



**HAL**  
open science

## Écoulement dans la mise en oeuvre des polymères

Y. Béreaux

► **To cite this version:**

Y. Béreaux. Écoulement dans la mise en oeuvre des polymères. École d'ingénieur. France. 2014, pp.107. cel-01133257v2

**HAL Id: cel-01133257**

**<https://hal.science/cel-01133257v2>**

Submitted on 16 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

---

**Ecoulements**

dans la

**Mise en Œuvre**

des

**Polymères**

---

**4 GMPP**

16 juin 2015

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Grandeurs calculables . . . . .	4
1.2	Découpage . . . . .	5
1.2.1	Écoulement développé, Lubrification, Écoulement non développé . . . . .	5
1.2.2	Écoulement par dépression ou par déplacement de paroi . . . . .	6
1.2.3	Écoulement en série ou en parallèle . . . . .	7
1.2.4	Cisaillement et élongation . . . . .	7
1.2.5	Fluide Newtonien et fluide Non-Newtonien . . . . .	8
1.2.6	Incompressible ou compressible . . . . .	9
1.2.7	Écoulement mono ou multi-polymères . . . . .	10
1.2.8	Adhérence ou glissement à la paroi . . . . .	10
1.2.9	Écoulement stationnaire et écoulement instationnaire . . . . .	11
1.3	Bibliographie et ouvrages de référence . . . . .	12
1.4	Écoulement entre deux plaques parallèles . . . . .	13
1.4.1	Équations de conservation . . . . .	13
1.4.2	Écoulement développé . . . . .	13
1.4.3	Résolution . . . . .	14
1.4.4	Vitesse . . . . .	14
1.4.5	Relation Débit-Perte de Charge . . . . .	15
1.4.6	Écoulement de cisaillement simple (Couette) . . . . .	16
1.4.7	Écoulement de Poiseuille . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Écoulements par dépression</b>	<b>17</b>
2.1	Écoulement entre deux plaques faiblement inclinées . . . . .	17
2.1.1	Équations de conservation . . . . .	17
2.1.2	Ordre de grandeur des vitesses . . . . .	17
2.1.3	Calcul de la chute de pression . . . . .	18
2.2	Écoulement d'un fluide rhéofluidifiant entre deux plaques parallèles . . . . .	19
2.2.1	Cisaillement . . . . .	21
2.2.2	comparaison entre les cas Newtonien et rhéofluidifiant . . . . .	21
2.2.3	Cas de la plaque inclinée . . . . .	21
2.3	Écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans un tube . . . . .	22
2.3.1	Calcul du débit . . . . .	24
2.3.2	Cas d'un cône cylindrique de faible angle . . . . .	24
2.3.3	Cas du fluide Newtonien . . . . .	25
2.3.4	Validité des modèles Newtonien et Loi Puissance . . . . .	25
2.4	Coextrusion de deux fluides Newtoniens . . . . .	27
2.4.1	Calcul du débit . . . . .	29
2.4.2	Position de l'interface . . . . .	29
2.4.3	Coextrusion d'un fluide visqueux entre deux couches plus fluide . . . . .	30
2.5	Écoulement entre deux plaques avec glissement . . . . .	32
2.6	Écoulement entre deux disques parallèles . . . . .	35

2.6.1	Condition d'incompressibilité . . . . .	35
2.6.2	Tenseur des contraintes . . . . .	36
2.6.3	Équations d'équilibre . . . . .	36
2.6.4	Calcul de la vitesse . . . . .	36
2.6.5	Calcul du débit . . . . .	37
2.6.6	Relation chute de pression - Débit . . . . .	37
2.6.7	Temps de remplissage . . . . .	38
2.7	Écoulement dans une plaque de distribution . . . . .	40
2.7.1	Introduction . . . . .	40
2.7.2	Modèle de l'écoulement . . . . .	40
2.7.3	Temps de séjour et taux de cisaillement à la paroi . . . . .	43
2.7.4	Écoulement en filière d'extrusion . . . . .	45
2.8	Mesure de MFI . . . . .	48
2.8.1	Un exemple : Le grade "super X" . . . . .	48
2.9	Écoulement dans une filière plate . . . . .	50
2.10	Temps de purge d'un réservoir . . . . .	51
2.11	Pression d'injection . . . . .	53
2.11.1	Comparaison entre écoulement en filière d'extrusion et remplissage d'une empreinte	54
2.11.2	Géométrie A, série . . . . .	54
2.11.3	Géométrie B, parallèle . . . . .	55
2.11.4	Réponses . . . . .	56
2.11.5	Pression d'injection optimale . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Écoulements par déplacement d'une paroi</b>	<b>60</b>
3.1	Écoulement par déplacement de parois. Fluide rhéofluidifiant . . . . .	60
3.2	Écoulement par déplacement et dépression entre plaques faiblement inclinées . . . . .	63
3.2.1	Mise en pression dans un système de deux plaques . . . . .	65
3.2.2	Calcul de point de fonctionnement (A) . . . . .	67
3.2.3	Calcul de point de fonctionnement (B) . . . . .	69
3.2.4	Procédé d'intrusion . . . . .	70
3.2.5	Vis 3 zones . . . . .	71
3.3	Écoulement par compression entre deux disques parallèles . . . . .	74
3.3.1	Condition d'incompressibilité . . . . .	74
3.3.2	Tenseur des contraintes . . . . .	75
3.3.3	Équations d'équilibre . . . . .	75
3.3.4	Résolution des vitesses . . . . .	76
3.3.5	Calcul de la pression et de la force . . . . .	77
3.4	Écoulement hélicoïdal dans une filière annulaire . . . . .	79
3.4.1	Forme de l'écoulement . . . . .	79
3.4.2	Calcul . . . . .	79
3.4.3	Écoulement d'un fluide loi-puissance entre deux cylindres en rotation . . . . .	84
3.5	Système piston-filière . . . . .	86
3.6	Cylindre mélangeur . . . . .	88
3.6.1	Calcul des vitesses . . . . .	88
3.6.2	Calcul du couple . . . . .	88
3.6.3	Calcul de la vitesse de rotation $\omega$ . . . . .	89
3.6.4	Solution . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre par déformation</b>	<b>92</b>
4.1	Soufflage d'une paraison cylindrique . . . . .	92
4.1.1	Forme du champ de vitesse et des contraintes . . . . .	92
4.1.2	Équations d'équilibre et CL en contraintes . . . . .	93

4.1.3	Évolution de la paraison durant le soufflage . . . . .	94
4.1.4	Calcul de la force d'étirage . . . . .	95
4.1.5	Influence de la pression de soufflage obtenue par débit d'air . . . . .	96
4.2	Écoulement compressible de fluides visqueux . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Couplage thermomécanique</b>	<b>99</b>
5.1	Écoulement de cisaillement simple. Fluide non-Newtonien thermo-dépendant . . . . .	99
5.1.1	Vitesse dans le film fondu . . . . .	99
5.1.2	Température dans le film . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Annexes &amp; cie</b>	<b>104</b>
6.1	Équation de conservation en coordonnées cylindriques . . . . .	104

# Chapitre 1

## Introduction

Ce cours est centré sur l'utilisation de la mécanique des fluides visqueux dans le but de dimensionner (calculer) des écoulements de polymères fondus dans les géométries courantes rencontrées dans les procédés de plasturgie.

Du point de vue de ce cours, il y a différents types d'outillages :

- Pompes volumétriques, vis d'extrudeuse ou de presse à injecter
- Filières d'extrusion, canaux, buses
- Empreintes de moules
- Clapets d'injection, rhéomètres capillaires, ou les gradeurs.

**Question :** Pourquoi avoir classé les outillages de cette façon ?

**Réponse :** A la fin de introduction

Par rapport à la mécanique des fluides que vous avez déjà rencontrée, la mécanique des fluides très visqueux est, en un sens plus simple, et se prête à une approche de type "RDM".

Elle diffère de :

- **l'aérodynamique** : Mécanique des fluides compressibles, très faiblement visqueux, avec Reynolds modéré à grand, et des phénomènes de Turbulence ou d'onde de choc.
- **l'hydraulique** : Mécanique des fluides incompressibles, très faiblement visqueux, avec Reynolds modéré à grand. Dans ces problèmes les pertes de charge singulières, c'est à dire les chutes de pression dans un écoulement dues à un changement brutal de direction de l'écoulement, sont prépondérantes par rapport aux pertes de charges régulières c'est à dire les chutes de pression tout au long d'un écoulement dans une géométrie rectiligne de section donnée.

Écoulement pour la mise en œuvre des polymères fondus concerne la mécanique des fluides visqueux incompressibles, en régime laminaire ( Reynolds extrêmement faible ), où les pertes de charge régulières sont prépondérantes face aux pertes de charge singulières.

**Exemple du calcul du nombre de Reynolds** Calculer  $R_e$  dans le cas du remplissage en 3 secondes d'une plaque de 30cm de long, 2mm d'épaisseur et 10cm de largeur pour un polymère possédant une viscosité de 250Pas et une masse volumique de 950kg/m<sup>3</sup>.

A.N. :  $R_e = 7.610^{-4}$  c'est tout petit.

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{WH} \\ R_e &= \frac{\rho V H}{\eta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

### 1.1 Grandeurs calculables

- La perte de charge (chute de pression) dans un outillage causée par un écoulement donné.

- Réciproquement le débit correspondant à une perte de charge mesurée
- La temps de remplissage ou la vitesse moyenne du front de matière
- La valeur du cisaillement maximal dans une géométrie
- La force ou le couple exercée sur une paroi par un fluide en écoulement

Toutes ces grandeurs sont calculables analytiquement pour une fluide Newtonien dans des géométries simples. Dans une certaine mesure cela est également vrai pour un fluide Non-Newtonien (rhéofluidifiant).

L'intérêt des calculs que nous allons voir est qu'il vous seront utiles pour dimensionner rapidement, simplement, pour presque rien<sup>1</sup> des écoulements de polymères fondu dans des canaux de moules, un canal de vis d'extrudeuse ou de presse à injecter, d'estimer si le remplissage d'une empreinte à de bonne (mal)chances d'être (dés)équilibré, d'estimer un cisaillement maximal que subit le polymère au passage du seuil d'injection et d'accomplir tout un tas de truc qui forceront l'admiration et le respect de votre entourage...

## 1.2 Découpage

Ce que nous allons étudier fait appel à différentes notions de mécanique des fluides :

- Écoulement développé, Lubrification, Écoulement non développé
- Écoulement par dépression ou par déplacement de paroi
- Écoulement en série ou en parallèle
- Cisaillement et élongation
- Fluide Newtonien et fluide Non-Newtonien
- Fluide incompressible ou compressible
- Adhérence ou glissement à la paroi
- Écoulement mono ou multi- polymères
- Écoulement stationnaire ou instationnaire.

### 1.2.1 Écoulement développé, Lubrification, Écoulement non développé

Dans un écoulement développé nous pouvons considérer que la section traversée par l'écoulement reste constante. C'est le cas de l'écoulement dans un cylindre de section quelconque ou entre deux plaque parallèles.

Lorsque cette règle n'est pas satisfaite l'écoulement n'est pas développé. C'est par exemple le cas de l'écoulement dans une géométrie constitué de deux cylindres de section différentes Fig. 1.1.

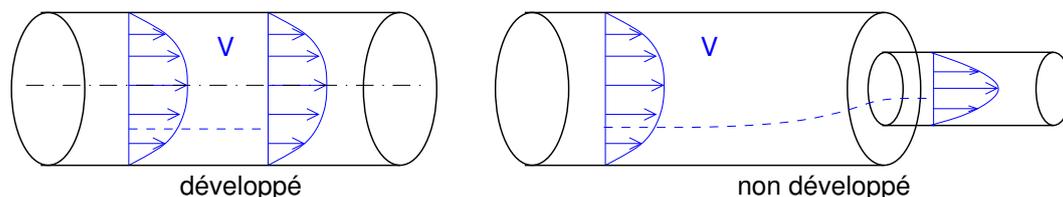


FIGURE 1.1 – Écoulements développé et non-développé

Toutefois le cas des géométries dont les sections varient faiblement et qui gardent la même forme peuvent être traitées selon l'hypothèse de lubrification. Typiquement, des cônes de faible angles. D'ailleurs, les changements brutaux de section sont à éviter absolument dans les procédés car elles sont sources de recirculations et donc de dégradation du polymère.

De plus si comme dans le cas de la figure Fig. 1.1 l'ensemble de l'écoulement ne peut être considéré comme développé, l'écoulement dans chaque cylindre, suffisamment loin de la contraction brusque, peut être considéré comme développé (Fig. 1.2). Ceci est dû au fait que l'on considère des fluides très visqueux et que les longueurs nécessaire à un écoulement pour atteindre un profil de vitesse établi (un diamètre)

1. un peu de votre temps d'ingénieur

sont très courtes. Le corollaire de ce phénomène étant que les pertes de charge singulières ne sont pas prépondérantes par rapport aux pertes de charge régulières, à la différence de l'hydraulique.

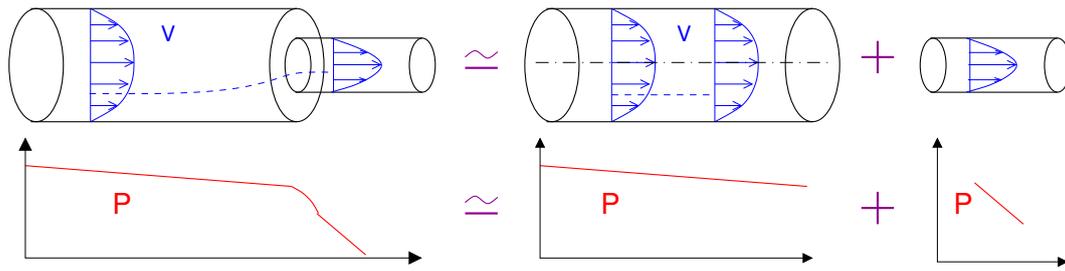


FIGURE 1.2 – Écoulement non-développé

## 1.2.2 Écoulement par dépression ou par déplacement de paroi

Il y a deux façons de créer un écoulement Fig. 1.3

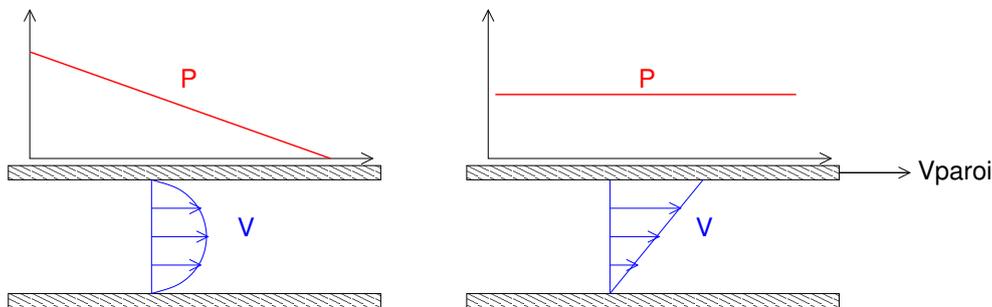


FIGURE 1.3 – Les deux types fondamentaux d'écoulement

- soit il existe une différence de pression entre deux endroits du récipient contenant le fluide et le fluide va s'écouler depuis la région de haute pression vers la région de basse pression (gradient de pression négatif),
- soit une des parois du récipient contenant le fluide se déplace par rapport aux autres et elle entraîne avec elle le fluide dans son mouvement.

On peut alors tout à fait combiner les deux (Fig. 1.4) : le déplacement d'une paroi avec l'existence d'un gradient de pression. Ce gradient de pression peut soit favoriser l'écoulement par déplacement de paroi ou s'y opposer (gradient de pression positif). Ce dernier cas est très important pour la mise en œuvre : Il se produit lors que le fluide est entraîné par une plaque vers une région à l'aval où la section offerte à l'écoulement est plus restreinte : la pression y monte et globalement le débit atteint est plus faible que lorsque la plaque est seule. C'est le prototype de ce qui se passe dans une vis d'extrudeuse ou durant la phase d'injection dynamique.

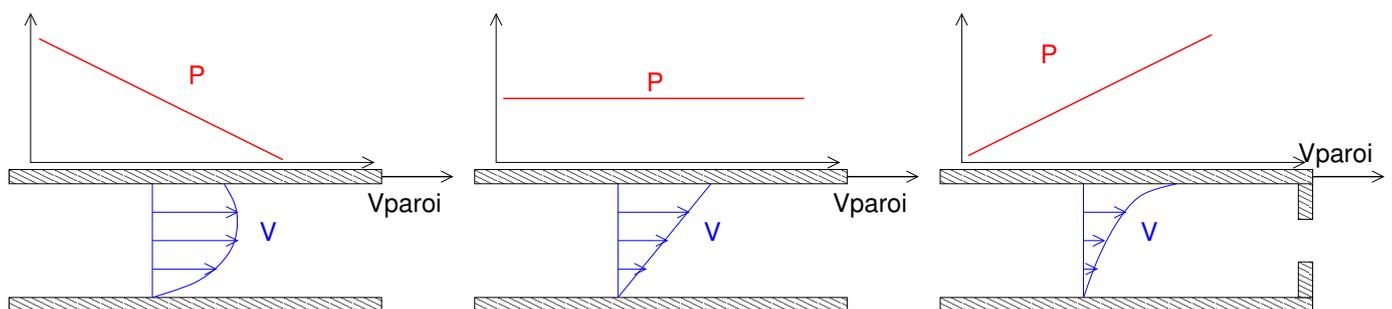


FIGURE 1.4 – Influence du gradient de pression sur un écoulement par déplacement de paroi

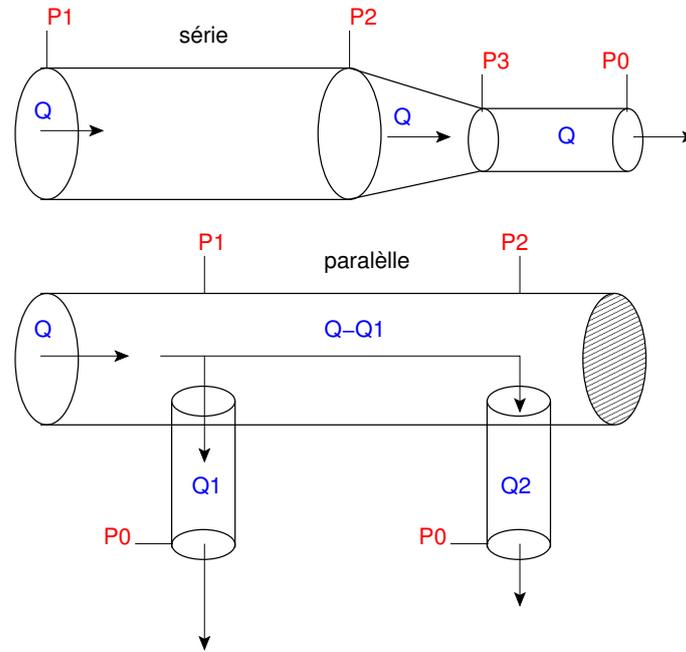


FIGURE 1.5 – Écoulements en séries ou en parallèle

Enfin, lorsqu'aucun de ces moyens n'est présent, c'est la seule gravité qui pourra mettre le fluide en mouvement. On parle alors de fluage, mais dans ce cas la vitesse atteinte est inversement proportionnelle à la viscosité... Le fluage est présent en extrusion verticale de paraison par exemple.

### 1.2.3 Écoulement en série ou en parallèle

Dans le cas d'un écoulement dans une série de géométries simples (Fig. 1.5 haut), le fluide ne dispose que d'un seul chemin possible et l'écoulement est caractérisé par un débit unique. La chute de pression est alors la somme des chutes de pression dans chaque géométrie :

$$\Delta P = \Delta P_{12}(Q) + \Delta P_{23}(Q) + \Delta P_{30}(Q) \quad (1.2)$$

Dans le cas de géométrie connectées en parallèle (Fig. 1.5 bas), le fluide dispose de plusieurs chemins possibles et les débits sont répartis entre les géométries de façon à avoir une chute de pression totale dans le réseau la plus faible possible<sup>2</sup>. Sur chaque chemin la chute de pression est identique et donc sur les chemins les plus long les débits sont plus faibles.

$$\begin{aligned} \Delta P &= \Delta P_{10}(Q_1) \\ &= \Delta P_{12}(Q - Q_1) + \Delta P_{20}(Q_2) \\ Q &= Q_1 + Q_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 1.2.4 Cisaillement et élongation

Les deux types majeurs de vitesse de déformation trouvées dans un procédé sont le cisaillement et l'élongation (uniaxiale ou biaxiale).

Dans le cisaillement (Fig. 1.6) la vitesse dans une direction donnée varie uniquement selon la direction perpendiculaire

Dans l'élongation, la vitesse dans une direction donnée varie uniquement selon cette direction

2. Ce principe de minimum n'est pas valable pour les fluides viscoélastiques

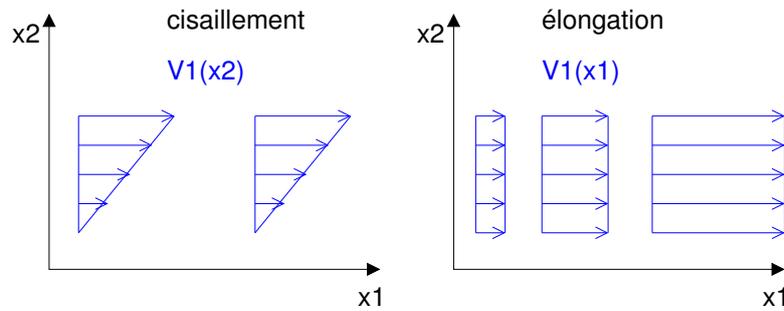


FIGURE 1.6 – Différence entre le cisaillement et l'élongation

De façon plus générale, le tenseur gradient de vitesse enregistre les variations de chaque composante de vitesse selon chaque direction. Les termes sur la diagonales correspondent à des déformations d'élongation, les termes extra-diagonaux à des cisaillements<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned}
 \nabla v &= \underline{\underline{L}} \\
 &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_i e_j \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Toutefois,  $\underline{\underline{L}}$  n'enregistre pas que les vitesses de déformations mais toutes variations de vitesse. Pour s'en convaincre on peut calculer la réponse à une rotation solide :

$$\begin{aligned}
 \underline{v} &= \omega \underline{e}_z \wedge \underline{OM} \\
 &= \omega \underline{e}_z \wedge (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z) \\
 &= -\omega y \underline{e}_x + \omega x \underline{e}_y
 \end{aligned}$$

La rotation solide n'engendre pas de déformations du matériau, or :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{L}} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{D}} &= (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)/2 \\
 &= \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

Seul  $\underline{\underline{D}}$  mesure correctement les (vitesses) de déformations.

## 1.2.5 Fluide Newtonien et fluide Non-Newtonien

Un fluide est Newtonien lorsque sa viscosité reste constante avec les vitesses de déformations. Mais les thermoplastiques commerciaux sont des fluides Non-Newtonien rhéofluidifiants dont la viscosité diminue avec le taux de cisaillement<sup>4</sup>.

3. Cela n'est pas complètement vrai, mais cela fixe les idées...

4. Ils sont également viscoélastiques mais ces propriétés échappent malheureusement à des calculs simples que nous visons dans ce cours

Les modèles les plus courants sont les suivants : Bird-Carreau (1.5, Fig. 1.7), Carreau-Yasuda (1.6), Cross (1.7), Loi Puissance (1.8)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{(1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{1-n}{2}}} \quad (1.5)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{(1 + (\lambda\dot{\gamma})^a)^{\frac{1-n}{a}}} \quad (1.6)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^{1-n}} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \eta_0(\lambda\dot{\gamma})^{n-1} \\ &= K\dot{\gamma}^{n-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

- $\eta_0$  est la valeur limite de viscosité quand le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  tend vers 0.
- $\lambda$  est une valeur de temps caractéristique, l'inverse d'un taux de cisaillement caractéristique au delà duquel la viscosité du polymère chute notablement.
- $n$  est un nombre sans dimension appelé l'indice de pseudo plasticité, donc  $0 < n < 1$ .
- $K$  est le facteur de consistance et s'exprime en  $\text{Pas}^n$ .

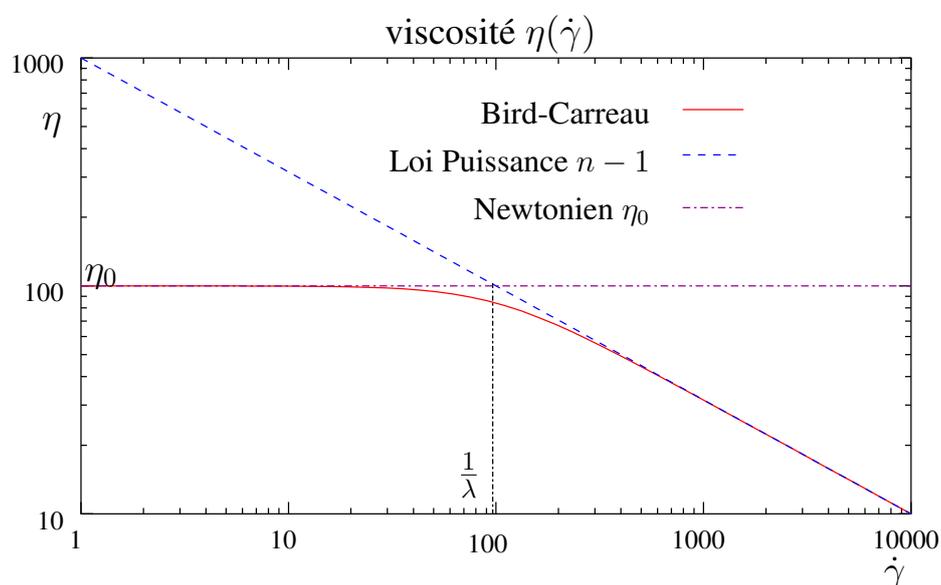


FIGURE 1.7 – Modèle rhéologique de Bird Carreau, Loi Puissance et fluide Newtonien

Les problèmes d'écoulement que nous allons voir sont faciles à résoudre dans le cas d'un fluide Newtonien car ces problèmes sont alors linéaires. Si on prend en compte les modèles rhéologiques Newtonien généralisés, plus réalistes tel que ceux précités, Bird-Carreau (1.5), Carreau-Yasuda (1.6), Cross (1.7) on ne peut plus rien résoudre analytiquement... Toutefois, lorsque l'on utilise le modèle Loi Puissance (1.8), on peut encore résoudre un certain nombre d'écoulements analytiquement, notamment si ils sont créés soit par une dépression uniquement, soit par un déplacement de paroi uniquement.

Il faut cependant rappeler, en insistant lourdement, que le modèle loi puissance n'est représentatif que dans le cas où la vitesse de déformation maximale observable dans l'écoulement est supérieure à la vitesse de déformation caractéristique du polymère :  $1/\lambda$ . Ceci est apparent sur la Fig. 1.7. Si cela n'est pas le cas, c'est le modèle Newtonien qui est le seul représentatif. On a tendance à oublier cette remarque pleine de bon sens, car la plupart des procédés se situent en général au delà de cette vitesse de déformation caractéristique.

## 1.2.6 Incompressible ou compressible

La compressibilité des polymères est très faible et dans la plupart des procédés on peut considérer que le polymère fondu se comporte comme un fluide incompressible. Une exception notable est celle de la phase d'injection durant laquelle les pressions atteintes sont si importantes, et cela sur des durées très courtes,

que la compressibilité du polymère n'est plus négligeable. Un effet caractéristique est un débit volumique de remplissage de l'empreinte qui est en retard par rapport au débit imposé par une vitesse d'injection constante.

### 1.2.7 Écoulement mono ou multi-polymères

Dans le cas de l'extrusion ou de l'injection mono-matière un seul polymère occupe tout l'espace disponible à l'écoulement. Dans le cas de la coextrusion ou de l'injection bi-matière ou aussi de la coinjection ( Fig. 1.8 ) deux ou plus polymères différents se partagent l'espace de l'écoulement. Ils sont séparés par une interface dont la position ne peut pas être fixée arbitrairement car elle dépend des propriétés relatives des polymères... Le long de cette interface il doit y avoir continuité de la vitesse et de la contrainte de cisaillement. Cette interface peut également devenir instable suivant les conditions d'écoulement.

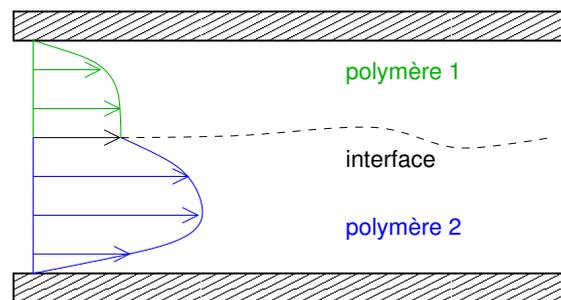


FIGURE 1.8 – Interface entre deux polymères différents

### 1.2.8 Adhérence ou glissement à la paroi

Il y a adhérence à la paroi lorsque l'outillage impose sa vitesse au polymère en contact avec elle. Il s'agit de la majorité des procédés. Il y a glissement à la paroi dans le cas contraire. C'est par exemple le cas de l'extrusion de polymère de forte masse moléculaire.

Dans le cas de l'adhérence à la paroi, la vitesse du polymère en contact avec la paroi est connue ( c'est une condition aux limites ) mais pas la valeur de la contrainte tangentielle.

Dans le cas du glissement à la paroi (Fig. 1.9), on ne connaît ni la vitesse du polymère à la paroi, ni la contrainte tangentielle à la paroi. Mais par contre on dispose d'une relation générale entre cette contrainte tangentielle et la vitesse de glissement. C'est la loi de glissement, une sorte de loi de comportement du glissement.

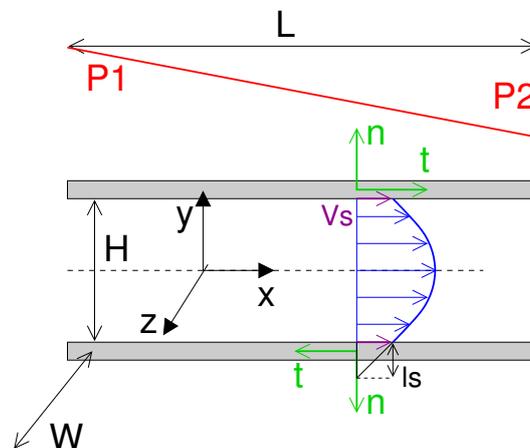


FIGURE 1.9 – Écoulement par dépression entre deux plaques avec glissement

## 1.2.9 Écoulement stationnaire et écoulement instationnaire

Les écoulements stationnaires sont des écoulements où le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps. C'est à dire des écoulements où la vitesse en un point donné de l'écoulement ne change pas avec le temps. C'est le cas des écoulements dans les buses, canaux, carottes, filières et de manière générale de l'extrusion.

Par contre un écoulement instationnaire voit son champ de vitesse ou son domaine d'écoulement varier explicitement avec le temps. D'un instant à l'autre, la vitesse ou la longueur d'écoulement ont changé. C'est typiquement le cas du remplissage d'un moule, où le front de matière (l'extrémité de l'écoulement) se déplace dans l'empreinte du moule au cours du temps.

Dans ce cours on étudie plutôt des situations stationnaires. Toutefois, la faiblesse relative des termes inertiels ( $Re \ll 1$ ), nous permettent de considérer que nos solutions obtenues dans les cas stationnaires sont également valables lorsque certains paramètres (les conditions aux limites) dépendent explicitement du temps. L'exemple qui suit en est la preuve.

### Oscillations dans les fluides visqueux

Un fluide Newtonien est mis en écoulement entre deux plaques parallèles dont l'une est animée d'un mouvement oscillant Fig. 1.10. Il s'agit d'un écoulement instationnaire (ou transitoire) pour lequel on va conserver les termes inertiels dans les équations de Navier Stokes afin d'en vérifier l'influence sur la solution.

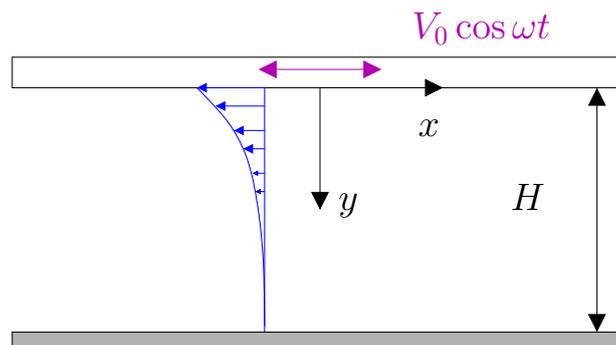


FIGURE 1.10 – Plaque oscillante

On a donc

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1.9)$$

La plaque inférieure ( $y = 0$ ) est animée d'une vitesse  $v_x = V \cos \omega t$ . La plaque supérieure ( $y = H$ ) est immobile On cherche la solution comme la partie réelle d'une fonction complexe de la forme :

$$v_x = \Re\{v^0(y) \exp i\omega t\} \quad (1.10)$$

Ce qui donne dans (1.9) :

$$\frac{d^2 v^0}{dy^2} - \frac{i\omega\rho}{\eta_0} v^0 = 0 \quad (1.11)$$

On cherche alors  $v^0(y)$  sous la forme :

$$v^0(y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(-\alpha y) \quad (1.12)$$

$$\alpha^2 = \frac{i\omega\rho}{\eta_0} \quad (1.13)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta_0}} (1 + i) \quad (1.14)$$

Finalement les conditions aux limites donnent les valeurs des constantes  $A, B$  :

$$A + B = V \quad (1.15)$$

$$A \exp(\alpha H) + B \exp(-\alpha H) = 0 \quad (1.16)$$

d'où on obtient :

$$v^0(y) = V \frac{\sinh(\alpha(H-y))}{\sinh(\alpha H)} \quad (1.17)$$

$$C = \frac{\sinh \alpha(H-y) \cos \alpha(H-y)}{\sinh \alpha H \cos \alpha H} \tanh^2 \alpha H \quad (1.18)$$

$$D = \frac{\cosh \alpha(H-y) \sin \alpha(H-y)}{\cosh \alpha H \sin \alpha H} \tan^2 \alpha H \quad (1.19)$$

$$\Re\{v^0(y)\} = V \frac{C + D}{\tanh^2 \alpha H + \tan^2 \alpha H} \quad (1.20)$$

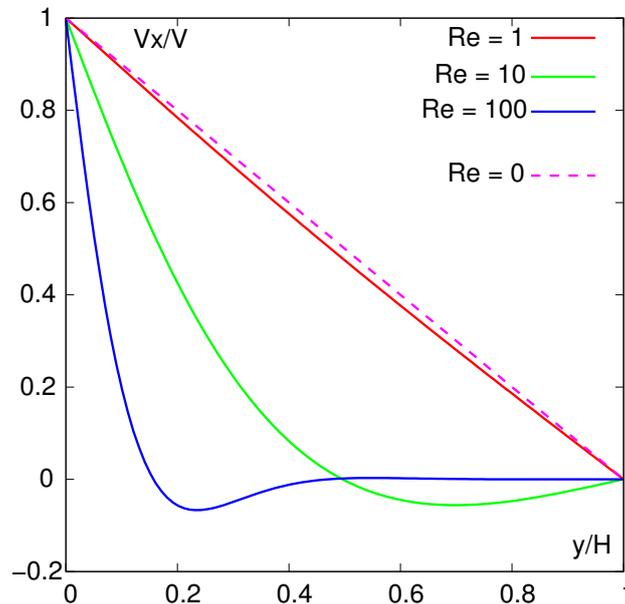


FIGURE 1.11 – Profil de vitesse  $V_x(y, t = 0)$  suivant le nombre de Reynolds  $Re = \rho\omega H^2/(2\eta_0)$

On voit que la solution obtenue à  $Re < 1$  diffère de façon minime de celle que l'on aurait obtenue directement en négligeant le terme inertiel dans l'équation (1.9) :

$$V_x(y, t) = V \cos \omega t \left(1 - \frac{y}{H}\right) \quad (1.21)$$

### 1.3 Bibliographie et ouvrages de référence

se trouve en fin de polycopié

- L'ouvrage en français de référence sur les écoulements et le calcul des procédés de mis en forme est : "La mise en forme des matières plastiques" par J. F. Agassant, P. Avenas, J. P. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent [1].
- Son équivalent en anglais est l'ouvrage de Z. Tadmor et C. G. Gogos "Principles of Polymer Processing" [2].
- L'ouvrage en anglais de Chris Rauwendaal "Polymer Extrusion" [3] contient beaucoup de détails introuvables ailleurs. Tout y est très simplement expliqué.
- Enfin pour les aspects de rhéologie et de viscoélasticité il me suffit de citer l'ouvrage de R. B. Bird "Dynamics of Polymeric Liquids" [4].

