

O B S E R V A T I O N S
S U R L E S T A N G E N T E S.

P A R M. R O L L E.

1705.
5. Aoult.

C'Est un préjugé de plusieurs Geometres, que la Tangente d'une Courbe est toujours perpendiculaire à un des deux axes generateurs lorsque la soubtangente est égale à . Il est vrai qu'en cela ils ont tacitement supposé que les appliquées font toujours des angles droits avec leur axe, & qu'ils ne reconnoissent point d'autres Tangentes que celles que j'ay nommées *Tangentes absolues* dans le Journal du 13 Avril 1702. Mais avec ces conditions il ne seroit pas encore toujours vrai de dire que la soubtangente étant θ , la Tangente soit perpendiculaire à l'axe. J'en ay donné des preuves pour les points les plus ordinaires des Courbes dans les Memoires de l'Academie de l'année 1703 page 137. Voici d'autres observations sur des points extraordinaires, où l'on verra que pour un exemple dans lequel l'axe & la Tangente font un angle droit, il y en a une infinité où cela n'arrive point.

Pour cela, soient proposées les Courbes que fournit l'égalité marquée CC.

$$CC \dots y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$$

Et que l'on veuille trouver les Tangentes de ces Courbes au point que déterminent $y = \theta$ & $x = \theta$. Alors il faudra faire évanouir les signes radicaux suivant la methode dont je me sers, & ces signes ayant disparu, on aura la proposée sous la forme que l'on voit icy en A.

$$A \dots aaxx - 2ayyx + y^2 = \theta. \\ - 2abyx - 2by^2 \\ + bbyy.$$

Et faisant $x = z - c$ pour avoir la situation de la Tangente, on trouve la résultante B.

$$\begin{aligned}
 B \dots aaxz - 2ayyz + y^2 &= \theta. \\
 - 2abyz - 2by^2 & \\
 - 2aacz + bbyy & \\
 + 2acyy & \\
 + 2abcy & \\
 + aacc. &
 \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on prend s pour la soûtangente des y , & t pour la soûtangente des z , & que l'on cherche leurs valeurs dans l'égalité B par le moyen des Regles que j'ay données dans le Journal du 13 Avril 1702, on trouvera les formules qui sont marquées icy en M & en P .

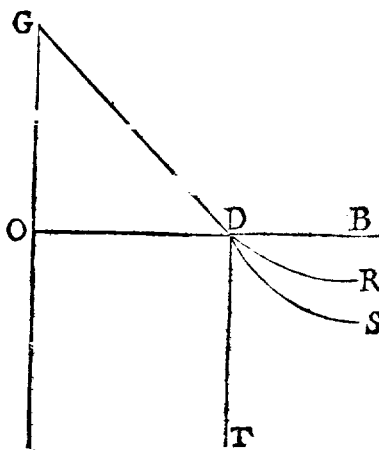
$$M \dots s = \frac{ay}{b}. \text{ ou } b : a :: z : s.$$

$$P \dots t = \frac{by}{a}. \text{ ou } b : a :: t : y.$$

Mais l'on a $y = \theta$ pour le point où il faut mener la Tangente, & substituant cette valeur de y dans $\frac{ay}{b}$, qui est la valeur d'une soûtangente, on trouve que cette soûtangente est θ . Ainsi il faudroit conclure, selon les préjugés, que la Tangente est perpendiculaire à l'axe. Ce qui est vrai lorsque $b = \theta$, mais cela ne se trouve point véritable dans tous les autres cas.

Lorsque $b = \theta$, la Courbe DS ou DR n'est que la parabole ordinaire, & dans ce cas la Tangente au point D , est DT perpendiculaire à l'axe DB .

Mais si b est réel, le rapport de l'appliquée à la soûtangente change toujours à mesure que l'on fait varier le rapport de b à a . Cela est évident en M & en P , & il est évident aussi que cette variété fournit une infinité de cas, où la Tangente au point D n'est ni parallèle ni perpendiculaire aux axes. Ainsi pour un exemple qui



favorise les préjugés, il y a une infinité d'exemples qui les combattent.

Lorsque $a = b$, la soutangente s ou GO est égale à l'appliquée OD , quelque variété que l'on veuille supposer dans b réel, ou bien dans a ; ce qui est manifeste dans la formule M . D'où il suit que dans tous ces changemens la Tangente fera toujours un angle de 45 degrés avec chacun des axes, loin de leur être perpendiculaire ou parallèle.

Je ne parle point de $a = \theta$, parceque dans ce cas l'égalité proposée n'exprime aucune Courbe, ni des autres cas où a, b, x, y sont négatifs, parceque tous ces derniers cas rentrent dans les premiers.

Mais il est peut être bon de faire icy une petite remarque dans l'Analogie qui est en P . C'est que y étant égal à θ , cette Analogie deviendrait $b : a :: t : \theta$. Ainsi il sembleroit que le rapport de t à θ seroit infini. D'où il faudroit conclure que la Tangente est parallèle à un des axes, & par conséquent perpendiculaire à l'autre axe. Mais il est facile de voir, 1°. Que t devient égal à θ lorsque $y = \theta$, & que les deux derniers termes de l'Analogie n'étant que des θ , leur rapport par cela seul ne seroit qu'un rapport indéterminé, comme je l'ay prouvé dans la Methode des Questions indéterminées que je donnay au public en l'année 1699, page 62.

2°. Ce rapport reçoit toute sa détermination quand on le compare au rapport de a & b , qui sont les deux premiers termes de l'Analogie; & comme leur rapport est toujours fini dans tous les cas où b est réel, il faut conclure que le rapport de t à y est aussi toujours fini lorsque b est réel, quoique y soit anéanti.

On peut encore observer icy que cet exemple CC est celui que j'ay donné dans le Journal du 30 Juillet dernier; & comme je me suis servi dans ce Journal de la transposition générale des axes, on ne peut point mettre en doute la situation des Tangentes ni les conséquences qui s'en déduisent pour la méthode de *Maximis & Minimis*.

Dans

Dans ce Journal les axes proposez font un angle de 45 degrez avec les nouveaux axes, & prenant x pour exprimer les abscisses d'un de ces nouveaux axes, on trouvera en y appliquant ce que j'ay dit dans le Journal du 13 Avril 1702, que la sôutangente est $\frac{ax + bz}{b - a}$; de maniere que si l'on prend l pour l'expression de cette sôutangente, on aura l'Analogie marquée icy en V .

$$V \dots b - a : b + a :: x : l.$$

D'où il est aisé de voir comment j'ay formé la Regle que j'ay donnée dans ce Journal pour l'effectiion geometrique de la Tangente.

Delà encore se peuvent confirmer les observations que j'ay données icy sur ce Problème. Par exemple, dans le cas où $b = a$, on trouve $l = \frac{2ax}{0}$: ce qui montre que la Tangente est parallele à un des nouveaux axes, & par consequent perpendiculaire à l'autre. Et delà on peut voir aussi que dans ce même cas la Tangente fait un angle de 45 degrez avec chacun des premiers axes, ou des axes proposez, & dont la position est déterminée à l'égard de la Courbe dans l'égalité proposée CC .

On trouve aussi en prenant $b = 0$ que $l = -x$. Ce qui fait voir que dans le cas où l'égalité generatrice ne fournit qu'une Parabole, la Tangente est perpendiculaire à un des axes proposez, & qu'elle se confond avec l'axe réciproque. Mais que dans tous les autres cas la Tangente n'est ni perpendiculaire ni parallele aux axes proposez, c'est à dire aux axes déterminez par l'égalité proposée $y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$ marquée CC .



Observations sur les tangentes - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1705

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE
