



HAL
open science

Solution d'un problème physico-Mathématique

Guillaume-François-Antoine de L'Hospital

► **To cite this version:**

Guillaume-François-Antoine de L'Hospital. Solution d'un problème physico-Mathématique. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1700. ads-00104166

HAL Id: ads-00104166

<https://hal.science/ads-00104166>

Submitted on 6 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

n'est que d'une ligne tout au plus, & il fera beaucoup plus difficile de les observer, lorsque le degré n'aura qu'une demi-ligne, comme sont ceux des Bouffolles ordinaires de trois ou quatre pouces de diamètre. Tout ce qu'on peut faire dans ce cas, c'est de prendre une longue suite d'Observations, comme de dix ou douze années, faites avec la même aiguille & dans le même lieu, & diviser la différence par le nombre des années, encore il faudroit être assuré d'ailleurs que la déclinaison n'iroit pas en diminuant ou en augmentant. Exemple. A la fin de l'année 1686. j'ai trouvé que la déclinaison de l'aiguille aimantée étoit de $4^{\circ} 30'$ vers l'Ouest, & qu'à la fin de l'année dernière 1699. elle étoit de $8^{\circ} 10'$; & par conséquent la différence a été de $3^{\circ} 40'$, ou 220' pour treize années, ce qui donne pour chaque année 17' de mouvement du Nord vers l'Ouest.

SOLUTION D'UN PROBLEME
Physico-Mathématique.

PAR M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL.

PROBLEME.

TROUVER dans un plan vertical la courbe EFM , dans laquelle le Corps M descendant librement, & par sa propre pesanteur, la presse dans toutes ses parties avec une force égale à celle de son poids: c'est-à-dire, que le Corps pesant M étant arrivé en un point quelconque M de cette courbe, doit agir sur ce point selon la perpendiculaire MS avec la même force, qu'il presseroit une ligne horizontale, sur laquelle il seroit placé. Ou, ce qui revient au même, si l'on suppose que HC soit la développée de la ligne courbe requise, en sorte que le poids M , attaché à l'extrémité d'un fil qui entoure cette développée, décrive en descendant cette ligne courbe; il faut que dans chaque

1700.
23. Janvier.
FIG. I.

position du Corps M , il tende le fil développé MC avec la même force que s'il étoit suspendu par ce fil.

Soit la ligne horifontale AP , l'Axe de la courbe qui ait pour appliquées les verticales PM : lorsque le Corps pesant M , est descendu de la hauteur PM , il acquiert une certaine vitesse, avec laquelle il se mouvoit dans un plan horifontal autour du centre C , étant attaché à l'extrémité du fil CM , il tendroit ce fil avec une certaine force qu'on appelle *centrifuge*. Mais parce que le Corps M étant parvenu en M , se meut dans un plan vertical, il s'ensuit qu'il tend le fil MC avec cette force *centrifuge*, augmentée de la partie de son poids qui agit sur le point M de cette courbe, pour le pousser selon la perpendiculaire MS . Or l'on sçait par les Méchaniques, que si l'on suppose que la partie constante MR de la verticale PM prolongée, exprime le poids absolu du Corps M , & que l'on tire RS perpendiculaire sur MS , qui coupe à angles droits la courbe au point M ; la droite MS exprimera de combien le poids M agit sur le fil MC , pour le tirer vers S . Il ne reste donc plus qu'à trouver l'expression de la force *centrifuge* avec laquelle ce Corps tend le fil MC , afin de réduire cette Question à la pure Géométrie. Pour le faire, j'ai besoin du Lemme qui suit.

L E M M E.

FIG. II. Si un Corps M se meut d'un mouvement uniforme dans une circonférence qui ait pour centre le point C , & pour rayon la ligne CM , avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise, en tombant de la hauteur PM ; je dis que sa force centrifuge sera à celle de sa pesanteur, comme le double de la hauteur PM est au rayon CM .

C'est un principe reçu en Physique, que tout Corps tend à se mouvoir en ligne droite; de sorte que si le fil CM se rompoit, le Corps M au lieu de suivre son chemin dans la circonférence, se mouveroit dans la même direction où il se trouveroit alors, c'est-à-dire, selon la tangente MT . Sup-

posons à présent que le Corps M parcourt sur cette tangente la partie ML dans un instant, par où j'entends une partie infiniment petite de tems; il est visible que dans le même instant il auroit parcouru sur la circonférence un Arc MN égal à ML . Que l'on joigne NL , & que l'on mène NO parallèle à MT , il s'ensuivra à cause de l'infinie petitesse de l'Arc MN , que la ligne NO peut être prise pour cet Arc, qui par la supposition est égal à la droite ML ; & qu'ainsi NL peut être regardée comme parallèle & égale à la partie MO du diamètre MK . Or par la propriété du cercle $MO = \frac{ON^2}{OK}$; & en mettant pour ON l'Arc MN , & pour OK , le diamètre MK , on trouvera que MO , ou NL , est égale au carré de l'Arc MN appliqué au diamètre MK . D'où l'on voit que la force centrifuge feroit parcourir au Corps M , un espace égal au carré de l'Arc MN , appliqué au diamètre MK , dans le même instant que ce Corps parcourroit l'Arc MN ; puisque par le moyen de cette force, le Corps M se trouvant en L , au lieu d'être en N , elle lui auroit fait parcourir la ligne NL .

Or Galilée a démontré que si le Corps M se mouvoit uniformément avec la vitesse qu'il a acquise en tombant de la hauteur PM , il parcourroit dans le même tems une ligne double de PM ; mais ce même Corps M a parcouru avec la même vitesse, & par un mouvement uniforme, l'Arc MN : d'où il est clair que les tems seront entre eux comme ces lignes, & qu'ainsi le tems que le Corps M employe à tomber de la hauteur PM , est au tems qu'il employe à parcourir l'Arc MN , comme $2 PM$ est à MN . Si donc l'on fait comme $\frac{4 PM^2}{MN^2}$ est à 1 , de même PM à $\frac{MN^2}{4 PN}$; ce quatrième terme exprimera l'espace que parcourroit le Corps M dans le premier instant de sa chute (pendant lequel instant il parcourroit aussi l'Arc MN); puisque les espaces parcourus à commencer dès l'origine de la chute, sont entre eux comme les carrés des tems.

Cela posé, il est évident que la force centrifuge du Corps M doit être à celle de sa pesanteur, comme les espaces que font parcourir ces deux forces à ce Corps dans le même instant; car quoique l'effort de la pesanteur du Corps M augmente continuellement pendant sa chute, & qu'au contraire la force centrifuge demeure toujours la même pendant tout le mouvement de ce Corps autour de la circonférence, qui a pour centre le point C , on ne laisse pas néanmoins de considérer la pesanteur comme agissant uniformément, & sans accroissement dans le premier instant de la chute, à cause de l'infinie petitesse du tems. La force centrifuge du Corps M sera donc à celle de sa pesanteur, comme LN ou $\frac{MN^2}{MK}$ est à $\frac{MN^2}{4PM}$; c'est-à-dire, comme le double de la hauteur PM est au rayon CM . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De-là il est évident que $\frac{2PM \times MR}{DC}$ exprime la force centrifuge avec laquelle le Corps M tendroit le fil CM , s'il se mouvoit dans un plan horizontal autour du centre C , avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur PM . Or l'on vient de prouver que cette force doit être augmentée de la droite MS , qui exprime de combien le poids du Corps M agit sur le fil CM , suivant la direction MS , parce que le Corps M se meut dans un plan vertical. D'où il suit que la question se réduit à trouver une ligne courbe EFM , dans laquelle on ait toujours $\frac{2PM \times MR}{MC} + MS = MR$. On doit se ressouvenir que la droite constante MR est prise sur l'appliquée PM prolongée, & qu'elle exprime le poids absolu du Corps M .

SOLUTION.

Ayant nommé la constante MR , a ; les indéterminées AP , x ; PM , y ; l'Arc de la courbe EFM , v ; on aura

Pp ou $MK = dx$, $Km = dy$, $Mm = dv$, & (en prenant dv pour constante) $MC = \frac{dv dy}{ddx}$, selon l'Art. 79. du Livre des *Infiniment petits*. Or pour satisfaire à la question, il faut que $\frac{2PM \times MR}{MC} \left(\frac{2ay ddx}{dv dy} \right) + MS \left(\frac{adx}{dv} \right) = MR(a)$: d'où l'on tire $2y ddx + dy dx = dv dy$; & en divisant le tout par $2\sqrt{y}$, il vient $\frac{2y ddx + dy dx}{2\sqrt{y}} = \frac{dv dy}{2\sqrt{y}}$, dont les intégrales donnent $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$; où l'on doit remarquer que je retranche la quantité constante $dv\sqrt{a}$, parce que $Mm(dv)$ étant l'hypoténuse du petit triangle rectangle $MK m$, duquel $MK(dx)$ est l'un des côtés, elle le doit surpasser. Si l'on met dans cette équation pour dv sa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on en tirera celle-ci $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, dont l'intégrale est $\zeta ax = 2y - 2\sqrt{ay} - 2ax\sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$, qui exprime la nature de la courbe cherchée, qui sera par conséquent Géométrique, & dont l'on pourra trouver tous les points, en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Puisqu'on a $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$, ou $dx = dv - \frac{dv\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, on aura en prenant dv pour constante $ddx = \frac{dv dy \sqrt{a}}{2y\sqrt{y}}$; & par conséquent $\frac{2PM \times MR}{MC} \left(\frac{2ay ddx}{dv dy} \right) = \frac{av a}{\sqrt{y}}$, & $MS \left(\frac{adx}{dv} \right) = \frac{a\sqrt{y} - a\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$. Donc $\frac{2PM \times MR}{MC} + MS = MR$; & partant cette courbe a la propriété qu'on demande.

Si l'on mène la verticale AF , & qu'on examine la nature de cette courbe, on verra, 1°. Qu'ayant pris $AB = \frac{1}{4}a$, elle a son origine au point B , où elle coupe cette verticale à angles droits. 2°. Qu'elle s'en écarte jusques en E , en sorte qu'ayant mené ED perpendiculaire sur AF , on ait $AD = a$, & $ED = \frac{2}{5}a$; après quoi elle s'en approche jusqu'à ce qu'elle la coupe au point F , tel que $2AF = 3a + a\sqrt{5}$. 3°. Qu'elle s'étend ensuite à l'infini, en s'éloignant de plus en plus de son Axe AP . De-là il suit que le:

Corps M doit tomber de la hauteur AB avant qu'il se mette dans la courbe $BEFM$, & que dans la portion BE , on a toujours $\frac{2^p M \times MR}{MC} - MS = MR$: c'est-à-dire, que la partie du poids M qui agit sur les points de BE , doit être retranchée de la force centrifuge, pour avoir la force avec laquelle le Corps M tire le fil MC .

Si l'on prend sur AF la partie $BG = AB$, & sur ED prolongée la partie $EH = 2a$, les points G, H , seront à la développée, & généralement $\sqrt{AD} \cdot \sqrt{PM} :: 2PM \cdot MC$.

L'Arc $BEFM = \frac{6y + 4\sqrt{ay} + 4a}{15a} \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$, & supposant que $PM(y)$ devienne $AD(a)$, on aura la portion $BE = \frac{1}{15} AD$.

L'espace $BEFMCHGB$ renfermé entre la portion de courbe $BEFM$, sa développée GHC , & ses deux rayons BG, MC , $= \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} \times \frac{2}{11} \sqrt{\frac{y^5}{a^3}} + \frac{10}{11 \times 9} \times \frac{yy}{a} + \frac{58}{11 \times 9 \times 7} \sqrt{\frac{y^3}{a}} + \frac{5 \times 46}{11 \times 9 \times 7 \times 5} y + \frac{10 \times 6 \times 4}{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3} \times a + \sqrt{ay}$.

Si au lieu d'exiger dans la question que la force avec laquelle le Corps M tend le fil MC , soit toujours égale à celle de sa pesanteur absolue, on demandoit qu'elle fût partout égale à la même ligne donnée h , on trouveroit par un raisonnement semblable au précédent que l'équation différentielle $dx = \frac{bby\sqrt{y} + aay\sqrt{a}}{\sqrt{aay - bby + 2ba\sqrt{ay} - a^3}}$, exprimeroit la nature de la courbe cherchée.