Pour l'injection et le remplissage des moules, un ouvrage récent en français de R. Deterre [5]. Et d'autres références sont disponibles au centre de doc ...

Et la réponse...

- Le système pompe correspond à un écoulement créé par un déplacement relatif d'une paroi vis à vis d'une autre et par un gradient de pression positif (contre-pression) ou négatif (dépression)
- le système filière correspond aux écoulements stationnaires par dépression dans les filières d'extrusion
- le système empreinte correspond aux écoulements instationnaires créés par dépression dans les empreintes de moule où l'on cherche à suivre la position du front de matière au cours du temps
- les clapets et rhéomètres capillaires impliquent un écoulement par déplacement d'un piston avec éventuellement des fuites autour de ce piston.

## 1.4 Écoulement entre deux plaques parallèles

Fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$ , incompressible, soumis à un gradient de pression  $(P_2 - P_1)/L$  en écoulement entre deux plaques parallèles séparées par une distance  $H$ , dont l'une est mobile à vitesse constante  $V_0$ .

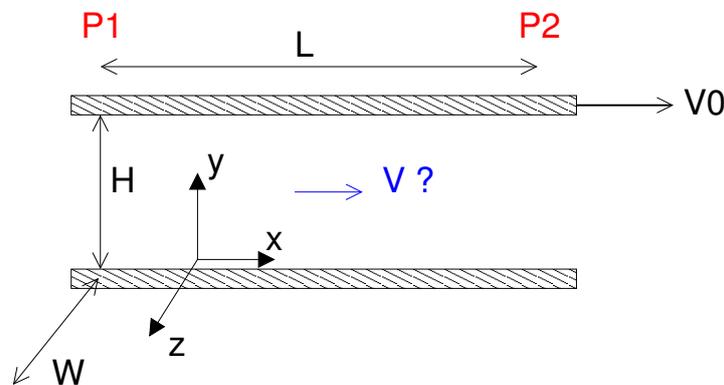


FIGURE 1.12 – Écoulement entre deux plaques parallèles

D'après la géométrie et les conditions aux limites de l'écoulement on néglige toute influence de la coordonnée  $z$  dans le problème.

### 1.4.1 Équations de conservation

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.22)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.23)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (1.24)$$

### 1.4.2 Écoulement développé

D'après la géométrie la section offerte à l'écoulement dans la direction  $x$  reste toujours la même et on pose que l'écoulement est développé dans la direction  $x$ . Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Or d'après (1.22)  $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$  et donc  $V_y = \text{cste}$ . D'après les conditions aux limites cette constante ne peut être que nulle et donc  $v_y = 0$ .

Le tenseur gradient de vitesse se simplifie alors

$$\begin{aligned}\underline{\underline{L}} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{S}} &= 2\eta_0 \underline{\underline{D}} \\ S_{xy} &= \eta_0 \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{aligned}$$

### 1.4.3 Résolution

D'après l'hypothèse d'écoulement développé :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Les équations (1.23) et (1.24) deviennent :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.25)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1.26)$$

De (1.26) on est forcé de déduire que  $P$  ne dépend que de  $x$ . Or dans (1.25) nous savons que  $S_{xy}$  ne dépend que de  $y$ . Cette contradiction apparente est admirablement levée en posant que chaque terme est en fait une constante :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = G = \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \quad (1.27)$$

### 1.4.4 Vitesse

On a donc :

$$\begin{aligned}S_{xy} &= Gy + B \\ \eta_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} &= Gy + B \\ v_x &= \frac{G}{2\eta_0} y^2 + \frac{B}{\eta_0} y + C\end{aligned} \quad (1.28)$$

Les conditions aux limites sur  $v_x$  sont en fait :

$$\begin{aligned}v_x(0) &= 0 \\v_x(H) &= V_0\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}C &= 0 \\B &= \frac{\eta_0 V_0}{H} - \frac{GH}{2} \\v_x &= \frac{G}{2\eta_0}(y^2 - Hy) + V_0 \frac{y}{H}\end{aligned}\tag{1.29}$$

### 1.4.5 Relation Débit-Perte de Charge

Dans l'expression de  $v_x$  (1.29) la perte de charge est une constante encore inconnue. On la détermine en calculant le débit total  $Q$  passant dans cette géométrie.

$$\begin{aligned}Q &= \int_0^W \int_0^H v_x dy dz \\&= W \int_0^H v_x dy \\&= W \left[ \frac{G}{2\eta_0} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{Hy^2}{2} \right) + V_0 \frac{y^2}{2H} \right]_0^H \\Q &= -G \frac{WH^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{WH}{2}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Lorsque le gradient de pression  $G$  est négatif, il favorise le débit. Lorsqu'il est positif il diminue le débit. Trois cas particuliers sont à envisager, lorsque :

- $V_0$  est nul il s'agit d'un écoulement de Poiseuille
- $G$  est nul il s'agit d'un écoulement de Couette ou cisaillement simple ("open discharge" en anglais)
- lorsque  $G > 0$  est tellement important que le débit  $Q$  est nul ("close discharge")

$$G_{\max} = \frac{6\eta_0 V_0}{H^2}\tag{1.31}$$

Dans ce cas, calculer le champ de vitesse  $v_x(y)$ , illustré sur la Fig. 1.13 :

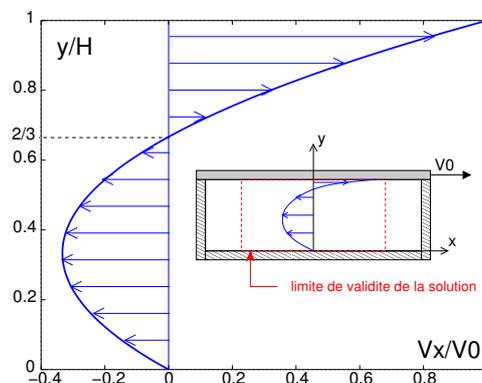


FIGURE 1.13 – Écoulement entre deux plaques parallèles. Cas de la contre-pression maximale

### 1.4.6 Écoulement de cisaillement simple (Couette)

Il s'agit d'un écoulement créé par déplacement de paroi uniquement.

Lorsque le gradient de pression est nul, le débit atteint est d'après (1.30) :

$$Q = \frac{WHV_0}{2} \quad (1.32)$$

de plus on a simplement :

$$\begin{aligned} v_x &= V_0 \frac{y}{H} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{V_0}{H} \\ S_{xy} &= \eta_0 \frac{V_0}{H} \\ P_1 &= P_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

### 1.4.7 Écoulement de Poiseuille

Il s'agit d'un écoulement créé par déplacement gradient de pression uniquement.

Lorsque l'on a qu'un gradient de pression  $G$  comme cause de l'écoulement (1.30) devient :

$$Q = -\frac{WH^3}{12\eta_0}G \quad (1.34)$$

Ce qui amène une définition purement cinématique de la vitesse du fluide :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{6Q}{WH^3}(Hy - y^2) \\ v_x &= 6V_{\text{moy}} \left( \frac{y}{H} - \frac{y^2}{H^2} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

**Vitesse maximale** La vitesse maximale au centre  $y = \frac{H}{2}$  :

$$v_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{WH} \quad (1.36)$$

**Cisaillement** Le cisaillement s'obtient en dérivant (1.35)

$$\dot{\gamma} = 6 \frac{Q}{WH} \left( \frac{1}{H} - \frac{2y}{H^2} \right) \quad (1.37)$$

Le cisaillement à la paroi  $y = H$  :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_w &= -6 \frac{Q}{WH^2} \\ &= -6 \frac{v_{\text{moy}}}{H} \end{aligned} \quad (1.38)$$

# Chapitre 2

## Écoulements par dépression

### 2.1 Écoulement entre deux plaques faiblement inclinées

L'écoulement présenté ici n'est pas strictement développé mais la section ne change que lentement dans la direction de l'écoulement Fig. 2.1

#### 2.1.1 Équations de conservation

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

#### 2.1.2 Ordre de grandeur des vitesses

La vitesse débitante  $v_x$  est de l'ordre  $Q/WH$ . Sa variation le long de la géométrie est donc de l'ordre de :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \simeq \frac{Q}{WH_2L} \quad (2.4)$$

de même pour  $v_y$  :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \simeq \frac{\langle v_y \rangle}{H_1 - H_2} \quad (2.5)$$

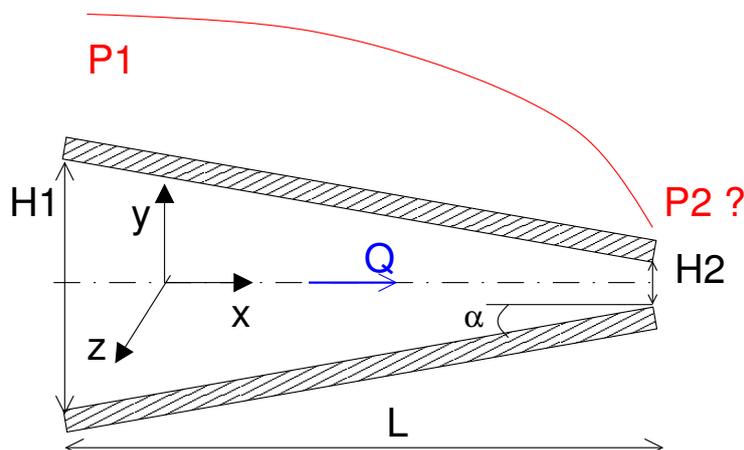


FIGURE 2.1 – Écoulement par dépression entre deux plaques faiblement inclinées

Or d'après l'incompressibilité on a forcément :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.6)$$

Du coup l'ordre de grandeur de  $v_y$  est :

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle &\simeq \frac{Q}{WH_2} \frac{H_1 - H_2}{L} \\ \frac{H_1 - H_2}{L} &\ll 1 \\ \langle v_y \rangle &\ll \langle v_x \rangle \end{aligned}$$

On peut négliger  $v_y$  devant  $v_x$  (comme dans le cas développé). De même on déduit pour les contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &\gg \frac{\partial v_x}{\partial x} \simeq \frac{\partial v_y}{\partial y} \gg \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ S_{xy} &\gg S_{xx} \simeq S_{yy} \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &\gg \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &\gg \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &\gg \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

Donc on se retrouve avec les équations de la quantité de mouvement identique au cas développé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Et la solution que l'on adopte est celle de l'écoulement développé avec

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{3}{2} \frac{Q}{WH(x)} \left( 1 - \left( \frac{2y}{H(x)} \right)^2 \right) \\ \frac{H(x)}{2} &= \frac{H_1}{2} - x \tan \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{H_1 - H_2}{2L} \\ \frac{dH}{dx} &= -2 \tan \alpha \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Calcul de la chute de pression

La relation débit perte de charge (1.34) est modifiée :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{12\eta_0 Q}{WH^3(x)} \\ \frac{dP}{dx} &= \frac{dP}{dH} \frac{dH}{dx} \\ \frac{dP}{dH} &= \frac{6\eta_0 Q}{\tan \alpha WH^3} \end{aligned}$$

La chute de pression totale dans la géométrie est donc :

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{dP}{dH} dH \\
&= \frac{6\eta_0 Q}{\tan \alpha W} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{H^3} \\
&= \frac{6\eta_0 Q}{\tan \alpha W} \left[ -\frac{1}{2H^2} \right]_{H_1}^{H_2} \\
&= \frac{6\eta_0 Q}{2 \tan \alpha W} \left( \frac{1}{H_1^2} - \frac{1}{H_2^2} \right) \\
&= \frac{6\eta_0 Q L}{W(H_1 - H_2)} \left( \frac{H_2^2 - H_1^2}{H_1^2 H_2^2} \right) \\
\frac{\Delta P}{L} &= -\frac{6\eta_0 Q(H_1 + H_2)}{W H_1^2 H_2^2} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Si l'on pose  $H_1 = H_2$  on doit retrouver la formule valable en plaque parallèle...

## 2.2 Écoulement d'un fluide rhéofluidifiant entre deux plaques parallèles

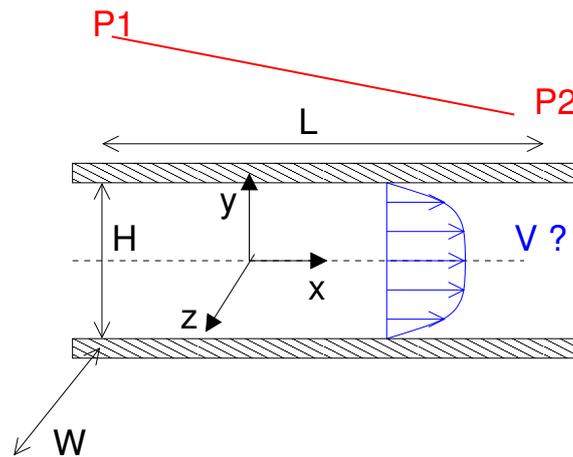


FIGURE 2.2 – Écoulement par dépression entre deux plaques parallèles

$$\begin{aligned}
\eta &= K \dot{\gamma}^{n-1} \\
S_{xy} &= K \dot{\gamma}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= G = \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \\
S_{xy} &= Gy + B
\end{aligned}$$

(2.10)

La condition de symétrie impose que :  $S_{xy} = 0$  si  $y = 0$

$$S_{xy} = Gy$$

$$\begin{aligned}
K \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n &= Gy \\
\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n &= -\frac{G}{K} y \\
\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} y^{1/n} \\
v_x &= -\left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} y^{1+1/n} + C
\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'après la conditions aux limites :  $v_x = 0$  si  $y = H/2$  donc :

$$v_x = \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left( \left( \frac{H}{2} \right)^{1+1/n} - y^{1+1/n} \right) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^W \int_{-H/2}^{H/2} V_x dy dz \\
&= 2W \int_0^{H/2} V_x dy dz \\
&= 2W \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} y - \frac{1}{\frac{1}{n} + 2} y^{\frac{2n+1}{n}} \right]_0^{H/2} \\
&= 2W \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{n}{2n+1} \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \right] \\
&= W \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{2n}{n+1} \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \left( 1 - \frac{n}{2n+1} \right) \\
&= W \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{2n}{n+1} \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) \\
&= W \left( \frac{-G}{K} \right)^{1/n} \frac{2n}{2n+1} \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \\
Q &= \frac{n}{2(2n+1)} \left( \frac{-G}{2K} \right)^{1/n} WH^{\frac{2n+1}{n}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

En utilisant la relation débit perte de charge 2.13, on peut alors donner une définition de la vitesse  $v_x$  2.12 qui soit purement cinématique :

$$v_x = \frac{2n+1}{n+1} \frac{Q}{WH} \left( 1 - \left( \frac{y}{H/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \tag{2.14}$$

**Remarque :** si  $n = 1$  on doit retrouver la valeur en Newtonien

La vitesse au centre :

$$\begin{aligned}
v_{\max} &= \frac{2n+1}{n+1} \frac{Q}{WH} \\
&= \frac{2n+1}{n+1} v_{\text{moy}}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

## 2.2.1 Cisaillement

le cisaillement s'obtient en dérivant (2.14)

$$\dot{\gamma} = -\frac{Q}{WH} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{2}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \quad (2.16)$$

Le cisaillement maximal à la paroi  $y = \frac{H}{2}$  est alors :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_w &= -\frac{Q}{WH} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{2}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= -\frac{Q}{WH} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{2}{H}\right)^{\left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}\right)} \\ &= -\frac{Q}{WH} \frac{2n+1}{n} \frac{2}{H} \\ \dot{\gamma}_w &= -\frac{2(2n+1)}{n} \frac{Q}{WH^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.2.2 comparaison entre les cas Newtonien et rhéofluidifiant

La vitesse maximale dans le cas rhéofluidifiant  $n < 1$  est inférieure à celle obtenue dans le cas Newtonien  $n = 1$  (Fig. 2.3). Par contre le cisaillement à la paroi est supérieur en rhéofluidifiant.

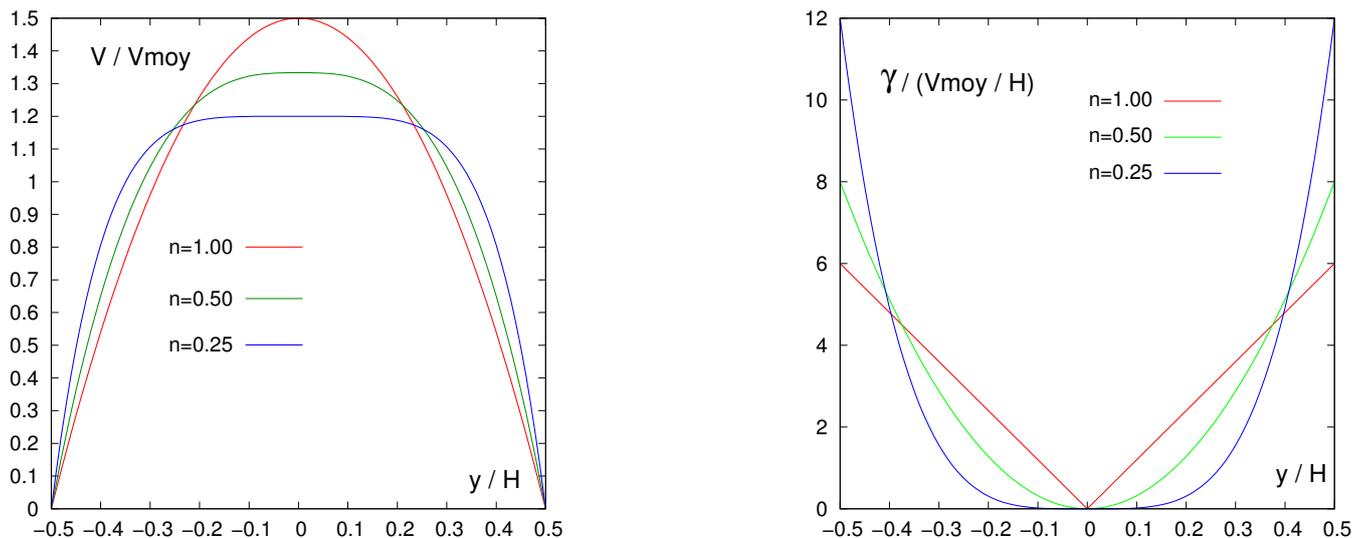


FIGURE 2.3 – vitesse et cisaillement dans le cas d'un écoulement par dépression entre deux plaques. Cas d'un fluide obéissant à la loi puissance

## 2.2.3 Cas de la plaque inclinée

On procède de la même façon en inversant tout d'abord la relation débit perte de charge pour le fluide loi-puissance (2.13) :

$$\begin{aligned} G &= \frac{dP}{dx} \\ G &= -2K \left( \frac{2(2n+1)}{n} \frac{Q}{W} \right)^n \frac{1}{H^{2n+1}} \\ &= \frac{B}{H^{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= -2K \left( \frac{2(2n+1)Q}{nW} \right)^n \\
G &= \frac{dP}{dH} \frac{dH}{dx} \\
\frac{dP}{dH} &= -\frac{G}{2 \tan \alpha} \\
&= -\frac{B}{2 \tan \alpha} \frac{1}{H^{2n+1}} \\
\Delta P &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{dP}{dH} dH \\
&= \frac{-B}{2 \tan \alpha} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{H^{2n+1}} \\
&= \frac{B}{4n \tan \alpha} \left[ \frac{1}{H^{2n}} \right]_{H_1}^{H_2} \\
&= \frac{B}{4n \tan \alpha} \left[ \frac{1}{H_2^{2n}} - \frac{1}{H_1^{2n}} \right] \\
&= \frac{B}{4n \tan \alpha} \left( \frac{H_1^{2n} - H_2^{2n}}{H_2^{2n} H_1^{2n}} \right) \\
\frac{\Delta P}{L} &= \frac{B}{2n(H_1 - H_2)} \left( \frac{H_1^{2n} - H_2^{2n}}{H_2^{2n} H_1^{2n}} \right) \\
\frac{\Delta P}{L} &= -\frac{K}{n} \left( \frac{2(2n+1)Q}{nW} \right)^n \left( \frac{H_1^{2n} - H_2^{2n}}{(H_1 - H_2)H_2^{2n} H_1^{2n}} \right)
\end{aligned}$$

## 2.3 Écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans un tube

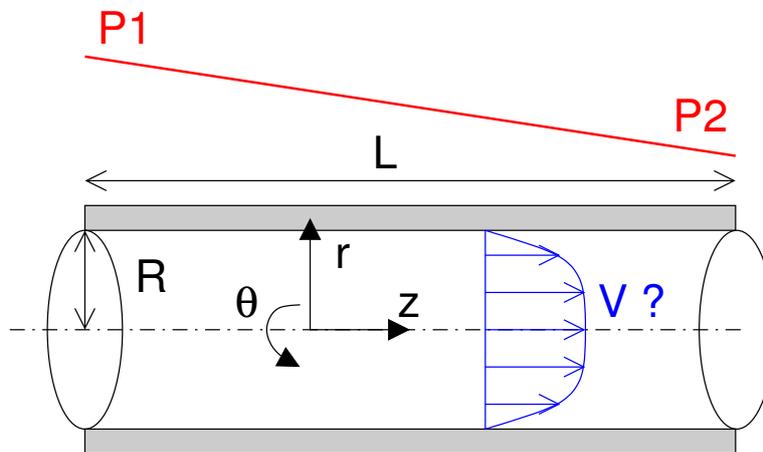


FIGURE 2.4 – Écoulement par dépression dans un tube

Écoulement par dépression, dans un tube cylindrique de rayon  $R$ . Le fluide adhère à la paroi. La géométrie et les conditions aux limites suggère un écoulement axisymétrique  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  et développé selon  $z$

$$\begin{aligned}
v_r &= 0 \\
v_\theta &= 0 \\
v_z &= v_z(r) \\
v_z(r=R) &= 0
\end{aligned}$$

La contrainte d'incompressibilité est vérifiée cf. (6.2) :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Le tenseur gradient de vitesse  $\underline{\underline{L}}$  se réduit à :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{L}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{D}} &= \frac{\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T}{2} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.18}$$

Les équations d'équilibre deviennent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Les équations précédentes traduisent que  $P$  ne dépend que de  $z$  alors que  $S_{rz}$  ne dépend que de  $r$ . Ceci n'est possible que si chacun est en fait égal à une constante  $G$  :

$$\begin{aligned}G &= \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} &= G \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) &= G \\ \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) &= Gr \\ (r S_{rz}) &= G \frac{r^2}{2} + B \\ S_{rz} &= G \frac{r}{2} + \frac{B}{r}\end{aligned}$$

pour que  $S_{rz}$  soit défini en  $r = 0$  il faut  $B = 0$

$$S_{rz} = G \frac{r}{2}$$

On constate que la contrainte de cisaillement est linéaire dans un capillaire. Pour intégrer la vitesse on doit faire appel à la loi de comportement, loi -puissance dans le cas présent :

$$\underline{\underline{S}} = 2\eta(|\dot{\gamma}|)\underline{\underline{D}}$$

$$S_{rz} = K \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
K \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n &= G \frac{r}{2} \\
\frac{\partial v_z}{\partial r} &= - \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} \\
v_z &= - \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} r^{\frac{n+1}{n}} + D \\
v_z &= \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left( R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

### 2.3.1 Calcul du débit

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^R v_z r dr \\
&= 2\pi \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \int_0^R \left( R^{\frac{n+1}{n}} r - r^{2+\frac{1}{n}} \right) dr \\
&= 2\pi \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ R^{\frac{n+1}{n}} \frac{r^2}{2} - \frac{r^{3+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right] \\
&= 2\pi \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \frac{n+1}{2(3n+1)} \\
Q &= \pi \left( \frac{|G|}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{3n+1} R^{\frac{3n+1}{n}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Si on utilise cette relation débit perte de charge (2.21) : dans l'expression de la vitesse (2.20) on obtient :

$$v_z = \frac{3n+1}{n+1} \frac{Q}{\pi R^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \tag{2.22}$$

### 2.3.2 Cas d'un cône cylindrique de faible angle

On a pour le cône

$$\begin{aligned}
\tan \alpha &= \frac{R_1 - R_2}{L} \\
R(z) &= R_1 - z \tan \alpha
\end{aligned}$$

On reprend la définition de la perte de charge dans le cas d'un cylindre (2.21) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial z} &= G \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= -2K \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi} \right)^n \frac{1}{R(z)^{3n+1}} \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}$$

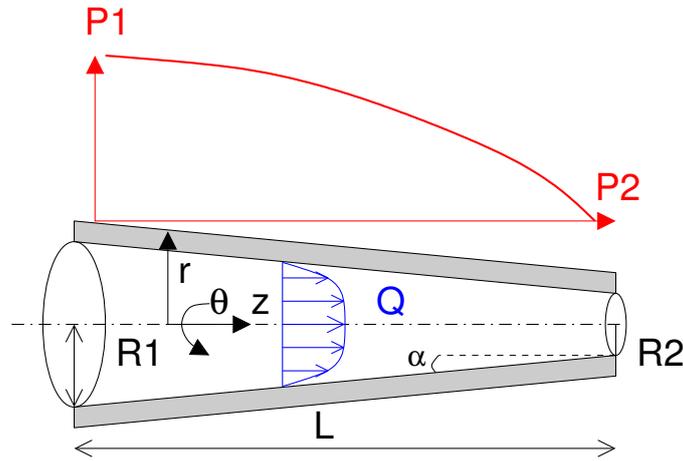


FIGURE 2.5 – Écoulement par dépression dans un cône cylindrique

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} &= -\frac{2K}{\tan \alpha} \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi} \right)^n \frac{1}{R^{3n+1}} \\ P_2 - P_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial P}{\partial R} dR \\ &= -\frac{2K}{\tan \alpha} \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi} \right)^n \frac{1}{3n} \left[ \frac{1}{R_2^{3n}} - \frac{1}{R_1^{3n}} \right] \\ \frac{P_2 - P_1}{L} &= -2K \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi} \right)^n \frac{1}{3n} \frac{R_1^{3n} - R_2^{3n}}{(R_2 - R_1)(R_2 R_1)^{3n}} \end{aligned}$$

### 2.3.3 Cas du fluide Newtonien

Dans le cas du fluide Newtonien,  $n = 1$ ,  $K = \eta_0$  et on a : les relations valables pour un tube de rayon  $R$  constant deviennent :

$$Q = \pi \frac{|G| R^4}{8\eta_0} \quad (2.23)$$

$$v_z = 2 \frac{Q}{\pi R^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (2.24)$$

#### Cône d'angle faible

et dans le cas du cône de faible angle  $\alpha$  :

$$\frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{8\eta_0 Q}{3\pi} \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{(R_2 R_1)^3}$$

Il y a cependant dans le cas du fluide Newtonien une solution exacte au problème de l'écoulement dans un cône d'angle quelconque. Ceci fournit l'occasion de vérifier notre calcul approché et de voir sa limite de validité Fig. 2.6

$$P = \frac{(1 - 3 \cos(\theta)^2) \eta_0 Q}{((\pi r^3)(1 + 2 \cos(\alpha))(1 - \cos(\alpha))^2)} \quad (2.25)$$

### 2.3.4 Validité des modèles Newtonien et Loi Puissance

On peut s'interroger sur la validité des modèles Newtonien et Loi Puissance pour calculer la perte de charge dans un écoulement, dans la mesure où ils ne représentent le comportement du polymère dans des cas asymptotiques : très faible vitesse de déformation (Newtonien) ou très forte vitesse de déformation (Loi

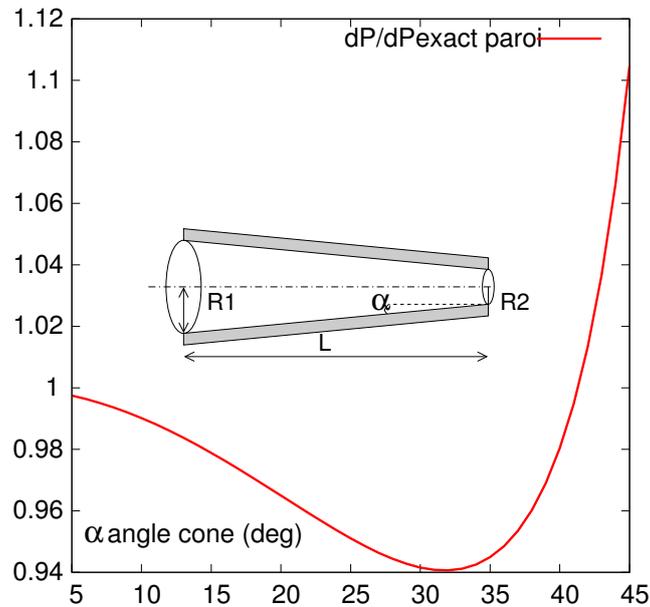


FIGURE 2.6 – Calcul de la pression dans un cône d’angle  $\alpha$ . Évolution de l’erreur relative entre la formule approchée et exacte suivant l’angle de cône.

Puissance). Notamment lorsque le cisaillement à la paroi est supérieur au cisaillement caractéristique du polymère il y aura forcément une zone de l’écoulement où proche du centre le cisaillement est faible et où le fluide possède un caractère Newtonien, et une zone voisine de la paroi où le cisaillement étant plus important le polymère exhibera un caractère pseudoplastique. On peut tenir compte de ce comportement simplement en proposant une loi puissance tronquée :

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \eta_0 \text{ si } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \\ \eta(\dot{\gamma}) &= \eta_0 \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right)^{(n-1)} \text{ si } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \end{aligned} \quad (2.26)$$

On peut développer alors une relation débit perte de charge semi analytique :

$$Q = -\frac{\pi R^4 G}{2\eta_0(3n+1)} \left( \frac{1-n}{4} \alpha^4 + n\alpha^{1-1/n} \right) \quad (2.27)$$

où  $\alpha$  est tel que :

$$\dot{\gamma}(\alpha R) = \dot{\gamma}_c \quad (2.28)$$

Si on compare toutes les approches de la perte de charge on voit que l’on ne perd pas grand chose à utiliser une formule Newtonienne quand  $\dot{\gamma}_w < \dot{\gamma}_c$  et loi puissance si  $\dot{\gamma}_w > \dot{\gamma}_c$  l’intérêt de la loi puissance tronquée étant limité finalement <sup>1</sup>

1. à mon grand regret

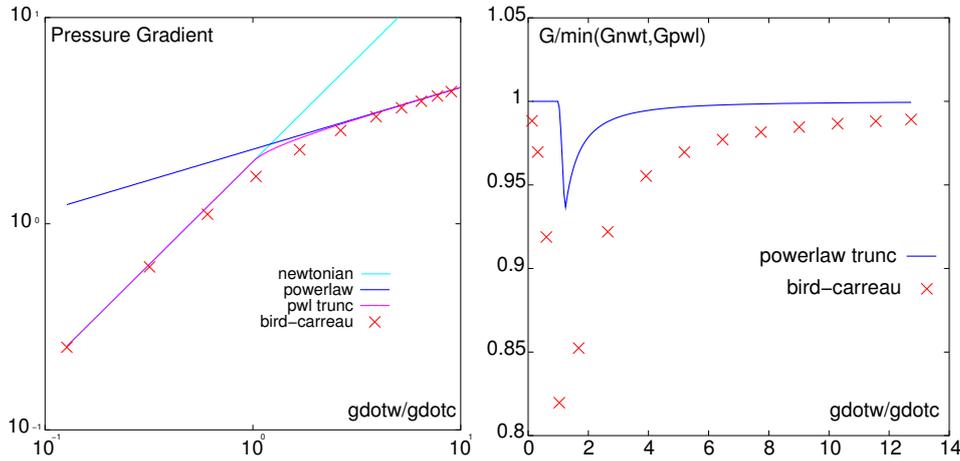


FIGURE 2.7 – Perte de Charge  $G$  en Newtonien, loi Puissance, loi Puissance tronquée et Bird Carreau ( $\eta_0 = 1, n = 0.3, \dot{\gamma}_c = 1$ ) selon le rapport du taux de cisaillement à la paroi  $\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3}$  sur le taux de cisaillement caractéristique  $\dot{\gamma}_c$

## 2.4 Coextrusion de deux fluides Newtoniens

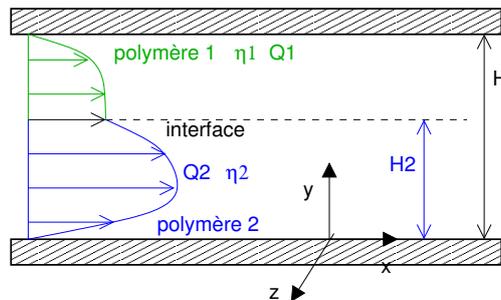


FIGURE 2.8 – Interface entre deux polymères différents

Les données sur lesquelles on s'appuie sont les viscosités des fluides et leur débits respectifs :  $\eta_1, \eta_2, Q_1, Q_2$  ainsi que la hauteur entre les plaques  $H$  et leur largeur  $W$  supposée très grande devant  $H$  pour que le problème soit plan. On pose  $H_2 = \alpha H$

Chaque fluide est en écoulement développé dans son domaine. Le gradient de pression  $\frac{\Delta P}{L}$  s'applique partout mais il est inconnu, tout comme la position de l'interface plane  $y = \alpha H$ .

