



HAL
open science

Du frottement d'une corde autour d'un cylindre immobile

Joseph Sauveur

► **To cite this version:**

Joseph Sauveur. Du frottement d'une corde autour d'un cylindre immobile. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1703. ads-00104885

HAL Id: ads-00104885

<https://hal.science/ads-00104885>

Submitted on 9 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DU FROTTEMENT D'UNE CORDE
AUTOUR D'UN CYLINDRE
IMMOBILE.**

PAR M. SAUVEUR.

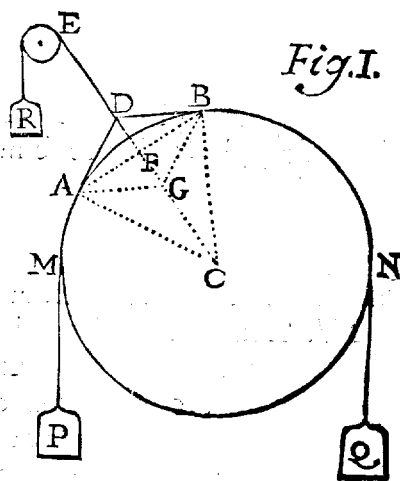
IL est difficile de considérer sans admiration l'effet du frottement d'une corde autour du cylindre immobile, puisqu'avec une puissance fort médiocre cette corde soutient un poids très-considérable : j'ai cru que l'effet de ce frottement méritoit bien qu'on en cherchât la cause ; & pour la découvrir, j'ai supposé d'abord une corde très-flexible, capable de frottement sans pouvoir s'allonger ; & sur ces suppositions j'ai formé les Propositions suivantes.

1703.
14. Juillet.

I. PROPOSITION.

Soit un cylindre horizontal & immobile dont le centre soit C ; sur ce cylindre soit passé une corde $PMBNQ$, aux extrémités de laquelle soient suspendus deux poids égaux P , Q ; soit pris un point D dans la partie de cette corde qui s'appuie sur le cylindre ; à ce point D soit attaché une autre corde DE tirée par le poids R . Selon la direction CDE qui passe par le centre C du cylindre, le poids R tirera le point D de la première corde, enforte que les parties DB , DA ,

Mém. 1703. Qq



feront tangentes au cylindre. Tirez la sous-tendante AB & le rayon AC . Je dis que le poids P fera au poids R , comme le rayon CA du cylindre est à la sous-tendante AB .

Tirez le rayon BC , & les lignes AG , BG , parallèles à DB , DA . Les Méchaniques nous apprennent que la force P qui tire la corde AD , est à la force R qui tire la corde DE , comme AD est à DG , c'est-à-dire, comme le rayon CA est à la sous-tendante AB , à cause que les triangles ADG , CBA sont semblables.

I. COROLLAIRE. Si l'arc AB est infiniment petit, le poids P fera au poids R , comme le rayon CA est à l'arc AB , qui fera alors égal à sa sous-tendante.

II. L'arc AB étant infiniment petit, & ôtant le poids R , le point D touchera alors le cylindre qu'il pressera avec une force égale au poids R . Donc le poids P est au pressement de la corde contre chaque partie infiniment petite du cylindre, comme le rayon de ce cylindre est à chacune de ces parties.

III. Le poids P est au pressement de la corde contre la partie MBN sur laquelle elle s'applique, comme le rayon du cylindre est à la somme des parties infiniment petites dont cette partie MBN est composée, c'est-à-dire, à l'arc même MBN .

C'est pourquoi si l'arc MBN est égal au rayon, ou s'il est de $57^{\text{d}} 18'$, le pressement de la corde contre cet arc du cylindre sera égal au poids P ; & si l'arc MBN est la demi-circonférence, ce pressement sera au poids P comme 22 est à 7, ou comme 355 est à 113, c'est-à-dire, comme la demi-circonférence est au rayon.

IV. Si la corde qui soutient les poids égaux P , Q est appliquée sur un second cylindre d'un diamètre différent, mais sur un arc semblable ou de même nombre de degrés, le pressement de la corde sur le second cylindre est égal au pressement qu'elle causoit sur le premier.

V. Mais si les arcs des deux cylindres sont égaux, les pressemens sont en raison réciproque des diamètres des cylindres.

II. PROPOSITION.

Si aux extrémités d'une corde appliquée sur un cylindre horizontal & immobile, pendent deux poids égaux P , Q , les pressemens de la corde sur les parties infiniment petites du cylindre pourront être représentés par les appliquées égales de l'arc concentrique DE sur l'arc AB du cylindre, puisque ces pressemens sont égaux.

