Il y a encore les repetitions par le premier aprés le premier de l'ordre & le dernier, avec la ſujetion que le même nombre qui ſe trouve dans toute la diagonale, ſoit le moyen de l'ordre; & comme on le peut faire dans l'un & dans l'autre Quarré Primitif ſeparément, on aura 29, 030, 400 variations, leſquelles étant jointes aux premieres feront en tout par cette methode 334, 886, 400 variations de ce Quarré de 7.

Mais il y en a encore une infinité d'autres qui ne ſe rapportent point à cette regle, & dont j'ay donné un échantillon dans la douziéme Propoſition, & entre leſquels ſont ceux dont les enceintes étant ôtées, il reſte encore des Quarrés Parfaits.

Dans tous ces Quarrés on ne compte point ceux qui ſe feroient par le renverſement ou par le retournement de ces Quarrés, puiſqu'en effet ils ne feroient pas differens dans l'arrangement de leurs nombres.

DE L'INVERSE DES TANGENTES ET DE SON USAGE.

PAR M. ROLLE.

QUoyque les ſecondes formules des Tangentes & celles d'un ordre plus élevé ne ſoient pas d'un auſſi grand uſage que les autres formules de Tangentes, il eſt peut-être bon de marquer en peu de mots comment on pourroit faire l'Inverſe de ces formules du ſecond ordre, & de celles d'un ordre plus élevé, par le moyen des regles que j'ay propoſées dans les quatre Memoires que je donnay à l'Academie en 1704 pour l'Inverſe des premieres formules, & qui ont été imprimés dans la même année : C'eſt la premiere choſe que je me ſuis propoſé icy. Enſuite j'y mar- 1705. 23. Juin.

queray de nouveaux ufages de l'Inverfe des premieres formules.

ARTICLE I. Soit pour exemple d'une feconde formule de Tangentes, celle qui eft marquée icy en *A*.

$$A \ldots\ 5yydx^2 = 3xxdy^2.$$

Et qu'on veüille remonter à fon égalité generatrice: Ayant pris une égalité indéterminée pour reprefenter cette generatrice, comme je l'ay dit dans mon fecond Memoire, on aura auffi celle qui eft icy en *B*.

$$B \ldots\ nsy^4 = hx^5.$$

Enfuite on prendra la feconde formule de cette generatrice, fuivant le Journal du 13 Avril 1702, & cette formule fera comme on la voit icy en *C*.

$$C \ldots\ 3nsyydy^2 = 5hx^3\, dx^2.$$

Comparant cette formule *C* à la propofée *A* pour faire évanoüir les inconnuës relatives *dx* & *dy*, & divifant la réduite par la fuppofée, comme je l'ay dit au fecond Memoire, il ne reftera rien du tout. Ainfi l'on n'aura point de Problême auxiliaire, & dans ce cas la fuppofée eft la generatrice de la formule propofée. De maniere que l'égalité *B*, quoyqu'indéterminée, eft la generatrice de la feconde formule *A*. Dans tout autre cas on pourfuivroit felon les regles du fecond Memoire, en quoy il ne paroît point de difficulté.

REMARQUES. Dans cet exemple on auroit pû prendre $sy^r = hx^c$ pour la generatrice fuppofée, comme je l'ay dit dans mon quatriéme Memoire, & il y a des recherches où cela eft comme neceffaire. Ainfi l'égalité *A* étant propofée comme une premiere formule, & voulant trouver fa generatrice, alors la fuppofée $sy^r = 4x^c$ donneroit d'abord pour generatrice $sy^{e\sqrt{3}} = hx^{c\sqrt{5}}$, dans laquelle on voit que les coëfficiens font entierement indéterminés, & qu'il y a encore de l'indétermination aux expofans. Mais avec toute cette indétermination il y aura du moins un expofant irrationel : ce qui fait naître des difficultés dont il fera parlé dans la fuite.

De-là on voit auffi qu'une même égalité *A* feroit une premiere formule à l'égard d'une generatrice, & une ſeconde formule à l'égard d'une autre generatrice, &c.

L'égalité marquée G eſt la premiere formule de la generatrice H, & la ſeconde formule de K.

Pareillement l'égalité L eſt la premiere formule de M, & la ſeconde formule de N.

$G.\ a^4 dy^2 = 36ppxxdx^2.$	$L.\ fdy^2 = 3xdx^2.$
$H.\ aay = 3pxx$	$M.\ 3fyy = 4x^3.$
$K.\ a^4yy = 6ppx^4$	$N.\ fyy = x^3.$

Ainſi une même ègalité eſt une formule de differens ordres par rapport à differentes generatrices: d'où l'on voit qu'il ſeroit bon de ſçavoir de quel ordre eſt la formule propoſée avant que de chercher les generatrices: ſinon il faudroit faire un dénombrement, comme on le dira dans la ſuite.

Les formules du ſecond ordre & au delà, ſont ſouvent diviſibles; mais en les prenant dans leur entier, les limites que jay données pour les generatrices des premieres formules peuvent ſervir pour les generatrices des ſecondes formules, & de celles qui les ſuivent. Et ſi l'on propoſe un diviſeur d'une formule du ſecond ordre, & au delà, comme la formule entiere, il faut y avoir égard.

Les regles que j'ay données ſur les Tangentes preſcrivent de faire évanoüir les ſignes radicaux, & par conſequent les fractions des expoſans. Ainſi il ne faut point être ſurpris, ſi faute de le faire, on trouvoir de fauſſes formules. Par exemple, ſi l'on a la generatrice R, & que, ſans faire évanoüir les fractions des expoſans, on y applique les regles abregeantes que j'ay propoſées dans le Journal du 13 Avril 1702 pour trouver la ſeconde formule de cette generatrice, ces regles donneroient l'égalité qu'on voit en P; ce qui feroit peut-être croire que P eſt la ſeconde formule de R. Mais par l'Inverſe de mes Memoires, il ſe trouvera que cette formule eſt fauſſe.

$$R.\ a^{\frac{1}{2}} yy = x^{\frac{5}{2}}.$$

$$P.\ 2a^{\frac{1}{2}} dy^2 = \tfrac{15}{4} x^{\frac{1}{2}} dx^2.$$

Si l'on vouloit faire quelque uſage de l'inverſe des formules du ſecond ordre, & au delà, il faudroit ſe ſouvenir que les ſecondes ſuppoſent que les premieres ſoient détruites ; que les troiſiémes ſuppoſent la deſtruction des premiéres & des ſecondes, ainſi de ſuite : ce qui obligeroit de faire que chaque formule qui ſe doit détruire, ſoit égale à θ, & de réſoudre les égalités qui en réſultent, ſi déja cela n'étoit fait.

ARTICLE II. Les regles dont je me ſers pour l'Inverſe generale des premieres formules de Tangentes, ont des uſages qui leur ſont particuliers. En voici un qui paroît notable. C'étoit une difficulté conſiderable il y a quinze ans de trouver les lieux les plus ſimples pour les effections Geometriques ; mais une plus grande difficulté de reconnoître de quel genre eſt un lieu, ou une égalité generatrice. J'ay donné une regle très-courte & trés-préciſe pour la premiere difficulté dans le Traité des Effections Geometriques que je publiay en l'année 1691. Car ayant tiré la racine quarré du premier expoſant de l'égalité propoſée, on voit tout d'un coup par cette regle les lieux les plus ſimples qui doivent ſervir à réſoudre cette égalité. Mais comme il eſt beaucoup plus difficile de former des methodes generales pour la ſeconde recherche, celles que j'ay propoſées ſur ce ſujet demandent beaucoup d'operations, & même les regles que d'autres Auteurs ont données pour cette recherche, ſont encore bien longues, quoyque ces regles n'aient été faites que pour des cas particuliers. En voici une qui s'étend à toutes les égalités, & qui eſt capable d'un grand abregement. Je l'ay tiré de l'Inverſe des Tangentes, comme on le va voir icy.

Pour joindre l'exemple à la regle, je prens l'égalité qui eſt marqué icy en *D*.

$$D \ldots\ x^{12} - a^5 d^5 x^3 y^5 + d^5 n^6 y^6 - \theta$$

Et je me propoſe de trouver le veritable genre de cette égalité generatrice.

Pour cela je prens la premiere formule des Tangentes, & ſi je me ſers de *t* pour exprimer la ſoûtangente des y, la formule ſera comme on la voit en F

$$F \ldots\ 18\,x^{18} - 3a^5d^5y^5x^3 - 5a^5d^5x^3y^4t + 6\,d^6n^6y^5t = 0$$

Enſuite je regarde cette formule, comme ſi elle m'étoit propoſée, pour en trouver la generatrice ſous la forme la plus ſimple, par la methode que j'ay donnée pour cette Inverſe: de maniere qu'en parcourant les generatrices indéterminées que fournit cette methode, il eſt bon de commencer par les plus ſimples; ce qui me donne le generatrice indeterminée marquée icy en S, d'où je tire la premiere formule des Tangentes que l'on voit en T, comme le preſcrit la methode.

$$S \ldots\ sppy = hx^3. \qquad T \ldots\ sppt = 3hx^3.$$

Je compare la formule T à la formule F pour faire évanoüir l'expreſſion de la ſoûtangente; je diviſe la réduite par la ſuppoſée S, le tout ſelon la methode, & je trouve que le Problême auxiliaire ne conſiſte que dans la ſeule égalité V.

$$V \ldots\ d^6n^6h^6 - ppa^5d^5sh^5 + p^{12}s^6 = 0$$

Où l'on voit que s & h ſont dans une ſituation réciproque; & lors que cela arrive, la propoſée eſt du même genre que la ſuppoſée. Ainſi la propoſée D eſt du même genre que la ſuppoſée S. Mais S eſt du ſecond genre. Donc la propoſée eſt auſſi du ſecond genre. *Ce qu'il falloit trouver.*

Il y a des cas où il faudroit encore quelques operations, mais la voie eſt toûjours la même. Ce qui ſera amplement expliqué en d'autres Memoires.

Remarques. Au lieu de parcourir les generatrices indéterminées que fournit la ſeconde regle de la methode, on auroit pû ſuppoſer $sy = hx^c$, &cela abrege trés-conſiderablement, lorſque la propoſée eſt reductible à un binome. Il y a encore d'autres moyens fort abregeans, que l'on donnera dans la ſuite, avec les éclairciſſemens & les démonſtrations neceſſaires.

De l' inverse des tangentes et de son usage - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1705

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE