



HAL
open science

**Extrait d'une lettre de M. Bernoulli Professeur à Bâle,
en date du 11 septembre 1703 contenant l'application de
sa règle du centre de balancement à toutes sortes de
figures**

Jacques Bernoulli

► **To cite this version:**

Jacques Bernoulli. Extrait d'une lettre de M. Bernoulli Professeur à Bâle, en date du 11 septembre 1703 contenant l'application de sa règle du centre de balancement à toutes sortes de figures. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1703. ads-00104876

HAL Id: ads-00104876

<https://hal.science/ads-00104876>

Submitted on 9 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

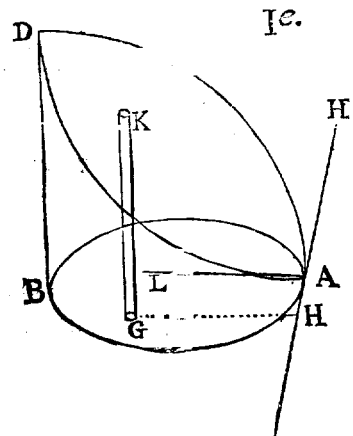
EXTRAIT D'UNE LETTRE
DE M. BERNOULLI

*Professeur à Bâle, en datte du 11^{me} Septembre 1703,
contenant l'Application de sa Regle du Centre
de Balancement à toutes sortes de figures.*

1703.
1. Décembre

TOUTE la doctrine de M. Hugens touchant le Centre d'Oscillation ou de Balancement, roule sur la dimension de certains coins retranchés de la figure qui balance, & de la longueur de leurs sous-centriques (*sub-centrica cunei*): tellement que pour faire voir la convenance de ma Regle avec cette doctrine, je n'aurois qu'à y faire remarquer ces Coins; ce qui est très-facile.

Soit la figure plane quelconque AB , dont G soit une des parties infiniment petites, & HAH sa tangente en A . Imaginons ensuite un cylindre droit sur cette figure, duquel un plan passant par HH , & incliné de 45 degrés sur celui de cette figure, retranche le Coin $ABDA$. Soit de plus L le point de cette base perpendiculairement situé sous le centre de gravité de ce Coin.



Soit enfin GH la distance de G à la tangente HH , appelée x ; & G appelé dp . Donc la hauteur du petit prisme GK (qui a G pour base) étant égale à GH (x) à cause de l'angle demi-droit de la section précédente, ce prisme fera $= x dp$; & son moment (*momentum*) à l'égard de la tangente HH , fera de même $= x x dp$. Donc la solidité du

du Coin qui a ce prisme pour élément, c'est-à-dire, la somme de tous ces prismes, sera $= \int x dp$; & son moment $= \int x x dp$, lequel étant divisé par ce même Coin, donnera la sous-centrique $AL = \frac{\int x x dp}{\int x dp}$.

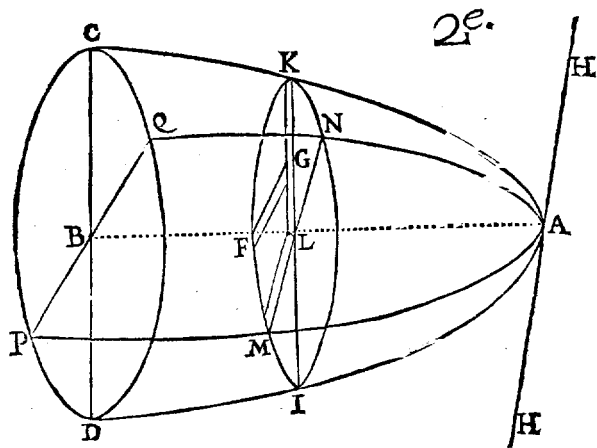
Si présentement on coupe le Cylindre précédent par un autre plan incliné aussi de 45 degrés sur la base AB , lequel plan rencontre cette base dans une ligne perpendiculaire à la Tangente HH de cette même base, & qu'on appelle y la distance de G à cette ligne; l'on aura un autre Coin, dont le moment à l'égard de cette ligne, sera de même $= \int y y dp$. Et comme toutes ces quantités entrent dans l'expression littérale * de ma Règle, qui donne la distance du centre

d'oscillation à l'axe du mouvement $= \frac{\int x x + y y \times dp}{\int x dp} = \frac{\int x x dp + \int y y dp}{\int x dp}$, on peut déjà entrevoir sa conformité avec la

doctrine de M. Huguens. Mais il n'est pas besoin de m'expliquer davantage sur cela, ces Coins m'étant inutiles. Depuis que le calcul des différences est en vogue, on ne se charge plus l'imagination d'autres solides, ni d'autres figures, que de ceux ou celles qui sont données dans la question. C'est pourquoi je me contenterai de montrer ici la manière d'appliquer ma Règle à toutes sortes de grandeurs, en faisant simplement attention à cette quantité littérale $\frac{\int x x dp + \int y y dp}{\int x dp}$.

Pour cet effet soit $CADP$ un Conoïde ou Sphéroïde quelconque qui balance sur un axe horizontal HAH ; soit $BCAD$ la figure ou la section qui résulte de ce corps coupé par un plan vertical droit à l'axe HH du mouvement, & $BPAQ$ celle qui résulte de même de ce corps coupé par le plan BHH : il s'agit de trouver le centre d'Oscillation tant du Conoïde, que des figures $BCAD$, $BPAQ$; & des lignes CAD , PAQ , considérées séparément hors du Conoïde; la figure ou ligne CAD ayant ses agitations *in latus*, & l'autre PAQ ayant les siennes *in planum*. Je conçois donc ce Conoïde divisé en une infinité de tranches parallèles à sa base & à l'axe du mouvement; qu'une

* Voyez ci-dessus le Mem. du 25 Avril, pag. 78.



de ces tranches est le cercle $MKNI$; que la commune intersection de ce cercle & du plan vertical, est le diamètre IK ; que celle du même cercle & de la figure PAQ , est le diamètre MN ; & qu'une de ses ordonnées au diamètre IK , est GF . Cela conçu, je fais $AB = a$, $BC = b$; $AL = x$, $LK = v$, $LG = y$, $GF = z = \sqrt{vv - yy}$, AK ou $AM = s$, la raison du diamètre à la circonférence $= \frac{n}{p}$; & par conséquent le cercle $IMKN = \frac{pvv}{r}$.

1°. Comme tous les points de l'ordonnée GF , qui est supposée parallèle à l'axe HH du mouvement, se meuvent également vite, c'est comme si le petit rectangle GF étoit tout ramassé en G ; & par conséquent comme si ce cercle entier $IMKN$ ($\frac{pvv}{r}$) étoit étendu le long de la ligne IK : & parce que tous les points de cette ligne répondent à une même AL (x), il s'enfuit que tous les $xx dp$ du cercle $IMKN$ (c'est-à-dire tous les produits de ses éléments multipliés par x) s'expriment par $\frac{pvvx}{r}$; & tous les $xx dp$ par $\frac{pvvxx}{r}$. Il n'en est pas de même de tous les $yy dp$, à cause que les différens points du diamètre IK ne répondent pas à une même y . Pour les trouver je considère que G

étant chargé de tous les dp du petit rectangle $GF(z dy)$, tous les $yydp$ de ce rectangle sont $yyz dy$, & que l'intégrale de $yyz dy$ doit marquer tous les $yydp$ du segment de cercle $MLGF$. Or l'intégrale de $yyz dy$ est $= \frac{1}{4}vv \times \int z dz - \frac{1}{4}yz^2$ (comme il paroît en prenant la différence de chaque quantité, & en substituant $vv - yy$ au lieu de zz , & $-y dy$ au lieu de $z dz$): de sorte que lorsque LG devient LK , & que l'ordonnée $GF(z)$ s'évanouit; alors $\int z dy$ (c'est-à-dire la somme de tous les rectangles $z dy$) devenant égale à tout le cercle $\frac{pvv}{r}$, l'on aura $\frac{1}{4}vv \times \int z dy = \frac{pv^4}{4r}$.

