examinons maintenant le cas particulier des solutions ayant une ligne de discontinuité, comme dans la dernière partie de la proposition 5.7.

Proposition 5.13 Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$. On suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x, t) \in D_i$ ($i = 1, 2$) et que la condition initiale (de (5.5)) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x, t) \text{ et } u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x, t),$$

$$[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t),$$

$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u_+(\sigma t, t)) - f(u_-(\sigma t, t)).$$

Alors u est solution faible entropique de (5.5) si et seulement si

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.21)$$

et, pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1$ telle que $\phi' = f'\eta'$,

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.22)$$

Démonstration La proposition 5.7 montre que u est solution faible si et seulement si (5.21) est satisfaite. En reprenant la démonstration de la proposition 5.7, on montre que u est solution faible entropique si et seulement si (5.21) et (5.22) sont satisfaites. Ceci fait l'objet de la première question de l'exercice 5.9 Flux strictement convexe et entropie exo.5.9. ■

Dans le cas où la fonction f est strictement convexe, la proposition 5.13 peut être précisée. Ceci est fait dans la proposition 5.14, non démontrée ici.

Proposition 5.14 Sous les hypothèses de la proposition 5.13, on suppose que u est solution faible de (5.5). On suppose de plus que f est strictement convexe, les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. u est solution faible entropique,

2. $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
3. il existe η strictement convexe (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) t.q. (5.22Le cas unidimensionnelequation.5.22) est vérifiée (avec ϕ telle que $\phi' = f'\eta'$).

Remarquons que les solutions d'une équation hyperbolique non linéaire respectent les bornes de la solution initiale. Plus précisément, on a le résultat suivant, qu'on admettra :

Proposition 5.15 Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p.. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors la solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5) vérifie : $A \leq u(x) \leq B$ p.p. dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Cette propriété est essentielle dans les phénomènes de transport, et il est souhaitable qu'elle soit préservée pour la solution approchée donnée par un schéma numérique.

Remarque 5.16 Que faire si le domaine spatial est différent de \mathbb{R} , par exemple si le problème (5.5Le cas unidimensionnelequation.5) est posé pour $x \in I$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . Si f' ne change pas de signe, il est assez facile de donner une bonne définition de solution entropique et de montrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique. Dans le cas où f' change de signe (et ce cas est très intéressant pour de nombreux problèmes), le problème est beaucoup plus difficile. Le premier résultat sur la question est celui de Bardos-Leroux-Nedelec (1979). Dans la thèse de Otto (1996), il y a une très jolie formulation pour les conditions aux limites. Un intérêt considérable de cette formulation est qu'elle est très pratique pour montrer la convergence des schémas numériques. Dans le cas multidimensionnel de la section suivante, on s'intéressera à un problème similaire à (5.5Le cas unidimensionnelequation.5.5) posé dans un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$) mais sans aborder vraiment ce délicat problème des conditions aux limites (car dans le théorème 5.17Kruskov,1955theorem.5.17 on considère un champ de vecteurs \mathbf{b} nul sur le bord du domaine considéré).

5.2 Cas multidimensionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, et soit $\mathbf{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$. On étudie maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}f(u)) &= 0 \text{ sur } \Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \text{ sur } \Omega. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Plus précisément, nous allons démontrer, avec des hypothèses convenables sur les données, le théorème d'existence et d'unicité des solutions entropiques de ce problème.

Théorème 5.17 (Kruskov,1955) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N > 1$) à frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$ et $\mathbf{b} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])^N$ t.q. $\mathbf{b} = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, T]$ et $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$ dans $\Omega \times [0, T]$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, il existe une unique solution entropique de (5.23Cas multidimensionnelequation.5.23), that is to say solution de

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\Omega \times]0, T[), \\ \int_0^T \int_\Omega (\eta(u)\varphi_t + \Phi(u) \mathbf{b} \cdot \nabla\varphi) \, dx \, dt + \int_\Omega \eta(u_0(x))\varphi(x, 0) \, dx &\geq 0, \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R}_+), \forall \eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ convexe et } \Phi \text{ tel que } \Phi' &= \eta' f'. \end{aligned} \quad (5.24)$$

De plus, si $A \leq 0$ et $B \geq 0$ sont t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p. sur Ω , on a alors $A \leq u \leq B$ p.p. sur $\Omega \times]0, T[$.

Démonstration

Étape 1 Construction d'une solution approchée. Soit $u^{(n)}$ solution de

$$\begin{aligned} u^{(n)} \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), \\ - \int_0^T \int_{\Omega} u^{(n)} \varphi_t \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b}f(u^{(n)}) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \frac{1}{n} \int \int \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, +\infty[). \end{aligned} \quad (5.25)$$

On connaît l'existence et l'unicité de $u^{(n)}$ par le chapitre 4 Problèmes paraboliques chapter.4. On a vu aussi au chapitre 4 Problèmes paraboliques chapter.4 que cette formulation est équivalente au problème suivant :

$$\begin{aligned} u^{(n)} \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t^{(n)} \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), u^{(n)}(0) = u_0, \\ \int_0^T \langle u_t^{(n)}, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b}f(u^{(n)}) \cdot \nabla v \, dx \, dt + \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^{(n)} \cdot \nabla v \, dx \, dt = 0, \\ \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (5.26)$$

On va se servir fortement de cette équivalence.

Étape 2 Estimations sur la solution approchée.

Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ il existe A et $B \in \mathbb{R}$, $A \leq 0 \leq B$, tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. (A et B sont donc indépendants de n). On en déduit par les résultats du chapitre 4 Problèmes paraboliques chapter.4 que pour tout $t \in [0, T]$, $A \leq u^{(n)} \leq B$ p.p.. La suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$.

On prend maintenant $v = u^{(n)}$ dans (5.26) Cas multidimensionnelle equation.5.26. Par des calculs vu au chapitre 4 Problèmes paraboliques chapter.4, on a :

$$\frac{1}{2} \left(\|u^{(n)}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^{(n)}|^2 \, dx \, dt = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^{(n)}|^2 \, dx \, dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty \quad (5.27)$$

ce qui donne une estimation $L^2(\Omega \times]0, T[)^d$ sur $(\frac{1}{\sqrt{n}} \nabla u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette estimation ne donne rien pour la compacité, mais elle est utile pour passer à la limite (quand $n \rightarrow +\infty$).

Grâce à la première estimation (l'estimation de u_n dans $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$), après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $u^{(n)} \rightarrow u$ \star -faiblement dans $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$.

Si $f(u) = u$, on montre assez facilement que u est solution faible de (5.23) Cas multidimensionnelle equation.5.23 (that is to say solution de 5.24 Kruskov, 1955 equation.5.24 avec seulement $\eta(s) = s$ mais avec tout φ dans $C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R})$ et avec $=$ au lieu de \geq). Puis on peut montrer (un peu moins facilement) que u est solution de (5.24) Kruskov, 1955 equation.5.24 et cela termine la partie "existence" du théorème 5.17 Kruskov, 1955 theorem.5.17.

Si la fonction f' est non constante, la situation est beaucoup plus difficile, même pour montrer seulement que u est solution faible de (5.23) Cas multidimensionnelle equation.5.23, car la convergence de $u^{(n)}$ vers u n'est que faible et donc on ne sait pas si $f(u^{(n)})$ tend vers $f(u)$ (et, plus généralement, on ne sait pas si $\eta(u^{(n)})$ tend vers $\eta(u)$ et $\phi(u^{(n)})$ tend vers $\phi(u)$). Pour résoudre cette difficulté, deux méthodes ont été développées.

Une première méthode, due à Kruskov, suppose, dans un premier temps, que la donnée initiale u_0 appartient à l'espace $BV(\bar{\Omega})$. Par définition,

$$|u_0|_{BV(\bar{\Omega})} = \sup \left\{ \int_{\Omega} u_0 \operatorname{div} \varphi \, dx, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

On démontre alors que la suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\bar{\Omega} \times [0, T])$. L'idée, pour montrer cette borne sur $u^{(n)}$ est de dériver la première équation de (5.23Cas multidimensionnellequation.5.23) par rapport à x_i et de multiplier par $\operatorname{sign}(\partial_i u)$. Grâce à cette estimation sur $u^{(n)}$, on peut appliquer ensuite le théorème de Helly donné ci après.

Théorème 5.18 (Helly) *Soit $d \geq 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(Q)$ et bornée dans $BV(Q)$ où Q est un compact de \mathbb{R}^d alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact dans $L^1(Q)$.*

On applique donc le théorème de Helly avec $Q = \bar{\Omega} \times [0, T]$ (et $d = N + 1$). Puisque $u^{(n)} \rightarrow u$ dans $L^1(Q)$, à une sous suite près, on a $u^{(n)} \rightarrow u$ dans $L^p(Q)$ pour tout $p < +\infty$ et on peut aussi supposer (toujours après extraction éventuelle d'une sous suite) que $u^{(n)} \rightarrow u$ p.p.. On peut alors montrer que u est solution de (5.24Kruskov,1955equation.5.24) (ce qu'on fera à l'étape 3 plus loin), ce qui donne l'existence d'une solution à (5.24Kruskov,1955equation.5.24) si $u_0 \in BV(\bar{\Omega})$. Si u_0 n'est que dans $L^\infty(\Omega)$ (et c'est probablement ici l'apport majeur de Kruskov), on peut approcher u_0 par une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega) \cap BV(\bar{\Omega})$ et montrer que la suite des solutions entropiques associées converge (en un sens convenable, après extraction d'une sous suite) vers une solution entropique associée à u_0 . On peut également montrer l'unicité de la solution de (5.24Kruskov,1955equation.5.24) (étape 4 ci après). L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne semble pas marcher pour montrer la convergence des schémas numériques car même si la condition initiale est supposée être dans $BV(\bar{\Omega})$, la solution approchée obtenue par un schéma numérique n'est pas bornée dans $BV(\bar{\Omega} \times [0, T])$ indépendamment des paramètres de discrétisation (sauf dans le cas des maillages cartésiens).

C'est pour cela qu'on peut lui préférer la deuxième méthode, qui ne passe pas par l'estimation BV . On prend uniquement u_0 dans $L^\infty(\Omega)$, et on ne cherche pas à montrer directement une compacité forte de la suite $u^{(n)}$ dans $L^1(\Omega \times]0, T[)$. Grâce à l'estimation de $u^{(n)}$ dans $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$, on montre que (après extraction d'une sous suite) $u^{(n)} \rightarrow \tilde{u}$, en un sens convenable, où \tilde{u} dépend d'une variable supplémentaire. (Il s'agit donc d'un théorème de compacité un peu inhabituel donnant une convergence que nous appelons "convergence non linéaire faible- \star "). Puis, on montre que \tilde{u} est une solution du problème en un sens plus général que (5.24Kruskov,1955equation.5.24), que nous appelons "sens processus". Cette preuve est très voisine de celle de l'étape 3 ci après. On démontre ensuite l'unicité de la solution au sens processus et que la solution processus est solution entropique (that is to say solution de (5.24Kruskov,1955equation.5.24)). Cette preuve d'unicité est très voisine de celle donnée dans l'étape 4 ci après. Ceci termine la démonstration de l'existence d'une solution à (5.24Kruskov,1955equation.5.24) (directement avec u_0 dans $L^\infty(\Omega)$). (L'unicité est toujours donnée par l'étape 4.) Un sous produit de cette démonstration est la convergence (forte) de $u^{(n)}$ vers u dans tout les espaces $L^p(\Omega \times]0, T[)$, $p < +\infty$, y compris si f est linéaire (ou est linéaire sur des intervalles de \mathbb{R}). L'idée essentielle a donc été de remplacer le théorème de compacité (forte) de Helly par un théorème de compacité plus faible combiné avec un résultat d'unicité de la solution "au sens processus" de (5.23Cas multidimensionnellequation.5.23).

Étape 3. On reprend ici la méthode 1, et on va effectuer le passage à la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, en supposant que $u_0 \in BV$ et donc que $u^{(n)} \rightarrow u$ p.p. (pour une sous suite). On admet donc la partie "estimation BV de $u^{(n)}$ ".

1. Montrons que u est solution faible. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, +\infty[)$, on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u^{(n)} \varphi_t + \mathbf{b}f(u^{(n)}) \cdot \nabla \varphi) \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx - \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = 0$$

On remarque tout d'abord que le dernier terme du membre de gauche tend vers 0, grâce à l'estimation (5.27) Cas multidimensionnelle equation.5.27) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} |\nabla u^{(n)}| \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)}$$

et $\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} |\nabla u^{(n)}| \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leq (1/\sqrt{2}) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ par (5.27) Cas multidimensionnelle equation.5.27) et donc $\frac{1}{n} \int \int \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Les autres termes convergent par convergence dominée, et donc en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u \varphi_t + \mathbf{b} f(u) \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (5.28)$$

2. Montrons que u est solution entropique. Comme $u^{(n)}$ est solution faible de

$$u_t^{(n)} + \operatorname{div}(\mathbf{b} f(u^{(n)})) - \frac{1}{n} \Delta u^{(n)} = 0, \quad (5.29)$$

on peut montrer (on l'admettra) que $u^{(n)} \in C^2(\Omega \times]0, T[)$ (c'est ce que l'on appelle l'effet régularisant pour une équation parabolique). La fonction $u^{(n)}$ est donc solution classique de (5.29) Cas multidimensionnelle equation.5.29). On peut alors multiplier cette équation par $\eta'(u^{(n)})$ avec $\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe. On obtient, sur $\Omega \times]0, T[$,

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \mathbf{b} f'(u^{(n)}) \eta'(u^{(n)}) \cdot \nabla u^{(n)} - \frac{1}{n} \eta''(u^{(n)}) \Delta u^{(n)} = 0.$$

On en déduit :

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \mathbf{b} \cdot \nabla (\Phi(u^{(n)})) - \frac{1}{n} \operatorname{div}(\eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)}) + \frac{1}{n} \eta''(u^{(n)}) |\nabla u^{(n)}|^2 = 0.$$

Mais $\frac{1}{n} \eta''(u^{(n)}) |\nabla u^{(n)}|^2 \geq 0$, on a donc

$$(\eta(u^{(n)}))_t + \mathbf{b} \cdot \nabla (\Phi(u^{(n)})) - \frac{1}{n} \operatorname{div}(\eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)}) \leq 0.$$

En multipliant cette équation par φ , avec $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$, on obtient, toujours sur $\Omega \times]0, T[$,

$$\varphi (\eta(u^{(n)}))_t + \varphi \mathbf{b} \cdot \nabla (\Phi(u^{(n)})) - \frac{1}{n} \varphi \operatorname{div}(\eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)}) \leq 0$$

On intègre sur $[\varepsilon, T[\times \Omega$ avec $\varepsilon > 0$ et, après intégration par parties, on obtient :

$$- \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} (\eta(u^{(n)})) \varphi_t - \int_{\Omega} \eta(u^{(n)}(\varepsilon)) \varphi(x, \varepsilon) dx - \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} (\mathbf{b} \Phi(u^{(n)}) \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{n} \eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi) dx dt \leq 0.$$

Mais on a, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u^{(n)}(\varepsilon) \rightarrow u^{(n)}(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$ et $\eta(u^{(n)}(\varepsilon)) \rightarrow \eta(u_0)$ dans $L^2(\Omega)$ et donc

$$- \int_0^T \int_{\Omega} (\eta(u^{(n)})) \varphi_t - \int_{\Omega} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{b} \Phi(u^{(n)}) \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{n} \eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi) dx dt \leq 0.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a $\eta(u^{(n)}) \rightarrow \eta(u)$ et $\Phi(u^{(n)}) \rightarrow \Phi(u)$ dans $L^2(\Omega \times]0, T[)$ et, avec $C_{\eta, A, B} = \max\{|\eta'(s)|, A \leq s \leq B\}$,

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u^{(n)}) \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \varphi \, dx dt \right| \leq C_{\eta, A, B} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} |\nabla u^{(n)}| \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On obtient ainsi, finalement,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\eta(u)) \varphi_t + \mathbf{b} \cdot \Phi(u^{(n)}) \nabla \varphi \, dx dt + \int_{\Omega} \eta(u_0) \varphi(x, 0) \, dx \geq 0$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$, ce qui termine la preuve de l'existence.

Etape 4. Unicité

Soit u une solution de (5.24Kruskov,1955equation.5.24). On montre tout d'abord que l'on peut prendre $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$ dans (5.24Kruskov,1955equation.5.24). C'est ici que l'hypothèse $\mathbf{b} = 0$ sur le bord de Ω est utile.

On construit une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ et telle que $\varphi_n = 1$ sur $K_n = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $|\nabla \varphi_n| \leq C_\Omega n$, où C_Ω ne dépend que de Ω (la régularité lipschitzienne de Ω est importante ici). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$, On prend alors $\varphi(x, t) \varphi_n(x)$ comme fonction test dans (5.24Kruskov,1955equation.5.24), on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\varphi_n \eta(u) \varphi_t + \varphi_n \Phi(u) \mathbf{b} \cdot \nabla \varphi) \, dx dt + \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi_n(x) \varphi(x, 0) \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b} \Phi(u) \varphi \cdot \nabla \varphi_n \, dx dt \geq 0.$$

Les premiers termes convergent par convergence dominée. Appelons R_n le dernier terme. On va montrer sa convergence assez facilement grâce au fait qu'on a supposé \mathbf{b} nul sur le bord.

$$R_n = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b} \Phi(u) \varphi \cdot \nabla \varphi_n \, dx dt = \int_0^T \int_{C_n} \mathbf{b} \Phi(u) \varphi \cdot \nabla \varphi_n,$$

où $C_n = \Omega \setminus K_n$. On a donc

$$|R_n| \leq T \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(C_n)} C_{u, \phi} \|\varphi\|_\infty C_\Omega n \text{mes}(C_n),$$

où $C_{u, \phi} = \max\{|\phi(s)|, s \in [-\gamma, \gamma]\}$, avec $\gamma = \|u\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T[)}$. Comme $\mathbf{b} = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, T[$ (et \mathbf{b} continue), on a $\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(C_n)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Enfin, la suite $(n \text{mes}(C_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ et on obtient donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} \eta(u) \varphi_t + \mathbf{b} \Phi(u) \cdot \nabla \varphi \, dx dt + \int_{\Omega} \eta(u_0) \varphi(x, 0) \, dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+),$$

pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, η convexe.

Par un procédé de régularisation, il est alors assez facile de montrer que l'hypothèse de régularité sur η (that is to say η de classe C^2) peut être remplacée par l'hypothèse plus faible " η localement lipschitzienne", ce qui a l'intérêt de pouvoir utiliser les entropies de Kruskov.

On peut maintenant montrer l'unicité de la solution de (5.24Kruskov,1955equation.5.24). Soient u et v deux solutions de (5.24Kruskov,1955equation.5.24). On va utiliser (5.24Kruskov,1955equation.5.24) en prenant pour η une entropie de Kruskov et des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+)$ (on vient de montrer que cela est possible). On reprend ici une idée de Kruskov, dite de dédoublement de variables. Elle consiste tout d'abord à choisir, dans (5.24Kruskov,1955equation.5.24), $k = v(y, s)$ et à prendre $\varphi(x, t) = \psi(t) \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(t - s)$ avec

$\psi \in C_c^\infty([0, T[, \mathbb{R}_+)$, $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$ et $\bar{\rho}_n(t) = n\bar{\rho}(nt)$, où ρ et $\bar{\rho}$ sont des noyaux régularisants, et à intégrer par rapport à y et s . La fonction ρ est à valeurs positives, est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^N , a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur \mathbb{R}^N vaut 1. De même, la fonction $\bar{\rho}$ est à valeurs positives, est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur \mathbb{R} vaut 1. De plus, on choisit $\bar{\rho}$ de manière à ce que son support soit dans \mathbb{R}_- . Avec ce choix de fonction test (et n assez grand pour que la fonction test soit admissible dans (5.24Kruskov,1955equation.5.24)) écrit avec des éléments de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R})$, on obtient :

$$A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} \geq 0, \quad (5.30)$$

avec

$$A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(y, s)| \psi'(t) \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(t - s) dx dt dy ds,$$

$$A_{2,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(y, s)| \psi(t) \rho_n(x - y) \bar{\rho}'_n(t - s) dx dt dy ds,$$

$$A_{3,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(u(x, t)) - f(v(y, s))) (\text{sign}(u(x, t) - v(y, s)) \psi(t) \mathbf{b} \cdot \nabla \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(t - s) dx dt dy ds,$$

$$A_{4,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega |u_0(x) - v(y, s)| \psi(0) \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(-s) dx dy ds.$$

On passe maintenant à limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (5.30Cas multidimensionnelequation.5.30). Il n'est pas difficile de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(x, t)| \psi'(t) dx dt.$$

On montre ensuite que $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. Pour cela, on considère la formulation entropique pour v , écrite avec y et s comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u(x, t)$ et $\varphi(y, s) = \psi(t) \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(t - s)$. Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |v(y, s) - u(x, t)| \psi(t) \rho_n(x - y) \bar{\rho}'_n(t - s) dy ds dx dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(v(y, s)) - f(u(x, t))) (\text{sign}(v(y, s) - u(x, t)) \psi(t) \mathbf{b} \cdot \nabla \rho_n(x - y) \bar{\rho}_n(t - s) dy ds dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. On notera que le terme associé à la condition initiale est nul car $\bar{\rho}_n(t) = 0$ si $t \geq 0$.

