



**HAL**  
open science

# Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique et hyperboliques

Philippe de La Hire

► **To cite this version:**

Philippe de La Hire. Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique et hyperboliques. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1707. ads-00109833

**HAL Id: ads-00109833**

**<https://hal.science/ads-00109833>**

Submitted on 25 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

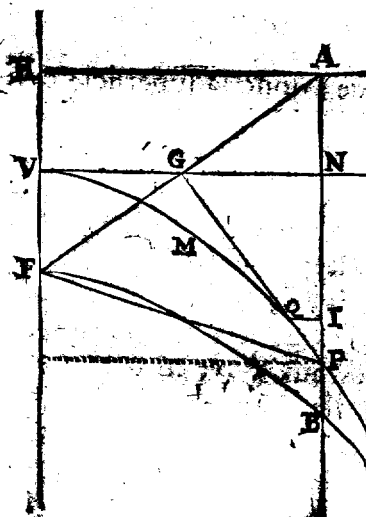
## QUADRATURES

De superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques,  
Elliptiques & Hyperboliques.

PAR M. DE LA HIRE.

1707.  
20. Juillet

**M**onsieur Pascal est le premier, que je sçache, qui ait publié & démontré dans ses Lettres sous le nom de *A. Dettonville*, que si l'on éleve perpendiculairement sur le plan d'un quart de cercle, tous les sinus aux points de leurs arcs, ils formeront un espace Cylindrique égal au quarré du rayon du cercle. D'où il suit que les cordes d'un demi-cercle étant aussi élevées de même sur leurs arcs du demi-cercle, formeront un espace Cylindrique égal au quarré du diametre du demi-cercle. Mais il me semble qu'on n'a pas examiné si dans les autres Sections Coniques il n'y avoit rien de semblable à cette propriété du cercle, qui est une des plus utiles & des plus belles que l'on doit à la Geometrie des indivisibles. Voici ce que j'y ai trouvé dans l'examen que j'en ai fait.



## THEOREME I.

Soit une Parabole *VMP* dont l'axe est *HF*, le foyer *F*, & la ligne *HA* perpendiculaire à l'axe en *H*, en sorte que *VH* soit égale à *VF* qui est égale au quart du Parametre de l'axe.

Je dis que si de quelque point *A* de la ligne *HA* on mène *AF* au foyer, & *AP* parallèle à l'axe jusqu'à la Parabole en *P*, & qu'au

point  $P$  on éleve  $FA$  perpendiculairement sur le plan de la Parabole, & qu'on fasse de même pour tous les points  $A$  d'une portion  $HA$  déterminée sur cette ligne; on aura une portion ou espace d'un cylindre droit qui a pour sa base la Parabole  $VMP$ , lequel sera égal à deux fois l'espace mixte  $VHAPMV$  qui est un espace connu.

Car ayant mené la touchante  $VGN$  par le sommet  $V$  de l'axe de la Parabole, & la touchante  $PG$  par le point  $P$ , on sçait par les propriétés de la Parabole, que ces deux touchantes se rencontreront en  $G$  sur la ligne  $FA$ , & qu'elles formeront l'angle droit  $FGP$ , & que  $FG$  sera égale à  $GA$ , &  $VG$  égale à  $GN$ , & enfin les deux triangles rectangles  $PGE$ ,  $PGA$  seront égaux.

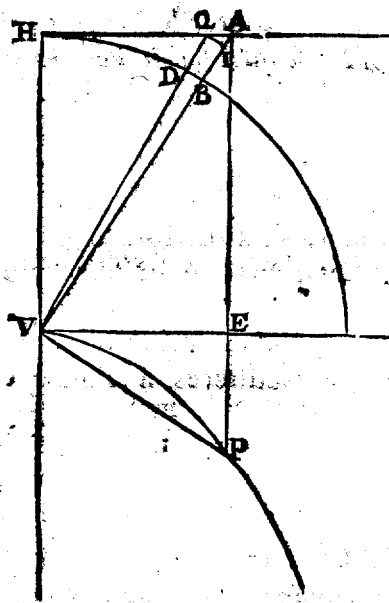
Mais si l'on prend la ligne  $PQ$  indéfiniment petite sur la Parabole ou sur sa touchante, ce qu'on regarde comme la même ligne, & qu'on mene la ligne  $QI$  perpendiculaire à  $AB$ , on formera le triangle rectangle  $PQI$  qui sera semblable au triangle rectangle  $PAG$  ou  $PGA$  qui lui est égal; c'est pourquoy on aura  $PA \parallel AG \parallel PQ \parallel QI$ , d'où il suit que le rectangle  $PA \times QI$  est égal au rectangle  $AG \times PQ$ ; & le rectangle  $PA \times 2QI$  sera égal au rectangle  $PQ \times 2AG$  qui est égale à  $FA$ . Mais tous les rectangles ensemble formés comme ce dernier, font l'espace cylindrique proposé; & tous les rectangles  $PA \times 2QI$  qui leur sont égaux, font un espace double de l'espace  $VHAPMV$ , à cause que tous les rectangles  $PA \times QI$  sont égaux ensemble à cet espace; donc la superficie cylindrique proposée est double de l'espace  $VHAPMV$ , qui est un espace égal au tiers du rectangle  $VN \times NP$ , ce qui est connu dans la Parabole, plus le rectangle  $VHAN$ .  
*Ce qu'il falloit démontrer.*

Mais si l'on décrit une hyperbole équilatere  $FB$  qui ait  $HF$  pour la moitié de son axe, son centre étant en  $H$ , on sçait que toutes les ordonnées  $AB$  à son axe indéterminé  $HA$ , seront égales aux  $FA$ , & par conséquent toutes les ordonnées  $AB$  de l'hyperbole étant élevées aux points  $P$  de la Parabole où elles la coupent, forme-

ront le même espace cylindrique que nous venons d'examiner.

## THEOREME II.

Soit une Parabole  $VP$  dont l'axe est  $VH$ , & que  $VH$  soit égale au paramètre. Par le point  $H$  soit mené  $HA$  perpendiculaire à l'axe  $VH$ , & par quel point on voudra  $A$  de la ligne  $HA$  soit mené  $AV$  au sommet  $V$  de la Parabole, & soit  $VE$  touchante en  $V$ . Enfin du point  $V$  pour centre & pour rayon le paramètre  $VH$  soit décrit le cercle  $HDB$  qui coupe en  $B$  la ligne  $VA$ . Si au point  $B$  du cercle on élève perpendiculairement sur le plan de la Parabole la ligne  $AP$ , & qu'on fasse la même chose pour tous les points de la partie  $HA$  de la ligne  $HA$ .



Je dis que l'espace de la superficie cylindrique formée par toutes les  $AP$  sur les points  $B$ , sera égal au rectangle  $VHAE$ .

1°. Si l'on mène la ligne  $VP$  du sommet  $V$  au point  $P$ , je dis que le triangle  $APP$  sera rectangle en  $V$ , & semblable au triangle rectangle  $VHA$ . Car à cause de la Parabole, le rectangle  $PE \times EA$  qui est le paramètre, sera égal au carré de  $VE$ , donc  $PE \parallel EV \parallel EA$ , & par conséquent le triangle  $APP$  est rectangle en  $V$ . Mais aussi l'angle  $VAP$  étant égal à l'angle  $AVH$ , le triangle rectangle  $HAV$  sera semblable au triangle rectangle  $VAP$ . On aura donc  $PA \parallel VA \parallel VA \parallel VH$ .

2°. Si l'on prend  $AQ$  indéfiniment petite sur  $HA$ , &

qu'on mene  $QD$ , & du point  $Q$  si l'on mene la perpendiculaire  $QI$  sur  $VA$ , le petit triangle  $QIA$  sera semblable au triangle  $AVP$ : c'est-pourquoy  $AP \parallel AV \parallel AQ \parallel QI$ . Mais  $AV \parallel VB$  ou  $VH$  son égale  $\parallel QI \parallel DB$ ; donc *ex aqno*  $AP \parallel VH \parallel AQ \parallel BD$ ; donc le rectangle  $AP \times BD$  sera égal au rectangle  $VH \times AQ$ . Ce sera la même chose pour toutes les parties indéfiniment petites de la ligne  $HA$ . Mais toutes les  $AP \times$  les arcs  $BD$  qui forment l'espace cylindrique proposé, seront égales à toutes les  $AQ \times VH$  qui forment le rectangle  $VHAE$ . Ce qu'il falloit démontrer.

