



HAL
open science

Recherches sur les courbes géométriques et mécaniques, où l'on propose quelques règles pour trouver les rayons de leurs développés

Michel Rolle

► **To cite this version:**

Michel Rolle. Recherches sur les courbes géométriques et mécaniques, où l'on propose quelques règles pour trouver les rayons de leurs développés. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1707. ads-00120370

HAL Id: ads-00120370

<https://hal.science/ads-00120370>

Submitted on 14 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

R E C H E R C H E S
SUR LES COURBES GEOMETRIQUES
ET MECHANIQUES,

*Où l'on propose quelques Regles pour trouver les
rayons de leurs développées.*

PAR M. ROLLE.

1707. **S**oit AB une Courbe quelconque dont les appliquées se vont rendre à un point E comme dans un pole immuable, & de laquelle on sçache mener les Tangentes. Il est question de trouver les rayons de sa développée. Ce qui se peut faire comme on le va dire.

ARTICLE I. On fera d'abord toutes ces hypotheses.

AB ligne droite qui coupe la Courbe aux points A & B , de maniere que l'intervale AB soit indéterminé.

AL perpendiculaire à la secante AB .

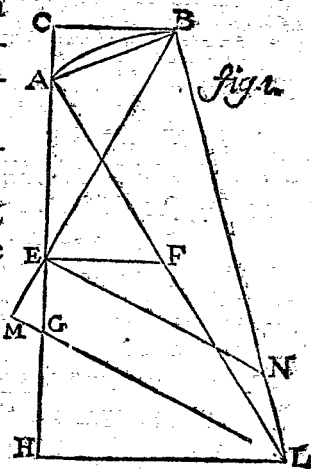
BL une droite qui coupe AL en quelque point L , à une distance indéterminée.

EF perpendiculaire sur l'appliquée AE .

EN perpendiculaire sur l'appliquée BE , & qui rencontre BL en N .

BC , LM , LH , perpendiculaires aux appliquées EB , EA .

Pour les expressions Algebriques on supposera $ML = 1$;



$$EH = z : EM = l : MG = d : EG = a : EB = v : EA = y : \\ AC = e : CB = n : EF = f : EN = g : HL = x.$$

Cela posé, je dis en premier lieu que les triangles BCA , AEF , sont semblables & rectangles. Car les trois angles EAF , FAB , CAB , valent deux angles droits; de même que les trois angles du triangle rectiligne BCA . Ainsi ôtant de part & d'autre l'angle droit & l'angle commun, les restans CBA , FAE , seront égaux entr'eux; & par conséquent les deux triangles BCA , AEF , ont chacun un angle oblique de même grandeur. Dans chacun aussi se trouve un angle droit, & delà il est aisé de voir que ces deux triangles sont semblables & rectangles. D'où l'on tire l'analogie & l'égalité marquées ici en A .

$$A \dots y : f :: n : e. \text{ Donc } ey = nf.$$

A cause des triangles semblables LHG , GME , on aura les deux analogies & les deux égalités que l'on voit icy en B .

$$B \dots \begin{cases} x : t = d : l : a. \text{ Donc } ax = tl = dl. \\ x : z = a : l : d. \text{ Donc } dx = lz = al. \end{cases}$$

Les triangles semblables GME , ECB , donnent les analogies & les égalités qui sont en C .

$$C \dots \begin{cases} d : a :: n : v. \text{ Donc } vd = an. \\ a : l :: v : e + y. \text{ Donc } lv = ea + ay. \end{cases}$$

On a encore les deux triangles semblables LHA , AEF , & enfin les deux semblables LMB , NEB . Ce qui donne les deux analogies & les deux égalités que voici.

$$D \dots \begin{cases} x : z + y :: f : y. \text{ Donc } yx = fz + yf. \\ t : v + l :: g : v. \text{ Donc } vt = vg + gl. \end{cases}$$

Et le triangle rectangle BCE donnera (par-là 47. 1.) l'égalité marquée E .

$$E \dots vv = nn + ee + 2ey + yy.$$

Toutes ces égalités conviennent à l'indétermination de l'intervale AB , & aucune ne s'oppose à son anéantissement.

ARTICLE II. On supposera que EF est la sous-normale du point A , & que EN est la sous-normale du point B .

Sur cette hypothese on prendra la valeur de ces sous-normales; & je suppose pour fixer les idées, que ces deux valeurs sont comme on les voit ici en F .

$$F \dots f = \frac{y^m}{p} \quad g = \frac{v^m}{p}$$

Par le moyen de ces deux égalités & de celles du précédent Article, on fera évanouir les quantités $t, d, a, l, n, e, x, g, f$, c'est-à-dire, toutes les expressions de ces égalités, hors z, y, v , & celles qui marquent des quantités connues dans l'égalité des sous-normales, comme m & p .

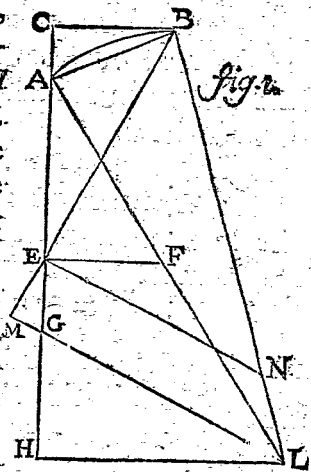
La réduite sera toujours divisible par $v - y$; & ayant fait la division autant de fois qu'on le peut, on substituera y au lieu de v , ou v au lieu de y . Ce qui donnera dans l'exemple proposé la résultante que l'on voit ici en G .

$$G \dots + m m z z + 2 m m y z = 0 \\ + p p z z.$$

Cette égalité étant divisée par $m m z + p p z + 2 m m y z$, on aura $z = 0$. En sorte que le zero absolu est la véritable valeur de z dans cet exemple.

Ayant trouvé une valeur de z , on la substituera dans la première des deux égalités marquées D . Art. I. Ce qui donnera $x = f$ pour l'exemple proposé.

Ainsi le segment HE s'évanouit, puisque le zero absolu en est la valeur; & de là le point supposé en H se confond avec le point donné E . De là aussi le point L tombe sur le point F , & on le voit aussi en ce que $x = f$. En sorte que le point A étant pris pour le point donné de la Courbe proposée, il sera vray de dire que le point F est à sa développée, & que AF en est le rayon. Or il est évident ou facile de prouver que l'on peut faire une pareille recherche pour tout autre point de la Courbe proposée, & trouver pour z & pour x des



valeurs qui donnent sur le rayon de la Tangente le point qui termine le rayon de la développée. C'est la première manière que j'avois à proposer pour cette recherche.

ARTICLE III. Comme les égalités du premier Article sont tirées de la figure rectiligne, & que l'on peut les considérer comme immuables dans le Problème proposé, on peut aussi en prendre la réduite & la regarder comme une formule de ce Problème.

Si avec cela on observe dans le détail du calcul toutes les parties qui sont le moins divisibles par $v - y$, on s'apercevra que les autres parties doivent toujours se détruire en substituant y au lieu de v dans la détermination des premières formules; & rejetant le superflu, on trouvera que la réduite est comme on la voit icy en L .

$$L \dots z = \frac{2yygfvv - 2yffv^3}{2ffv^2 - vy^4 + yyv^3 - gfyv - ygf^2v}$$

Ainsi cette réduite L est comme une formule pour le Problème proposé, qui tient lieu de toutes les égalités du premier Article, & l'on peut en régler l'usage en cette manière.

1°. On substituera dans cette formule les valeurs de f & de g que donnent les égalités des sous-normales, selon ce qui a été dit dans le second Article.

2°. La résultante sera divisible par $v - y$; & la division étant faite, on y substituera y au lieu de v . Ce qui donnera la valeur de z .

Comme l'exemple proposé est fort simple, il arrivera que la substitution de $\frac{ym}{p}$ au lieu de f , & celle de $\frac{vm}{p}$ au lieu de g , donnera par cela seul $z = b$, qui résout le Problème dans cet exemple, comme on l'a dit cy-dessus.

REMARQUE. Lorsque les exposans sont exprimés en termes généraux dans l'égalité des sous-normales, & que l'on veut se servir de la formule L , sans substituer au lieu de ces exposans les nombres qui leur sont égaux, on auroit quelquefois besoin de ce Théorème:

Si l'on divise $v^a - y^a$ par $v - y$, & que dans le quotient on

substituë y au lieu de ν , la somme de tous les monomes dont ce quotient est composé vaudra toujours a ν^2-1 .

Mais l'on n'a point besoin de ce Theorème quand on se sert des formules que l'on va proposer dans l'Article suivant.

ARTICLE IV. La formule L convient aux differens cas de AB réelle & de AB détruite. Mais l'on peut la réduire au seul cas où cet interval est anéanti, & en même tems introduire des expressions qui désignent la difference non existante des deux sous-normales, & celle des deux appliquées.

Pour cela je prends $\omega \delta$ pour la difference des appliquées, & $\omega \lambda$ pour la difference des sous-normales. Ce qui donne les égalités marquées icy N .

$$N \dots \begin{cases} v - y = \omega \delta. \text{ Donc } v = y + \omega \delta. \\ g - f = \omega \lambda. \text{ Donc } g = f + \omega \lambda. \end{cases}$$

Ainsi l'on peut voir que ces differences sont dans le rapport de δ à λ quelque variété qui arrive dans le commun diviseur exprimé par ω : En sorte que si l'on prend le zero absolu pour la valeur de ce commun diviseur, il détruira les differences sans détruire les rapports. Ce qui est conforme à ce qui avoit été dit dans le Journal des Scavans du 28 May 1694, où j'ay donné la maniere d'introduire les differences dans une égalité, pour autant d'inconnuës qu'on voudra.

Suivant ce Journal il faut prendre les valeurs de ν & de g marquées N , & les substituer dans l'égalité L , qui est dans cette occasion l'égalité proposée.

Du résultat de la substitution il faut ôter la même égalité L , & diviser par ω celle qui vient de la soustraction.

Enfin il faut substituer le zero absolu au lieu de ω dans l'égalité que donne la division, & l'on trouvera celle qui se voit icy en P .

$$P \dots z = \frac{y f \lambda - y f \delta}{y \lambda - y \delta + z f}$$

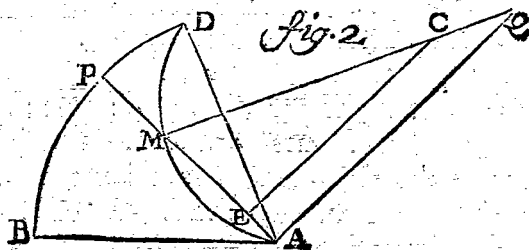
Pour l'usage de cette formule on prendra l'égalité des sous-normales, & je suppose icy pour le premier cas qu'il

n'y ait point d'autres inconnuës dans cette égalité que y & f , dont l'une exprime les appliquées, & l'autre les sous-normales mêmes.

On regardera cette égalité des sous-normales comme l'égalité generatrice d'une Courbe géométrique, & l'on en tirera la formule des Tangentes à l'ordinaire. En quoi il faut se souvenir que δ est relative à y , & λ relative à f , comme on le voit en N .

Par le moïen de cette formule & de celle qui est en P , il fera facile de faire évanouïr δ ou λ , & cette expression ayant disparu, on aura la valeur de z dont il est question. L'exemple éclaircira cette regle.

Soit la Courbe $A M D$ une des spirales à l'infini, formée dans un secteur de cercle $D A B$ avec une propriété telle, qu'ayant mené un rayon quel-



conque $A M P$, & ayant nommé l'arc entier $B P D$, b , la partie $B P$, π ; le rayon $A B$, a ; & la partie $A M$, y ; on ait la proportion marquée Q .

$$Q \dots b : \pi :: a^m : y^m. \text{ ou } b y^m = a^m \pi.$$

Il s'agit de trouver le rayon de la développée au point donné M par la regle précédente.

