



**HAL**  
open science

**Manière générale de déterminer les forces, les vitesses,  
les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses  
étant donnée dans toutes sortes de mouvements  
rectilignes variés à discrétion**

Pierre Varignon

► **To cite this version:**

Pierre Varignon. Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discrétion. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1700. ads-00104168

**HAL Id: ads-00104168**

**<https://hal.science/ads-00104168>**

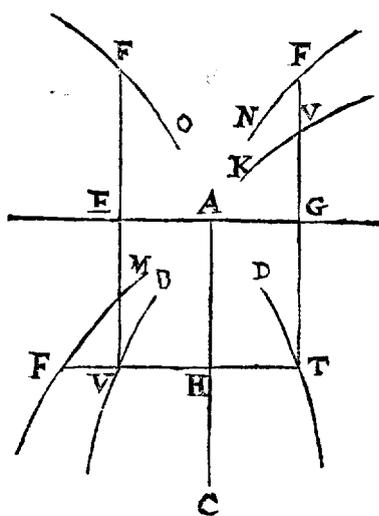
Submitted on 6 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MANIERE GENERALE DE DETERMINER**  
*les Forces, les Vitesses, les Espaces, & les Tems, une seule*  
*de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mou-*  
*vemens rectilignes variés à discrétion.*

PAR M. VARIGNON.



**T**OUS les Angles recti-  
 lignes étant droits dans  
 la Figure que voici, soient six  
 Courbes quelconques  $TD$ ,  
 $VB$ ,  $FM$ ,  $VK$ ,  $FN$ ,  $FO$ ,  
 dont les trois premières expriment  
 par leur abscisse commune  
 $AH$ , l'espace parcouru  
 par un corps quelconque mû  
 comme l'on voudra le long  
 de  $AC$ . Soit de même le tems  
 employé à le parcourir, expri-  
 mé par l'ordonnée correspon-  
 dante  $HT$  de la Courbe  $TD$ ;  
 la vitesse de ce corps en cha-

que point  $H$ , par les ordonnées aussi correspondantes  $VH$ ,  
 $VG$ , des Courbes  $VB$ ,  $VK$ ; ce qu'il a de force vers  $C$ , à  
 chaque point  $H$ , indépendamment de sa vitesse ( je l'appel-  
 lerai dorénavant *Force Centrale* à cause de sa tendance au  
 point  $C$  comme centre ) s'exprimera de même par les or-  
 données correspondantes encore  $FH$ ,  $FG$ ,  $FE$ , des Cour-  
 bes  $FM$ ,  $FN$ ,  $FO$ .

C'est pour cela que la Courbe  $TD$ , à laquelle l'ordon-  
 née  $HT$  se termine en  $T$ , s'appellera la *Courbe des Tems*; les  
 deux Courbes  $VB$ ,  $VK$ , auxquelles les ordonnées corres-  
 pondantes & égales  $VH$ ,  $VG$ , se terminent en  $V$ , s'ap-  
 pelleront les *Courbes des Vitesses*; enfin les trois Courbes  
 $FM$ ,  $FN$ ,  $FO$ , auxquelles les ordonnées correspondantes  
 encore & égales  $FH$ ,  $FG$ ,  $FE$ , se terminent en  $F$ , s'appel-  
 leront les *Courbes des Forces*.

Cela posé, soient les espaces parcourus  $AH = x$ , les tems employés à les parcourir  $HT = AGt$ , les vitesses en  $H$  ( que j'appellerai *finales* )  $HV = AE = GV = v$ , les forces centrales correspondantes  $HF = EF = GF = y$ . De-là on aura  $dx$  pour l'espace parcouru comme d'une vitesse uniforme  $v$ , à chaque instant ;  $dv$  pour l'accroissement de vitesse qui s'y fait ;  $ddx$  pour ce qui se parcourt d'espace en vertu de cet accroissement de vitesse ; &  $dt$  pour cet instant.

A ce compte, la vitesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au tems employé à le parcourir ; l'on aura déjà  $v = \frac{dx}{dt}$  pour une première Règle, laquelle donnera  $dv = \frac{ddx}{dt}$ , en faisant  $dt$  constante.

De plus, les espaces parcourus par un Corps mû d'une force constante & continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force & des quarrés des tems employés à les parcourir ; l'on aura aussi  $ddx = y dt^2$ , ou  $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ . Ce qui fait encore une Règle  $y = \frac{dv}{dt}$ , qui avec la précédente  $v = \frac{dx}{dt}$ , satisfait à tout ce qu'on se propose ici de résoudre.

## REGLES GENERALES

### DES MOUVEMENS EN LIGNE DROITE.

$$1^{\circ}. v = \frac{dx}{dt}$$

$$2^{\circ}. y = \frac{dv}{dt} \left( \frac{ddx}{dt^2} \right)$$

USAGE. Je dis présentement qu'une des six courbes ci-dessus, étant donnée à discrétion, on pourra toujours en déduire les cinq autres par le moyen de ces deux Règles, supposé les Résolutions & les Intégrations nécessaires des Egalités en question.