Après avoir ainsi trouvé que les sommes de tous les xdp , $xxdp$, & $yydp$, par rapport au cercle $IMKN$, sont $\frac{pvvx}{r}$, $\frac{pvvx}{r}$, & $\frac{pv^4}{4r}$; si l'on multiplie chacune d'elles par dx , qui est l'épaisseur du cercle ou de la tranche $IMKN$, les intégrales des produits $\frac{pvvx dx}{r}$, $\frac{pvvx dx}{r}$, & $\frac{pv^4 dx}{4r}$, marqueront ces sommes par rapport à tout le Conoïde ou Sphéroïde $CADP$: de sorte que l'on aura la distance du centre d'oscillation $\frac{\int xxdp + \int yydp}{\int xdp} = = =$

$$= \frac{\int \frac{p}{r} v v x x dx + \int \frac{p}{4r} v^4 dx}{\int \frac{p}{r} v v x dx} = \frac{\int v v x x dx + \int \frac{1}{4} v^4 dx}{\int v v x dx} =$$

$$= \frac{\int x x + \frac{1}{4} v v \times v v dx}{\int v v x dx}.$$

D'où l'on voit que pour déterminer ce centre il ne reste plus que de mettre la valeur de vv en x dans cette Formule, suivant l'exigence de la figure $AKCB$ section du Conoïde par l'axe AB , & d'en prendre ensuite l'intégrale. En voici quelques exemples:

Solide proposé.	Valeur de vv .	Quantité $\sqrt{\frac{xx + \frac{1}{4}vvxvvd x}{\int vv x dx}}$.	La même dans le cas de $x = a$.
Cône suspendu par le sommet.	$\frac{bbxx}{aa}$.	$\frac{4}{5}x + \frac{bbxx}{5aa}$.	$\frac{4}{5}a + \frac{bb}{5a}$.
Cône rectangle suspendu par le milieu de sa base.	$aa - 2ax + xx$.	$\frac{3a^4 - 6a^3x + 10a^2xx - 9ax^3 + 3x^4}{6aax - 8axx + 3x^3}$.	a .
Cylindre.	bb .	$\frac{2}{3}x + \frac{bb}{2x}$.	$\frac{2}{3}a + \frac{bb}{2a}$.
Conoïde Parol.	$\frac{bbx}{a}$.	$\frac{3}{4}x + \frac{bb}{4a}$.	$\frac{3}{4}a + \frac{bb}{4a}$.
Conoïde Hyperb. dont le côté transverse est $= AB$.	$\frac{bbx}{2a} + \frac{bbxx}{2aa}$.	$\frac{10aabb + 15abbx + 60a^3x + 6bbxx + 48aaxx}{20a^3 + 60aaxx}$.	$\frac{27}{35}a + \frac{31bb}{140a}$.
Sphère.	$ax - xx$.	$\frac{10aa + 15ax - 18xx}{40a - 30x}$.	$\frac{7}{10}a$.
Demi - Sphère suspendue par le sommet.	$2ax - xx$.	$\frac{20aa + 15ax - 9xx}{40a - 15x}$.	$\frac{26}{25}a$.
Demi - Sphère suspendue par le centre.	$aa - xx$.	$\frac{15a^4 + 10a^2xx - 9x^4}{30aax - 15x^3}$.	$\frac{16}{15}a$.

2°. Pour trouver le centre d'oscillation du plan $BCAD$, qui fait ses agitations *in latus*, je considère que tous les points de l'appliquée $LK = v$, répondans toujours à une même abscisse $AL(x)$, & ne répondans pas à une même $LG(y)$, tous les $x dp$ & $xx dp$ contenus dans LK , c'est-à-dire, tous les $x dy$ & $xx dy$, seront xv & xxv ; mais tous les $yy dp$ ou $yy dy$ seront $\frac{1}{3}y^3$, & par conséquent $\frac{1}{3}v^3$ pour toute l'appliquée LK . Donc en multipliant chacune de ces grandeurs xv , xxv , & $\frac{1}{3}v^3$ par la largeur dx du petit parallélogramme LK , & en prenant ensuite les intégrales des produits $xv dx$, $xxv dx$, & $\frac{1}{3}v^3 dx$, après y avoir substitué la valeur de v en x , l'on aura les $\int x dp$, $\int xx dp$, & $\int yy dp$, par rapport à toute la figure : tellement que la distance $\frac{\int xx dp + yy dp}{\int x dp}$ du centre d'oscillation à l'axe du mouvement sera =

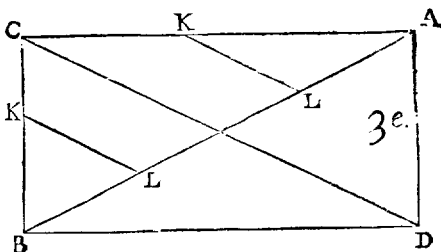
$$= \frac{\int xv dx + \int \frac{1}{3}v^3 dx}{\int xv dx} = \frac{\int xx + \frac{1}{3}vv \times v dx}{\int xv dx} : \text{ \& il n'importe pas}$$

que l'angle ALK du diamètre & des appliquées soit droit ou oblique; la raison de dx à la largeur du petit rhomboïde LK dans une même figure, demeurant toujours la même. Exemples :

Plan proposé.	Valeur de v .	Quantité $\frac{\sqrt{xx + \frac{1}{3}vv \times vdx}}{\int xv dx}$.	La même pour le cas de $x = a$.
Triangle ifofcele fusp. par le fommet.	$\frac{bx}{a}$.	$\frac{3}{4}x + \frac{bbx}{4aa}$.	$\frac{3}{4}a + \frac{bb}{4a}$.
Le même fuspendu par le milieu de fa base.	$b - \frac{bx}{a}$.	$\frac{4a^3bb - 6aabbx + 4abbxx + 4a^3xx - bbx^2 - 3aax^3}{6a^3x - 4aaxx}$.	$\frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$.
Rectangle fuspendu par le milieu d'un de fes côtés.	b .	$\frac{2}{3}x + \frac{2bb}{3x}$.	$\frac{2}{3}a + \frac{2bb}{3a}$.
Parabole fuspendue par le fommet.	$\sqrt{\frac{bbx}{a}}$.	$5x + \frac{bb}{3a}$.	$\frac{5}{7}a + \frac{bb}{3a}$.
La même fuspendue par le milieu de fa base.	$b\sqrt{\frac{a-x}{a}}$.	$\frac{7aabb + 8a^4 \times \sqrt{a} - 7aabb - 8a^4 + 14abbx}{-4a^3x - 7bbxx - 3aaxx + 15ax^3 \times \sqrt{a-x}} - \frac{14a^3 \sqrt{a} - 14a^3 - 7aax + 21axx \times \sqrt{a-x}}{}$.	$\frac{4}{7}a + \frac{bb}{2a}$.
Cercle.	$\sqrt{ax - xx}$.	$\frac{16xx^3 + 8aaxx - 6aax - 9a^3 \times v + 9a^3s}{32xx - 8ax - 12aa \times v + 12aas}$.	$\frac{3}{4}a$.

Quelquefois les v font de différentes valeurs dans une même figure, comme dans le parallélogramme $ACBD$ fuspendu à un de fes angles A ; car en pre-

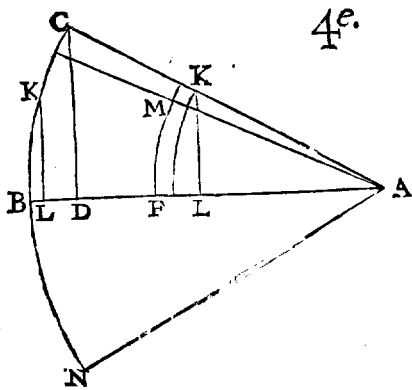
nant la diagonale AB pour le diamètre a , & les droites LK parallèles à l'autre diagonale CD pour les appliquées v , les v du triangle ACD font $=x$, & celles du triangle $CBD = a - x$. C'est pourquoï je cherche séparément



toutes les $xx + \frac{1}{3}vv \times v dx$ du triangle ACD , que je trouve faire $\frac{1}{8}a^4$, & toutes celles du triangle CBD qui font $\frac{1}{16}a^4$, dont la somme entiere $\frac{1}{12}a^4$ marque $\int xx + \frac{1}{3}vv \times v dx$ par rapport à toute la figure. Je cherche de même toutes les $xv dx$ du triangle ACD , qui font $\frac{1}{24}a^3$, & toutes celles du triangle CBD , qui font $\frac{1}{24}a^3$, & je les ajoute ensemble; ce qui me donne $\frac{1}{8}a^3$. D'où je conclus

que la distance $\frac{\int xx + \frac{1}{3}vv \times v dx}{\int xv dx}$ du centre d'oscillation à l'axe du mouvement doit être ici $= \frac{\frac{1}{12}a^4}{\frac{1}{8}a^3} = \frac{2}{3}a$.

Il en est de même du Secteur du cercle ACN , dans lequel, en faisant $AB = a$, $AD = c$, $DC = b$, $AL = x$, & $LK = v$; les appliquées v du triangle ADC se trouvent $= \frac{bx}{c}$, & celles du segment BDC font $= \sqrt{aa - xx}$.



