



HAL
open science

Méthodes nouvelles pour former et résoudre toutes les équations

Thomas Lagny

► **To cite this version:**

Thomas Lagny. Méthodes nouvelles pour former et résoudre toutes les équations. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1705. ads-00108019

HAL Id: ads-00108019

<https://hal.science/ads-00108019>

Submitted on 19 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Que si l'on veut qu'il sorte quatre fois autant de eau par le gros que par le petit, & qu'on suppose que $a = 4$, donc $aa = 16$; alors l'égalité générale de changera en celle-ci, $xx - \frac{ax}{4} = 3aa$, donc $x = \frac{a + a\sqrt{193}}{8}$ que l'on construit de la même manière. Car soit prise $CP = \frac{1}{2}a$, & la perpendiculaire $PM = a\sqrt{3}$, donc $CM = \sqrt{3}aa + \frac{1}{4}aa = \frac{a\sqrt{193}}{8}$, donc $AP = \frac{a + a\sqrt{193}}{8}$: De sorte que si l'on suppose que $a = 2$, alors $AP = \frac{2 + 2\sqrt{193}}{8}$; mais la racine de 193 est presque 14, donc $x = \frac{11}{4}$, qui est beaucoup moins que 4.

Il en est de même de tous les autres cas, puisque la construction générale renferme toutes les particulières.

METHODES NOUVELLES

pour former & résoudre toutes les Equations.

PAR M. DE LAGNY.

DEFINITIONS.

- 1°. **P**remière différence ou différence du premier degré, est la différence de deux quantitez inégales & homogènes.
- 2°. Seconde différence ou différence du second degré, est la différence de deux différences inégales du second degré, ou c'est la différence des différences inégales de trois quantitez inégales & homogènes.
- 3°. Troisième différence ou différence du troisième degré, est la différence de deux différences inégales du second degré, ou c'est la différence des différences inégales des différences inégales de quatre quantitez inégales & homogènes, & ainsi de suite pour les différences de tous les degrez à l'infini.

1705.
5. Septem-
bre.

4°. Differences semblables, sont les differences d'un même degré.

5°. Equations semblables arithmetiquement, sont celles dont tous les signes & tous les coefficients sont les mêmes, & qui ne different que dans le dernier terme ou l'homogene de comparaison. Ainsi ces trois équations,

$$xx - 2x = 3$$

$$xx - 2x = 8$$

$$xx - 2x = 15$$

sont des équations semblables arithmetiquement, & dont les racines sont 3, 4 & 5.

6°. Equations semblables geometriquement, sont celles dont tous les signes sont les mêmes, mais les coefficients & l'homogene de comparaison augmentent ou diminuent, dans le second terme, en raison arithmetique; dans le troisieme, en raison des quarez; dans le quatrieme, en raison des cubes, & ainsi de suite. Ainsi ces trois équations,

$$x^3 + 3xx + 5x = 9$$

$$x^3 + 6xx + 20x = 72$$

$$x^3 + 9xx + 45x = 243$$

sont des équations semblables geometriquement, & dont les racines sont 1, 2 & 3.

T H E O R E M E I.

Si l'on quarre trois nombres en progression arithmetique, la seconde difference de leurs quarez sera double du quarré de la difference de ces trois nombres.

D E M O N S T R A T I O N.

Soient les trois nombres a , $a + b$, $a + 2b$. dont la difference est b . Je dis que la seconde difference de leurs quarez sera $2bb$.

Racines.	Quarez.	Diff. I.	Diff. II.
$a + 2b$	$aa + 4ab + 4bb$		
$a + b$	$aa + 2ab + bb$	$2ab + 3bb$	
a		$2ab + bb$	$2bb$. Ce qu'il

falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si $b=1$, la seconde difference sera $2=2bb$.

COROLLAIRE II.

Dans la suite des quarez naturels, 1, 4, 9, 16, 25, &c. les secondes differences sont toujours 2.

DEMONSTRATION.

Racines.	Quarez.	Diff. I.	Diff. II.
<i>a</i> 1	1		
<i>b</i> 2	4	3	
<i>c</i> 3	9	5	2
<i>d</i> 4	16	7	2
<i>e</i> 5	25	9	2
&c. &c.	&c.		

Par le Corollaire précédent la seconde difference des quarez des trois racines *a*, *b*, *c* est 2 ; & par la même raison la seconde difference des quarez des trois racines *b*, *c*, *d*, est aussi 2 ; & celle des quarez des trois racines *c*, *d*, *e* : & ainsi de suite à l'infini. Donc dans la suite des quarez naturels, 1, 4, 9, 16, 25, &c. les secondes differences sont toujours 2.

COROLLAIRE III.

On pourra former par addition la suite de tous les quarez naturels, & en general la suite de tous les quarez dont les racines sont en progression Arithmetique, les trois premiers quarez étant donnez avec leurs differences.

THEOREME II.

Si l'on cube quatre nombres en progression Arithmetique, la troisième difference de ces cubes sera égale au sextuple du cube de la difference de ces quatre nombres.

DEMONSTRATION.

