



**HAL**  
open science

# Des forces centripètes et centrifuges considérées en général dans toutes sortes de courbes et en particulier dans le cercle

M. Bemie

► **To cite this version:**

M. Bemie. Des forces centripètes et centrifuges considérées en général dans toutes sortes de courbes et en particulier dans le cercle. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1707. ads-00120373

**HAL Id: ads-00120373**

**<https://hal.science/ads-00120373>**

Submitted on 14 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DES FORCES CENTRIPETES  
ET CENTRIFUGES,

Considérées en général dans toutes sortes de Courbes,  
& en particulier dans le Cercle.

PAR M. BOMIE.

**M**onsieur Hugen est le premier, que je sçache, qui nous ait donné l'idée des Forces Centripetes ou Centrifuges, dans son excellent Livre de *Horologio oscillatorio*. M. Newton après lui a traité de ces Forces plus à fond. Après eux M. Varignon a donné des Methodes infiniment générales sur cette matiere dans différentes Pièces répandues dans les Memoires de cette Academie.

1707.  
3. Aoust.

Le nouveau Systeme, ou la nouvelle explication du mouvement des Planetes est entièrement fondée sur cette idée, & c'est la consideration de ces sortes de Forces, qui donne occasion à l'Auteur de ce Livre, d'expliquer les mouvemens des corps celestes d'une maniere fort ingénieuse.

M. Newton dans son Livre de *Principiis Mathematicis Philosophiæ naturalis* Livre 1. Section 2. Theorème 4. démontre le raport des Forces Centripetes dans deux cercles differens. Comme il m'a paru que cette démonstration aroit beaucoup de rapport avec le principe fondamental du nouveau Systeme, dont je viens de parler, & que d'ailleurs le Theorème de M. Newton & le principe fondamental de M. Villemot font d'une grande conséquence & dans la Physique & dans l'Astronomie, j'ai crû qu'on verroit avec plaisir ces deux Propositions déduites fort naturellement d'une Proposition beaucoup plus generale, & beaucoup plus simple.

Comme tout ce que je dois démontrer roule sur les

Forces Centripetes ou Centrifuges, il ne sera pas inutile d'en donner une notion distincte.

Si l'on suppose qu'un corps se meut sur la circonférence d'un cercle, c'est à dire sur un polygone d'une infinité de côtés: Il est évident que ce corps décrira à chaque instant un de ces petits côtés, & que par conséquent ce corps tendra dans tous les instans à s'échapper suivant la direction de ces petits côtés; de cet effort il en résulte nécessairement un autre qui est celui de s'éloigner du centre, & c'est cet effort résultant qu'on appelle Force Centrifuge.

Si l'on conçoit à présent une force continuellement appliquée à ce corps qui à chaque instant l'oblige à se détourner, & à parcourir par ces détours infinis la circonférence du cercle, cette force ainsi appliquée continuellement s'appelle Force Centripete.

Il suit de ces deux notions qu'on peut prendre indifféremment la Force Centripete pour la Force Centrifuge, & réciproquement; puisque ces deux forces sont toujours égales entr'elles.

La notion que je viens de donner de ces sortes de forces se peut entendre des Forces Centripetes, ou Centrifuges considérées dans toutes sortes de lignes courbes; & je ne l'ai expliquée dans le cercle, que parce qu'étant plus connu, il m'a paru le plus propre à fixer l'imagination dans cette sorte de matiere.

Ayant ainsi défini les Forces Centripetes ou Centrifuges, je démontre cette Proposition generale.

#### PROPOSITION GENERALE.

Si un corps roule sur une ligne courbe quelconque  $APG$ , en sorte que cherchant continuellement à s'échapper par la tangente infiniment petite  $PQ$ , il soit obligé de décrire la portion infiniment petite  $PG$  de la ligne courbe par une force quelconque tendante au centre  $C$  pris à volonté; je dis que la force Centripete que j'appelle ( $f$ ) sera toujours à une quantité constante ( $a$ ), comme la petite ligne  $GQ$  au quarré du tems.

## REMARQUE.

Les temps peuvent toujours être exprimés par les secteurs infiniment petits  $PCG$ , c'est-à-dire par  $PC \times GH$ , ou bien ayant continué la tangente infiniment petite  $PQ$ , & abaissé du centre  $C$  la perpendiculaire  $CS$  par  $PQ \times CS = PG \times CS$ .

## SUPPOSITION PREMIERE.

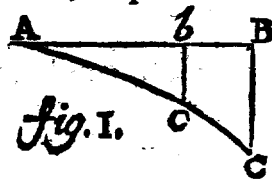
Je suppose pour cette démonstration que les effets sont proportionnés à leurs causes, c'est-à-dire que si une certaine force cause un mouvement comme ( $m$ ), le double de cette force causera ( $2m$ ), le triple ( $3m$ ) &c. & cela suivant la direction de cette force.

## SUPPOSITION SECONDE.

Je suppose en second lieu que les espaces infiniment petits parcourus par une force constante & constamment appliquée, sont entr'eux comme les quarrés des temps.

## DEMONSTRATION.

Si un corps se meut suivant la ligne  $AB$ , & qu'une force constante & constamment appliquée oblige ce corps à parcourir les espaces infiniment petits  $Abc$ ,  $ABC$ , dans des temps exprimés par les lignes  $Ab$ ,  $AB$ ; ces petits espaces  $Abc$ ,  $ABC$  pouvant passer pour des triangles rectilignes & semblables, seront entr'eux comme  $Ab^2$  à  $AB^2$ . *Ce qu'il falloit trouver.*

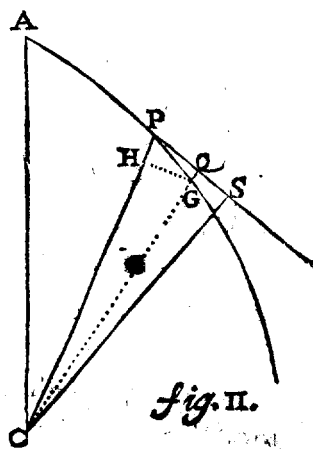


Ceci étant supposé, je démontre la Proposition generale.

## DEMONSTRATION.

Il est clair que la petite ligne  $GQ$  dans un temps déterminé, est comme la Force Centripete ( $f$ ) (par la premiere Supposition). Mais ( $f$ ) étant déterminée, la même ligne est comme le quarré du temps (par la seconde Suppo-

sition) ; c'est-à-dire , si on appelle le temps ( $t$ ) & ( $dt$ ) un instant comme ( $dt^2$ ) ; donc si la force & le temps sont indéterminées ,  $Q G$  sera comme le produit de la force par le carré du temps , c'est-à-dire , comme  $f d t^2$ . donc  $G Q : f d t^2$ . donc  $\frac{G Q}{f} : dt^2$ . donc  $\frac{a}{f} : \frac{dt^2}{G Q}$ . donc  $f : a :: G Q : dt^2$ . Mais  $dt^2 = CP^2 \times GH^2 = PG^2 \times CS^2$ . donc  $f : a :: G Q : CP^2 \times GH^2$ , ou  $PG^2 \times CS^2$ . Ce qu'il falloit démontrer.



## COROLLAIRE.

Il suit des deux Suppositions que les espaces parcourus avec des forces constantes & continuellement appliquées , sont comme le produit de ces forces & des carrés des temps.

Cette Proposition est generale , & peut s'étendre à toutes les Courbes , en connoissant le rapport de tous leurs points au centre  $C$ .

Il est clair que si on suppose la Courbe toujours concave du même côté , & le point  $C$  hors de cette Courbe , la Force Centripete se changera en Centrifuge.

Donc dans les Courbes qui sont tantôt concaves & tantôt convexes du même côté , la petite ligne  $GQ$  où la Force Centripete devient égale à zero ou à l'infini dans le point d'inflexion , c'est-à-dire dans le point dans lequel la Force Centripete se change en Centrifuge , & réciproquement.

Si  $C$  est un foyer de quelque Section Conique , comme le rapport de tous les points de la Section au foyer  $C$  est aisé à connoître , il sera aussi facile de déterminer dans tous les points la Force Centripete qui tend à ce foyer.

Mais comme mon but principal est de parler de ces sortes

fortes de forces considérées dans le cercle, je me contenterai d'y appliquer la Proposition générale après que je l'aurai déterminée d'une manière plus simple par rapport à cette Courbe.

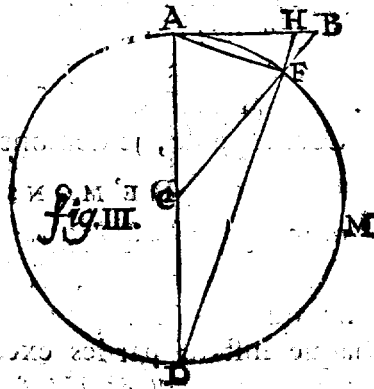
Pour la démonstration des Forces Centripètes & Centrifuges considérées particulièrement dans le cercle, j'ay besoin d'un Lemme, & d'une Définition connue de tout le monde.

## LEMME.

Soit un cercle  $AFM$  son diamètre quelconque  $AD$ , si l'on prend l'arc  $AF$  infiniment petit, & que l'on mène par l'extrémité du diamètre  $D$  & par le point  $F$  la ligne  $DFH$  terminée en  $H$  à la tangente menée par le point  $A$ ; je dis que le petit arc  $AF$  sera toujours moïen proportionnel entre le diamètre  $DA$ , & la partie  $PH$  de la ligne  $DH$  comprise entre le cercle & la tangente.

La Démonstration en est évidente, puisque  $DF$  ou  $DA : AF :: AF$  est à  $FH$ .

Les mêmes choses étant posées, si l'on mène du centre  $C$  la secante  $CFB$ , il est évident que l'angle  $HAF$  étant infiniment petit,  $FH$  sera  $\approx FB$ ; donc on aura  $DA : AF :: AF : FH$  ou  $FB$ ; donc  $FB$  sera  $\approx \frac{AF^2}{DA}$  & sera toujours comme  $\frac{AF^2}{CA^2}$ .



## DÉFINITION.

La vitesse est toujours exprimée par l'espace divisé par le tems; ainsi suposant l'espace ( $s$ ) le tems ( $t$ ) la vitesse ( $v$ ), on aura toujours  $s = vt$ .

## PREMIERE CONSEQUENCE.

Donc si les tems sont égaux , les vitesses seront comme les espaces.

## SECONDE CONSEQUENCE.

Donc ces vitesses pourront être exprimés par ces espaces.

## PROPOSITION.

Dans tout le cercle la Force Centripete est toujours égale au carré de la vitesse qui sert à le décrire , divisé par le rayon.

Je considère la Force Centripete dans le cercle comme tendante continuellement au centre du cercle , quoiqu'on la puisse considérer comme tendante à tout autre point : Mais dans le cas du Theorème de M. Newton , on ne la doit considérer que par raport au centre.

Je suppose que le corps qu'on conçoit se mouvoir sur la circonférence d'un cercle , se meut uniformément ; ou , ce qui est la même chose , qu'il parcourt des espaces proportionnels aux tems.

Ceci suppose , je démontre ainsi la Proposition.

## DEMONSTRATION.

Puisque la Force Centripete tend à chaque instant vers le centre du cercle , il est clair qu'elle est exprimée à chaque instant par les excès des secantes  $FB$  &  $HI$  &c. Mais  $FB$  est  $= \frac{AF^2}{AC}$  par le Lemme précédent ; donc la Force Centripete sera dans tous les points du cercle comme les carrés des arcs infiniment petits  $AF$  ,  $FH$  , &c. divisés par le rayon  $AC$ .

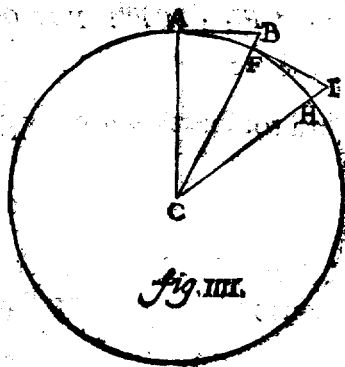


Fig. III.

Mais parcequ'on a supposé le mouvement uniforme, ces petits arcs égaux sont décrits en tems égaux ; donc par la premiere Consequence de la Définition, ils seront comme les vitesses ; donc par la seconde Consequence, ils peuvent exprimer ces vitesses ; donc la Force Centripete ou Centrifuge est dans tous les points du cercle comme le quarré de la vitesse divisé par le rayon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## AUTRE DÉMONSTRATION.

Il est aisé de démontrer la même chose de la Proposition générale. Car  $FB$  ou  $HI$  par cette Proposition est toujours comme  $f dt$  ; mais par le Lemme précédent  $FB$  est comme  $\frac{AF^2}{AC}$  ; donc  $\frac{AF^2}{AC}$  sera comme  $f dt$  ; donc en général dans toute sorte de cercle ( $f$ ) sera comme  $\frac{AF^2}{AC \times dt}$ , soit que les tems soient égaux ou inégaux. Mais en supposant le mouvement uniforme  $\frac{AF^2}{AC}$  sera  $vu$ , donc on aura comme dans la Proposition précédente  $\frac{vu}{AC} = \frac{AF}{AC} = f$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PREMIER COROLLAIRE.

Il est évident que la Force Centripete ou Centrifuge dans un cercle quelconque est par tout la même, puisque  $\frac{AF^2}{AC} = \frac{FH^2}{AC}$ . En un mot puisque les petits excès des sécantes  $AK$  &  $HI$  &c. sont égaux.

## SECOND COROLLAIRE.

Donc dans deux cercles differens les Forces Centripetes seront entr'elles comme les quarrés des arcs parcourus en même tems, ou comme les quarrés des vitesses divisés chacun par le rayon de leur cercle ; ou, ce qui est la même chose, en raison réciproque des rayons ou des circonférences.



Ce Corollaire est la même chose que le Theorème 4. de la Section 2. du premier Livre de *Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis* de M. Newton.

TROISIÈME COROLLAIRE.

Donc si les Forces Centripètes dans deux cercles différens sont supposées égales, le rayon de l'un des cercles sera au rayon de l'autre, comme le quarré de la vitesse dans le premier est au quarré de la vitesse dans le second; & c'est-là le principe fondamental du nouveau Systême des Planetes.

Quoique ces deux Corollaires soient évidens par la Proposition que j'ay démontrée, il ne sera pas inutile de les expliquer par le calcul; ce qui servira à leur donner un nouveau jour.

Soient deux cercles différens, un grand & un petit.

On appellera.

La Force Centripete dans le grand.	<i>F.</i>
La même dans le petit.	<i>f.</i>
La circonférence du grand.	<i>C.</i>
La même du petit.	<i>c.</i>
Le rayon du grand.	<i>R.</i>
Le rayon du petit.	<i>r.</i>
La vitesse dans le grand.	<i>V.</i>
Dans le petit.	<i>v.</i>
Le tems d'une révolution entiere dans le grand.	<i>T.</i>
Le même dans le petit.	<i>t.</i>

On aura dans le grand

$$F = \frac{AV}{AC} = \frac{V^2}{AC}, \text{ \& dans le}$$

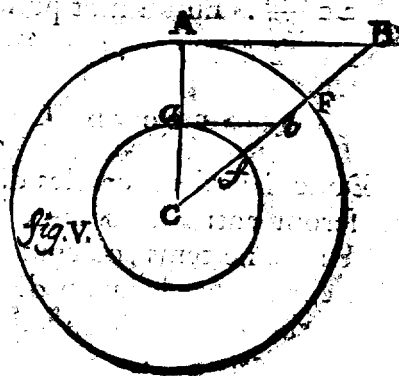
$$\text{petit } f = \frac{av}{ac} = \frac{v^2}{ac}. \text{ Donc}$$

$$F : f :: \frac{AV}{AC} : \frac{av}{ac} :: \frac{V^2}{C} : \frac{v^2}{c} ::$$

$$C^2 : c^2. \text{ C'est la démonstration du quatrième Theo-}$$

rème de M. Newton: Donc

$$\text{si } F = f, \text{ on aura } \frac{V^2}{C} = \frac{v^2}{c},$$



ou  $\frac{V^2}{R} = \frac{v^2}{r}$ . Donc  $C : r :: V^2 : v^2$ ; & c'est le troisième Corollaire que j'ay tiré de ma Proposition, & le principe fondamental du nouveau Système.

On voit clairement que ce principe se peut tirer assez naturellement du Theorème de M. Newton, & que ce Theorème même n'est qu'une conséquence de la Proposition que j'ay démontrée.

Comme l'Auteur du nouveau Système ne suppose point que  $F$  soit  $= f$ , mais qu'il entreprend de démontrer cette égalité, j'ay cru que je pouvois ici proposer le doute qui m'est venu touchant sa démonstration.

Cet Auteur imagine un fluide homogène, c'est à dire d'une égale résistance par tout. Il suppose que toutes les parties de ce fluide sont en repos; & prenant deux points à discretion, l'un plus éloigné, & l'autre plus proche du centre, il les fait circuler autour de ce centre. En ce cas il démontre que les Forces Centrifuges sont égales, & voici le Lemme dont il se sert pour le démontrer.

LEMME page 14. \*

*Les Forces Centrifuges de plusieurs mobiles, qui dans un fluide homogène sont des circulations premières chacun avec différens degrés de vitesse, sont toutes égales entr'elles. Cela est évident, dit l'Auteur, puisqu'elles sont toutes égales à la résistance du fluide, laquelle est par tout la même dans un fluide homogène. Ce sont ses propres termes.*

Voici ma difficulté.

Ces corps en circulant cherchent à s'échapper par les tangentes de leurs cercles; donc le fluide ne résiste à ces corps que suivant la direction de ces tangentes: mais la résistance en ce sens ne contribue en rien à la Force Centripète, de quelque densité que l'on suppose le fluide; donc l'homogénéité du fluide ne contribue en rien pour approcher ou pour écarter ces corps du centre.

QUATRIÈME COROLLAIRE.

Nous avons pris pour tems des révolutions entières T

P p p. iij.

\* En non: veau Systéme des Planetes par M. Villemor.

dans le grand cercle, & ( $t$ ) dans le petit; mais le tems est toujours comme l'espace divisé par la vitesse; donc on aura  $T = \frac{C}{V}$  dans le grand cercle, &  $t = \frac{c}{v}$  dans le petit; donc aussi  $V = \frac{C}{T}$  dans le grand, &  $v = \frac{c}{t}$  dans le petit: mais (par le second Corollaire)  $F : f :: \frac{V^2}{C} : \frac{v^2}{c}$ ; donc en mettant  $\frac{CC}{TT}$  pour  $V^2$ , &  $\frac{cc}{tt}$  pour  $v^2$ , on aura  $F : f :: \frac{C}{TT} : \frac{c}{tt} :: CTT : ctt$ ; c'est à dire que les Forces Centripetes sont encore entr'elles en raison directe des circonferences, & en raison réciproque des quarrés des tems des révolutions entieres.

## CINQUIEME COROLLAIRE.

Donc si les révolutions entieres se font en tems égaux, c'est à dire, si  $T = t$ , on aura  $F : f :: C : c :: R : r :: F : v$ . Car  $\frac{C}{V}$  fera  $= \frac{c}{v}$ , c'est à dire, qu'en ce cas les Forces Centripetes sont entr'elles en raison directe des rayons ou des vitesses.

## SIXIEME COROLLAIRE.

Si les quarrés des tems des révolutions entieres sont en raison directe des rayons ou des circonferences, les Forces Centripetes seront égales.

Si  $T^2 :: t^2 :: R : r :: C : c$ ; donc  $T^2 c = t^2 C$ ; donc (par le quatrième Corollaire) puisque  $F : f :: \frac{C}{T^2} : \frac{c}{t^2}$ ,  $F$  fera  $= f$ ; donc dans le cas du principe fondamental du nouveau Systême, les quarrés des tems periodiques sont entr'eux comme les circonferences ou comme les rayons.

## SEPTIEME COROLLAIRE.

Si  $T : t :: R : r$ , on aura (par le quatrième Corollaire)  $F : f :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r} :: r : R$ , c'est à dire, que les Forces Centripetes seront entr'elles en raison réciproque des distances: mais (par le second Corollaire)  $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$ ; donc

$\frac{V'}{R} : \frac{v}{r} :: r : R$  ; donc en multipliant les extrêmes & les moïens  $V' = v$  ; donc  $V = v$  , c'est à dire, qu'en ce cas les vitesses des corps seront égales.

## HUITIÈME COROLLAIRE.

Si  $T^2 : t^2 :: R^3 : r^3$  , on aura  $F : f :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$  . Car ( par le quatrième Corollaire )  $F : f :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$  , ou  $\frac{R}{R^1} : \frac{r}{r^1}$  ; donc  $F : f :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} :: r^3 : R^3$  , c'est à dire que les Forces Centripetes seront en raison réciproque des quarrés des distances. Mais ( par le second Corollaire )  $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$  ; donc en ce cas  $\frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: r^3 : R^3$  ; donc en multipliant les extrêmes & les moïens, on aura  $V^2 R = v^2 r$  ; donc  $V^2 : v^2 :: r : R$  , c'est à dire les quarrés des vitesses en raison réciproque des distances ou des rayons ; donc  $V : v :: \sqrt{r} : \sqrt{R}$  , c'est à dire les vitesses en raison réciproque des racines des distances ou des distances.

## NEUVIÈME COROLLAIRE.

Donc si par hypothèse ou autrement l'on sçait que les vitesses des Planètes sont en raison réciproque des racines de leurs distances au centre , on démontrera que leurs tems periodiques seront entr'eux comme les cubes des distances ou des rayons. Car si  $V : v :: \sqrt{r} : \sqrt{R}$  , on aura  $V^2 : v^2 :: r : R$  ; donc  $V^2 : v^2 :: r^3 : R^3 :: T^2 : t^2$  , ce qui donneroit en ce cas là la solution du Problème de Kepler.

Les Corollaires 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , sont de M. Newton : mais outre que j'y joints la démonstration qui ne s'y trouve point, j'ay été bien aise de faire voir qu'ils renferment la démonstration du Problème de Kepler.

J'espère joindre à ce Mémoire bien des choses qui m'ont paru pouvoir être de quelque utilité par rapport à l'Astronomie.

---

Des forces centripètes et centrifuges considérées en général dans toutes sortes de courbes et  
en particulier dans le cercle - M. BOMIE  
Académie royale des sciences - Année 1707

PHYSIQUE

BOMIE, HUGUENS (HUYGENS), NEWTON, VARIGNON, VILLEMOT

---