Si l'on fait dans cette équation $b = a$, on retombe dans le cas qu'on vient d'expliquer en détail. Mais la construction générale dépend de la quadrature de l'hyperbole ou de l'invention des Logarithmes, lorsque b est moindre que a ; & de la quadrature du cercle, lorsqu'elle est plus grande.

Fig. III.

Si l'on fait $b = 0$, l'équation différentielle qui exprime en général la nature de la courbe cherchée, se changera en celle-ci $dx = \frac{ady}{\sqrt{ay - aa}}$, dont les intégrales donnent

$x = 2\sqrt{ay} - aa$. Et par conséquent la courbe cherchée sera en ce cas une Parabole BM , qui aura pour Axe la verticale AG , pour sommet le point B distant de l'origine A des x de la droite $AB = a$, & pour paramètre une ligne quadruple de AB . D'où l'on voit que si le Corps M étant mû horizontalement avec la vitesse acquise par sa chute de A en B , descend librement dans l'air, & qu'on le conçoive attaché à un fil BGC , qui entoure la développée GC de la Parabole BM ; la force avec laquelle il tirera le fil développé MC dans chaque position, sera toujours égale à zero, ou nulle : c'est-à-dire, que la force centrifuge $\left(\frac{2PM \times MR}{MC}\right)$ avec laquelle il tend à s'éloigner du centre C dans la direction CM , est précisément égale à ce que sa pesanteur lui fait faire d'effort vers le centre C dans cette même direction; en sorte que le Corps M doit se mouvoir de la même manière que s'il n'étoit attaché à aucun fil, & qu'il descendît librement dans l'air. Or comme Galilée a déjà démontré d'une manière très-différente de celle-ci, & reçue de tous les Géomètres, que le Corps M étant mû horizontalement avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise par sa chute de la hauteur AB , décrirait dans l'air en descendant par sa propre pesanteur cette même parabole BM , c'est une preuve manifeste de la bonté de nos hypothèses.

Ce Problème a été proposé par M. Bernoulli, Professeur à Groningue, dans le second Tome des Supplémens des Actes de Leipsic, pag. 291. J'ai crû qu'il étoit à propos d'en donner ici la solution dans toute son étendue, parce qu'elle me paroît très-propre à faire sentir la nécessité de nos Méthodes, sans le secours desquelles il seroit très-difficile (pour ne pas dire impossible) d'en venir à bout.

Comme les Démonstrations de tous les Théorèmes de M. Huguens touchant la force centrifuge, qui sont à la fin de son *Horologium Oscillatorium*, dépendent du Lemme précédent, & qu'on ne les trouve dans aucun endroit que je

PROPOSITION I.

FIG. II. Si M exprime la pesanteur du Corps M qui se meut dans la circonférence qui a pour rayon CM , avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise par sa chute de la hauteur PM ; il est clair par le Lemme que sa force centrifuge est $\frac{2PM \times M}{CM}$; d'où il suit que si $MP = \frac{1}{2} CM$ la force centrifuge sera égale à celle de la pesanteur. C'est le cinquième Théorème de M. Hugens.

PROPOSITION II.

FIG. IV. Si l'on suppose de plus que le Corps N décrive la circonférence qui a pour rayon DN , avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur QN ; il est clair par le Lemme que la force centrifuge du Corps N est aussi $\frac{2QN \times N}{DN}$. Et par conséquent les forces centrifuges des Corps M, N , feront entre elles :: $\frac{2PM \times M}{CM} \cdot \frac{2QN \times N}{DN}$,

FIG. II. & IV. d'où l'on voit que si les Corps M, N , sont égaux, la force centrifuge du Corps M sera à la force centrifuge du Corps N :: $\frac{2PM}{CN} \cdot \frac{2QN}{DN}$. C'est-à-dire, en raison composée de la directe de $2PM$ à $2QN$, ou des quarrés de vitesses \sqrt{PM}, \sqrt{QN} , & de la réciproque des rayons CM, DN .

COROLLAIRE I.

Si les Corps M, N , qu'on suppose égaux, parcourent leurs circonférences en des tems égaux, leurs vitesses seront entre elles comme ces circonférences, ou comme leurs rayons. On aura donc en ce cas $\sqrt{PM} \cdot \sqrt{QN} :: CM \cdot DN$, & par conséquent $2PM \cdot 2QN :: CM^2 \cdot DN^2$. D'où il suit que $\frac{2PM}{CM} \cdot \frac{2QN}{DN} :: CM \cdot DN$: c'est-à-dire, que
 les

les forces centrifuges font alors entre elles comme les rayons.

COROLLAIRE II.

Si les Corps M, N font égaux, & leurs vîteffes \sqrt{PM} , \sqrt{QN} , auffi égales; il est vilible que les forces centrifuges $\frac{2PM}{CM}$, $\frac{2QN}{DN}$ feront entre elles comme DN est à CM , c'est-à-dire en raifon contraire des rayons, ou des diametres.

COROLLAIRE III.

Si les Corps M, N font égaux, & les rayons CM, DN auffi égaux, leurs forces centrifuges feront comme $2PM$ est à $2QN$, c'est-à-dire, comme les quarrés de leurs vîteffes.

COROLLAIRE IV.

Si les Corps M, N étant égaux, leurs forces centrifuges font égales, on aura $\frac{2PM}{CM} = \frac{2QN}{DN}$, & par conféquent $PM \cdot QN :: CM \cdot DN$, & $\sqrt{PM} \cdot \sqrt{QN} :: \sqrt{CM} \cdot \sqrt{DN}$. Donc puiſque les tems font entre eux en raifon compoſée de la directe des eſpaces parcourus, & de la reciproque des vîteffes; le tems qu'employe le Corps M fera à celui qu'employe le Corps $N :: \frac{CM}{\sqrt{CM}}$, ou $\sqrt{CM} \cdot \frac{DN}{\sqrt{DN}}$, ou \sqrt{DN} . c'est-à-dire, en raifon ſouſdoublee des rayons.

Ces quatre Corollaires répondent aux quatre premiers Théorèmes de M. Hugenſ.

PROPOSITION III.

Soit le Corps M attaché en A par le fil AM , & que ce Corps ſoit mû, en forte qu'il décrive dans l'air la circonſérence qui a pour rayon CM : c'est-à-dire, que le fil AM décrive la ſurface d'un cone droit, formée par la révolution de la droite AM autour de l'Axe AC placé verticalement, il est vilible que l'on peut conſidérer en cet état le Corps M , comme étant pouſſé par deux forces: l'une horiſontale,

FIG. II.

qui tend à l'éloigner du centre C , & qui est sa force centrifuge ; l'autre qui tend à le pousser de haut en bas, & qui est celle de son poids. Or selon les principes des Méchaniques ; puisque le Corps M a pris sa situation selon la direction AM , il s'en suit que la force de la pesanteur sera à la force centrifuge, comme CA est à CM , & qu'ainsi la force centrifuge est $\frac{CM \times M}{CA} = \frac{2PM \times M}{CM}$ par le Lemme, en supposant que la vitesse du Corps M soit égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur PM ; d'où l'on tire $PM = \frac{CM^2}{2CA}$. Si donc l'on prend PM égale à la moitié de la troisième proportionnelle à CA , CM ; il est clair que la vitesse avec laquelle le Corps M se meut dans la circonférence qui a pour rayon CM , est précisément égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de cette hauteur ; & qu'ainsi cette vitesse s'exprimera par $\sqrt{PM} = \frac{CM}{\sqrt{2CA}}$. Or comme le tems s'exprime par l'espace divisé par la vitesse, il s'en suit que le tems que le Corps M employe à parcourir la circonférence entière, s'exprime par $\frac{c}{r} \sqrt{2CA}$, en supposant que $\frac{c}{r}$ exprime la raison de la circonférence au rayon.

COROLLAIRE I.

Si le Corps N attaché par le fil BN au point B , se meut d'un mouvement conique autour de la verticale BD ; c'est-à-dire, que ce fil décrit la surface d'un cône droit, qui ait pour Axe la verticale BD : il est visible par ce qu'on vient de démontrer, que le tems que le Corps N employe à parcourir la circonférence qui a pour rayon DN s'exprime par $\frac{c}{r} \sqrt{2BD}$. Il fera donc au tems que le Corps M employe à parcourir la circonférence qui a pour rayon CM : $\frac{c}{r} \sqrt{2BD} : \frac{c}{r} \sqrt{2CA} :: \sqrt{BD} : \sqrt{CA}$, c'est-à-dire, en raison soufdoublee des hauteurs. C'est le Théorème 8. de M. Hugen, dans lequel est renfermé le 7.

FIG. IV.

COROLLAIRE II.

Si l'on conçoit que le Corps M tombe d'une hauteur double de CA , la vitesse qu'il aura acquise par sa chute sera $\sqrt{2CA}$, & le tems qu'il aura employé à tomber, sera par conséquent $\frac{4CA}{\sqrt{2CA}}$, ou $2\sqrt{2CA}$; puisqu'avec une telle vitesse uniforme, il auroit parcouru dans ce même tems une ligne quadruple de CA . Ce tems fera donc à celui que le Corps M employe à parcourir la circonférence qui a pour centre le point C :: $2\sqrt{2CA} . \frac{c}{r}\sqrt{2CA} :: 2r.c$. c'est-à-dire, comme le diamètre est à la circonférence. Or concevant que le rayon CM soit infiniment petit, la longueur AM du Pendule devient égale à la hauteur AC ; & par conséquent le tems qu'un Corps porté par un mouvement conique, employe à parcourir la plus petite de toutes les circonférences qu'il décrit autour de l'Âxe vertical du cône, sera à celui qu'il employe à tomber d'une hauteur double de sa longueur, comme la circonférence d'un cercle est à son diamètre. C'est le Théorème 9.

FIG. II.

COROLLAIRE III.

Si $BD = CM$, & que le tems que le Corps M employe à faire un circuit autour de l'Âxe AC soit égal à celui du Corps N autour de l'Âxe BD , il s'ensuit par le Corollaire premier, que CA doit être égale à BD ou CM , & qu'ainsi la force centrifuge est égale à celle de la pesanteur. C'est le Théorème 10, en supposant que le rayon DN soit infiniment petit.

FIG. II.
& IV.

COROLLAIRE IV.

Le tems du circuit du Corps M autour de l'Âxe CA est $\frac{c}{r}\sqrt{2CA}$, & le tems que ce Corps employeroit à tomber de la hauteur AM , est $2\sqrt{AM}$. Si donc ces tems sont égaux, l'on aura $2\sqrt{AM} = \frac{c}{r}\sqrt{2CA}$; d'où l'on tire $AM = \frac{c^2}{2r^2}CA$. Il est donc évident que si le Sinus CA de

FIG. I.

l'angle AMC de l'inclinaison du fil sur l'horison, est au rayon ou Sinus total AM , comme le quarré inscrit dans un cercle, est au quarré de sa circonférence; le tems que le Corps M employe à faire un circuit entier autour de son Axe AC , est précisément égal à celui qu'il employeroit à tomber d'une hauteur égale à la longueur AM du fil. C'est le Théorème 11.

PROPOSITION IV.