Soient les quatre nombres, $a. a + b. a + 2b. a + 3b.$
 Je dis que la troisieme difference de leurs cubes sera $6b^2$

Racines.	Cubes.	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
$a + 3b$	$a^3 + 9aab + 27abb + 27b^3$	$3aab + 15abb + 19b^3$	$6abb + 12b^3$	
$a + 2b$	$a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$	$3aab + 9abb + 7b^3$	$6abb + 12b^3$	
$a + b$	$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$	$3aab + 3abb + 1b^3$	$6abb + 6b^3$	$6b^2$
a	a^3			

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si $b = 1$, la troisieme difference sera $6 = 6b^2$.

COROLLAIRE II.

Dans la suite des cubes naturels, 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. les troisiemes differences sont 6.

DEMONSTRATION.

Racines.	Cubes.	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
a 1	1			
b 2	8	7		
c 3	27	19	12	
d 4	64	37	18	6
e 5	125	61	24	6
f 6	216	91	30	6
&c. &c.	&c.			

Par le Corollaire précédent la troisieme difference des cubes des quatre racines a, b, c, d , est 6; & par la même raison la troisieme difference des cubes des quatre racines, b, c, d, e , est aussi 6; & celle des cubes des quatre racines c, d, e, f ; & ainsi de suite à l'infini. Donc dans la suite des cubes naturels, 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c; les troisiemes differences sont toujours 6.

COROLLAIRE III.

On pourra former par addition la suite de tous les cubes naturels, & en general la suite de tous les cubes dont les

les racines sont en progression Arithmetique, les quatre premiers cubes étant donnez avec leurs differences.

THEOREME III.

Si l'on éleve à la quatrième puissance cinq nombres en progression Arithmetique, la quatrième difference de ces cinq puissances sera égale à 24 fois la quatrième puissance de la difference de ces cinq nombres.

DEMONSTRATION.

Soient ces cinq nombres, a , $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$. Je dis que la quatrième difference de leurs quatrièmes puissances sera $24b^4$.

Racines.	Quatrièmes puissances.
$a+4b$	$a^4+16a^3b+96a^2bb+256ab^3+256b^4$
$a+3b$	$a^4+12a^3b+54a^2bb+108ab^3+81b^4$
$a+2b$	$a^4+8a^3b+24a^2bb+32ab^3+16b^4$
$a+b$	$a^4+4a^3b+6a^2bb+4ab^3+b^4$
a	a^4

Les premières differences sont,

$$\begin{aligned} 4a^3b+42a^2bb+148ab^3+175b^4 \\ 4a^3b+30a^2bb+76ab^3+65b^4 \\ 4a^3b+18a^2bb+28ab^3+15b^4 \\ 4a^3b+6a^2bb+4ab^3+b^4 \end{aligned}$$

Les secondes sont,

$$\begin{aligned} 12a^2bb+72ab^3+110b^4 \\ 12a^2bb+48ab^3+50b^4 \\ 12a^2bb+24ab^3+14b^4 \end{aligned}$$

Les troisièmes sont,

$$\begin{aligned} 24ab^3+60b^4 \\ 24ab^3+36b^4 \end{aligned}$$

La quatrième est,

$$24b^4. \text{ Ce qu'il falloit démontrer.}$$

COROLLAIRE I.

Si $b=1$, la quatrième difference sera $24=24b^4$.

COROLLAIRE II.

Dans la suite des quatrièmes puissances naturelles, 1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c. les quatrièmes différences sont 24. Ce qui se démontre comme cy-dessus pour les quarez & les cubes.

COROLLAIRE III.

On pourra former par addition la suite de toutes les quatrièmes puissances naturelles, & en general la suite de toutes les quatrièmes puissances dont les racines sont en progression Arithmetique, les cinq premières puissances étant données avec leurs différences.

THEOREME IV.

Si l'on éleve à la cinquième puissance six nombres en progression Arithmetique, la cinquième différence de ces puissances sera égale à 120 fois la cinquième puissance de la différence de ces six nombres.

DEMONSTRATION.

Soient ces six nombres, a , $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$. Je dis que la cinquième différence des six puissances cinquièmes de ces six nombres sera $120b^5$.

<i>Racines.</i>	<i>Cinquièmes puissances.</i>					
$a+5b$	a^5	$+25a^4b$	$+250a^3b^2$	$+1250aab^3$	$+3125ab^4$	$+3125b^5$
$a+4b$	a^5	$+20$	$+160$	$+640$	$+1280$	$+1024$
$a+3b$	a^5	$+15$	$+90$	$+270$	$+405$	$+243$
$a+2b$	a^5	$+10$	$+40$	$+80$	$+80$	$+32$
$a+b$	a^5	$+5$	$+10$	$+10$	$+5$	$+1$
a	a^5					

Les premières différences sont,

$5a^4b$	$+90a^3b^2$	$+610aab^3$	$+1845ab^4$	$+2101b^5$
5	$+70$	$+370$	$+875$	$+781$
5	$+50$	$+190$	$+325$	$+211$
5	$+30$	$+70$	$+75$	$+31$
5	$+10$	$+10$	$+5$	$+1$

Les secondes font,

$$\begin{array}{r} 20a^3bb \rightarrow 240aab' \rightarrow 970ab'' \rightarrow 1320b''' \\ 20 \quad \rightarrow 180 \quad \rightarrow 550 \quad \rightarrow 570 \\ 20 \quad \rightarrow 120 \quad \rightarrow 250 \quad \rightarrow 180 \\ 20 \quad \rightarrow 60 \quad \rightarrow 70 \quad \rightarrow 30 \end{array}$$

Les troisièmes font,

$$\begin{array}{r} 60aab'' \rightarrow 420ab''' \rightarrow 750b'''' \\ 60 \quad \rightarrow 300 \quad \rightarrow 390 \\ 60 \quad \rightarrow 180 \quad \rightarrow 150 \end{array}$$

Les quatrièmes font,

$$\begin{array}{r} 120ab'' \rightarrow 360b'''' \\ 120ab'' \rightarrow 240b'''' \end{array}$$

Enfin la cinquième difference est,

$$120b''''.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si $b = 1$, la cinquième difference sera $120 = 120b''''$.

COROLLAIRE II.

Dans la suite des cinquièmes puissances naturelles, 1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, &c. les cinquièmes differences sont toujours 120.

COROLLAIRE III.

On pourra former par addition la suite de toutes les cinquièmes puissances naturelles, & en general la suite de toutes les cinquièmes puissances dont les racines sont en progression Arithmetique, les six premières puissances étant données avec leurs differences.

COROLLAIRE GENERAL.

On démontrera de même que la sixième difference des sixièmes puissances de sept nombres en progression Arithmetique, comme $a. a+b. a+2b. a+3b. a+4b. a+5b. a+6b.$ est $720b''''$, & ainsi de suite : Et comparant ensemble ces dernières differences de chaque puissance, on trouve,

Nn ij

284 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Pour les quarrez $2bb$ ou 2 , supposant $b=1$
 Pour les cubes $6b^3$ ou 6
 Pour les quatrièmes puissances $24b^4$ ou 24
 Pour les cinquièmes $120b^5$ ou 120
 Pour les sixièmes $720b^6$ ou 720
 &c. &c. &c.

Or $2=1 \times 2$
 $6=1 \times 1 \times 3$
 $24=1 \times 2 \times 3 \times 4$
 $120=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$
 $720=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$
 &c. &c.

d'où je tire ce Theoreme general.

T H E O R E M E V.

Si l'on prend autant de nombres ou termes qu'on voudra en progression Arithmetique, & qu'on éleve chacun de ces termes à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des termes moins un; Je dis que la difference de ces puissances d'un degré égal à l'exposant, sera égal au produit continuel des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, continuez jusqu'à l'exposant de la puissance inclusive-ment, & multiplié par une puissance semblable de la difference des termes.

D E M O N S T R A T I O N.

Si l'on prend trois termes $a, a+b, a+2b$; la seconde difference des quarez fera par le Theoreme I. $=2bb$. Or $2bb=1 \times 2 \times b^2$. Si l'on prend quatre termes $a, a+b, a+2b, a+3b$; la troisième difference des cubes fera par le Theoreme II. $=6b^3$. Or $6b^3=1 \times 2 \times 3 \times b^3$. Si l'on prend cinq termes $a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b$; la quatrième difference des quatrièmes puissances fera par le Theoreme III. $=24b^4$. Or $24b^4=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times b^4$, & ainsi de suite. Donc si l'on prend autant de termes qu'on voudra en progression Arithmetique, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE I.

Rien n'est d'un si grand usage dans le calcul, que des Tables amples & exactes des quarez & des cubes dans leur suite naturelle depuis l'unité.

In tenui labor, at tenuis non gloria.

Plusieurs Auteurs en ont donné. Les plus amples que je connoisse sont celles de Job Ludolff pour les quarez jusqu'à 100000, & celles de pour les cubes jusqu'à 12000. Mais ces Tables, & sur tout celles des cubes, ont un très-grand défaut: c'est qu'il faut s'en rapporter aveuglément à l'habileté du Calculateur & à l'exactitude de l'Imprimeur: au lieu que par le moyen des différences pour les quarez, & des différences de différences pour les cubes, on pourroit former des Tables qui porteroient avec elles leur preuve démonstrative. C'est ainsi que sont construites les grandes Tables Trigonometriques de Pitiscus sur un rayon de 100000.00000.00000, & les logarithmiques de Briggs. Voici un modèle de construction pour les Tables des quarez & des cubes par la seule addition. On pourroit en construire de même pour les autres puissances plus élevées; mais cela ne seroit presque d'aucun usage, & coûteroit trop de travail & de dépense.

TABLE DES QUARREZ
& des Cubes.

Raci- nes.	Quarrez & diff. I.	Cubes & diff. I.	Diff. II. & III.
1	1 3	1 7	7=1+6
2	4 5	8 19	12=6+6 19
3	9 7	27 37	18=7+6 37
4	16 9	64 61	24=12+6 61
5	25 11	125 91	30 91
6	36 13	216 127	36 127
7	49 15	343 169	42 169
8	64 17	512 217	48 217
9	81 19	729 271	54 271
10	100 21	1000 331	60 331
11	121 23	1331 397	66 397
12	144 25	1728 469	72 469
13 &c.	169 &c.	2197 &c.	78 &c.

Il est aussi difficile, pour ne pas dire impossible, de se tromper en composant ces Tables par une simple addition suivant cette methode, & il est encore aussi difficile qu'il se glisse dans l'impression quelque erreur dont on ne s'apperçoive pas sur le champ; qu'il est difficile au contraire d'éviter les erreurs de calcul & d'impression dans les Tables supputées à l'ordinaire: ce qui fait qu'on est

toûjours dans l'incertitude quand on s'en fert. C'est un ouvrage à entreprendre sous les auspices & par ordre de l'Auguste Protecteur des Arts & des Sciences.

On sentira mieux l'esprit de la methode dans les exemples suivans.

Exemples de la formation des Quarrez & des Cubes d'une progression Arithmetique donnée, comme 3, 10, 17, 24, 31, &c.

Raci- nes.	Quarrez & diff. I.	Diff. I. & II.	Raci- nes.	Cubes & diff. I.	Diff. I. & II.	Diff. II. & III.
3	9 91	91	3	27 973	973	
10	100 189	98 189	10	1000 3913	2940 3913	2940 2058
17	289 287	98 287	17	4913 8911	4998 8911	4998 2058
24	576 385	98 385	24	13824 15967	7056 15967	7056 2058
31	961 483	98 483	31	29791 25081	9114 25081	9114 2058
38	1444 581	98 581	38	54872 36253	11172 36253	11172 &c.
45 &c.	2025 &c.	&c.	45 &c.	91125 &c.	&c.	

Dans les quarrez naturels les premieres differences, 3, 5, 7, 9, &c. sont si simples, qu'on n'a pas besoin de les trouver par l'addition continuelle de la seconde difference toûjours égale 2; & de même dans les cubes naturels les secondes differences 12, 18, 24, 30, 36, &c. n'ont pas besoin d'être trouvées par l'addition continuelle de la troisième difference toûjours égale 6. Mais dans ces deux exemples on ne neglige rien, & tout est formé regulierement par addition, excepté la suite des racines, 3, 10, 17, 24, &c. & on devroit aussi la former par addition conti-

288 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 nuelle, si la difference étoit beaucoup plus grande, com-
 me 27, 66, 105, 144, &c.

R E M A R Q U E I I.

Il y a long-tems qu'on sçait que la seconde difference
 des quarrez naturels est 2, & la troisiéme difference des
 cubes est 6: Mais personne, que je sçache, n'a trouvé ni
 démontré tout le reste depuis le Theoreme II.

Ce qui suit est entierement neuf.

T H E O R E M E V I.

Soit l'équation quelconque du second degré,

$$\pm axx \pm bx = c.$$

Je dis que si l'on donne à x la suite des valeurs d'une
 progression Arithmetique quelconque, comme $d, d+e, d+2e, d+3e, \&c.$ les secondes differences des derniers
 termes ou homogenes de comparaison representez par c ,
 seront toutes égales à $2ae$, c'est-à-dire au double du
 quarré de la difference des termes e multiplié par le coëf-
 ficient de la haute puissance a .

D E M O N S T R A T I O N.

Soit 1°. $x = d.$

Donc $\pm axx \pm bx = \pm add \pm bd = c.$

Soit 2°. $x = d + e.$

Donc $\pm axx \pm bx = \pm add + 2ade + aee + bd + be = c.$

Soit 3°. $x = d + 2e.$

Donc $\pm axx \pm bx = \pm add + 4ade + 4aee + 2bd + 2be = c.$

Les premieres differences sont $\pm 2ade + aee + be$

$$\pm 2ade + 3aee + be.$$

Donc la seconde difference est $2ae$. Ce qu'il falloit dé-
 montrer. Et supposant $d+e=f$, on aura $d+2e=f+e.$
 $d+3e=f+2e.$ Et la démonstration sera la même pour
 les trois valeurs $f, f+e, f+2e.$ que pour $d, d+e, d+2e.$
 & ainsi de suite à l'infini. Donc, &c.

C O R O L L A I R E I.

Si $a = 1$, c'est-à-dire si l'équation est préparée en fai-
 sant

fant évanouir le coefficient de la haute puissance pour avoir seulement $\pm xx \pm bx = c$, la seconde difference continuelle & toujours égale sera $2ee = 2aee$.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose encore $e = 1$, c'est-à-dire si l'on prend pour les valeurs d' x ces nombres $d, d+1, d+2, \&c.$ cette seconde difference sera $2 = 2ee$.

COROLLAIRE III.

On pourra former par addition la suite de tous les homogenes de comparaison, & par consequent la suite de toutes les équations du second degré arithmetiquement semblables. Par exemple.

Soit l'équation proposée $7xx + 5x = c$. Si je prends pour x les termes d'une progression Arithmetique donnée, comme 3, 11, 19, 27, 35, &c. dont la difference continuelle est 8, j'auray suivant la formule du Theoreme $a = 7$ & $8 = e$, & la seconde difference continuelle toujours égale des derniers termes c , ou des homogenes de comparaison sera $2aee$, c'est-à-dire $2 \times 7 \times 64 = 896$.

	Diff. I.	Diff. II.
Si $x = 3$, donc $7xx + 5x = 78$		
Si $x = 11$, donc $7xx + 5x = 902$	824	
Si $x = 19$, donc $7xx + 5x = 2622$	1720	896
Si $x = 27$, donc $7xx + 5x = 5238$	2616	896
Si $x = 35$, donc $7xx + 5x = 8750$	3512	896
&c.	&c.	&c.

Soit 2°. l'équation proposée $xx + 5x = c$, & soient encore les valeurs d' x , 3, 11, 19, 27, 35, &c.

	Diff. I.	Diff. II.
on aura par la substitution $xx + 5x = 24$		
$= 176$	152	
$= 456$	280	128
$= 864$	408	128
$= 1400$	536	128
&c.	&c.	&c.

La seconde difference continue, & toujours égale des homogenes de comparaison, est $128 = 2 \times 64 = 2ee$.

Soit 3°. la même équation $xx + 5x = c$, & soient les valeurs d' x , 1, 2, 3, 4, 5, &c.

on aura par la substitution

	Diff. I.	Diff. II.
$xx + 5x = 6$		
$= 14$	8	
$= 24$	10	2
$= 36$	12	2
$= 50$	14	2
&c.	&c.	&c.

La seconde difference continue & toujours égale est $2 = 2ee$.

Il est donc évident que dans toute équation du second degré où il n'y a qu'une inconnue, sans fractions & sans incommensurables, on pourra former la suite de tous les homogenes de comparaison par une simple addition.

Si l'équation est sous cette forme $xx + ax = b$, supposez $x = 1$ & $x = 2$, & vous aurez pour homogenes de comparaison $a + 1$ & $2a + 4$, dont la difference est $a + 3$, & comme la seconde difference est toujours 2, il n'est pas nécessaire de faire une troisième supposition $x = 3$, & la suite des homogenes de comparaison se trouvera par addition, de même que la suite des quarez naturels.

	Diff. I.	Diff. II.
$b = a + 1$		
$= 2a + 4$	$a + 3$	
$= 3a + 9$	$a + 5$	2
$= 4a + 16$	$a + 7$	2
$= 5a + 25$	$a + 9$	2
&c.	&c.	&c.

Si l'équation est sous cette forme $ax - xx = b$, c'est la même methode, & on trouvera

	Diff. I.	Diff. II.
$b = a - 1$		
$= 2a - 4$	$a - 3$	
$= 3a - 9$	$a - 5$	2
$= 4a - 16$	$a - 7$	2
$= 5a - 25$	$a - 9$	2
&c.	&c.	&c.

Enfin si elle est sous cette forme $xx - ax = b$, il est évident que x est toujours plus grand que a . Ainsi supposant $x = a + 1 = a + 2$, on aura pour homogene de comparaison $b = a + 1$, comme dans le premier cas.

$$\begin{aligned} &= 2a + 4 \\ &= 3a + 2 \\ &= 4a + 16 \\ &= 5a + 25 \end{aligned}$$

Exemples en nombres.

Soit l'équation proposée $7xx + 307x = 10764$.

Je suppose $x = 1 = 2 = 3$.

J'ay $7xx + 307x = 314$

$7xx + 307x = 642$

$7xx + 307x = 984$

&c. &c. &c.

$7xx + 307x = 17064$

<i>Diff. I.</i>	<i>Diff. II.</i>
-----------------	------------------

328	
-----	--

342	14
-----	----

&c.	&c.
-----	-----

Les secondes différences toujours égales des homogenes de comparaison sont 14, dont l'addition continuelle forme la suite des différences premières 328, 342, 356, 370, &c. & l'addition des différences premières aux homogenes précédens forment la suite de tous les homogenes 314, 642, 984, &c. & l'homogene donné se trouvera le 23^{me}, & par conséquent $x = 23$.

Mais si l'homogene donné ne se fût pas trouvé dans cette suite, la valeur d' x auroit été irrationnelle; & sa valeur auroit été entre les deux racines qui auroient formé les deux homogenes prochains, l'un plus grand & l'autre plus petit que l'homogene donné.

Soit encore l'équation proposée $xx + 307x = 7590$.

Supposant $x = 1 = 2 = 3$, &c.

on aura $xx + 307x = 308$

$= 618$

$= 930$

$= 1244$

&c.

$= 7590$

<i>Diff. I.</i>	
-----------------	--

310	
-----	--

312	
-----	--

314	
-----	--

&c.	
-----	--

$x = 23$.

THEOREME VII.

Soit l'équation quelconque du troisieme degré,

$$\pm ax^3 \pm bxx \pm cx = d.$$

Je dis que si l'on donne à x la suite des valeurs d'une progression Arithmetique quelconque $e, e+f, e+2f, e+3f, e+4f$ &c. les troisiemes differences des homogenes de comparaison representez par d , seront toutes égales à $6af^3$, c'est-à-dire à six fois le cube de la difference des termes f multiplié par le coefficient de la haute puissance a .

DEMONSTRATION.

Soit 1°. $x = e$.

$$\text{Donc } \pm ax^3 \pm bxx \pm cx = \pm ae^3 \pm bee \pm ce = d.$$

Soit 2°. $x = e + f$.

$$\text{Donc } \pm ax^3 \pm bxx \pm cx = \pm ae^3 \pm 3aeef \pm 3aeff \pm af^3 \\ \pm bee \pm 2bef \pm bff \\ \pm ce \pm cf \quad \left. \vphantom{\pm ae^3} \right\} d$$

Soit 3°. $x = e + 2f$.

$$\text{Donc } \pm ax^3 \pm bxx \pm cx = \pm ae^3 \pm 6aeef \pm 12aeff \pm 8af^3 \\ \pm bee \pm 4bef \pm 4bff \\ \pm ce \pm 2cf \quad \left. \vphantom{\pm ae^3} \right\} d$$

Soit 4°. $x = e + 3f$.

$$\text{Donc } \pm ax^3 \pm bxx \pm cx = \pm ae^3 \pm 9aeef \pm 27aeff \pm 27af^3 \\ \pm bee \pm 6bef \pm 9bff \\ \pm ce \pm 3cf \quad \left. \vphantom{\pm ae^3} \right\} d$$

Les premieres differences sont,

$$\pm 3aeef \pm 3aeff \pm af^3 \\ \pm 2bef \pm bff \\ \pm cf$$

$$\pm 3aeef \pm 9aeff \pm 7af^3 \\ \pm 2bef \pm 3bff \\ \pm cf$$

$$\pm 3aeef \pm 15aeff \pm 19af^3 \\ \pm 2bef \pm 5bff \\ \pm cf$$

Les secondes differences sont,

$$\begin{array}{l} \pm 6aeff \pm 6af^2 \\ \quad \pm 2bff \\ \pm 6aeff \pm 12af^2 \\ \quad \pm 2bff \end{array}$$

Enfin la troisieme difference est $6af^3$. Ce qu'il falloit démontrer. Et supposant $e+f=g$, on aura $e+2f=g+f$. $e+3f=g+2f$. $e+4f=g+3f$; & il est évident que la démonstration sera la même pour les quatre valeurs g . $g+f$. $g+2f$. $g+3f$, que pour les quatre e . $e+f$. $e+2f$. $e+3f$, & ainsi de suite à l'infini. Donc les troisiemes differences seront toutes $6af^3$.

COROLLAIRE GENERAL.

Dans quelque équation que ce soit, les differences de l'homogene d'un degré égal à celui de l'exposant de la haute puissance, sont toutes égales entr'elles & au produit continuel du coefficient de la haute puissance multiplié continuellement par la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. jusques & compris l'exposant, & par la puissance homogene de la difference des termes de la progression Arithmetique, qui ont servi de racines à former les homogenes.

On peut supposer tel ou tels termes qu'on voudra évanouïs, les signes $+$ & $-$ combinez à discretion, & les coefficients en entiers ou en fraction, rationaux ou irrationaux.

II. COROLLAIRE GENERAL.

On pourra former par addition simple la suite de tous les homogenes des équations semblables. Il suffit pour cela de supposer dans les équations du second degré l'inconnue $= 1 = 2 = 3$. Dans les équations du troisieme degré, il suffit de supposer cette inconnue $= 1 = 2 = 3 = 4$. Dans celles du quatrieme $= 1 = 2 = 3 = 4 = 5$, & ainsi de suite. Car par l'addition continuelle des dernieres differences toujous égales, on formera la suite des differen-

ces précédentes; & par l'addition de celles-cy on formera les ante-penultièmes, & ainsi de suite en retrogradant jusqu'aux homogenes de comparaison.

III. COROLLAIRE GENERAL.

On pourra donc résoudre par la seule addition toute équation proposée; ce qui est un véritable paradoxe.

R E M A R Q U E I.

Il est évident que trouvant par addition simple la suite de tous les homogenes de comparaison, si l'homogene donné se trouve dans cette suite, la question est résolue; puisque la valeur supposée ou correspondante qui a formé cet homogene est évidemment une des racines cherchées: après quoy l'on peut continuer d'operer de même sur l'équation abaissée d'un ou de plusieurs degrez pour avoir les autres racines. Mais si l'homogene donné se trouve entre deux homogenes prochains, la racine cherchée est irrationnelle, & sa valeur est connue à moins d'une unité près, puisqu'elle est entre deux valeurs qui ne diffèrent que d'une unité, & qui ont formé les deux homogenes prochains, l'un plus grand & l'autre plus petit, & c'est tout ce qu'on peut souhaiter. Je suppose toujours l'équation préparée de maniere, qu'il n'y ait qu'une inconnue, sans fractions & sans incommensurables, qui sont les préparations ordinaires, & il n'est pas nécessaire de faire évanouir aucun terme moyen, ni le coefficient de la haute puissance.

R E M A R Q U E II.

En supposant $x=1=2=3=4$, &c. l'homogene peut venir négatif; ce qui marque seulement que x est plus grand que les nombres supposez. Mais si supposant $x=1$ on trouve un homogene plus grand que le donné, x est une fraction irrationnelle moindre que l'unité; & si l'on veut en approcher à l'infini, il n'y a qu'à supposer une autre équation multiple & geometriquement semblable.

E X E M P L E S.

Soit l'équation proposée $xx - 20x = 300$.

Si je suppose $x = 1 = 2 = 3 = 4, \&c.$	<i>Diff. I.</i>	<i>Diff. II.</i>
J'auray $xx - 20x = -19$.	.
$= -36$	17	.
$= -51$	15	2
$= -64$	13	2
$\&c.$	$\&c.$	$\&c.$

On voit aisément par-là que la plus petite valeur qu'on puisse supposer pour avoir un homogène $= 0$, c'est $x = 20$, & par conséquent $x = 21$ donnera le premier homogène positif tel que je le suppose toujours, & il peut & doit toujours l'être; & s'il ne l'étoit pas dans une équation proposée, il seroit aisé de le rendre positif en changeant tous les signes des termes affectés de l'inconnue. Enfin si par la nature de l'équation les racines sont toutes négatives, on les rendra positives par le changement des signes suivant les règles ordinaires. •

Je reviens à l'exemple ci-dessus $xx - 20x = 300$, où j'ay supposé $x = 1 = 2 = 3, \&c.$

Je vois par les différences premières 17, 15, 13, &c. qui vont toujours en diminuant de 2, qu'au neuf & dixième termes cette différence sera 1, après quoy les homogènes négatifs vont en diminuant dans un sens contraire jusqu'à zero, comme on voit cy-dessous, & ensuite ils sont tous positifs.

$x = 0$, donc $xx - 20x = 0$
$x = 1$, donc $xx - 20x = -19$
$x = 2$, donc $xx - 20x = -36$
$\&c.$
$= -51$
$= -64$
$= -75$
$= -84$
$= -91$
$= -96$
$= -99$

$$x = 10, \text{ donc } xx - 20x = -100$$

$$x = 11, \text{ donc } xx - 20x = -99$$

$$\&c. \qquad \qquad \qquad = -96$$

$$= -91$$

&c.

$$x = 20, \text{ donc } xx - 20x = 0$$

$$x = 21, \text{ donc } xx - 20x = 21$$

$$x = 22, \text{ donc } xx - 20x = 44$$

$$x = 23, \text{ donc } xx - 20x = 69$$

&c.

= &c.

Cette observation, qui n'est que curieuse dans cet exemple, est absolument nécessaire dans d'autres, où la haute puissance est fort élevée, où il y a plusieurs termes moyens affectez des signes + & - avec de grands nombres pour coefficients; & si le premier homogene positif trouvé est plus grand que l'homogene donné, la racine est irrationnelle, & on pourra en approcher à l'infini par les équations geometriquement semblables. Ainsi si l'équation donnée eut été $xx - 20 = 18$, on seroit assuré que la racine est irrationnelle entre 20 & 21, & il n'y auroit qu'à supposer,

$$xx - 200x = 1800$$

$$\text{ou } xx - 2000x = 180000$$

&c.

ou telle autre équation qu'on voudroit geometriquement semblable. Il y a pourtant un choix à faire indépendamment de la progression décuple des nombres qui paroît la plus commode, mais qui n'approche pas le plus promptement qu'il soit possible. C'est ce que j'ay fait voir dans mon Traité de l'Extraction & de l'Approximation des racines. On trouvera donc toujours aisément la plus petite valeur d' x , qui donnera un homogene positif. Car si l'homogene negatif va en diminuant, on verra par les différences à quel terme il sera positif; & s'il va en augmentant, il faut nécessairement qu'il diminue en sens contraire avant que de devenir positif. Ainsi après deux ou trois substitutions dans les équations du second degré, après

trois

trois ou quatre substitutions dans les équations du troisième, & ainsi de suite en divisant par les dernières différences égales les différences précédentes, le quotient dans le second degré, ajouté à l'unité, donnera la valeur approchée en entiers, qui formera le plus grand homogène négatif, & par conséquent le double donnera la valeur approchée pour former l'homogène positif, du moins à une unité près. Dans les degrés plus élevés, on trouvera de même par la différence toujours égale le terme où la différence précédente doit finir, & par celle-ci le terme de la précédente, en retrogradant de même jusqu'à l'homogène.

Je sçai que dans chaque cas particulier on peut donner des règles abrégées pour trouver cette première & plus petite valeur de x qui donne un homogène positif; ainsi dans l'équation $xx - ax = b$ il n'y a qu'à prendre d'abord $x = a + 1$. Mais il s'agit ici de trouver une méthode qui soit en même temps très-simple & très-générale, & si l'on avoit par exemple cette équation,

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cxx - dx = e.$$

il ne seroit pas aisé de trouver d'une manière générale la plus petite valeur de x qui donnât e positif, même en y appliquant la méthode de *maximis & minimis*; au lieu qu'en supposant $x = 1 = 2 = 3$, &c. les dernières différences seront toujours 2 dans le second degré, 6 dans le troisième, 24 dans le quatrième, 120 dans le cinquième, &c. & par-là on trouvera aisément ce qu'on cherche.

Lorsqu'on suppose $x = 1$, la somme des coefficients positifs moins la somme des coefficients négatifs donnera l'homogène de comparaison correspondant.

Lorsqu'on suppose $x = 2$, il faut écrire 2 multiplicateur sous le coefficient des x , 4 sous le coefficient des xx , 8 sous le coefficient des x^3 , 16 sous le coefficient des x^4 , & ainsi de suite, la somme des produits positifs diminuée de la somme des produits négatifs donnera l'homogène correspondant.

Lorsqu'on suppose $x = 3$, il faut écrire 3 sous le coeffi-

cient des x , 9 sous le coefficient des xx , 27 sous le coefficient des x^3 , & ainsi de suite.

Rien n'empêche qu'on ne prenne au lieu des nombres 1, 2, 3, 4, &c. les nombres 10, 20, 30, 40, &c. ou 100, 200, 300, &c. ou 1000, 2000, 3000, &c. si l'on juge que ceux-ci donneront plutôt des homogenes positifs & approchans par excès ou par défauts de l'homogene donné; la substitution en sera aussi aisée que celles des nombres simples 1, 2, 3, &c. En mot, il n'importe quels nombres on prenne en progression Arithmetique, la methode peut toujours s'y appliquer. Mais dès qu'on a trouvé des homogenes positifs, il faut revenir à la progression Arithmetique, en augmentant ou en diminuant les valeurs d' x , selon que l'homogene trouvé est plus petit ou plus grand que l'homogene donné.

Enfin, si augmentant continuellement les valeurs d' x , l'homogene après avoir augmenté diminue, & que dans la plus grande augmentation il soit encore plus petit que l'homogene donné, c'est une preuve que l'équation est impossible, & que toutes ces racines sont imaginaires. Par exemple, soit l'équation proposée $xx + 20x = 120$, supposant $x = 1 = 2 = 3$, &c. on trouve la suite des homogenes 19, 36, 51, 64, 75, 84, 91, 96, 99, 100, 99, 96, 91, &c. 19, 0, & ensuite les homogenes sont négatifs à l'infini; de sorte que le plus grand de tous est 100. Or le donné est 120, l'équation est donc impossible, & toutes les racines sont imaginaires. Quoique cette regle soit très-simple & très-generale, elle a besoin dans la pratique d'être abrégée par la Regle suivante.

REGLE GENERALE

Pour la résolution des équations.

Je suppose l'équation préparée à l'ordinaire, en sorte qu'elle n'ait qu'une inconnue délivrée des fractions & des incommensurables, & pour plus grande facilité le coefficient de la haute puissance réduit à l'unité, sans qu'il soit

nécessaire de faire évanouir aucun terme moyen. Prenez pour valeurs de l'inconnuë les deux nombres entiers a & $a+1$. (Je donneray dans la suite les regles nécessaires pour faire cette supposition la plus juste qu'il soit possible par rapport à chaque espece d'équation) enforte que les homogenes de comparaison soit positifs; & substituant ces deux valeurs dans l'équation, vous aurez deux homogenes. Si l'un des deux se trouve égal à l'homogene donné, ou que l'un se trouve plus grand & l'autre plus petit, l'équation est résoluë; car dans le premier cas $x = a$ ou $a+1$, & dans le second une des valeurs est irrationnelle entre a & $a+1$, & on peut en approcher à l'infini par le moyen des équations geometriquement semblables. On peut aussi dans toute équation où il y a quelque racine réelle negative, la rendre positive en augmentant sa valeur, enforte que l'homogene de comparaison soit aussi positif, & qu'il n'y ait qu'une racine à chercher. C'est la forme la plus commode pour le calcul. Les équations dont les racines sont toutes imaginaires ne font d'aucun usage.

Si l'homogene donné se trouve plus grand ou plus petit que chacun des deux homogenes trouvez, ce qui est le cas le plus ordinaire: Prenez 1°. La difference des deux homogenes trouvez. 2°. La difference de l'homogene donné à l'homogene trouvé prochainement plus grand ou plus petit. 3°. Divisez cette dernière difference par la première, & ajoutez le quotient au nombre a s'il est plus petit, ou bien ôtez ce quotient d' a s'il est plus grand que la racine cherchée, & la somme dans le premier cas, & la difference dans le second donneront une seconde valeur approchée, laquelle étant substituée donnera un nouvel homogene, sur lequel & sur le donné & le prochainement plus grand ou plus petit, on continuëra d'operer de même en faisant cette Analogie, qui est sous-entenduë dans la première operation. *Si tant de difference entre deux homogenes vient de tant de difference entre les racines qui les ont formez, de combien viendra la difference entre l'homogene donné & le trouvé prochainement plus grand ou plus petit? Le*

quotient étant ajouté ou soustrait selon que la racine supposée a produit un homogène plus petit ou plus grand que l'homogène donné, donnera une nouvelle valeur sur laquelle on continuera d'opérer de même & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une racine exacte, ou deux racines qui ne diffèrent que d'une unité, & alors l'équation sera résolue.

Au lieu d' a & d' $a \pm 1$, on peut supposer a & $a \pm b$, & chaque résolution particulière d'une équation littérale servira de formule, & de règle générale pour la résolution de toute équation semblable. J'en feray l'application au fameux cas irréductible du troisième degré.

Cette méthode comprend directement la résolution de toutes les Equations déterminées, qui ont pour racines des Nombres entiers, & indirectement toutes celles qui n'ont pour racines que des fractions, ou des Nombres irrationaux; car il n'y a qu'à faire évanouir suivant les Règles connues & ordinaires le Coefficient du premier Terme, & les Coefficients irrationaux ou en fraction.

M A N O M E T R E

OU

Machine pour trouver le rapport des raretés ou rarefactions de l'air naturel d'un même lieu en différens tems, ou de différens lieux en un même ou en différens tems, &c.

P A R M. V A R I G N O N.

1705.
14. No
vembre.

DAns les Mémoires du 15. Decembre 1693, j'ay démontré une Méthode générale pour connoître le rapport de l'air rareté dans la machine du vuide à l'air naturel, c'est-à-dire, le rapport de la masse de cette air rareté à celle d'un pareil volume de l'air extérieur du lieu où se

Méthodes nouvelles pour former et résoudre toutes les équations - M. DE LAGNY
Académie royale des sciences - Année 1705

MATHÉMATIQUE