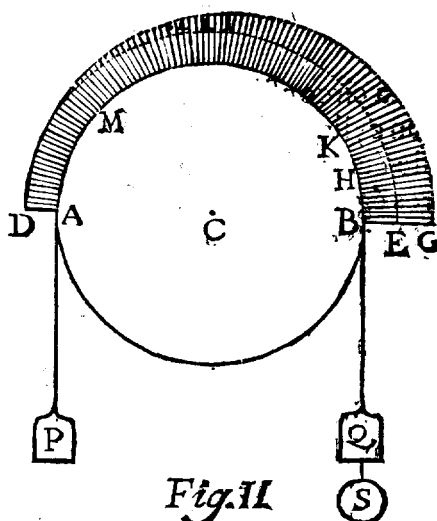


Fig. II

Mais le cylindre & la corde étant susceptibles de frottement, si au poids Q on ajoute le plus grand poids S que la corde puisse soutenir par son frottement, sans rompre l'équilibre ou sans baisser; alors les pressemens de la corde augmenteront inégalement, de sorte que l'augmentation étant la plus grande en B , elle sera zero en A : car le nouveau pressement, à cause du poids S , sera entier en B ; mais le frottement de la corde en BH l'arrêtant un peu, le frottement en H sera moindre. Par la même raison il sera encore plus petit en K , & zero en A ; car s'il y étoit quelque chose la corde glisseroit, parce que le pressement se fait en glissant; & si le pressement finissoit ailleurs comme en M , le poids S ne seroit pas le plus grand que la corde pourroit soutenir; donc ce nouveau pressement doit être zero en A . C'est pourquoi ce nouveau pressement pourra être représenté par les appliquées de la Courbe GD sur l'arc concentrique ED .

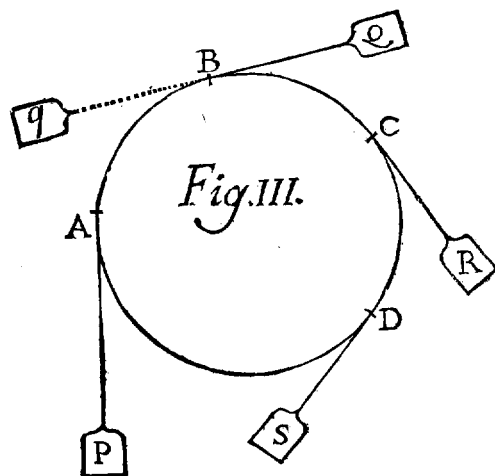
Il s'ensuit que les pressemens de la corde sur les parties insensibles de l'arc AB du cylindre, causés par les poids P , Q , sont représentés par les appliquées de la Cour-

Q q ij

308 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 be DG sur l'arc AB . Il s'agit de trouver la nature de cette
 Courbe DG .

III. PROPOSITION.

La circonférence
 d'un cylindre immo-
 bile étant divisée en
 arcs égaux $AB, BC,$
 $CD, \&c.$ si l'on ap-
 plique sur ce cylin-
 dre une corde, à
 l'extrémité de la-
 quelle soit un poids
 P qui tire cette cor-
 de par la direction
 AP tangente en
 A ; à l'autre extré-
 mité de cette corde



soient séparément, 1°. Le poids Q qui tire la corde par la
 direction BQ tangente en B . 2°. Le poids R qui tire la
 même corde par la direction CR tangente en C . 3°. Le poids
 S qui tire la corde par SD tangente en D , & ainsi de suite;
 je suppose enfin qu'en ces cas différens chaque poids $Q, R, S,$
 & c. soient tels qu'en les augmentant d'une quantité infini-
 ment petite, ils surmontent le frottement de la corde con-
 tre le cylindre immobile en tirant le poids P . Je dis que ces
 poids $Q, R, S, \&c.$ seront en proportion continue.

Car les résistances du poids P & du frottement de la
 corde AB étant en équilibre avec le poids Q , elles feront
 le même effet que si un poids q égal à ces résistances ti-
 roit le poids Q par la direction Bq opposée à BQ , & par
 conséquent le poids q est égal au poids Q . 2°. Les résis-
 tances du poids P , & du frottement R de la corde ABC ,
 sont en équilibre avec le poids R ; mais les résistances du
 poids P & du frottement de la corde AB , seront égales à
 la résistance du poids q . Mettant donc les résistances du
 poids q & du frottement de la corde BC en la place des

résistances du poids P & du frottement de la corde ABC , les résistances du poids q & de la corde BC seront en équilibre avec le poids R . Et le poids R sera au poids q , ou Q , comme le poids Q est au poids P , parce que les arcs AB & BC , sont égaux, & que nous supposons les cordes entièrement flexibles & incapables de s'allonger; donc les poids P, Q, R , sont en proportion continue. Nous prouverons de même que les poids Q, R, S , sont en proportion continue, & ainsi de suite.

Il suit, 1°. qu'en supposant ces arcs infiniment petits; les poids qu'il faudroit appliquer de la manière précédente seront en proportion continue, & on pourra les représenter dans la Fig. II. par des appliquées sur l'arc AB qui soient en proportion continue, & alors la Courbe DG fera une ligne logarithmique appliquée sur un cercle.

Il suit, 2°. que si l'on connoit le poids P & le poids Q , on connoitra les autres poids R, S , &c. puisqu'ils sont en progression Géométrique.

3°. Si les poids P & Q sont donnés, & les arcs AB & ABD ou leur rapport, l'on trouvera le poids S de cette manière. Prenez les logarithmes des poids P & Q , & ôtez l'un de l'autre pour avoir leur différence, & faites cette Analogie, comme l'arc AB est à l'arc AD , ainsi la différence des log. est à un log. qu'il faut ajouter au log. du poids P , la somme sera le log. du poids S .

La démonstration est que si l'on appelle p le poids P , & q le poids Q , alors les autres poids seront $\frac{qq}{p}, \frac{q^3}{p^2}$ & le dernier sera en général $\frac{q^n}{p^{n-1}} = S$ (en supposant que l'arc AB soit à l'arc ABD , comme 1 est à n ;) ensuite appellant Q le logarithme de q , & P le logarithme de p ; alors le logarithme du poids $\frac{q^n}{p^{n-1}}$, sera $nQ - nP + P$. Or pour avoir ce log. prenez les log. Q & P des poids q & p , ôtez l'un de l'autre, leur différence sera $Q - P$. Faites cette Analogie $AB(1).AD(n) :: Q - P. nQ - nP$. ajoutant P ,

Q q iij

l'on aura $nQ - nP + P$, comme ci-dessus pour le log. du poids S que l'on cherche.

Fig. II. 4°. C'est pourquoi si l'on supposoit que le poids P pèsât une livre, & QS deux livres, (la corde AB faisant un demi-tour sur le cylindre,) si ensuite l'on fait faire à la corde un tour entier, qui avec le premier demi-tour fasse trois demi-tours; pour avoir le poids que la corde pourra alors soutenir, il faut donner 4 termes à la progression, dont les deux premiers poids P & QS seront les premiers termes, c'est-à-dire, 1. 2. 4. 8. Le dernier poids après le troisième demi-tour fera de 8 livres. Si l'on fait faire à la corde un nouveau tour ou deux demi-tours, la corde faisant alors cinq demi-tours en augmentant la progression de deux termes, l'on aura 32 livres pour le poids que la corde soutiendra alors. On trouvera de même qu'après un nouveau tour la corde soutiendra 128 livres, ensuite 512 livres, &c.

Quoique dans la conclusion précédente l'augmentation du poids pour vaincre le frottement devienne fort grande, on la trouvera encore plus grande dans les expériences; parce que 1°. nous avons supposé que la corde ne s'allongeoit point, & qu'ainsi elle avoit une égale facilité à rompre ou à passer par dessus les pointes inégalités du cylindre qui causent son frottement; néanmoins comme les poids dont on charge la corde l'allongent, ils la pressent davantage contre le cylindre, & les éminences de l'une entrent davantage dans les enfoncemens de l'autre; de plus le ressort de la corde devient plus fort, de sorte que la force qu'il faut pour faire surmonter à la corde les inégalités du cylindre, doit être beaucoup plus grande que lorsque nous avons supposé la corde incapable de s'allonger. 2°. La roideur de la corde ne permet pas qu'elle s'applique aussi immédiatement autour d'un petit cylindre, qu'autour d'un grand, & avec un petit poids qu'avec un plus gros. 3°. Enfin les inégalités qui se rencontrent dans les parties de la corde & du cylindre, & la manière d'appliquer les poids causent de la variété dans les expériences.

L'on peut trouver le poids qu'une corde soutient après plusieurs révolutions autour d'un cylindre par les logarithmes, en prenant le log. du premier poids P & du second QS , qu'il soutient après un demi-tour de la corde autour du cylindre, prenant ensuite la différence de ces deux log. qu'il faut ajouter au log. du poids QS pour avoir le log. du troisième terme, ajoutant successivement cette différence l'on aura une progression Arithmétique de logarithmes, dont les nombres seront en progression Géométrique comme ci-dessus.

Mais si l'on veut faire une hypothèse du calcul pour satisfaire aux expériences qui augmentent le poids davantage que dans la progression Géométrique, au lieu d'ajouter un même log. au premier terme pour avoir successivement les autres termes, il faudra ajouter des logarithmes qui croissent en proportion Géométrique; l'on aura une suite de logarithmes, dont les nombres croîtront d'autant plus sensiblement, que le second logarithme de la progression Géométrique sera plus grand.



Du frottement d'une corde autour d'un cylindre immobile - M. SAUVEUR
Académie royale des sciences - Année 1703

MÉCANIQUE
