Nouvelles constructions et considérations sur les carrés magiques, avec les démonstrations

Philippe de La Hire

On dit à la campagne que ces écumes sont un présage de beau-tems : mais c'est qu'elles n'y paroissent que quand le tems est beau, le mauvais tems les détruit.

NOUVELLES CONSTRUCTIONS ET CONSIDERATIONS SUR LES QUARRÉS MAGIQUES AVEC LES DEMONSTRATIONS.

PAR M. DE LA HIRE

J'Ay communiqué autrefois à l'Academie quelques constructions que j'avois trouvées pour les Quarrés Magiques, & principalement pour les pairs ; & je m'étois contenté alors de donner des regles simples & faciles à pratiquer, pour ranger les nombres d'un Quarré naturel & en progression arithmetique, dans un ordre qu'on appelle Magique, ensorte que toutes les bandes tant horizontales que verticales & diagonales fissent une même somme. J'avois aussi trouvé dans ce tems-là d'autres nombres, qui étant rangés dans un certain ordre, avoient quelque rapport aux Quarrés Magiques. Mais à l'occasion de ce qui a été publié depuis peu sur ces sortes de Quarrés, j'ay repris ce travail ; & j'ay trouvé enfin une methode generale qui comprend toutes les Constructions differentes qu'on a données jusqu'icy, lesquelles n'en sont que des cas particuliers, & j'en rapporte la demonstration qui est très-simple. Je ne parleray presentement que des Quarrés dont la Racine est impaire, réservant les autres pour un autre tems. 1705. 13. Juin.

PROPOSITION I.

Soit un Quarré de cellules dont la racine est impaire, comme sept. Et soit proposé sept nombres tels qu'on voudra & dans quel ordre on voudra, lesquels il faut placer dans les cellules de ce Quarré, ensorte qu'ils fassent une même somme dans toutes les bandes horizontales, verticales & diagonales, & qu'ils ne soient point repetés dans aucune de ces bandes.

Soient les nombres pris à volonré, & dans quelque ordre que soit 10, 5, 3, 9, 13, 8, 11.

Je place d'abord ces nombres dans la bande des cellules horizontale & superieure, en commençant à gauche & en allant vers la droite, comme on les voit dans la figure du quarré.

Je mets ensuite dans la séconde bande horizontale en descendant les mêmes nombres & dans le même ordre; mais il faut que le premier de cette bande soit le second de l'ordre proposé aprés le premier de la bande superieure, & ce sera 3 qui est le troisiéme de l'ordre, & continuant ensuite à remplir cette bande avec les nombres dans l'ordre proposé, en recommençant au premier quand on est venu au dernier.

On fera la même chose pour la troisiéme bande horizontale en descendant, en commençant au second nombre de l'ordre aprés celui qui a commencé la bande immediatement superieure, & continuant ensuite à placer tous les nombres de l'ordre.

10	5	3	9	13	8	11
3	9	13	8	11	10	5
13	8	11	01	5	3	9
11	10	5	3	9	13	8
5	3	9	13	8	11	10
9	13	8	11	10	5	3
8	11	10	5	3	9	13

Par ce moyen on remplira toutes les cellules du Quarré avec les nombres proposés, ensorte que les mêmes nombres ne se trouveront point repetés deux fois dans aucune des bandes horizontales, verticales, ni diagonales, & par consequent la somme de tous ces nombres dans toutes ces bandes sera égale, laquelle est icy 59.

DEMONSTRATION.

1°. Il est évident que toutes les bandes horizontales auront chacune tous les nombres de l'ordre proposé; mais les

les verticales les auront auſſi, & ils n'y ſeront point repetés. Car par la conſtruction dans chaque bande verticale, les nombres y ſeront toûjours les deuziémes de ſuite dans ceux de l'ordre; & puiſque le nombre de l'ordre eſt impair, il ſenſuit que le nombre 2 ne pouvant pas diviſer exactement celui de l'ordre, les ſept nombres de l'ordre doivent s'y trouver.

2°. Maintenant pour ce qui eſt des bandes diagonales, ſi l'on conſidere d'abord celle qui va en deſcendant de gauche à droite & qui eſt icy 10, 13, où les nombres de ſuite ſont 10, 9, 11, &c. on voit que puiſque le nombre qui eſt immediatement au-deſſous d'un autre dans la même bande verticale, eſt le ſecond aprés celui qui eſt au-deſſus, comme 3 au-deſſous de 10, & que 9 qui eſt dans la même horizontale que 3, ſuit immediatement 3 dans l'ordre propoſé, le nombre 9 qui ſera au-deſſous de 10 ſuivant la diagonale, ſera le troiſiéme aprés 10 dans l'ordre propoſé.

Ce ſera la même démonſtration pour le nombre 11 qui ſuit 9; car le nombre 8 qui eſt au-deſſous de 9, eſt le ſecond aprés 9 dans l'ordre propoſé, & le nombre 11 y ſuit le nombre 8; donc le nombre 11 ſera le troiſiéme aprés 9. Mais comme ce ſera la même choſe pour tous les autres, & que la racine du Quarré propoſé eſt un nombre non diviſible par trois, il s'enſuit que tous les nombres de la bande diagonale ſeront ceux de l'ordre propoſé.

COROLLAIRE

Pour cet Article de la Démonſtration.

Il s'enſuit de-là que ſi la racine propoſée impaire étoit un multiple de 3, comme 9, 15, 21, &c. les nombres de cette bande reviendroient les mêmes aprés 3, 5, 7, &c. qui ſont les quotiens de la diviſion de la racine par 3; & par conſequent cette bande ſeroit fauſſe, à moins que ces nombres 3, 5, 7, &c. repetés trois fois dans la bande ne fuſſent égaux au tiers de la ſomme des nombres de l'ordre, 3°. Il reſte encore à faire la démonſtration pour l'autre bande diagonale 11, 8 qui deſcend de droite à gauche. Nous avons déja dit que le nombre 10 qui eſt au-deſſous de 8, eſt le ſecond aprés 8 dans l'ordre propoſé; mais le nombre 11, eſt le premier après 8 dans le même ordre; donc le nombre 10 eſt le premier aprés 11 dans l'ordre, lequel nombre 10 ſuit le nombre 11 dans la diagonale. Ce ſera la même choſe pour le nombre 5 qui ſuit le nombre 10 en deſcendant, & pour tous les autres; & par conſequent tous les nombres de cette bande en deſcendant depuis 11 juſqu'à 8, ſeront de ſuite ceux de l'ordre propoſé.

COROLLAIRE GENERAL.

Il s'enſuit par cette conſtruction que toutes les bandes paralleles aux deux diagonales 10, 13 & 11, 8, auront tous leurs nombres dans le même ordre que celles auſquelles elles ſont paralleles; & de plus que ſi l'on joint enſemble les paralleles correſpondantes d'un côté & d'autre de la diagonale, comme les bandes paralleles 9, 11 & 10, 3, elles auront tous leurs nombres qui ſont égaux à la racine, dans le même ordre que ceux des diagonales à qui elles ſont paralleles, & ces paralleles correſpondantes ſont éloignées l'une de l'autre du nombre de cellules égal à la racine propoſée, & icy elles ſont les ſeptiémes; & leur ſomme ſera auſſi égale à celle des nombres de l'ordre, ce qui eſt une proprieté particuliere de ces Quarrés.

PROPOSITION II.

On pourra auſſi diſpoſer ces nombres d'une autre maniere dans les cellules du Quarré, le même ordre étant donné dans la premiere bande horizontale.

10	5	3	9	13	8	11
9	13	8	11	10	5	3
11	10	5	3	9	13	8
3	9	13	8	11	10	5
8	11	10	5	3	9	13
5	3	9	13	8	11	10
13	8	11	10	5	3	9

On mettra à la premiere cellule de la ſeconde bande horizontale, le troiſiéme nombre 9 de l'ordre propoſé après le premier 10 de la bande ſuperieure, & l'on remplira les autres cellules de cette bande dans le même ordre que le proposé, comme on voit dans cette Figure. Pour la troisiéme bande ce sera le nombre 11 qui est le troisiéme de l'ordre aprés le superieur 9, & ainsi de suite; & les cellules du Quarré seront remplies comme il faut.

DEMONSTRATION

1°. La démonstration de cette operation est la même que celle de la proposition précedente; car il est évident que tous les nombres de l'ordre se trouveront dans chacune des bandes horizontales, & par consequent ils n'y seront pas repetés deux fois. Ce sera aussi la même chose pour les bandes verticales, pourvû neanmoins que la racine du Quarré proposé ne soit pas divisible par 3; car si elle est divisible par 3, les mêmes nombres reviendront dans les bandes verticales aprés une suite de nombres égaux au quotient de la division de la racine par 3, & ces nombres s'y trouveront trois fois, comme si la racine étoit 15, ils y reviendroient de 5 en 5, & trois fois dans chaque bande. Si elle étoit 21, ils y reviendroient de sept en sept, & ils y seroient repetés trois fois, ce qui est évident, puisqu'on prendroit toûjours dans la premiere bande verticale le troisiéme nombre de l'ordre proposé aprés celui qui est immediatement au-dessus.

Ils s'ensuivra aussi la même chose dans toutes les autres bandes verticales où les nombres seront repetés de la même maniere, & par consequent les sommes des nombrees de toutes les bandes verticales ne pourront jamais être égales entr'elles, si ce n'est dans quelques cas particuliers, à cause que dans ces bandes il y aura differens nombres repetés.

2°. Pour la bande diagonale qui descend de gauche à droite, comme 10, 9, les nombres y seront les quatriémes de suite aprés le premier, qui est un de plus que celui qu'on a pris pour recommencer les horizontales. C'est pourquoi la racine proposée étant impaire, & ne pouvant être divisée par 4, tous les nombres de cette diagonale seront ceux de l'ordre pris de quatre en quatre dans l'ordre proposé, & cela seroit même ainsi quand les nombres seroient repetés dans les bandes verticales.

3°. Pour l'autre diagonale 11, 13, il s'ensuit, comme on a dit dans l'autre Proposition, que les nombres y seront les seconds de suite dans l'ordre aprés le premier de la bande; & comme la racine est impaire qui ne peut être divisée par 2, tous les nombres de cette bande seront differens & seront ceux de l'ordre.

COROLLAIRE.

Ce que nous avons dit des bandes paralleles aux diagonales dans la premiere Proposition, se doit entendre de même dans celle-cy.

PROPOSITION III.

On peut de même prendre quel nombre on voudra dans l'ordre aprés le premier pour recommencer la bande horizontale suivante : mais on remarquera en general que les complémens jusqu'à la racine des nombres que l'on prend, comme si l'on avoit pris le quatriême aprés le premier dans la racine 7, dont le complément seroit 3, les bandes ayant été disposées comme on a fait jusqu'icy par le quatriéme, seront ceux de la même disposition, comme si l'on avoit commencé par la droite, & qu'on eût été vers la gauche, en prenant aussi les troisiémes nombres de l'ordre, mais en allant dans le sens contraire où l'on a été.

Tout cecy est évident par la construction, & par ce qu'on a deja démontré dans les deux précedentes Propositions. Mais on remarquera aussi que si la racine impaire est divisible par quelque nombre, & qu'on prenne dans l'ordre celui qui repond au diviseur, comme dans la racine 15 si l'on prend les cinquiémes aprés le premier pour commencer la bande horizontale suivante, certains nombres seront repetés de 3 en 3 dans toutes les bandes verticales, & ils s'y trouveront chacun cinq fois, comme on peut voir dans le Quarré suivant de 15 de racine, à cause

10	6	12	13	7	14	8	1	9	11	2	3	15	5	4
14	8	1	9	11	2	3	15	5	4	10	6	11	13	7
2	3	15	5	4	10	6	12	13	7	14	8	1	9	11
10	6	12	13	7	14	8	1	9	11	2	3	15	5	4
14	8	1	9	11	2	3	15	5	4	10	6	12	13	7
2	3	15	5	4	10	6	12	13	7	14	8	1	9	11
10	6	12	13	7	14	8	1	9	11	2	3	15	5	4
14	8	1	9	11	2	3	15	5	4	10	6	12	13	7
2	3	15	5	4	10	6	12	13	7	14	8	1	9	11
10	6	12	13	7	14	8	1	9	11	2	3	15	5	4
14	8	1	9	11	2	3	15	5	4	10	6	12	13	7
2	3	15	5	4	10	6	12	13	7	14	8	1	9	11
10	6	12	13	7	14	8	1	9	11	2	3	15	5	4
14	8	1	9	11	2	3	15	5	4	10	6	12	13	7
2	3	15	5	4	10	6	12	13	7	14	8	1	9	11

que le quotient de 15 divisé par 5 eſt 3; & dans la diagonale, en deſcendant de gauche à droite, les nombres y ſeront les ſixiemes de l'ordre aprés le premier, qui eſt un de plus que le cinquiéme qu'on a pris, & au contraire dans l'autre bande diagonale ils ſont les quatriémes, qui eſt un de moins. Et ſi le nombre impair eſt auſſi diviſible par une des parties de 6 comme 3, la diagonale où les nombres ſont les ſixiémes de l'ordre, aura des nombres repetés de cinq en cinq, qui eſt le quotient du nombre 15 diviſé par 3. Ce ſera la même choſe pour d'autres nombres.

On pourra donc auſſi prendre pour le premier nombre de la ſeconde bande horizontale, le premier aprés le premier de l'ordre, & par conſequent tous les nombres en deſcendant dans toutes les bandes verticales ſeront de ſuite comme ceux de l'ordre; & comme ceux de la bande diagonale qui deſcend de gauche à droite doivent être d'une unité plus avancés dans l'ordre, ils ſeront les ſeconds de l'ordre propoſé. Mais ceux de la bande diagonale qui deſcend de droite à gauche, doivent être d'une unité moins avancés; ils ſeront donc tous les mêmes, comme auſſi ceux de ſes paralleles.

Il s'enſuit donc de-là que tous les nombres de cette bande diagonale étant les mêmes, elle ne ſera pas juſte ſi ce nombre étant multiplié par la racine n'eſt égal à la ſomme de tous les nombres de l'ordre, & il ſera le moyen dans une progreſſion arithmetique.

Dans cette diſpoſition toutes les bandes paralleles & correſpondantes à cette diagonale, auront auſſi chacune partout un même nombre; c'eſt-pourquoy elles ne réüſſiront pas.

Ce ſera auſſi la même choſe ſi l'on prend pour le premier de la ſeconde bande horizontale le dernier de l'ordre; car alors la bande diagonale qui deſcend de gauche à droite aura tous les mêmes nombres, comme auſſi ſes paralleles.

COROLLAIRE I.

Pour les Propoſitions précédentes.

On pourra connoître d'abord ſi un ordre de nombres pourra réüſſir dans une diſpoſition donnée & dans un Quarré donné, puiſqu'on voit ſuivant la nature du Quarré ſi le défaut ſera dans les verticales ou dans les diagonales.

Mais on voit generalement que lorſque les racines des Quarrés ſont des nombres premiers, toutes les conſtructions peuvent être bonnes, en obſervant ce qui vient d'être dit pour les diagonales, qui ont partout le même nombre, ſoit qu'on prenne le premier aprés le premier de l'ordre, ou bien le dernier pour commencer la ſeconde bande horizontale.

COROLLAIRE II.

On peut encore former ces Quarrés par les bandes verticales au lieu des horizontales, comme on a fait cy-devant, en y obſervant les mêmes regles des horizontales. Mais on remarquera que ſi un Quarré a été fait par les verticales & en deſcendant, il ſe trouvera diſpoſé comme s'il avoit été fait par les horizontales; mais alors la repetition de l'ordre ſe trouve en ſens contraire : par exemple, ſi dans la ſeconde verticale on avoit pris le ſecond nombre de l'ordre de la premiere en deſcendant pour recommencer celle-cy dans un Quarré de 7 de racine, & le Quarré étant tout disposé suivant cette methode, il se trouvera aussi disposé comme s'il avoit été fait par les horizontales, en recommençant les bandes inferieures par le cinquiéme de l'ordre, à cause que 5 est le complément jusqu'à la racine de celui qui a servi pour recommencer les verticales.

Enfin un quarré fait par les verticales étant couché sur le côté, sera de même que s'il avoit été fait par les horizontales; mais par une repetition qui sera le complément jusqu'à la racine, de celle qui a servi à le former.

Puisque la formation des Quarrés par les verticales est la même que celle des horizontales, nous nous servirons des horizontales dans la suite.

COROLLAIRE III.

On peut faire en montant ce qu'on a fait en descendant pour recommencer les bandes horizontales, ensorte qu'une des bandes étant donnée avec la disposition des suivantes en descendant, on a aussi la disposition des précedentes en remontant: car il n'y aura qu'à prendre pour le premier nombre des horizontales précedentes ou superieures, le quantiéme aprés le premier de la bande inferieure, qui est le complément jusqu'à la racine du quantiéme qu'on prenoit pour recommencer les inferieures. Comme dans l'exemple de la premiere Proposition, si l'on avoit donne la cinquiéme bande horizontale en descendant 5, 3, 9, 13, 8 11, 10, & que pour la bande inferieure suivante on eût pris le second 9 aprés le premier, ce qui donneroit pour cette bande 9, 13, 8, 11, 10, 5, 3, il faudroit prendre pour le premier de la bande superieure, le cinquiéme 11 aprés le premier, à cause que 5 est complément de 2 à 7, & cette bande sera comme dans l'exemple 11, 10, 5, 3, 9, 13, 8, en conservant toûjours le même ordre proposé; & ainsi des autres de suite soit en montant ou en descendant.

Ces trois propositions précedentes ne font qu'une même Proposition, & comprennent la methode generale de conſtruction que je propoſe icy. Je ne les ay ſeparées que pour faire voir les applications differentes de cette methode, & pour la rendre plus facile.

PROPOSITION IV.

On peut faire les mêmes conſtructions que dans les Propoſitions précedentes avec des ordres *mutilés*, c'eſt à dire avec des ordres où il y ait moins de nombres qu'il n'y en a dans la racine, en ſubſtituant des zeros à la place des nombres qui manquent pour remplir l'ordre, ou les cellules de la racine; comme auſſi avec des ordres où il y aura des nombres repetés.

On en peut voir un exemple dans ce Quarrè de 5 de racine, lequel eſt rempli par la premiere Propoſition.

Les démonſtrations ſeront les mêmes que celles des Propoſitions précedentes.

7	0	6	6	2
6	6	2	7	0
2	7	0	6	6
0	6	6	2	7
6	2	7	0	6

PROPOSITION V.

On peut encore combiner deux Quarrés de même racine, leſquels ſeront remplis ſéparément avec quel ordre on voudra, de quels nombres on voudra, en joignant les nombres enſemble de chaque cellule ſemblable & ſemblablement poſée; & j'appelle ces deux Quarrés *les Primitifs*, par rapport à celui qui en eſt formé, que j'appelle *le Quarré Parfait*.

Soit les deux Quarrés Primitifs de 5 de racine chacun, & les nombres & l'ordre du premier. Soient 7, 8, 4, 5, 3, lequel ſoit rempli ſuivant la diſpoſition de la premiere Propoſition. Et les nombres avec l'ordre du ſecond ſoit 5, 0, 9, 4, 2, lequel ſoit rempli par la ſeconde Propoſition.

1. *Primitif.*

7	8	4	5	3
4	5	3	7	8
3	7	8	4	5
8	4	5	3	7
5	3	7	8	4

2. *Primitif.*

5	0	9	4	2
4	2	5	0	9
0	9	4	2	5
2	5	0	9	4
9	4	2	5	0

Maintenant ſi l'on joint enſemble les nombres de chaque cellule correſpondante ſemblable & ſemblablement

poſée

posée dans ces deux Quarrés, on fera le troisiéme Quarré qui sera juste & parfait. Car puisque la somme des nombres de toutes les bandes des deux premiers Quarrés est par tout la même, il se fera aussi une même somme par l'addition de ces mêmes bandes tant horizontales que verticales & diagonales avec leurs paralleles. Mais il arrive assez souvent dans ces sortes de nombres qu'il y en a plusieurs de repetés dans le même Quarré.

Parfait.

12	8	13	9	5
8	7	8	7	17
3	16	12	6	10
10	9	5	12	11
14	7	9	13	4

Il faut remarquer que la disposition des deux Quarrés Primitifs doit être differente, comme icy celle du premier a été faite par la premiere Proposition, & celle du second par la seconde: Car si les deux Quarrés Primitifs avoient une même disposition de leurs nombres dans la repetition de leurs bandes, les nombres qui seroient dans chaque bande y seroient repetés suivant leur disposition, & le Quarré ne laisseroit pas pour cela d'être juste. Et si on les disposoit tous deux en prenant le premier & le dernier de l'ordre, il pourroit y avoir une des diagonales qui seroit fausse, à moins qu'on y observât ce qui a été remarqué dans la Proposition à l'égard des nombres repetés.

Il s'ensuit aussi qu'on peut assembler ou combiner plusieurs Quarrés, comme on en a fait deux dans cette Proposition, & que le Quarré qui en résultera sera parfait, puisque dans toutes les bandes ce ne sera qu'une addition de sommes égales.

PROPOSITION VI.

Les nombres qui sont en progression Arithmetique dans l'ordre des nombres, comme 3, 6, 9, 21, 15, 18, 12, ne sont que des cas des Propositions précedentes; mais on y peut faire quelques remarques particulieres.

Si l'on propose l'ordre à volonté du Quarré de 7 de racine 3, 5, 2, 1, 4, 7, 6, & qu'on en forme le Quarré par la premiere Proposition, & qu'on prenne aussi l'ordre à volonté des racines de ce Quarré en même progression avec le zero qui soit 28, 7, 0, 42, 35, 21, 14, & qu'on en forme aussi un Quarré par la seconde Proposition, comme on les voit icy; il s'ensuivra que le Quarré composé de ces deux Quarrés sera juste & parfait, & qu'il n'y aura aucun nombre repeté, & par consequent on y trouvera tous les nombres du Quarré jusqu'à 49, & les paralleles aux diagonales seront aussi justes.

3	5	2	1	4	7	6
2	1	4	7	[illegible]	3	5
4	7	6	3	5	2	1
[illegible]	3	5	2	1	4	7
5	2	1	4	7	6	3
1	4	7	6	3	5	2
7	6	3	5	2	1	4

28	7	0	42	35	21	14
42	35	21	14	28	7	0
14	28	7	0	42	35	21
0	42	35	21	14	[illegible]	7
21	14	28	7	0	42	35
7	0	42	35	21	14	28
35	21	14	28	[illegible]	0	42

31	12	12	43	39	28	20
44	36	25	21	34	10	5
18	35	13	3	47	37	22
0	45	40	23	15	32	14
26	16	29	11	7	48	38
8	4	49	41	24	19	30
42	27	17	33	9	1	40

1°. A cause des constructions differentes des deux Quarrés, les mêmes nombres ne peuvent pas se rencontrer dans les mêmes cellules correspondantes dans chacun des deux Quarrés Primitifs, comme dans le premier Quarré le nombre 3 est dans la premiere cellule de la premiere bande horizontale, & dans la seconde bande il est dans la sixiéme, dans la troisiéme il est dans la quatriéme, &c. Et dans le second Quarré le nombre 28 est dans la premiere cellule de la premiere bande horizontale, mais il est le cinquiéme dans la seconde bande, & le second dans la troisiéme, &c. ce qui est évident par la construction.

2°. Dans le Quarré parfait il ne sçauroit y avoir de nombre repeté; car comme chaque multiple de la racine qui surpasse les nombres de la racine, doit se joindre à differens nombres de la racine & avec zero, comme nous venons de voir, chacun de ces multiples joint à la racine doit remplir tout le nombre du Quarré, qui est 49 dans cet exemple.

Ce sera la même démonstration pour les bandes paralleles aux diagonales.

On poutra aussi faire ces constructions par la 3e Propoſition & en differentes manieres, pourvû qu'on obſerve toûjours de faire l'un des Quarrés Primitifs par une conſtruction, & l'autre par l'autre. On voit par-là que le ſeul Quarré de 7 de racine pourra ſe faire en bien des manieres differentes, ſuivant la combinaiſon des differentes conſtructions & diſpoſitions des nombres de l'ordre. Mais il faut obſerver que ſi dans l'un des deux Quarrés Primitifs on ſe ſert d'une conſtruction où il y ait des nombres repetés dans une diagonale, il faudra que ce nombre repeté dans toutes les cellules de la bande diagonale, ſoit le moyen de ceux de l'ordre de ce Quarré, comme ſi c'étoit pour les nombres de la racine de 7, il faudroit que ce fût le nombre moyen 4, qui étant multiplié par 7 ſera égal à la ſomme de tous les nombres de la racine. Et ſi c'étoit l'ordre des racines où le zero eſt employé, il faudroit que ce fût le nombre 21 qui eſt moyen entre le zero & 42.

Ce ſera la même choſe pour tels nombres qu'on voudra en progreſſion Arithmetique, comme 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, dont on remplira la racine, & les nombres qui tiendront lieu des multiples des racines avec le zero ſeront 21, & ſes multiples 42, 63, 84, 105, 126, les uns & les autres placés dans quel ordre on voudra, hormis ceux qui dans la diſpoſition donnent des nombres repetés dans la diagonale, auſquels il faut avoir égard ſuivant les trois premieres Propoſitions.

On peut pour faciliter l'operation du Quarré Primitif qui contient les racines, exprimer ſeulement le nombre des racines & non pas leur valeur, comme 0, 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de 0, 7, 14, 21, 28, &c. mais en formant le Quarré parfait on reſtituera ces valeurs.

PROPOSITION VII.

On peut auſſi conſtruire des Quarrés Parfaits avec des nombres en progreſſion Arithmetique, mais interrompuë; comme ſi l'on donnoit les 25 nombres ſuivans dans un Quarré dont les nombres des bandes horizontales ſe ſurpaſſaſſent chacun de 3, & ceux des verticales chacun

Proposé.

1	4	7	10	13
3	6	9	12	15
5	8	11	14	17
7	10	13	16	19
9	12	15	18	21

de 2, on pourra faire de ces nombres un Quarré Parfait par la methode generale.

Il faut d'abord faire un Quarré Primitif par les regles dont tous les nombres seront ceux de l'ordre proposé de la premiere bande horizontale, qui seront ceux des nombres simples, en recommençant, par exemple, les bandes horizontales suivantes par les seconds aprés le premier de la bande horizontale qui est au-dessus.

Primitif des simples.

1	4	7	10	13
7	10	13	1	4
13	1	4	7	10
4	7	10	13	1
10	13	1	4	7

L'autre Quarré Primitif sera celui des Racines, qui ne sont icy que les nombres ajoûtés aux simples nombres repetés dans la progression proposée. Par exemple, la seconde bande horizontale proposée, n'est que la premiere repetée à laquelle on a ajoûté par tout 2, la troisiéme est encore la premiere à laquelle on a ajoûté 4, & ainsi des autres; en sorte que les nombres 0, 2, 4, 6, 8, tiennent icy lieu de racines.

Primitif des Racines.

0	8	4	2	6
2	6	0	8	4
8	4	2	6	0
6	0	8	4	2
4	2	6	0	8

On pourra mettre ces racines dans quel ordre on voudra, & disposer le Quarré par une repetition differente de celle du premier Quarré, comme il est prescrit dans la Proposition précedente, & comme on le voit dans l'exemple qui est icy proposé.

Enfin de ces deux Quarrés Primitifs on en formera le Quarré Parfait, qui aura toutes les conditions requises.

Quarré Parfait.

1	12	11	12	19
9	16	13	9	8
21	5	6	13	10
10	7	18	17	3
14	15	7	4	15

On remarquera que dans ces sortes de Quarrés il pourroit y avoir quelques nombres repetés, mais ce ne seront que ceux qui sont proposés, & qui se trouvent par la progression.

On remarquera aussi que le Quarré de 9 cellules qui a trois de racine, ne peut avoir qu'une seule disposition parfaite, soit que les nombres soient en progression Arithmetique continuë ou interrompuë, comme il est expliqué dans les Propositions 6 & 7; mais que Quarré Parfait peut être disposé par le renversement & retournement en 8 manieres differentes.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Faire un Quarré d'une racine donnée, & dont la somme de toutes les bandes soit égale à un nombre donné tel qu'on voudra, sans que les nombres soient repetés dans le Quarré.

Il seroit fort aisé de disposer des nombres repetés dans chaque bande horizontale, ensorte que toutes les bandes fissent une même somme, puisquil n'y auroit qu'à remplir l'ordre par tels nombres qu'on voudroit qui fissent la somme donnée; ce qui seroit évident par les premieres Propositions. Mais il faut les disposer de telle maniere, & prendre des nombres tels qu'il ne s'en rencontre pas deux de semblables dans tout le Quarré parfait; ce qui pourra toûjours être, pourvû que le nombre donné soit égal ou plus grand que celui qui seroit fait des nombres de suite depuis l'unité pour la racine proposée; sinon il se trouvera quelques nombres repetés.

REGLE.

On prendra pour l'ordre du Quarré Primitif des nombres simples, les nombres de suite de la racine, comme pour la racine 5; 1, 2, 3, 4, 5, lesquels on rangera comme on voudra dans l'ordre pour la premiere bande horizontale de ce Quarré. Ayant ôté leur somme du nombre proposé que doivent faire toutes les bandes, on remplira le reste avec autant de nombres qu'en a la racine moins l'unité, à la place de laquelle on mettra o, & il faudra que ces nombres se surpassent tous les uns les autres, & le o au moins de 5 qui est le nombre de la racine, lesquels on rangera comme on voudra dans l'ordre pour le second

Quarré Primitif, & ces deux Quarrés étant remplis suivant les premieres Propositions, si on les combine il en resultera un Quarré Parfait avec les conditions requises.

EXEMPLE.

Soit la racine 5 du Quarré proposé, & on demande que la somme des nombres de toutes les bandes soit 81, nombre donné qui est plus grand que 65, qui seroit celui du Quarré de 5 rempli avec tous les nombres de suite depuis l'unité.

Premier Quarré.

4	5	5	1	2
3	1	2	4	5
2	4	5	3	1
5	3	1	2	4
1	2	4	5	3

Second Quarré.

18	0	5	12	31
12	31	18	0	5
0	5	12	31	18
31	18	0	5	12
5	12	35	18	0

Quarré Parfait.

22	5	8	13	33
15	32	20	4	10
2	9	17	34	19
36	21	1	7	16
6	14	32	23	3

Ayant pris par la regle pour l'ordre du premier Quarré les nombres de la racine rangés à volonté, comme on voit dans le premier Quarré 4, 5, 3, 1, 2; dont la somme est 15, laquelle étant ôté de 81, somme donnée des bandes, il restera 66, qu'on pourra remplir des nombres 18, 0, 5, 12, 31, lesquels depuis le 0 se surpassent de 5 & plus, qui est le plus grand nombre de l'ordre du premier Quarré.

Ces deux Quarrés étant disposés comme on voudra par les premieres Propositions, on en fera le Quarré Parfait en combinant les cellules correspondantes, & ce Quarré aura toutes les conditions requises.

DEMONSTRATION.

La démonstration de cette operation est facile aprés ce qu'on a démontré des precedentes. Car puisque le zero du second Quarré se doit joindre dans le Quarré Parfait avec les differens nombres du premier Quarré, il est evident qu'on aura dans ce Quarré Parfait & dans chacune de ses bandes l'un des nombres du premier Quarré sans y être repeté, & le plus haut sera 5, qui est le plus haut du premier Quarré.

Semblablement le second nombre 5 du second Quarré se doit aussi joindre pour le Quarré Parfait, & dans chacune de ses bandes, avec tous les nombres du premier Quarré, & ces nombres seront tous plus grands que ceux qui y sont déja, puisque ce nombre 5 étant joint avec 1 sera 6, qui est plus grand que 5 qui étoit le plus haut de ceux qu'on y avoit déja placés, & le plus haut de ceux-cy sera 5 joint à 5 qui sera 10.

De même le nombre 12 qui est plus grand que 10 se joignant aussi à tous les nombres du premier Quarré, fera des nombres plus grands que les précedens; & ainsi des autres jusqu'à la fin. C'est-pourquoy il ne se trouvera dans le Quarré Parfait aucun nombre repeté deux fois, & il sera parfait par la Proposition sixiéme, & toutes ses bandes feront 81, comme il étoit proposé.

Il est évident que si le nombre proposé étoit moindre que 65 dans cet exemple, il y auroit des nombres repetés deux fois dans le Quarré Parfait; puisque necessairement quelques nombres du second Quarré se joignant avec ceux du premier feroient une même somme, comme si au lieu de 12 on y avoit 7, dont la difference à 5 seroit moindre que 5, comme il arriveroit à quelques nombres du second Quarré, ce nombre 7 se joignant avec 2 feroit 9, de même que 5 auroit fait auparavant en se joignant avec 4, & ainsi des autres.

On pourroit aussi au lieu des nombres du premier Quarré en prendre d'autres tels qu'on voudroit, comme 1, 2, 4, 5, 7; mais il faudroit que leur somme étant ôté du nombre donné, le reste pût remplir l'ordre du second Quarré avec le zero, o, & le nombre 7 & ses multiples au moins, car ce nombre 7 est le plus grand de ceux de l'ordre du premier Quarré: ce qui est évident par la precedente démonstration; car autrement il y auroit, ou il pourroit y avoir des nombres repetés dans le Quarré Parfait.

On pourra varier ces Quarrés en plusieurs manieres.

PROPOSITION IX.

On peut faire par ces methodes que quelque nombre que ce soit du nombre quarré proposé, se trouve dans quelle cellule on voudra du Quarré, & même l'unité au milieu, & en plusieurs manieres, mais seulement dans les Quarrés plus hauts que 9.

Par exemple, si l'on veut que l'unité soit dans la cellule du milieu du quarré, on mettra d'abord cette unité dans la cellule du milieu du premier Quarré Primitif, & l'on disposera ensuite les autres nombres de la racine qui sont les nombres simples dans quel ordre on voudra pour la bande horizontale où est placé le premier nombre. Ensuite on formera les autres bandes tant en descendant qu'en montant par quelqu'une des dispositions des premieres propositions.

On fera ensuite le second Quarré Primitif, qui est celui des racines, en plaçant le o dans sa cellule du milieu, qui est correspondante à celle où l'on a placé l'unité dans l'autre, & l'on donnera à la bande horizontale où il est quel ordre on voudra à ces racines, & l'on achevera ce Quarré par une disposition differente de celle du premier pour recommencer les bandes horizontales; par ce moyen on fera un Quarré Parfait par les regles de la sixiéme Proposition qui aura la condition requise.

Si c'étoit un autre nombre, comme 22, dans quelque cellule marquée pour le Quarré de 5 de racine, on ôteroit de ce nombre autant de fois la racine qu'on pourroit, qui seroit icy 4, & le reste 2 se mettroit dans la cellule marquée, & l'on acheveroit le premier Quarré Primitif comme on vient de dire. Dans le second Quarré Primitif on mettroit les quatre racines dans la cellule correspondante à celle qui est marquée, & achevant aussi ce Quarré des racines suivant la regle, on trouveroit par la combinaison de ces deux Quarrés, un Quarré Parfait suivant le requis; ce qui est évident par la sixiéme Proposition, & comme on le peut voir icy dans l'exemple où le nombre 22 doit être

être à la feconde cellule de la feconde bande horizontale.

Premier.

1	4	3	2	5
3	2	5	1	4
5	1	4	3	2
4	3	2	5	1
2	5	1	4	3

Second.

3	2	1	0	4
0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2

Parfait.

16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

PROPOSITION X.

On peut auffi faire des Quarrés comme dans la fixiéme Propofition ; enforte que toutes les cellules du Quarré étant prifes deux à deux, & étant centralement oppofées & également éloignées du centre, auront partout leurs nombres enfemble égaux au double du nombre de la cellule du milieu du Quarré ; ce qui eft auffi la fomme des deux extrêmes. 1705. 17. Juin.

Cette Propofition n'eft qu'un cas des premieres, & la conftruction n'en eft pas differente : elle demande feulement une certaine difpofition des nombres de l'ordre ; mais on ne la peut faire qu'avec des nombres qui foient en progreffion Arithmetique, comme 1, 2, 3, 4, 5, &c.

CONSTRUCTION.

Dans la bande horizontale du milieu du premier Quarré, il faut placer dans la cellule du milieu le nombre moyen de la progreffion, comme on voit le nombre 4. dans le premier Quarré fuivant qui a fa racine 7 ; & l'on placera auffi dans cette même bande les autres nombres de la racine comme on voudra, pourvû feulement que ceux qui feront dans les cellules également éloignées de celle du milieu, faffent enfemble un nombre double de celui de la cellule du milieu ; ce qui fe peut faire à caufe de la progreffion Arithmetique propofée, comme on le peut voir dans la Figure fuivante.

Pour le fecond Quarré dont l'ordre fera fait de o & des multiples de la racine, on y obſervera la même regle pour placer ces nombres dans la bande horizontale du milieu, enſorte que le nombre 21 ſera au milieu, & ceux qui ſeront également éloignés de la cellule du milieu feront enſemble une ſomme double de 21.

Premier Quarré.

1	5	3	7	2	4	6
7	2	4	6	1	5	3
6	1	5	3	7	2	4
3	7	2	4	6	1	5
4	6	1	5	3	7	2
5	3	7	2	4	6	1
2	4	6	1	5	3	7

Second Quarré.

0	21	42	35	14	28	7
14	28	7	0	21	42	35
21	42	35	14	28	7	0
28	7	0	21	42	35	14
42	35	14	28	7	0	21
7	0	21	42	35	14	28
35	14	28	7	0	21	42

Quarré Parfait.

1	26	45	42	16	32	13
21	30	11	6	22	47	38
27	43	40	17	35	9	4
31	14	2	25	48	36	19
46	41	15	33	10	7	22
12	3	28	44	39	20	29
37	18	34	8	5	24	49

Maintenant ſi l'on acheve ces deux Quarrés chacun par une conſtruction differente, comme il eſt marqué dans la ſixiéme Propoſition, ſur les ordres de la bande horizontale du milieu, tant en deſcendant qu'en montant, par exemple, pour le premier Quarré en prenant le troiſiéme nombre de l'ordre pour le premier de la bande ſuivante, & pour le ſecond Quarré en prenant le quatriéme de ſon ordre : ces deux Quarrés auront chacun les conditions de la Propoſition, & étant combinés par la ſixiéme Propoſition, ils formeront le Quarré Parfait, qui contiendra tous les nombres du Quarré qui ſont ici 49, & il aura toutes les conditions de la Propoſition : car toutes les cellules du Quarré centralement opposées font ensemble 50, qui est un nombre double de 25. de la cellule du milieu.

On remarquera que dans cette disposition de nombres, on peut prendre pour recommencer les bandes horizontales suivantes, le premier de l'ordre aprés le premier ou bien le dernier; car dans ces deux cas l'une des diagonales a toûjours les mêmes nombres, & ce nombre sera le moyen de l'ordre par la construction, puisqu'il est égal à celui de la cellule du milieu du Quarré : c'est-pourquoy par les remarques de la troisiéme Proposition cette construction sera bonne.

DEMONSTRATION.

Chacun des deux Quarrés Primitifs a toutes les conditions de la Proposition, & par consequent le Quarré Parfait les aura aussi. Car dans le premier Quarré le nombre 4 est au milieu, celui qui est au-dessus est 3, & celui qui est au-dessous est 5 : mais il y a même distance de 3 à 4 ou de 4 à 3, que de 4. à 5. dans l'ordre par la construction; car toutes les cellules verticales de suite ont des nombres également éloignés les uns des autres par la seconde Proposition ; & puisque par la construction ceux qui sont également éloignés du milieu font ensemble une somme égale au double de celle du milieu, 3 & 5 feront cette somme 8 égale à deux fois 4, & ils sont centralement opposés.

Mais par la construction ceux des côtés 2 & 6 sont aussi également éloignés de 4 & centralement opposés, ils feront donc aussi ensemble 8.

Maintenant le nombre 5, qui est au-dessus de 2, en est éloigné de trois cellules dans l'ordre par la construction, & 3 qui est au-dessous de 6, est aussi éloigné de 6 de trois cellules de l'autre côté, & 2 & 6 sont également éloignés de 4 l'un d'un côté & l'autre de l'autre; donc 5 & 3 seront également éloignés de 4 dans l'ordre l'un d'un côté & l'autre de l'autre & centralement opposés, & par consequent ils feront ensemble une somme double de 4.

Ce ſera la même démonſtration pour les autres nombres de ce Quarré en paſſant ſucceſſivement des uns aux autres. Ce ſera encore la même methode de démonſtration pour le ſecond Quarré ; & par conſequent le Quarré Parfait qui eſt une combinaiſon des deux premiers, aura toutes les mêmes proprietés qu'ils ont, qui ſont celles de la Propoſition ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

Les Quarrés Parfaits étant conſtruits comme dans la Propoſition précedente ; Je dis qu'on peut les varier en pluſieurs autres qui ne ſuivront plus les regles précedentes.

Ces variations ſe feront en tranſpoſant les bandes les unes à la place des autres, c'eſt à dire les verticales à la place des verticales, & les horizontales à la place des horizontales ; mais avec cette regle, que celles qui étoient également éloignées de celle du milieu, le ſoient encore aprés leur tranſpoſition.

Par exemple, ſi dans le Quarré de 7 de racine de la Propoſition précedente, je tranſpoſe la premiere bande horizontale & que je la mette à la place de la troiſiéme, & la troiſiéme à la place de la premiere ; il faut auſſi mettre la derniere à la place de la cinquiéme, & la cinquiéme à la place de la derniere, ce Quarré changé ſera encore parfait : car alors toutes les cellules oppoſées centralement & également éloignées du centre, ſe trouvent encore également éloignées du centre & centralement oppoſées. Ce ſera la même choſe pour le changement des autres bandes tant horizontales que verticales.

PROPOSITION XII.

Il y a encore d'autres variations qui ſervent à rendre des Quarrés parfaits, leſquels ne le ſeroient pas par la conſtruction ſuivant les premieres Propoſitions. Il ſuffira d'en donner quelques exemples pour les faire connoître.

Soient les deux Quarrés Primitifs formés par la Propoſition quatriéme, où l'on prend pour le premier, qui est celui des nombres simples, le dernier nombre de l'ordre de la premiere bande horizontale pour recommencer la seconde ; & pour le second, qui est celui des racines, on prend le premier de l'ordre aprés le premier dans la premiere bande horizontale pour recommencer la seconde.

1. *Quarré.*

2	5	3	1	4
4	2	5	3	1
1	4	2	5	3
3	1	4	2	5
5	3	1	4	2

2. *Quarré.*

3	0	2	4	1
0	2	4	1	3
2	4	1	3	0
4	1	3	0	2
1	3	0	2	4

Il est évident par ce qui a été dit ci-devant, que dans le premier Quarré la bande diagonale qui descend de gauche à droite est fausse; car le nombre 2 est repeté dans toutes ses cellules, & ce nombre 2. n'est pas le moyen de ceux de la racine, lequel est 3. De même dans le second Quarré, par la construction, la bande diagonale qui descend de droite à gauche, a l'unité dans toutes ses cellules, au lieu qu'elle devroit avoir le nombre 2 qui est le moyen des multiples de la racine : c'est pourquoi on cherche si en changeant de la même maniere dans ces deux Quarrés Primitifs, quelques bandes de place, on pourra les rendre parfaits; & l'on trouve que si la cinquiéme bande horizontale de chacun est transportée à la place de la quatriéme, & la quatriéme à la place de la cinquiéme, les diagonales défectueuses se trouveront parfaites. Car dans le premier il manque à la bande horizontale où sont les nombres 2, cinq unités, & par la transposition au lieu de 2 & 2, on aura 4 & 5, ce qui corrige le deffaut: mais il faut aussi prendre garde, si dans l'autre bande diagonale qui est juste, ce changement n'y cause point d'erreur, comme on le voit, puisqu'au lieu de 5 & 1 on y substituë 3 & 3 qui fait la même somme.

Il faut voir encore si dans le second Quarré, qui est celui des racines, ce même changement ne cause point d'erreur, & corrige celui qui est à la bande diagonale où sont les nombres simples ; car il faut faire le même changement dans l'un que dans l'autre, afin que les racines combinées avec les nombres simples fassent les mêmes sommes que d'abord & sans repetition. On voit donc dans ce Quarré que la bande diagonale où sont les unités en a cinq de moins qu'il ne faut ; mais par ce changement au lieu de 1 & 1, on aura 4 & 3 qui corrige le deffaut, & pour l'autre diagonale qui est juste, on aura 2 & 2 au lieu de 0 & 4 qui font la même somme. C'est pourquoi ces deux Quarrés ainsi corrigés, comme on les voit ici, donneront par leur combinaison le Quarré Parfait.

1. Quarré.

2	5	3	1	4
4	2	5	3	1
1	4	2	5	3
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

2. Quarré.

3	0	2	4	1
0	2	4	1	3
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
4	1	3	0	2

Quarré Parfait.

17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

On pourra faire aussi d'autres changemens semblables dans les bandes horizontales ou verticales, mais dans les conditions marquées ci-dessus.

Autres variations des Quarrés Parfaits.

Il y a encore de semblables variations aux Quarrés Parfaits, en transportant des bandes horizontales à la place d'autres horizontales, ou des verticales à la place des verticales ; pourvû que les nombres changés dans les diagonales fassent la même somme que ceux qui y étoient auparavant.

Par exemple, dans le Quarré Parfait qu'on vient de former, on peut changer la premiere bande horizontale à la place de la derniere, & réciproquement, & le Quarré sera encore parfait.

De même, on peut changer dans le même Quarré la premiere bande horizontale à la place de la quatriéme, & réciproquement, & le Quarré sera encore parfait.

De même, en changeant la troisiéme bande horizontale à la place de la cinquiéme, & réciproquement.

Et ainsi des autres. Mais il faut remarquer que ces Quarrés changés peuvent encore recevoir d'autres changemens, comme dans le dernier que je viens de marquer, on peut mettre la premiere bande verticale à la place de la troisiéme, & réciproquement.

On peut faire aussi de semblables changemens aux Quarrés formés par les regles des premieres Propositions, ce qui augmente de beaucoup le nombre de leurs variations; & ces Quarrés ainsi changés ne se rapportent plus aux regles de ces Propositions, comme on peut voir en les résolvant en leurs Quarrés Primitifs.

PROPOSITION XIII.

Dans la multitude des Quarrés Parfaits qu'on peut former sur une même racine plus grande que trois, il y en a qui ont une proprieté particuliere, & dont M. Frenicle a parlé le premier, à ce que je sçache : Sçavoir, que si l'on ôte une enceinte de cellules au Quarré Parfait, le Quarré restant soit encore un Quarré Parfait, & ainsi de suite jusqu'au Quarré 9 dont on ne peut pas ôter d'enceinte. Ces sortes de Quarrés ne se rapportent point aux regles de mes premieres Propositions; & il y a grande apparence que M. Frenicle avoit proposé ce Problême à M. de Fermat.

Pour faire ces sortes de Quarrés, & pour trouver tous ceux qu'on peut faire sur la même racine, je donne icy une methode qui en abrege de beaucoup le travail, en réduisant les nombres qui les composent à des nombres beaucoup plus simples, & qui fait voir en même tems la démonstration de la construction.

Je propose seulement icy le Quarré de 5. de racine, lequel servira pour tous les autres Quarrés de même nature.

Je fais d'abord une Table de tous les nombres du Quarré que je range de suite en deux colonnes, dans la premiere desquelles sont les nombres jusqu'à celui du milieu qui est icy 13, & dans l'autre sont leurs complemens vis à vis jusqu'à la somme 26 des deux extrêmes, ou du double de celui du milieu 13, qui est icy complément à lui-même, & je mets entre deux leur difference jusqu'à 13, avec les signes plus + & moins — les uns d'un côté & les autres de l'autre, pour montrer qu'il faudroit ajoûter cette difference aux nombres moindres que 13 pour aller jusqu'à 13, & aux autres qui sont leurs complémens, qu'il la faudroit ôter pour les réduire à 13; ensorte que ces differences deviennent communes, & les signes + & — ont seulement rapport aux differences. Enfin je me sers seulement de ces differences dans la recherche des nombres qui doivent composer le Quarré, suivant ce qui est requis par le Problême.

Nomb.		*Diff.*		*Nomb.*
1	+	12	—	25
2	+	11	—	24
3	+	10	—	23
4	+	9	—	22
5	+	8	—	21
6	+	7	—	20
7	+	6	—	19
8	+	5	—	18
9	+	4	—	17
10	+	3	—	16
11	+	2	—	15
12	+	1	—	14

Maintenant pour former le Quarré de 9 du milieu, qui est le plus petit qu'on puisse faire, car un n'est pas consideré comme un Quarré; je place d'abord 13 au milieu, qui est le nombre moyen de tous les nombres du Quarré proposé; & je prens dans les differences quelque nombre à volonté pour la cellule de l'angle *A*, comme 9, & quelqu'autre nombre, comme 1, pour la cellule *B* de l'autre angle de la premiere bande horizontale, & je cherche a remplir les deux bandes *AB*, *AD*; car leurs complémens doivent remplir les deux autres bandes *CD*, *CB*, & la cellule *D* sera le complément de la cellule *B*; c'est pourquoy les deux cellules *B* & *D* auront le même nombre pour leur difference, mais avec un signe different. Il ne faut donc plus qu'un nombre à chacune de ces bandes pour remplir leurs cellules du milieu.

A   B

4	23	12
21	13	5
14	3	22

D   C

Or les differences pour les cellules de chaque bande doivent être égales à zero, en mettant à leurs nombres le signe + & moins, comme on le trouve à propos.

Je pose donc par la supposition pour la bande *AB*,

+ 9

$+9$ pour la cellule *A*. $+1$ pour la cellule *B*, ce qui fait $+10$, & je trouve 10 entre les differences; c'est-pourquoy je mets -10, & le tout $=0$.

$$\begin{array}{l} \quad A \quad B \\ +9+1-10=0 \text{ pour } AB \\ \quad A \quad D \\ +9-1-8=0 \text{ pour } AD \end{array}$$

Je fais la même chose pour la bande verticale *AD* dans laquelle j'ai déja $+9$ pour *A*, & je dois mettre -1 pour *D*, puisque $+1$ est pour *B*, & pour remplir l'équation de cette bande il faut encore -8, que je trouve aussi dans les differences, & -8 sera la difference de la cellule du milieu *AD*.

Si l'on ne pouvoit pas trouver entre les differences des nombres propres à remplir ces équations, il faudroit faire une autre supposition ou en tout ou en partie seulement.

Les autres bandes *CD*, *CB* auront les mêmes differences dans les cellules opposées centralement, & avec des signes contraires.

Maintenant avec ces differences je remplis les cellules du Quarré. Pour la cellule *A* j'ay $+9$, & je trouve dans la Table le nombre 4 qui répond à $+9$, lequel je mets dans la cellule *A*. Pour la cellule *B* j'ay $+1$, & dans la Table le nombre correspondant est 12, & pour la cellule *D* on a -1, qui donne 14 pour cette cellule, comme -9 donne 22 pour la cellule *C*. Pour la difference -10 de la cellule du milieu de la bande *AB*, on a 23 dans la Table qu'on écrit dans cette cellule, & son complément 3 pour son opposée. Enfin pour la cellule du milieu de la bande *AD*, on a -8, à qui appartient le nombre 21 qu'on met dans cette cellule, & son complément 5 à l'opposite. Par ce moyen le Quarré de 9 est rempli comme il faut, & la somme des nombres de toutes ses bandes sera 39. Il reste maintenant à faire l'enceinte.

J'efface d'abord dans la table les differences qui m'ont servi pour le Quarré de 9, & je fais à peu prés la même operation pour cette enceinte composée de quatre bandes, que j'ay fait pour les bandes du Quarré du milieu.

$\overset{A}{+7}\overset{B}{+5}+2-11-3=0$ pour la bande *AB*

$\overset{A}{+7}\overset{D}{-5}-12+6+4=0$ pour la bande *AD*

A B

6	11	24	16	8
25	4	23	12	1
7	21	13	5	19
9	14	3	2	17
18	15	2	10	20

D C

Je prens à volonté quelque nombre comme 7 dans les differences restantes pour la cellule *A* de la bande *AB* de l'enceinte,, & quelqu'autre aussi à volonté comme 5 pour la cellule *B* de la même bande auquel je mets le signe $+$; & par consequent on aura aussi les cellules *A* & *D* de la bande *AD*. Il reste donc à remplir trois cellules dans chacune de ces bandes, ensorte que la somme des nombres soit égale à zero, & je les trouve comme on voit icy, lesquelles contiennent toutes les differences de la Table.

J'écris donc dans ces cellules les nombres correspondans aux differences avec leurs signes, & à l'opposite dans les autres bandes j'écris leurs complémens qui répondent aussi aux mêmes differences, mais avec des signes contraires, & le Quarré sera parfait comme on le voit icy.

Si l'on ne pouvoit pas faire l'enceinte avec les differences restantes du Quarré du milieu, en supposant les angles tels qu'on les a pris, il en faudroit prendre d'autres pour *B*, & enfin d'autres pour *A* & pour *B*; & si enfin on ne pouvoit pas remplir ces bandes, ce seroit une marque que le Quarré précedent, tel qu'on l'a trouvé, ne pourroit pas servir à faire cette espece de Quarré.

On trouve aussi quelquefois pour un seul Quarré du milieu plusieurs enceintes parfaites avec les mêmes angles, & d'autres encore en changeant les angles, comme on peut voir dans cet autre Quarré de la même racine, où ayant trouvé entre les differences, les deux bandes pour le Quarré du milieu.

$$\overset{A}{+3}-12\overset{B}{+9}=0$$

$$\overset{A}{+3}+6\overset{D}{-9}=0$$

on aura pour l'enceinte,

$$\overset{A}{+7}\overset{B}{+5}+1-11-2=0 \text{ ou bien } \overset{A}{+7}\overset{B}{+5}+2-10-4=0$$

$$\overset{A}{+7}\overset{D}{-5}-4-8+10=0 \qquad \overset{A}{+7}\overset{D}{-5}+1-11+8=0$$

dont on pourra former deux Quarrés Parfaits sur le même Quarré du milieu; & en changeant les angles on en peut trouver plusieurs autres sur le même Quarré du milieu.

Si le Quarré du milieu a sa racine plus grande que 5 comme 7, 9, &c. on prendra des nombres entre les differences pour remplir chaque enceinte séparément, de la même maniere qu'on a fait pour celle de 5.

Le Quarré du milieu, comme tout Quarré peut se renverser & retourner en 8 manieres differentes: mais aussi les trois cellules du milieu dans chaque bande avec leurs opposées font 6 variations dans les horizontales & 6 dans les verticales, ce qui fait 36 variations de l'enceinte, lesquelles étant multipliées par 8 variations du Quarré du milieu, donne 288 variations de chacun de ces Quarrés, comme dit M. Frenicle, sans parler de ses renversemens & retournemens qui ne changent pas le Quarré. Mais M. Frenicle donne une Table de 26 de ces Quarrés qui n'ont que deux differens Quarrés du milieu, & il dit qu'il peuvent se varier chacun en 288, comme nous venons de trouver, & il semble que c'est toutes les variations qu'il avoit pû trouver par sa methode; cependant le premier que j'ay donné icy par ma methode a un Quarré du milieu different de ceux de M. Frenicle, & c'est celui qui s'est presenté d'abord: c'est-pourquoy je ne doute pas qu'il n'y en puisse avoir bien plus de 26, & par consequent il y aura de ces sortes de Quarrés de la racine de 5, un bien plus grand nombre que 7488, comme dit M. Frenicle; mais il seroit trop long & trop ennuyeux d'examiner tous les Quarrés qu'on peut faire de la même maniere, & il me ſuffit d'en avoir expliqué la methode.

Démonſtration de la Methode.

Il eſt évident dans ces ſortes de Quarrés, que chaque bande doit être compoſée du nombre du milieu du Quarré multiplié ou pris autant de fois qu'il y a de cellules dans la bande; & par conſequent ſi l'excès des uns eſt égal au défaut des autres, ce qui eſt les differences, quoyque les uns ſoient en plus grand nombre que les autres, ces nombres enſemble feront autant de fois celui du milieu, qu'il y aura de nombres, comme on a pû voir dans l'exemple propoſé, & c'eſt ſur cette proprieté qu'eſt fondée cette regle, ce qui eſt facile à connoître.

Par ce moyen on peut trouver toutes les conſtructions poſſibles de cette eſpece de Quarrés.

Si l'on vouloit conſtruire un de ces Quarrés par enceintes ſans ſe ſervir de la methode précedente, on le pourra faire comme il ſuit. Mais on remarquera que tout l'artifice de cette conſtruction, conſiſte à faire que dans toutes les enceintes les cellules des angles oppoſés centralement, ſoient complément les uns des autres juſqu'à la ſomme du premier & du dernier nombre du Quarré, de même que tous les nombres oppoſés dans les bandes verticales & horiſontales; & enfin que la ſomme des nombres de chaque bande horizontale ou verticale ſoit égale au multiple du nombre du milieu, qui eſt la moitié des extrêmes, par le nombre des cellules de la bande; d'où il ſuit évidemment que ſi toutes les enceintes ont cette proprieté dans le Quarré, lorſqu'on aura ôté du Quarré quel nombre d'enceintes on voudra, le reſte ſera toujours Quarré Parfait.

On place donc d'abord dans les cellules du Quarré tous les nombres de ſuite du Quarré, comme on les voit dans la Figure, ce qu'on appelle l'ordre du Quarré naturel. On ſepare enſuite de ce Quarré toutes les enceintes juſqu'au milieu, & à cauſe que nous ſuppoſons le Quarré impair, il reſtera au milieu une cellule, laquelle contiendra le nombre moyen de tous les nombres du Quarré, lequel eſt auſſi égal à la moitié de la ſomme du premier & du dernier.

J'appelle la premiere enceinte, celle qui eſt autour de la cellule du milieu; celle qui ſuit ou qui enveloppe la premiere, ſera la ſeconde: la ſuivante ſera la troiſiéme, & ainſi juſqu'à l'enceinte exterieure ou derniere.

Dans toutes les enceintes on y conſidere d'abord huit cellules principales, & autant de nombres principaux: ces cellules ſont celles des quatres angles, & celles du mieu des quatre bandes, ſans avoir aucun égard aux autres cellules ni aux nombres qui y ſont.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Les premieres, troiſiémes, cinquiémes, ſeptiémes, &c. enceintes ſe font d'une façon, & les autres qui ſont les 2e. 4e, 6e, 8e &c. ſe font d'une autre. On n'employe dans chaque enceinte magique que les nombres qui ſont dans les mêmes enceintes naturelles.

Pour la conſtruction des premieres troiſiémes, &c. enceintes, on avance les huit nombres principaux qui ſont dans l'enceinte naturelle, seulement d'une moitié de bande, sans en changer l'ordre, ensorte que les nombres qui étoient au milieu des bandes de l'enceinte naturelle, se trouvent aux angles de l'enceinte magique, & ceux des angles se trouvent au milieu des bandes. Ensuite on transportera les milieux de chaque bande à leurs opposés, comme on peut voir, par exemple, dans la troisiéme enceinte de Quarré de 11 qu'on propose icy.

Il reste maintenant à disposer les autres nombres qui sont encore dans les bandes, s'il y en a, car la premiere n'en a point. Ces nombres restans dans chaque bande sont toûjours multiples de 4, lesquels sont distribués également des deux côtés de la cellule du milieu de la bande tant horizontale que verticale, & l'on ne cherche qu'à remplir la bande horizontale superieure & la verticale à gauche. On laissera donc la moitié des membres qui sont dans ces deux bandes à leur place naturelle, en observant toûjours que ceux qu'on laisse soient dans chaque bande également éloignés de la cellule du milieu, & les autres on les changera avec leurs oppsés qui sont dans la bande opposée, comme on voit dans la troisiéme enceinte, on a laissé 27 & 29 à leurs places, & l'on a mis à la place des deux autres 26 & 30, leus opposés 92, 96, qui étoient dans la bande horizontale inferieure. On a fait la même chose pour la verticale à gauche, en laissant 36 & 80 à leurs places, & mettant à la place de 47 & de 69 leurs opposés 53 & 75 ; par ce moyen on aura l'horizontale & la verticale toute disposée, & l'on placera dans les deux autres bandes opposées à celles-cy, & dans les cellules opposées, les nombres complémens de ceux qui sont placés, & toute l'enceinte magique sera faite avec les nombres de l'enceinte naurelle qui y étoient.

Pour les autres enceintes qui sont les secondes, quatriémes, sixiémes, &c. les nombres des quatre angles demeureront dans leur place naturelle, & ceux des milieux seront transposés tant de haut en bas que de droite à gauche, & ainsi ces huit nombres seront tous placés dans l'enceinte. Pour les restans qui seront toûjours en nombre im-

56	2	113	114	5	121	7	118	119	10	6
22	13	14	79	104	105	106	87	20	21	100
33	32	58	92	27	97	29	96	28	90	89
34	19	36	37	70	83	74	41	86	103	88
45	46	53	40	60	73	50	82	69	76	77
11	65	31	63	51	61	71	59	91	57	111
67	68	75	84	72	49	62	38	47	54	55
78	107	80	81	52	39	48	85	42	15	44
09	98	94	30	95	25	93	26	64	24	23
110	101	108	43	18	17	16	35	02	109	12
116	120	9	8	117	1	115	4	3	112	66

pair des deux côtés des milieux, on mettra dans la bande horizontale ſuperieure à la place des nombres qui ſont au milieu entre les angles & le milieu, ceux qui ſont dans les deux bandes verticales au milieu des deux moitiés d'embas, comme ici dans la quatriéme enceinte à la place de 15 on mettra 79, & à la place de 19 on mettra 87 ſans changer ces nombres de côté; & de même dans la premiere bande verticale laquelle eſt à gauche, à la place des nombres du milieu des deux moitiés, on y met les nombres du milieu de deux dernieres moitiés des deux horizontales naturelles, comme icy à la place de 35 on y met 19, & à la place de 79 on y met 107. Il reſte encore dans la bande horizontale ſuperieure & dans la verticale à gauche des nombres en quantité paire de chaque côté du milieu, dont une moitié ſera laiſſée dans ſa place, & l'on tranſpoſera l'autre moitié avec ſes oppoſés directement, en obſervant, comme on a fait cy-devant, de tranſpoſer dans la même bande ceux qui ſont également éloignés du milieu. Ces deux bandes étant difpofées, les deux autres qui leurs font oppofées le feront auffi, en mettant à l'oppofite des nombres qui font placés, leurs complémens à la fomme du premier & du dernier, & tous les nombres qui fervent à remplir l'enceinte magique font ceux de l'enceinte naturelle; car dans l'enceinte naturelle les nombres oppofés centralement font tous complémens les uns des autres.

Il eft facile à voir que ces fortes de Quarrés peuvent être variés en plufieurs manieres, ou par les differens nombres qu'on peut laiffer ou tranfpofer dans les enceintes, ou en retournant & renverfant quelques enceintes, ou en tranfpofant des bandes dans le Quarré Parfait, ou enfin en mettant dans les enceintes premiere, troifiéme, cinquiéme, &c. au lieu des huit nombres principaux qui s'y trouvent naturellement, les huit autres d'une autre enceinte de même nature, ce qui fe peut toûjours faire à caufe que dans ces enceintes les trois nombres principaux de chaque bande feront toûjours une fomme égale au triple de la cellule du milieu.

DEMONSTRATION.

LEMME I.

Dans le Quarré naturel toutes les bandes tant horizontales que verticales & diagonales, ont les nombres de leurs cellules en progreffion Arithmetique, comme il eft évident par la difpofition des nombres du Quarré; & par confequent tous ces nombres auront les proprietés de cette progreffion.

LEMME II.

Dans le Quarré naturel & dans une enceinte, fi l'on prend dans chacune des bandes horizontales ou verticales deux nombres également éloignés de celui du milieu des bandes ou des extrêmes, ces quatre nombres feront une fomme égale au quadruple de celle du milieu, ou au double

double de la somme des extrêmes du nombre quarré proposé.

Car ces deux nombres dans chaque bande opposée, feront une somme double du nombre du milieu de la bande, ou égale aux extrêmes par le Lemme I. & ces deux nombres du milieu ou ces deux extrêmes, qui se trouvent dans une bande prise de l'autre sens, feront encore par les mêmes raisons une somme double de la cellule du milieu, ou égale aux deux extrêmes : c'est pourquoi ces quatre nombres pris ensemble dans les deux bandes opposées, feront le quadruple de la cellule du milieu, ou le double des deux extrêmes.

Comme dans l'exemple proposé 26 & 30 font le double de 28 ; & 93 & 95 le double de 94 ; & enfin 28 & 94 le double de 61 : donc 26, 30, 93, 95 font le quadruple de 61, ou le double de 122, qui est la somme des extrêmes du Quarré. Ce sera la même chose pour les Quarrés qui n'ont point de milieu.

LEMME III.

Si dans quelque enceinte d'un Quarré naturel on prend les nombres de deux cellules du milieu, l'une horizontale & l'autre verticale, comme 50 & 60 dans nôtre exemple, & celui 73 de l'angle opposé à celui qui est entre les deux nombres qu'on a pris, ces trois nombres feront le triple de la cellule du milieu 61.

Car à cause de la progression Arithmetique on aura $\frac{1}{2}49 + \frac{1}{2}51 = 50$, & $\frac{1}{2}49 + \frac{1}{2}71 = 60$: mais aussi $\frac{1}{2}51 + \frac{1}{2}71 = 61$; donc les trois nombres $50 + 60 + 73$ se réduisent à $49 + 73 + 61$: mais encore $49 + 73 = 2 \times 61$; donc $50 + 60 + 73 = 3 \times 61$. Ce qu'il falloit prouver.

LEMME IV.

Lorsque dans les bandes d'une enceinte du Quarré naturel, il y a entre les angles & le milieu un nombre impair de cellules ; je dis que si dans une bande on laisse les angles à leur place, & qu'on change la cellule du milieu avec son opposée dans l'autre bande ; enfin si au lieu des nombres des cellules du milieu entre le milieu & les angles, que j'appelle les cellules des quarts, on substituë les nombres des cellules des quarts les plus éloignés de cette bande, qui sont dans les bandes à côté, on aura cinq nombres qui seront égaux à cinq fois celui du milieu.

Comme ici 37, 41, 70, 74, 83, & 37, 81, 40, 84, 63.

Car à cause de la progression Arithmetique dans chaque bande, on a $37 + 41 = 2 \times 39$, & $70 + 74 = 2 \times 72$: mais $2 \times 72 = 61 + 83$, donc les cinq nombres se réduisent à $2 \times 39 + 2 \times 83 + 61$: mais $2 \times 39 + 2 \times 83 = 4 \times 61$, donc les cinq nombres proposés $=$ à cinq fois 61.

Il est facile à connoître par ces Lemmes que la construction du Quarré que nous avons donnée est juste, puisqu'elle y est comprise & quelques autres encore que l'on pourroit faire.

PROPOSITION XIV.

Comparaison & rapport des methodes qui ont été données jusqu'à present, avec celles que j'ai proposées ici.

Le plus ancien Auteur, à ce que je crois, dont nous ayons des methodes pour disposer des nombres quarrés dans un Quarré qu'on appelle *Magique*, est Manuel Moscopule, dont j'ai trouvé un petit manuscrit dans la Bibliotheque du Roy.

Il donne deux manieres de faire les Quarrés impairs. La premiere est de compter les cellules par deux & par trois pour placer les nombres du Quarré de suite, comme on verra dans l'exemple suivant du Quarré de 5 de racine.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Il place toûjours l'unité dans la cellule qui est au-dessous de celle du milieu ; ensuite il compte deux cellules y comprenant celle-là même & en descendant directement, puis étant venu à la seconde il détourne dans celle qui lui est la plus proche à droite où il place le nombre 2.

Ensuite il compte encore deux cellules en dessous, y comprenant celle où est 2 : mais comme il n'y en a point, il remonte directement à celle qui est au haut du Quarré, & détournant à droite, il place 3 dans celle qui est voisine. Il poursuit de même, & lorsque les cellules manquent à droite, il retourne à la premiere bande qui est à gauche, comme on voit icy, & il poursuit de même jusqu'à la racine qui est 5.

Etant venu au nombre de la racine, il compte trois cellules en descendant directement, & y comprenant celle où est la racine; & dans la troisiéme sans détourner, il met le nombre suivant 6, & il continuë comme il a fait d'abord, comme s'il commençoit par le nombre 6, jusqu'au nombre 10 qui est un multiple de la racine : mais pour placer le nombre suivant 11, il compte encore trois cellules en dessous, comme il a fait pour le nombre 6, & c'est la même chose aprés tous les multiples de la racine, & par ce moyen il acheve le Quarré, comme on le voit icy.

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
17	5	13	21	9
11	24	7	20	3

Pour sa seconde maniere, où il compte par trois & par cinq, comme il dit, il met toûjours l'unité au milieu de la bande horizontale superieure, & en comptant trois cellules en descendant y compris celle qui est remplie, il place 2 dans celle qui est la plus proche à droite de la troisiéme; & comptant encore trois cellules en descendant, il met à la droite le nombre 3, & il continuë de même jusqu'à la racine en remontant en haut quand il est au bas du Quarré, & passant à la premiere bande verticale à gauche quand il n'y a plus de cellules à la droite, de la même maniere qu'il a fait dans l'autre methode.

Mais quand il est venu jusqu'à la racine ou à ses multiples, il compte cinq cellules en descendant directement, & il place dans la cinquiéme le nombre, comme 6, qui recommence un autre multiple des racines, comme on voit dans cette Figure du Quarré.

La premiere methode de cet Auteur n'est qu'un cas de celle que j'ay donnée dans ma dixiéme Proposition, comme on pourra voir icy en faisant la résolution du Quarré fait par sa methode en deux Quarrés Primitifs, dont l'un contiendra les nombres simples, & l'autre les racines.

Premier.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

Second.

10	20	5	15	0
0	10	20	5	15
15	0	10	20	5
5	15	0	10	20
20	5	15	0	10

Dans ces deux Quarrés, qui ne sont qu'un cas des regles generales des premieres Propositions, comme je l'ay marqué dans ma dixiéme, tous les nombres opposés centralement & également éloignés du centre, étant pris deux à deux, font une somme égale au double de celui de la cellule du milieu.

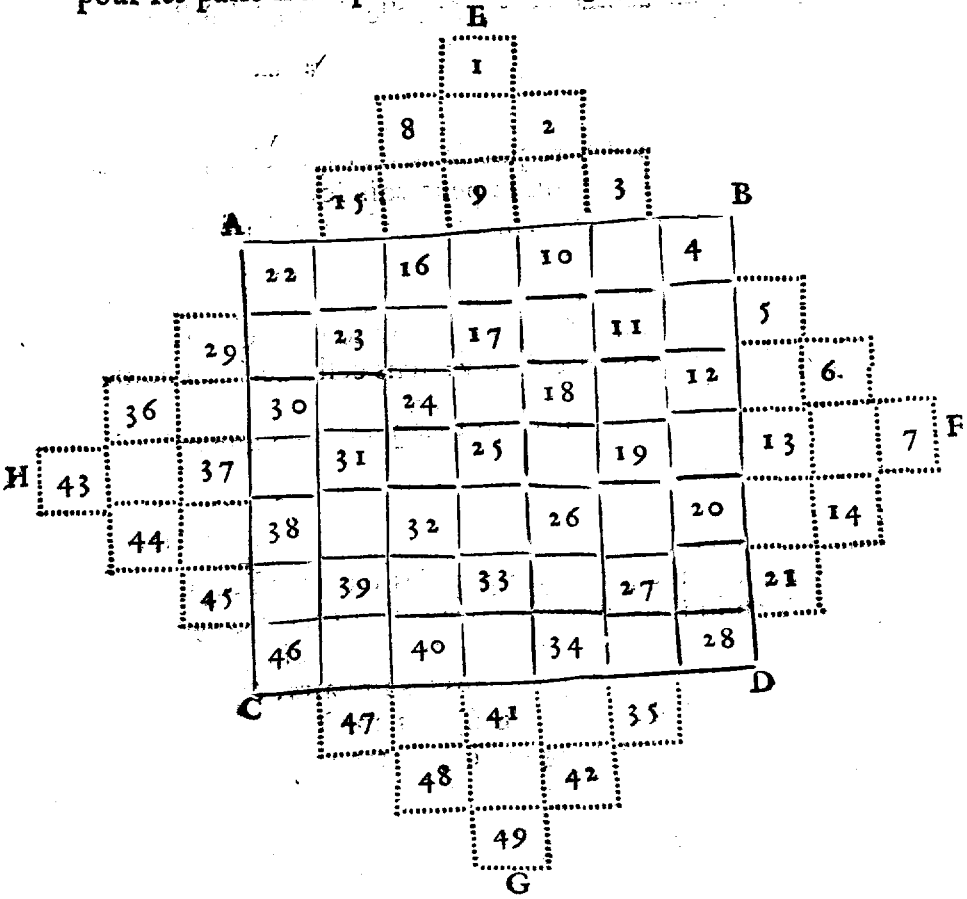
Car le premier de ces Quarrés qui contient les nombres simples, a dans sa bande horizontale du milieu ces nombres ordonnés suivant la regle de cette Proposition, & la bande horizontale suivante recommence par le premier nombre de l'ordre aprés le premier de la bande superieure. C'est-pourquoy le même nombre se trouvera repeté dans la diagonale qui descend de droite à gauche, & ce nombre étant aussi celui de la cellule du milieu du Quarré est le moyen de ces nombres, & le Quarré sera bon par ce qui a été remarqué dans la même Proposition X.

Pour le Quarré des racines il suit aussi les mêmes regles, & comme ces deux Quarrés sont formés par deux repetitions differentes des nombres de l'ordre, le Quarré Parfait sera bon.

Pour ce qui est de la seconde methode, ce n'est aussi qu'un cas de ma sixiéme Proposition; car ce Quarré étant réduit dans ses deux primitifs, ou trouvera l'ordre des nombres simples de la premiere bande horizontale 5, 3, 1, 4, 2, dans l'exemple cy-dessus, & celui des racines 5, 15, 0, 10, 20, & celui des nombres simples se fait en recommençant les bandes horizontales suivantes par le premier qui suit celui du milieu dans l'ordre de la bande superieure; & celui des racines par celui du milieu de la bande superieure

On remarquera que par cette methode les nombres qui recommencent les bandes horizontales des Quarrés Primitifs ne sont pas toûjours le même quantiéme aprés le premier, mais differens dans chaque Quarré ; ce qui ne change pas les regles de ma sixiéme Proposition.

M. Bachet dans ses Problêmes plaisans imprimés en 1624, dit qu'il a vû les sept nombres Quarrés depuis 3 de racine jusqu'à 9 tout disposés suivant la question des Quarrés Magiques, & c'est comme ils sont dans Agrippa ; mais qu'il n'a trouvé en aucun endroit de regle pour les faire : que pour ce qui regarde les Quarrés impairs, il en a inventé une qu'il donne comme on la voit icy ; mais que pour les pairs il n'a pû rien trouver qui l'ait satisfait.



Il fait d'abord le Quarré *A B C D* comme dans cet exemple de 7 de racine, puis il ajoûte à chaque côté de ce Quarré des eſpeces de pyramides de cellules qui vont toûjours en diminuant de deux cellules juſqu'à l'unité; ainſi le premier Quarré *ABCD* ſe trouve changé en un autre Quarré plus grand *EFGH*, dont les cellules quarrées ſont poſées ſur l'angle par rapport aux côtés de ce Quarré, & chacun de ces côtés n'a auſſi que ſept cellules; il écrit dans ce nouveau Quarré *EFGH* tous les nombres de ſuite du Quarré propoſé, comme on les voit icy.

Enſuite il transporte les nombres des pyramides dans les cellules vacantes du premier Quarré, celle d'enhaut en bas, celle de bas en haut, & celle d'un côté à l'autre, ſans les renverſer ni les retourner, & par ce moyen tout le premier Quarré eſt rempli ſuivant ce qui eſt requis dans la Propoſition, comme on le peut voir icy.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Il dit qu'on peut faire la même choſe avec d'autres nombres, pourvû qu'ils ſoient en progreſſion Arithmetique.

Cette methode donne la même diſpoſition que la premiere de Moſcopule; c'eſt pourquoy tout ce que j'ay dit de celle-là ſervira pour celle-cy: mais celle de Moſcopule eſt plus ſimple que celle de Bachet.

M. Frenicle donne d'abord la même regle que celle de Bachet, comme on peut voir dans le Traité de ces ſortes de Quarrés qu'il avoit compoſé, lequel j'ay fait imprimer ſur ſes manuſcrits. Il donne enſuite des variations de ces Quarrés, comme je les ay marquées dans ma Propoſition 11. Mais enfin il propoſe de faire ces ſortes de Quarrés de telle maniere, que ſi l'on en ôte des enceintes juſqu'au Quarré du milieu, qui eſt 1 dans les impairs, & 4 dans les pairs, le Quarré reſtant ſera toûjours un Quarré Magique.

Il s'étend fort au long ſur ces ſortes de Quarrés; mais la methode qu'il donne pour les faire n'eſt qu'un ſimple tatonnement pour choiſir les nombres du Quarré. Il eſt vrai qu'il fait plusieurs remarques, lesquelles peuvent beaucoup servir pour la construction..

J'ai expliqué dans ma treiziéme Proposition une maniere assez facile & simple pour trouver tous les Quarrés possibles d'une même racine lesquels ayent cette proprieté, & j'ay donné ensuite une methode generale pour faire un de ces Quarrés qui peut être varié en plusieurs manieres.

La construction de cette espece de Quarré Magique étoit un Problême qui s'étoit rendu celebre du tems de M. Frenicle, & la maniere de le construire paroissoit plus simple que celle dont on se servoit pour ceux qui n'avoient pas cette proprieté, car la démonstration en étoit évidente. C'est-pourquoy l'Auteur des nouveaux Elemens de Geometrie ne donne que cette construction, que le Pere Prestet a rendu plus claire dans ses nouveaux Elemens de Mathematique.

M. de la Louberre Envoyé extraordinaire auprès du Roy de Siam, rapporte dans la Relation de son voyage fait en 1687, qu'il avoit appris que les Indiens de Surate avoient une methode de ranger les Quarrés Magiques; mais qu'il ne peut en avoir connoissance que pour les impairs, qu'il rapporte comme il suit.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

On met l'unité au milieu de la premiere bande horizontale, & en montant diagonalement de gauche à droite. On place tous les nombres de suite du Quarré, & quand les bandes manquent en haut on descend en bas, & quand elles manquent à droite on passe à gauche; cela se fait jusqu'à ce que l'on trouve la cellule remplie où il faudroit aller, ce qui arrive lorsque les nombres sont les multiples de la racine; alors on met le nombre suivant dans la cellule immediatement au-dessous du dernier, & par ce moyen on remplit tout le Quarré.

Il est aisé de voir que cette construction n'est qu'un cas de ma dixiéme Proposition, où toutes les cellules oppoſées centralement & également éloignées du centre, font une ſomme égale à celle des deux nombres extrêmes. Il donne enſuite un exemple tiré d'Agrippa, qui eſt fait ſuivant la premiere regle de Moſcopule.

Mais comme M. Bachet n'avoit point donné de démonſtration de ſa methode, M. de la Louberre dit qu'il l'a cherchée. Il la donne enſuite, & elle me paroît fort ingenieuſe, quoyque difficile. Il en tire des manieres de varier ces Quarrés.

Il ajoûte enfin une penſée de M. de Malezieu Intendant de Monſeigneur le Duc du Maine, ſur les raiſons qu'on a euës de diſpoſer les Quarrés Magiques ſuivant la methode Indienne, qui eſt celle, à ce qu'il dit, qui peut les mieux executer.

M. Poignard grand Chanoine de Bruxelles, qui a fait imprimer l'année derniere un Traité de ces ſortes de Quarrés ſous le nom de *Quarrés ſublimes*, propoſe d'abord ſa methode generale dans la premiere Propoſition, qui eſt, comme on peut voir, toute la même que celle que donne M. de la Louberre pour la Methode Indienne. Sa ſeconde Propoſition contient, à ce qu'il dit, une methode generale pour la variation de ces Quarrés; *ſçavoir, en partageant les termes de la progreſſion par de petits traits de* 5 *en* 5, *parce que le côté du Quarré eſt de cinq cellules, ce qui fera cinq membres chacun de cinq termes, comme il s'enſuit* 1, 2, 3, 4, 5,| 6, 7, 8, 9, 10,| 11, 12, *&c. Aprés avoir ainſi partagé tous les chiffres de la progreſſion, on variera chaque membre l'un comme l'autre par la tranſpoſition uniforme des termes de chaque membre: par exemple* 3, 1, 4, 5, 2,| 8, 6, 9, 10, 7,| 13, 11, 14, *& l'on formera avec ces membres ainſi diſpoſés le Quarré propoſé, en ecrivant de ſuite les chiffres ſelon la methode generale de la Propoſition I.*

Cette maniere de varier les Quarrés eſt fort belle & fort facile, mais elle n'eſt pas generale comme il dit; car elle pourra manquer dans des Quarrés dont les racines ne ſont pas des nombres premiers, comme on peut voir icy dans le Quarré de 9 de racine: car l'ordre des nombres de

51	55	68	80	3	13	20	36	43
58	65	81	7	15	19	32	44	48
64	77	8	12	22	29	45	52	60
74	9	16	24	28	41	53	57	67
5	17	21	31	38	54	61	69	73
18	25	33	37	50	62	66	76	2
26	30	40	47	63	70	78	1	14
34	42	46	59	71	75	4	11	27
39	49	56	72	79	6	10	23	35

de la progreſſion étant diſpoſé à volonté, & comme on le voit icy 3, 6, 4, 1, 2, 5, 9, 8, 7, | 12, 15, 13, 10, 11, 14, 18, 17, 16, | 21 24, &c. & rempliſſant le Quarré ſuivant la methode generale, on trouvera que la ſomme des nombres de toutes les bandes ſera 369, hormis la diagonale qui deſcend de gauche à droite qui a 372.

Il eſt facile à voir par ce que j'ay expliqué dans mes trois premieres Propoſitions, que ce défaut vient de ce que par la conſtruction de M. Poignard, il ſe trouve que le Quarré Primitif des nombres ſimples de la racine recommence ſes bandes horizontales ſuivantes par le cinquiéme de l'ordre ſuperieur dans ce Quarré, & que la diagonale qui deſcend de gauche à droite aura tous les ſixiémes de l'ordre aprés le premier, & ſix étant les deux tiers de la racine, les nombres ſimples y ſeront repetés de trois en trois & trois fois, & ce ſeront les nombres 6, 2, 8: mais ces nombres faiſant 16 qui differe d'une unité du nombre 15 qui eſt le tiers de la ſomme de ceux de la racine, il ſe trouvera dans cette bande 3. unités de trop. Car pour ce qui eſt des Racines, le Quarré Primitif ſe trouve diſpoſé comme il faut, en ce que le nombre 36 qui eſt le moyen des racines, ſera dans toutes les cellules de la bande diagonale qui deſcend de droite à gauche, ce qui doit arriver par cette methode.

On auroit pû prendre d'autres ordres des nombres ſimples pour faire réüſſir la methode de M. Poignard dans ce Quarré, comme 3, 5, 4, 1, 2, 6, 8, 7, pour les nombres de la premiere racine; car alors les nombres de la diagonale auroient été 5, 2, 8, repetés trois fois qui auroient fait 45 dans le Quarré Primitif, ce qu'il falloit; mais la methode ne ſera pas generale.

PROPOSITION XV.

Examen du nombre des variations de ces Quarrés par la methode que j'ay proposée.

Il eſt certain par ma methode que le nombre des variations ſera plus grand à proportion que la racine du Quarré ſera plus grande: mais pour faire voir l'ëtenduë de ces variations, je ne les conſidereray que dans le Quarré de 7 de racine.

On ſçait par les regles des combinaiſons ordinaires, qu'on peut donner à 7 choſes ou nombres, & ſeulement par rapport aux places les unes à l'égard des autres 5040 diſpoſitions. Ainſi dans le Quarré que je propoſe on peut varier l'ordre des nombres ſimples dans le premier Quarré Primitif & dans la premiere bande horizonrale en 5040 manieres, & de cet ordre dépend toute la diſpoſition du Quarré ſuivant les differentes repetitions dans les bandes horizontales. Ce ſera la même choſe pour le Quarré Primitif des racines.

On voit donc de-là que ſi l'on diſpoſe le premier Quarré Primitif que je ſuppoſe celui des nombres ſimples par la premiere Propoſition, & celui des racines par la ſeconde, ils auront chacun 5040 variations, dont chacune de l'un pourra être combinée avec tout le nombre des autres, & ce qui produira autant de Quarrés Parfaits; on aura donc par ce ſeul moyen 25, 401, 600 variations de ce Quarré.

Mais comme on peut prendre par la troiſiéme Propoſition d'autres repetitions dans l'ordre pour former les bandes horizontales inferieures des Quarrés Primitifs, comme le troiſiéme, le quatriéme, &c. de l'ordre de la bande horizontale ſuperieure, on pourra combiner les Quarrés Primitifs en 12 manieres differentes, ſans parler de la repetition par le premier & le dernier de l'ordre, on aura donc pour ces variations 12 fois le nombre qu'on vient de trouver, ce qui eſt 304, 819, 208 variations.

Il y a encore les repetitions par le premier aprés le premier de l'ordre & le dernier, avec la sujetion que le même nombre qui se trouve dans toute la diagonale, soit le moyen de l'ordre; & comme on le peut faire dans l'un & dans l'autre Quarré Primitif séparément, on aura 29, 030, 400 variations, lesquelles étant jointes aux premieres feront en tout par cette methode 334; 886, 400 variations de ce Quarré de 7.

Mais il y en a encore une infinité d'autres qui ne se rapportent point à cette regle, & dont j'ay donné un échantillon dans la douziéme Proposition, & entre lesquels sont ceux dont les enceintes étant ôtées, il reste encore des Quarrés Parfaits.

Dans tous ces Quarrés on ne compte point ceux qui se feroient par le renversement ou par le retournement de ces Quarrés, puisqu'en effet ils ne seroient pas differens dans l'arrangement de leurs nombres.

DE L'INVERSE DES TANGENTES ET DE SON USAGE.

PAR M. ROLLE.

QUoyque les secondes formules des Tangentes & celles d'un ordre plus élevé ne soient pas d'un aussi grand usage que les autres formules de Tangentes, il est peut-être bon de marquer en peu de mots comment on pourroit faire l'Inverse de ces formules du second ordre, & de celles d'un ordre plus élevé, par le moyen des regles que j'ay proposées dans les quatre Memoires que je donnay à l'Academie en 1704 pour l'Inverse des premieres formules, & qui ont été imprimés dans la même année: C'est la premiere chose que je me suis proposé icy. Ensuite j'y mar- 1705. 23. Juin.

Nouvelles constructions et considérations sur les carrés magiques, avec les démonstrations - M. DE LA HIRE
Académie royale des sciences - Année 1705

MATHÉMATIQUE