



**HAL**  
open science

## Remarques sur la géométrie de M. Descartes

Philippe de La Hire

► **To cite this version:**

Philippe de La Hire. Remarques sur la géométrie de M. Descartes. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1712. ads-00121785

**HAL Id: ads-00121785**

**<https://hal.science/ads-00121785>**

Submitted on 22 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

R E M A R Q U E S  
S U R L A G E O M E T R I E  
D E M. D E S C A R T E S.

Par M. D E L A H I R E.

**M**DESCARTES a été le premier qui ait proposé une <sup>23 Juillet</sup> Méthode pour la construction des Problemes par <sup>1712.</sup> deux lignes courbes ou deux lieux; mais il explique cette méthode d'une telle maniere, que si l'on ne fait pas attention à tout ce qu'il dit, on pourra rencontrer des cas qui pourroient faire croire qu'elle n'est pas exempte d'erreur: cependant si l'on s'en sert de la maniere qu'il prescrit, on trouvera qu'il ne peut pas y en avoir. Il faut remarquer que M. Descartes n'a point dit qu'on doit tirer ces lieux de l'équation proposée, & lui-même ne le fait pas dans les exemples qu'il rapporte, en sorte qu'il semble que ces lieux doivent être pris comme au hazard, mais pour-tant de telle nature qu'ils puissent conduire à la fin qu'on se propose.

Lorsqu'on veut résoudre un Probleme de Géométrie suivant la méthode de M. Descartes, on le considère comme fait, & ayant donné des noms aux quantités qui y sont posées, dont les unes sont connues & les autres inconnues, on les compare toutes ensemble suivant l'état de la question, & l'on vient par ces comparaisons à différentes équations particulières, où les inconnues ou indéterminées de la question se trouvent mêlées avec les connues, & l'on pourra toujours déprimer le nombre des inconnues dans quelques-unes de ces équations par le moyen des autres; & enfin si le Probleme est déterminé, on pourra réduire toutes ces équations particulières à une seule qui ne contiendra plus qu'une seule quantité inconnue avec toutes les connues de la question, ce qui en donnera la solution. Mais lorsqu'on a encore deux

équations qui renferment chacune deux inconnuës & les mêmes dans ces équations, elles seront chacune un lieu, lesquels étant construits séparément & combinés de telle sorte, que les quantités de même nom leur soient communes, les rencontres de ces lieux donneront la solution du Probleme dans toute son étendue, ce qui est évident; d'où l'on voit que la résolution d'une équation proposée en deux lieux, n'est qu'une opération converse de celle qu'on auroit faite pour former une équation d'un Probleme proposé, & c'est ce qui m'a persuadé que M. Descartes n'avoit trouvé sa méthode de la construction des équations que sur cette considération.

Mais aussi comme il arrive très souvent, que lorsqu'on veut résoudre un Probleme, on forme des équations beaucoup plus composées qu'il ne seroit nécessaire, aussi lorsqu'on veut construire une équation avec deux lieux, on les pourroit prendre beaucoup plus composés que l'équation ne le demande, & il y a grande apparence que M. Descartes ayant examiné à fond la méthode qu'il avoit trouvée, avoit connu toutes les difficultés qui peuvent s'y rencontrer; car il y met quelques exceptions, comme on le peut voir au commencement du troisième livre de sa Géométrie, dont voici les termes :

*Encore que toutes les lignes courbes qui peuvent estre décrites par quelque mouvement régulier, doivent être reçûës en la Géométrie; ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre pour la construction de chaque Probleme; mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il seroit possible de le résoudre. Et même il est à remarquer que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du Probleme proposé plus facile; mais principalement celles qui sont du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.*

Voilà tout ce que nous avons de la méthode de M. Descartes, & l'on peut juger par là qu'il n'est pas aisé de s'en servir comme il le prescrit, puisqu'il faudroit avoir une méthode

méthode pour connoître quelles courbes on doit employer, & celles qu'on doit rejeter; mais ce n'étoit pas aussi son dessein; & pour venir à son but, il ajoute un peu après :

*Or afin que je puisse donner ici quelques regles pour éviter l'une & l'autre de ces deux fautes, il faut que je dise ici quelque chose en général de la nature des équations.*

Il s'étend ensuite fort au long à expliquer toutes les opérations qu'on peut faire sur les racines d'une équation, comment on peut connoître les vraies d'avec les fausses, comment il faut les multiplier, les diviser, changer les fausses en vraies, &c. Il passe enfin à la manière d'opérer, sans expliquer comment on peut éviter les fautes dont il a parlé d'abord, si ce n'est qu'il entend que par ces opérations sur les racines, on doit toujours préparer & réduire une équation aux termes ou aux formules de ses exemples qui sont d'abord du 3.<sup>e</sup> & du 4.<sup>e</sup> degré qu'il construit par la combinaison d'une parabole avec un cercle, à cause, dit-il, que la parabole est en quelque façon la plus simple.

Il donne aussi de la même manière la construction d'une équation de six dimensions, & il laisse à juger de même des autres. Ainsi toute la méthode de M. Descartes se réduit donc à réduire une équation à une certaine formule, ce qui n'est pas fort facile à faire dans plusieurs cas; & c'est proprement éviter les difficultés de la méthode en ne s'en servant pas, ce qui est fort éloigné de ce qu'il avoit proposé. Car pourquoi n'a-t-il pas plutôt employé deux paraboles qu'une parabole & un cercle, ou d'autres courbes du même genre dans les équations de trois & de quatre dimensions; est-ce à cause que le cercle peut se décrire plus facilement que la parabole? Cela seroit contre ce qu'il a dit, qu'il n'entend pas par les plus simples courbes celles qui peuvent être décrites le plus simplement, & il est certain que l'équation d'une parabole est plus simple que celle du cercle.

D'autres Géometres qui sont venus après lui, comme M. Sluze, a fait voir que cette méthode pouvoit être rendue très universelle, en trouvant d'une manière très ingénieuse

une infinité de courbes pour une seule équation proposée; comme il a fait dans les exemples de son *Méfolabe*, sans parler de la règle ni des bornes que M. Descartes lui avoit donnée; & ce fut en suivant M. Sluze, qu'en 1678, dans un petit *Traité de la construction des équations*, j'expliquai le plus méthodiquement qu'il me fut possible les opérations qu'on pouvoit faire par cette méthode; mais je ne manquai pas dans la Préface d'insérer, suivant M. Descartes, la restriction suivante.

*Mais il faut prendre garde de ne se pas servir de lieux d'un genre plus composé qu'il n'est nécessaire pour la construction d'une équation proposée, quoique bien souvent ils paroissent les plus simples pour la construction d'un Probleme, comme par exemple ce seroit une faute considérable dans la Géométrie d'employer, &c.*

Enfin depuis peu de temps quelques Géometres se sont avisés de se former une règle pour la construction des équations sur l'idée de celle de M. Descartes, mais sans avoir égard aux remarques qu'il y avoit inférées; & ils ont pris à volonté toutes sortes de lieux, & dont assés souvent ils n'ont construit qu'une partie, ce qui les a conduits à ne trouver pas toutes les racines de l'équation; quelquefois à en trouver de surnuméraires, & même quelques-unes qui n'y étoient pas; & enfin dans quelques cas ils n'en trouvoient aucune, quand les lieux ne les contenoient pas eux-mêmes; & sur ces sortes d'exemples qu'ils ont publiés, ils ont accusé la méthode d'erreur ou d'insuffisance. Mais dans le Mémoire que je donnai à l'Académie en Décembre 1709, & qui a été imprimée au commencement de l'année 1710 je justifiai la méthode de M. Descartes, & je découvris les causes des erreurs prétendues dont on l'accusoit. Il me semble que j'en ai dit assés dans ce Mémoire pour satisfaire ceux qui ne cherchent qu'à connoître la vérité; mais comme il y a encore quelques remarques à faire sur ce sujet, je les donnerai dans celui-ci.

M. Descartes n'ayant pas jugé que les équations planes méritassent d'entrer en comparaison avec celles qui sont plus

élevées, ou peut-être ayant voulu les construire de la même manière, il les a réduites à trois formules dont il donne la construction au commencement de sa Géométrie avec un lieu au cercle & l'autre à la ligne droite, sans y parler de ces lieux, & même il me semble qu'il est assez difficile de tirer ces lieux de ces équations. On n'avoit point pensé depuis ce temps-là qu'on pût construire ces sortes d'équations d'une manière plus simple, & lui-même sans doute ne le croyoit pas, car autrement il auroit péché contre sa règle; cependant je vais faire voir qu'on peut construire ces trois formules avec de seules lignes droites, sans y employer de cercle ni d'autres courbes.

La première formule est  $xx - 2ax - bb = 0$ .

La seconde.....  $xx + 2ax - bb = 0$ .

Et la troisième.....  $xx - 2ax + bb = 0$ .

Pour la première formule ou première équation je pose pour premier lieu

$$xx - 2ax + aa = zz$$

qui est un lieu à la ligne droite, laquelle est élevée au quarré, car sa racine est  $x - a = z$ , ou bien on aura

$$xx - 2ax = zz - aa;$$

& dans la proposée à la place de  $xx - 2ax$ , je substitue sa valeur  $zz - aa$ , & j'ai le second lieu

$$zz - aa - bb = 0$$

qui est aux hyperboles opposées infinies, comme je l'ai expliqué sur les lieux dans mon Mémoire de 1709.

Pour faire la construction de ces deux lieux, il les faut réduire, & pour le premier on prendra  $x - a = y$ , dont le quarré sera  $xx - 2ax + aa = yy = zz$ . Pour le second il n'est pas nécessaire de le réduire pour en pouvoir faire la construction, car on voit que sa racine sera

$$z = \sqrt{aa + bb}.$$

Maintenant pour la construction de ces deux lieux, on tirera la ligne droite  $FAB$  pour être l'axe des  $y$  dont l'origine sera au point  $A$ , & les ordonnées à cet axe d'un côté



l'axe  $FB$ , on aura  $OB$  pour la vraie racine de l'équation, laquelle est  $x = a + \sqrt{aa + bb}$ , car  $AB$  est  $= DB$ , & pour la fausse racine on aura  $OF$ , laquelle est  $-x = \sqrt{aa + bb} - a$ .

Pour la seconde formule dont l'équation est

$$xx + 2ax - bb = 0,$$

on prendra pour premier lieu

$$xx + 2ax + aa = zz$$

qui est un lieu à la ligne droite élevée au carré, & dont la racine est  $x + a = z$ , ou bien on aura

$$xx + 2ax = zz - aa;$$

& substituant dans la proposée la valeur de  $xx + 2ax$ , on aura le second lieu

$$zz - bb - aa = 0, \text{ ou bien } zz = bb + aa,$$

dont la racine sera  $z = \sqrt{bb + aa}$  qui est aux hyperboles infinies comme dans la précédente formule.

Pour la construction ayant réduit comme dans la précédente le premier lieu, en posant  $x + a = y$ , on trouvera

$$xx + 2ax + aa = yy = zz,$$

laquelle est la même réduite que la précédente : c'est pourquoi la construction en sera la même : car dans la même figure en posant pour les abscisses  $AF = +y$ , &  $AB = -y$ , & les ordonnées  $FG = +z$ , & les  $BD = -z$ , la même ligne  $GD$  qui fait un angle demi-droit avec  $FB$ , sera le premier lieu. Pour le second, les deux lignes droites  $ED$ ,  $GH$  parallèles à  $FB$  y satisferont, car  $OE$  ou  $OH$  seront  $= \sqrt{bb + aa}$  comme dans l'autre.

Mais comme on a le point  $A$  pour l'origine du lieu réduit & des  $y$ , & que par la réduction  $y - a = x$ , le point  $O$  sera donc l'origine du lieu requis, & les  $OF = +x$ , & les  $OB = -x$ .

Il n'y aura donc point de différence dans ces deux constructions, si ce n'est que la grandeur  $OF$  qui étoit  $-x$  dans la première, devient  $+x$  dans celle-ci; & qu'au



contraire  $OB$  qui étoit  $+x$  devient ici  $-x$ .

On voit par-là, que dans chacune de ces deux formules il y aura toujours deux racines réelles, une vraie & une fausse : car la racine de  $aa+bb$  qui est  $=OE$  ou  $OH = z = AF$  sera toujours plus grande que  $AO = a$ , & les deux racines de cette seconde formule seront pour la vraie  $OF + x = \sqrt{bb+aa} - a$ , ou bien  $x - \sqrt{bb+aa} + a + a = 0$ , & pour la fausse  $OB - x = \sqrt{bb+aa} + a$ , ou bien  $x + \sqrt{bb+aa} + a = 0$ .

Enfin pour la troisième formule dont l'équation est

$$xx - 2ax + bb = 0,$$

si l'on prend pour premier lieu

$$xx - 2ax + aa = zz$$

qui est à la ligne droite élevée au carré, & dont la racine est  $x - a = z$ , ou bien

$$xx - 2ax = zz - aa,$$

& qu'on introduise dans la proposée  $zz - aa$  à la place de  $xx - 2ax$ , on aura cet autre lieu

$$zz - aa + bb = 0, \text{ ou bien } zz = aa - bb,$$

& dont la racine est  $z = \sqrt{aa - bb}$  qui est aux hyperboles infinies.

Pour la construction je réduis le premier lieu comme dans les autres formules, en posant  $x - a = y$ , & j'aurai ce lieu réduit  $yy = zz$ . Mais pour le second il n'a pas besoin de réduction.

La Figure précédente pourra servir aussi à cette construction : car par le point  $A$  de la ligne droite  $FB$  ayant mené la ligne droite  $GAD$  qui fasse avec elle un angle demi-droit, elle sera le premier lieu réduit, dont l'origine des  $y$  sera en  $A$ . Et à cause que l'on a  $x = y + a$ , ayant fait  $AP = a$  comme dans la première formule, le point  $P$  sera l'origine du premier lieu pour les  $x$ .

Mais pour le second lieu on fera les perpendiculaires

comme  $OE$  &  $QH$  à la ligne  $FB$  chacune  $= \sqrt{aa - bb}$ , & l'on tirera les lignes droites  $ED, GH$  qui seront les hyperboles infinies de ce second lieu, lesquelles rencontreront le premier lieu aux points  $D$  &  $G$ , d'où les perpendiculaires  $DB, GF$  donneront en  $B$  & en  $F$  les deux racines  $x$  de cette équation, lesquelles seront  $PB, PF$ , & toutes deux vrayes, car dans ce cas la ligne  $AP = a$  sera plus grande que  $OE$  ou que la distance entre  $PB$  &  $ED$ , puisque  $OE$  est  $= \sqrt{aa - bb}$ , & cela quoique les  $z$  soient vrayes ou fausses, c'est-à-dire d'un côté ou d'autre de  $PB$ .

On doit remarquer que dans l'équation de cette formule, si  $a$  se trouvoit  $= b$ , alors les hyperboles infinies se réduiroient à la seule ligne droite  $FB$  qui est l'axe indéterminé de ces hyperboles, & qu'elles rencontreroient le premier lieu  $GD$  au même point  $A$ , ce qui donneroit les deux vrayes racines de la proposée égales chacune à  $PA = x$ . Et enfin si  $b$  étoit plus grande que  $a$ , le second lieu  $zz = aa - bb$  seroit imaginaire, & par conséquent il ne pourroit donner aucune rencontre sur  $GD$  ni aucune racine de l'équation, ce qui seroit connoître qu'elles seroient toutes deux imaginaires dans la proposée.

On doit encore remarquer que les lieux à ligne droite, élevés au quarré dont je me suis servi dans ces trois formules, sont construits imparfaitement : car je n'ai tiré que la seule ligne droite  $GAD$ , & ce lieu a encore une autre branche en  $IAK$  qui fait aussi un angle demi-droit avec  $FB$ , mais qui est posé de l'autre côté de  $A$ , ce qui est évident; puisque toutes les ordonnées à  $FB$  menées des points de cette seconde branche, donneront la même équation que la première, & cela à la différence du simple lieu à la ligne droite qui ne seroit qu'une partie de l'un de ces deux lieux comme  $AD$ , enforte qu'on peut considérer ce lieu à la ligne droite, élevé au quarré comme un lieu aux asymptotes qui est une des sections coniques, & ayant quatre branches dont

le simple n'en a qu'une. Mais ce lieu élevé  $GD, IK$  dans cet exemple, ne donnera que les deux mêmes racines de l'équation, qu'on pourra regarder comme doublées, aussi un lieu de deux dimensions quoique linéaire, combiné avec un lieu aux hyperboles quoiqu'infinies & en ligne droite, doit donner quatre racines; & c'est ce qui paroît servir à excuser M. Descartes, puisqu'on se sert dans cette solution de deux lieux plus élevés qu'il n'est nécessaire pour le Probleme, quoiqu'elles soient plus faciles à décrire, n'étant que des lignes droites, & n'y employant aucun lieu courbe.

Quelle sera donc la construction la plus simple de ces équations dans l'idée de M. Descartes? Voici ce que je propose. Soit par exemple la première formule dont l'équation est

$$xx - 2ax - bb = 0,$$

on prendra pour premier lieu

$$xx - 2ax + aa = az$$

qui est la parabole, ou bien

$$xx - 2ax = az - aa,$$

& introduisant dans la proposée la valeur  $ab - aa$  à la place de  $xx - 2ax$ , on aura le second lieu  $az - aa - bb = 0$ , ou  $az = aa + bb$ , ou  $z = a + \frac{bb}{a}$  qui est à la ligne droite simple. Cette construction sera la plus simple de toutes, suivant M. Descartes; car la parabole est en quelque façon la plus simple de toutes les courbes de ce genre, comme il le dit lui-même.

Mais si l'on vouloit avoir un cercle dans cette solution; posons dans la même équation proposée  $xx - 2ax - bb = 0$ , pour premier lieu

$$xx - 2ax = 2bb - zz$$

qui est au cercle, ce qui paroît dans la réduction en posant  $x - a = y$ , d'où l'on aura

$$yy - aa = 2bb - zz = aa + 2bb.$$

Mais introduisant dans la proposée à la place de  $xx - 2ax$  la valeur  $2bb - zz$ , on a

$$2bb - zz - bb = 0 \text{ ou } bb = zz$$

qui

qui est un lieu aux hyperboles infinies en lignes droites. Ainsi la construction de ces deux lieux donnera la solution de la proposée.

Mais si l'on avoit pris pour premier lieu

$$xx - 2ax = bb - zz$$

qui est encore un lieu au cercle; & ayant introduit dans la proposée la valeur de  $xx - 2ax$ , le second lieu auroit été

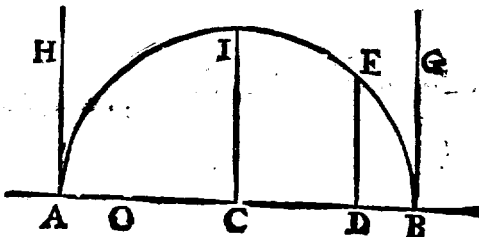
$$bb - zz - bb = 0, \text{ ou } zz = 0,$$

qui est aussi un lieu aux hyperboles infinies; mais dans ce cas ces hyperboles infinies, dont le demi-axe déterminé qui doit être  $= z$  seroit  $= 0$ , & par conséquent elles se réunissent dans leur axe indéterminé, qui seroit sur le diamètre du cercle sur lequel sont les  $x$ , ce qui est facile à voir par la construction. Car le lieu au cercle étant réduit en posant  $x - a = y$ , on aura  $yy + zz = bb + aa$ , & le rayon

du cercle  $CB$  ou  $CA$  sera  $= \sqrt{bb + aa}$ ; & plaçant sur  $CB$  les  $CD = +y$ ,

& sur  $CA$  les  $-y$ , les  $DE$  seront les  $z$ . Mais

la réduction nous montre que  $y + a = x$ ; si l'on prend donc  $CO = a$  le point  $O$  sera l'origine de nôtre lieu au cercle,



& les  $+x$  seront sur  $OB$  & les  $-x$  sur  $OA$ . Mais le lieu aux hyperboles infinies étant réduit à  $AB$ , puisque les  $z$  sont  $= 0$ , on aura la rencontre du cercle avec ce lieu aux points  $B$  &  $A$ ; donc les deux racines de la proposée seront  $OB = +x$  &  $OA = -x$ . On voit par-là qu'il étoit inutile de se servir du lieu au cercle, puisqu'il ne sert de rien dans cette construction laquelle est très simple.

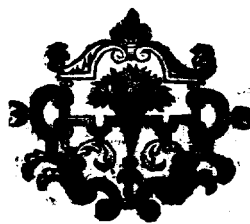
Mais si dans le lieu au cercle que nous venons de poser  $xx - 2ax = bb - zz$ , nous substituons la valeur de  $zz = 0$  que nous avons trouvée par le second lieu, nous n'aurons plus que la seule équation proposée  $xx - 2ax = bb$

266 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

que nous pourrons considérer comme un lieu aux hyperboles infinies, dont le demi-axe déterminé seroit  $CA$  ou  $CB =$

$\sqrt{aa+bb}$  comme le montre la réduction; & ces hyperboles infinies seroient les perpendiculaires  $AH, BG$  aux points  $A$  &  $B$ , dont  $CI$  seroit l'axe indéterminé, dont les abscisses seroient les  $z$  & les ordonnées à ces hyperboles sur cet axe, seroient les  $y$  tous égaux entr'eux. Mais le second lieu qui est aussi des hyperboles infinies qui sont réduites à leur axe indéterminé, est sur  $AB$  comme nous venons de voir, & rencontre les autres en  $A$  &  $B$ , ce qui donne les deux racines de cette équation  $OB$  &  $OA$ .

On pourra dire que dans ces constructions que je réduis aux seules lignes droites, on a toujours besoin de s'y servir de cercle; il est vrai puisqu'on ne peut pas mener une perpendiculaire sur une ligne droite, ni en faire une égale à une autre, ni trouver la différence de deux quarrés sans se servir du cercle: mais je réponds qu'on ne l'employe pas comme lieu dans la construction. Il y a une autre méthode que l'ordinaire pour avoir quelque connoissance des lieux qu'on doit choisir dans l'introduction pour un certain effet dans la résolution du Probleme; mais je l'expliquerai dans un autre Mémoire avec plusieurs remarques qu'il y a encore à faire sur ce sujet, car celui-ci deviendroit trop long.



---

Remarques sur la géométrie de M. Descartes - M. DE LA HIRE  
Académie royale des sciences - Année 1712

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE  
DE LA HIRE, DESCARTES, SLUZE

---