C'est un écoulement créé par une dépression uniquement et les conditions d'adhérence qui s'appliquent dans ce cas sont

$$\begin{aligned} v_{1x}(y = H) &= 0 \\ v_{2x}(y = 0) &= 0 \end{aligned}$$

De manière générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= G \\ &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \\ S_{xy} &= Gy + B \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dans chaque domaine on a alors :

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = Gy + B_1 \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} &= Gy + B_2 \\
v_{1x} &= \frac{G}{2\eta_1} y^2 + \frac{B_1}{\eta_1} y + C_1 \\
v_{2x} &= \frac{G}{2\eta_2} y^2 + \frac{B_2}{\eta_2} y + C_2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

A l'interface en  $y = \alpha H$  il y a continuité de la contrainte tangentielle  $f_t$  : En effet les efforts :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{f}$$

$$\begin{pmatrix} -P + S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & -P + S_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Ici l'interface est rectiligne et :

$$\begin{aligned}
\underline{n} &= \underline{e}_y \\
\underline{t} &= \underline{e}_x \\
f_t &= S_{xy}
\end{aligned}$$

Du coup en égalant (2.30) et (2.31) en  $y = \alpha H$  on a :  $B_1 = B_2$ . En examinant les conditions aux limites sur la vitesse en  $y = 0$  et  $y = H$  :

$$\begin{aligned}
v_{1x}(y = H) &= 0 \\
C_1 &= -\frac{G}{2\eta_1} H^2 - \frac{B}{\eta_1} H \\
v_{2x}(y = 0) &= 0 \\
C_2 &= 0
\end{aligned}$$

De même il y a continuité de la vitesse tangentielle à l'interface<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}
v_{1x}(y = \alpha H) &= v_{2x}(y = \alpha H) \\
v_{1x}(y = \alpha H) &= \frac{G}{2\eta_1} (\alpha^2 - 1) H^2 + \frac{B}{\eta_1} (\alpha - 1) H \\
v_{2x}(y = \alpha H) &= \frac{G}{2\eta_2} \alpha^2 H^2 + \frac{B}{\eta_2} \alpha H
\end{aligned}$$

Ceci va permettre d'exprimer  $B$  en fonction de  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\eta_1} (\alpha - 1) H - \frac{B}{\eta_2} \alpha H &= -\frac{G}{2\eta_1} (\alpha^2 - 1) H^2 + \frac{G}{2\eta_2} \alpha^2 H^2 \\
BH \left( \frac{\alpha - 1}{\eta_1} - \frac{\alpha}{\eta_2} \right) &= \frac{GH^2}{2} \left( -\frac{\alpha^2 - 1}{\eta_1} + \frac{\alpha^2}{\eta_2} \right) \\
BH (\eta_2 (\alpha - 1) - \eta_1 \alpha) &= \frac{GH^2}{2} (\eta_1 \alpha^2 - \eta_2 (\alpha^2 - 1)) \\
B &= -\frac{GH}{2} \frac{\eta_1 \alpha^2 + \eta_2 (1 - \alpha^2)}{\eta_1 \alpha + \eta_2 (1 - \alpha)} \\
B &= -\frac{GH}{2} K
\end{aligned} \tag{2.32}$$

On remarque que si  $\eta_1 = \eta_2$  alors  $K = 1$  quelque soit la valeur de  $\alpha$ . Tiens donc ?

2. Il n'y a pas de vitesse normale à l'interface sinon cela ne serait plus une interface stationnaire...

### 2.4.1 Calcul du débit

Dans chaque domaine d'écoulement on a un débit donné.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= W \int_{\alpha H}^H v_{1x} dy \\
&= W \int_{\alpha H}^H \left( \frac{G}{2\eta_1} (y^2 - H^2) + \frac{B}{\eta_1} (y - H) \right) dy \\
&= WH \int_{\alpha}^1 \left( \frac{G}{2\eta_1} H^2 (\xi^2 - 1) + \frac{B}{\eta_1} H (\xi - 1) \right) d\xi \\
&= \frac{WH^2}{\eta_1} \left[ \frac{GH}{2} \left( \frac{\xi^3}{3} - \xi \right) + B \left( \frac{\xi^2}{2} - \xi \right) \right]_{\alpha}^1 \\
&= \frac{WH^2}{\eta_1} \left[ \frac{GH}{2} \left( \frac{1 - \alpha^3}{3} - (1 - \alpha) \right) + B \left( \frac{1 - \alpha^2}{2} - (1 - \alpha) \right) \right] \\
&= \frac{WH^2}{\eta_1} \left( \frac{GH}{2} (1 - \alpha) \frac{-2 + \alpha + \alpha^2}{3} + B (1 - \alpha) \frac{-1 + \alpha}{2} \right) \\
&= \frac{WH^2 GH}{\eta_1} \frac{1 - \alpha}{2} \left( \frac{(\alpha + 2)(\alpha - 1)}{3} - K \frac{-1 + \alpha}{2} \right) \text{ cf. (2.32)} \\
&= -\frac{GWH^3}{2\eta_1} (\alpha - 1)^2 \left( \frac{\alpha + 2}{3} - \frac{K}{2} \right) \\
&= -\frac{GWH^3}{12\eta_1} (\alpha - 1)^2 (2\alpha + 4 - 3K) \tag{2.33}
\end{aligned}$$

De même pour l'autre domaine :

$$\begin{aligned}
Q_2 &= W \int_0^{\alpha H} v_{2x} dy \\
&= W \int_0^{\alpha H} \left( \frac{G}{2\eta_2} y^2 + \frac{B}{\eta_2} y \right) dy \\
&= \frac{WH}{\eta_2} \int_0^{\alpha} \left( \frac{GH^2}{2} \xi^2 + BH\xi \right) d\xi \\
&= \frac{WH}{\eta_2} \left[ \frac{GH^2}{2} \frac{\xi^3}{3} + BH \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{WH}{\eta_2} \left[ \frac{GH^2}{2} \frac{\alpha^3}{3} + BH \frac{\alpha^2}{2} \right] \\
&= \frac{WH GH^2}{\eta_2} \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\alpha}{3} - \frac{K}{2} \right) \text{ cf. (2.32)} \\
&= \frac{GWH^3}{2\eta_2} \alpha^2 \left( \frac{\alpha}{3} - \frac{K}{2} \right) \\
&= \frac{GWH^3}{12\eta_2} \alpha^2 (2\alpha - 3K) \tag{2.34}
\end{aligned}$$

### 2.4.2 Position de l'interface

Pour trouver la position de l'interface en fonction des débits on doit éliminer  $G$  de (2.33) et de (2.34) :

$$\frac{Q_1 \eta_1}{Q_2 \eta_2} = - \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^2 \frac{2\alpha + 4 - 3K}{2\alpha - 3K}$$

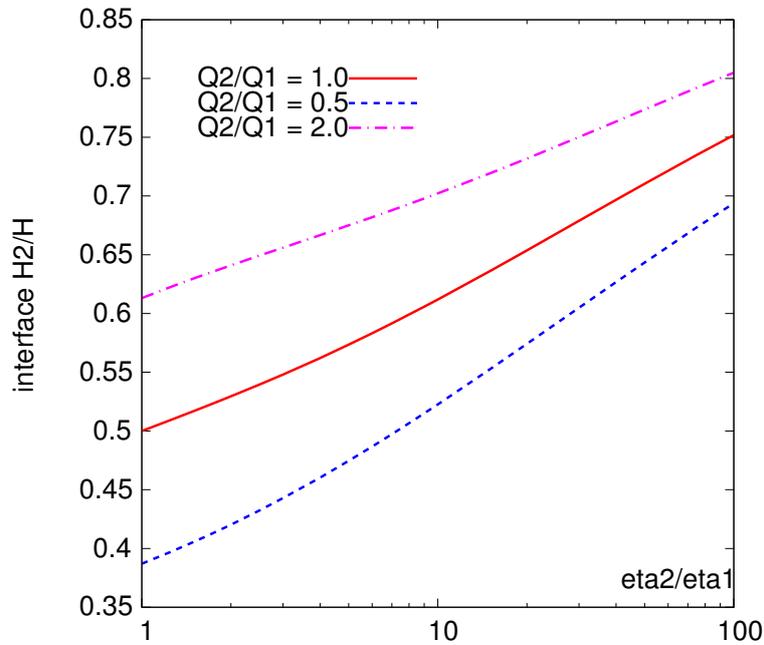


FIGURE 2.9 – Position de l’interface en fonction des rapports de viscosité et de débits

### 2.4.3 Coextrusion d’un fluide visqueux entre deux couches plus fluide

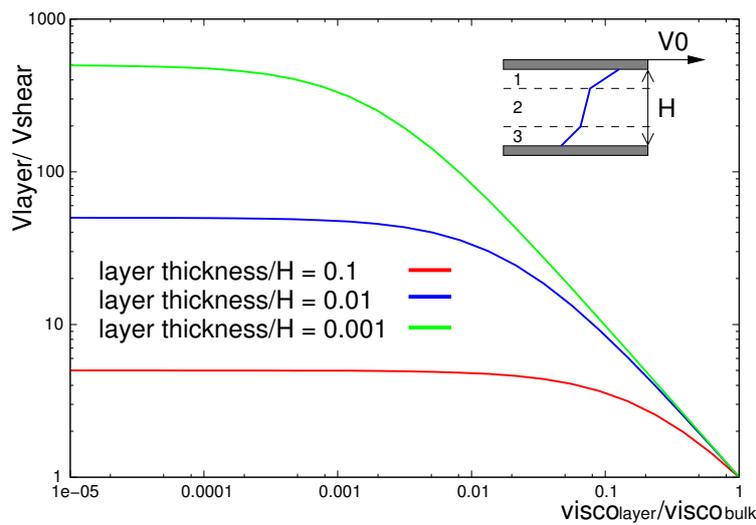


FIGURE 2.10 – Évolution de la vitesse à l’interface en fonction du rapport de viscosité

On s’intéresse à l’écoulement d’un fluide de viscosité  $\eta_2$  entre deux couches d’épaisseur  $\alpha H$ , contenant un fluide de viscosité différente  $\eta_1$ . C’est un écoulement de cisaillement simple avec une paroi mobile à la vitesse constante  $V_0$

Dans chaque couche  $i = 1, 2, 3$  on a un écoulement de cisaillement simple

$$S_{xy}(y) = B_i \tag{2.35}$$

$$\tag{2.36}$$

$$v_i(y) = \frac{B_i}{\eta_i} y + C_i \tag{2.37}$$

Les conditions aux limites sur la vitesse aux parois nous donnent

$$v_1(H) = V_0 \quad (2.38)$$

$$v_3(0) = 0 \quad (2.39)$$

$$C_1 = V_0 - \frac{B_1 H}{\eta_1} \quad (2.40)$$

$$C_3 = 0 \quad (2.41)$$

$$(2.42)$$

A l'interface la contrainte tangentielle est continue donc  $B_1 = B_2 = B_3 = B$  ainsi que le vitesse :

$$v_1(1 - \alpha H) = v_2(1 - \alpha H) \quad (2.43)$$

$$v_2(\alpha H) = v_3(\alpha H) \quad (2.44)$$

Ceci nous donne la valeur de  $B$  :

$$B = \frac{V_0}{H} \frac{1}{\frac{2\alpha}{\eta_1} + \frac{1-2\alpha}{\eta_2}} \quad (2.45)$$

On peut alors comparer la vitesse à l'interface  $y = \alpha H$  à ce quelle aurait été dans le cas d'un cisaillement simple seulement. On appelle le ratio de viscosité  $s = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ .

$$V_{\text{slip}} = v_3(\alpha H) \quad (2.46)$$

$$= \frac{V_0 \alpha \eta_2}{\eta_1 + 2\alpha(\eta_2 - \eta_1)} \quad (2.47)$$

$$= \frac{V_0 \alpha}{s + 2\alpha(1 - s)} \quad (2.48)$$

On constate sur la figure suivante que la vitesse à l'interface est considérablement plus grande que celle en cisaillement simple quand la couche de fluide périphérique est moins visqueuse.

## 2.5 Écoulement entre deux plaques avec glissement

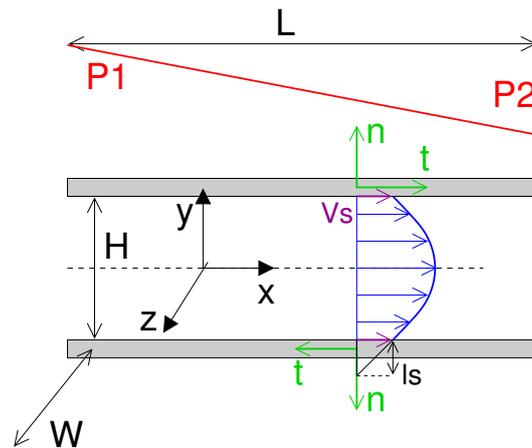


FIGURE 2.11 – Écoulement par dépression entre deux plaques avec glissement

On reprend le problème précédent mais en abandonnant l'hypothèse d'adhérence du polymère à la paroi. Le glissement s'exprime par une relation entre la contrainte de cisaillement à la paroi et la vitesse de glissement  $v_s$ , a priori inconnue. Il existe différents types de loi de glissement possible pour les polymères. La plus simple de toutes est une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de glissement (Loi de Navier)

$$\underline{t} \cdot (\underline{v}_{\text{solide}} - \underline{v}_{\text{fluide}}) = \beta \underline{f} \cdot \underline{t} \quad (2.49)$$

Dans notre cas, on a  $\underline{v}_{\text{solide}} = 0$  aux parois et :

$$y = \frac{H}{2} \quad (2.50)$$

$$\underline{n} = \underline{e}_y \quad (2.51)$$

$$\underline{t} = \underline{e}_x \quad (2.52)$$

$$\underline{f} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad (2.53)$$

$$\underline{f} \cdot \underline{t} = S_{xy} \quad (2.54)$$

$$-v_s = \beta S_{xy} \quad (2.55)$$

$$y = -\frac{H}{2} \quad (2.56)$$

$$\underline{n} = -\underline{e}_y \quad (2.57)$$

$$\underline{t} = -\underline{e}_x \quad (2.58)$$

$$\underline{f} \cdot \underline{t} = S_{xy} \quad (2.59)$$

$$v_s = \beta S_{xy} \quad (2.60)$$

Or par définition de la contrainte de cisaillement :

$$S_{xy} = \eta_0 \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Ceci amène une définition de la constante  $\beta$  cohérente avec la dimension de la loi de glissement :

$$\beta = \frac{l_s}{\eta_0} \quad (2.61)$$

où  $l_s$  est une longueur de glissement ou longueur d'extrapolation. C'est à dire la longueur au bout de laquelle la vitesse serait nulle.

On avait jusqu'à présent :

$$\begin{aligned} S_{xy} &= Gy \\ &= \eta_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x &= \frac{G}{2\eta_0} y^2 + D \end{aligned}$$

La paroi ( $y = \frac{H}{2}$ ) est soumise à une contrainte de cisaillement inconnue mais proportionnelle à la vitesse de glissement :

$$\begin{aligned} S_{xy} &= -\frac{\eta_0}{l_s} v_s \\ &= \frac{GH}{2} \\ v_s &= -\frac{GHl_s}{2\eta_0} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Les conditions aux limites en vitesse à la paroi font intervenir la vitesse de glissement  $v_s$  :

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{G}{2\eta_0} \frac{H^2}{4} + D \\ v_x &= \frac{G}{2\eta_0} \left( y^2 - \frac{H^2}{4} \right) + v_s \end{aligned}$$

En reportant alors le calcul de  $v_s$  (2.62) dans cette expression :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{G}{2\eta_0} \left( y^2 - \frac{H^2}{4} \right) + \left( -\frac{GHl_s}{2\eta_0} \right) \\ &= \frac{G}{2\eta_0} \left( y^2 - \frac{H^2}{4} - Hl_s \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

On peut alors calculer le débit dans la plaque :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^W \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} V_x dy dz \\ &= 2W \int_0^{+\frac{H}{2}} V_x dy \\ &= 2W \frac{G}{2\eta_0} \left[ \frac{y^3}{3} - \left( \frac{H^2}{4} + Hl_s \right) y \right]_0^{\frac{H}{2}} \\ Q &= -G \frac{WH^3}{12\eta_0} \left( 1 + \frac{6l_s}{H} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$G = -Q \frac{12\eta_0}{WH^3 \left( 1 + \frac{6l_s}{H} \right)} \quad (2.65)$$

On constate que la perte de charge  $G$  nécessaire pour atteindre un débit  $Q$  donné est moindre dans le cas du glissement à la paroi.

La vitesse de glissement et  $v_x$  peuvent alors s'exprimer en fonction du débit plutôt que de la perte de charge :

$$v_s = \frac{6Ql_s}{WH^2 \left( 1 + \frac{6l_s}{H} \right)} \quad (2.66)$$

$$v_x = \frac{3Q}{2WH \left( 1 + \frac{6l_s}{H} \right)} \left( 1 - \left( \frac{2y}{H} \right)^2 + \frac{4l_s}{H} \right) \quad (2.67)$$

Le profil de vitesse est tracé dans la Fig. 2.12

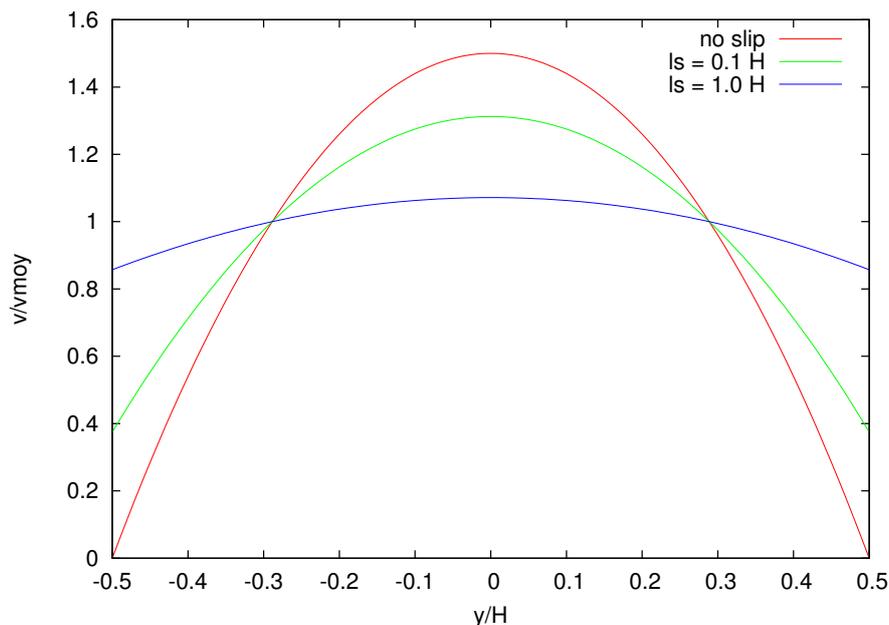


FIGURE 2.12 – Profil de vitesse selon l'importance du glissement d'après l' éq. (2.67)

Enfin, on peut regarder l'influence de la longueur de glissement sur la vitesse de glissement et le gradient de pression. En effet on ne peut pas forcément mesurer localement la longueur de glissement mais on peut en mesurer les effets globalement sur le gradient de pression.

$$\frac{v_s}{v_{moy}} = \frac{6l_s}{H \left(1 + \frac{6l_s}{H}\right)} \quad (2.68)$$

$$\frac{G}{G_{noslip}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{6l_s}{H}\right)} \quad (2.69)$$

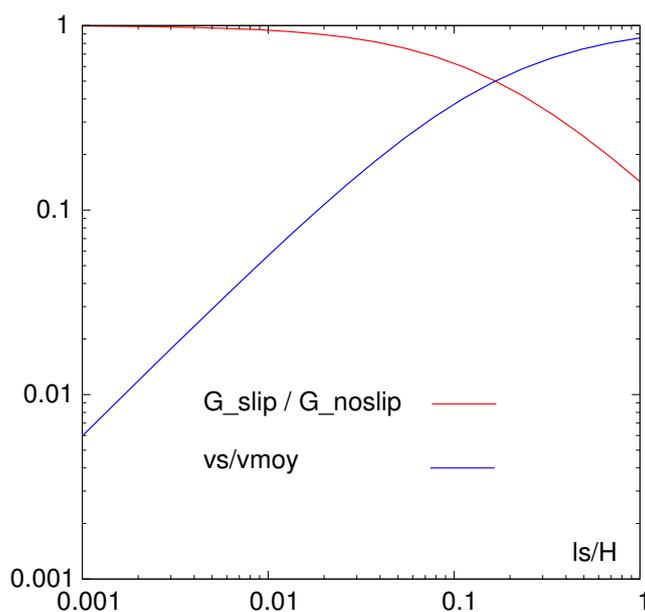


FIGURE 2.13 – Influence de la longueur de glissement sur la vitesse de glissement et le gradient de pression

## 2.6 Écoulement entre deux disques parallèles

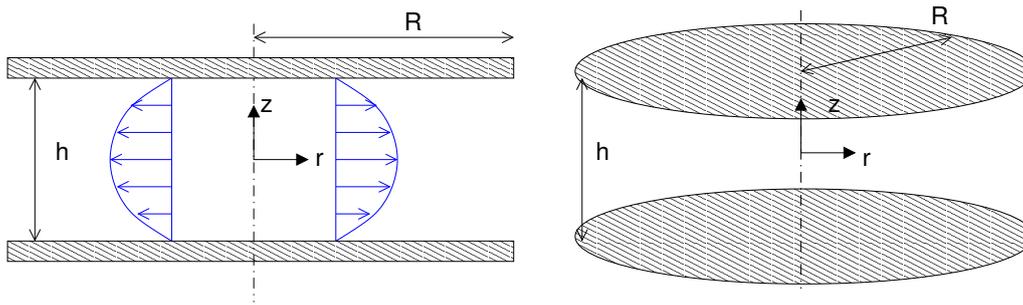


FIGURE 2.14 – Écoulement entre deux disques

Un fluide Newtonien s'écoule du centre d'un disque vers la périphérie avec un débit volumique  $Q$  constant. Les parois des disques sont immobiles :

$$\begin{aligned}
 z &= \pm \frac{h}{2}, \quad \forall r \\
 v_r &= 0 \\
 v_\theta &= 0 \\
 v_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

L'écoulement est de type Poiseuille (par dépression pure) et axisymétrique. La géométrie et les conditions aux limites suggère que l'on cherche l'écoulement sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \forall r, z \\
 v_r(r, z) &= f(z)u(r) \\
 v_\theta &= 0 \\
 v_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

### 2.6.1 Condition d'incompressibilité

Examinons la conditions d'incompressibilité compte tenu de la forme particulière du champ de vitesse :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{v_r}{r} \\
 f \frac{du}{dr} &= -f \frac{u}{r} \\
 \frac{du}{dr} &= -\frac{u}{r} \\
 \frac{du}{u} &= -\frac{dr}{r} \\
 d(\log u) &= d(\log(\frac{1}{r})) \\
 u &= \frac{1}{r} \\
 v_r &= \frac{f(z)}{r}
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

## 2.6.2 Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \underline{d} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \underline{d} &= \begin{pmatrix} -\frac{f(z)}{r^2} & 0 & \frac{df}{dz} \\ 0 & \frac{f(z)}{r^2} & 0 \\ \frac{df}{dz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \underline{S} &= 2\eta_0 \underline{d}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

## 2.6.3 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibres deviennent :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} &= 0 \\
 -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} &= 0
 \end{aligned}$$

Ce qui amène en remplaçant les composantes des contraintes définies dans (2.73) :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4\eta_0 f(z)}{r^3} + \frac{\eta_0}{r} \left( \frac{-4f(z)}{r^2} \right) + \frac{\eta_0 \frac{d^2 f}{dz^2}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\eta_0 \frac{d^2 f}{dz^2}}{r}
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\eta_0 \frac{df}{dz}}{r^2} + \frac{\eta_0 \frac{df}{dz}}{r^2} &= 0 \\
 \frac{\partial P}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

On en déduit que  $P$  ne dépend que de  $r$  seulement et donc l'éq. (2.74) n'est possible que si chaque côté est égal à une constante :

$$\frac{r}{\eta_0} \frac{\partial P}{\partial r} = A = \frac{d^2 f}{dz^2} \tag{2.76}$$

## 2.6.4 Calcul de la vitesse

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f}{dz^2} &= A \\
 \frac{df}{dz} &= Az + C \\
 f &= A \frac{z^2}{2} + Cz + D
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Les conditions aux limites sur la vitesse (2.71) implique pour  $f(z)$  :

$$\begin{aligned}
 f\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= 0 \\
 A\frac{h^2}{8} - C\frac{h}{2} + D &= 0 \\
 A\frac{h^2}{8} + C\frac{h}{2} + D &= 0 \\
 C &= 0 \\
 D &= -\frac{Ah^2}{24} \\
 f &= -\frac{A}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \\
 v_r &= -\frac{A}{2r}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

### 2.6.5 Calcul du débit

On calcule le débit  $Q$  qui traverse une section du disque de rayon  $r = R$  :

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_r(R, z) R d\theta dz \\
 &= 4\pi R \int_0^{\frac{h}{2}} -\frac{A}{2R} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) dz \\
 &= -2\pi A \left[ \frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{h}{2}} \\
 &= -2\pi A \left[ \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right] \\
 &= -\frac{\pi Ah^3}{6} \\
 A &= -\frac{6Q}{\pi h^3}
 \end{aligned}$$

La vitesse finalement devient :

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{3Q}{\pi h^3 r} \frac{h^2}{4} \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right) \\
 &= \frac{3Q}{4\pi r h} \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right) \\
 v_r &= \frac{3}{2} \langle v_r \rangle \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\langle v_r \rangle = \frac{Q}{2\pi r h} \tag{2.80}$$

### 2.6.6 Relation chute de pression - Débit

On calcule la chute de pression dans le disque entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$  On avait (2.76) :

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{\eta_0} \frac{\partial P}{\partial r} &= A \\
 \frac{\partial P}{\partial r} &= -\frac{6\eta_0 Q}{\pi r h^3} \\
 \Delta_{1 \rightarrow 2} P &= -\frac{6\eta_0 Q}{\pi h^3} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

## 2.6.7 Temps de remplissage

L'application pratique de ces résultats se trouve dans le remplissage d'une empreinte à partir d'un point d'injection ou d'un seuil de petite taille. Toutefois, cette situation est instationnaire et la longueur d'écoulement change avec le temps. On doit donc reprendre les formules précédentes en envisageant différentes types de variation de la pression d'injection avec le temps.<sup>3</sup>

### Temps et pression de remplissage pour un débit $Q$ constant

D'après (2.79) la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned}\langle v_r \rangle &= \frac{Q}{2\pi r h} \\ \langle v_r \rangle &= \frac{dR_{\text{front}}}{dt} \\ R_{\text{front}} dR_{\text{front}} &= \frac{Q}{2\pi h} dt\end{aligned}\quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}dt &= \frac{2\pi h}{Q} R_{\text{front}} dR_{\text{front}} \\ t - t_0 &= \frac{\pi h}{Q} (R_{\text{front}}^2 - R_0^2)\end{aligned}\quad (2.83)$$

La pression de remplissage pour maintenir ce débit  $Q$  constant se calcule à partir de la longueur d'écoulement :  $R_{\text{front}}$

$$R_{\text{front}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi h} (t - t_0) + R_0^2}$$

Auparavant on avait établi la relation entre la chute de pression et le débit (2.81)

$$\begin{aligned}\Delta P &= -\frac{6\eta_0 Q}{\pi h^3} \log\left(\frac{R_{\text{front}}}{R_0}\right) \\ &= -\frac{6\eta_0 Q}{\pi h^3} \log\left(\frac{\sqrt{\frac{Q}{\pi} (t - t_0) + R_0^2}}{R_0}\right)\end{aligned}$$

Finalement pour calculer la pression d'injection au cours du temps, il faut remarquer que, au front de matière, en  $r = R_{\text{front}}$  la pression est toujours égale à la pression atmosphérique et que donc :

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_{\text{atm}} - P_{\text{inj}} \\ P_{\text{inj}} &= P_{\text{atm}} + \frac{3\eta_0 Q}{\pi h^3} \log\left(\frac{Q}{\pi R_0^2} (t - t_0) + 1\right)\end{aligned}$$

Ce qui nous donne en utilisant comme grandeur de référence :

$$\begin{aligned}t_{\text{ref}} &= \frac{2\pi R_0^2 h}{Q} \\ \Delta P_{\text{ref}} &= \frac{6\eta_0 Q}{\pi h^3}\end{aligned}\quad (2.84)$$

3. Le fait que l'on puisse froidement et sans aucun scrupules utiliser des formules établies en écoulement stationnaires pour les appliquer à un écoulement instationnaire est en fait du, encore une fois, à la faiblesse des termes inertiels comparés au termes visqueux

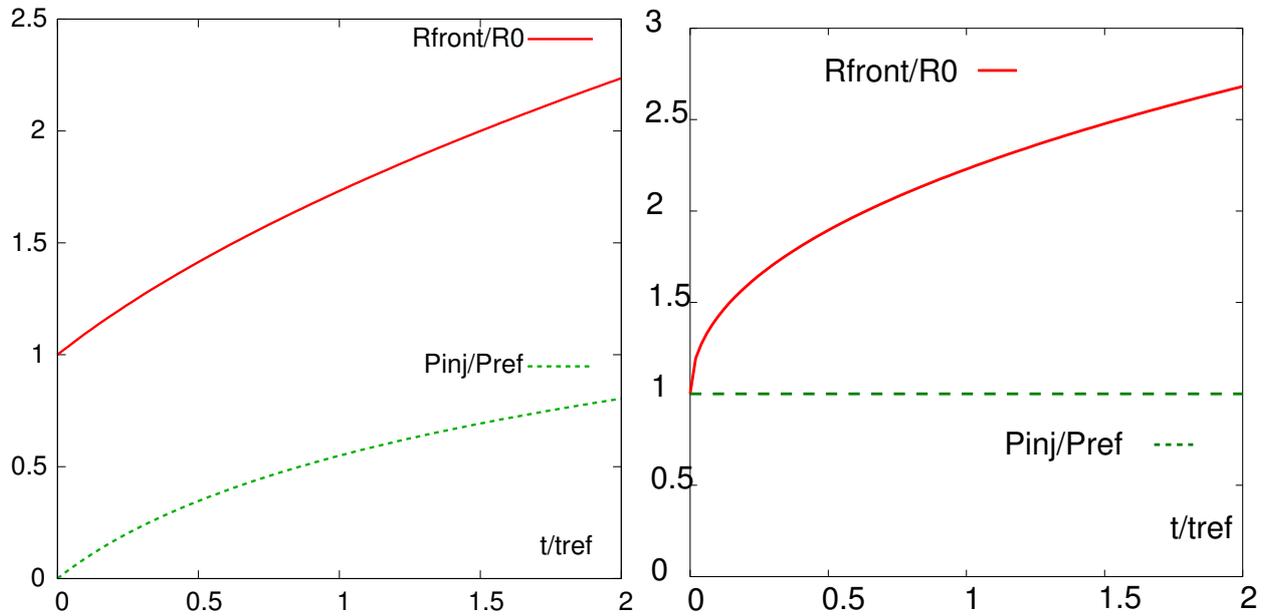


FIGURE 2.15 – R du front de matière et pression d'injection pour un débit  $Q$  constant (g), pour une pression d'injection constante (d)

### Temps et remplissage et longueur maximale d'écoulement pour une pression d'injection constante

On conserve la relation (2.82) et la relation entre la chute de pression entre deux points et le débit dans l'écoulement :

$$\begin{aligned}
 \frac{dr_{\text{front}}}{dt} &= \frac{Q}{2\pi R_{\text{front}} h} & (2.85) \\
 \Delta P &= -\frac{6\eta_0 Q}{\pi h^3} \log\left(\frac{R_{\text{front}}}{R_0}\right) \\
 &= P_{\text{atm}} - P_{\text{inj}} \\
 P_{\text{inj}} - P_{\text{atm}} &= \frac{12\eta_0}{h^2} R_{\text{front}} \log\left(\frac{R_{\text{front}}}{R_0}\right) \frac{dR_{\text{front}}}{dt} \\
 &= \frac{12\eta_0}{h^2} \left( R_{\text{front}} \log R_{\text{front}} \frac{dR_{\text{front}}}{dt} - R_{\text{front}} \log R_0 \frac{dR_{\text{front}}}{dt} \right) \\
 (P_{\text{inj}} - P_{\text{atm}})(t - t_0) &= \frac{12\eta_0}{h^2} \left( \left[ \frac{R_{\text{front}}^2}{4} (2 \log R_{\text{front}} - 1) \right]_{R_0}^{R_{\text{front}}} - \log R_0 \left[ \frac{R_{\text{front}}^2}{2} \right]_{R_0}^{R_{\text{front}}} \right) \\
 t - t_0 &= \frac{6\eta_0 r^2}{h^2 (P_{\text{inj}} - P_{\text{atm}})} \left( -\log\left(\frac{R_0}{R_{\text{front}}}\right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \left(\frac{R_0}{R_{\text{front}}}\right)^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

## 2.7 Écoulement dans une plaque de distribution

### 2.7.1 Introduction

Le filage est un procédé dans lequel on tire continûment des fils de polymère fondus de l'extrémité d'un réseau comprenant un grand nombre de capillaires (**spinneret**) pour qu'ils puissent se solidifier ensuite, par exemple à l'air ambiant. Ce procédé est à la base de la fabrication des fibres synthétiques.

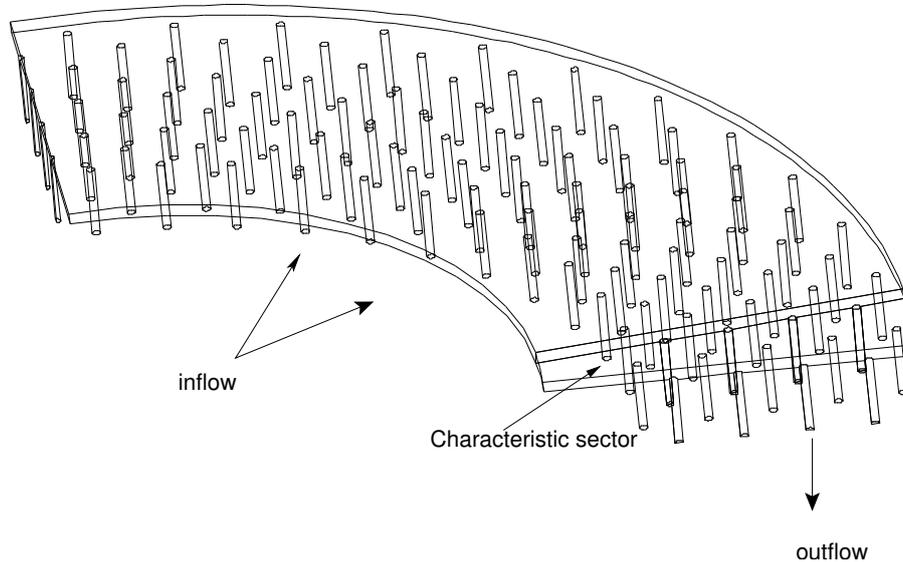


FIGURE 2.16 – Plaque de distribution où le polymère se répartit entre les différentes couronnes de capillaires

Pour y parvenir dans un pilote industriel, le polymère est tout d'abord distribué par une pompe puis traverse différents filtres et enfin atteint une plaque de distribution où plusieurs centaines de trous et de capillaires ont pu être percés. Pour un pilote donné, le volume de fibres produit dépend directement du nombre de capillaires qu'il a été possible de percer dans la plaque.

Toutefois cette plaque doit être bien conçue pour éviter des problèmes de disparité des débits d'une couronne de capillaires à l'autre, de taux de cisaillement trop faible qui autoriserait le "gels" de polymère ou le colmatage, et de temps de résidence.

### 2.7.2 Modèle de l'écoulement

Le modèle qui suit permet de trouver les caractéristiques principales de ce type d'écoulement telles que le déséquilibre des débits de couronnes à couronnes, les profils de vitesse dans la plaque et les temps de séjours. Comme d'habitude, le modèle est basé sur le fait que les nombres de Reynolds à considérer sont faibles et que par conséquent les longueurs nécessaires à l'obtention d'un profil établi sont très courtes. C'est pourquoi, on peut étudier ce problème comme une succession d'écoulements développés dans un disque, du centre vers la périphérie, en parallèle avec des écoulements développés dans des tubes cylindriques identiques. Ces deux écoulements ont pour caractéristiques :

- Dans un disque de hauteur  $h$  et de rayon interne  $l$  la vitesse radiale  $v_r$  et la chute de pression  $\Delta P_{\text{disk}}$  sont :

$$v_r(r, z) = \frac{3Q_{\text{disk}}}{4\pi r h} \left(1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right) \quad (2.86)$$

$$\Delta P_{\text{disk}}(r) = \frac{6\eta Q_{\text{disk}} \log\left(\frac{r}{l}\right)}{\pi h^3} \quad (2.87)$$

- L'écoulement dans une conduite de rayon  $R$  et de longueur  $L$  où la vitesse et la chute de pression  $v_z$   $\Delta P_{\text{duct}}$  sont :

$$v_z(z) = \frac{2Q_{\text{duct}}}{\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (2.88)$$

$$\Delta P_{\text{duct}} = \frac{8\eta Q_{\text{duct}} L}{\pi R^4} \quad (2.89)$$

où  $Q_{\text{disk}}$  et  $Q_{\text{duct}}$  représentent les débits volumiques dans chaque géométrie. De plus on pose que c'est le nombre  $N_k$  de capillaires par couronne  $k$  et la distance entre couronnes qui compte. Plus précisément, on peut constater que le fluide s'écoule dans la plaque de distribution depuis le centre du disque vers sa périphérie et que en chemin, il remplit chaque capillaire. Chaque capillaire ensuite amène le fluide à l'air libre, où la pression est égale à la pression atmosphérique (Fig. 2.17)..