Il suffit maintenant de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{4,n} = 0$ pour conclure en passant à limite dans (5.30Cas multidimensionnelequation.5.30) que

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x, t) - v(x, t)| \psi'(t) dx dt \geq 0. \quad (5.31)$$

Pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{4,n} = 0$, on reprend la formulation entropique pour v écrite avec y et s comme variables. On choisit l'entropie de Kruskov associée à $k = u_0(x)$ et $\varphi(y, s) = \psi(0) \rho_n(x - y) \int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau) d\tau$ (avec n assez grand pour cette fonction test φ soit admissible). Enfin, on intègre par rapport à $x \in \Omega$. On obtient

$$\begin{aligned} -A_{4,n} - \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y, s)) - f(u_0(x))) (\text{sign}(v(y, s) - u_0(x)) \psi(0) \mathbf{b} \cdot \nabla \rho_n(x - y) \left(\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau) d\tau \right) dy ds dx \\ + \int_\Omega \int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)| \psi(0) \rho_n(x - y) dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$0 \leq A_{4,n} \leq A_{5,n} + A_{6,n},$$

avec

$$A_{5,n} = - \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega} (f(v(y, s)) - f(u_0(x))) (\text{sign}(v(y, s) - u_0(x)) \psi(0) \mathbf{b} \cdot \nabla \rho_n(x - y)) \left(\int_s^{\infty} \bar{\rho}_n(-\tau) d\tau \right) dy ds dx,$$

$$A_{6,n} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |u_0(y) - u_0(x)| \psi(0) \rho_n(x - y) dx dy.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{5,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{6,n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{4,n} = 0$ et, finalement, on obtient (5.31 Cas multidimensionnel equation.5.31).

On peut maintenant conclure. Soit $0 < \varepsilon < T$. On peut choisir $\psi \in C_c^{\infty}([0, T[, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\psi' < 0$ sur $]0, T - \varepsilon[$. L'inégalité (5.31 Cas multidimensionnel equation.5.31) donne alors $u = v$ p.p. sur $\Omega \times]0, T - \varepsilon[$. Comme ε est arbitrairement petit, on en conclut que $u = v$ p.p. sur $\Omega \times]0, T[$, ce qui termine la preuve de l'unicité. ■

Remarque 5.19 (Pour le cas où Ω est non borné) Dans la partie "unicité" (Etape 4) de la démonstration précédente, il aurait été possible de prendre une fonction ψ dépendant aussi de x . On aurait alors obtenu

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u - v| \psi_t dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{b}(f(u) - f(v)) \text{sign}(u - v) \cdot \nabla \psi dx dt \geq 0 \quad \forall \psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, T[, \mathbb{R}_+). \quad (5.32)$$

Ceci est intéressant pour montrer alors l'unicité dans le cas où l'ouvert Ω est non borné (par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$) en profitant de la propriété de "propagation à vitesse finie" pour les problèmes hyperboliques. Plus précisément, on prend dans (5.32 Pour le cas où Ω est non borné equation.5.32) $\psi(x, t) = r(t) \varphi_a(|x| + \omega t)$, avec $\omega = L_f \|\mathbf{b}\|_{\infty}$, où L_f est un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[-\gamma, \gamma]$ avec $\gamma = \max\{\|u\|_{\infty}, \|v\|_{\infty}\}$, $r(t) = (1/T)(T - t)^+$ et $\varphi_a \in C_c^{\infty}([0, \infty[, \mathbb{R}_+)$, $\varphi_a = 1$ sur $[0, a]$ pour $a > 0$ donné et φ_a décroissante (on peut remarquer qu'un argument simple de régularisation autorise de prendre une telle fonction ψ dans (5.32 Pour le cas où Ω est non borné equation.5.32)). On obtient alors

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| \varphi_a(|x| + \omega t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| r(t) \varphi'_a(|x| + \omega t) \omega dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{b}(f(u) - f(v)) \text{sign}(u - v) r(t) \varphi'_a(|x| + \omega t) \frac{x}{|x|} dx dt \geq 0.$$

Mais,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{b}(f(u) - f(v)) \text{sign}(u - v) r(t) \varphi'_a(|x| + \omega t) \frac{x}{|x|} dx dt \leq - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\mathbf{b}\| L_f |u - v| r(t) \varphi'_a(|x| + \omega t) dx dt$$

$$\leq - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| r(t) \varphi'_a(|x| + \omega t) \omega dx dt,$$

car $\omega = L_f \|\mathbf{b}\|$. On a donc

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| \varphi_a(|x| + \omega t) dx dt \geq 0.$$

On en déduit, avec $B_{a,t} = \{x \text{ t.q. } |x| + \omega t \leq a\}$ que $\int_0^T (\int_{B_{a,t}} |u - v| dx) dt = 0$. On fait tendre maintenant a vers $+\infty$. On obtient, par convergence monotone, $\int_0^T \int_{\Omega} |u - v| dx dt = 0$ et donc $u = v$ p.p. sur $\Omega \times]0, T[$.

Remarque 5.20 (hypothèses sur b)

1. On a besoin d'une régularité C^1 de b pour obtenir l'estimation BV sur les solutions approchées. Si on n'utilise pas l'estimation BV, on a de toutes façons besoin de la régularité C^1 de b pour l'unicité. Actuellement, le problème $b \notin C^1$ est un problème ouvert.
2. On a supposé $\operatorname{div} b = 0$. On pourrait remplacer cette hypothèse par $\operatorname{div} b \in L^\infty$ à condition de supposer que f soit lipschitzienne. On a aussi supposé que $b = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour ne pas traiter le cas, difficile, des conditions aux limites) mais on pourrait remplacer cette condition par $b \cdot n = 0$ sans grande difficulté supplémentaire. Le problème des conditions aux limites interviendrait si $b \cdot n \neq 0$.