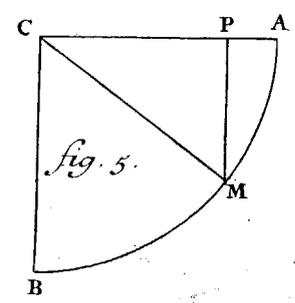
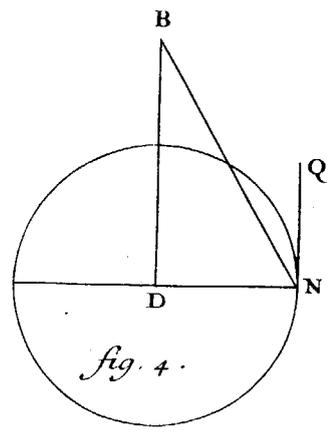
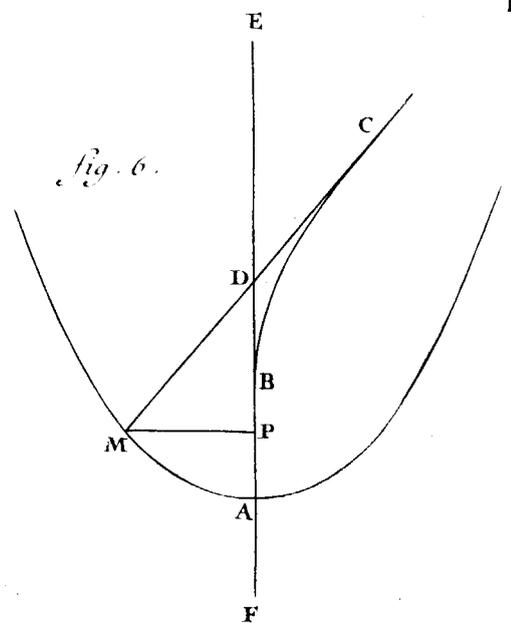
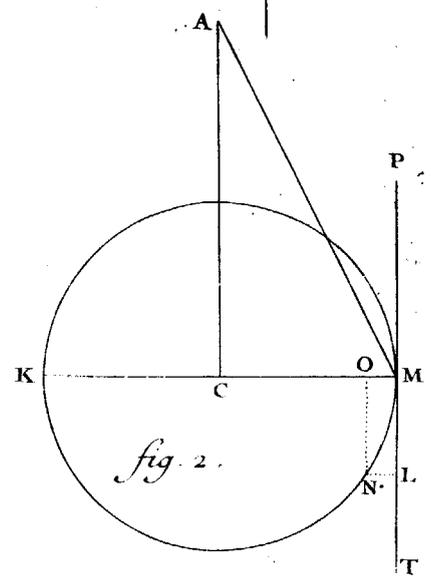
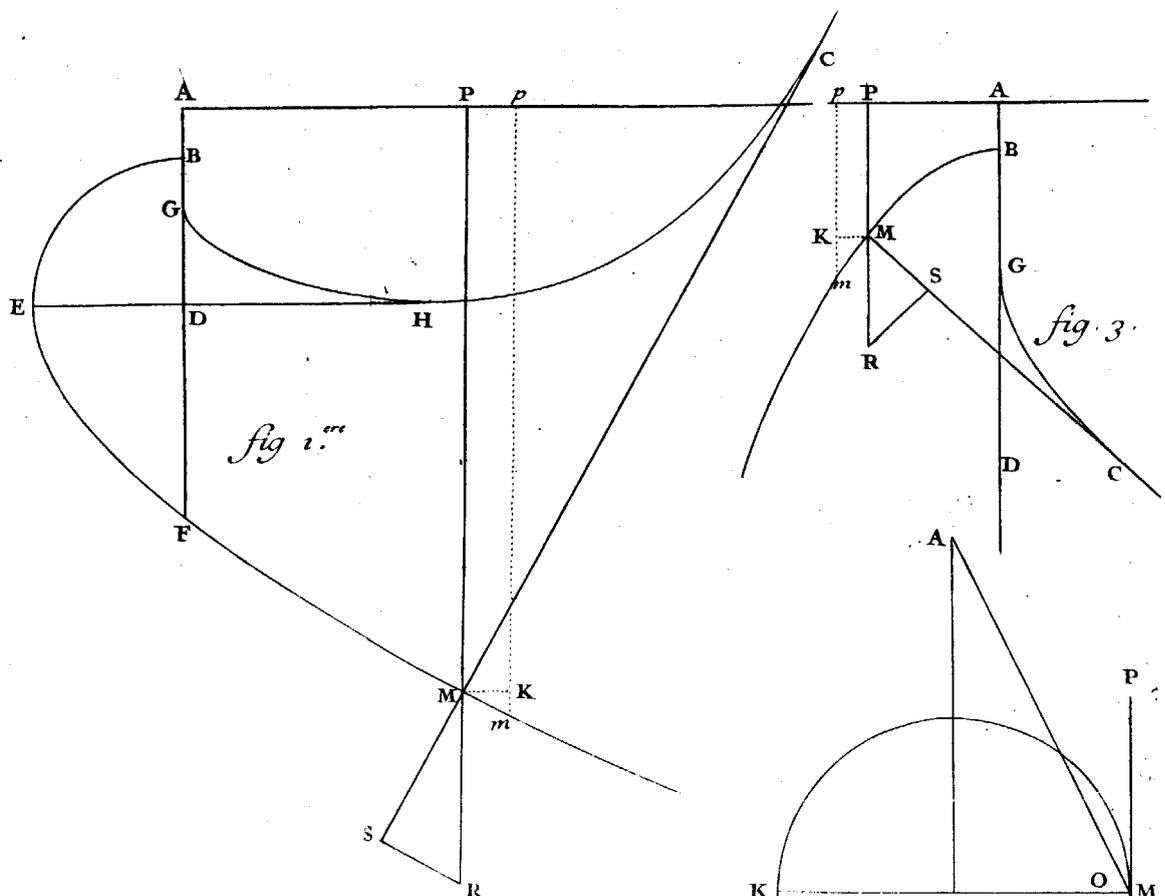
FIG. II.
& IV.

On démontre dans les Méchaniques que la force avec laquelle le Corps M agit selon la direction AM est à celle de sa pesanteur, avec laquelle il agit de haut en bas, comme AM est à AC , & qu'ainsi $\frac{AM \times M}{AC}$ exprime la force avec laquelle le Corps M tire le fil AM . Par la même raison $\frac{BN \times N}{BD}$ exprimera celle avec laquelle le Corps N tire le fil BN . Si donc l'on suppose que AC & BD soient égales entre elles, comme aussi les poids des Corps M, N , il s'enfuit que les forces avec lesquelles ces Corps tireront leurs fils, seront en même raison que les longueurs AM, BN de ces fils. C'est le Théorème 12.

PROPOSITION V.

FIG. V.

Si un Corps M attaché en C par le fil CM décrit, en tombant, le quart de cercle AMB terminé par la verticale CB & par l'horizontale CA ; il est clair par le Lemme (en menant MP parallele à CB) que sa force centrifuge est $\frac{2PM \times M}{CM}$, en quelque endroit que soit le point M . Si donc l'on suppose qu'il se trouve en B , la force centrifuge sera $2M$; puisqu'alors PM devient égale à CM ou CB : mais elle doit être augmentée de celle de son poids entier (puisque CB est une ligne verticale ou à plomb) pour avoir la force totale avec laquelle le Corps M étant parvenu de A en B tire le fil CB . Cette force sera donc triple de celle de sa pesanteur. C'est le Théorème 13.



PROPOSITION VI.

Trouver la Courbe AM , qui ait pour Axe la verticale AP , & dont la propriété soit telle que faisant mouvoir l'Axe autour de lui-même sur les pivots E, F , avec une force capable d'élever le poids M attaché au fil MC , qui entoure la développée BC ; le tems que le corps M emploie à faire son circuit autour de la verticale EF , soit toujours le même en quelque endroit de la Courbe AM qu'il se trouve.

Fig. VI.

Il est visible que la partie DM du fil MC décrit la surface d'un cone droit autour de l'Axe DP , de sorte que le fil DM peut être considéré comme attaché en D pendant que le corps M décrit la circonférence qui a pour rayon l'horizontale MP . Or afin que le tems qu'il emploie à parcourir cette circonférence soit toujours le même en quelque endroit de la Courbe AM que se puisse trouver le corps M , il faut selon le premier Corollaire de la troisième proposition, que la hauteur DP du cone soit par-tout égale à une ligne donnée a . D'où il est aisé de conclure que la ligne courbe cherchée AM est une parabole dont le paramètre est double de la ligne donnée a ; car l'on sçait que la partie DP de l'Axe comprise entre une perpendiculaire DM à la parabole & une appliquée MP à l'Axe, est toujours égale à la moitié du paramètre.



Solution d'un problème physico-Mathématique - M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL
Académie royale des sciences - Année 1700

PHYSIQUE, MATHÉMATIQUE