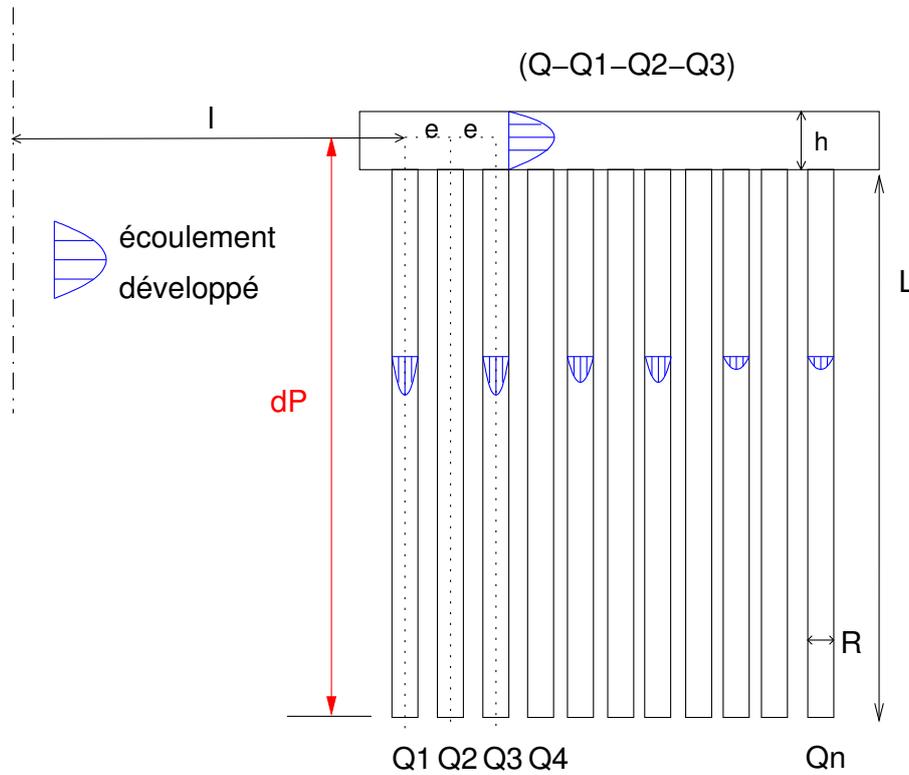


FIGURE 2.17 – Modèle de l'écoulement dans la plaque de distribution

Le modèle est alors construit en posant que la différence de pression totale entre l'entrée de la plaque de distribution et l'air ambiant est **constante, quelle que soit le chemin pris par le fluide**. Sur chaque chemin possible cette chute de pression est égale à la somme des chutes de pression dans les géométries élémentaires, disque et tubes. Dans le disque le débit diminue chaque fois que passe d'une couronne à l'autre, et puisque pour une même couronne tous les capillaires sont équivalents et on donc le même débit  $Q_k$  :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{8\eta Q_1 L}{\pi R_1^4} \\ \Delta P &= \frac{6\eta(Q - N_1 Q_1) \log\left(\frac{l+e}{l}\right)}{\pi h^3} + \frac{8\eta Q_2 L}{\pi R_2^4} \\ &\vdots \\ \Delta P &= \sum_{j=1}^{k-1} \left( \frac{6\eta(Q - \sum_{l=1}^j N_l Q_l) \log\left(\frac{l+je}{l+(j-1)e}\right)}{\pi h^3} \right) + \frac{8\eta Q_k L}{\pi R_k^4} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Le débit total se conserve :

$$Q = N_1 Q_1 + \dots + N_k Q_k + \dots + N_n Q_n \quad (2.91)$$

On introduit des paramètres géométriques adimensionnels :  $\alpha, \beta, \delta_k$  et les inconnues adimensionnelle  $p, q_k$  :

$$p = \frac{\Delta P \pi R^4}{8L\eta Q} \quad (2.92)$$

$$q_k = \frac{Q_k}{Q}, \quad q = \sum_k q_k = 1 \quad (2.93)$$

$$\delta_k = \left(\frac{R_k}{R}\right)^4 \quad (2.94)$$

$$\alpha = \frac{3R^4}{4Lh^3} \quad (2.95)$$

$$\beta = \frac{e}{l} \quad (2.96)$$

$$N = \sum_{k=1}^n N_k \quad (2.97)$$

On peut alors écrire la conservation du débit et les chutes de pression sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q_1}{\delta_1} - p \\ -\alpha \log(1 + \beta) &= -\alpha \log(1 + \beta) N_1 q_1 + \frac{q_2}{\delta_2} - p \\ -\alpha \log(1 + 2\beta) &= -\alpha \log(1 + 2\beta) N_1 q_1 - \alpha \log\left(\frac{1 + 2\beta}{1 + \beta}\right) N_2 q_2 + \frac{q_3}{\delta_3} - p \\ &\vdots \\ -\alpha \log(1 + (k-1)\beta) &= -\alpha \sum_{j=1}^{k-1} \left( \log\left(\frac{1 + (k-1)\beta}{1 + (j-1)\beta}\right) N_j q_j \right) + \frac{q_k}{\delta_k} - p \\ &\vdots \\ -\alpha \log(1 + (n-1)\beta) &= -\alpha \sum_{j=1}^{n-1} \left( \log\left(\frac{1 + (n-1)\beta}{1 + (j-1)\beta}\right) N_j q_j \right) + \frac{q_n}{\delta_n} - p \quad (2.98) \\ q &= N_1 q_1 + \dots + N_k q_k + \dots + N_n q_n \quad (2.99) \end{aligned}$$

Ces équations constitue un système linéaire  $(n+1)$  par  $(n+1)$  :  $AX = B$  où  $X$  est le vecteur d'inconnues,  $A$  la matrice du système et  $B$  le vecteur de  $^4$ .

$$X = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \\ p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha \log(1 + (k-1)\beta) \\ \vdots \\ -\alpha \log(1 + (n-1)\beta) \\ q \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

---

4. whatever

Les coefficients de la matrice sont alors :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ A_{2,1} & \frac{1}{\delta_2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \cdots & A_{k,j} & \cdots & A_{k,k-1} & \frac{1}{\delta_k} & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 & -1 \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{n,n-1} & \frac{1}{\delta_n} & -1 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_j & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & N_{n-1} & N_n & 0 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

avec

$$A_{k,j} = -\alpha \left( \log \left( \frac{1 + (k-1)\beta}{1 + (j-1)\beta} \right) N_j \right) \quad 1 \leq j < k \leq n \quad (2.102)$$

Ce système linéaire peut être résolu un logiciel mathématique (Matlab, Maple). Les prédictions du modèle sont en très bon accord avec les calculs 3D par éléments finis (Fig. 2.18).

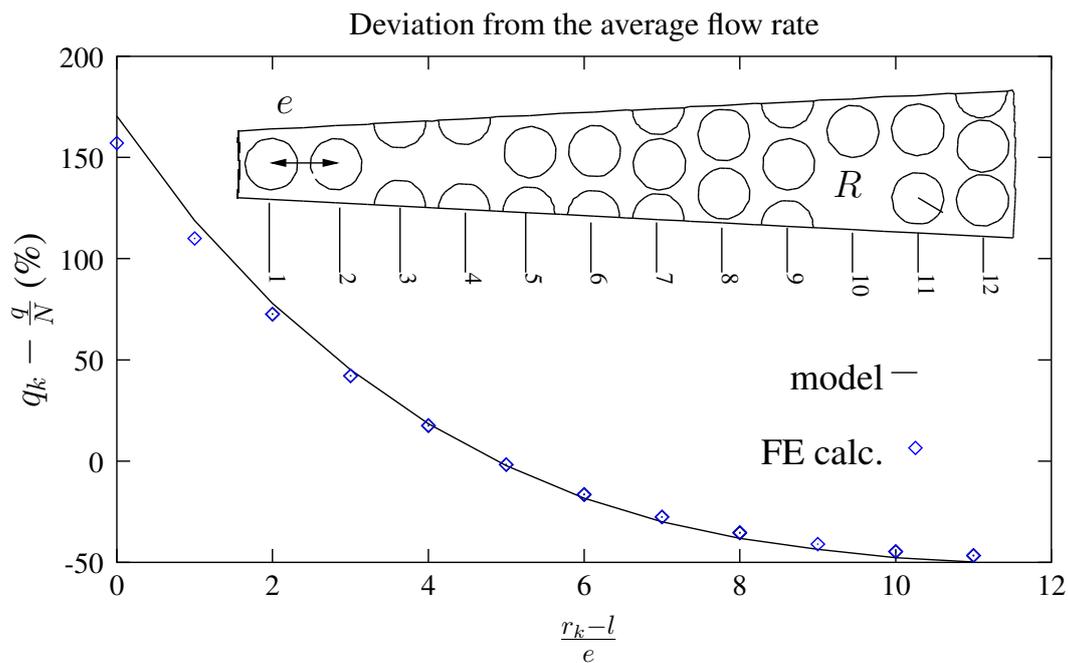


FIGURE 2.18 – Variation des débits par couronnes.

### 2.7.3 Temps de séjour et taux de cisaillement à la paroi

Maintenant que l'on connaît la distribution des débits dans la plaque on peut calculer les temps de séjour (**residence time**) et les taux de cisaillement à la paroi (**wall shear rate**, dans la plaque là où ils il peut être inquiétant qu'ils soit trop faible (colmatage, gélification)).

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3Q_p}{\pi r h^2} \quad (2.103)$$

$$t_r = t_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{l+(k-1)e}^{l+ke} \frac{dr}{v_r}$$

$$= t_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\pi e(2l + (2k - 1)e)}{3Q_p(k)} \quad (2.104)$$

$$\text{with } Q_p(k) = Q - \sum_{i=1}^k Q_i$$

Le modèle peut être également facilement modifié pour pouvoir tenir compte du cas où l'influx de polymère ne vient pas seulement du centre du disque mais également de plusieurs tubes réparti sur le dessus de la plaque. On peut étudier le cas (non-linéaire, cette fois) d'un fluide obéissant à la loi puissance ou encore faire une étude de sensibilité de la solution à la variation de la valeur de rayon de perçage. Pour tous ces détails référez-y vous à la publication [6].

## 2.7.4 Écoulement en filière d'extrusion

Examen 4 GMPP 05/06

Une filière droite d'extrusion dont la section est composée d'une section circulaire accolée à une section rectangulaire est présentée dans la Figure 2.19. La vitesse du fluide est nulle sur les parois de cette filière. Il existe une dépression  $\Delta P$  entre l'amont et l'aval qui met le fluide en écoulement à un débit  $Q$ .

1. Dans le cas de cette géométrie, est-ce que l'écoulement est développé dans au moins une direction ?
2. En utilisant des formules déjà établies pour des géométries d'écoulement bien plus simples, trouvez une approximation de la relation entre le débit  $Q$  et la chute de pression  $\Delta P$
3. Est ce que l'on a sous-estimé ou surestimé la chute de pression de cette filière ?
4. Calculer la vitesse maximale dans le tube et dans la plaque, ainsi que le cisaillement sur la paroi du tube et sur la paroi supérieure de la plaque

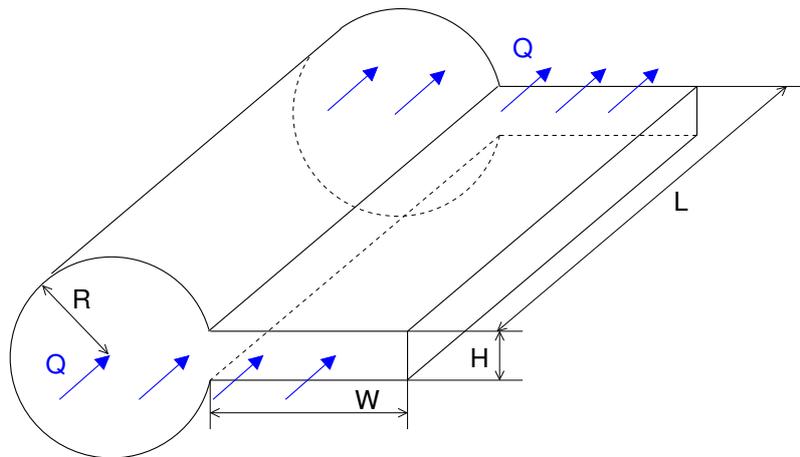


FIGURE 2.19 – filière d'extrusion

### Réponses

1. La section offerte à l'écoulement dans la direction  $z$  est constante donc l'écoulement est développé.
2. On est en face d'un écoulement par dépression sans plaque mobile, à travers une section a priori quelconque. Cette section est approximativement constituée par la juxtaposition d'une section circulaire et d'une section rectangulaire. Cette dernière section est elle-même approchée par deux plaques parallèles. On néglige de cette façon l'écoulement qui se produit à la jonction du cercle et du rectangle et on considère un écoulement par dépression dans un tube de rayon  $R$ , longueur  $L$  en parallèle avec un écoulement par dépression dans une plaque de hauteur  $H$ , largeur  $W$  et longueur  $L$  :

$$\frac{\Delta P}{L} = -\frac{8\eta_0 Q_1}{\pi R^4} \quad (2.105)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = -\frac{12\eta_0 Q_2}{WH^3} \quad (2.106)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (2.107)$$

On élimine la perte de charge des deux premières relations :

$$1 = \frac{8\eta_0 WH^3 Q_1}{12\eta_0 \pi R^4 Q_2} \quad (2.108)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3\pi R^4}{2WH^3} \quad (2.109)$$

$$Q_1 = Q_2 \frac{3\pi R^4}{2WH^3} \quad (2.110)$$

$R$	$H$	$W$	$Q$	$\eta_0$
1	0.75	4	1	1
$\frac{\Delta P}{L}$				1.8750
$\frac{\Delta P}{L}$ Polyflow				1.7806

TABLE 2.1 – comparaison Polyflow / approx

$$Q = Q_2 \frac{3\pi R^4}{2WH^3} + Q_2 \quad (2.111)$$

$$Q_2 = Q \frac{WH^3}{WH^3 + \frac{3}{2}\pi R^4} \quad (2.112)$$

$$Q_1 = Q \frac{3}{2} \frac{\pi R^4}{WH^3 + \frac{3}{2}\pi R^4} \quad (2.113)$$

On exprime maintenant la perte de charge dans la plaque avec  $Q$  :

$$\frac{\Delta P}{L} = -\frac{24\eta_0 Q}{2WH^3 + 3\pi R^4} \quad (2.114)$$

3. mmhhh ... en fait on a remplacé la jonction entre le tube et la plaque , où il y avait écoulement par une paroi où la vitesse est nulle. De ce point de vue on surestime la perte de charge.

4. Dans le tube :

$$\begin{aligned} V_{1\max} &= \frac{2Q_1}{\pi R^2} \\ &= \frac{3QR^2}{\frac{3}{2}\pi R^4 + WH^3} \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{\text{paroi}} &= \frac{4Q_1}{\pi R^3} \\ &= \frac{6QR}{\frac{3}{2}\pi R^4 + WH^3} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Dans la plaque :

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{3}{2} \frac{Q_2}{WH} \\ &= \frac{3}{2} \frac{QH^2}{\frac{3}{2}\pi R^4 + WH^3} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{\text{paroi}} &= 6 \frac{Q_2}{WH^2} \\ &= \frac{6QH}{\frac{3}{2}\pi R^4 + WH^3} \end{aligned} \quad (2.118)$$

### Validité de l'approximation

On peut comparer notre approximation à un calcul numérique 2.5D par éléments finis (Polyflow) pour les valeurs suivantes :

La carte des vitesses est donnée dans la figure 2.20 :

Dans notre approche, nous avons simplement juxtaposé un écoulement par dépression dans un tube à un écoulement par dépression dans une plaque. Si on compare cette fois notre approximation à la vitesse calculée par Polyflow le long d'une droite médiane (Fig. 2.21), on est très proche également dans la majeure partie de la géométrie, sauf à la jonction entre le tube et la plaque et au voisinage de la paroi de la plaque.

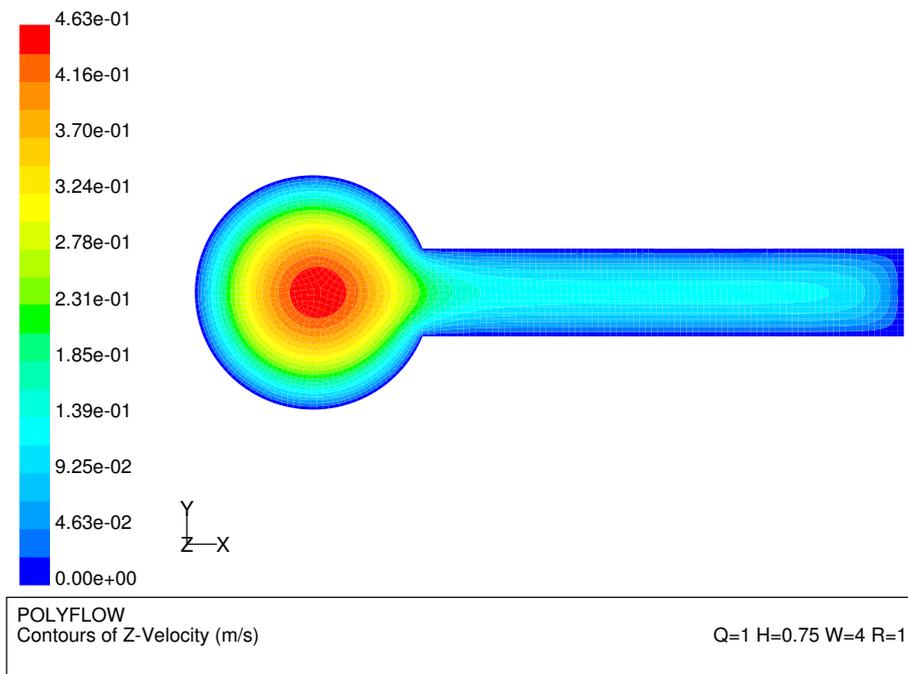


FIGURE 2.20 – Champ de vitesse dans la section

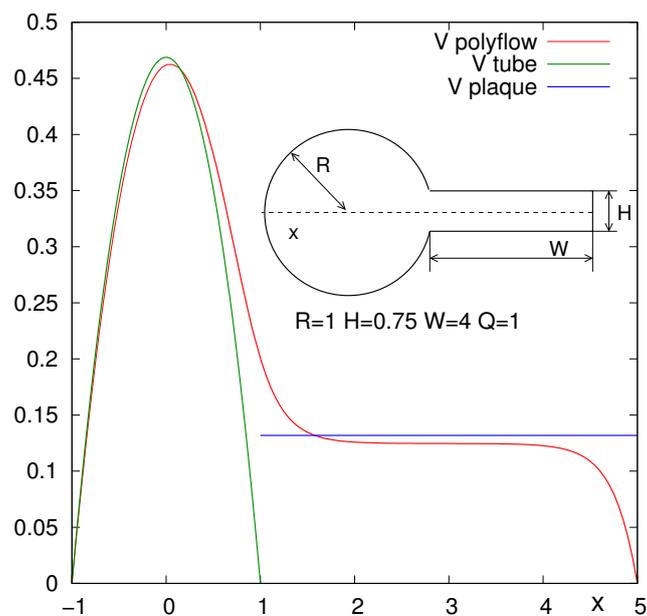


FIGURE 2.21 – profil de vitesse le long d’une ligne médiane. Comparaison entre le calcul par éléments finis et l’approximation

## 2.8 Mesure de MFI

Dans l'industrie, l'indication la plus courante<sup>5</sup> sur les propriétés rhéologiques du polymère est sous la forme d'une mesure de MFI Melt Flow Index qui est une valeur de débit massique (en gr/10min).

Dans cette application, nous allons tenté de relier cette valeur de MFI à une valeur de viscosité Newtonienne équivalente.

L'appareillage (Fig. 2.22) est en fait une sorte de rhéomètre capillaire à contrainte imposée par le poids d'une masse connue sur un piston qui des descend dans une chambre thermostatée contenant le polymère fondu en considération. Ce polymère passe dans un capillaire et est ensuite extrudé puis découpé et pesé toutes les 10 minutes. Pour pouvoir exploiter cette valeur il faut connaître les dimensions (Tab. 2.2) de cet

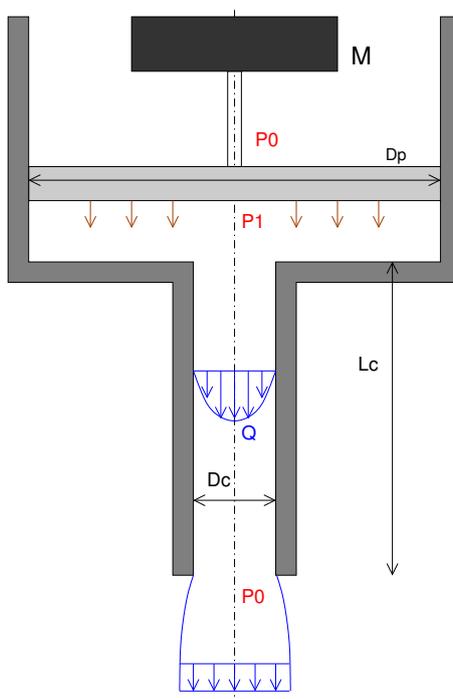


FIGURE 2.22 – MFI

appareillage standardisé : Les conditions de température et de chargement sont standardisées et répertoriées

Piston	$D_p$	9.5504 mm
Capillaire	$D_c$	2.0955 mm
	$L_c$	8.0000 mm

TABLE 2.2 – Dimensions du MFI

dans le Tab. 2.3.

### 2.8.1 Un exemple : Le grade "super X"

Super X est le nouveau polymère tendance cet automne : d'après le site web qui lui est dédié ses propriétés de "toughness" "processability" "chemical resistance" sont toutes "outstanding". A part ça, rien pas d'info chiffrée. Ah si quand même, un MFI 20 ( conditions E )

Calculer alors le débit volumique correspondant, le taux de cisaillement à la paroi du capillaire (considérez que c'est un fluide Newtonien) et enfin la viscosité Newtonienne équivalente.

5. en fait souvent la seule

**Solution**

$$Q = \frac{0.001 \text{kg MFI}}{600 \text{s}} \frac{1}{\rho} \quad (2.119)$$

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad (2.120)$$

$$\Delta P = \frac{4Mg}{\pi D_p^2} \quad (2.121)$$

$$\eta_0 = \frac{\Delta P \pi D_c^4}{128 L_c Q} \quad (2.122)$$

**A. N.** Faute de mieux on suppose que la masse volumique est  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . On a de plus  $M = 2160 \text{g}$ ,  $g = 9.81 \text{m/s}$  et dans ce cas :  $\dot{\gamma} = 37 \text{s}^{-1}$  et  $\eta_0 = 524 \text{Pas}$ .

Condition	Température (C)	Masse de chargement (g)
A	125	325
B	125	2160
C	150	2160
D	190	325
E	190	2160
F	190	21600
G	200	5000
H	230	1200
I	230	3800
J	265	12500
K	275	325
L	230	2160
M	190	1050
N	190	10000
O	300	1200
P	190	5000
Q	235	1000
R	235	2160
S	235	5000
T	250	2160
U	310	12500

TABLE 2.3 – Liste des conditions standard d'utilisation du MFI. Note : les masses de chargement indiquées **tiennent compte** du poids du piston (325 g)

## 2.9 Écoulement dans une filière plate

Une filière plate (Fig. 2.23) d'entrefer  $H$  est alimentée latéralement par un tube de rayon  $R$  et longueur  $L$ . Dans le cas d'un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$  on cherche à déterminer le profil de pression et le déséquilibre des vitesses

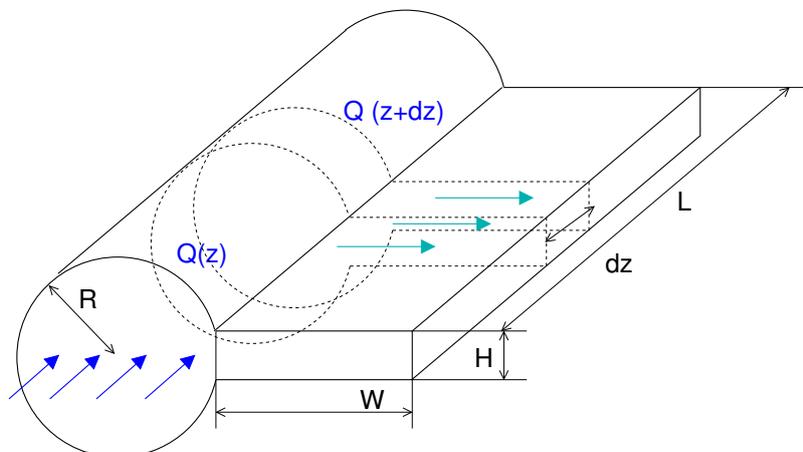


FIGURE 2.23 – filière plate d'extrusion

$$Q_{\text{tube}}(z + dz) - Q_{\text{tube}}(z) = Q_{\text{plaque}} \quad (2.123)$$

$$\frac{dP(z + dz)}{dz} \frac{\pi R^4}{8\eta_0} - \frac{dP(z)}{dz} \frac{\pi R^4}{8\eta_0} = P \frac{H^3}{12\eta_0 W} dz \quad (2.124)$$

$$\frac{\pi R^4}{8\eta_0} \left( \frac{dP(z + dz)}{dz} - \frac{dP(z)}{dz} \right) = P \frac{H^3}{12\eta_0 W} dz \quad (2.125)$$

$$\frac{\pi R^4}{8\eta_0} \left( \frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dz} + \frac{d^2 P}{dz^2} dz \right) = P \frac{H^3}{12\eta_0 W} dz \quad (2.126)$$

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = P \frac{2H^3}{3\pi W R^4} \quad (2.127)$$

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - \alpha^2 P = 0 \quad (2.128)$$

$$(2.129)$$

La solution générale de cette équation différentielle :

$$P = A \cosh(\alpha z) + B \sinh(\alpha z) \quad (2.130)$$

Les conditions aux limites sur l'écoulement dans le tube sont les suivantes : au début une pression initiale, à la fin du tube pas de débit donc pas de gradient de pression.

$$P(0) = P_0 \quad (2.131)$$

$$\frac{dP}{dz}(L) = 0 \quad (2.132)$$

donc dans ce cas :

$$A = P_0 \quad (2.133)$$

$$B = -P_0 \tanh \alpha L \quad (2.134)$$

$$P = P_0 (\cosh(\alpha z) - \tanh(\alpha L) \sinh(\alpha z)) \quad (2.135)$$

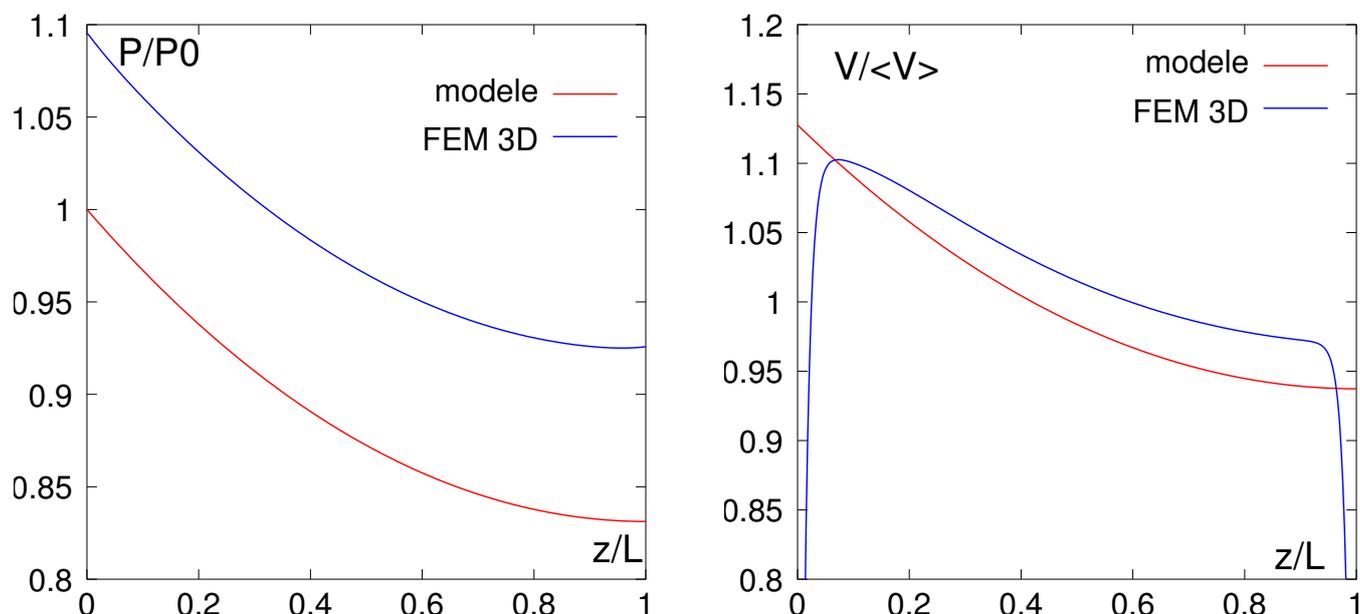


FIGURE 2.24 – Profil de pression le long de l'axe du cylindre normalisé par la pression  $P_0$  d'entrée. Profil de vitesse latérale dans la plaque normalisé par la vitesse moyenne  $\langle V \rangle = \frac{Q}{LH}$

**Questions** Dans quelle mesure le profil de vitesse dans la plaque est-il déséquilibré ?

**Réponse** : Débit dans la plaque :  $Q = \frac{PH^3 dz}{W12\eta_0}$  vitesse moyenne dans la plaque  $V = \frac{Q}{Hdz}$  la vitesse moyenne est directement fonction de la pression.

De plus, ceci permet de trouver la valeur que doit prendre la pression d'entrée  $P_0$  lorsque l'on impose le débit  $Q$  :

$$P_0 = \frac{12\eta_0 W Q}{H^3} \frac{\alpha}{\tanh(\alpha L)} \quad (2.136)$$

## 2.10 Temps de purge d'un réservoir

On souhaite vider un réservoir rempli de polymère fondu, simplement en le laissant s'écouler par gravité par un tube. C'est une très mauvaise idée. Démontrer pourquoi. Le volume dans le réservoir est donné à tout instant  $t$  par :

$$V_v = \pi R_v^2 H(t) \quad (2.137)$$

Le débit volumique issu du réservoir est alors simplement :

$$Q = \pi R_v^2 \dot{H} \quad (2.138)$$

Dans le capillaire la chute de pression est créée par la hauteur de fluide qui règne dans le réservoir. Elle correspond également à un écoulement développé d'un fluide Newtonien dans tube

$$\Delta P = P(z=0) - P(z=-L) \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} &= \rho g (H(t) + L) \\ &= \frac{8\eta_0 L Q}{\pi R^4} \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$= \frac{8\eta_0 L R_v^2 \dot{H}}{R^4} \quad (2.141)$$

on obtient alors une équation différentielle du premier ordre sur  $H$  :

$$\dot{H} = \beta(L + H) \quad (2.142)$$

$$\beta = \frac{\rho g}{8\eta_0 L R_v^2} \quad (2.143)$$

$$dt = \frac{dH}{\dot{H}} \quad (2.144)$$

$$\Delta t = \int_0^{H_0} \frac{1}{\beta(L+H)} dH \quad (2.145)$$

$$= \frac{\log(L+H_0) - \log(L)}{\beta} \quad (2.146)$$

$$= \frac{8\eta_0 L R_v^2}{\rho g} \log\left(1 + \frac{H_0}{L}\right) \quad (2.147)$$

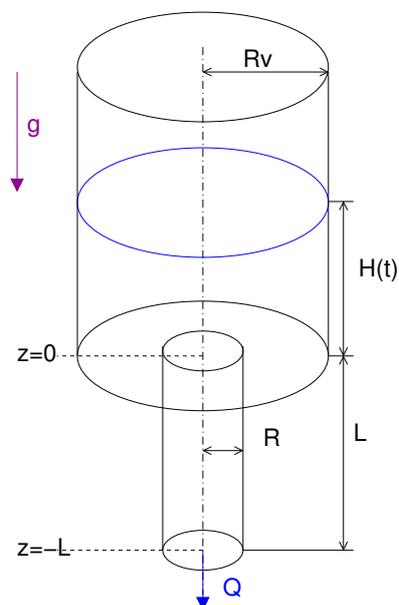


FIGURE 2.25 – Réservoir se vidant inexorablement dans un capillaire

## 2.11 Pression d'injection

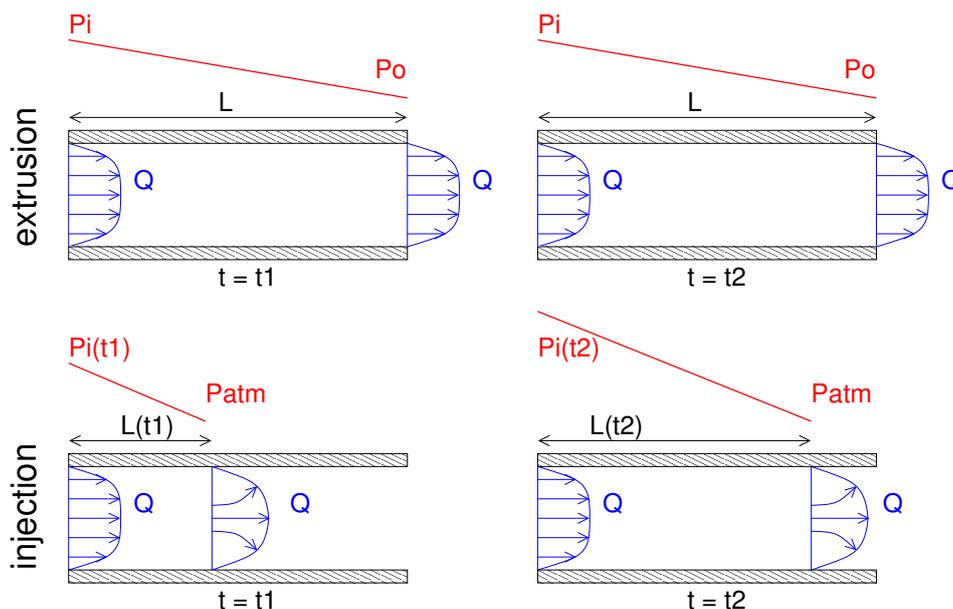


FIGURE 2.26 – différence entre les écoulements en filière d'extrusion et en injection dans un moule

On peut déjà utiliser les relations précédentes très simples pour modéliser des phénomènes plus complexes comme les courbes caractéristiques de pression de remplissage en injection. Partant de la relation chute de pression débit entre deux plaques parallèles, valable en écoulement stationnaire :

$$\Delta P = -\frac{12\eta_0 QL}{WH^3} \quad (2.148)$$

$$\Delta P = P_o - P_i \quad (2.149)$$

Cette relation peut parfaitement s'appliquer au remplissage d'une empreinte où la pression d'injection  $P_i(t)$  est reliée au débit  $Q$  et à la position  $L(t)$  du front de matière au cours du temps :

$$P_i(t) = P_{atm} + \frac{12\eta_0 QL(t)}{WH^3} \quad (2.150)$$

La position du front de matière ou longueur d'écoulement est reliée à la vitesse moyenne instantanée :

$$\frac{dL}{dt} = V_{moy} \quad (2.151)$$

$$V_{moy} = \frac{Q}{WH} \quad (2.152)$$

Si l'on vise une application où le débit volumique  $Q$  est constant au cours du temps on aura tout simplement :

$$L(t) = V_{moy}t \quad (2.153)$$

$$= \frac{Qt}{WH} \quad (2.154)$$

Donc (2.150) devient

$$P_i(t) = P_{atm} + \frac{12\eta_0 Q^2 t}{W^2 H^4} \quad (2.155)$$

### Remarques

1. La pression d'injection doit augmenter avec le temps pour maintenir une vitesse de remplissage constante...
2. Si l'on souhaite doubler la vitesse d'injection, la vitesse de montée en pression sera multipliée par quatre ....