Ayant pris f pour la sous-normale $A Q$, & prenant sa valeur dans l'égalité proposée marquée Q , on aura l'égalité R .

$$R \dots m b y^{m-1} f = a^{m+1}.$$

Regardant cette égalité R comme la generatrice d'une Courbe géométrique, & prenant la formule des sous-tangentes qui conviendrait à cette Courbe, on trouvera qu'elle est divisible par $m b y^{m-2}$, & que cette division la réduit aux termes que l'on voit ici en S .

$$S \dots y \delta + m f \lambda = f \lambda.$$

Comparant cette formule S à la formule P , pour faire évanouir δ ou λ , on trouvera la valeur de z marquée T .

$$T : \dots z = \frac{-m f f y}{y y + f f + n f f}$$

Comme cette valeur est négative, elle rebrousse chemin de l'autre côté du point fixe A vers le point M , & donne un point E par lequel menant une perpendiculaire sur AP , on aura MC pour le rayon de la développée au point donné M .

J'ai supposé pour le premier cas de la méthode que l'égalité des sous-normales ne renfermoit que l'expression de l'appliquée, & celle de la sous-normale, ou de la sous-tangente, & c'est aussi le cas le plus ordinaire. Mais si l'expression des abscisses $B P$ se trouvoit dans l'égalité des sous-tangentes ou des sous-normales, & que cette abscisse ne disparût point par l'opération que prescrit la méthode, on pourroit toujours la faire évanouir en comparant la formule des sous-normales à l'égalité génératrice de la Courbe, & par cela seul le second cas seroit réduit au premier.

Comme on ne fait évanouir l'expression des abscisses que pour ne pas introduire leurs différences, on peut retenir cette expression quand on a les moyens d'exclure ces différences; & l'on a toujours des moyens suffisans pour cela, quand on rappelle les égalités qui se présentent dans la recherche des sous-normales. Car parmi ces égalités il s'en trouve plusieurs qui renferment la différence des abscisses, & qui servent en plusieurs manières à la chasser des formules que fournissent les égalités des sous-normales.

Ainsi l'on a dans ce Memoire une voie pour trouver le rayon de la développée à un point donné d'une Courbe proposée. Mais il ne faut pas oublier de substituer dans la recherche des tangentes ou des sous-normales, toutes les valeurs des quantités connues, pour distinguer leurs formules, & pout en faire le choix, selon ce qui a été dit dans le Journal du 13 Avril 1702. Car il est bien évident que la pluralité des tangentes dans un même point de la Courbe proposée,

proposée , fournira plusieurs rayons dans sa développée. Mais comme les regles de ce Journal n'ont été faites que pour les lignes Geometriques, il faudra d'autres regles pour les appliquer aux lignes Mécaniques, & il y a des cas où il se trouveroit des difficultés considerables, à cause d'une égalité inaccessible qui est ordinairement sous-entenduë dans la définition de ces lignes, & qui en fait le mécanisme ou la transcendance.

Pour la démonstration des Regles que j'ai proposées ici , je pourrois me servir du privilege des Geometres qui prétendent avoir démontré leurs methodes quand ils ont marqué les voies qu'ils ont tenuës dans leurs recherches. Comme j'ai fait ici un assez grand détail pour marquer la route que j'ai suivie, & que je n'y ai employé aucun principe contesté, il sera facile de sçavoir ce que l'on doit croire des Regles qui en résultent, & des différentes façons que j'ay proposées pour en abreger le calcul. On a vû comment j'ay tiré dans le troisième Article une formule de ce qui avoit été dit dans les Articles précédens sans me servir des differences ; & l'on verra aussi que la Theorie de ces Articles fournit les preuves de cette formule & de celle du quatrième Article, où j'ay exprimé la difference des grandeurs variables. On sçait que le rayon de la développée est un rayon de tangente qui appartient à un des rameaux de la Courbe proposée, & que les autres rayons de tangente du même rameau ne peuvent rencontrer ce rayon de développée dans le point qui le termine. Sur cette idée on peut aisément se servir du détail des deux premiers Articles pour s'assurer par des réductions à l'impossible du succès des Regles que j'ai données ici. Mais l'on peut encore s'en assurer par des preuves positives, si l'on regarde le rayon de la développée comme deux rayons de tangente tellement unis que l'intervalle de l'un à l'autre soit plus petit qu'aucune quantité donnée.

Pour voir naître les Regles, on peut d'abord supposer que la secante AB^* est mobile autour du point A , de B

1707.

B b b

*V. Fig. 1.

vers C , enforte que la partie interceptée AB diminuë de plus en plus, jusqu'à ce que cette secante devienne tangente en A , & que dans ce mouvement l'angle LAB est toujours un angle droit. Ainsi AL est le rayon de cette tangente dans le cas où l'intervalle AB est entierement détruit, qui est aussi le cas de $v = y$,

Pour fixer ces suppositions generales à chaque Courbe particuliere & au Problème proposé, j'ay introduit l'égalité des sous-normales qui se tire de la définition de cette Courbe, & j'ay supposé que le point A est un point donné sur la même Courbe; de maniere que la sous-normale est donnée pour le point donné, & qu'elle est indéterminée pour le point supposé.

Ensuite j'ay exprimé par d'autres égalités les rapports des sous-normales aux lignes de la figure qui renferme le rayon de la développée; & le Problème qu'expriment toutes ces égalités est tellement conçu, qu'il se trouve entierement déterminé, lorsque le point supposé tombe sur le point donné. Enfin j'ay fait $v = y$ pour la réunion de ces deux points, & je n'ay point introduit cette petite égalité dans les réduites particulieres qui résultent de l'évanouissement des inconnuës, parceque cela auroit pu favoriser l'évasion des rapports qui sont nécessaires au Problème. J'ay observé de ne l'introduire que dans la dernière reduite; & c'est toujours un moyen sûr pour retenir ces rapports fuyans: De maniere que la substitution retrograde des valeurs résoudra pleinement le Problème algebrique; & ce Problème étant résolu, il est évident ou facile de prouver que les mêmes valeurs donnent la solution Problème proposé.

Du reste, les deux points A & B ayant été réunis pour former le rayon de la développée, on peut demander si ces deux points sont contigus ou continus, ou bien si l'un est confondu dans l'autre, & faire d'autres questions fort curieuses sur ce sujet. Mais l'on peut sans cela résoudre le Problème proposé, & se servir de la résolution qu'on a trouvée pour se conduire dans ces questions accesssoires.

REMARQUES.

Au lieu des expressions δ & λ dont je me suis servi pour la formule P , j'aurois mieux les caractères du calcul différentiel, parcequ'ils rappellent l'idée des inconnues qui leur sont relatives. Je ne voudrois pas néanmoins m'en servir pour trouver les formules, ni pour les démonstrations; car ces caractères seroient incommodes dans ces deux cas, quand on se sert des voies que j'ai tenues. Mais ils sont commodes dans la pratique, soit pour tirer ces formules de leurs égalités generatrices, soit pour les comparer à d'autres formules dans les differens usages que l'on en peut faire. Ainsi la formule P étant une fois trouvée par la Theorie dont on se sert, il seroit bon d'y substituer dy au lieu de δ , & d'y substituer encore df à la place de λ . Alors cette formule P seroit exprimée comme on le voit ici en V .

$$V \dots z = \frac{yydf - ff dy}{yy dy - yf df + 2ff dy}.$$

Et faisant de semblables substitutions dans la formule S qui a été tirée de l'égalité des sous-normales, cette formule sera exprimée comme on le voit ici en X .

$$X \dots y dy + m f df = f df.$$

Comparant la formule X à la formule V pour faire évanouir dy ou df , on aura la même valeur de z qui a été marquée ci-dessus en T , & que l'on voit encore icy.

$$T \dots z = \frac{-mff}{yy + ff + mff}.$$

Cette valeur de z étant substituée dans la première des deux égalités marquées D dans le premier Article, on aura la valeur de x , & il est évident que ces deux valeurs donnent le rayon de sa développée.

Ayant trouvé une formule comme V , on peut la transformer en autant de manieres qu'on voudra, & en regler l'usage, comme on le va voir icy.

1°. On supposera une égalité dans laquelle se trouvent les inconnues de la formule proposée, & l'on y introduira une autre inconnue. Soit $\frac{f}{y} = r$ pour exemple de l'égalité supposée.

2°. On prendra la différence de cette égalité par les Regles du calcul différentiel, ou suivant le Journal du 28 May 1694. Dans cet exemple la différence donnera l'égalité $\frac{df - fdy}{yy} = dr$.

3°. Par le moyen de ces deux égalités & de celle que l'on veut transformer, on fera évanouir f & df , & la résultante sera la transformée que l'on demande.

Prenant la formule V pour la proposée, on aura la transformée que l'on voit ici en H .

$$H. \dots z = \frac{yxrdr}{dy - yrdr + rrdy}$$

4°. Pour l'usage des transformées, il faudra comparer l'égalité des sous-normales avec l'égalité supposée pour en faire évanouir f , & regarder l'égalité résultante comme l'égalité generatrice d'une Courbe geometrique dont r & y sont les inconnues. Ensuite l'on prendra la premiere formule differentielle que fournit cette égalité; & comparant cette formule à la transformée H , on fera évanouir dr ou dy . Ce qui donnera la valeur de z , & par consequent le rayon de la développée. Ainsi voulant trouver le rayon de la développée dans l'exemple de l'Article IV. il faudra se servir de $\frac{f}{y} = r$, ou $f = yr$ pour faire évanouir f de l'égalité des sous-normales marquée R . Ce qui donneroit $mbyr = a^{m+1}$. Et regardant cette égalité comme la generatrice d'une Courbe geometrique, sa différence sera $ydr - mrdy = 0$, laquelle étant comparée à la formule H pour en faire évanouir dy ou dr , on trouvera la valeur de z marquée en T dans le quatrième Article.

Si l'on veut que la loi des homogenes soit visible dans la transformée H , il faut que cette loi soit visible dans

la supposée. Ainsi au lieu de $\frac{f}{y} = r$, il faudroit prendre $pf = yr$, & faire d'ailleurs comme il a été dit. Car la constante p s'évanouïra toujours dans l'opération.

Les trois inconnuës f , y , r . peuvent être disposées dans l'égalité supposée en mille manières, & delà faire varier les transformées en mille façons. On peut même introduire des indéterminées dans cette égalité, & s'en servir pour réduire la formule aux termes les plus simples, comme on le dira dans un autre Memoire.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du mois d'Avril 1707 au Port de Paix dans l'Isle de S. Domingue.

PAR M. DE LA HIRE.

LÉ Pere Bouttin de la Compagnie de Jesus Missionnaire, a fait au Port de Paix dans l'Isle de S. Domingue plusieurs observations de l'Eclipse de Lune du mois d'Avril 1707, lesquelles nous ont été communiquées par le R. P. Gouye. Mais comme il n'avoit pas d'instrumens pour mesurer les doits éclipsés dont il rapporte les observations, je crois qu'il faut s'en tenir à ses deux observations de l'Immersion totale de la Lune dans l'ombre, & de son Emerision, qui sont les plus faciles à observer à la vûe simple, & surtout à cause que l'intervalle entre ces deux phases s'accorde avec nos observations.

1707.
6. Aoust.

Il observa donc l'Immersion à 8^h 9' 0" du soir le 16 Avril, & nous le 17 au matin à 0 55 30.

Donc difference 4 46 30.

Il observa l'Emerision à 9 57 30 du soir,

& nous le matin suivant à 2 43 0.

Donc difference 4 45 30

Il rapporte la maniere dont il a réglé la montre qui lui

Recherches sur les courbes géométriques et mécaniques, où l'on propose quelques règles pour
trouver les rayons de leurs développés - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1707

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE
