



HAL
open science

Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes sortes de courbes sur une autre courbe quelconque

François Nicole

► **To cite this version:**

François Nicole. Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes sortes de courbes sur une autre courbe quelconque. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1707. ads-00111126

HAL Id: ads-00111126

<https://hal.science/ads-00111126>

Submitted on 3 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Il reste à faire l'application de tout ce que j'ai dit sur la multiplication des glottes, à la Théologie naturelle. Ce sera la matière d'un dernier Mémoire.

METHODE GENERALE

Pour déterminer la nature des Courbes formées par le roulement de toutes sortes de Courbes sur une autre Courbe quelconque.

PAR M. NICOLE.

DE toutes les Courbes qui peuvent être engendrées par les roulemens d'une Courbe quelconque donnée, tant sur une ligne droite, que sur une autre Courbe aussi connue; on n'a examiné jusqu'à présent que celles qui sont formées par le roulement d'un cercle sur une ligne droite, ou sur un autre cercle qui eût un rapport quelconque avec le premier, soit qu'on supposât le point décrivant dans chacun de ces cas, ou sur la circonférence du cercle qui roule, ou qu'il se rencontrât dedans ou dehors cette circonférence. Comme j'ai entrepris depuis quelque tems de faire un Traité sur toutes les Cycloïdes & Epicycloïdes, j'ai été porté naturellement à examiner si en faisant rouler une Courbe quelconque sur une autre, je ne pourrois pas trouver l'équation qui exprimeroit la nature de la Courbe décrite par un point pris sur la Courbe qui roule, ou bien dedans ou dehors cette Courbe. Le succès a beaucoup surpassé mon attente; car j'ai trouvé non-seulement une methode generale pour déterminer les équations des Courbes qui peuvent être formées par le roulement d'une Courbe quelconque sur une ligne droite; mais encore de celles qui peuvent être décrites par les roulemens de toutes les Courbes imaginables sur toutes les Courbes possibles; & ces équations sont toujours telles,

1707.
29. Mars.

qu'elles ne contiennent que les seules indéterminées qui expriment les coordonnées de ces Courbes lorsqu'elles sont géométriques, & ces seules indéterminées, mêlées avec leurs différences infiniment petites, lorsqu'elles sont mécaniques. Mais dans tout ce que j'ai trouvé sur cette matière, ce qui m'a paru le plus digne d'attention est que toutes les Courbes géométriques qui roulent sur elles-mêmes, forment d'autres Courbes aussi géométriques, & qu'ainsi cette propriété n'est pas particulière au cercle, mais ne lui est propre que parce qu'il est du nombre des Courbes géométriques. Voilà donc une infinité de Courbes géométriques qui étoient encore inconnues, puisque chacune de celles qui nous sont connues sont propres à en engendrer d'autres à l'infini. Cette méthode est si générale, qu'elle sert aussi à trouver quelle Courbe il seroit nécessaire de faire rouler, ou sur une ligne droite, ou sur une autre Courbe donnée, pour qu'elle formât par ce roulement une autre Courbe aussi donnée quelconque, & de même sur quelle Courbe il faudroit faire rouler une Courbe donnée pour qu'elle décrivît une autre Courbe donnée quelconque. De manière que deux de ces trois Courbes étant données, sçavoir la Courbe qui roule, celle sur laquelle cette première roule, & la troisième engendrée par ce roulement, on déterminera toujours par cette méthode la troisième.

P R O B L E M E G E N E R A L.

Trouver les Equations qui expriment la nature des Courbes qui peuvent être engendrées par les roulemens de toutes les Courbes possibles sur une autre Courbe quelconque, soit qu'on suppose le point qui décrit la Courbe dans la circonférence de la Courbe qui roule, ou qu'il soit dedans ou dehors cette circonférence.

FIG. I. & II. Soit une Courbe quelconque AB qui roule sur une autre Courbe quelconque AGZ , en commençant au point A sommet de ces deux Courbes : si l'on prend un point

fixe C dedans ou dehors la circonference de la Courbe AB , il est clair que ce point C décrira la Courbe CLM , dont on demande l'équation qui en exprime la nature.

Pour trouver cette équation, on supposera que la Courbe AB est parvenue dans la situation IGK dans laquelle elle touche en G la Courbe AGZ , où le point décrivant C tombe au point M , & dans laquelle l'axe AP se trouve dans la position RMN : il est clair, 1^o. Que l'Arc AG de la Courbe AGZ est égal à l'arc IG de la Courbe IGK , puisqu'il est nécessaire que tous les points de l'arc AG se soient rencontrés successivement sur tous ceux de l'arc IG pour que la Courbe AB soit parvenue dans la situation IGK . Il est encore évident que si du point touchant G on tire au point décrivant M la droite GM , cette ligne GM sera perpendiculaire à la Courbe CM ; car considérant la Courbe AP ou son égale IGK comme l'assemblage d'une infinité de petites droites Gg , & de même la Courbe AGZ comme la somme d'une infinité de petites droites Gg égales chacune à sa correspondante dans la Courbe IGK . Il est manifeste que la Courbe CM sera l'assemblage d'une infinité de petits arcs de cercle Mm , qui auront pour centre successivement tous les points touchants G , & qui seront décrits chacun par le point décrivant M ou C ; d'où il suit que la ligne GM menée du centre G de l'arc Mm à cet arc lui est perpendiculaire.

Maintenant soit menée du point touchant G la tangente GN commune aux deux Courbes AGZ , IGK , qui rencontre leurs axes FA , EM prolongées au points T & N , & du point G soit élevée la perpendiculaire FE à cette tangente qui est aussi perpendiculaire aux deux Courbes AGZ , IGK , & qui rencontre leurs axes aux points E & F . Soient encore menées les ordonnées GQ , GR , MP aux Courbes AGZ , IGK , CLM , & les ordonnées gq , gr , mp infiniment proche des premières, & les petites lignes GS , nm paralleles à FP , & Go parallele à ME ; l'on nommera ensuite AP , x ; PM , y ; AQ , z ; QG , t ; IR , u ; RG , r ; & la connue uC ou MI , c ; l'on aura Pp ou $nm = dx$;

$Mn = dy$; qQ ou $Gs = dz$; $sg = dt$; rR ou $Go = dr$;
& $go = dr$.

Or puisque la ligne GM est perpendiculaire sur Mm , les triangles Mnm & MDG sont semblables; car ôtant des angles $G M m$ & $D M n$ qui sont chacun égaux à un droit, le même angle $D M m$ les restes $G M D$ & $m M n$ sont égaux, & de plus les angles Mnm & MDG sont droits, on aura donc cete proportion $GD (t-y) . DM (x+z) :: mn (dx) nM (dy)$, qui donne l'égalité (A) $dy = \frac{x dx + z dz}{t-y}$. Et à cause des angles droits MDG & MRG , l'on a $MD^2 + DG^2 = MR^2 + RG^2$, ce qui est en termes analytiques l'égalité (B) $xx + 2zx + zz + yy - 2ty + tt = cc + 2cu + uu + rr$. Cela posé, les triangles semblables Gsg , GQT & Gog , GRN , GRE donneront ces analogies $gs (dt) . sG (dz) :: GQ (t) . QT = \frac{rdz}{dr}$, $go (dr) . oG (du) :: GR (r) . RN = \frac{rdu}{dr}$ & $Go (du) . og (dr) :: GR (r) RE = \frac{rdr}{du}$. D'où il suit $GE (VGR^2 + RE^2) = \frac{r}{du} V du^2 + dr^2$.

Maintenant à cause des triangles semblables TQG , TPV , on a cette proportion $TQ (\frac{tdz}{dt}) . QG (t) :: TP$ ou $TQ - QP (\frac{tdz}{dt} - x - z) . PV = \frac{tdz - xdt - zdt}{dz}$. Et menant MH perpendiculaire sur GN , les triangles NEG , NMH feront encore semblables, ce qui donnera cette analogie NE ou $NR + RE (\frac{rdu}{dr} + \frac{rdr}{du}) . EG (\frac{r}{du} V du^2 + dr^2) :: NM$ ou $NR - RM (\frac{rdu}{dr} - u + c) . MH = \frac{rdu - udr - cdr}{V du^2 + dr^2}$. Mais parce que les angles MVH & TGQ sont égaux, & que les angles MHV & TQG sont droits, les triangles TQG & MHV sont semblables, ce qui donnera encore cette proportion.

$TQ (\frac{tdz}{dt}) . TG$ ou $V TQ^2 + QG^2 (\frac{t}{dt} V dz^2 + dt^2) :: MH (\frac{rdu - udr - cdr}{V du^2 + dr^2})$.

$MV = \frac{rau - ndr + cdr}{dz} \times \frac{\sqrt{dz^2 + dr^2}}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$. Ainsi $PV + VM = PM$
 fera l'égalité (C) $\frac{rdz - xdt - zdt}{dz} + \frac{rdv - ndr + cdr}{dz} \times \frac{\sqrt{dz^2 + dr^2}}{\sqrt{du^2 + dr^2}} = y$.

On aura donc les trois égalités A, B, C.

$$A. dy = \frac{x dx + z dx}{t - y}$$

$$B. xx + 2zx + zz + yy - 2ty + tt = cc + 2cu + uu + rr.$$

$$C. y = \frac{rdz - xdt - zdt}{dz} + \frac{rdv - ndr + cdr}{dz} \times \frac{\sqrt{dz^2 + dr^2}}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$$

Par le moyen desquels on trouvera l'équation qui exprime la nature d'une quelconque des trois Courbes AGZ , IGK & CLM , les deux autres étant données. Car il est visible que lorsque deux quelconques de ces trois Courbes seront déterminées, les trois égalités ne seront plus composées que de quatre inconnues, & pourront par conséquent être réduites à une, qui ne contiendra plus que deux de ces inconnues, lesquelles exprimeront les coordonnées de la Courbe cherchée. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

Si l'on suppose $c = 0$, c'est à dire que le point décrivant soit sur la circonférence de la Courbe qui roule, les trois égalités, A, B, C, se changeront en celles marquées en D, E, F.

$$D. \frac{x dx + z dx}{t - y} = dy. E. xx + 2zx + zz + yy - 2ty + tt = uu + rr. \text{ FIG. III.}$$

F. $y = \frac{rdz - xdt - zdt}{dz} + \frac{rdv - ndr + cdr}{dz} \times \frac{\sqrt{dz^2 + dr^2}}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$, qui serviront à trouver l'équation de celle qu'on voudra des trois Courbes AGZ , MGK & AEM , les deux autres étant données.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $z = u$ & $t = r$, c'est à dire que les Courbes AGZ , IGK soient les mêmes, les égalités B & C se changeront en celles marquées G & H.

$$G. xx + 2zx + yy - 2ty = cc + 2cz, \text{ \& H. } y =$$

$y = \frac{ztd - xdt - 2zdt - cdt}{dz}$, qui serviront à trouver l'équation de celle qu'on voudra des deux Courbes *AGZ* ou *CLM*, l'autre étant connuë.

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose dans ce dernier cas $c=0$, les égalités *G* & *H* se changeront en celles marquées *I* & *L* (*I*), $xx + 2zx + yy - 2ty = 0$, & (*L*) $y = \frac{ztd - xdt - 2zdt}{dz}$, qui serviront à trouver l'équation de celle qu'on voudra des deux Courbes *AGZ*, *ALM*, lorsque le point décrivant est sur la circonférence de la Courbe qui roule.

COROLLAIRE IV.