La preuve de cette proposition est facile : car si l'on a le

rapport quelconque variable ou constant, par exemple, des vitesses  $VH(v)$  aux espaces parcourus  $AH(x)$  c'est-à-dire, l'équation de la courbe des vitesses  $BV$ .

1°. Cette équation dont les variables sont  $x$  &  $v$ , donnera la valeur de  $v$  en  $x$  & en constantes, laquelle valeur (*Reg. 1*) formera avec  $\frac{dx}{dt}$ , une autre équation dans laquelle il n'y aura plus que des  $x$ , des  $t$  & des constantes; & qui par conséquent fera celle de la courbe des tems  $DT$ , dont les ordonnées correspondantes  $HT(t)$  expriment les tems requis pour venir de  $A$  en  $H$ .

2°. L'équation donnée de la courbe  $BV$  donnera encore la valeur de  $dv$  en  $x$  (j'y comprends aussi les  $dx$ ) & en constantes, laquelle valeur (*Reg. 2.*) formera avec  $y dt$ , une équation dans laquelle il y aura de trois sortes de variables,  $y$ ,  $x$  &  $t$ . Mais celle de la courbe des tems  $DT$ , qu'on vient de trouver, donnant aussi les valeurs de  $x$  en  $t$ , & de  $t$  en  $x$ ; si l'on substitue, l'une après l'autre, chacune de ces valeurs de  $x$  & de  $t$ , dans cette équation de trois variables, la substitution de la valeur de  $x$ , n'y laissant plus que  $y$  &  $t$  de variables, cette équation deviendra celle de la courbe des forces  $NF$ ; & la substitution de la valeur de  $t$ , n'y laissant plus aussi que  $y$  &  $x$  de variables, cette équation deviendra encore celle de la courbe des forces  $FM$ .

3°. L'équation qu'on vient de trouver pour la courbe  $NF$ , n'ayant que  $y$  &  $t$  de grandeurs variables, elle donnera aussi la valeur de  $y$  en  $t$  & en constantes, laquelle valeur (*Reg. 2.*) formera avec  $\frac{dv}{dt}$ , une autre équation dans laquelle il n'y aura plus que  $t$  &  $v$  de grandeurs variables; & qui par conséquent fera celle de l'autre courbe des vitesses  $VK$ .

4°. Enfin l'équation donnée de la courbe des vitesses  $BV$ , donnant aussi une valeur de  $x$  en  $v$  & en constantes; & celle qu'on en a déduite (*n. 2.*) pour la courbe des forces  $FM$ , donnant de même une valeur de  $x$  en  $y$  & en constantes;

confiances : ces deux valeurs de  $x$  formeront encore une équation, qui n'aura de grandeurs variables que  $v$  &  $y$ ; & qui par conséquent fera aussi celle de la troisième courbe des forces  $FO$ .

Voilà comment de six courbes qu'on voit dans cette Figure, la seule des vitesses  $VB$  étant donnée, l'on en peut déduire les cinq autres; & ainsi de quelqu'autre de celles-ci, qu'on voudra donner, la manière d'en déduire  $BV$  avec les quatre autres, étant par-tout la même. *Ce q. f. d.*

*Exemple 1.* Pour l'éclaircissement de cet usage, l'exemple le plus simple sera le meilleur. Supposons donc (si l'on veut) comme dans l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur, que les espaces  $AH(x)$  soient comme les carrés des vitesses correspondantes  $VH(v)$ , en sorte que  $VB$  soit une Parabole dont le lieu soit  $x = vv$ .

1°. L'on aura  $v = \sqrt{x}$ . Donc (Reg. 1.)  $\sqrt{x} = \frac{dx}{dt}$ , ou  $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ; ce qui donnera  $t = 2\sqrt{x}$ , ou  $x = \frac{1}{4}tt$  pour le lieu de la courbe des tems  $DT$ . Ainsi cette courbe sera aussi une Parabole ordinaire, & les espaces  $AH(x)$  suivront aussi les carrés des tems  $HT(t)$ .

2°. D'où l'on voit déjà que les tems seront ici comme les vitesses : c'est-à-dire,  $AG(t)$  par-tout à  $GV(v)$  en raison constante; & par conséquent aussi  $VK$  fera une ligne droite qui passera par  $A$ .

3°. L'équation donnée  $x = vv$  de la courbe des vitesses  $BV$ , donnera encore  $dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ . Donc (Reg. 2)  $y = \frac{dx}{2dt\sqrt{x}}$ . Mais on vient de trouver (n. 1.)  $x = \frac{1}{4}tt$ ; ce qui donne  $2\sqrt{x} = t$ , &  $dx = \frac{t dt}{2}$ . Donc  $y = \frac{t dt}{2t dt} = \frac{1}{2}$ . La même chose se trouvera encore par le moyen de la seule équation  $x = \frac{1}{4}tt$  de la courbe  $FM$ , en faisant  $dt$  constante; puisqu'alors cette équation donnant  $ddx = \frac{dt^2}{2}$ , la seconde Règle donnera aussi  $y \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) = \frac{dt^2}{2dt^2} = \frac{1}{2}$ . D'où

On voit que les ordonnées égales  $FH, FG, FE$ , doivent être ici constantes ; & les lignes  $FM, FN, FO$ , des droites parallèles, la première à  $AH$ , & les deux autres à  $EG$ . Ainsi les forces centrales du corps mù, que ces ordonnées expriment, doivent être ici par-tout égales, ou la même dans toute la durée de ce mouvement, comme on le suppose ordinairement de la pesanteur.