5.3 Exercices

Exercice 5.1 (Construction d'une solution faible) *Solution 5.1* Construction d'une solution faible cor.5.1 page 223 Construction d'une solution faible cor.5.1

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Construire une solution faible de (5.33 Exercise equation.5.33) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 5.2 (Non unicité des solutions faibles)

On considère l'équation

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.34)$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$ alors u est solution faible de (5.34 Exercise equation.5.34). Vérifier que u n'est pas solution entropique de (5.34 Exercise equation.5.34).

2. Montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < 2u_g t \\ u(t, x) = \frac{x}{2t} & \text{si } 2u_g t \leq x \leq 2u_d t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > 2u_d t \end{cases} \quad (5.35)$$

alors u est solution faible entropique de (5.34 Exercise equation.5.34).

Exercice 5.3 (Construction d'une solution entropique)

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.36)$$

Construire une solution entropique de (5.36 Exercise equation.5.36) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 5.4 (Problème de Riemann (1))

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(s) = s^4$. Soit u_d et u_g des réels. Calculer la solution entropique du problème de Riemann (5.14Le cas unidimensionnequation.5.14) avec données u_d et u_g en fonction de u_d et u_g .

Exercice 5.5 (Problème de Riemann (2))

- Déterminer la solution entropique de (5.14Le cas unidimensionnequation.5.14) dans le cas où f est strictement concave.
- On se place dans le cas où f est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec
 - $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1) = 0$
 - $\exists a \in]0, 1[$, tel que f est strictement convexe sur $]0, a[$, f est strictement concave sur $]a, 1[$.

On supposera de plus $u_g = 1$, $u_d = 0$.

- (a) Soit b l'unique élément $b \in]a, 1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$; montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = 1 & \text{si } x \leq 0 \\ u(t, x) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t, b < \xi < 1 \\ u(t, x) = 0 & \text{si } x > f'(b)t \end{cases}$$

est la solution faible entropique de (5.14Le cas unidimensionnequation.5.14) (sous les hypothèses précédentes).

- (b) Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g, u_d \in [0, 1]$. [Compiqué. On distinguera plusieurs cas.]

Exercice 5.6 (Solution entropique (1))

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $t > 0$ on a bien $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$.

Exercice 5.7 (Solution entropique (2))

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 5.8 (Solution non entropique)

On s'intéresse à l'équation de Burgers.

$$u_t(t, x) + (u^2)_x(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.37)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.38)$$

1. (Question de cours...) Donner le sens de “ u solution faible de (5.37Exercicesequation.5.37)-(5.38Exercicesequation.5.37)” et “ u solution entropique de (5.37Exercicesequation.5.37)-(5.38Exercicesequation.5.37)”.

On définit u de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} par :

$$u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x < -\sqrt{t}, \quad (5.39)$$

$$u(t, x) = \frac{x}{2t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\sqrt{t} < x < \sqrt{t}, \quad (5.40)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > \sqrt{t}. \quad (5.41)$$

2. Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. (On rappelle qu'une fonction v de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ si $v \mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = [0, \infty[\times \mathbb{R}$, K compact.)
3. (Solution faible ?) Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (u(t, x)\varphi_t(t, x) + u^2(t, x)\varphi_x(t, x)) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \quad (5.42)$$

La fonction u est-elle solution faible de (5.37Exercicesequation.5.37)-(5.38Exercicesequation.5.37) ?

4. (Solution entropique ?) Soit η une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 . On définit ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $\phi(s) = \int_0^s \eta'(\xi) f'(\xi) d\xi$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)(t, x)\varphi_t(t, x) + \phi(u)(t, x)\varphi_x(t, x)) dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+). \quad (5.43)$$

[On pourra commencer par étudier, grâce à la convexité de η , le signe de $\phi(s) - s\eta(s)$.]

La fonction u est-elle solution entropique de (5.37Exercicesequation.5.37)-(5.38Exercicesequation.5.37) ?

N.B. : Dans tout l'exercice, bien distinguer \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_+ (en particulier distinguer $C^1_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$). Bien justifier dans les 3ème et 4ème questions que les quantités sous le signe \int sont intégrables. La 4ème question montre que $\eta(u)_t + \phi(u)_x \leq 0$ au sens des dérivées par transposition dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 5.9 (Flux strictement convexe et entropie) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici à la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.44)$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$. On suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$) et que u est solution faible de (5.44Flux strictement convexe et entropieequation.5.44). En particulier, on a donc (voir la proposition 5.7Le cas unidimensionneltheorem.5.7)

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.45)$$

1. Montrer que u est solution entropique de (5.44 Flux strictement convexe et entropie equation.5.44) si et seulement si

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \quad (5.46)$$

pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$.

2. Si f est strictement convexe et u est solution entropique de (5.44 Flux strictement convexe et entropie equation.5.44), montrer que $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. [On pourra choisir $\eta = f$ dans (5.46 Flux strictement convexe et entropie equation.5.46).]

On rappelle que $u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x, t)$, $u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x, t)$, $[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t)$ et $[g(u)](\sigma t, t) = g(u_+(\sigma t, t)) - g(u_-(\sigma t, t))$ pour $g = f, \eta$ ou ϕ .

Exercice 5.10 (Effet "Landau") Solution 5.2 Effet "Landau" cor.5.2 page 223 Effet "Landau" cor.5.2

Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) &= 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, y, 0) &= f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (5.47 Exercise equation.5.47).

Dans la suite, on note u cette solution faible.

On remarquera que u est continue de \mathbb{R}_+ dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y, r) = \frac{1}{2r} \int_{y-r}^{y+r} f(z) dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(y, r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = 4\delta^2 m.$$

[On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt) dy = 2\delta F(x - bt, \delta t)$.]

4. Montrer que $u(\cdot, \cdot, t) \rightarrow m$ \star -faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \rightarrow +\infty$.

5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.47 Exercise equation.5.47) $y \frac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y) \frac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points où a' s'annule est de mesure nulle.)

Exercice 5.11 (Principe du maximum et positivité)

Soit v une fonction lipschitzienne et de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial v u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \leq u_0(x) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (5.48 Exercise equation.5.48), montrer que $A \leq u(x, t) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer (en donnant un exemple) que cette propriété peut être fautive si u est solution de (5.49 Exercise equation.5.49).
2. On suppose que $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (5.49 Exercise equation.5.49), montrer que $u(x, t) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

5.4 Corrigés d'exercices

Corrigé 5.1 (Construction d'une solution faible)

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.50)$$

Construire une solution faible de (5.50 Corrigés d'exercise equation.5.50) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Corrigé – Pour $0 < t < 1/2$, la solution est continue et on peut la trouver en construisant les courbes caractéristiques. Puis, en $t = 1/2$, certaines courbes caractéristiques se rencontrent (au point $x = 1$), une discontinuité apparaît et se propage à une vitesse conforme à la relation de Rankine Hugoniot. Ceci nous permet de construire la solution.

On pose :

$$D_1 = \{(x, t), 0 < t \leq \frac{1}{2}, x < 2t\} \cup \{(x, t), t > \frac{1}{2}, x < t + \frac{1}{2}\},$$

$$D_2 = \{(x, t), 0 < t < \frac{1}{2}, 2t < x < 1\},$$

$$D_3 = \{(x, t), 0 < t \leq \frac{1}{2}, 1 < x\} \cup \{(x, t), t > \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} < x\},$$

on prend $u(x, t) = 1$ si $(x, t) \in D_1$, $u(x, t) = 0$ si $(x, t) \in D_3$ et $u(x, t) = \frac{1-x}{1-2t}$ si $(x, t) \in D_2$. La fonction u est bien solution faible de (5.50 Corrigés d'exercise equation.5.50).

Corrigé 5.2 (Effet "Landau")

Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) &= 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, y, 0) &= f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (5.51 Corrigés d'exercise equation.5.51).

Corrigé – La première équation de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51 peut s'écrire $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial y u}{\partial x}(x, y, t) = 0$. La notion de solution faible pour cette équation est donc parfaitement définie.

Étape 1, construction d'une solution

Le problème (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51 correspond à une équation de transport dans la direction x , la vitesse du transport dépendant de la variable y (que l'on peut voir ici comme un paramètre). Le début du chapitre 5 Problèmes hyperboliques chapter.5 nous suggère alors la forme de la solution faible. Pour $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$u(x, y, t) = f(x - yt).$$

La fonction u ainsi définie appartient bien à $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On montre maintenant que u est solution faible de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51.

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On va montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x, y, 0) \, dx \, dy. \quad (5.52)$$

Ceci montrera bien que u est solution faible de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51. On considère de terme de gauche de (5.52) corrigés d'exercice equation.5.52 en remplaçant $u(x, y, t)$ par $f(x - yt)$ et on utilise dans l'intégrale par rapport à x le changement de variable $x - yt = z$ (pour y et t fixés, on profite aussi ici du théorème de Fubini). On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - yt) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) (\varphi_t(z + yt, y, t) + y \varphi_x(z + yt, y, t)) \, dz \, dy \, dt. \end{aligned}$$

(Noter que φ_x désigne toujours la dérivée de φ par rapport à sa première variable et φ_t désigne toujours la dérivée de φ par rapport à sa troisième variable.)

Pour $z, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $\psi(z, y, t) = \varphi(z + yt, y, t)$, de sorte que $\psi_t(z, y, t) = y \varphi_x(z + yt, y, t) + \varphi_t(z + yt, y, t)$. On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - yt) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \psi_t(z, y, t) \, dz \, dy \, dt.$$

On peut maintenant intégrer le terme de droite d'abord par rapport à t (grâce au théorème de Fubini), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - yt) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \psi(z, y, 0) \, dz \, dy.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - yt) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \varphi(z, y, 0) \, dz \, dy.$$

On a bien montré (5.52) corrigés d'exercice equation.5.52. La fonction u est donc bien une solution faible de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51.

Unicité de la solution faible de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51

Grâce à la linéarité de la première équation de (5.51) corrigés d'exercice equation.5.51, il suffit de montrer que si u est solution de (5.52) corrigés d'exercice equation.5.52 (pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$) avec $f = 0$ p.p., alors $u = 0$ p.p.. On suppose donc que u appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) (\varphi_t(x, y, t) + y \varphi_x(x, y, t)) \, dx \, dy \, dt = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (5.53)$$

On va montrer que $u = 0$ p.p..

Soit $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x, y, t) = - \int_t^{+\infty} \psi(x - y(t - s), y, s) \, ds.$$

On a aussi $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on remarque que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, y, t) + y\varphi_x(x, y, t) &= \psi(x, y, t) + y \int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s) ds \\ &\quad - y \int_t^{+\infty} \psi_x(x - y(t-s), y, s) ds \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi_t(x, y, t) + y\varphi_x(x, y, t) = \psi(x, y, t).$$

En prenant cette fonction φ dans (5.53) corrigés d'exercices equation.5.53) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) \psi(x, y, t) dx dy dt = 0 \text{ pour tout } \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

On en déduit que $u = 0$ p.p..

N.B. La méthode que nous venons d'utiliser est une méthode classique pour obtenir l'unicité d'un problème par la résolution du problème adjoint (qui est ici $\varphi_t + y\varphi_x = \psi$ avec $\varphi = 0$ comme donnée "finale").

Dans la suite, on note u cette solution faible.

On remarquera que u est continue de \mathbb{R}_+ dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y, r) = \frac{1}{2r} \int_{y-r}^{y+r} f(z) dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(y, r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

Corrigé – Soit $T > 0$ t.q. $f(z+T) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ (la fonction f est donc de période T).

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $r > T$. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ t.q. $(p-1)T < y-r \leq pT < qT \leq y+r < (q+1)T$. On a alors

$$2rF(y, r) = \int_{y-r}^{pT} f(z) dz + \int_{pT}^{qT} f(z) dz + \int_{qT}^{y+r} f(z) dz = \int_{y-r}^{pT} f(z) dz + (q-p)mT + \int_{qT}^{y+r} f(z) dz.$$

Ceci donne

$$F(y, r) = m + \left(\frac{(q-p)T}{2r} - 1 \right) m + \frac{1}{2r} \int_{y-r}^{pT} f(z) dz + \frac{1}{2r} \int_{qT}^{y+r} f(z) dz.$$

Comme $0 \leq 2r - (q-p)T \leq 2T$ et que, avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$,

$$\left| \int_{y-r}^{pT} f(z) dz \right| \leq \int_{y-r}^{pT} |f(z)| dz \leq MT, \quad \left| \int_{qT}^{y+r} f(z) dz \right| \leq \int_{qT}^{y+r} |f(z)| dz \leq MT,$$

on a donc

$$|F(y, r) - m| \leq \frac{(|m| + M)T}{r}.$$

ce qui prouve bien que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(y, r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = 4\delta^2 m.$$

[On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x-yt) dy = 2\delta F(x-bt, \delta t)$.]

Corrigé – Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. En utilisant le changement de variable $z = x - yt$, that is to say $y = (x - z)/t$, on obtient

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt) dy = \int_{x-bt-\delta t}^{x-bt+\delta t} \frac{f(z)}{t} dz = 2\delta F(x - bt, \delta t).$$

Soit maintenant $t > 0$. On sait que $u(x, y, t) = f(x - yt)$, on a donc

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x - yt) dx dy.$$

Avec le théorème de Fubini, on a donc

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = \int_{a-\delta}^{a+\delta} \left(\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt) dy \right) dx = 2\delta \int_{a-\delta}^{a+\delta} F(x - bt, \delta t) dx.$$

La deuxième question donne $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x - bt, \delta t) = m$, uniformément par rapport à x , on a donc bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = 4\delta^2 m.$$

4. Montrer que $u(\cdot, \cdot, t) \rightarrow m$ \star -faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \rightarrow +\infty$.

Corrigé – On remarque d'abord que (avec $M = \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{R}\}$)

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq M \text{ pour tout } t > 0.$$

On pose

$$\mathcal{C} = \{1_{]a-\delta, a+\delta[\times]b-\delta, b+\delta[}, a, b \in \mathbb{R}, \delta > 0\}.$$

La question précédente montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) \varphi(x, y) dx dy = m \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dx dy. \quad (5.54)$$

On note maintenant E l'espace vectoriel engendré par \mathcal{C} . Par linéarité de l'intégrale, on a alors (5.54) corrigés d'exercices equation.5.54 pour tout $\varphi \in E$.

L'espace vectoriel E est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour montrer ceci, il suffit, par exemple, d'utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ puis de remarquer que tout élément de $C_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ peut être approché d'aussi près que l'on veut pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^2)$ par un élément de E . On en déduit bien que E est dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Grâce à cette densité et à la borne $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ sur $u(\cdot, \cdot, t)$, on conclut facilement que (5.54) corrigés d'exercices equation.5.54 est vrai pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Ceci donne bien que $u(\cdot, \cdot, t) \rightarrow m$ \star -faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \rightarrow +\infty$.

5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (5.47) Exercices equation.5.47) $y \frac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y) \frac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points où a' s'annule est de mesure nulle.)

Bibliographie

- [1] ADAMS, R.A. (1975), *Sobolev spaces* (Academic Press, Boston). Version életronique <http://www.heroturko.org/index.php?do=search>
- [2] BREZIS, H. (1983), *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications* (Masson, Paris).
- [3] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Mesure, intégration, probabilités*, Ellipses, 2013.
- [4] GALLOUËT, T. and HERBIN, R., *Théorie de l'intégration et de la mesure*.
<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/mes-int-pro.pdf>
- [5] GODLEWSKI E. and P. A. RAVIART (1991), *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses.
- [6] HERBIN, R., *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/herbin/PUBLI/anedp.pdf>
- [7] LERAY, J., *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta. Math. 63 (1934), no. 1, 193-248.