Il suit de ce que les égalités *G* & *I* ne contiennent point de différentielles, & de ce que les égalités *H* & *L* ne renferment que les différences *dt* & *dz*; que toutes les fois que la Courbe *AGZ* sera geometrique, la Courbe *CLM* ou *ARM* sera aussi geometrique. Car quand la Courbe *AGZ* est geometrique, l'on a une valeur de *t*, qui ne contient point de différence *dz*, laquelle étant mise en sa place dans les égalités *G* & *H* pour le cas du Corollaire II; & dans les égalités *I* & *L* pour le Coroll. III, & aussi pour *dt* sa valeur en *dz* changera ces égalités, de maniere que la premiere de chacun de ces deux Corollaires ne sera plus composée que des indéterminées *x*, *y* & *z*, sans mélange d'aucune différence *dt*, *dz*, *dy* ni *dx*, & de même la seconde ne contiendra plus que les indéterminées *x* & *z*; d'où il suit que la valeur de *z* tirée de cette derniere égalité, étant substitué en sa place dans l'égalité *G* pour le second Corollaire, & dans l'égalité *I* pour le troisieme, la changera de telle sorte qu'elle ne sera plus composée que des indéterminées *x* & *y*, sans aucun mélange des différences *dx* & *dy*, & par consequent exprimera la nature d'une Courbe geometrique. Voici donc une belle propriété des Courbes geometriques qui n'avoit encore été remarquée par

personne, sçavoir, que toutes les Courbes geometriques roulant sur elles-mêmes en forment d'autres aussi geometriques, soit que le point décrivant soit pris sur la circonférence de la Courbe qui roule, ou qu'il se rencontre dedans ou hors cette circonférence.

COROLLAIRE V.

Si l'on suppose la Courbe *AGZ* devenir une ligne droite perpendiculaire sur *FP*, il est évident que la tangente *GN* sera aussi perpendiculaire sur *FP*, puisqu'alors elle se confond avec *AGZ*; d'où il suit que la ligne *MH* ($\frac{rdx - ndr + sdr}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$) sera alors parallele & égale à *AP* (*x*), ainsi l'on aura pour premiere égalité $x = \frac{rdx - ndr + cdr}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$. Il est encore évident que la ligne *AQ* ou *z* est alors = 0; & par consequent que l'égalité *A* se change en celle-ci $dy = \frac{xdx}{z-y}$, ou en mettant pour *z* — *y* (*DG*) sa valeur $\sqrt{MG^2 - MD^2}$ qui est $\sqrt{cc + 2cu + uu + rr - xx}$, elle devient $dy = \frac{xdx}{\sqrt{cc + 2cu + uu + rr - xx}}$. On aura donc les deux égalités (*M*) $x = \frac{rdx - ndr + cdr}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$, & (*N*) $dy = \frac{xdx}{\sqrt{cc + 2cu + uu + rr - xx}}$, pour servir à trouver quelle est la Courbe *CLM* engendrée par le roulement d'une Courbe quelconque *IGK* sur une ligne droite, ou bien quelle doit être la Courbe *IGK* pour qu'elle forme par son roulement sur une ligne droite une autre Courbe donnée quelconque *CLM*, le point décrivant étant pris dedans ou dehors la Courbe qui roule.

Si dans ce dernier cas on suppose *c* = 0, les égalités *M* & *N* deviendront $x = \frac{rdx - ndr}{\sqrt{du^2 + dr^2}}$, & $dy = \frac{xdx}{\sqrt{uu + rr - xx}}$, qui serviront à trouver l'une des deux Courbes *MGK* ou *ARM*, l'autre étant donnée, & le point décrivant étant supposé sur la circonférence de la Courbe qui roule.

FIG. IV, & V.

FIG. VI:

E X E M P L E I.

Pour les Courbes formées par le roulement d'une Courbe quelconque sur une ligne droite.

Soit la Courbe *IGK* un cercle dont le diametre est $2a$, & dont l'équation par conséquent est $r = \sqrt{2au - uu}$, qui a pour differentielle $dr = \frac{adu - uu}{\sqrt{2au - uu}}$: Si donc on substitue

Corol. V. dans les égalités *M* & *N* pour *r* & *dr* ces valeurs, elles se

changeront en celle-ci $x = \frac{du \sqrt{2au - uu} - u + cx}{adu}$ & $(O) dy = \frac{adu - ndu}{\sqrt{2au - uu}}$

$\sqrt{2au - uu}$, & $(O) dy = \frac{xdx}{\sqrt{cc + 2cu + 2au - xx}}$, dont la premiere

se réduit à $x = \frac{au + ac + cu}{a}$, qui donne $u = \frac{ac + ac}{a + c}$: Si donc

on met cette valeur de *u* dans l'égalité *O*, on aura $dy =$

$\frac{xdx}{\sqrt{cc + 2ax + 2ac - xx}}$ pour l'équation de la Courbe *CEM* qui

est alors une Cycloïde allongée ou accourcie.

Si l'on suppose $c = 0$, elle deviendra $dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ qui est celle de la Cycloïde ordinaire.

E X E M P L E I I.

Pour les Courbes formées par le roulement d'une Courbe quelconque sur elle-même.

Soit la Courbe *AGZ* ou *IGK* un cercle dont l'équation soit $r = \sqrt{2az - zz}$, qui a pour differentielle $dr = \frac{adz - zdz}{\sqrt{2az - zz}}$.

Si on substitue pour *r* & *dr* ces valeurs dans les égalités *G* & *H*, elles se changeront en celles-ci $xx + 2zx + yy -$

$2y\sqrt{2az - zz} = cc + 2cz$, & $y = 2\sqrt{2az - zz} - x - 2z - cx$
 $\frac{a-z}{\sqrt{2az - zz}} (P) = \frac{2az - ax + zx - ac + cz}{\sqrt{2az - zz}}$. De la premiere on ti-

re $2y\sqrt{2az - zz} = xx + 2zx + yy - cc - 2cz$, & de la secon-

de aussi $y\sqrt{2az - zz} = 2az - ax + zx - ac + cz$, par conse-

quent on a $xx + 2zx + yy - cc - 2cz = 4az - 2ax + 2zx -$

$-2ac + 2cz$, qui se réduit à $xx + yy - cc - 4cz = 4az$
 $-2ax - 2ac$, d'où l'on tire (Q) $yy = 4az - 2ax - 2ac -$
 $xx + cc + 4cz$, & en quarrant l'égalité P on a encore
 $yy = \frac{4aazx - 4aa'x + aaxx + 4azzx - 2axxx + 2xxx - 4aacz + 2aacx -$
 $2aczx + aacc + 4acz^2 - 2aczx + 2cz^2x - 2acz^2 + cz^3}{2a^2 - 2z}$. Si donc on com-

pare ces deux valeurs de yy , on aura l'égalité $4aazx -$
 $4aazx + aaxx + 4azzx - 2axxx + 2xxx - 4aacz + 2aacx$
 $- 2aczx + 4acz^2 - 2aczx + 2cz^2x - aacc - 2accz + ccz^2 =$
 $4azx - 2ax - 2ac - xx + cc + 4czx - 2az - 2z = 8aazx - 4az^3 -$
 $4aazx + 2azzx - 4aazx + 2acz^2 - 2azxx + 2xxx + 2accz$
 $- ccz^2 + 8acz^2 - 4cz^3$, qui se réduit en effaçant les termes
 qui se détruisent à l'égalité $4aazx - 4az^3 + 6acz^2 - 2azxx$
 $+ 4accz - 2ccz^2 - 4cz^3 = aaxx + 2aacx - 4aczx + 2cz^2x$
 $+ aacc$, ou en divisant par aa & transposant, il vient l'é-

galité $xx + 2cx - \frac{4czx}{a} + \frac{2cz^2x}{aa} + \frac{2cz^3}{a} = 4zz - \frac{4z^3}{a} +$
 $\frac{6cz^2}{a} + \frac{4ccz}{a} - \frac{2ccz^2}{aa} - \frac{4cz^3}{aa} - cc$; & en résolvant cette éga-

lité, il vient $x + c - \frac{2cz}{a} + \frac{cz^2}{aa} + \frac{z^3}{a} = \sqrt{4zz - \frac{4z^3}{a} + \frac{6cz^2}{a}}$

$+ \frac{4ccz}{a} + \frac{2ccz^2}{aa} - \frac{4cz^3}{aa} - cc + cc - \frac{4ccz}{a} + \frac{4ccz^2}{aa} + \frac{2ccz^3}{aa}$
 $\frac{4ccz^3}{a^3} + \frac{ccz^4}{a^4} + \frac{2c^2z}{a} - \frac{4cz^3}{aa} + \frac{2cz^4}{a^3} + \frac{z^4}{aa}$, qui se réduit à

$x + c - \frac{2cz}{a} + \frac{cz^2}{aa} + \frac{z^3}{a} = \sqrt{4zz - \frac{4z^3}{a} + \frac{8ccz}{a} + \frac{4ccz^2}{aa}}$

$- \frac{8cz^3}{aa} - \frac{4ccz^3}{a^3} + \frac{ccz^4}{a^4} + \frac{2cz^4}{a^3} + \frac{z^4}{aa}$, ou $x + c - \frac{2cz}{a} + \frac{cz^2}{aa}$

$+ \frac{z^3}{a} = \frac{z}{aa} \sqrt{4a^2 - 4az + 8a^2c + 4aac - 8aacz - 4accz}$
 $+ ccz^2 + 2acz^2 + a^2z^2 = \frac{z}{aa} \sqrt{4a^2 - 4az + 8a^2c + 4aac - 8aacz - 4accz}$

$+ ccz^2 + 2acz^2 + a^2z^2 = \frac{z}{aa} \sqrt{4a^2 - 4az + 8a^2c + 4aac - 8aacz - 4accz}$. On aura

donc en mettant à même dénomination $aax + aac - 2acz$
 $+ cz^2 + azz = 2aaz + 2acz - azz - cz^2$, ou $aax + aac -$

$4acz + 2cz^2 + 2azz - 2aaz = 0$, qui donne $zz = \frac{4acz - 2aaz}{2a + 2c}$

$+ \frac{aax + aac}{2a + 2c} = 0$, dont la résolution donne $z = \frac{2ac + aa}{2a + 2c}$

$+ \sqrt{\frac{-aax - aac}{2a + 2c} + \frac{4aac + 4ac + a^2}{2a + 2c}}$, qui se réduit à

$z = \frac{2ac + aa + a\sqrt{-2ax + 2ac - 2cx + 2cc + aa}}{2a + 2c}$. Si donc on met cette valeur de z dans l'égalité \mathcal{Q} , il viendra $yy = cc - xx - 2ac - 2ax + 4ac + 2aa + 2a\sqrt{aa + 2ac + 2cc - 2ax - 2cx}$, ou bien (R) $y = \pm \sqrt{2aa + cc + 2ac - 2ax - xx + 2a\sqrt{aa + 2ac + 2cc - 2ax - 2cx}}$, qui est l'équation des Cycloïdes geometriques allongées & accourcies.

COROLLAIRE.

Si l'on suppose $c = 0$, c'est à dire que le point décrivant soit sur la circonference du cercle qui roule, l'équation R deviendra $y = \pm \sqrt{2aa - 2ax - xx + 2a\sqrt{aa - 2ax}}$, qui est celle de la Cycloïde geometrique simple.

EXEMPLE III.

Pour les Courbes formées par le roulement d'une Courbe quelconque sur une autre aussi quelconque, le point décrivant étant sur la circonference de celle qui roule.

Soit la Courbe AGZ un cercle dont le rayon soit b , & la Courbe AB ou MGK un autre cercle dont le rayon soit a , l'on aura $G\mathcal{Q}(t) = \sqrt{2bz - zz}$ & $GR(r) = \sqrt{2au - uu}$, dont les differences sont $dt = \frac{b dx - z dz}{\sqrt{2bz - zz}}$ & $dr = \frac{a du - u du}{\sqrt{2au - uu}}$.