On voit donc que dans cette hypothèse des espaces  $AH$  comme les quarrés des vitesses  $VH$ , c'est-à-dire, où l'on suppose  $BV$  une parabole ordinaire,  $DT$  en sera aussi une ; & les quatre autres lignes  $VK, FM, FN, FO$ , feront autant de droites, dont la première passera par  $A$ , la seconde sera parallèle à  $AH$ , & les deux autres aussi parallèles à  $EG$ .

*Exemple 2.* Supposons présentement que la force centrale du corps mù soit constante, comme on le suppose ordinairement de la pesanteur. Alors les ordonnées égales  $FH, FG, FE$ , qui expriment cette force, étant par-tout les mêmes & constantes, non-seulement  $FM, FN, FO$ , seront des lignes droites, dont la première sera parallèle à  $AH$ , & les deux autres parallèles à  $EG$ ; mais encore leur valeur  $y$  aussi constante, par exemple  $= a$  donnera (*Reg. 2.*)  $a = \frac{dv}{dt}$ , ou  $dt = \frac{dv}{a}$ . Donc (*Reg. 1.*)  $v = \frac{adx}{d}$ , ou  $v dv = a dx$ ; ce qui donne  $\frac{v^2}{2} = ax$ , ou  $vv = 2ax$  pour le lieu de la Courbe des vitesses  $BV$ , laquelle par conséquent doit être ici une parabole, ainsi qu'on l'avoit supposé dans l'Exemple premier. Son lieu  $2ax = vv$  servira donc aussi comme dans ce premier Exemple, à trouver ceux des lignes  $DT, KV$ . Et par conséquent la force centrale du corps mù, étant ainsi supposée constante, l'on aura la nature des six lignes  $FM, FN, FO, BV, DT, KV$ .

Les mêmes choses se trouveront de la même manière dans toute autre hypothèse; il n'y aura de différence que la difficulté du calcul, laquelle n'aur oit fait qu'embarasser ici. Ainsi ces deux Exemples suffisent.

## REMARQUE.

Mais avant que de finir, il est bon de remarquer que sans aucune nouvelle hypothèse, les deux Règles précédentes nous donnent tout d'un coup la Prop. 39. du Liv. 1. de M. Newton, *De Phil. nat. Princ. Math.* En effet ces deux Règles donnent  $dt = \frac{dx}{v}$ ,  $dt = \frac{dv}{y}$ ; & par conséquent  $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$ , ou  $y dx = v dv$ , ce qui donne aussi (*f* signifie somme)  $\int y dx = \frac{1}{2} v v$ , ou  $v = \sqrt{2 \int y dx}$ : c'est-à-dire en général, les vitesses  $VH$ , comme les racines quarrées des espaces renfermées entre  $AH$ ,  $FH$ , & la courbe  $MF$ , quelles que soient les forces  $y$  ( $FH$ ); ainsi que l'a démontré M. Newton dans la première partie de cette 39<sup>e</sup>. Proposition.

Il suit aussi de-là & de la première des deux Règles précédentes, que  $dt = \frac{dx}{\sqrt{2 \int y dx}}$ . D'où l'on voit encore en général, que si  $V B$ , au lieu d'être une courbe des vitesses, étoit telle que  $VH$  fût par-tout en raison réciproque des  $\sqrt{2 \int y dx}$ , c'est-à-dire, en sorte qu'on eût par-tout  $VH = \frac{2}{\sqrt{2 \int y dx}}$ ; ayant alors  $VH \times dx = \frac{dx}{\sqrt{2 \int y dx}}$ , l'on auroit aussi  $dt = VH \times dx$ , & enfin  $t = \int VH \times dx$ , c'est-à-dire, les tems  $TH$  comme les espaces correspondans, compris entre  $AH$ ,  $HV$ , &  $BV$ , ainsi que M. Newton l'a encore démontré dans la seconde partie de la même 39<sup>e</sup>. Proposit.

## OBSERVATIONS SUR LES PLANTES

qui naissent dans le fond de la Mer.

PAR M. TOURNEFORT.

**P**OUR distinguer les Plantes qui naissent dans le fond de la Mer, d'avec celles qui croissent sur ses bords, il est bon, à l'exemple de quelques Auteurs Latins, d'appeler Marines les premières, & de donner aux autres le nom de Maritimes.

1700.  
13. Février.

Dij

---

Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces & les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discrétion - M. VARIGNON

Académie royale des sciences - Année 1700

PHYSIQUE

VARIGNON, NEWTON

---