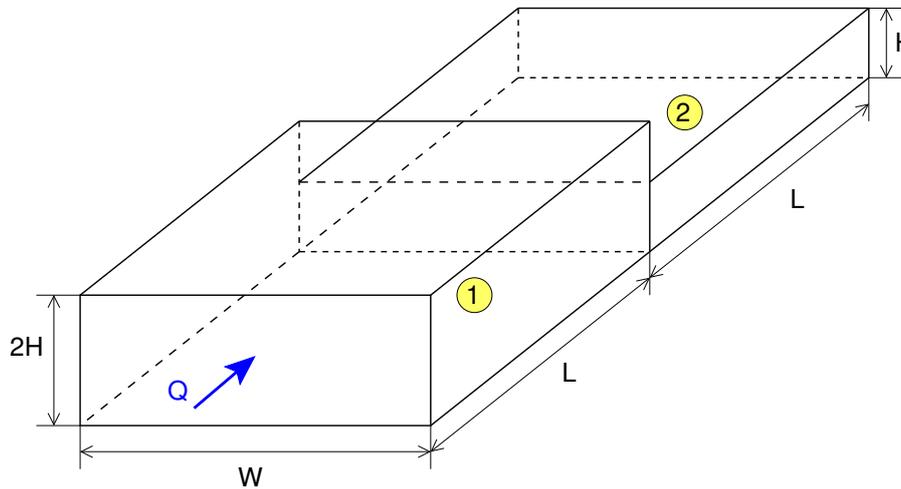


FIGURE 2.27 – Géométrie A : série

### 2.11.1 Comparaison entre écoulement en filière d'extrusion et remplissage d'une empreinte

exam 4GMPP 290107

Dans les exercices suivants, on s'attache à étudier l'écoulement d'un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$  dans une géométrie de section rectangulaire mais dans deux types de procédés différents : l'extrusion et l'injection.

- Dans le cas de l'extrusion, la géométrie est une filière dans laquelle l'écoulement est stationnaire. On cherche la relation entre la chute de pression et le débit.
- Dans le cas de l'injection, la géométrie est une empreinte qui est remplie par l'avance d'un front de matière. Il s'agit d'un écoulement instationnaire, cette fois, pour lequel on peut déterminer l'évolution de la pression d'injection nécessaire pour maintenir un débit d'injection constant.

Vous pouvez présenter vos résultats sous forme adimensionnelle en choisissant au départ des grandeurs caractéristiques du problème (pression, vitesse, temps) <sup>6</sup>

### 2.11.2 Géométrie A, série

La géométrie de section rectangulaire est présentée dans la Fig. 2.27. On suppose dans la suite que  $H \ll W/2$ . Un débit  $Q$  constant de fluide est créé à l'entrée de la géométrie dont toutes les parois sont immobiles.

#### Extrusion

1. En vous appuyant sur la formule de la perte de charge entre deux plaques parallèles, calculez la chute de pression  $\Delta P$  associée à cette filière en fonction du débit  $Q$  et des caractéristiques géométriques  $H, W, L$ .
2. Calculez la vitesse moyenne  $V_{\text{moy}}$  dans chaque partie de la filière (1 et 2). Où le fluide s'écoulera-t-il manifestement le plus vite ?

#### Injection

On s'intéresse cette fois au remplissage de cette empreinte et à la pression d'injection qu'il est nécessaire de créer à l'entrée de la géométrie pour maintenir un débit  $Q$  constant tout au long du remplissage.

6. Vous n'êtes pas obligés

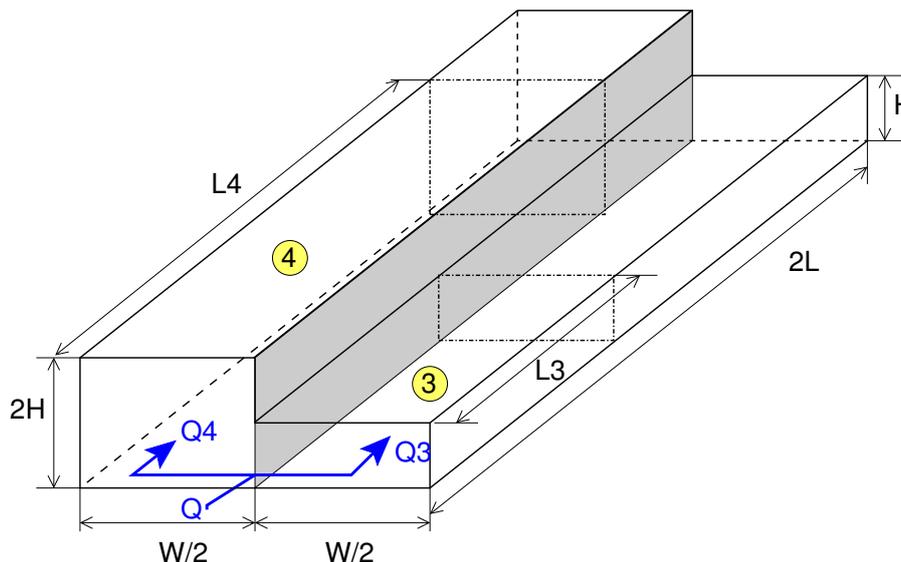


FIGURE 2.28 – Géométrie B : parallèle

1. Exprimez le temps de remplissage total de cette géométrie et l'évolution des longueur d'écoulement dans chaque partie. Utilisez la définition de la longueur d'écoulement :

$$L(t) = V_{\text{moy}} t \quad (2.156)$$

où  $t$  est le temps.

2. En utilisant encore la formule de la perte de charge entre deux plaques parallèles, Donnez cette fois l'évolution de la pression d'injection au cours du temps  $P_{\text{inj}}(t)$
3. Tracez schématiquement cette pression d'injection en fonction du temps. A quoi correspond la rupture de pente ?

### 2.11.3 Géométrie B, parallèle

La géométrie de section rectangulaire est présentée dans la Fig. 2.28. On suppose dans la suite que  $H \ll W/4$ . Un débit  $Q$  constant de fluide est créé à l'entrée de la géométrie dont toutes les parois sont immobiles. De plus, les zones 3 et 4 dans la figure sont séparée par une cloison d'épaisseur négligeable.

#### Extrusion

On traitera le problème de l'écoulement en filière pour des longueurs de zone a priori différente  $L_4 \leq 2L$  et  $L_3 \leq 2L$

1. En utilisant encore la formule de la perte de charge entre deux plaques parallèles, et en l'appliquant à ce cas particulier de structure d'écoulement, calculez la relation entre la chute de pression totale et le débit  $Q$ .
2. en déduire le débit dans chacune des zones 3 et 4
3. Dans le cas particulier où  $L_4 = L_3 = 2L$ , précisez les débits et la chute de pression. Indiquez dans quelle zone 3 ou 4 de la filière l'écoulement est préférentiel. Donnez le rapport des débits entre ces zones.

#### Injection

1. Calculez le volume de la pièce et le temps de remplissage avec un débit  $Q$  constant
2. Pour des longueurs d'écoulement  $L_3(t), L_4(t)$  quelconques, exprimer, la vitesse moyenne dans chaque zone 3 et 4. En reprenant la définition de la longueur d'écoulement (2.156), obtenez un système d'équation dont  $L_3(t)$  et  $L_4(t)$  sont solution. Calculez alors ces solutions  $L_3(t)$  et  $L_4(t)$ .

3. En déduire les débits dans chaque zone. Indiquez dans quelle zone 3 ou 4 de la filière l'écoulement est préférentiel. Donnez le rapport des débits entre ces zones. Il y a t'il comme une différence avec l'extrusion ? Expliquez...
4. Terminez l'analyse en calculant la pression d'injection  $P_{inj}(t)$  nécessaire pour remplir avec un débit constant  $Q$ . Tracer schématiquement  $P_{inj}(t)$ .
5. (Subsidiaire) Quelle conséquence va avoir l'écoulement préférentiel sur le temps de remplissage et sur l'évolution de la pression d'injection. Modifiez alors la partie 4 de votre analyse

### 2.11.4 Réponses

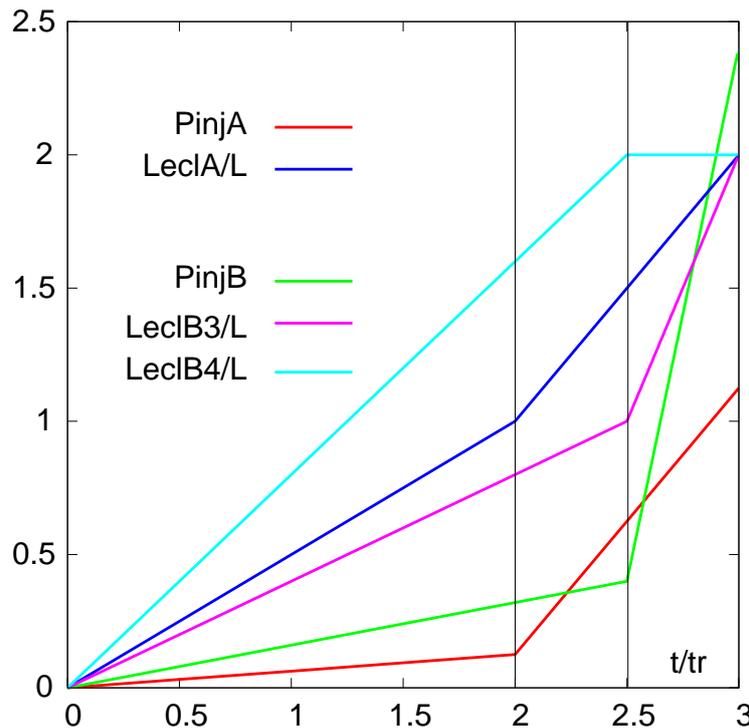


FIGURE 2.29 – Pression d'injection et Longueur d'écoulement au cours du temps. Adimensionnels :  $t_r = \frac{WHL}{Q}$ ,  $P_r = \frac{12\eta_0QL}{WH^3}$

### 2.11.5 Pression d'injection optimale

Dans la réalité du procédé d'injection, le polymère fondu injecté rencontre les parois du moule, plus froides et se solidifie à leur contact. Il se crée une gaine solide dont l'épaisseur va croître au fil du temps. Ce phénomène thermique a une grande importance sur le calcul des pressions d'injection. Il existe une pression d'injection optimale (minimale) pour remplir une empreinte donnée, que l'on peut calculer, en suivant les idées développées dans l'ouvrage [5]. En effet :

- Si l'on injecte très lentement le débit est faible mais la pression d'injection est importante car on laisse beaucoup de temps à la gaine solide pour croître. Celle ci restreint la section offerte à l'écoulement du polymère ce qui augmente considérablement la perte de charge et donc la pression d'injection requise pour maintenir ce débit.
- Si au contraire on injecte très vite, la pression d'injection nécessaire pour atteindre un débit élevé est importante cf. (2.155) .

Entre les deux, il existe un optimum de temps et de pression d'injection.

Un ordre de grandeur de cette diminution de  $H$  due à la croissance de gaine solide :

$$H = H_0 - 2 \frac{T_{\text{solid}} - T_{\text{moule}}}{T_{\text{injection}} - T_{\text{moule}}} \sqrt{\pi \alpha t} \quad (2.157)$$

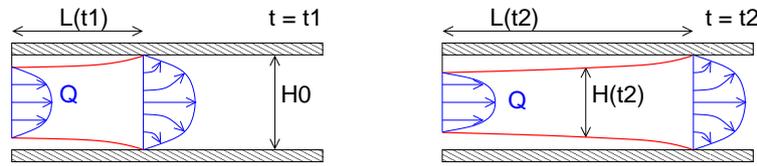


FIGURE 2.30 – Croissance de la gaine solide pendant le remplissage

$$= H_0 - C_T \sqrt{t} \quad (2.158)$$

où  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  représente la diffusivité thermique qui est excessivement faible pour les polymères de l'ordre de  $10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . (2.157) représente un modèle de croissance de gaine solide très simple basé sur la théorie de la pénétration de la chaleur d'un milieu semi infini initialement à la température  $T_{\text{moule}}$  et porté brutalement à la température  $T_{\text{injection}}$ . On suit l'évolution dans le temps de la position du front de température  $T_{\text{solid}}$  qui correspond à la température à laquelle le polymère se solidifie et ne peut donc plus s'écouler. Ce modèle est valable dans les tous premiers instants du contact polymère/moule mais, à plus long terme, le transfert thermique est plus complexe. Il permet toutefois de faire un calcul analytique<sup>7</sup>.

La vitesse moyenne pour un débit constant  $Q$  qui passe dans la veine liquide s'exprime par :

$$V_{\text{moy}} = \frac{Q}{WH(t)} \quad (2.159)$$

Elle ne peut plus être considérée constante même si le débit  $Q$  est maintenu constant car l'épaisseur  $H$  varie avec le temps du fait de la croissance de la gaine solide. La position du front de matière au cours du temps est obtenue par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{Q}{WH(t)} \\ &= \frac{Q}{W(H_0 - C_T \sqrt{t})} \\ &= \frac{Q}{WH_0(1 - \psi)} \\ \psi &= \frac{C_T \sqrt{t}}{H_0} \end{aligned} \quad (2.160)$$

On intègre  $l(t)$  à l'aide du changement de variable suivant :

$$u = H_0 - C_T \sqrt{t} \quad (2.161)$$

$$\sqrt{t} = \frac{H_0 - u}{C_T}$$

$$du = -C_T \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad (2.162)$$

$$l = -\frac{2H_0 Q}{WC_T^2} (\psi + \log(1 - \psi)) \quad (2.163)$$

**Remarque** Un développement limité de (2.163) autour de :  $\psi = 0$  donne

$$l = \frac{Qt}{WH_0} \left( 1 + \frac{2}{3}\psi + \frac{1}{2}\psi^2 + \dots \right) \quad (2.164)$$

dont le premier terme correspond logiquement à la position du front de matière lorsque l'on ne tient pas compte de la croissance de la gaine solide ( $\psi = 0$ )

7. ce dont nous n'allons pas nous priver

La perte de charge locale dans l'empreinte est quant à elle donnée par la formule :

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= -\frac{12\eta_0 Q}{WH^3} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{dP}{dz} V_{\text{moy}} \\ &= -\frac{12\eta_0 Q^2}{WH^4}\end{aligned}\quad (2.165)$$

Après intégration et en utilisant le même changement de variable (2.161), la pression d'injection un instant  $t$  est donc :

$$P_{\text{inj}}(t) = P_{\text{atm}} + \frac{4\eta_0 Q^2}{(WH_0 C_T)^2} \left( \frac{3\psi - 1}{(1 - \psi)^3} + 1 \right) \quad (2.166)$$

**Remarque** Un développement limité de  $P_{\text{inj}}$  au voisinage de  $\psi = 0$  fait apparaître :

$$P_{\text{inj}}(t) = P_{\text{atm}} + \frac{4\eta_0 Q^2 t}{W^2 H_0^4} \left( 1 + \frac{8}{3}\psi + 10\psi^2 + \dots \right) \quad (2.167)$$

Là encore le premier terme correspond à la pression d'injection pour une fluide Newtonien dans une empreinte d'épaisseur  $H_0$  constante.

### Temps de remplissage optimal

On cherche alors le temps où le débit optimal pour remplir l'empreinte de longueur  $L$  et de profondeur initiale  $H_0$ . Pour ce faire on minimise la pression d'injection (2.166) par rapport à  $\psi$  sous la contrainte que  $\psi$  et le débit  $Q$  sont liés par la relation (2.163) :

$$\begin{aligned}\frac{dP_{\text{inj}}}{d\psi} &= 0 \\ Q^2 \frac{d}{d\psi} \left( \frac{3\psi - 1}{(1 - \psi)^3} + 1 \right) + 2Q \frac{dQ}{d\psi} \left( \frac{3\psi - 1}{(1 - \psi)^3} + 1 \right) &= 0 \\ -dQ (\psi + \log(1 - \psi)) + d\psi \frac{Q\psi}{1 - \psi} &= 0 \\ \frac{dQ}{d\psi} &= \frac{Q\psi}{(\psi + \log(1 - \psi))(1 - \psi)} \\ 3\psi + 3\psi^2 - \psi^3 + 3 \log(1 - \psi) &= 0\end{aligned}\quad (2.168)$$

La solution numérique de l'équation (2.168) est  $\psi^* = 0.54649$ . Le temps optimal de remplissage est alors :

$$t^* = \left( \frac{\psi^* H_0}{C_T} \right)^2 \quad (2.169)$$

**Remarque** Le temps optimal dépend donc du carré de l'épaisseur ( mais pas de la longueur ! ). Les pièces minces demandent des temps très courts et les pièces épaisses, des temps beaucoup plus long.

**Remarque** La représentation de la croissance de gaine solide repose sur la température d'un milieu semi-infini

$$\theta = \frac{T_{\text{froz}} - T_{\text{contact}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{contact}}} \quad (2.170)$$

$$= \text{erf} \left( \frac{e_{\text{fl}}}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (2.171)$$

$$(2.172)$$

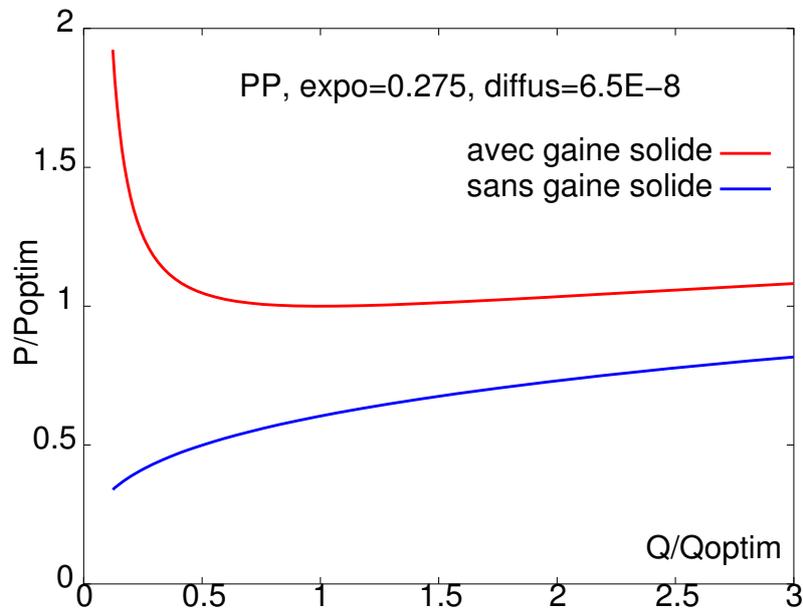


FIGURE 2.31 – Pression de remplissage optimale avec et sans gaine solide

où  $T_{\text{froz}}$  est la température à laquelle le polymère ne peut plus s'écouler,  $T_{\text{melt}}$  celle à laquelle on l'injecte,  $T_{\text{contact}}$  la température de contact instantanée entre le polymère et le moule que l'on peut calculer par :

$$T_{\text{contact}} = \frac{T_{\text{melt}} \sqrt{\rho k C_p} + T_{\text{mold}} \sqrt{\rho_s k_s C_{ps}}}{\sqrt{\rho k C_p} + \sqrt{\rho_s k_s C_{ps}}} \quad (2.173)$$

si on linéarise la fonction erreur au motif que  $\theta \ll 1$ , on obtient l'évolution de l'épaisseur de la gaine solide en fonction du temps et des conditions de moulage et des propriétés du polymère :

$$e_{\text{fl}} = \theta \sqrt{\pi \alpha t} \quad (2.174)$$

# Chapitre 3

## Écoulements par déplacement d'une paroi

### 3.1 Écoulement par déplacement de parois. Fluide rhéofluidifiant

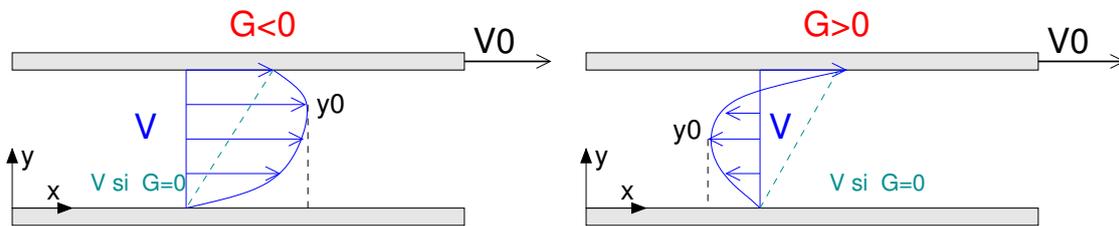


FIGURE 3.1 – Écoulement par déplacement de paroi d'un fluide loi puissance en présence d'un gradient de pression  $G$ . Cas où la vitesse présente un extremum

Comme toujours dans un écoulement développé dans la direction  $x$

$$\begin{aligned}
 V_X(Y) \\
 V_Y &= 0 \\
 -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial S_{XY}}{\partial Y} &= 0 \\
 \frac{\partial P}{\partial X} &= \text{cte} \\
 \frac{\partial S_{XY}}{\partial Y} &= \text{cte}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les conditions aux limites sur la vitesse  $V_X$  :

$$\begin{aligned}
 V_X(H) &= V_0 \\
 V_X(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le fluide obéit à une loi puissance :

$$S_{XY} = K \left( \left| \frac{dV_X}{dY} \right| \right)^{n-1} \frac{dV_X}{dY} \tag{3.3}$$

Afin d'y voir plus clair, on adimensionnalise les variables du problème à l'aide de  $H$  échelle de longueur, et  $V_0$  la vitesse de plaque :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{V_X}{V_0} \\
 y &= \frac{Y}{H} \\
 G &= \frac{H^{n+1}}{6KV_0^n} \frac{\partial P}{\partial X}
 \end{aligned}$$

Ceci nous donne, compte tenu de (3.1,3.3,3.2), le système suivant :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \\ \left( \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right) &= 6 \text{sign}(G) |G| (y - y_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $y_0$  représente le point où  $\frac{du}{dy} = 0$ .

**Remarque** Cette présentation n'est valable que dans le cas où il existe un gradient de pression dans l'écoulement  $G \neq 0$ . Dans le cas où il n'y a pas de gradient de pression, on a un écoulement de cisaillement simple  $u = y$  donc.

L'intégration de 3.4 se fait suivant le signe du second membre :

1. Si  $0 \leq y_0 \leq 1$  alors  $\frac{du}{dy}$  s'annule et change de signe ce qui correspond à l'une des deux situations exposées dans la figure Fig. 3.1

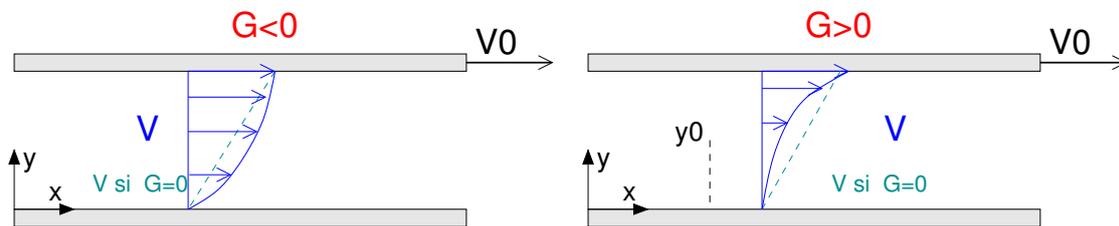


FIGURE 3.2 – Écoulement par déplacement de paroi d'un fluide loi puissance en présence d'un gradient de pression  $G$ . Cas où la vitesse ne présente pas d'extremum

— lorsque  $y_0 \leq y \leq 1$  on a

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{n} \\ \frac{du}{dy} &= \text{sign}(G) (6|G|(y - y_0))^s \\ u(y) &= \frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s (y - y_0)^{s+1} + C \\ u(1) &= 1 \\ u(y) &= 1 - \frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s \left( (1 - y_0)^{s+1} - (y - y_0)^{s+1} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

— lorsque  $0 \leq y \leq y_0$  on a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= -\text{sign}(G) (6|G|(y_0 - y))^s \\ u(y) &= \frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s (y_0 - y)^{s+1} + C \\ u(0) &= 0 \\ u(y) &= \frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s \left( (y_0 - y)^{s+1} - y_0^{s+1} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

— On doit avoir continuité de la vitesse entre les deux expressions (3.5,3.6) lorsque  $y = y_0$ , ce qui définit une condition sur  $y_0$  :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s \left( (1 - y_0)^{s+1} \right) &= -\frac{\text{sign}(G)}{s + 1} (6|G|)^s y_0^{s+1} \\ y_0^{s+1} - (1 - y_0)^{s+1} + \frac{s + 1}{\text{sign}(G) (6|G|)^s} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

On alors peut borner le gradient de pression adimensionnel  $G$  en remarquant que :

$$\begin{aligned} -1 &\leq +\frac{s+1}{\text{sign}(G)(6|G|)^s} \leq 1 \\ |G| &\geq \frac{1}{6} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

2. Si  $y_0 > 1$  ou  $y_0 < 0$  il n'y a pas d'extremum entre 0 et 1 et donc  $\frac{du}{dy}$  ne s'annule pas. Or  $u(0) = 0$  et  $u(1) = 1$  donc  $u$  est une fonction croissante et donc forcément  $\frac{du}{dy} > 0$ .

— si  $G > 0$  alors  $y_0 < 0 \leq y$  :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= (6|G|(y - y_0))^s \\ u(y) &= \frac{1}{s+1} (6|G|)^s ((y - y_0)^{s+1}) + C \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \\ 1 &= \frac{1}{s+1} (6|G|)^s ((1 - y_0)^{s+1}) + C \\ 0 &= \frac{1}{s+1} (6|G|)^s ((-y_0)^{s+1}) + C \\ 1 &= \frac{(6|G|)^s}{s+1} ((1 - y_0)^{s+1} - (-y_0^{s+1})) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$u(y) = \frac{(6|G|)^s}{s+1} ((y - y_0)^{s+1} - (-y_0^{s+1})) \quad (3.10)$$

— enfin si  $G < 0$  alors  $y_0 > 1 \geq y$  :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= (6|G|(y_0 - y))^s \\ u(y) &= -\frac{(6|G|)^s}{s+1} (y_0 - y)^{s+1} + C \\ 1 &= -\frac{(6|G|)^s}{s+1} (y_0 - 1)^{s+1} + C \\ 0 &= -\frac{(6|G|)^s}{s+1} (y_0)^{s+1} + C \\ 1 &= \frac{(6|G|)^s}{s+1} (y_0^{s+1} - (y_0 - 1)^{s+1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$u(y) = \frac{(6|G|)^s}{s+1} (y_0^{s+1} - (y_0 - y)^{s+1}) \quad (3.12)$$

On peut rassembler toutes les formules précédentes (3.6,3.5,3.10,3.12,3.7,3.9,3.11) quelle que soit le signe a priori de  $y_0$  et  $G$  :

$$|y_0|^{s+1} - |1 - y_0|^{s+1} + \frac{s+1}{\text{sign}(G)|6G|^s} = 0 \quad (3.13)$$

$$u(y) = \frac{|y - y_0|^{s+1} - |y_0|^{s+1}}{|1 - y_0|^{s+1} - |y_0|^{s+1}} \quad (3.14)$$

On peut enfin calculer le débit volumique dimensionnel :

$$Q = \frac{V_0 HW \text{sign}(G) |6G|^s}{(s+1)(s+2)} \left( (1 - y_0) |1 - y_0|^{s+1} + y_0 |y_0|^{s+1} - (s+2) |y_0|^{s+1} \right) \quad (3.15)$$

On trace alors des courbes caractéristique du débit adimensionnel en fonction de la contre pression adimensionnelle  $G$ , pour différent indice de rhéofluidification  $n$  du polymère.

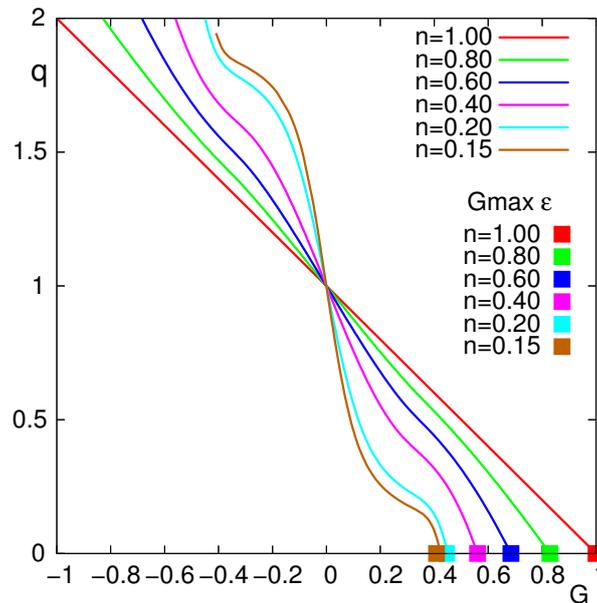


FIGURE 3.3 – Débit adimensionnel  $q = \frac{2Q}{WHV_0}$  en fonction de la contre-pression adimensionnelle  $G$

On voit nettement Fig.3.3 que plus le polymère est rhéofluidifiant, plus la contre-pression maximale nécessaire pour bloquer le système ( $Q = 0$ , ou "closed discharge" en anglais) est faible. On peut calculer [7] ce point de façon approchée mais relativement précise par un développement limité autour de la solution Newtonienne :

$$y_0 = \frac{1}{3} + \epsilon, \quad \epsilon \ll 1 \quad (3.16)$$

La valeur de  $\epsilon$  solution et le gradient de pression maximum  $G_{\max\epsilon}$  correspondant sont :

$$\epsilon = \frac{2^{2+s} - 5 - 3s}{3(2+s)(2^{1+s} + 2 + 3s)} \quad (3.17)$$

$$G_{\max\epsilon} = \frac{1}{6} \left( \frac{1+s}{\left(\frac{2}{3} + \epsilon\right)^{1+s} - \left(\frac{1}{3} + \epsilon\right)^{1+s}} \right)^n \quad (3.18)$$

### 3.2 Écoulement par déplacement et dépression entre plaques faiblement inclinées

Dans cette géométrie, l'écoulement est provoqué par le déplacement d'une plaque à vitesse constante et par l'existence d'un gradient de pression qui peut accroître ou diminuer le débit total. Ce type d'écoulement correspond à ce que l'on trouve dans la zone de compression d'une vis de plastification.

On utilise la relation débit/perte de charge établie pour un fluide Newtonien en écoulement entre plaque parallèle (1.30) en considérant cette fois que le gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial x}$  est une fonction de  $x$  :

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{WH(x)^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{WH(x)}{2} \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{12\eta_0}{WH(x)^3} \left( V_0 \frac{WH(x)}{2} - Q \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le signe de la perte de charge dépend des valeurs de débit  $Q$ . On voit tout de suite que si :

$$Q > \frac{V_0 H_1 W}{2} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x) < 0$$

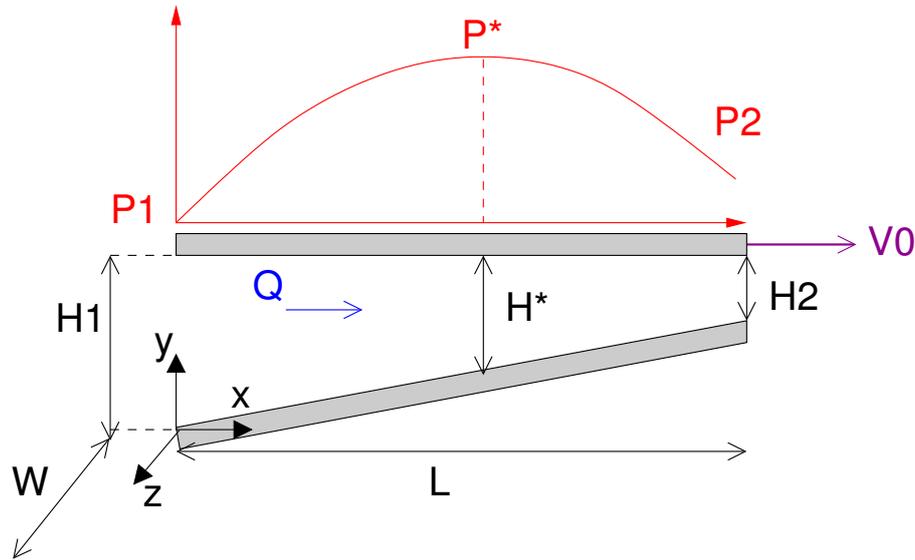


FIGURE 3.4 – Écoulement par dépression et déplacement entre deux plaques faiblement inclinées. Cas où il existe un maximum de pression dans la géométrie

$$Q < \frac{V_0 H_2 W}{2} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x) > 0$$

$$\frac{V_0 H_2 W}{2} < Q < \frac{V_0 H_1 W}{2} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x^*) = 0$$

Dans le premier cas le débit est supérieur au débit maximum de plaque, donc le gradient de pression est négatif dans toute la géométrie. Dans le deuxième cas, le débit est inférieur au débit de plaque minimum et donc il y a une contre-pression dans toute la géométrie. Enfin dans le dernier cas, la pression passe par un maximum en  $x = x^*$ .

**Calcul de la variation totale de pression** On peut reformuler (3.19)<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= -\tan \alpha \\ \frac{\partial P}{\partial H} &= -\frac{12\eta_0}{\tan \alpha W H^3} \left( V_0 \frac{WH}{2} - Q \right) \\ &= -\frac{6\eta_0}{\tan \alpha} \left( \frac{V_0}{H^2} - \frac{2Q}{WH^3} \right) \\ \Delta P &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{dP}{dH} dH \\ &= -\frac{6\eta_0}{\tan \alpha} \left[ -\frac{V_0}{H} + \frac{Q}{WH^2} \right]_{H_1}^{H_2} \\ &= -\frac{6\eta_0}{\tan \alpha} \left[ -V_0 \left( \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} \right) + \frac{Q}{W} \left( \frac{1}{H_2^2} - \frac{1}{H_1^2} \right) \right] \\ &= -\frac{6\eta_0 L}{H_1 - H_2} \left[ -V_0 \left( \frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right) + \frac{Q}{W} \left( \frac{H_1^2 - H_2^2}{H_1^2 H_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{6\eta_0 L}{H_1 H_2} \left( V_0 - Q \frac{H_1 + H_2}{WH_1 H_2} \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

**Calcul du maximum de pression** Dans le cas où il y a un maximum de pression, on a en  $x = x^*$  :

1. attention le repère n'est pas centré dans cas présent

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial H} &= 0 \\ -\frac{12\eta_0}{\tan \alpha W H^{*3}} \left( V_0 \frac{W H^*}{2} - Q \right) &= 0 \\ H^* &= \frac{2Q}{V_0 W}\end{aligned}$$

On peut reprendre les calculs précédents en intégrant cette fois entre  $H_1$  et  $H^*$  :

$$\begin{aligned}P_{\max} - P_1 &= \int_{H_1}^{H^*} \frac{dP}{dH} dH \\ &= -\frac{6\eta_0 L}{H_1 - H_2} \left[ -V_0 \left( \frac{H_1 - H^*}{H_1 H^*} \right) + \frac{Q}{W} \left( \frac{H_1^2 - H^{*2}}{H_1^2 H^{*2}} \right) \right] \\ &= -\frac{6\eta_0 L (H_1 - H^*)}{H_1 H^* (H_1 - H_2)} \left[ -V_0 + \frac{Q}{W} \left( \frac{H_1 + H^*}{H_1 H^*} \right) \right] \\ &= \frac{6\eta_0 L \left( \frac{V_0 W H_1}{2} - Q \right)^2}{Q W H_1^2 (H_1 - H_2)}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Un cas particulier :

$$\begin{aligned}\Delta P &= 0 \\ Q &= V_0 \frac{W H_1 H_2}{H_1 + H_2} \\ H^* &= \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2} \\ H^* &= \frac{2H_1 H_2}{H_1 + H_2} \\ P_{\max} - P_1 &= \frac{3\eta_0 V_0 L (H_1 - H_2)}{2 H_1 H_2 (H_1 + H_2)}\end{aligned}\quad (3.22)$$

**Application numérique :**

$$\begin{aligned}H_1 &= 2H_2 \\ P_{\max} - P_1 &= \frac{\eta_0 V_0 L}{4H_2^2}\end{aligned}$$

### 3.2.1 Mise en pression dans un système de deux plaques

Un fluide Newtonien s'écoule dans un système de plaques de même largeur  $W$  mais de longueur différentes  $L_1, L_2$  et de hauteur différentes  $H_1, H_2$ . Seule la plaque supérieure est mobile de vitesse constante  $V_0$ . En supposant que :

- L'écoulement est développé dans chaque plaque et que le rétrécissement brusque n'a qu'une influence mineure sur les caractéristiques de fonctionnement du système
- Il règne la même pression  $P_0$ , à l'entrée du système et à la sortie

*Calculer alors la pression  $P_{21}$  au passage de la restriction. Calculer le débit  $Q$  du système.*

Dans chaque plaque on peut utiliser la formule (1.30) :

$$\begin{aligned}Q &= -G_1 \frac{W H_1^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{W H_1}{2} \\ Q &= -G_2 \frac{W H_2^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{W H_2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{P_0 - P_{21}}{L_1} \\
 &= -\frac{\Delta P}{L_1} \\
 G_2 &= \frac{P_{21} - P_0}{L_2} \\
 &= \frac{\Delta P}{L_2}
 \end{aligned}$$

Puisque le débit est le même dans chaque plaque : On a alors

$$\begin{aligned}
 0 &= V_0 \frac{W(H_1 - H_2)}{2} - \frac{W}{12\eta_0} (G_1 H_1^3 - G_2 H_2^3) \\
 0 &= V_0(H_1 - H_2) + \frac{\Delta P}{6\eta_0} \left( \frac{H_1^3}{L_1} + \frac{H_2^3}{L_2} \right) \\
 \Delta P &= \frac{6\eta_0 V_0 (H_2 - H_1)}{\frac{H_1^3}{L_1} + \frac{H_2^3}{L_2}} \\
 \Delta P &= \frac{6\eta_0 V_0 L_1}{H_1^2} \frac{x - 1}{1 + \frac{L_1}{L_2} x^3} \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer le débit  $Q$  correspondant en remplaçant  $G_1$  par sa valeur :

$$\begin{aligned}
 Q &= -G_1 \frac{W H_1^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{W H_1}{2} \\
 &= \left( \frac{\Delta P}{L_1} \right) \frac{W H_1^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{W H_1}{2} \\
 &= \left( \frac{6\eta_0 V_0}{H_1^2} \frac{x - 1}{1 + \frac{L_1}{L_2} x^3} \right) \frac{W H_1^3}{12\eta_0} + V_0 \frac{W H_1}{2} \\
 &= V_0 \frac{W H_1}{2} \left( 1 + \frac{x - 1}{1 + \frac{L_1}{L_2} x^3} \right) \\
 &= V_0 \frac{W H_1}{2} x \left( \frac{1 + \frac{L_1}{L_2} x^2}{1 + \frac{L_1}{L_2} x^3} \right)
 \end{aligned}$$

Connaissant les dimensions de la machine ( $L_1, L_2, H_1, H_2, W$ ) et la valeur de consigne  $v_0$  on vient de calculer son point de fonctionnement, c'est à dire le couple ( $Q, \Delta P$ ).

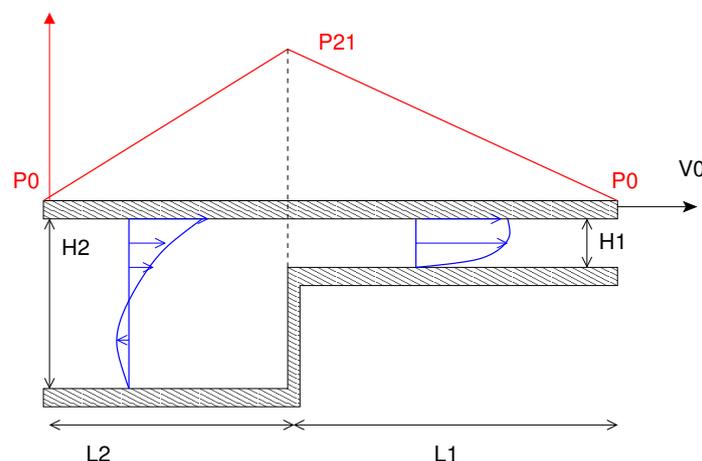


FIGURE 3.5 – Écoulement dans un système de plaques parallèles (2 zones)

On peut ensuite chercher le ratio de hauteur  $x = H_2/H_1$  pour lequel la pression  $P_{21}$  est maximale. Le résultat précédent (3.23) est mis sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_0 \frac{1-x}{1+lx^3} \\ P_0 &= \frac{6\eta_0 V_0 L_1}{H_1^2} \\ l &= \frac{L_1}{L_2}\end{aligned}$$

On détermine la dérivée de  $\Delta P$  par rapport à  $x$

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = P_0 \left( -\frac{1}{1+lx^3} - \frac{3(1-x)lx^2}{(1+lx^3)^2} \right) \quad (3.24)$$

La valeur de  $x$  optimale est celle qui annule  $\frac{\partial \Delta P}{\partial x}$ , elle est calculable (courtesy of Maple) :

$$\begin{aligned}x &= \frac{k}{2l} + \frac{l}{2k} + \frac{1}{2} \\ k &= \left( (l+2+2\sqrt{l+1})l^2 \right)^{1/3}\end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Calcul de point de fonctionnement (A)

Le système plan présenté sur la Fig. 3.6 comprend un dièdre d'angle faible et dont la plaque supérieure est mobile à vitesse constante  $V_0$ . Ce dièdre est couplé avec deux plaques parallèles d'entrefer constant  $H$ . La plaque supérieure est également mobile à cette même vitesse constante  $V_0$ . La pression à l'amont et à l'aval du système est identique  $P = P_0$ .

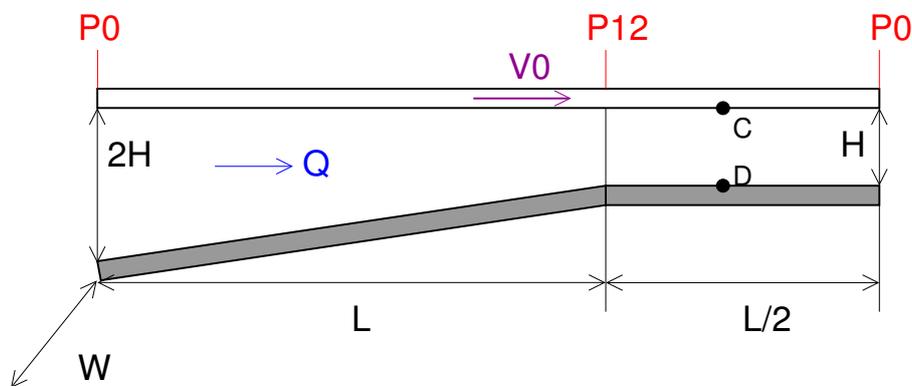


FIGURE 3.6 – Système dièdre et plaque mobile (A)

1. Rappeler la relation perte de charge-débit dans le cas de plaques parallèles.
2. Rappeler la relation perte de charge-débit dans le cas du dièdre d'angle faible.
3. En déduire le point de fonctionnement du système ( $Q, \Delta P$ ).
4. Décrire le profil de pression dans ce système. Où se trouve le maximum de pression et combien vaut-il ?
5. Calculer le cisaillement sur les parois de la plaque (point C et D sur la Fig. 3.6)

### Réponses

1. La variation de pression dans le dièdre d'entrefer variant entre  $H_1$  et  $H_2$ , avec une plaque mobile :

$$\Delta P_A = \frac{6\eta_0 L}{H_1 H_2} \left( V_0 - Q_A \frac{H_1 + H_2}{W H_1 H_2} \right) \quad (3.26)$$

Dans le cas du dièdre d'entrefer variant entre  $2H$  et  $H$  :

$$P_{12} - P_0 = \Delta P_A \quad (3.27)$$

$$= \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( V_0 - \frac{3}{2WH} Q_A \right) \quad (3.28)$$

Dans le cas de la plaque d'entrefer constant  $H$  et de longueur  $L/2$  :

$$P_0 - P_{12} = -\Delta P_A \quad (3.29)$$

$$= \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( V_0 - \frac{2}{WH} Q_A \right) \quad (3.30)$$

En éliminant la différence de pression  $\Delta P_A$  entre les deux équations :

$$0 = \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( 2V_0 - \frac{Q_A}{WH} \left( \frac{3}{2} + 2 \right) \right)$$

$$Q_A = \frac{4}{7} V_0 WH$$

$$\Delta P_A = \frac{3\eta_0 V_0 L}{7 H^2} \quad (3.31)$$

2. Le maximum de pression se trouve dans le dièdre à la position :

$$H^* = \frac{2Q}{V_0 W}$$

$$= \frac{8}{7} H$$

$$H < H^* < 2H \quad (3.32)$$

La pression maximale vaut alors :

$$\Delta P_{\max} = \frac{6\eta_0 L \left( \frac{V_0 W H_1}{2} - Q \right)^2}{Q W H_1^2 (H_1 - H_2)}$$

$$P_{\max A} - P_0 = \frac{6\eta_0 L \left( \frac{V_0 W 2H}{2} - Q_A \right)^2}{Q W 4H^2 (H)}$$

$$= \frac{27\eta_0 V_0 L}{56 H^2} \quad (3.33)$$

$$> \Delta P_A \quad (3.34)$$

3. Cisaillement à la paroi dans la plaque parallèle :

$$G = -2 \frac{\Delta P_A}{L}$$

$$v_x = \frac{G}{2\eta_0} (y^2 - Hy) + V_0 \frac{y}{H}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$= \frac{G}{2\eta_0} (2y - H) + \frac{V_0}{H}$$

$$\dot{\gamma}_A = -\frac{3}{7} \frac{V_0}{H^2} (2y - H) + \frac{V_0}{H}$$

$$\dot{\gamma}_{AC} = \frac{4}{7} \frac{V_0}{H}$$

$$\dot{\gamma}_{AD} = \frac{10}{7} \frac{V_0}{H}$$

### 3.2.3 Calcul de point de fonctionnement (B)

Le système présenté sur la Fig. 3.7 présente un dièdre identique au précédent. La seule différence provient des plaques parallèles qui sont immobiles cette fois.

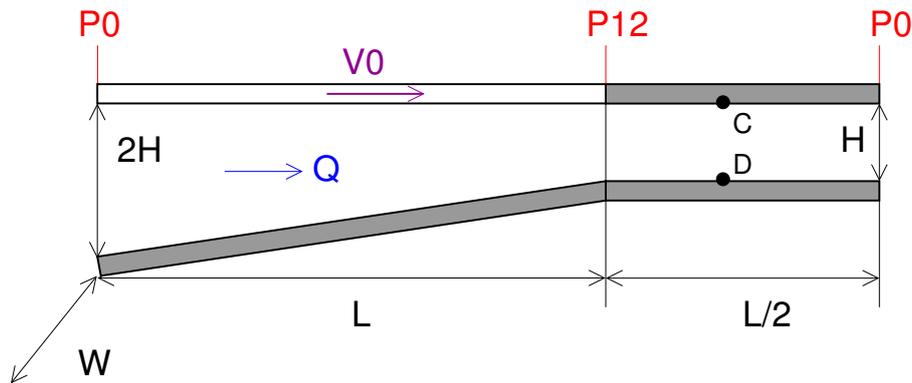


FIGURE 3.7 – Système dièdre mobile, plaque fixe (B).

1. Calculer le point de fonctionnement de ce nouveau système.
2. Calculer le cisaillement sur les parois de la plaque (point C et D sur la Fig. 3.7)
3. Comparer les débits et les pressions maximales dans les deux systèmes. Était-ce prévisible ? pourquoi ?

#### Réponses

1. La variation de pression dans le dièdre d'entrefer variant entre  $H_1$  et  $H_2$ , avec une plaque mobile :

$$\Delta P_B = \frac{6\eta_0 L}{H_1 H_2} \left( V_0 - Q_B \frac{H_1 + H_2}{W H_1 H_2} \right) \quad (3.35)$$

Dans le cas du dièdre d'entrefer variant entre  $2H$  et  $H$  :

$$P_{12} - P_0 = \Delta P_B \quad (3.36)$$

$$= \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( V_0 - \frac{3}{2WH} Q_B \right) \quad (3.37)$$

Dans le cas de la plaque d'entrefer constant  $H$  et de longueur  $L/2$  dont les deux plaques sont fixes :

$$P_0 - P_{12} = -\Delta P_B \quad (3.38)$$

$$= \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( -\frac{2}{WH} Q_B \right) \quad (3.39)$$

En éliminant la différence de pression  $\Delta P_B$  entre les deux équations :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3\eta_0 L}{H^2} \left( V_0 - \frac{Q_B}{WH} \left( \frac{3}{2} + 2 \right) \right) \\ Q_B &= \frac{2}{7} V_0 W H \\ \Delta P_B &= \frac{12}{7} \frac{\eta_0 V_0 L}{H^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

2. Dans le deuxième plaque, les parois sont fixes, il n'y a pas de débit créé par le déplacement de plaque donc le débit est plus faible et cette filière plus restreinte augmente le pic de pression. Au total, les deux systèmes sont très différents, comme le montre la figure Fig. 3.8

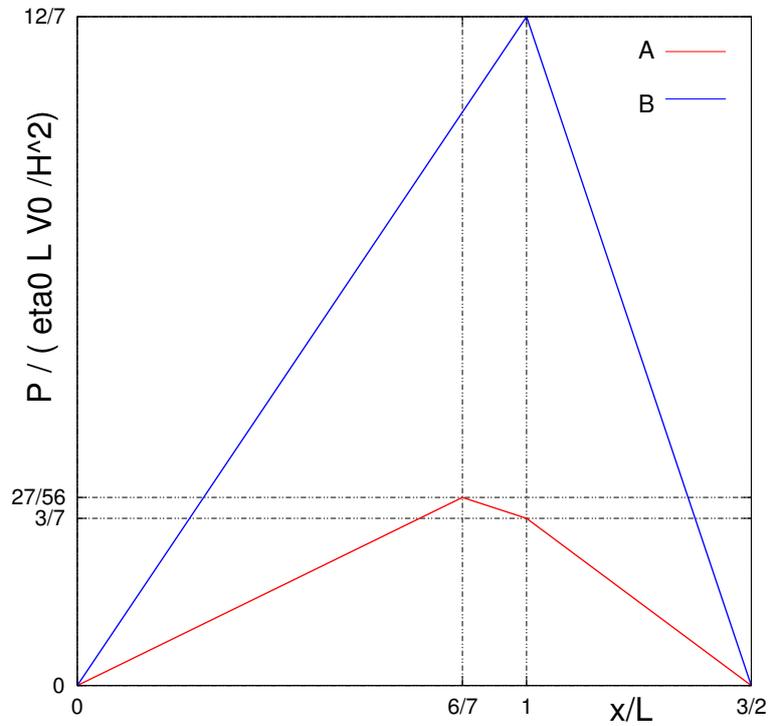


FIGURE 3.8 – Rhhaaaa lovely !

3. Cisaillement à la paroi dans la plaque parallèle :

$$\begin{aligned}
 G &= -2 \frac{\Delta P_B}{L} \\
 v_x &= \frac{G}{2\eta_0} (y^2 - Hy) \\
 \dot{\gamma} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
 &= \frac{G}{2\eta_0} (2y - H) \\
 \dot{\gamma}_A &= -\frac{12}{7} \frac{V_0}{H^2} (2y - H) \\
 \dot{\gamma}_{BC} &= -\frac{12}{7} \frac{V_0}{H} \\
 \dot{\gamma}_{BD} &= \frac{12}{7} \frac{V_0}{H}
 \end{aligned}$$

### 3.2.4 Procédé d'intrusion

Le procédé d'intrusion consiste à utiliser une vis de presse à injecter comme une extrudeuse (donc en rotation seulement) afin de remplir une empreinte dont le volume dépasse la capacité de dosage de la vis. Le procédé est schématisé dans la figure 3.9. Il consiste en un dièdre avec un plaque mobile à vitesse constante ( $V_0$  la vitesse périphérique de la vis) qui met en écoulement un fluide Newtonien de viscosité constante ( $\eta_0$ ) avec un débit  $Q$  à déterminer. La pression en amont du dièdre est la pression atmosphérique  $P_0$ . Le fluide quitte ensuite la presse et va remplir une empreinte de longueur totale  $L$  et d'épaisseur  $H$ . La largeur de l'ensemble est  $W$ . La longueur d'écoulement  $l$  est mesurée depuis l'entrée de l'empreinte jusqu'au front de matière. La pression est atmosphérique au front de matière.

1. Pour une longueur d'écoulement quelconque  $l$  calculez le débit  $Q$  et la pression  $P_{12}$  à l'entrée de l'empreinte. Est ce la pression maximale ?

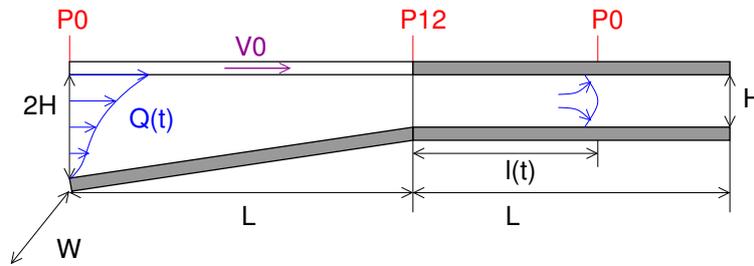


FIGURE 3.9 – Procédé d'intrusion

2. En utilisant la définition de la vitesse moyenne :

$$V_{\text{moy}} = \frac{dl}{dt} \quad (3.41)$$

Trouver une équation différentielle dont la longueur d'écoulement  $l(t)$  est solution. Résoudre cette équation différentielle<sup>2</sup>

- Donnez l'expression de l'évolution du débit  $Q$  et de  $P_{12}$  en fonction du temps. Tracez schématiquement.
- Calculez le temps de remplissage de l'empreinte.

## Réponses

1.

$$Q = \frac{V_0 W H}{2} \frac{4}{3 + 8 \frac{l}{L}} \quad (3.42)$$

$$P_{12} = P_0 + \eta_0 V_0 \frac{L}{H^2} \frac{24 \frac{l}{L}}{3 + 8 \frac{l}{L}} \quad (3.43)$$

2.

$$V_{\text{moy}} = \frac{dl}{dt} \quad (3.44)$$

$$= \frac{Q}{WH} \quad (3.45)$$

$$\frac{dl}{dt} = V_0 \frac{2}{8 \frac{l}{L} + 3} \quad (3.46)$$

$$l(t) = \frac{L}{8} \left( \sqrt{32V_0 t / L + 9} - 3 \right) \quad (3.47)$$

3. cf. 3.10

### 3.2.5 Vis 3 zones

*TD Maple, Optimisation du profil de vis d'une extrudeuse, 3GMC-GM2P*

#### Vis à chenal de profondeur constante

Une vis d'extrudeuse (Fig. 3.11) peut être vue comme une pompe à fluide visqueux et donc être dimensionnée et optimisée suivant sa courbe de fonctionnement : Contre-Pression / Débit. Le débit dépend bien sûr de la vitesse de rotation de la vis  $N$ , du diamètre de la vis  $D$  de sa longueur  $L$  et de la contre-pression  $\Delta P$  induite par la présence en aval d'une filière plus ou moins étroite. En outre, l'angle de la vis  $\phi$  et la profondeur du chenal  $H$  joue un rôle plus complexe que nous allons étudier.

2. N'hésitez pas à faire un changement de variable

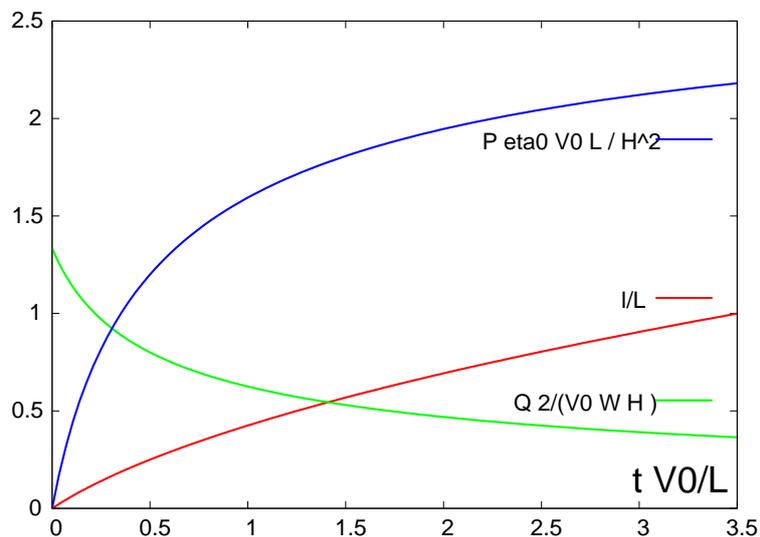


FIGURE 3.10 – Position du front de matière  $l$ , de la pression d'injection  $P_{12}$  et du débit  $Q$  adimensionnalisés par  $L$ ,  $\eta_0 V_0 L / H^2$ ,  $v_0 W H / 2$  respectivement, en fonction du temps adimensionnel  $t V_0 / L$

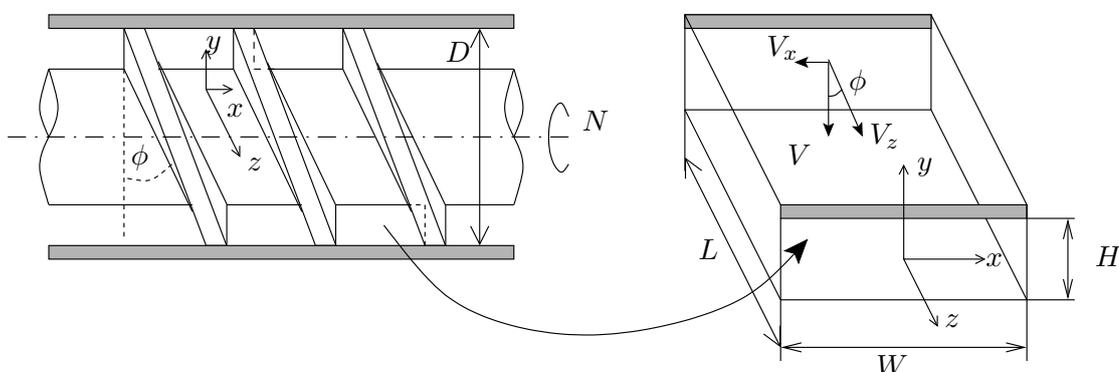


FIGURE 3.11 – Vis de profondeur constante

$$Q = \frac{W H V_z}{2} - \frac{W H^3 \Delta P}{12 \eta \Delta Z} \quad (3.48)$$

$$W = \pi D \sin \phi \quad (3.49)$$

$$V_z = \pi N D \cos \phi \quad (3.50)$$

$$\Delta Z = \frac{L}{\sin \phi} \quad (3.51)$$

Une vis de chenal plus profond débite potentiellement plus mais est beaucoup plus sensible à la contre-pression. Pour une vis de diamètre donné, à vitesse de rotation donnée, on peut ne garder comme paramètre de conception que la profondeur du chenal  $H$  et l'angle de vis  $\phi$  en on adimensionnalisant la vitesse par  $N \pi D$ , toutes les longueurs par  $D$  et la pression par  $\eta N \pi$  :

$$q(\phi, h, L, \Delta p) = \frac{\pi \sin \phi \cos \phi h}{2} - \frac{\pi \sin^2 \phi h^3 \Delta p}{12 L} \quad (3.52)$$

$\phi$   $H$  donnés,  $\Delta p$  variable

- Calculer formellement  $q_{\max}$  et  $\Delta p_{\max}$
- Tracer les courbes  $q(\Delta p)$  pour  $h = 1$  et  $h = 2$ ,  $\phi = 30\text{deg}$ ,  $L = 1$

$\phi$   $H$  variables,  $\Delta p$  donné

- Trouver l'angle  $\phi$  pour un débit maximal lorsque  $\Delta P = 0$ .

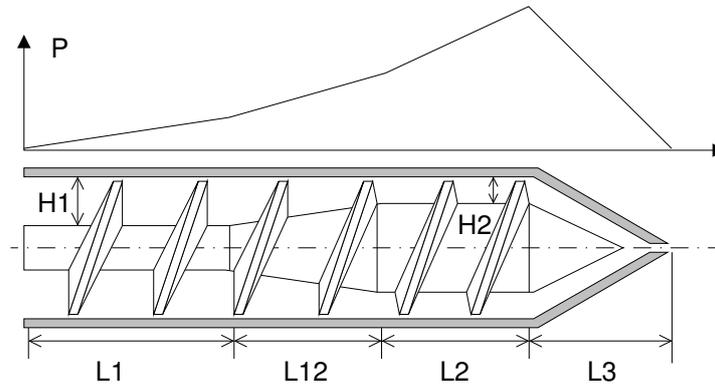


FIGURE 3.12 – Profil de vis à 3 zones

— Trouver l'angle  $\phi$  et la profondeur de chenal  $H$  pour un débit maximal lorsque  $\Delta P \neq 0$ .

### Vis 3 zones

En pratique les vis ne sont pas de profondeur  $H$  constante et le profil plus courant est le profil 3 zones visible sur la Fig. 3.12, par contre, on garde le même angle  $\phi$  pour chaque zone.

La zone d'alimentation et la zone de pompage sont de profondeur constantes et on peut donc leur appliquer la formule 3.52. La zone de transition est modélisée par la formule :

$$q(\phi, h_1, h_2, L_{12}, \Delta p) = \frac{\pi \sin \phi \cos \phi}{2} \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{\pi \sin^2 \phi}{12} \frac{2h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2} \frac{\Delta p_{12}}{L_{12}} \quad (3.53)$$

Le modèle complet s'étudie en remarquant que les zones sont interdépendantes et sont montées en série :

$$q = \frac{\pi \sin \phi \cos \phi h_1}{2} - \frac{\pi \sin^2 \phi h_1^3}{12} \frac{\Delta p_1}{L_1} \quad (3.54)$$

$$q = \frac{\pi \sin \phi \cos \phi}{2} \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{\pi \sin^2 \phi}{12} \frac{2h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2} \frac{\Delta p_{12}}{L_{12}} \quad (3.55)$$

$$q = \frac{\pi \sin \phi \cos \phi h_2}{2} - \frac{\pi \sin^2 \phi h_2^3}{12} \frac{\Delta p_2}{L_2} \quad (3.56)$$

Si une filière est montée à l'aval de l'extrudeuse on a en plus :

$$q = a_3 \Delta p_3 \quad (3.57)$$

Chaque zone peut faire croître la pression de l'amont vers l'aval. Cette pression diminue ensuite dans la filière 3 pour avoir finalement :

$$\Delta p_1 + \Delta p_{12} + \Delta p_2 + \Delta p_3 = 0 \quad (3.58)$$

En ne tenant d'abord pas compte de la filière

- Résoudre formellement le système,
- Tracer le débit en fonction de l'angle  $\phi$

Puis reprendre l'analyse en tenant compte cette fois de la filière

### Limitations du modèle

L'analyse présentée ici est limitée aux fluides Newtonien (fluides dont la viscosité reste constante avec le taux de cisaillement). De plus la largeur des filets a été négligée dans le calcul de la largeur du chenal et enfin, le polymère est considéré comme fondu tout au long de la vis

### 3.3 Écoulement par compression entre deux disques parallèles

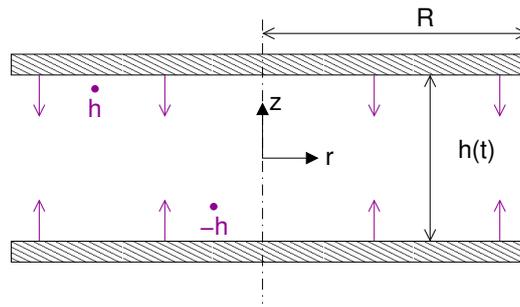


FIGURE 3.13 – Écoulement par compression entre deux disques

D'après le schéma Fig. 3.13 les disques se rapprochent avec une vitesse constante  $\dot{h}$ . C'est le seul mouvement des parois de cet outillage. Les conditions aux limites en vitesse sont sur chaque disque :

$$\begin{aligned}
 z &= +\frac{h(t)}{2}, \quad \forall r, t \\
 v_r &= 0 \\
 v_\theta &= 0 \\
 v_z &= \dot{h} < 0 \\
 \\ 
 z &= -\frac{h(t)}{2}, \quad \forall r, t \\
 v_r &= 0 \\
 v_\theta &= 0 \\
 v_z &= -\dot{h}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

La géométrie et les conditions aux limites en vitesse suggère un écoulement axisymétrique :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

On propose la forme suivante du champ des vitesses :

$$\begin{aligned}
 v_r &= u(r)f(z) \\
 v_\theta &= 0 \\
 v_z &= g(z)
 \end{aligned}$$

#### 3.3.1 Condition d'incompressibilité

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\
 f \frac{du}{dr} + f \frac{u}{r} + \frac{dg}{dz} &= 0 \\
 f \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) &= -\frac{dg}{dz} \\
 \frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} &= -\frac{\frac{dg}{dz}}{f(z)}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

On voit aisément que (3.60) n'est possible que si chaque côté est une constante  $A$

$$\begin{aligned}\frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} &= A \\ \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} &= A \\ \frac{d(ru)}{dr} &= Ar \\ ru &= A \frac{r^2}{2} + B \\ u &= A \frac{r}{2} + \frac{B}{r}\end{aligned}$$

On remarque cependant que lorsque  $r = 0$  l'écoulement est quand même parfaitement défini et il faut donc  $B = 0$ .

Si dorénavant on intègre la constante  $A$  dans la définition de  $f(z)$  on aura :

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{r}{2} f(z) \\ -\frac{\frac{dg}{dz}}{f(z)} &= 1\end{aligned}\tag{3.61}$$

On remarque que les conditions aux limites (3.59) sur  $v_r$  impliquent des conditions aux limites sur  $f$  :

$$f\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0\tag{3.62}$$

### 3.3.2 Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}\underline{\underline{d}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{d}} &= \begin{pmatrix} \frac{f}{2} & 0 & \frac{r}{4} \frac{df}{dz} \\ 0 & \frac{f}{2} & 0 \\ \frac{r}{4} \frac{df}{dz} & 0 & -f \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{S}} &= 2\eta_0 \underline{\underline{d}}\end{aligned}\tag{3.63}$$

(3.64)

### 3.3.3 Équations d'équilibre

Si on néglige le terme  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$  au titre que le nombre de Reynolds est très faible, on peut écrire les équations d'équilibre dans le cas axisymétrique :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Ce qui amène en remplaçant les composantes des contraintes définies dans (3.63) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= \eta_0 \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dz^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\eta_0 \frac{df}{dz}\end{aligned}$$

### 3.3.4 Résolution des vitesses

Pour éliminer  $P$  on est amené à calculer les dérivées croisées des expressions précédentes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial r} &= \eta_0 \frac{r}{2} \frac{d^3 f}{dz^3}\end{aligned}$$

Il s'ensuit une équation différentielle pour  $f$  uniquement :

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f}{dz^3} &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= B \\ \frac{df}{dz} &= Bz + C \\ f &= B \frac{z^2}{2} + Cz + D\end{aligned}$$

Les conditions aux limites sur  $f$  (3.62) permettent de déterminer une parties des constantes :

$$f = \frac{B}{2} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (3.65)$$

On peut reprendre alors l'équation de  $g$  (3.61) :

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dz} &= -f \\ &= -\frac{B}{2} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ g &= -\frac{B}{2} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{h^2}{4} z + E \right)\end{aligned} \quad (3.66)$$

or les conditions aux limites sur  $v_z$  sont données en (3.59) et donc  $E = 0$  et :

$$\begin{aligned}\dot{h} &= -\frac{B}{2} \left( \frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{8} \right) \\ \dot{h} &= \frac{Bh^3}{24} \\ B &= \frac{24\dot{h}}{h^3} \\ v_z &= \frac{\dot{h}}{h^3} z(3h^2 - 4z^2) \\ v_r &= -\frac{6\dot{h}}{h^3} r \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)\end{aligned}$$

Finalement,

$$v_z = \dot{h} \frac{z}{h} \left( 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right) \quad (3.67)$$

$$v_r = -\frac{3}{2} \dot{h} \frac{r}{h} \left( 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right) \quad (3.68)$$

Le débit dans ce système est imposé par le mouvement des deux disques de rayon  $R$  :

$$\begin{aligned} Q &= 2 \text{disques } \pi R^2 (-\dot{h}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_r(R, z) R d\theta dz \end{aligned} \quad (3.69)$$

Le calcul est conforme la conservation du débit.

### 3.3.5 Calcul de la pression et de la force

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \eta_0 \frac{r}{2} B \\ &= \frac{12\dot{h}}{h^3} \eta_0 r \\ P(r, z) &= \frac{6\dot{h}}{h^3} \eta_0 r^2 - \eta_0 f(z) + C \\ &= \frac{6\dot{h}}{h^3} \eta_0 r^2 - \eta_0 \frac{12\dot{h}}{h^3} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + C \end{aligned}$$

On pose que à l'extrémité de l'écoulement  $r = R, z = \pm \frac{h}{2}$ , on est à la pression constante  $P_0$  ( la pression atmosphérique par exemple) et que dans ce cas :

$$P(r, z) = \frac{6\dot{h}}{h^3} \eta_0 (r^2 - R^2) - \eta_0 \frac{12\dot{h}}{h^3} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + P_{\text{atm}} \quad (3.70)$$

La force qui s'exerce sur un disque correspond à :

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (\underline{\sigma} \cdot \underline{n})_{z=\frac{h}{2}} \cdot \underline{e}_z r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^R (-(P - P_{\text{atm}}) + S_{zz})_{z=\frac{h}{2}} r dr \\ S_{zz} &= 0 \text{ si } z = \frac{h}{2} \\ F_z &= 2\pi \int_0^R \frac{6\eta_0 \dot{h}}{h^3} (R^2 - r^2) r dr \\ &= 2\pi \frac{6\eta_0 \dot{h}}{h^3} \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= 2\pi \frac{6\eta_0 \dot{h}}{h^3} \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{3\pi \eta_0 \dot{h} R^4}{h^3} \end{aligned}$$

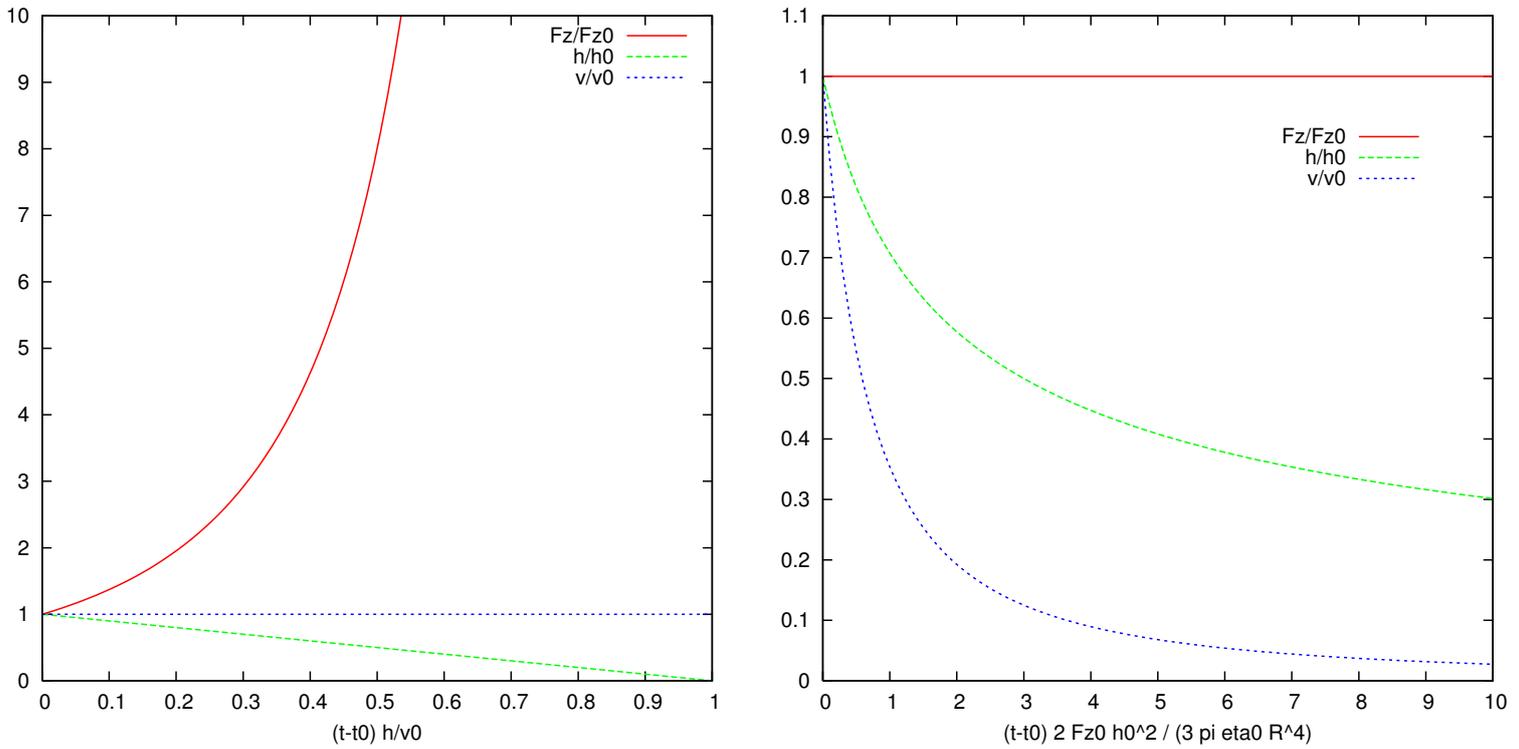


FIGURE 3.14 – Compression à vitesse constante (g.) et à force constante (d.)

### Compression à vitesse de descente du disque $\dot{h}$ constante

Lorsque la vitesse  $\dot{h}$  est constante on a simplement :

$$F_z = \frac{3\pi\eta_0\dot{h}R^4}{(h_0 - \dot{h}(t - t_0))^3}$$

La force nécessaire pour maintenir une vitesse de descente constante diverge quand les deux disques sont très proches.

### Compression à Force $F_z$ constante

Lorsque la force  $F_z$  est constante on peut poser que :

$$\begin{aligned} \frac{F_z}{3\pi\eta_0R^4} &= \frac{\dot{h}}{h^3} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h^2} \right) \\ \frac{2F_z}{3\pi\eta_0R^4}(t - t_0) &= \left( \frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h^2} \right) \\ h &= \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{2|F_z|h_0^2(t-t_0)}{3\pi\eta_0R^4}}} \\ \dot{h}_0 &= -\frac{h_0^3|F_z|}{3\pi\eta_0R^4} \end{aligned} \quad (3.71)$$

## 3.4 Écoulement hélicoïdal dans une filière annulaire

### 3.4.1 Forme de l'écoulement

Le cylindre et la tige centrale sont de longueur supposées infinie. La tige est animée d'un mouvement de rotation de vitesse de rotation  $\omega$  et également d'un mouvement de translation à vitesse constante  $V_0$ . Entre le haut et le bas du cylindre règne une différence de Pression dont le gradient est  $(P_2 - P_1)/L$

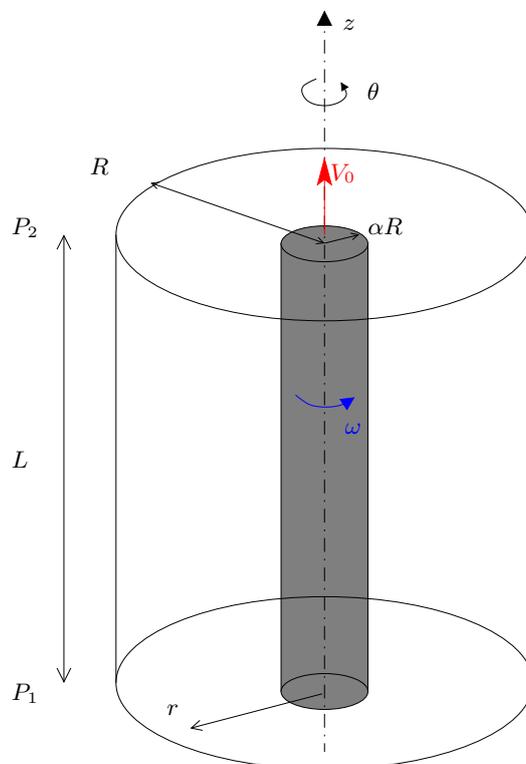


FIGURE 3.15 – Écoulement annulaire entre deux cylindres mobiles

**Application** Filière d'extrusion de tube (Écoulement par dépression). Déplacement de piston dans un cylindre rempli de fluide visqueux : Rhéomètre, MFI, clapet de presse à injecter.

### 3.4.2 Calcul

#### Type d'écoulement

Écoulement par dépression et par déplacement de paroi, en coordonnées cylindriques, aisément solvable pour un fluide Newtonien incompressible.

#### Conditions aux limites

On pose :  $R_0 = \alpha R$ . De la sorte, quand  $\alpha \rightarrow 0$  on doit retomber sur les résultats du tube cylindrique

$$\begin{aligned}
 r &= R \\
 V_r &= 0 \\
 V_\theta &= 0 \\
 V_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
r &= R_0 \\
&= \alpha R \\
V_r &= 0 \\
V_\theta &= \omega \alpha R \\
V_z &= V_0
\end{aligned} \tag{3.73}$$

La géométrie cylindrique et les conditions aux limites ne s'oppose pas à poser que l'écoulement est axisymétrique :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ . De plus, l'écoulement est développé selon  $z$  : on voit toujours la même section et la tige se déplace à vitesse constante, donc :  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ .

On peut alors poser une forme a priori de l'écoulement qui serait :

$$\begin{aligned}
V_r &= 0 \\
V_\theta &= V_\theta(r) \\
V_z &= V_z(r)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

## Résolution

La contrainte d'incompressibilité qui s'écrit :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{3.75}$$

est automatiquement vérifiée par les choix faits en (3.74)

Les termes a priori non-nuls qui rentrent en compte dans le tenseur des taux de déformations sont les suivants :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

et donc les composantes du tenseur des contraintes non-nulles sont les suivantes :

$$\underline{S} = 2\eta_0 \underline{d}
\begin{pmatrix} 0 & S_{r\theta} & S_{rz} \\ S_{r\theta} & 0 & 0 \\ S_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

Équations d'équilibre :

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \tag{3.78}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{S_{r\theta}}{r} = 0 \tag{3.79}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} = 0 \tag{3.80}$$

A priori  $P$  ne dépend pas de  $r$  mais  $S_{rz}$  et  $S_{r\theta}$  dépendent que de  $r$  ; on a alors forcément :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = r \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + 2S_{r\theta} \quad (3.81)$$

$$= C_1 \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} \quad (3.83)$$

$$= G \quad (3.84)$$

On a alors :  $P = C_1\theta + Gz + C_3$  mais en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et  $(r, \theta + 2\pi, z)$  désignent le même point, où il ne peut donc n'y avoir qu'une seule valeur de pression... donc  $C_1 = 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ .

On se retrouve alors avec :

$$\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{S_{r\theta}}{r} = 0 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} = G \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = G \quad (3.87)$$

**Calcul de  $V_\theta$**  On reformule (3.85) :

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) \right) = 0 \quad (3.88)$$

$$r^2 S_{r\theta} = C_3 \quad (3.89)$$

$$S_{r\theta} = \frac{C_3}{r^2} \quad (3.90)$$

L'équation (3.90) est valable pour un fluide Newtonien généralisé.

Mais spécifiquement dans le cas d'un fluide Newtonien :

$$\eta_0 \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) = \frac{C_3}{r^2} \quad (3.91)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) = \frac{C_3}{\eta_0 r^2} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) = \frac{C_3}{\eta_0 r^3} \quad (3.93)$$

$$\frac{V_\theta}{r} = -\frac{C_3}{2\eta_0 r^2} + C_4 \quad (3.94)$$

$$V_\theta = -\frac{C_3}{2\eta_0 r} + C_4 r \quad (3.95)$$

$$(3.96)$$

On détermine  $C_3$  et  $C_4$  grâce aux conditions aux limites.

$$V_\theta(R) = 0$$

$$-\frac{C_3}{2\eta_0 R} + C_4 R = 0 \quad (3.97)$$

$$V_\theta(\alpha R) = \omega \alpha R$$

$$-\frac{C_3}{2\eta_0 \alpha R} + C_4 \alpha R = \omega \alpha R$$

$$(3.98)$$

D'où on extirpe :

$$C_4 = -\frac{\omega\alpha^2}{1-\alpha^2} \quad (3.99)$$

$$C_3 = 2\eta_0 C_4 R^2 \quad (3.100)$$

$$(3.101)$$

Et finalement :

$$V_\theta = \frac{\omega\alpha^2 R}{1-\alpha^2} \left( -\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \quad (3.102)$$

Le cisaillement entre les directions  $r, \theta$  est alors :

$$\begin{aligned} d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ &= -\frac{\omega\alpha^2}{1-\alpha^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

**Cas de l'entrefer faible** Lorsque l'entrefer entre les deux cylindres est faible ( $\alpha = 1 - \epsilon$ ), donc avec  $\epsilon \ll 1$ , le cisaillement varie peu entre les valeurs prises en  $r = \alpha R$  et  $r = R$  :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{r\theta}(r = \alpha R) &= -\frac{\omega}{1-\alpha^2} \\ &= -\frac{\omega}{2\epsilon} \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{r\theta}(r = R) &= -\frac{\omega\alpha^2}{1-\alpha^2} \\ &= -\frac{\omega}{2\epsilon} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Donc au premier ordre en  $\epsilon$ , le cisaillement est constant dans l'entrefer ce qui rend ce type de dispositif intéressant pour la rhéométrie et c'est d'ailleurs le principe du rhéomètre cylindrique de Couette.

**Calcul de  $V_z$**  On reformule (3.86) :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) \right) = G \quad (3.106)$$

$$r S_{rz} = \frac{Gr^2}{2} + C_5 \quad (3.107)$$

$$S_{rz} = \frac{Gr}{2} + \frac{C_5}{r} \quad (3.108)$$

Ici  $C_5$  n'est pas nul a priori puisque le domaine d'écoulement ne couvre pas  $r = 0$  L'équation (3.108) est valable pour un fluide Newtonien généralisé.

Mais spécifiquement dans le cas d'un fluide Newtonien :

$$\eta_0 \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{Gr}{2} + \frac{C_5}{r} \quad (3.109)$$

$$V_z = \frac{Gr^2}{4\eta_0} + \frac{C_5 \log r}{\eta_0} + C_6 \quad (3.110)$$

$G$  correspond au gradient de pression, tandis que  $C_5, C_6$  seront déterminés par les conditions aux limites :

$$V_z(R) = 0 \quad (3.111)$$

$$\frac{GR^2}{4\eta_0} + \frac{C_5 \log R}{\eta_0} + C_6 = 0 \quad (3.112)$$

$$V_z(\alpha R) = V_0 \quad (3.113)$$

$$\frac{G\alpha R^2}{4\eta_0} + \frac{C_5 \log \alpha R}{\eta_0} + C_6 = V_0 \quad (3.114)$$

D'où on extirpe :

$$\frac{G}{4\eta_0} R^2 (\alpha^2 - 1) + \frac{C_5}{\eta_0} (\log(\alpha R) - \log R) = V_0$$

$$\frac{C_5}{\eta_0} = \frac{1}{\log \alpha} \left( V_0 + \frac{G}{4\eta_0} (1 - \alpha^2) R^2 \right) \quad (3.115)$$

$$C_6 = -\frac{G}{4\eta_0} R^2 (\alpha^2 - 1) - \frac{C_5 \log R}{\eta_0} \quad (3.116)$$

Et finalement :

$$V_z = \frac{G}{4\eta_0} (r^2 - R^2) + \frac{C_5}{\eta_0} \log \frac{r}{R} \quad (3.117)$$

$$V_z = \frac{G}{4\eta_0} \left( (r^2 - R^2) + \frac{(1 - \alpha^2) R^2}{\log \alpha} \log \frac{r}{R} \right) + \frac{V_0}{\log \alpha} \log \frac{r}{R} \quad (3.118)$$

$$= V_{zp} + V_{zd} \quad (3.119)$$

On peut distinguer la contribution due seulement à la dépression  $V_{zp}$  proportionnelle au gradient de pression  $G$  et celle due au mouvement de la tige  $V_{zd}$  qui est proportionnelle à  $V_0$ .

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha R}^R V_z(r) r dr d\theta \quad (3.120)$$

$$= 2\pi \int_{\alpha R}^R (V_{zp}(r) + V_{zd}(r)) r dr \quad (3.121)$$

$$= Q_p + Q_d \quad (3.122)$$

**Calcul du débit  $Q_d$**

$$Q_d = 2\pi \frac{V_0}{\log \alpha} \int_{\alpha R}^R \log \frac{r}{R} r dr \quad (3.123)$$

$$y = \frac{r}{R} \quad (3.124)$$

$$Q_d = 2\pi \frac{V_0}{\log \alpha} R^2 \int_{\alpha}^1 y \log y dy \quad (3.125)$$

Avant d'aller plus loin, cette primitive nous sera bien utile ...

$$\int y \log y dy = -\int \frac{y^2}{2} \frac{1}{y} dy + \frac{y^2}{2} \log y \quad (3.126)$$

$$= \frac{y^2}{4} (2 \log y - 1) \quad (3.127)$$

$$Q_d = 2\pi \frac{V_0 R^2}{\log \alpha} \left[ \frac{y^2}{4} (2 \log y - 1) \right]_{\alpha}^1 \quad (3.128)$$

$$Q_d = \pi \frac{V_0 R^2}{2} \left( \frac{\alpha^2 - 1}{\log \alpha} - 2\alpha^2 \right) \quad (3.129)$$

**Calcul du débit  $Q_p$** 

$$Q_p = \frac{2\pi G}{4\eta_0} R^4 \int_{\alpha}^1 \left( y^2 - 1 + \frac{(1-\alpha^2)}{\log \alpha} \log y \right) y dy \quad (3.130)$$

$$= \frac{2\pi G}{4\eta_0} R^4 \left[ \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{1-\alpha^2}{\log \alpha} \left( \frac{y^2}{4} (2\log y - 1) \right) \right]_{\alpha}^1 \quad (3.131)$$

$$= -\frac{\pi G R^4 (1-\alpha^2)}{8\eta_0} \left( 1 + \alpha^2 + \frac{1-\alpha^2}{\log \alpha} \right) \quad (3.132)$$

**Exercice : Cas d'un entrefer faible** Lorsque l'entrefer est faible  $\alpha = 1 - \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ , montrer que :

$$Q_p = \frac{G\pi R^4 \epsilon^3}{6\eta_0} \quad (3.133)$$

$$\dot{\gamma}_w = \pm \frac{3Q}{\pi R^3 \epsilon^2} \quad (3.134)$$

**3.4.3 Écoulement d'un fluide loi-puissance entre deux cylindres en rotation**

D'après (3.90) la contrainte de cisaillement s'exprime (quelque soit le fluide (Newtonien ou Newtonien généralisé) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_{r\theta} &= \frac{C}{r^2} \\ S_{r\theta} &= K (\dot{\gamma}_{r\theta})^n \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= \left( \frac{C}{Kr^2} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} &= D r^{\frac{-2}{n}} \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta}}{r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta}}{r} \right) &= D r^{\frac{-2}{n}-1} \\ \frac{V_{\theta}}{r} &= -\frac{nD}{2} r^{\frac{-2}{n}} + E \\ v_{\theta} &= -\frac{nD}{2} r^{\frac{-2}{n}+1} + Er \end{aligned} \quad (3.136)$$

Les conditions aux limites sont comme auparavant :

$$\begin{aligned} v_{\theta}(R) &= 0 \\ -\frac{nD}{2} R^{\frac{-2}{n}+1} + ER &= 0 \\ E &= \frac{nD}{2} R^{\frac{-2}{n}} \\ v_{\theta}(\alpha R) &= \alpha R \omega \\ \alpha R \omega &= \frac{nD}{2} R^{-2/n+1} \alpha \left( 1 - \alpha^{\frac{-2}{n}} \right) \\ \frac{nD}{2} &= \frac{R\omega}{R^{1-\frac{2}{n}} (1 - \alpha^{\frac{-2}{n}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{2\omega}{nR^{-\frac{2}{n}}(1 - \alpha^{-\frac{2}{n}})} \\
&= \frac{2\omega R^{\frac{2}{n}}}{n(1 - \alpha^{-\frac{2}{n}})} \\
&= \frac{2\omega R^{\frac{2}{n}} \alpha^{\frac{2}{n}}}{n(\alpha^{\frac{2}{n}} - 1)}
\end{aligned} \tag{3.137}$$

On a alors finalement pour la vitesse :

$$\begin{aligned}
v_{\theta}(r) &= \frac{Dn}{2} \left( R^{\frac{-2}{n}} r - r^{\frac{-2}{n}+1} \right) \\
&= \frac{R\omega}{R^{1-\frac{2}{n}}(1 - \alpha^{-\frac{2}{n}})} \left( R^{\frac{-2}{n}} r - r^{\frac{-2}{n}+1} \right) \\
&= \frac{R\omega}{(1 - \alpha^{-\frac{2}{n}})} \left( \frac{r}{R} - \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n}-1} \right) \\
&= \frac{R\omega \alpha^{\frac{2}{n}}}{\alpha^{\frac{2}{n}} - 1} \left( \frac{r}{R} - \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n}-1} \right) \\
v_{\theta}(r) &= \frac{R\omega \alpha^{\frac{2}{n}}}{1 - \alpha^{\frac{2}{n}}} \left( \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n}-1} - \frac{r}{R} \right)
\end{aligned} \tag{3.138}$$

et la contrainte à la paroi en  $r = R$  :

$$\begin{aligned}
C &= KD^n \\
S_{r\theta} &= K \frac{D^n}{R^2}
\end{aligned} \tag{3.139}$$

$$= K \frac{R^n \omega^n \alpha^2}{(1 - \alpha^{\frac{2}{n}})^n} \tag{3.140}$$

### 3.5 Système piston-filière

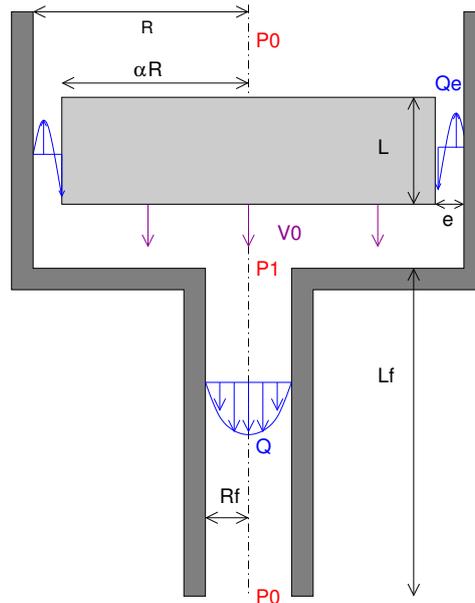


FIGURE 3.16 – Système piston filière cylindrique avec fuite à l'entrefer

Le système piston filière décrit dans la Fig. 3.16, est emblématique du fonctionnement des rhéomètre capillaire mais aussi des systèmes buse clapets de presse à injecter

Un piston de rayon  $\alpha R$  se déplace à vitesse constante  $V_0$  dans un cylindre de rayon  $R$  rempli de polymère. Le mouvement du piston impose un débit volumique de polymère  $Q_0$  qui passe dans la filière mais aussi dans l'entrefer entre le piston et le cylindre. Ce dernier débit est clairement un débit de fuite qui diminue d'autant le débit "utile" qui passe dans la filière. Une usure du système se traduit par une augmentation de la taille de l'entrefer et une chute des performances du système que nous allons quantifier.

Le débit imposé est bien évidemment proportionnel à la section du piston et à sa vitesse de déplacement

$$Q_0 = V_0 \pi \alpha^2 R^2 \quad (3.141)$$

Le débit théorique qui passerait dans la filière si l'entrefer était nul serait

$$Q_{\text{théorique}} = V_0 \pi R^2 \quad (3.142)$$

Le débit se répartit entre un débit utile dans la filière  $Q$  et un débit de fuite par l'entrefer  $Q_e$ .

On admet que dans le réservoir et à la sortie de la filière il y règne la même pression atmosphérique  $P_0$ . Il nous faut donc aussi calculer la surpression  $\Delta P = P_1 - P_0$  qui se produit à l'entrée de la filière.

La filière correspond à un tube cylindrique de rayon  $R_f$  et de longueur  $L_f$  dans laquelle la perte de charge pour un fluide Newtonien est :

$$\begin{aligned} P_0 - P_1 &= -\frac{8\eta_0 Q L_f}{\pi R_f^4} \\ \Delta P &= Q C_f \end{aligned} \quad (3.143)$$

Dans l'entrefer il y a un écoulement annulaire (cf. §3.4) avec mouvement de translation de la tige centrale :

$$\begin{aligned} Q_e &= Q_{ed} + Q_{ep} \\ Q_{ed} &= \pi \frac{V_0 R^2}{2} \left( \frac{\alpha^2 - 1}{\log \alpha} - 2\alpha^2 \right) \\ &= \pi \frac{V_0 R^2}{c_{ed}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{ep} &= -\frac{\pi(P_1 - P_0)R^4(1 - \alpha^2)}{8\eta L} \left(1 + \alpha^2 + \frac{1 - \alpha^2}{\log \alpha}\right) \\
&= -\Delta P \frac{\pi R^4(1 - \alpha^2)}{8\eta L} c_{ep} \\
&= -\Delta P \frac{1}{C_{ep}}
\end{aligned}$$

Le système d'équations à deux inconnues  $\Delta P, Q$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
Q &= Q_0 + Q_{ed} + Q_{ep} \\
\Delta P &= -Q_{ep} C_{ep} \\
\Delta P &= Q C_f
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q &= Q_0 + Q_{ed} - \frac{\Delta P}{C_{ep}} \\
&= Q_0 + Q_{ed} - Q \frac{C_f}{C_{ep}} \\
&= \frac{Q_0 + Q_{ed}}{1 + \frac{C_f}{C_{ep}}} \\
&= \frac{V_0 \pi R^2 (\alpha^2 + c_{ed})}{1 + c_{ep} \frac{L_f}{L} \left(\frac{R}{R_f}\right)^4} \\
\frac{Q}{V_0 \pi R^2} &= \frac{\alpha^2 + c_{ed}}{1 + c_{ep} \frac{L_f}{L} \left(\frac{R}{R_f}\right)^4} \tag{3.144}
\end{aligned}$$

On compare, Fig. 3.17, ce débit  $Q$  au débit théorique  $\pi R^2 V_0$  selon la valeur de l'entrefer et ce pour différentes filières :

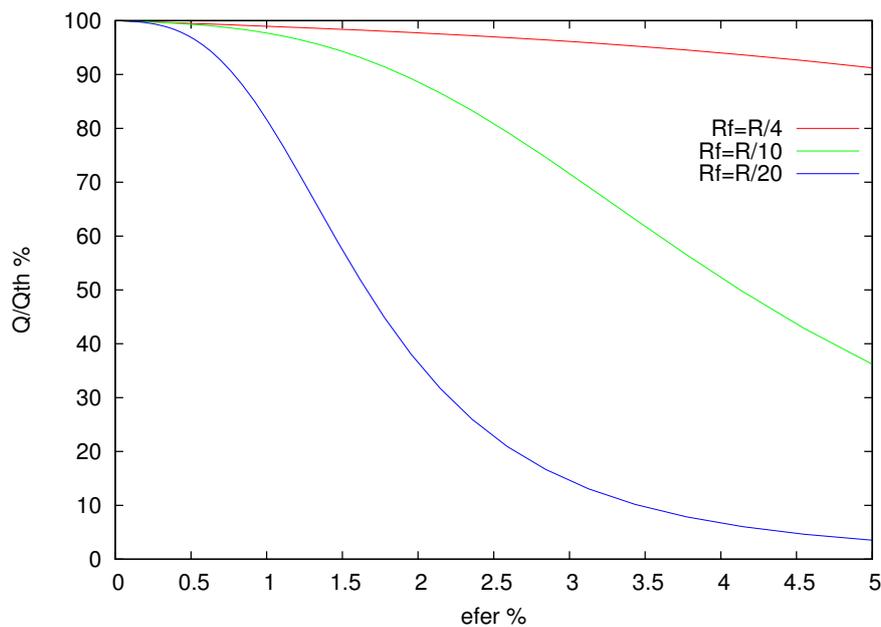


FIGURE 3.17 – courbe de rapport de débit selon l'entrefer  $(1 - \alpha)$  pour différentes filières  $R_f$ , avec  $L_f = L$

La surpression qui se produit à l'entrée de la filière est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta P &= \frac{8\eta_0 L_f}{\pi R_f^4} Q \\ &= \frac{8\eta_0 L_f}{R_f^4} \frac{V_0 R^2 (\alpha^2 + c_{ed})}{1 + c_{ep} \frac{L_f}{L} \left(\frac{R}{R_f}\right)^4} \\ \frac{R_f \Delta P}{\eta_0 V_0} &= \frac{8 L_f R^2 (\alpha^2 + c_{ed})}{R_f^3 \left(1 + c_{ep} \frac{L_f}{L} \left(\frac{R}{R_f}\right)^4\right)}\end{aligned}$$

### 3.6 Cylindre mélangeur

*sujets d'examen ESP 1& 2 Juin 2004*

Dans un fourreau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , rempli de polymère à l'état fondu (fluide incompressible visqueux Newtonien), est plongé une barre cylindrique de rayon  $\alpha R$  et de même longueur. La barre est animée d'un mouvement de rotation à une vitesse constante de rotation  $\Omega$ .

Entre la barre et le fourreau on place un autre cylindre de même longueur, de rayon interne  $\beta_1 R$  et de rayon externe  $\beta_2 R$ . On a effectivement  $\alpha < \beta_1 < \beta_2 < 1$ . Le cylindre "flotte" dans le polymère tout en restant droit et est animée d'une vitesse de rotation constante  $\omega$ . Le but de cet exercice est de calculer cette vitesse de rotation  $\omega$ .

Ce cylindre mélangeur scinde l'écoulement en deux sous écoulement distincts, chaque sous-écoulement étant un écoulement axisymétrique entre deux cylindres en rotation<sup>3</sup>.

Ce dispositif est basé sur le principe des nouveaux embouts mélangeurs que l'on glisse entre le fourreau et la tête de vis de l'extrudeuse. Percés de trous et tournants à une vitesse différente de la vis, ils permettent ainsi des transferts de fluide et augmentent alors le niveau de mélange.

#### 3.6.1 Calcul des vitesses

##### Hypothèses

On considère que les cylindres sont suffisamment long pour que l'on puisse négliger les variations suivant l'axe  $z$ . Rappeler les hypothèse d'un écoulement antisymétrique incompressible dans notre cas de figure. Quelle composante de la vitesse  $v_r, v_\theta, v_z$  est non-nulle a priori ? De quelles variables d'espace  $r, \theta, z$  dépend-t'elle ?

##### Conditions aux limites

Écrire les conditions aux limites en vitesse sur la paroi interne du fourreau  $r = R$ , sur les parois internes et externes du cylindre mélangeur  $r = \beta_1 R$  et  $r = \beta_2 R$  et sur la barre  $r = \alpha R$ .

Déterminer la vitesse pour chaque sous-écoulement : Mettre la solution sous la forme :

$$v_k = A_i \frac{R}{r} + B_i \frac{r}{R} \quad (3.145)$$

où  $A_i$  et  $B_i$  désignent des constantes à préciser pour chaque sous-écoulement et  $k$  une composante  $r, \theta, z$ .

#### 3.6.2 Calcul du couple

En utilisant seulement l'expression (3.145) calculer le tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{D}}$  et le tenseur des extra-contraintes  $\underline{\underline{S}} = 2\eta\underline{\underline{D}}$ .

Calculer le couple  $C_z$  sur la face interne et le couple sur la face externe du cylindre mélangeur en utilisant la formule :

3. si vous voyez à quoi je veux en venir ...

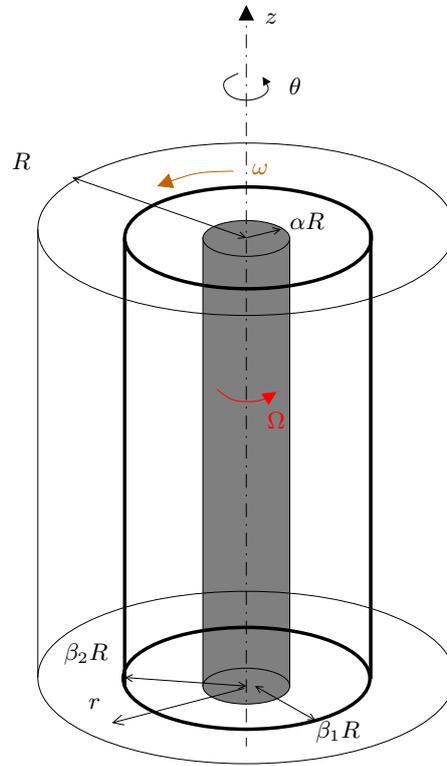


FIGURE 3.18 – cylindre mélangeur

$$C_z = \int_0^{2\pi} \int_0^L r S_{kl} r d\theta dz \quad (3.146)$$

où  $k$  et  $l$  désignent une composante  $r, \theta, z$

### 3.6.3 Calcul de la vitesse de rotation $\omega$

Lorsque le couple total s'exerçant sur le cylindre mélangeur est nul, celui ci est animé d'une vitesse de rotation constante. Calculer  $\omega$  dans le cas où  $\alpha = \frac{1}{4}, \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$

### 3.6.4 Solution

Il s'agit d'un écoulement axisymétrique similaire à celui vu en §3.4 où seule  $v_\theta(r)$  est non-nulle a priori. La forme générale de la vitesse est alors :

$$v_{i\theta}(r) = A_i \frac{R}{r} + B_i \frac{r}{R} \quad (3.147)$$

Chacune des constantes se détermine par les conditions aux limites suivantes :

**Écoulement "externe" 2 :**

$$\begin{aligned} r &= R \\ v_{2\theta} &= 0 \\ r &= \beta_2 R \\ v_{2\theta} &= \beta_2 R \omega \end{aligned}$$

Dans ce cas on a alors :

$$A_2 + B_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
A_2 \frac{1}{\beta_2} + B_2 \beta_2 &= \beta_2 R \omega \\
A_2 \left( \frac{1}{\beta_2} - \beta_2 \right) &= \beta_2 R \omega \\
A_2 &= \frac{\beta_2^2 R \omega}{1 - \beta_2^2}
\end{aligned} \tag{3.148}$$

d'où :

$$v_{2\theta}(r) = \frac{\beta_2^2 R \omega}{1 - \beta_2^2} \left( \frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \tag{3.149}$$

**Écoulement "interne" 1 :**

$$\begin{aligned}
r &= \alpha R \\
v_{1\theta} &= \alpha R \Omega \\
r &= \beta_1 R \\
v_{1\theta} &= \beta_1 R \omega
\end{aligned}$$

Dans ce cas on a alors :

$$\begin{aligned}
A_1 \frac{1}{\alpha} + B_1 \alpha &= \alpha R \Omega \\
A_1 \frac{1}{\beta_1} + B_1 \beta_1 &= \beta_1 R \omega \\
A_1 + B_1 \alpha^2 &= \alpha^2 R \Omega \\
A_1 + B_1 \beta_1^2 &= \beta_1^2 R \omega \\
B_1 &= \frac{R(\beta_1^2 \omega - \alpha^2 \Omega)}{\beta_1^2 - \alpha^2} \\
A_1 \frac{\beta_1}{\alpha} + B_1 \beta_1 \alpha &= \beta_1 \alpha R \Omega \\
A_1 \frac{\alpha}{\beta_1} + B_1 \alpha \beta_1 &= \alpha \beta_1 R \omega \\
A_1 &= \frac{\beta_1 \alpha R (\Omega - \omega)}{\frac{\beta_1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta_1}} \\
&= \frac{\beta_1^2 \alpha^2 R (\Omega - \omega)}{\beta_1^2 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$v_{\theta 1}(r) = \frac{\beta_1^2 \alpha^2 R (\Omega - \omega)}{\beta_1^2 - \alpha^2} \frac{R}{r} + \frac{R(\beta_1^2 \omega - \alpha^2 \Omega)}{\beta_1^2 - \alpha^2} \frac{r}{R} \tag{3.150}$$

**Taux de déformations** Que ce soit dans l'écoulement interne ou externe, La seule composante à prendre en compte est :

$$\begin{aligned}
d_{r\theta i} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -2 \frac{A_i R}{r^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{r\theta i} &= 2\eta_0 d_{r\theta i} \\
&= -\frac{2\eta_0 A_i R}{r^2}
\end{aligned}
\tag{3.151}$$

**Calcul du couple** Les efforts qui s'exercent sur la paroi d'un cylindre sont alors :

$$\begin{aligned}
\underline{f}_i &= \underline{\sigma}_i \cdot \underline{n}_i \\
\underline{f}_1 &= \underline{\sigma}_1 \cdot (-\underline{e}_r) \\
&= \begin{pmatrix} P \\ -S_{r\theta 1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{f}_2 &= \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{e}_r \\
&= \begin{pmatrix} -P \\ S_{r\theta 2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le couple qui en résulte s'obtient en calculant le moment des efforts et en l'intégrant sur les surfaces interne et externe du cylindre mélangeur :

$$\begin{aligned}
\underline{r} \wedge \underline{f}_i &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -P \\ S_{r\theta i} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rS_{r\theta i} \end{pmatrix} \\
C_i &= \int_0^{2\pi} \int_0^L \underline{r} \wedge \underline{f}_i r d\theta dz \\
&= 2\pi \int_0^L \left( r^2 \frac{-2\eta_0 A_i}{r^2} \right) dz \\
&= -4\pi\eta_0 LR(\pm A_i)
\end{aligned}$$

Le cylindre mélangeur tourne a vitesse constante si le couple **total** qui s'exerce sur lui est nul :

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= 0 \\
A_1 - A_2 &= 0 \\
\frac{\beta_1^2 \alpha^2 R(\Omega - \omega)}{\beta_1^2 - \alpha^2} &= \frac{\beta_2^2 R\omega}{1 - \beta_2^2} \\
\omega \left( \frac{\beta_1^2 \alpha^2}{\beta_1^2 - \alpha^2} + \frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2^2} \right) &= \frac{\beta_1^2 \alpha^2 \Omega}{\beta_1^2 - \alpha^2}
\end{aligned}
\tag{3.152}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{4} \\
\beta_1 &= \frac{1}{2} \\
\beta_2 &= \frac{1}{2} \\
\omega &= \frac{\Omega}{5}
\end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Mise en œuvre par déformation

### 4.1 Soufflage d'une paraison cylindrique

La paraison cylindrique représentée ci dessous Fig. 4.1 est déformée par une différence de pression  $\Delta P = P_i - P_e$  constante entre sa face interne  $R_i(t)$  et sa face externe  $R_e(t)$ . Elle est simultanément étirée à vitesse  $V_0$  suivant l'axe  $z$

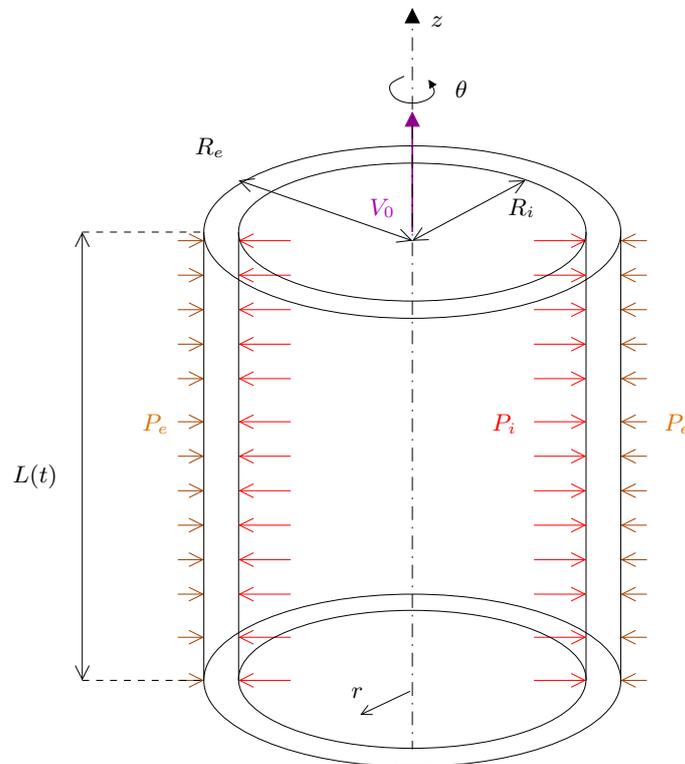


FIGURE 4.1 – Soufflage d'une paraison cylindrique

Le calcul est tiré de la publication [8].

#### 4.1.1 Forme du champ de vitesse et des contraintes

D'après la géométrie et les conditions du procédé on peut poser que l'écoulement est axisymétrique et qui plus est, que seules les vitesses radiales  $v_r$  et axiale  $v_z$  sont à prendre en compte. Le cylindre se déformant continûment en cylindre on peut poser au plus simple  $v_r(r), v_z(z)$ .

Dans ce cas la condition d'incompressibilité devient :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} &= -\frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial v_z}{\partial z} &= C_3 \\
v_z &= C_3 z \\
v_0 &= C_3 L \\
C_3 &= \frac{V_0}{L} \\
\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} &= -C_3 \\
rv_r &= -C_3 \frac{r^2}{2} + C_1 \\
v_r &= -C_3 \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Le tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{d}}$  est simplement diagonal ( il s'agit donc d'un écoulement élongationnel )

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{d}} &= \begin{pmatrix} -\frac{C_3}{2} - \frac{C_1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_3}{2} + \frac{C_1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{S}} &= 2\eta_0 \underline{\underline{d}}
\end{aligned}$$

#### 4.1.2 Équations d'équilibre et CL en contraintes

Les équations d'équilibre qui doivent être vérifiées se réduisent à :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

En particulier sur  $\underline{e}_r$  on aura :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4\eta_0 C_1}{r^3} - \frac{C_3}{2} - \frac{2\eta_0 C_1}{r^3} + \frac{C_3}{2} - \frac{2\eta_0 C_1}{r^3} &= 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\
P &= C_2
\end{aligned}$$

La pression est constante dans l'épaisseur de la paraison (mais elle varie dans le temps, car cette épaisseur varie dans le temps)

Nous sommes en présence d'un écoulement à surface libre pour lequel il n'y a pas de conditions aux limites sur la vitesse ou sur la position des surfaces de la paraison comme nous en avons désormais l'habitude. Par contre il existe des conditions aux limites sur les efforts  $\underline{f}$  sur les surfaces interne et externe de la paraison :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{f}$$

Sur la surface interne :

$$\begin{aligned} r &= R_i \\ \underline{n} &= -\underline{e}_r \\ \underline{f} &= P_i \underline{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -P - \eta_0 C_3 - \frac{2\eta_0 C_1}{R_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & -P - \eta_0 C_3 + \frac{2\eta_0 C_1}{R_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & -P + 2\eta_0 C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sur la surface externe :

$$\begin{aligned} r &= R_e \\ \underline{n} &= \underline{e}_r \\ \underline{f} &= -P_e \underline{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -P - \eta_0 C_3 - \frac{2\eta_0 C_1}{R_e^2} & 0 & 0 \\ 0 & -P - \eta_0 C_3 + \frac{2\eta_0 C_1}{R_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & -P + 2\eta_0 C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous ramène à :

$$\begin{aligned} P + \eta_0 C_3 + \frac{2\eta_0 C_1}{R_i^2} &= P_i \\ -P - \eta_0 C_3 - \frac{2\eta_0 C_1}{R_e^2} &= -P_e \end{aligned}$$

Ces deux équations vont permettre de calculer  $C_1$  et la valeur de la pression dans la paraison :

$$\begin{aligned} 2\eta_0 C_1 \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) &= P_i - P_e \\ C_1 &= \frac{\Delta P}{2\eta_0} \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ P &= -\eta_0 \frac{V_0}{L} + \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} \end{aligned}$$

Finalement la vitesse radiale  $v_r$  s'exprime :

$$v_r = -\frac{V_0}{L} \frac{r}{2} + \frac{\Delta P}{2\eta_0} \frac{R_e^2 R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)r} \quad (4.2)$$

**Remarque :** Si  $P_e \ll P_i$  on aura alors  $\Delta P \sim P_i$  et

$$P = \Delta P \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_e^2} \quad (4.3)$$

On voit aisément que  $P$  peut être beaucoup plus importante que  $\Delta P$ .

### 4.1.3 Évolution de la paraison durant le soufflage

D'après la définition de la vitesse radiale  $v_r$  et son expression (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{v_r}{r} &= \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \\ \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} &= -\frac{C_3}{2} + \frac{C_1}{r^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cette expression est vraie notamment quand  $r = R_e$  ou  $r = R_i$  :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{R}_e}{R_e} &= -\frac{C_3}{2} + \frac{\Delta P}{2\eta_0} \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \frac{\dot{R}_i}{R_i} &= -\frac{C_3}{2} + \frac{\Delta P}{2\eta_0} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \frac{\dot{R}_e}{R_e} - \frac{\dot{R}_i}{R_i} &= -\frac{\Delta P}{2\eta_0} \\ \frac{d}{dt} \left( \log \left( \frac{R_e}{R_i} \right) \right) &= -\frac{\Delta P}{2\eta_0} \\ \frac{R_e}{R_i} &= \frac{R_{0e}}{R_{0i}} \exp \left( \frac{-\Delta P}{2\eta_0} t \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

La conservation du volume pour cette paraison nous donne :

$$\begin{aligned}\pi(R_e^2 - R_i^2)L &= \pi(R_{0e}^2 - R_{0i}^2)L_0 \\ R_e^2 - R_i^2 &= (R_{0e}^2 - R_{0i}^2) \frac{L_0}{L} \\ R_i^2 \left( \frac{R_e^2}{R_i^2} - 1 \right) &= (R_{0e}^2 - R_{0i}^2) \frac{L_0}{L}\end{aligned}$$

Du coup on aura :

$$\begin{aligned}R_i^2 \left( \left( \frac{R_{0e}}{R_{0i}} \right)^2 \exp \left( \frac{-\Delta P}{\eta_0} t \right) - 1 \right) &= (R_{0e}^2 - R_{0i}^2) \frac{L_0}{L} \\ \frac{R_i(t)}{R_{0i}} &= \sqrt{\frac{\left( \left( \frac{R_{0e}}{R_{0i}} \right)^2 - 1 \right) \frac{L_0}{L}}{\left( \frac{R_{0e}}{R_{0i}} \right)^2 \exp \left( \frac{-\Delta P}{\eta_0} t \right) - 1}}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Quelle que soit la vitesse d'étirage  $V_0$ , le soufflage se termine lorsque le rayon devient infini quand :

$$t_{\text{lim}} = \frac{2\eta_0}{\Delta P} \log \left( \frac{R_{0e}}{R_{0i}} \right) \quad (4.8)$$

Lorsque la vitesse d'étirage  $V_0$  est constante, on a :

$$L = L_0 + V_0 t \quad (4.9)$$

Et l'évolution du rayon suivant le temps (Fig.4.2), ressemble à ce qui suit en fonction de la vitesse d'étirage :

#### 4.1.4 Calcul de la force d'étirage

On calcule la force d'étirage à la base de la paraison de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\underline{F} &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_{R_i}^{R_e} \left( -P + 2\eta_0 \frac{V_0}{L} \right) r dr \\ &= \pi(R_e^2 - R_i^2) \left( 3\eta_0 \frac{V_0}{L} - \frac{P_e R_e^2 - P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \\ &= \pi(R_e^2 - R_i^2) 3\eta_0 \frac{V_0}{L} - \pi(P_e R_e^2 - P_i R_i^2)\end{aligned}\quad (4.10)$$

La force de tirage diminue au cours du temps pour un fluide Newtonien.

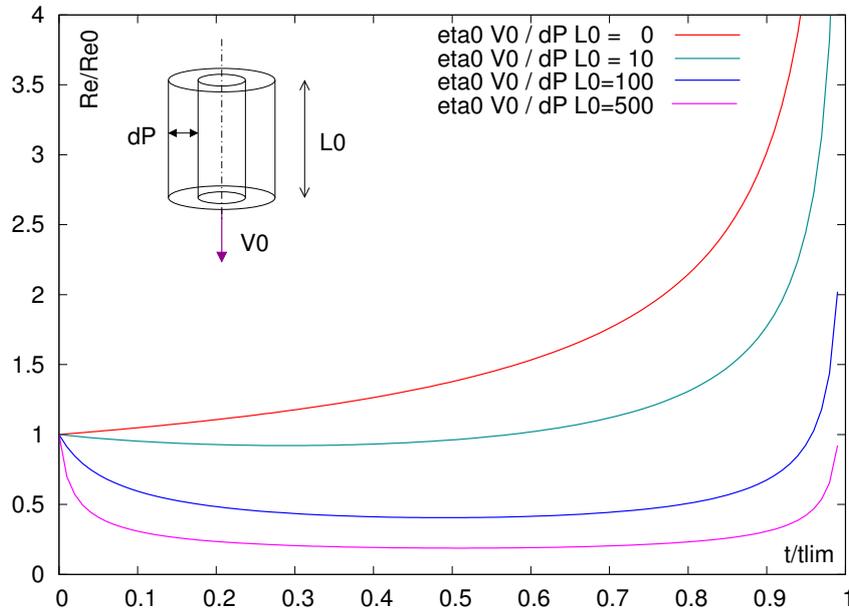


FIGURE 4.2 – Évolution du rayon extérieur de la paraison au cours du temps, selon différentes conditions d'étrépage

#### 4.1.5 Influence de la pression de soufflage obtenue par débit d'air

En réalité, on est bien incapable de maintenir une pression constante de soufflage sur la paroi interne de la paraison, dans la mesure où la pression de soufflage provient d'un circuit d'air comprimé et que cette pression va donc dépendre du volume de la cavité que lui offre la paraison ...laquelle évolue dans le temps.

Initialement le volume interne de la paraison représente  $V_0$  et est à pression  $P_0$  car il contient  $n_0$  moles d'air à  $T_{gaz}$ , température qui a priori va rester constante pendant le soufflage on a selon la loi des gaz parfaits :

$$P_0 V_0 = n_0 R T_{gaz} \quad (4.11)$$

En cours de soufflage la paraison libère un volume  $V(t)$  et l'air est à pression  $P(t)$  car on apporte une masse d'air à débit constant :

$$P(t)V(t) = (n_0 + \dot{n}t)RT_{gaz} \quad (4.12)$$

$$= P_0 V_0 + \dot{n}tRT_{gaz} \quad (4.13)$$

$$P(t) - P_0 = \frac{P_0 V_0 + \dot{n}tRT_{gaz}}{V(t)} - P_0 \quad (4.14)$$

On ne peut plus intégrer directement par rapport au temps (4.5) comme auparavant car la pression dépend du temps désormais mais on en utilisant la conservation du volume du cylindre au cours du temps (sans étrépage pour simplifier) on aboutit à :

$$\frac{\dot{R}_e}{R_e} = \frac{\dot{R}_i R_i}{R_e^2} \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\dot{R}_i}{R_{i0}} \quad (4.16)$$

$$= \frac{x_{e0}^2 - 1 + x_i^2}{(x_{e0}^2 - 1)x_i} \frac{P_0}{2\eta_0} (1 - x_i^2 + Bt) \quad (4.17)$$

$$B = \frac{\dot{n}RT_{gaz}}{P_0 V_0} \quad (4.18)$$

$$P = P_0 \left( \frac{1 + Bt}{x_i^2} \right) \quad (4.19)$$

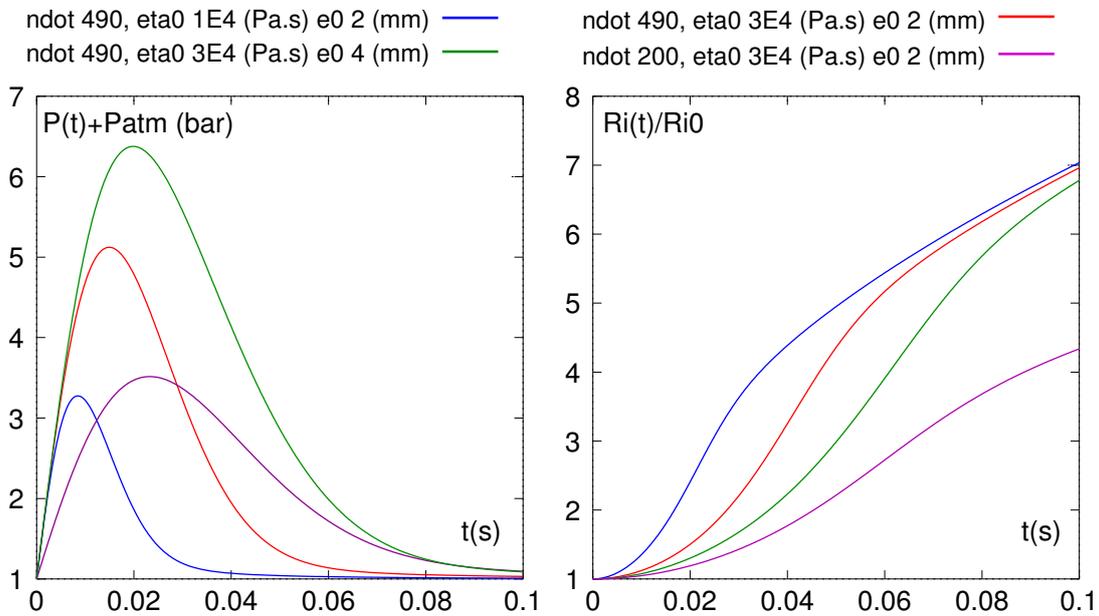


FIGURE 4.3 – Évolution du rayon extérieur de la paraison au cours du temps, et de la pression de soufflage selon différentes conditions de débit d'air, de viscosité et d'épaisseur initiale

## 4.2 Écoulement compressible de fluides visqueux

Les polymères sont des fluides visqueux, incompressibles, jusqu'à un certain point. Dans la suite nous allons quantifier des effets particuliers de compressibilité lorsqu'ils se manifestent lors d'un écoulement, notamment la phase d'injection dynamique.

La compressibilité  $\beta$  d'un polymère est donnée par l'évolution de sa masse volumique  $\rho$  avec la pression  $P$  :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (4.20)$$

Sa valeur est de l'ordre de  $10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ .

La conservation de la masse, cette fois, est donnée par

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (4.21)$$

La compressibilité peut aussi se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \beta \frac{dP}{dt} \quad (4.22)$$

La conservation de la masse (4.21) devient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= -\beta \frac{dP}{dt} \\ &= -\beta \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla P \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

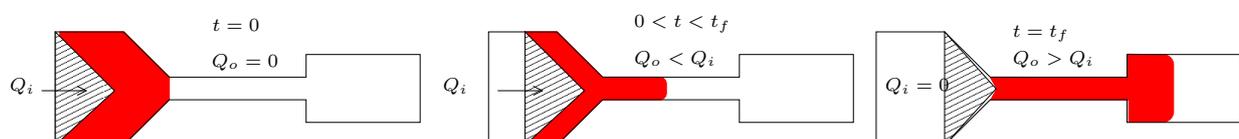


FIGURE 4.4 – Séquence transitoire dans un écoulement de fluide compressible, déclenché par le mouvement d'un piston

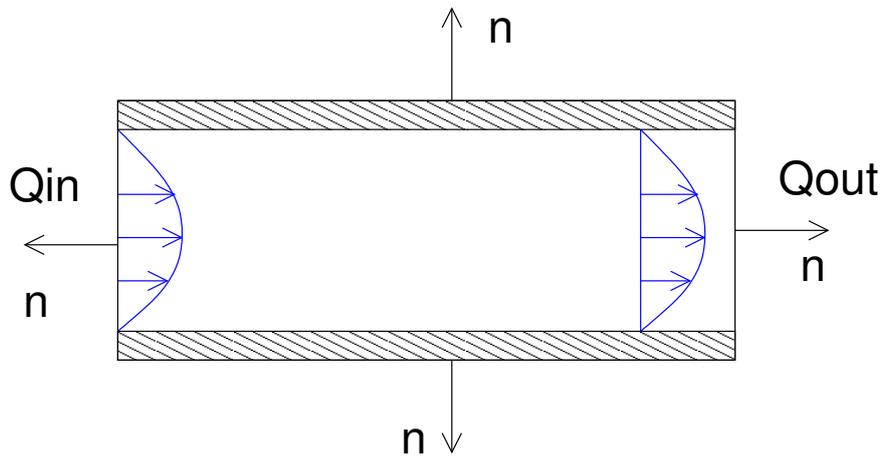


FIGURE 4.5 – Calcul des Débits volumiques sur le volume de contrôle

Dans l'éq. (4.23) on peut remarquer que le signe de  $\frac{\partial P}{\partial t}$  est positif car durant le remplissage, la pression en un point augmente au cours du temps. Tandis que le terme  $\underline{v} \cdot \underline{\nabla} P$  est négatif car la vitesse et le gradient de pression sont de sens opposé dans un écoulement créé par une différence de pression.

Si on intègre (4.23) sur le volume de remplissage :

$$\begin{aligned}
 \int \int \int \underline{\nabla} \cdot \underline{v} dV &= \int \int \underline{v} \cdot \underline{n} dS \\
 &= Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}} \\
 &= \Delta Q \\
 \Delta Q &= -\beta \int \int \int \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} P \right) dV
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si on regarde les conditions d'injections on peut raisonnablement poser que la pression d'injection augmente linéairement avec le temps et qu'au début les vitesses sont faibles. Ceci nous donne le maximum de différence entre le débit volumique d'entrée et le débit volumique de sortie :

$$\Delta Q = -\beta \dot{P}_{inj} V < 0 \tag{4.25}$$

Donc le débit d'entrée est supérieur au débit de sortie

# Chapitre 5

## Couplage thermomécanique

### 5.1 Écoulement de cisaillement simple. Fluide non-Newtonien thermo-dépendant

La plastification d'après le modèle de Tadmor (p318) [2] ou [9] p262, est basée sur le schéma d'un solide poussé continûment contre une plaque chaude mobile.

Le fluide est incompressible avec des propriétés thermophysiques constante par phase , rhéofluidifiant (loi puissance) et thermo-dépendant

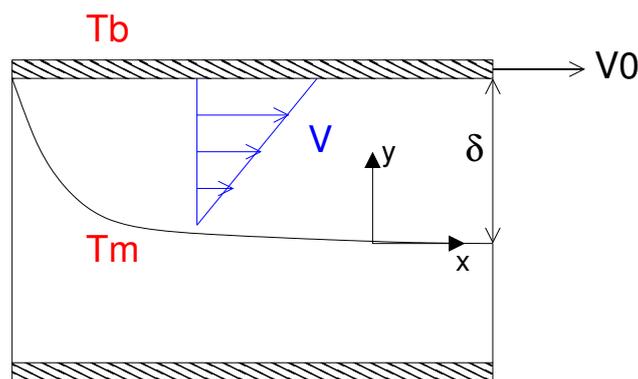


FIGURE 5.1 – Écoulement de cisaillement dans un film de polymère fondu

#### 5.1.1 Vitesse dans le film fondu

On a un écoulement par déplacement de paroi uniquement mais logiquement avec une épaisseur de film variable selon  $x$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

En effet :

- Le film ne peut pas être d'épaisseur constante car en tout point l'apport de matière fondue est augmentée de l'apport de matière fondue en amont et convectée jusque en ce point par le déplacement de la plaque.
- Les pressions nécessaires pour maintenir ce film d'épaisseur constante seraient énorme.

Le comportement rhéologique du fluide est décrit par une loi puissances combiné à une loi d'Arrhenius pour thermodépendance de la viscosité :

$$\eta = m_0 \exp(-a(T - T_m)) \dot{\gamma}^{n-1} \quad (5.1)$$

Ou  $a$  est un facteur d'Arrhenius ( appelé modifié ou approximatif );  $m_0$  est le facteur de consistance à la température de référence  $T_m$ , par exemple la température de fusion, et  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$  est le gradient de vitesse,  $n$  l'indice de pseudo plasticité.

dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ S_{xy} &= C_1 \\ m_0 \exp(-a(T - T_m)) \frac{\partial v_x^n}{\partial y} &= C_1 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \left( \frac{C_1}{m_0} \right)^{1/n} \exp\left( \frac{a(T - T_m)}{n} \right) \end{aligned}$$

avec comme conditions aux limites applicables pour le film :  
en température :

$$\begin{aligned} T &= T_b, y = \delta \\ T &= T_m, y = 0 \end{aligned}$$

en vitesse :

$$\begin{aligned} v_x &= v_0, y = \delta \\ v_x &= 0, y = 0 \end{aligned}$$

On adimensionnalise et on suppose le profil de température linéaire dans le film :

$$\xi = \frac{y}{\delta} \quad (5.2)$$

$$\frac{T - T_m}{T_b - T_m} = \xi \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \\ &= C_2 \exp(A\xi) \\ C_2 &= \left( \frac{C_1}{m_0} \right)^{1/n} \\ A &= \frac{a(T_b - T_m)}{n} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$A$  est un nombre adimensionnel qui mesure l'importance du couplage thermomécanique dans l'écoulement et son influence sur le champ de vitesse.

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} &= C_2 \delta \exp(A\xi) \\ v_x &= \frac{C_2 \delta}{A} \exp(A\xi) + C_3 \end{aligned}$$

d'après les CL :

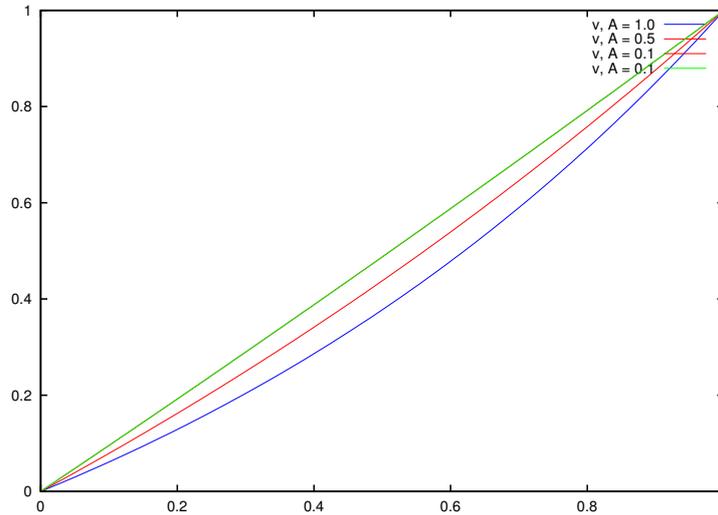


FIGURE 5.2 – Profil de vitesse adimensionnelle en fonction de la distance adimensionnelle  $y/H$  et de la thermodépendance  $A$

$$\begin{aligned}\frac{C_2\delta}{A} + C_3 &= 0 \\ \frac{C_2\delta}{A} \exp A + C_3 &= V_0\end{aligned}$$

d'où :

$$v_x = V_0 \frac{\exp(A\xi) - 1}{\exp A - 1} \quad (5.5)$$

La vitesse moyenne se définit comme :

$$\begin{aligned}\langle v_x \rangle &= \int_0^1 v_x d\xi \\ &= V_0 \frac{\exp A - A - 1}{A(\exp A - 1)}\end{aligned} \quad (5.6)$$

## 5.1.2 Température dans le film

on tient compte cette fois de la dissipation visqueuse mais pas de la convection (car l'écoulement est considéré comme thermiquement développé)

La conservation de l'énergie, sans convection est alors :

$$k_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

Relation entre les différentes constantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial y} &= \left(\frac{C_1}{m_0}\right)^{1/n} \exp(A\xi) \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{V_0}{\delta} \frac{A}{\exp A - 1} \exp(A\xi) \\ \left(\frac{C_1}{m_0}\right)^{1/n} &= \frac{1}{\delta} \frac{V_0 A}{\exp A - 1} \\ C_1 &= m_0 \left(\frac{V_0}{\delta}\right)^n \left(\frac{A}{\exp A - 1}\right)^n\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
k_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= -C_1 \frac{V_0}{\delta} \frac{A}{\exp A - 1} \exp(A\xi) \\
&= -m_0 \left(\frac{V_0}{\delta}\right)^{n+1} \left(\frac{A}{\exp A - 1}\right)^{n+1} \exp(A\xi) \\
&= -D_1 \exp(A\xi) \\
\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m} \exp(A\xi) \\
\frac{\partial T}{\partial \xi} &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m A} \exp(A\xi) + D_2 \\
T &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} \exp(A\xi) + D_2 \xi + D_3
\end{aligned}$$

D'après les CL sur  $T$  :

$$\begin{aligned}
T_m &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} + D_3 \\
T_b &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} \exp(A) + D_2 + D_3 \\
T_b - T_m &= -\frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} (\exp(A) - 1) + D_2 \\
D_2 &= T_b - T_m + \frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} (\exp(A) - 1) \\
D_3 &= T_m + \frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2}
\end{aligned}$$

(5.8)

Dans ce cas  $T$  devient :

$$\begin{aligned}
T &= T_m + (T_b - T_m)\xi + \frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2} (1 + (\exp A - 1)\xi - \exp A\xi) \\
\frac{T - T_m}{T_b - T_m} &= \xi + \frac{\delta^2 D_1}{k_m A^2 (T_b - T_m)} (1 + (\exp A - 1)\xi - \exp A\xi) \\
&= \xi + m_0 \left(\frac{V_0}{\delta}\right)^{n+1} \left(\frac{A}{\exp A - 1}\right)^{n+1} \frac{\delta^2}{k_m A^2 (T_b - T_m)} (1 + (\exp A - 1)\xi - \exp A\xi) \\
&= \xi + m_0 \left(\frac{V_0}{\exp A - 1}\right)^{n+1} \left(\frac{A}{\delta}\right)^{n-1} \frac{1}{k_m (T_b - T_m)} (1 + (\exp A - 1)\xi - \exp A\xi) \\
&= \xi + B_r \frac{A^{n-1}}{(\exp A - 1)^{n+1}} (1 + (\exp A - 1)\xi - \exp A\xi)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$B_r = \frac{m_0 V_0^{n+1} \delta^{1-n}}{k_m (T_b - T_m)} \tag{5.10}$$

On peut distinguer dans l'expression de la température le facteur d'auto échauffement (nombre de Brinkmann  $B_r$ ) et un facteur thermodépendant  $\frac{A^{n-1}}{(\exp A - 1)^{n+1}}$  qui diminue le nombre de Brinkmann. La température moyenne pondérée par la convection  $T_{\text{bulk}}$  : **en reprenant le profil linéaire** :

$$T_{\text{adbulk}} = \frac{\int_0^1 T_{\text{ad}}(\xi) v_{\text{xad}}(\xi) d\xi}{\int_0^1 v_{\text{xad}}(\xi) d\xi}$$

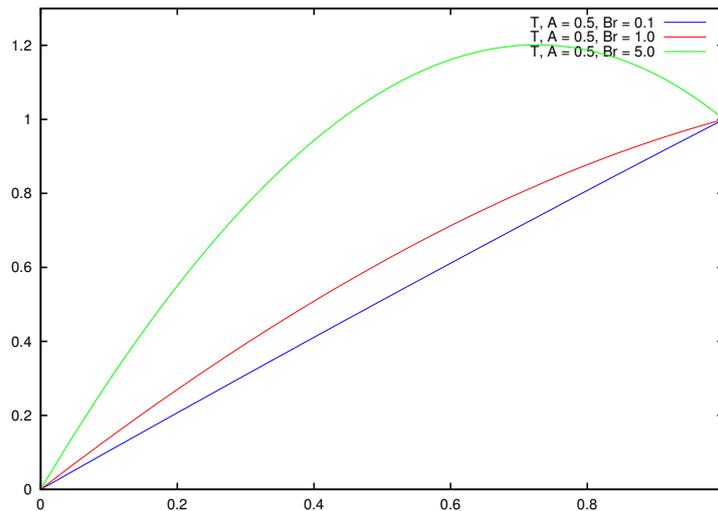


FIGURE 5.3 – Profil de Température adimensionnel en fonction de la distance adimensionnelle  $y/H$ , de la dissipation visqueuse  $B_r$  et de la thermodépendance  $A$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int_0^1 \xi (\exp(A\xi) - 1) d\xi}{\int_0^1 (\exp(A\xi) - 1) d\xi} \\
 &= \frac{\int_0^1 \xi \exp(A\xi) - \xi d\xi}{\frac{1}{A} (\exp A - A - 1)} \\
 &= \frac{\int_0^1 \xi \exp(A\xi) d\xi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{A} (\exp A - A - 1)} \\
 &= \frac{-\int_0^1 \frac{1}{A} \exp(A\xi) d\xi + \left[ \xi \frac{\exp(A\xi)}{A} \right]_0^1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{A} (\exp A - A - 1)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{A^2} [\exp(A\xi)]_0^1 + \frac{\exp A}{A} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{A} (\exp A - A - 1)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{A^2} (\exp(A) - 1) + \frac{\exp A}{A} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{A} (\exp A - A - 1)} \\
 &= \frac{\exp A \left( \frac{A-1}{A} \right) + \frac{1}{A} - \frac{A}{2}}{(\exp A - A - 1)} \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

On trace quelques profils type de température et de vitesse en fonction des nombres adimensionnels  $A$  et  $B_r$ .

# Chapitre 6

## Annexes & cie

### 6.1 Équation de conservation en coordonnées cylindriques

Tenseur gradient de vitesse

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \underline{\nabla v} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Contrainte d'incompressibilité

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.2)$$

Équations d'équilibre

$$\begin{aligned} \rho \underline{f} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} &= 0 \\ \rho \underline{f} - \underline{\nabla} P + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} + S_{rr} - S_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2S_{r\theta} \right) + \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \theta} + S_{rz} \right) + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3)$$

Polymer	abrev	type	$k$ W/m C	$C_p$ J/kg C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$T_g/T_f$ C	$n$	$d\eta/dT\eta$ 1/C
Polystyrene	PS	amorphe	0.12	1200	1060	101	0.3	0.08
Polychlorure Vynile	PVC	amorphe	0.21	1100	1400	80	0.3	0.2
Polyméthacrylate Méthyle	PMMA	amorphe	0.2	1450	1180	105	0.25	0.2
Polystyrene Acrylonitrile	SAN	amorphe	0.12	1400	1080	115	0.25	0.20
Acrylobutadiène Styrene	ABS	amorphe	0.25	1400	1020	115	0.25	0.2
Polycarbonate	PC	amorphe	0.19	1400	1200	150	0.7	0.05
Polyéthylène basse densité	LDPE	S/Cristallin	0.24	2300	920	120	0.35	0.03
Polyéthylène basse densité linéaire	LLDPE	S/Cristallin	0.24	2300	920	125	0.60	0.02
Polyéthylène haute densité	HDPE	S/Cristallin	0.25	2250	950	130	0.50	0.02
Polypropylène	PP	S/Cristallin	0.15	2100	910	175	0.35	0.02
Polyamide 6	PA 6	s/cristallin	0.25	2150	1130	225	0.7	0.02
Polyamide 6,6	PA 6,6	s/cristallin	0.24	2150	1140	265	0.75	0.03
Polyéthylène Téréphtalate	PET	s/cristallin	0.29	1550	1350	275	0.60	0.03
Polybutylène téréphtalate	PBT	s/cristallin	0.21	1250	1350	250	0.38	0.03

# Bibliographie

- [1] J. F. Agassant, P. Avenas, J. P. Sergent, B. Vergnes, and M. Vincent. *La mise en forme des matières plastiques*. Technique et Documentation, 3 edition, 1996.
- [2] Z. Tadmor and C. G. Gogos. *Principles of Polymer Processing*. John Wiley, 1979.
- [3] Chris Rauwendaal. *Polymer extrusion*. Hanser, 4 edition, 2001.
- [4] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and Ole Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids*, volume 1 Fluid Mechanics. John Wiley, second edition, 1987.
- [5] R. Deterre, P. Mousseau, and A. Sarda. *Injection des polymères. Simulation, optimisation et conception*. Lavoisier, Techniques et Documentation, 2003.
- [6] **Y. Béreaux**. Modelling of the flow in the distribution plate of a spin pack. *International Polymer Processing*, 17(4) :325–332, 2002.
- [7] **Y. Béreaux**, J.-Y. Charneau, and M. Moguedet. A simple model of throughput and pressure development for single screw. *Journal of Material Technology and Processing*, 209(1) :611–618, 2009. 10.1016/j.jmatprotec.2008.02.070, cited 4 times.
- [8] F. M. Schmidt, A. Rodriguez-Villa, F. Agassant, and M. Bellet. Analytical models for the inflation of a polymeric tube. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19 :89–104, 2000.
- [9] H. Potente and W. Többen. Simulation of shearing and mixing sections. *SPE ANTEC Tech. papers*, 2000.