Corol. I. Mettant donc ces valeurs dans les égalités E & F en la place de $t, dt, r,$ & dr , elles deviendront (R) $xx + 2zx + yy - 2y\sqrt{2bz - zz} = 2au - 2bz$, & $y = \sqrt{2bz - zz} - \frac{x - z}{\sqrt{2bz - zz}}$

$x\sqrt{b - z} + \frac{du\sqrt{2au - uu} - u\sqrt{2au - uu} \times \frac{adu - udu}{\sqrt{2au - uu}}}{uz} \times \frac{bdx\sqrt{2au - uu}}{\sqrt{2bz - zz}adu}$, dont la

derniere se réduit à $y = \frac{bz - bx + zx + bu}{\sqrt{2bz - zz}}$, ou en mettant à même dénomination, à (Q) $y\sqrt{2bz - zz} = bz - bx + zx + bu$, dont le quarté est $2bzyy - zzyy = bbzx - 2bbzx + bbxx + 2bzzx - 2bzxz + zzzx + 2bbzu - 2bbux + 2buzx + bbuu$, d'où l'on tire en transposant

$$z z = \frac{2b yy - 2bbx - 2bx^2 + 2bbu + 2buz}{bb + 2bx + xx + yy} = \frac{2bbux - bbun - bbxx}{bb + 2bx + xx + yy}$$

& en résolvant l'égalité du second degré, il vient

$$z = \frac{b yy + bbx + bx^2 - bb u - bux}{bb + 2bx + xx + yy} \pm \sqrt{\frac{2bbux - bbun - bbxx}{bb + 2bx + xx + yy}}$$

$$\frac{+bbu^2 + 2b'xy + b^2x + 2b'x'y^2 + 2bbx + b^2x^2 - 2b'u^2 + b^2u^2 - 2b^2xu - 2b^2ux^2 - 2b^2uxy - 2b^2ux^2 - 2b^2ux + 2b^2u^2x + bb uuxx}{bb + 2bx + xx + yy^2}$$

se réduit en mettant à même dénomination à l'égalité (S)

$$z = \frac{b yy + bbx + bx^2 - bb u - bux + by \sqrt{yy + 2bx + xx - 2bu - nu}}{bb + 2bx + xx + yy}$$

Maintenant pour faire que cette valeur de z ne soit composée que des seules indéterminées x & y, on tirera de chacune des égalités R & Q une valeur de $\sqrt{2bz - zz}$, afin qu'étant comparées on tire de cette comparaison une valeur de u, qui étant substituée dans l'égalité S la rende telle qu'elle ne contienne plus que les indéterminées x & y. De l'égalité R on tire $\sqrt{2bz - zz} = \frac{xx + 2zx + yy - 2au + 2bx}{2y}$, & de l'égalité Q aussi $\sqrt{2bz - zz} = \frac{bx - bx + xx + bu}{y}$. On aura donc

$$xx + 2zx + yy + 2bz - 2au = 2bz - 2bx + 2zx + 2bu$$

qui se réduit à $xx + yy + 2bx = 2au + 2bu$, d'où l'on tire

$$u = \frac{xx + yy + 2bx}{2a + 2b}$$

Si donc on substituë cette valeur dans l'égalité S, on aura $z = b x \frac{yy + bx + xx - b - x \frac{xx + yy + 2bx}{2a + 2b}}{bb + 2bx + xx + yy}$

$$+ y \sqrt{yy + 2bx + xx - 2b - \frac{x^2 - y^2 - 2bx}{2a + 2b} \times \frac{xx + yy + 2bx}{2a + 2b}}$$

, ou en réduisant & mettant à même dénomination, il vient (T)

$$z = \frac{b}{2a + 2b} \times \frac{2ayy + 2abx + 2axx + byy - bxx - x^2 - xyy + y \sqrt{yy + 2bx + xx} \sqrt{4a^2 + 4ab - x^2 - y^2 - 2x}}{bb + 2bx + xx + yy}$$

A présent soit mis dans l'égalité (O) $dy = \frac{xdx + zdx}{t - y}$ pour t sa valeur $\sqrt{2bz - zz}$, Corol. I.

on aura $dy = \frac{xdx + zdx}{\sqrt{2bz - zz} - y}$, & ensuite pour z & $\sqrt{2bz - zz}$

aussi leurs valeurs prises dans les égalités Q & T, il viendra

M ij

$$x dx + \frac{bdx}{2a+2b} \times \frac{2ay^2+2abx+2axx+byy-bxx-x^2-xyy+y}{\sqrt{yy+2bx+xx} \times \sqrt{4a^2+4ab-xx-y^2-2bx}}$$

$$dy = \frac{bb+2bx+xx+yy}{b-bx+xx+bu} - y.$$

Et en mettant à même dénomination, & dans le dénominateur pour u & z leurs valeurs, on aura $dy = \frac{dx}{2a+2b} \times \frac{2ab^2x+4abx^2+2ax^3+2axy^2+2b^2x+4b^2x^2+2bx^3+2bxxy+2aby^2+2ab^2x+2abx^2+bbyy-bbx-x-bx^2-bxyy+by\sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx \times \sqrt{yy+2bx+xx}}$, divisé par $bb+2bx+xx+yy \times \frac{bx-yy}{y} + \frac{bxx+byy+2bbx}{2ay+2by} + \frac{bb+bx}{2ay+2by} \frac{2ay^2+2abx+2axx+byy-bxx-x^2-xy^2+y}{\sqrt{yy+2bx+xx} \times \sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx}$, qui se réduit (en effaçant les termes qui se détruisent, & en mettant le dénominateur à même dénomination à l'égalité

$$dy = \frac{ydx \times 4ab^2x+6abx^2+2ax^3+2axy^2+2bx+3bbx^2+bx^3+bxxy+2aby^2+b^2y^2-by\sqrt{4a^2+4ab-y^2-x^2}-2bx\sqrt{x^2+y^2+2bx}-2abx-2ay^2-by^2+bx^2b+2bx+xx+y^2+bb+bx \times 2ay^2+2ax+2ax^2+by^2-bx^2-x^2-xy^2+y\sqrt{4a^2+4ab-y^2-x^2}-2bx\sqrt{x^2+y^2+2bx}}$$

$$\text{ou à } dy = \frac{ydx \times 2a+bx \times 2bbx+3bxx+xx^2+xyy+byy-by}{\sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx \times \sqrt{xx+yy+2bx}} - \frac{bx^2y^2-by^4-2b^2xy^2-4abxy^2-2ax^2y^2-2ay^4+b+xx+by\sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx \times \sqrt{xx+yy+2bx}}$$

qui se réduit encore en divisant le numérateur & le dénominateur par $y\sqrt{xx+yy+2bx}$ à l'égalité . . .

$$dy = \frac{dx \times 2a+bx \times b+bx \times \sqrt{xx+yy+2bx}+by \times \sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx}{2a+b-y\sqrt{xx+yy+2bx}+xx+bx \times \sqrt{4aa+4ab-xx-yy}-2bx}$$

qui est celle qui exprime la nature de la Courbe AM qui est alors une Epicycloïde.

COROLLAIRE.

Si l'on suppose le rayon du cercle AGZ infini, l'équation se changera en cette autre $dy = \frac{bbdx\sqrt{2bx}}{bb\sqrt{4ab-2bx}}$, puisque tous les autres termes sont nuls par rapport à $bb\sqrt{2bx}$ &

$bb\sqrt{4ab-2bx}$, laquelle devient $dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ qui est l'équation de la Cycloïde ordinaire. Et c'est aussi ce qui doit arriver; car lorsque le rayon FA est infini, la circonférence du cercle AGZ est infiniment grande, & par conséquent la partie AG est une ligne droite; d'où il suit que la Courbe AM est alors engendrée par le roulement du cercle MGK sur la ligne droite GB , ce qui est la generation de la Cycloïde simple.

AUTRE METHODE GENERALE
pour trouver les Equations qui expriment la nature des Courbes qui peuvent être formées par le roulement d'une Courbe quelconque sur la même Courbe posée dans une situation renversée par rapport à la première.

Si l'on fait rouler la Courbe quelconque ABF sur une autre AGK qui lui soit égale & semblable, le sommet A décrira la Courbe AME dont on trouvera la nature en cette sorte.

Soit supposée la Courbe ABF parvenue dans la situation MGH , dans laquelle elle touche en G la Courbe AGK , où le point décrivant A tombe en M , & où l'axe AT se trouve dans la situation RM . Il est évident que l'arc AG est égal à l'arc MG , puisqu'il faut que tous les points de l'arc MG se soient rencontrés successivement sur tous ceux de l'arc AG , pour que la Courbe ABF soit parvenue dans la situation MGH . Si à présent du point touchant G on mène la tangente GT & la perpendiculaire CGL à cette tangente, il est clair que cette tangente GT coupera les axes CA & LM dans un même point, puisque les Courbes AFK , MGH sont les mêmes. Or elle ne peut couper ces deux axes dans un même point, qu'au point T où ces deux axes se coupent, & ce point T doit être tel que $AT = MT$. Cela fait, soit encore mené les appliquées GQ , GR & PM aux Courbes AGK , MGH , AME , & les cordes AG , MG , il est évident que $AQ = MR$, $AG = MG$, $GQ = GR$ & $RL = QC$. Or

puisque l'angle AGM est coupé en deux également par la tangente GT , & que menant AM l'angle $GAM = GMA$, il est clair que les triangles GAD & GMD sont égaux & semblables, & partant que l'angle ADG est droit & que $AD = MD$; d'où il suit que la ligne AM est parallèle à CL , & que menant MO parallèle à GT , MD sera égale à GO . Cela posé, on nommera AP , x ; PM , y ; AQ ou MR , z ; QG ou RG , t ; & menant les appliquées mp , gq infiniment proche de MP & GQ , & les petites lignes Mm & Gg parallèles à CA , on aura Pp ou $Mt = dx$, $m = dy$, Qq ou $Gs = dz$ & $sg = dt$. Maintenant à cause que GC est perpendiculaire à la Courbe AGK , les triangles GSg & GQC sont semblables, puisqu'ôtant des angles $CGS + SGg$ & $GGS + SGg$ qui sont égaux à un droit, le même angle SGg , les restes CGS , ou son égal GQC & GGS sont égaux, & que de plus les angles CQG & GSg sont droits. Les triangles GSg & GQC sont donc semblables, ce qui donne ces analogies $GS (dz) . Sg (dt) :: GQ (t) . QC = \frac{t^2 dz}{dz} = RL$, & $GS (dz) . Gg (\sqrt{dz^2 + dt^2}) :: GQ (t) . GC = \frac{t \sqrt{dz^2 + dt^2}}{dz} = GL$. Mais parceque les angles GRL & MOL sont droits, & que l'angle GLR est commun aux deux triangles MOL & GRL , il est visible que ces deux triangles sont semblables, & qu'ainsi l'on aura cette proportion $GL \left(\frac{t \sqrt{dz^2 + dt^2}}{dz} \right) . RL \left(\frac{t dt}{dz} \right) :: ML$ ou $AQ + QC \left(+ \frac{t dt}{dz} \right) . OL = \frac{z dx dt + t dt^2}{dz \sqrt{dz^2 + dt^2}}$, & partant $OG = GL - OL = \frac{t \sqrt{dz^2 + dt^2}}{dz} - \frac{z dx dt + t dt^2}{dz \sqrt{dz^2 + dt^2}} = \frac{t dz - z dt}{\sqrt{dz^2 + dt^2}} = MD$. Or puisque AM ou $2 MD (\sqrt{PM^2 + AP^2}) = \sqrt{xx + yy}$, l'on aura l'égalité $\sqrt{xx + yy} = \frac{2t dz - 2z dt}{\sqrt{dz^2 + dt^2}}$, dont le carré est $xx + yy = \frac{4t^2 dz^2 - 8z dx dz + 4z^2 dt^2}{dz^2 + dt^2}$, d'où l'on tire $y = \pm \frac{\sqrt{4t^2 dz^2 - 8z dx dz + 4z^2 dt^2 - xx dz^2 - xx dt^2}}{\sqrt{dz^2 + dt^2}}$; à cause des triangles semblables CQG , APM , on aura cette analogie CG

$$\left(\frac{\sqrt{dz^2+dt^2}}{z}\right) \cdot CQ\left(\frac{t dt}{dz}\right) \therefore AM \text{ ou } \sqrt{xx+yy} \left(\frac{2tdy-2zdt}{\sqrt{dz^2+dt^2}}\right)$$

AP (x) qui donne cette égalité $x = \frac{2tdtdz-2zdt^2}{dz^2+dt^2}$. Ainsi l'on aura les deux égalités A & B.

$$A. y = + \frac{\sqrt{4ttdz - 8tzdtdz + 4z dt^2 - xx dz^2 - xx dt^2}}{dz^2 + dt^2}$$

$$B. x = \frac{2tdtdz - 2zdt^2}{dz^2 + dt^2}$$

pour exprimer la nature de la Courbe AM. Car il est évident que lorsque la Courbe AGK ou MGH sera déterminée, c'est à dire que l'on aura la valeur de t en z, l'égalité B se changera par la substitution de cette valeur en la place de t, en une autre qui ne sera plus composée que des inconnues x & z, d'où l'on tirera une valeur de z en x, qui étant mise en la place dans l'égalité A après y avoir substitué pour t & dt leurs valeurs en z, la rendra telle qu'elle ne contiendra que les seules inconnues x & y, & par conséquent exprimera alors la nature de la Courbe AM.

COROLLAIRE.

Il suit de ce que les égalités A & B ne contiennent point les différences dx & dy, que toutes les fois que la Courbe AGK ou MGH sera geometrique, la Courbe AM sera aussi geometrique.

EXEMPLE I.

Soit la Courbe AGK ou MGH un cercle dont le diamètre soit 2a, on aura GQ ou GR (t) = $\sqrt{2az-zz}$, & $dt = \frac{adz-zdz}{\sqrt{2az-zz}}$, lesquelles valeurs de t & dt étant substituées dans les égalités A & B, elles se changeront en celles-ci,

$$y = + dz \frac{\sqrt{8az-4zz-8az+8zz+\frac{4aaz-8az+4z^2}{2a-zz}xx-\frac{aaxx+2azxx-zzxx}{2az-zz}}}{\sqrt{dz^2+\frac{aadz^2-2a^2dz^2+2zdz^2}{2a-zz}}}$$

$$\& x = \frac{zadz^2-2zdz^2-\frac{2aazdz^2+4az^2dz^2-2z^2dz^2}{2a-zz}}{dz^2+\frac{aadz^2-2a^2dz^2+2zdz^2}{2az-zz}}, \text{ qui se ré-}$$

duisent à $y = \pm \frac{\sqrt{4aaz - aaxx}}{a} = \pm \sqrt{4zz - xx}$, & (O)
 $x = \frac{2az - 2ax}{aa}$. De cette dernière on tire $zz - az = -\frac{1}{2}ax$,
 dont la résolution est $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax}$. Si donc on
 met cette valeur de z dans l'égalité C. on aura $y = \pm$
 $\sqrt{2aa - 2ax - xx + 2a\sqrt{aa - 2ax}}$ qui est l'équation de la Cy-
 cloïde geometrique.

EXEMPLE II.

Soit la Courbe *AGK* ou *MGH* une parabole dont la
 parametre soit a , on aura $t = \sqrt{az}$, dont la difference
 est $dt = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$. Mettant ces valeurs de t & dt en leurs pla-
 ces dans les égalités *A* & *B*, elles se changeront en ces

autres $y = \pm dz \frac{\sqrt{4az - 4az + \frac{aaz}{az} - xx - \frac{aaxx}{4az}}}{\sqrt{dz^2 + \frac{aadz^2}{4az}}}$, &

$x = \frac{adz^2 - \frac{2aazdz}{4az}}{dz^2 + \frac{aadz^2}{4az}}$, qui se réduisent à (C) $y = \pm$

$\frac{\sqrt{4aaz - 4axx - aaxx}}{\sqrt{4az + aa}}$, & (D) $x = \frac{2az}{4z + a}$. De l'égalité *D* on

tire $4zx + ax = 2az$ ou $z = \frac{ax}{2a - 4x}$, & substituant
 cette valeur de z dans l'égalité *C*, on aura $y = \pm$

$\sqrt{\frac{4a^2xx}{4aa - 16ax + 16xx} - \frac{4aax^2}{2a - 4x} - aaxx}$, ou en mettant à même
 $\sqrt{\frac{4aax}{2a - 4x} + aa}$

dénomination $y = \pm \frac{\sqrt{4a^2xx - 8ax^2 + 16aax^2 - 4a^2xx + 16ax^2 - 16aax^2}}{\sqrt{2a - 4x} \sqrt{4aax + 2a^2 - 4aax}}$

qui se réduit à $y = \pm \frac{\sqrt{8a^2x^3}}{\sqrt{2a - 4x} \sqrt{2a^2}} = \pm \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - 4x}}$ qui est
 l'équation de la Courbe décrite par le sommet de la pa-
 rabole *ABE* roulant sur son égal *AGK*, laquelle est geo-
 metrique.

EXEMPLE III.