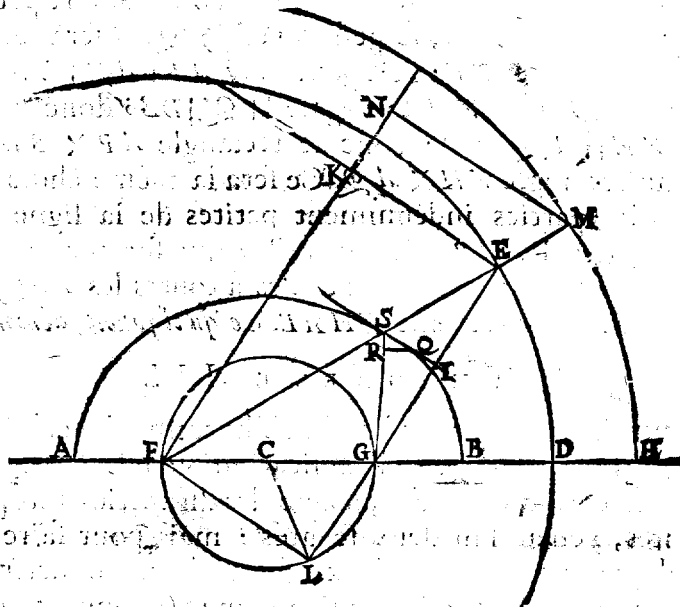
THEOREME III.

J'aurois pu ne faire qu'un seul Theoreme de celui-ci & du suivant; mais comme l'explication & la démonstration seroient trop composées à cause des distinctions trop fréquentes, j'en ai fait deux séparés: mais pour faire voir l'analogie qu'ils ont entr'eux, j'ai observé de mettre les mêmes lettres aux points qui ont même rapport, outre qu'il y a quelques propriétés particulieres à l'un & à l'autre.

Si sur une ligne droite  $AB$  il y a deux points  $F, G$  également éloignés de  $A$  & de  $B$ , & de plus sur  $AB$  prolongée vers  $D$  si l'on prend la grandeur  $BD$  égale à  $BC$ , & que du point  $F$  pour centre & pour rayon  $FD$  on décrive le cercle  $DE$ , & que du point  $G$  ayant mené quelque ligne  $GE$  jusqu'au cercle en  $E$  & ensuite  $DE$ , si l'on tire  $GE$  en deux également en  $I$ , la ligne  $SI$  perpendiculaire à  $GE$  rencontrera  $FE$  en un point  $S$  qui sera sur une Ellipse laquelle aura  $AB$  pour son grand axe & qui sera égale à  $FE$ , & la ligne  $SI$  touchera l'Ellipse en  $I$ .

Cette proposition est évidente; car si l'on mene  $GS$ , elle sera égale à  $ES$ , & par conséquent  $FS, GS$  seront ensemble égales à l'axe  $AB$ , qui est une propriété des foyers  $F, G$  de l'Ellipse.

Ce qu'il y a de remarquable ici, c'est que le cercle  $DE$  où se termine la ligne  $GE$  menée du foyer  $G$ , fait le même office dans l'Ellipse que dans la Parabole, la ligne



droite perpendiculaire à l'axe, & qui le rencontre dans un point autant éloigné du sommet qu'en est le foyer; ce qui est aussi de même ici où le cercle  $DE$  rencontre l'axe en  $D$ ; en sorte que  $BD$  est égale à  $BG$ : mais dans la Parabole l'autre foyer comme  $F$  étant à distance infinie, aussi le cercle  $DE$  qui auroit son centre à distance infinie devient une ligne droite.

Je dis maintenant que si par tous les points  $s$  de la demi-Ellipse  $ASB$  on élève des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles  $FEG$  ou  $EGS$  qui sont égaux entr'eux, & qui sont les moitiés des angles  $FSG$  à l'Ellipse sur les foyers  $EG$ , en posant pour rayon du cercle des sinus l'axe  $AE$  ou  $FE$ ; tous ces sinus formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base la demi-Ellipse  $ASB$ , lequel sera égal au rectangle fait de l'axe  $AB$  & de la distance  $FG$  entre les foyers.

Si de quelque point  $Q$  pris sur la touchante indéfiniment proche du point  $S$  qu'on peut considérer aussi sur la Courbe, on mène  $QR$  perpendiculaire à  $GS$ , on aura le

triangle  $SQR$  semblable au triangle  $GSI$ ; & si par le point  $E$  on tire  $EK$  parallèle à la touchante  $SI$ , &  $FK$  perpendiculaire à  $EK$ , on aura aussi le triangle rectangle  $EFK$  semblable aux deux précédens à cause des parallèles, & dans le cercle  $DE$ ,  $EK$  sera le sinus de l'angle  $EFK$  qui est semblable à l'angle  $SGI$ , & qui est la moitié de l'angle  $FSG$ : c'est pourquoy  $FE \parallel EK \parallel QS \parallel SR$ ; donc le rectangle  $EK \times QS$  qui est portion de l'Ellipse, sera égal au rectangle  $FE$  qui est l'axe  $AB \times BR$ . Mais la somme de toutes les  $SR$  pour la demi-Ellipse est égale à la distance  $FG$  entre les foyers, à cause des perpendiculaires ou arcs  $QR$  sur  $GS$ , ce qui est connu, & la somme de toutes les  $QS$  est la demi-Ellipse; c'est pourquoy la proposition est vraie.

## COROLLAIRE I.

On voit aussi par cette démonstration que si au lieu du cercle  $DE$  sur lequel on a pris les sinus  $EK$  des angles  $EFK$ , on les prend sur tout autre cercle, ou plus grand comme sur  $HM$ , ou plus petit, on dira toujours la même chose; car alors ce nouveau cercle  $HM$  étant concentrique à  $DE$ , & ayant prolongé s'il est nécessaire  $FE$  en  $M$ , on aura le triangle rectangle  $FMN$  formé par le rayon  $FM$  & par le sinus  $MN$  de l'angle  $EFK$ , semblable au triangle rectangle  $EFK$ ; d'où l'on concluera, comme on a fait, que l'espace cylindrique fait par tous les sinus  $MN$  sur les arcs  $S$  de la demi-Ellipse lesquels leur correspondent, sera égal au rectangle fait du rayon  $FM$  ou  $FH$ , & de la même distance  $FG$  entre les foyers.

## COROLLAIRE II.

Si l'on prolonge  $EG$  du côté de  $G$  jusqu'au cercle  $DE$ , on formera l'autre demi-Ellipse dont on concluera la même chose que ci-devant.

## COROLLAIRE III.

Si sur  $FG$  pour diamètre on décrit le cercle  $FLG$ , & que  $EG$  prolongée ou non le rencontre en  $L$ , la corde

$FL$  qui est perpendiculaire à  $GL$ , sera égale au sinus  $EK$ ; car les deux lignes  $EL$ ,  $FK$  sont parallèles, & les angles  $FKE$ ,  $FLG$  sont droits: c'est pourquoy toutes les cordes  $FL$  seront égales aux sinus  $EK$ ; ainsi ce que nous avons dit des sinus  $EK$ , se pouvoit dire des cordes  $FL$ ; mais il faut remarquer que pour la demi-Ellipse on auroit les cordes de tout le cercle entier  $FLG$ .

On voit aussi que la corde  $FL$  qui soutient l'angle  $FGL$  égal à l'angle  $EGD$  dans le cercle  $FLG$ , sera égale au sinus de l'angle  $FEG$  dans le cercle  $DE$ ; & par conséquent le sinus de l'angle  $PEG$  dans le cercle  $DE$ , sera double du sinus de l'angle  $EGD$  dans le cercle  $FLG$ .

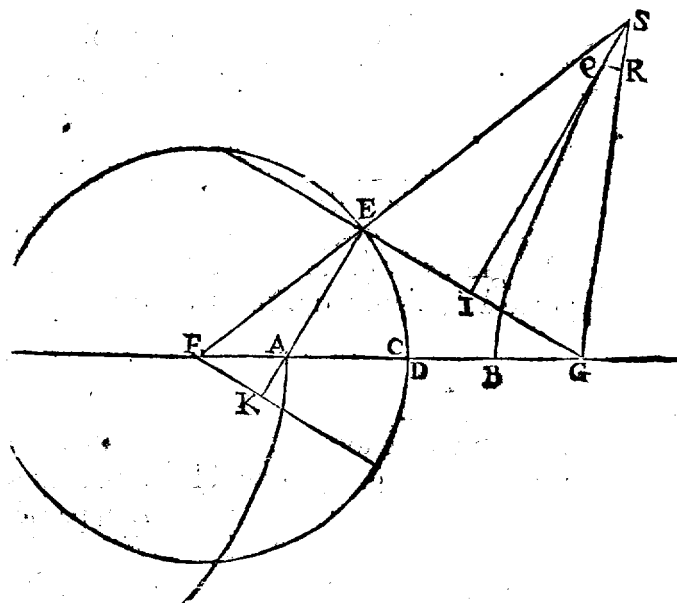
## COROLLAIRE I V.

Il s'ensuit aussi de ce Theoreme que si de tous les points  $E$  du demi-cercle  $DE$  on mene des lignes aux deux foyers, l'une  $EF$  qui coupe la demi-Ellipse en  $S$ , & l'autre  $EG$  qui rencontre le cercle  $FLG$  en  $L$ , & si aux points  $A$  &  $S$  on eleve perpendiculairement la même corde  $FL$  qui est dans le cercle  $FLG$ , celle d'un angle  $FCL$  double de l'angle  $EGD$ , il se formera sur le cercle entier  $FLG$  une surface cylindrique égale à deux fois le carré de  $FG$ , ce qui est connu; & par cette proposition il s'en formera une autre sur la demi-Ellipse, qui est égale au rectangle  $FE \times FG$ ; donc à cause de  $FG$  commune, le double carré étant au rectangle comme  $2FG$  à  $FE$ , les deux surfaces cylindriques seront dans la même raison de  $2FG$  à  $FE$  ou  $FD$ .

## THEOREME I V.

Si sur une ligne droite indéterminée on prend une grandeur  $AB$  telle qu'on voudra, & deux points  $F$  &  $G$  également éloignés de  $AB$  & au dehors, & si l'on prend encore la grandeur  $BD$  sur  $AB$  & égale à  $BG$ , & que du point  $F$  pour centre & pour rayon  $FD$  qui est égale à  $AB$ , on décrive le cercle  $DE$ ; du point  $G$  ayant mené quelque ligne  $GE$  jusqu'au cercle  $DE$  en  $E$ , & ensuite  $FE$  prolongée





longée tant qu'il sera nécessaire, si l'on divise  $GE$  en deux également en  $I$ , & qu'au point  $I$  on élève sur  $GE$  la perpendiculaire  $IS$  jusqu'à la rencontre de  $FE$  en  $S$ ; ce point  $S$  sera un de ceux d'une hyperbole  $SB$ , qui a pour son axe déterminé la ligne  $AB$ , & pour ses foyers les points  $FG$ , & la ligne  $IS$  touchera cette hyperbole en  $S$ .

Cette proposition est évidente par les propriétés des foyers de l'hyperbole; car dans cette construction la différence des lignes  $FS$ ,  $GS$  sera toujours égale à l'axe  $AB$  égal à  $FE$ . Mais il faut remarquer que si la ligne  $GE$  touchoit le cercle  $DE$ , alors la ligne  $FE$  seroit parallèle à  $IS$ , qui seroit dans ce cas l'une des asymptotes, & que la partie du cercle  $DE$  entre le point touchant & le point  $D$  formeroit la moitié de l'hyperbole  $BS$ , & le reste du demi-cercle au-dessus de  $AB$  formeroit la moitié de l'hyperbole opposée au-dessous de l'axe  $AB$ ; & enfin l'autre moitié du cercle  $DE$  au-dessous de l'axe formeroit le reste de ces deux hyperboles.

Ce cercle  $DE$  fait le même office dans l'hyperbole que

dans l'Ellipse, & qui est analogue à la ligne-droite de la Parabole, comme nous avons dit.

Je dis maintenant que si par tous les points  $S$  d'une portion de l'hyperbole comme  $BS$  depuis l'axe en  $B$ , on élève des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles  $EGS$  ou  $GES$  dans le cercle  $DE$ , formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base l'hyperbole, égal au rectangle de l'axe  $AB$  par  $GS$  moins  $GB$ ; ce qui se rapporte à la figure des sinus dans une partie du cercle.

Si de quelque point  $Q$  pris sur la touchante indéfiniment proche du point  $S$  ou sur l'hyperbole, ce qui est considéré comme la même chose, on mène  $QR$  perpendiculaire à  $GS$ , on aura le triangle  $SQR$  semblable au triangle  $SGI$  ou  $SEI$  qui sont semblables & rectangles. Et si par le point  $E$  on tire  $EK$  parallèle à la touchante  $SI$  &  $FK$  perpendiculaire à  $EK$ , on aura aussi le triangle rectangle  $EFK$  semblables aux précédens à cause des parallèles; & dans le cercle  $DE$  la ligne  $EK$  sera le sinus de l'angle  $EFK$  semblable à l'angle  $SEI$  ou  $SGI$ , qui est la moitié du supplément de l'angle  $FSG$ : c'est-pourquoy  $FE$  ou  $AB \parallel EK \parallel QS \perp SR$ , & par conséquent le rectangle  $AB \times SR$  sera égal au rectangle  $EK \times QS$  qui est portion de l'hyperbole. Mais la somme de toutes les  $SR$  pour l'arc de l'hyperbole  $BS$ , est égale à  $GS$  moins  $GB$ , ce qui est connu; & la somme de toutes les  $QS$  est l'arc hyperbolique  $BS$ : donc ce qui étoit proposé est vrai.

On pourra tirer de cette proposition des Corollaires semblables à ceux qu'on a tirés pour l'Ellipse.

---

Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique &  
hyperboliques - M. DE LA HIRE  
Académie royale des sciences - Année 1707

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE  
DE LA HIRE, PASCHAL

---