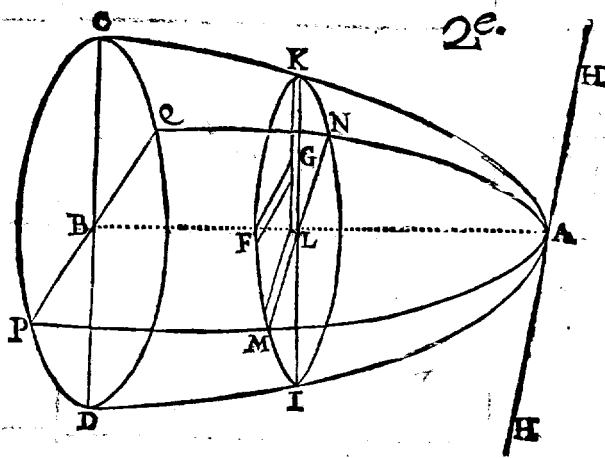
ne autre maniere, comme il arrive dans le même Secteur,

si on le conçoit divisé en une infinité de petits Secteurs AC , ou en de petits anneaux FK concentriques à l'arc BC . Pour le faire voir; soit d'erechef $AB = a$, $AD = c$, $DC = b$, $AL = x$, $LK = y$, $AF = s$, & l'arc $BC = t$. Cela posé, on trouve sans peine que $x = \frac{cs}{a}$, $xx + yy = ss$, $cdt = adb$, dp ou MK (petite portion de la figure) $= \frac{sdsdt}{a}$; ce qui donnera $\overline{xx + yy} \times dp = \frac{s^3 ds dt}{a}$, dont l'intégrale, qui est (en faisant dt constante) $\frac{s^4 dt}{4a}$, ou bien (en cas de $s = a$) $\frac{1}{4} a^3 dt$, marque toutes les $\overline{xx + yy} \times dp$ par rapport au petit Secteur AC ; & l'intégrale $\frac{t s^3 ds}{a}$ (qui est tel faisant s & ds constantes) marque toutes les $\overline{xx + yy} \times dp$ par rapport à l'anneau FK . Et partant $\overline{xx + yy} \times dp$ fera $= \frac{1}{4} a^3 t$ par rapport à tous les Secteurs AC ; & par rapport à tous les anneaux FK , cette même intégrale sera $= \frac{s^4 t}{4a}$ (en mettant a pour s) $= \frac{1}{4} a^3 t$: de forte que de l'une & de l'autre maniere la valeur $\overline{xx + yy} \times dp$ du Secteur entier ABC , se trouve $= \frac{1}{4} a^3 t$. On trouve de même $x dp = \frac{c s s ds dt}{aa}$, & $\int x dp$ par rapport au Secteur AC (qui fait c & dt constantes) $= \frac{c s^3 dt}{3aa}$ (en mettant a pour s) $= \frac{acd t}{3} = \frac{aadb}{3}$; & partant $\int x dp$ par rapport au grand Secteur ABC , sera $= \frac{1}{3} aab$. Ou bien $\int x dp$ par rapport à l'anneau FK (qui rend constantes s & ds) $= \frac{s s ds}{aa} \times \int c dt = \frac{s s ds}{aa} \times \int a db = \frac{s^3}{a}$; & partant $\int x dp$ par rapport à tous les anneaux, sera $= \frac{b s^3}{3a}$ (en mettant a pour s) $= \frac{1}{3} aab$,
comme

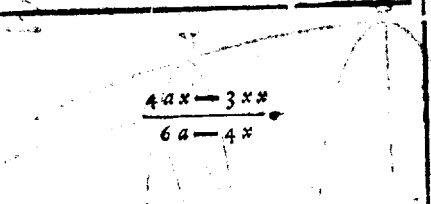

comme auparavant. Ainsi l'on doit conclure que $\frac{\int_{xx+yy \times dp}}{\int x dp}$

doit être ici $= \frac{\frac{1}{4} a^3 t}{\frac{1}{3} aab} = \frac{3 at}{4 b}$.

3°. Pour ce qui est maintenant du plan PAQ qui fait les agitations *in planum*, & dont l'appliquée LM (parallèle à l'axe du mouvement HH) soit $= z$; je considère



que y étant ici nulle, la quantité $\frac{\int_{xx+yy \times dp}}{\int x dp}$ se réduit à $\frac{\int_{xx dp}}{\int x dp}$, qui marque justement la sous-centrique du coin qu'on auroit dressé sur la figure, & qu'un plan passant par HH , auroit coupé; ce qui me donne $\frac{\int_{xx dp}}{\int x dp} = \frac{\int_{xxz dx}}{\int xz dx}$ à cause que toutes les dp du petit parallélogramme LM , sont chacune $= z dx$, & qu'elles répondent toutes à une même x : de sorte qu'il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z en x , suivant la nature de la Courbe, & en prendre l'intégrale. Exemples:

Plan proposé.	Valeur de z.	Quantité $\frac{\int x x z d x}{\int x x d x}$.	La même dans le cas de $x = a$.
Triangle isocèle susp. par le sommet.	$\frac{b x}{a}$.	$\frac{3}{4} x$.	$\frac{3}{4} a$.
Le même balançant autour de sa base.	$b - \frac{b x}{a}$.		$\frac{1}{2} a$.
Rectangle balançant autour de son côté.	b .		$\frac{2}{3} a$.
Cercle.	$\sqrt{ax - xx}$.	$\frac{48 x^3 + 8 a x x - 10 a a x - 15 a^2 x x + 15 a^3 s}{64 x x - 16 a x - 24 a a x x + 24 a a s}$.	$\frac{5}{8} a$.

4°. Qui aura compris l'application de ma Règle aux Solides & aux Surfaces, étendra aisément la manière de l'appliquer aux seules lignes, soit qu'elles se meuvent *in latu*, comme la Courbe *CAD* (Fig. 2.), ou qu'elles se meuvent *in planum*, comme *PAQ*. Car les petites parties *dp* de ces sortes de grandeurs, n'étant que les simples élémens *ds* des Courbes, il est évident que la quantité $\frac{\int x x + y y \times d p}{\int x d p}$ qui en détermine le centre d'oscillation, se réduit à $\frac{\int x x + y y \times d s}{\int x d s}$ dans les Courbes qui balancent *in latu*, & à $\frac{\int x d s}{\int x x d s}$ dans celles qui se meuvent *in planum*,

dans lesquelles y est nulle : de sorte qu'il ne reste qu'à y substituer la valeur de ds en x & en dx , & à en chercher ensuite l'intégrale. C'est ainsi qu'on trouve pour le

cercle (dont $ds = \frac{1}{2} a dx \left(\frac{\sqrt{ax-xx}}{ax-xx} \right) = \frac{1}{2} a ds - \frac{1}{2} \frac{ax}{ax-xx} ds$) tous
 jours $= a$; & $\frac{\int xx ds}{\int x ds} = \frac{3}{4} a - \frac{x^2}{2s-2x}$ (en cas de $x=a$) $= \frac{3}{4} a$.

D'où l'on voit que la circonférence d'un cercle, ou une partie quelconque de cette circonférence, étant mue *in latas*, doit avoir son centre d'oscillation distant de l'axe du mouvement de la longueur de son diamètre; & que cette circonférence entiere mue *in planum*, doit avoir cette distance égale aux trois quarts de son diamètre.

En voila, ce me semble, assez pour faire voir que ma Règle s'étend à tout ce que M. Huguens nous a laissé sur cette matiere : car ce qu'il ajoute des figures qui balancent sur un axe pris au-dehors de leur circonférence, n'a plus aucune difficulté; il ne faut qu'apporter quelque tempérament en prenant les intégrales, ce qui est facile; & ce qu'il dit touchant les plans & les solides obliques, se peut de même déduire sans peine de ce que j'ai déjà dit.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Soleil qui a paru à l'Observatoire Royal le 8 Décembre 1703, au Soleil couchant.

PAR M. DE LA HIRE.

C'EST un grand hazard quand le Ciel est assez serein à l'horizon pour y voir distinctement le Soleil. Le 8 Décembre 1703, un peu avant le coucher du Soleil, il ne sembloit pas qu'il fut possible de l'observer en cet

1703.
12. Decemb.

Extrait d'une lettre de M. Bernoulli Professeur à Bâle, en date du 11 septembre 1703
contenant l'application de sa règle du centre de balancement à toutes sortes de figures
Académie royale des sciences - Année 1703

GÉOMÉTRIE, PHYSIQUE
BERNOULLI, HUYGENS