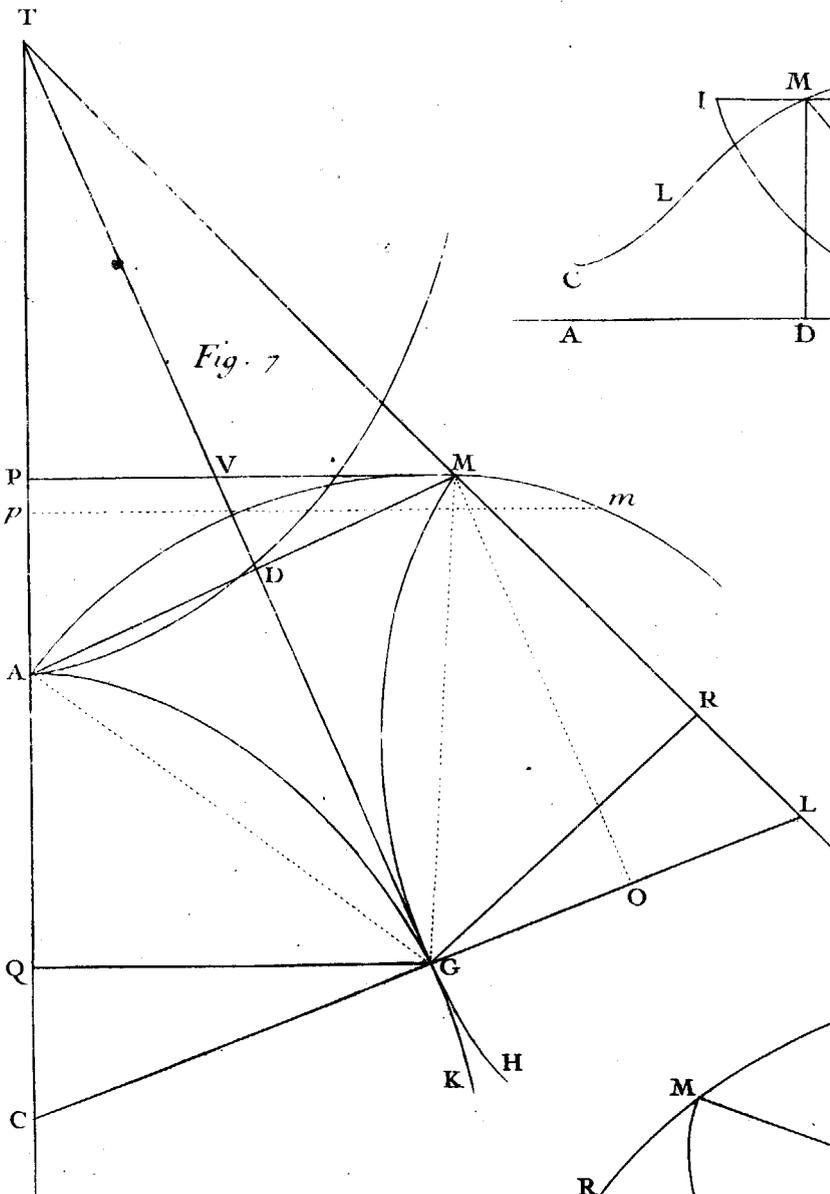


Fig. 7

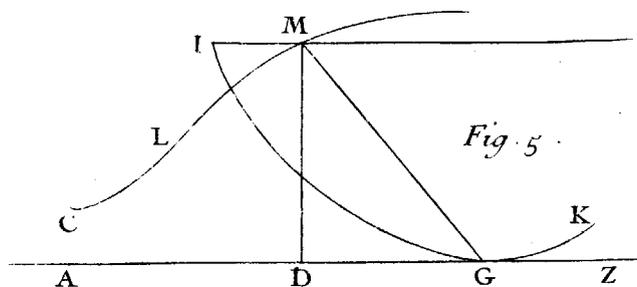


Fig. 5

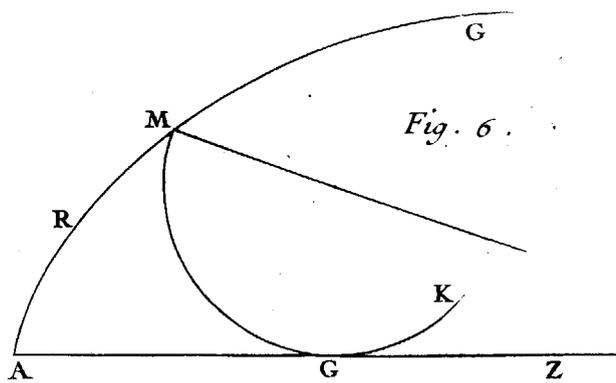


Fig. 6

E X E M P L E I I I.

Soit la Courbe *AGK* une parabole cubique dont l'équation soit $aa z = t^3$, qui donne $t = \sqrt[3]{aa z}$, & $dt = \frac{adz}{3\sqrt[3]{aa z}}$.

Suffituant ces valeurs dans les égalités *A* & *B*, elles devien-

$$\text{dront } y = \frac{V 4a \sqrt[3]{aa z z} - \frac{8az \sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{z}} + \frac{4aa z}{9\sqrt[3]{aa z}} - \frac{aa z z}{9z \sqrt[3]{aa z}}}{V dz^3 + \frac{aadz^2}{9z \sqrt[3]{aa z}}}$$

$$\& x = \frac{\frac{2adz \sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{z}} - \frac{2aa z dz}{9z \sqrt[3]{aa z}}}{dz^3 + \frac{aadz^2}{9z \sqrt[3]{aa z}}}, \text{ qui se réduisent à (C) } y =$$

$$\frac{+ \sqrt{16aa z z - 9z z z \sqrt[3]{aa z} - aa z z}}{\sqrt[3]{9z \sqrt[3]{aa z} + aa}}, \& (D) x = \frac{4aa z}{9z \sqrt[3]{aa z} + aa}.$$

De l'égalité *D* on tire $aa z + 9z z z \sqrt[3]{aa z} = 4aa z$, ou $9z z z \sqrt[3]{aa z} = 4aa z - aa z$, dont le cube est $81 \times 9z^3 z^3 \sqrt[3]{aa z} = 64 a^3 z^3 - 48 a^2 z z z + 12 a^2 z z z - a^3 z^3$, ou $81 \times 9z^3 z^3 - 64 a^3 z^3 + 48 a^2 z z z - 12 a^2 z z z + a^3 z^3 = 0$, dont la résolution donne une valeur de *z*, qui étant mise en sa place dans l'égalité *C*, cette égalité *C* exprimera la nature de la Courbe formée par une parabole cubique roulant sur elle-même.

E X A M E N D E S E A U X

DE V I C H I E T D E B O U R B O N.

P A R M. B U R L E T.

Pendant le séjour que j'ai fait à Vichi & à Bourbon l'année dernière, je me suis appliqué autant que mes occupations me l'ont pu permettre, à vérifier plusieurs

1707.
23. Mars.

1707.

N

Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes
sortes de courbes sur une autre courbe quelconque - M. NICOLE
Académie royale des sciences - Année 1707

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE
