



**HAL**  
open science

# De l'inverse des tangentes et observations sur les tangentes

Michel Rolle

► **To cite this version:**

Michel Rolle. De l'inverse des tangentes et observations sur les tangentes. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1705. ads-00105182

**HAL Id: ads-00105182**

**<https://hal.science/ads-00105182>**

Submitted on 10 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## DE L'INVERSE

## DES TANGENTES

PAR M. ROLLE.

Pour former toutes les methodes des Tangentes , il faudroit avoir une définition exacte & positive de toutes les Courbes ; & come l'on n'a point cette définition , l'on ne peut pas dire que l'on ait toutes ces methodes , ni assurer par consequent que l'on ait toutes les Inverses des Tangentes. Mais de sçavans Géometres ont donné le moyen de former ou de concevoir des Courbes de differens ordres par des équations d'Algebre , par la projection des corps , par des mouvemens composez , & en bien d'autres manieres. Ils ont aussi donné des methodes pour determiner des Tangentes de ces Courbes ; & il suffit d'en avoir bien conçu une ou deux pour voir jusqu'ou les autres methodes se peuvent étendre.

1703.  
21. & 24.  
Janvier.

Comme la même Analyse & le même esprit doivent regner dans toutes ces methodes , il est vrai de dire aussi que l'on doit suivre le même esprit & la même Analyse dans leurs Inverses. C'est en cela que l'on reconnoît les voies generales dans les recherches de la Geometrie ; & c'est aussi ce caractere d'universalité que l'on peut voir dans les quatre Memoires que je donnay a l'Academie l'année dernière 1704 sur l'Inverse des Tangentes , & qui ont été Imprimez la même année chez le sieur Boudot Libraire de la Compagnie. Mais on le verra encore d'une autre maniere icy par l'application que j'en feray à des methodes , qui sont differentes de celle que j'avois prise pour exemple dans ces quatre Memoires.

Comme les operations varient dans les methodes des Tangentes à mesure que l'on fait varier les conditions qui determinent les Courbes , il faut aussi que les operations

varient dans une Inverse, selon les changemens que l'on fait dans les methodes dont elle est l'Inverse, & l'on verra qu'en cela il ne se trouve point de difficulté considerable, si l'on compare ce que j'ai dit dans ces quatre Memoires à l'application que j'en vais faire icy.

Déjà l'on sçait que pour déterminer les Tangentes d'une Courbe, il faut que le nombre des formules qui servent à les déterminer soit proportionné au nombre des conditions qui constituënt la Courbe; de maniere que l'Inverse d'une methode de Tangentes est souvent le retour de plusieurs formules à une égalité generatrice. Mais parmi ces formules il y en a une que l'on considere comme la principale, & qui l'est en effet. C'est la formule dont les conditions changent toujours à mesure que l'on fait varier les conditions de l'égalité generatrice, & cette formule est encore capable d'une infinité de changemens dans sa forme. Les autres formules peuvent varier dans leur forme, mais elles sont comme immuables pour les conditions: & ce n'est point dans ces formules aussi où se trouvent les difficultés de l'Inverse. Il arrive néanmoins que ces formules entrent dans cette Inverse, & que quelques-unes y entrent necessairement, comme on le va voir icy.

ARTICLE I. Soit pour le premier exemple d'une methode de Tangentes dont on veut faire le retour, celle qu'on a donnée dans la seconde Section de l'Analyse des Infiniment petits, Proposition 4. page 18. & que la formule principale proposée soit celle que l'on voit icy en *A*:

$$A... xxdz + ydx = 2xydy.$$

Pour trouver l'égalité generatrice de cette formule & se servir des Regles que j'ai données pour cette recherche dans les Memoires dont j'ay parlé icy, il faut supposer une égalité indéterminée; & si l'on consulte sur cela les Memoires que je donnay à l'Academie le 1 & le 8 Mars 1704, on trouvera parmi les égalités qu'ils fournissent, celle qui est marquée icy en *B*.

$$B... byy = lxz.$$

Suivant le second Memoire & ce que j'avois dit sur ce

fujet dans le Journal du 28 May 1694, on trouvera que la premiere formule de cette égalité *B* est celle qu'on voit icy en *C*:

$$C \dots zbydy = lxdz + lzd x.$$

Comme il y a trois inconnuës relatives, & qu'en pareil cas elles gardent toujourns entr'elles la loy des homogenes, il faut autant d'égalités qu'il y a de ces inconnuës pour les faire évanouir. Mais l'on n'a que les égalités *A* & *C* pour les trois relatives *dy*, *dz* *dx*. Ainsi il faut une troisieme égalité ou une troisieme Analogie, & cette Analogie ou cette égalité doit être prise parmi celles de la methode dont on veut faire le retour, que j'ay nommées *égalités immuables*. La plus commode est celle qu'on voit icy en *D*.

$$D. tx:zs::dx:dz. \text{ Donc } txdz = zsd x.$$

Ayant fait évanouir les trois inconnuës relatives *dz*, *dx*, *dy* par le moyen des trois égalités *A*, *C*, *D*, on aura la réduite marquée *E*.

$$E. htyy - xtlz + bzsx - xzls = 0.$$

Divisant cette réduite par la supposée, *B*, comme je l'ay dit dans la Regle du 8 Mars 1704; & prenant l'inconnuë *y* pour la directrice de la division, le reste donnera l'égalité auxiliaire marquée *F*.

$$F. \dots xzsl - xzsh = 0.$$

Ainsi l'on aura  $h=l$  pour la résolution de cette égalité; & comme elle est seule dans le Problème auxiliaire que prescrit la methode Inverse, il reste seulement à substituer *l* au lieu de *b*, ou *b* au lieu de *l* dans l'égalité supposée en *b*, & l'on aura la résultante *G*.

$$G. \dots yy = xz.$$

De maniere que selon cette methode Inverse, l'égalité *G* est l'égalité generatrice dont on s'étoit proposé la recherche.

*Observation.* Quoyqu'au lieu de  $-dz$  de l'Analyse des Infiniment petits j'aye mis icy  $+dz$ , cela ne change rien pour les effets dans cette occasion, & je n'ay fait ce changement de signe que pour me conformer aux principes

dont je me fers. Ce qui sera plus amplement expliqué dans un autre Memoire, quand on fera l'Inverse des secondes formules, & des formules d'un ordre plus élevé.

ARTICLE II. Comme l'expression de la soutangente ne se trouve point dans l'exemple de l'article précédent, & qu'il n'y a dans cet exemple que trois inconnues relatives; j'ay crû qu'il étoit bon de proposer un autre exemple où se trouve cette expression de soutangente, & dans lequel il y ait aussi un plus grand nombre de ces inconnues relatives.

Pour cela je prendray la 12<sup>e</sup> proposition, ou la methode des Tangentes qu'on a donnée dans l'Analyse des Infiniment petits article 37. page 34. Mais je me serviray des expressions ordinaires dans le détail du calcul, pour des raisons que je marqueray dans la suite.

Dans cette 12<sup>e</sup> proposition toutes les inconnues qui peuvent entrer dans l'équation génératrice sont celles que l'on voit icy dans la colonne *P*, & leurs relatives sont dans la colonne *R*, à côté de laquelle se trouve aussi une autre colonne où je marque ces relatives à la maniere de M. de Leibniz, & c'est aussi de la même maniere qu'on les a marquées dans l'Analyse des Infiniment petits.

<i>P</i>	. . . . .	<i>R</i> .	
<i>s</i>	. . . . .	<i>m</i>	ou . . . <i>ds</i> .
<i>z</i>	. . . . .	<i>e</i>	ou . . . <i>dz</i> .
<i>t</i>	. . . . .	<i>p</i>	ou . . . <i>dt</i> .
<i>v</i>	. . . . .	<i>l</i>	ou . . . — <i>dv</i> .
<i>x</i>	. . . . .	<i>h</i>	ou . . . <i>dx</i> .
<i>y</i>	. . . . .	<i>r</i>	ou . . . — <i>dy</i> .

L'expression de la soutangente est marquée par *P T* dans cette Analyse, mais cette expression seroit tres-incommode pour l'Inverse. Ce qui m'a obligé de marquer cette soutangente par une autre lettre. Cette lettre est *f*.

Cela posé, les formules immuables de la proposition dont on demande l'Inverse, se peuvent concevoir sous la forme que l'on voit icy dans la colonne *S*,

$$\begin{array}{l}
 S \\
 m = \frac{byz}{f} \dots \text{ou} \dots mf = hyz. \\
 e = \frac{hyz}{bf} \dots \text{ou} \dots ebf = hyz. \\
 p = hv. \\
 l = \frac{bv}{a} \dots \text{ou} \dots al = hv. \\
 h = h \dots \text{ou} \dots h = \text{à foy-même.} \\
 r = \frac{by}{f} \dots \text{ou} \dots fr = hy.
 \end{array}$$

Pour la formule principale dont il faut trouver légalité generatrice, je prends celle qui est marquée icy en *A*.

$$A. 2ezv + vm - pv + sl + zxl - vvh - ls = \theta.$$

Les Regles que j'ay proposées à l'Academie dans les Memoires du premier & du 8<sup>e</sup> Mars 1704, fournissent une suite de generatrices supposées entre des limites; parmi lesquelles generatrices on trouvera celle qui est marquée icy en *B*.

$$B. \dots es + dzx = g\epsilon + qvx.$$

Si l'on prend la premiere formule de cette generatrice *B* selon le Memoire du 8<sup>e</sup> Mars 1704, on trouvera cette formule comme elle est icy en *C*.

$$C. \dots cm + 2dze = pg + qvh - qxl.$$

Comparant les deux formules *A* & *C* avec les autres formules qui sont en *S* pour faire évanouir les inconnus relatives, suivant ce que j'ay dit dans ce Memoire du 8<sup>e</sup> Mars, il ne restera plus qu'à faire évanouir l'expression de la sôutangente, & cela est aisé; parceque le calcul conduit aux deux égalités marquées *D*.

$$D. \begin{cases} f = \frac{cabyx + 2adxyz}{gabv - qbxv + qabv} \\ f = \frac{abyx + 2axyz}{bs - bzz - bs + 2abv} \end{cases}$$

Comparant ces deux valeurs de *f* pour la faire évanouir on trouvera, en délivrant de fractions, que la réduite est comme on la voit icy en *E*. Où il faut observer que j'ay supposé  $q + g = n$ , pour abregger le calcul.

D iij

$$E. \left. \begin{array}{l} + 2dzzt - 2dz^2 - 2dszz + bqxyz \\ + cbzt - cbz^2 + 2qxyz - nabvz \\ + 4advzz + 2abcvz \\ - 2anvzz - bcsz \end{array} \right\} = 0.$$

Suivant le Memoire du 8<sup>e</sup> Mars 1704, il faut diviser cette réduite par la supposée B; & si l'on prend  $t$  pour l'inconnuë directrice, on trouvera le reste marqué F.

$$F. \begin{array}{l} + 2ddz^2 + bcdz^2 - 2qdvxxz - bcqvxxz. \\ - 2gdz^2 - bcgz^2 + 2qgvxxz - ganbvz. \\ + 2cdszz + 2abcgvz. \\ - 2gdszz + ccbsz. \\ - 2ganvzz - bcgsz. \\ + 4advzz + qbgvxxz. \end{array}$$

Par la même Regle du 8<sup>e</sup> Mars 1704, il faut distribuer ce reste pour en tirer un Problème auxiliaire, & il faut encore selon cette regle distinguer en F tous les termes que marquent les monomes qui sont icy en G.

$$G...z^2. z'. vxxz. szz. vzz. vxx. vx. sz.$$

De maniere que le Problème auxiliaire sera composé de huit égalités fort simples qu'il faut résoudre. Mais avant que d'operer, ou bien dans l'operation, on se souviendra de substituer  $n$  au lieu de  $q + g$ , selon la supposition abregeante dont il a été parlé cy-dessus, & l'on trouvera pour la résolution de ce Problème,  $d = c. g = c. q = c.$

Ces valeurs étant substituées dans la supposée B, on aura la résultante H.

$$H...s + zz = t + v.x.$$

Ensorte que cette égalité H est la generatrice de la formule proposée A. Ce qu'il falloit trouver.

*Remarque.* Lorsque d'habiles Geometres se sont proposés l'Inverse des Tangentes, ils n'ont d'abord envisagé que les lignes Geometriques qui se forment sur un axe, & c'est aussi ce qu'il y a de plus considerable dans ce projet. Mais ils ne croyoient peut-être pas qu'une même formule pût

avoir plusieurs generatrices, ou qu'une même égalité différentielle eût différentes integrales. Cependant l'on a pu voir dans le Memoire que je donnay à l'Academie le 8<sup>e</sup> Mars, qu'une même formule convient à une parabole & à une hyperbole, à un cercle & à une ellipse, & que l'ellipse & l'hyperbole peuvent varier en une infinité de manieres. Voicy un autre exemple des Courbes formées sur un axe, ou l'on verra qu'une même égalité différentielle peut avoir des integrales de differens genres.

ARTICLE III. Il y a des égalités différentielles qui ont des integrales de divers genres. J'en ay averti dans le quatrième Memoire que je donnay à l'Academie en 1704 sur l'Inverse des Tangentes page 19, & l'on peut aussi s'en assurer aisément par les regles abregeantes que j'ay proposées dans ce quatrième Memoire.

Soit pour exemple l'égalité différentielle qui est marquée icy en *A*.

$$A... 2x^3dy - 2axydy + yxxdy - aydx = 0.$$

Et que la supposée soit  $sy = hx^c$ . Alors sa difference sera  $dy = \frac{chx^{c-1}dx}{s}$ . Et comparant ces trois égalités pour faire évanouïr  $y$  &  $dy$ , on aura la réduite *D*.

$$D... 2csx^{c+1} - 2cakhx^{c+1} + sx^{c+1} - ahx^c = 0.$$

Cette réduite se distribuë en deux manieres, selon ce qui a été dit dans le quatrième Memoire pages 18 & 19.

Pour la premiere distribution je compare le premier terme au second, & le troisieme au quatrième. Ce qui donne les deux Problèmes auxiliaires *F* & *G*.

$$F \begin{cases} c + 2 = 2c. \\ 2cs = 2cakh. \\ sy = hx^c. \end{cases} \quad G \begin{cases} c + 2 = 2c. \\ s - ah = 0. \\ sy = hx^c. \end{cases}$$

Chacun de ces Problèmes donne  $c = 2$ ,  $s = ah$ ; & substituant ces deux valeurs dans la supposée  $sy = hx^c$ , on aura  $ay = xx$  pour une des integrales de la différentielle proposée *A*.

Dans la seconde distribution de la réduite *D*, je prends.



le premier terme avec le troisieme , & le second avec le quatrieme. Ce qui donne les deux Problèmes auxiliaires *K* & *M*.

$$K \begin{cases} c + 2 = c + 2. \\ 2cs + 1s = a. \\ sy = hx^c. \end{cases} \quad M \begin{cases} 2c = 2c. \\ -2ach - 2ah = a. \\ sy = hx^c. \end{cases}$$

L'un & l'autre donne  $c = -\frac{1}{2}$ , & cette valeur substituée dans l'égalité supposée, on trouve  $sy = hx^{-\frac{1}{2}}$ . Donc  $ssyy = hbx^{-\frac{1}{2}}$ . Donc  $ssyyx = hb$ , qui est la seconde integrale Geometrique de la proposée. Et comme cette integrale est une hyperbole du second genre dont le parametre est indéterminé, on voit qu'elle peut varier en une infinité de manieres. Ainsi l'on peut voir de ce qui a été dit dans ce troisieme Article, que non-seulement il se trouve deux integrales de differens genres pour l'égalité differentielle *A*; mais aussi qu'une de ces integrales est indéterminée. Ce qui peut donner occasion de faire des remarques fort considerables sur l'usage du calcul integral.

## OBSERVATIONS

SUR

DES PLATES DE VENTRE.

PAR M. LITRE.

1705.  
5. Fevriet.

**U**N homme âgé de 34. ans, d'une bonne constitution, mais foible d'esprit depuis cinq ans, tomba dans un violent accès de folie, pendant lequel étant au lit couché sur le dos, il se donna dix-huit coups de couteau dans le ventre, sans sentir, à ce qu'il me dit, aucune douleur, s'imaginant seulement qu'il enfonçoit le couteau dans une motte de beurre. La lame de ce couteau étoit longue de cinq pouces, & avoit sept lignes de largeur près du manche; elle alloit toujours en diminuant jusqu'à la pointe.

Dix

---

De l' inverse des tangentes - M. ROLLE  
Académie royale des sciences - Année 1705

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE

---